

## NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

### A. Tóm tắt lý thuyết

**1. Đơn thức:** Là một biểu thức đại số chỉ gồm một số, một biến hoặc một tích giữa các số và các biến

**Ví dụ:**  $2; 3x; 4y^2; \dots$

**2. Đa thức:** Là một tổng của những đơn thức, mỗi đơn thức trong tổng được gọi là một hạng tử

**Ví dụ:**  $2x + 3y; 3x - 1; \dots$

**3. Tính chất phân phối giữa phép nhân và phép cộng, phép trừ**

$$A.(B \pm C) = A.B \pm A.C$$

**4. Chú ý: Các phép toán về lũy thừa**

a)  $a^m . a^n = a^{m+n}$

b)  $a^m : a^n = a^{m-n} (m \geq n)$

c)  $a^0 = 1 (a \neq 0)$

d)  $(a^m)^n = a^{m.n} (m, n \in \mathbb{N})$

**5. Quy tắc nhân đơn thức với đa thức:** Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau

Ta có:  $A(B + C) = AB + AC$  với  $A, B, C$  là các đơn thức

**Ví dụ:**  $2x(2x^3 - x^2 + 3) = 4x^4 - 2x^3 + 6x$

### B. Bài tập áp dụng và các dạng toán

#### Dạng 1: Làm phép tính nhân đơn thức với đa thức

**Cách giải:** Sử dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức và các phép toán liên quan đến lũy thừa

#### Bài 1: Thực hiện phép tính

a.  $A = 2x^2(5x^2 - x - 1)$

b.  $B = \frac{-4}{3}x^2y.(3xy - 2x^2 + xy^2)$

c.  $C = -3x^2y^3\left(\frac{2}{3}xyz - 7x^3y + 5x^2z\right)$

d.  $D = 4x^2y\left(-2x^3 + \frac{3}{4}y^2 - 7xy\right)$

e.  $E = \frac{3}{2}x^2y^2(4xy - y^3 + y^2)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 2x^2(5x^2 - x - 1) = 10x^4 - 2x^3 - 2x^2$

b) Ta có:  $B = \frac{-4}{3}x^2y(3xy - 2x^2 + xy^2) = -4x^3y^2 + \frac{8}{3}x^4y - \frac{4}{3}x^3y^3$

c) Ta có:  $C = -3x^2y^3\left(\frac{2}{3}xyz - 7x^3y + 5x^2z\right) = -2x^3y^4z + 21x^5y^4 - 15x^4y^3z$

d) Ta có:  $D = 4x^2y\left(-2x^3 + \frac{3}{4}y^2 - 7xy\right) = -8x^5y + 3x^2y^2 - 28x^3y^2$

e) Ta có:  $E = \frac{3}{2}x^2y^2(4xy - y^3 + y^2) = 6x^3y^3 - \frac{3}{2}x^2y^5 + \frac{3}{2}x^2y^4$

## Bài 2: Thực hiện phép tính

a.  $A = 2x^3y(2x^2 - 3y + 5yz)$

b.  $B = (-3x^3 + 6xy - 3x)\left(\frac{-1}{3}xy^3\right)$

c.  $C = \frac{-1}{3}a^2b^2\left(6a + \frac{2}{3}a^2 - b\right)$

d.  $D = \frac{3}{2}u^2v^2(4uv - v^3 + v^2)$

e.  $E = \frac{3}{2}x^2y^2(4xy - y^3 + y^2)$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = 2x^3y(2x^2 - 3y + 5yz) = 4x^5y - 6x^3y^2 + 10x^3y^2z$

b) Ta có:  $B = (-3x^3 + 6xy - 3x)\left(\frac{-1}{3}xy^3\right) = x^4y^3 - 2x^2y^4 + x^2y^3$

c) Ta có:  $C = \frac{-1}{3}a^2b^2(6a + \frac{2}{3}a^2 - b) = -2a^3b^2 - \frac{1}{3}a^4b^2 + \frac{1}{3}ab^3$

d) Ta có:  $D = \frac{3}{2}u^2v^2(4uv - v^3 + v^2) = 6u^3v^3 - \frac{3}{2}u^2v^5 + \frac{3}{2}u^2v^4$

## Bài 3: Nhân đơn thức $A$ với đơn thức $B$ , biết rằng:

a.  $A = (\frac{-1}{3}u^2v^3)^2; B = 27u^4 - \frac{1}{3}uv^2$

b.  $A = (3xy^2)^2; B = \frac{1}{9}x^3y + \frac{-1}{3}x^2 + 3y^3$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = (\frac{-1}{3}u^2v^3)^2; B = 27u^4 - \frac{1}{3}uv^2 \Rightarrow A.B = (\frac{-1}{3}u^2v^3)^2.(27u^4 - \frac{1}{3}uv^2) = \frac{1}{9}u^4v^6(27u^4 - \frac{1}{3}uv^2)$

$\Rightarrow A.B = \frac{1}{9}u^4v^6(27u^4 - \frac{1}{3}uv^2) = 3u^8v^6 - \frac{1}{27}u^5v^8$

b) Ta có:

$$A = (3xy^2)^2; B = \frac{1}{9}x^3y + \frac{-1}{3}x^2 + 3y^3 \Rightarrow A.B = 9x^2y^4 \cdot \left(\frac{1}{9}x^3y + \frac{-1}{3}x^2 + 3y^3\right) = x^5y^5 - 3x^4y^4 + 27x^2y^7$$

#### Bài 4:

Cho các đơn thức  $A = ax^2y, B = \frac{1}{2}a^3x^4y, C = \frac{-2}{9}a^2x^5y^2$ . Tính  $A.B.C$

#### Lời giải

$$\text{Ta có: } A.B.C = ax^2y \cdot \frac{1}{2}a^3x^4y \cdot \left(-\frac{2}{9}a^2x^5y^2\right) = a \cdot \frac{1}{2}a^3 \cdot \left(-\frac{2}{9}a^2\right) x^2 \cdot x^4 \cdot x^5 \cdot y \cdot y \cdot y^2 = -\frac{1}{9}a^6x^{11}y^4$$

$$\text{Vậy } A.B.C = -\frac{1}{9}a^6x^{11}y^4.$$

#### Bài 5:

Cho các đơn thức  $A = x^2y, B = 4x^4y^5, C = \frac{-2}{9}x^3y^7$

a) Tính  $A^2(B+C)$

b) Tính  $C(A+B)$

#### Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A^2(B+C) = (x^2y)^2 \left(4x^4y^5 - \frac{2}{9}x^3y^7\right) = x^4y^2 \cdot 4x^4y^5 - x^4y^2 \cdot \frac{2}{9}x^3y^7 = 4x^8y^7 - \frac{2}{9}x^7y^9$$

$$\text{Vậy } A^2(B+C) = 4x^8y^7 - \frac{2}{9}x^7y^9$$

$$\text{b) Ta có: } C(A+B) = -\frac{2}{9}x^3y^7(x^2y + 4x^4y^5) = -\frac{2}{9}x^3y^7 \cdot x^2y - \frac{2}{9}x^3y^7 \cdot 4x^4y^5 = -\frac{2}{9}x^5y^8 - \frac{8}{9}x^7y^{12}$$

$$\text{Vậy } C(A+B) = -\frac{2}{9}x^5y^8 - \frac{8}{9}x^7y^{12}.$$

## Dạng 2: Sử dụng phép nhân đơn thức với đa thức để rút gọn biểu thức cho trước

### Cách giải:

**Bước 1:** Sử dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức để phá ngoặc

**Bước 2:** Nhóm các đơn thức đồng dạng và rút gọn biểu thức đã cho

### Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = \frac{1}{2}xy(x^5 - y^3) - x^2y(\frac{1}{4}x^4 - y^3)$

b)  $B = x^3y^4(x^2 - 2y^3) - 2x^3y^3(x^4 - y^4)$

c)  $C = (2x)^2(x^3 - x) - 2x^2(x^3 - x + 1) - (2x - 5x^2)x$

d)  $D = \frac{-1}{3}y^2(6y - 3) - y(y + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(y - 8)$

e)  $E = 3x^n(6x^{n-3} + 1) - 2x^n(9x^{n-3} - 1) (n \in \mathbb{N})$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = \frac{1}{2}xy(x^5 - y^3) - x^2y(\frac{1}{4}x^4 - y^3) = \frac{1}{2}x^6y - \frac{1}{2}xy^4 - \frac{1}{4}x^6y + x^2y^4 = \frac{1}{2}x^6y - \frac{1}{2}xy^4 + x^2y^4$

b) Ta có:  $B = x^3y^4(x^2 - 2y^3) - 2x^3y^3(x^4 - y^4) = x^5y^4 - 2x^7y^3$

c) Ta có:  $C = (2x)^2(x^3 - x) - 2x^2(x^3 - x + 1) - (2x - 5x^2)x = 2x^5 + 3x^3 - 4x^2$

d) Ta có:  $D = \frac{-1}{3}y^2(6y - 3) - y(y + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(y - 8) = -2y^3 - 4$

e) Ta có:  $E = 3x^n(6x^{n-3} + 1) - 2x^n(9x^{n-3} - 1) (n \in \mathbb{N}) = 5x^n$

### Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $E = t(t - u) - u(t - u)$

b)  $F = t(-2t^3 + 1) + t^2(2t^2 + 1) - t$

c)  $G = (-2t)^2(t + 2) - 8t^2(1 - t) - 4t^3$

### Lời giải

a) Ta có:  $E = t(t - u) - u(t - u) \Rightarrow E = t^2 - tu - tu + u^2 \Rightarrow E = t^2 - 2tu + u^2$

b) Ta có:  $F = t(-2t^3 + 1) + t^2(2t^2 + 1) - t \Rightarrow F = -2t^4 + t + 2t^4 + t^2 - t \Rightarrow F = 2t^2 - t$

c) Ta có:  $G = (-2t)^2(t + 2) - 8t^2(1 - t) - 4t^3 \Rightarrow G = -2t^3 - 4t^2 - 8t^2 + 8t^3 \Rightarrow G = 6t^3 - 12t^2$

### Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = -30.5^n - 5^{n+2} + 11.5^{n+1}$

b)  $B = \frac{3}{229} \left( 2 + \frac{1}{433} \right) - \frac{1}{229} \cdot \frac{432}{433} - \frac{4}{229.433}$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = -30.5^n - 5^{n+2} + 11.5^{n+1} = -30.5^n - 25.5^n + 55.5^n = 5^n(-30 - 25 + 55) = 0$

b) Ta có:  $B = \frac{3}{229} \left( 2 + \frac{1}{433} \right) - \frac{1}{229} \cdot \frac{432}{433} - \frac{4}{229.433}$

Đặt  $\frac{1}{229} = m; \frac{1}{433} = n$

$$\Rightarrow \frac{432}{433} = \frac{433-1}{433} = 1 - \frac{1}{433} = 1 - n \Rightarrow B = 3m(2+n) - m(1-n) - 4mn = 5m \Rightarrow B = 5 \cdot \frac{1}{229} = \frac{5}{229}$$

### Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức cho trước

#### Cách giải:

**Bước 1:** Rút gọn biểu thức đã cho

**Bước 2:** Thay các giá trị của biến vào biểu thức sau khi đã rút gọn ở bước 1

#### Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = 3x(x^2 - 2x + 3) - x^2(3x - 2) + 5(x^2 - x)$  với  $x = -5$

b)  $B = 2x(\frac{1}{2}x^2 + y) - x(x^2 + y) + xy(x^3 - 1)$  với  $x = 10; y = -\frac{1}{10}$

c)  $C = x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 10x + 10$  với  $x = -9$

d)  $D = 3a^2(a^2 - 5) + a(-3a^3 + 4a) + 6a^2$  với  $a = -5$

e)  $E = 5x(x^2 - 3) + x^2(7 - 5x) - 7x^2$  với  $x = -5$

f)  $F = 3x(5x^2 - 2) - 5x^2(3x + 7) - \frac{5}{2}(2 - 14x^2)$  với  $|x| = \frac{1}{2}$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 3x(x^2 - 2x + 3) - x^2(3x - 2) + 5(x^2 - x) \Rightarrow A = x^2 + 4x$

Thay  $x = 5$  vào biểu thức  $A$  ta được:  $A = 25 + 20 = 45$

Vậy  $A = 45$

b) Ta có:  $B = 2x(\frac{1}{2}x^2 + y) - x(x^2 + y) + xy(x^3 - 1) \Rightarrow B = xy + xy(x^3 - 1) = x^4y$

Thay  $x = 10; y = -\frac{1}{10}$  vào biểu thức  $B$  ta được:  $B = 10 \cdot \frac{-1}{10} = -1$

Vậy  $B = -1$

c) Ta có:  $C = x^4 + 9x^3 + x^3 + 9x^2 + x^2 + 9x + x + 9 + 1 = (x + 9)(x^3 + x^2 + x + 1) + 1$

Thay  $x = -9$  vào biểu thức  $C$  ta được:  $C = 0 + 1 = 1$

Vậy  $C = 1$

d) Ta có:  $D = 3a^2(a^2 - 5) + a(-3a^3 + 4a) + 6a^2 = -5a^2$

Thay  $a = -5$  vào biểu thức  $D$  ta được:  $D = -125$

Vậy  $D = -125$

e) Ta có:  $E = 5x(x^2 - 3) + x^2(7 - 5x) - 7x^2 \Rightarrow E = 5x^3 - 15x + 7x^2 - 5x^3 - 7x^2 \Rightarrow E = -15x$

Thay  $x = -5$  vào biểu thức  $E$  ta được:  $E = -15 \cdot (-5) = 75$

Vậy  $E = 75$

f) Ta có:  $F = 3x(5x^2 - 2) - 5x^2(3x + 7) - \frac{5}{2}(2 - 14x^2) \Rightarrow F = -6x - 5$

Với  $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = -8 \\ F = -2 \end{cases}$

## Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = x^3 - 30x^2 - 31x + 1$  với  $x = 31$

b)  $B = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$  với  $x = 10; y = -\frac{1}{10}$

c)  $C = x(x^2 - y) + y(y^2 + x)$  với  $x = -1; y = -1$

d)  $D = x^2(x - y) - y(y^2 - x^2)$  với  $x = \frac{1}{2}; y = \frac{-1}{2}$

### Lời giải

a) Thay  $x = 31$  vào biểu thức  $A$ , ta được:  $A = 31^3 - 30 \cdot 31^2 - 31 \cdot 31 + 1 \rightarrow A = 1$

b) Ta có:  $15 = x + 1; 16 = x + 2; 29 = 2x + 1; 13 = x - 1 \Rightarrow B = -x \Rightarrow B = -14$

c) Ta có:  $C = x(x^2 - y) + y(y^2 + x) \Rightarrow C = x^3 - xy + y^3 + xy \Rightarrow C = x^3 + y^3 \Rightarrow C = (-1)^3 + (-1)^3 \Rightarrow C = 0$

d) Ta có:  $D = x^2(x - y) - y(y^2 - x^2) \Rightarrow D = x^3 - x^2y - y^3 + x^2y \Rightarrow D = x^3 - y^3$

$\Rightarrow D = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1}{2}\right)^3 \Rightarrow D = \frac{1}{4}$

#### Dạng 4: Tìm $x$ , biết $x$ thỏa mãn điều kiện cho trước

##### Cách giải :

- Sử dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức để phá dấu ngoặc
- Nhóm các đơn thức đồng dạng và rút gọn biểu thức ở hai vế để tìm  $x$

##### Bài 1: Tìm $x$ , biết

a)  $2x(x-5) - x(2x+3) = 26$

b)  $3(2x-1) - 5(x-3) + 6(3x-4) = 24$

c)  $2x^2 + 3(x^2 - 1) = 5x(x+1)$

d)  $3x(x+1) - 2x(x+1) = -x - 1$

##### Lời giải

a) Ta có:  $2x(x-5) - x(2x+3) = 26 \Leftrightarrow -13x = 26 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow S = \{-2\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-2\}$

b) Ta có:  $3(2x-1) - 5(x-3) + 6(3x-4) = 24 \Leftrightarrow 19x = 36 \Leftrightarrow x = \frac{36}{19}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{36}{19}\right\}$

c) Ta có:  $2x^2 + 3(x^2 - 1) = 5x(x+1) \Leftrightarrow -3 = 5x \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$

d) Ta có:  $3x(x+1) - 2x(x+1) = -x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-1\}$

##### Bài 2: Tìm $x$ , biết

a)  $5x - 3\{4x - 2[4x - 3(5x - 2)]\} = 182$

b)  $4(18 - 5x) - 12(13x - 7) = 15(2x - 16) - 6(x + 14)$

c)  $x(x^2 + 4x - 4) - 8\left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3\right) = 16$

a) Ta có:  $5x - 3\{4x - 2[4x - 3(5x - 2)]\} = 182 \Leftrightarrow -73x + 36 = 182 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-2\}$



c) Ta có:  $x(x^2 + 4x - 4) - 8\left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3\right) = 16 \Leftrightarrow 8x + 24 = 16 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-1\}$

### Bài 3: Tìm $x$ , biết

a)  $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11$

b)  $2x(6x - 2x^2) + 3x^2(x - 4) = 8$

c)  $2(x^3 - 1) - 2x^2(x + 2x^4) + (4x^5 + 4)x = 6$

d)  $(2x)^2(4x - 2) - (x^3 - 8x^2) = 15$

### Lời giải

a) Ta có:  $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11 \Rightarrow 10x - 16 - 12x + 15 = 12x - 16 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{2}{7}\right\}$

b) Ta có:  $2x(6x - 2x^2) + 3x^2(x - 4) = 8 \Rightarrow 12x^2 - 4x^3 + 3x^3 - 12x^2 = 8 \Rightarrow -x^3 = 8 \Rightarrow x = -2$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-2\}$

c) Ta có:  $2(x^3 - 1) - 2x^2(x + 2x^4) + (4x^5 + 4)x = 6 \Rightarrow 2x^3 - 2 - 2x^3 - 4x^6 + 4x^6 + 4x = 6 \Rightarrow 4 = 8 \Rightarrow x = 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{2\}$

### Dạng 5: Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến

**Cách giải:** Rút gọn biểu thức đã cho và chứng tỏ kết quả đó không phụ thuộc vào biến

#### Bài 1: Chứng tỏ rằng giá trị của mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

- a)  $A = 2(x^2 + 2x) - x^2(x + 2) + x^3 - 4x + 3$   
b)  $B = 2y(y^2 + y + 1) - 2y^2(y + 1) - 2(y + 10)$   
c)  $D = x(x^2 + x + 1) - x^2(x + 1) - x + 5$   
d)  $E = x(2x - 3) + 2x^2(x - 2) - 2x(x^2 - x + 1) + 5(x - 1)$

#### Lời giải

- a) Ta có:  $A = 2(x^2 + 2x) - x^2(x + 2) + x^3 - 4x + 3 \Rightarrow A = 3 \Rightarrow \text{đpcm}$   
b) Ta có:  $B = 2y(y^2 + y + 1) - 2y^2(y + 1) - 2(y + 10) \Rightarrow B = -20 \Rightarrow \text{đpcm}$   
d) Ta có:  $E = x(2x - 3) + 2x^2(x - 2) - 2x(x^2 - x + 1) + 5(x - 1) = \dots - 5 \Rightarrow \text{đpcm}$

#### Bài 2:

Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức  $A = 3m\left(\frac{2}{3}m^2 - 3m^4\right) + (3m)^2(m^3 - 1) + (-2m + 9)m^2 - 12$  không phụ thuộc vào giá trị của biến m

#### Lời giải

Ta có:  $A = 3m\left(\frac{2}{3}m^2 - 3m^4\right) + (3m)^2(m^3 - 1) + (-2m + 9)m^2 - 12 = -12$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào tham số m

#### Bài 1:

Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức  $A = 3m\left(\frac{2}{3}m^2 - 3m^4\right) + (3m)^2(m^3 - 1) + (-2m + 9)m^2 - 12$  không phụ thuộc vào giá trị của biến

- a)  $A = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + x^3 - x + 3$   
b)  $B = x(2x^2 - 4x + 8) + 12x^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}x\right) - 8x + 9$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = x(2x+1) - x^2(x+2) + x^3 - x + 3 \Rightarrow A = 2x^2 + x - x^3 + 2x^2 + x^3 - x + 3 \Rightarrow A = 3 \Rightarrow$  đpcm

b)  $B = x(2x^2 - 4x + 8) + 12x^2(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}x) - 8x + 9 \Rightarrow B = 2x^3 - 4x^2 + 8x + 4x^2 - 2x^3 - 8x + 9 \Rightarrow B = 9 \Rightarrow$  đpcm

### Bài 3:

Cho biểu thức  $B = t(2t^3 + t + 2) - 2t^2(t^2 + 1) + t^2 - 2t + 1$ . Chứng tỏ rằng giá trị của  $B$  không phụ thuộc vào giá trị của  $t$

### Lời giải

Ta có:  $B = t(2t^3 + t + 2) - 2t^2(t^2 + 1) + t^2 - 2t + 1 = 1$

Vậy giá trị của  $B$  không phụ thuộc vào giá trị của  $t$ .

## Dạng 6: Các bài toán chứng minh

**Cách giải:** Dựa vào dấu hiệu chia hết cho 2, 3, 5, 9,... và các phép toán về phép chia số nguyên

### Bài 1:

**Chứng minh rằng:**  $A = n(3n-1) - 3n(n-2) : 5, \forall n$

### Lời giải

Ta có:  $A = n(3n-1) - 3n(n-2) : 5, \forall n$

$$\Rightarrow A = 3n^2 - n - 3n^2 + 6n = 5n : 5, \forall n.$$

### Bài 2:

**Cho**  $a = \underbrace{11\dots1}_{31\text{chuso}}; b = \underbrace{1111.11}_{38\text{chuso}}$ . **Chứng minh rằng:**  $(ab-2) : 3$

### Lời giải

Ta có:  $a$  chia cho 3 dư 1,  $b$  chia cho 3 dư 2

$$\text{Đặt } a = 3m + 1, b = 3n + 2$$

$$ab - 2 = (3m + 1)(3n + 2) - 2 = 9mn + 6m + 3n = 3(3mn + 2m + n) : 3 \text{ (đpcm)}$$

### Bài 3:

**Cho**  $A = 5x + 2y$  và  $B = 9x + 7y$  với  $x, y$  là những số nguyên. **Chứng minh rằng nếu**  $A$  **chia hết cho 17 thì**  $B$  **chia hết cho 17**

### Lời giải

**Cách 1:** Khử biến  $y$

$$\text{Xét biểu thức } 7A - 2B = 7(5x + 2y) - 2(9x + 7y) = 35x + 14y - 18x - 14y = 17x : 17$$

Ta lại có 2 và 7 là hai số nguyên tố cùng nhau nên  $B : 17$

**Cách 2:** Khử biến  $x$

$$\text{Xét biểu thức } 9A - 5B = 9(5x + 2y) - 5(9x + 7y) = 55x + 18y - 45x - 35y = -17y : 17$$

$$\text{Ta có: } (9A - 5B) : 17, \text{ mà } 9A : 17 \Rightarrow 5B : 17$$

Ta có 5 và 17 là hai số nguyên tố cùng nhau nên  $B : 17$

**Cách 3:** Xét biểu thức

$$5A + B = 5(5x + 2y) + (9x + 7y) = 25x + 10y + 9x + 7y = (34x + 17y) : 17$$

Ta có:  $(5A + B) : 17$ , mà  $5A : 17 \Rightarrow B : 17$

#### Bài 4:

a) Cho biểu thức  $A = x(2x - 3) - 2x(x + 1)$ . Chứng minh rằng biểu thức  $A$  chia hết cho 5 với mọi số nguyên  $x$

b) Cho biểu thức  $B = (3x - 4y)x - (y + 3x)x$ . Chứng minh rằng biểu thức  $B$  luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên  $x, y$

c) Cho biểu thức  $C = x(3x - 4) - 3x(x - 5)$ . Chứng minh rằng biểu thức  $C$  luôn chia hết cho 11 với mọi số nguyên  $x$

d) Cho biểu thức  $D = xy(3 + 4x) - 4y(x^2 - x)$ . Chứng minh rằng biểu thức  $D$  luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên  $x, y$

e) Cho biểu thức  $P = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}$ . Chứng minh rằng biểu thức  $P$  luôn chia hết cho 7

#### Lời giải

a) Theo đề bài ta có:  $A = x(2x - 3) - 2x(x + 1) = 2x^2 - 3x - 2x^2 - 2x = -5x$

Vì  $-5x : 5 = -x$  với mọi số nguyên  $x \Rightarrow A$  luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên  $x$

b) Theo đề bài ta có:  $B = (3x - 4y)x - (y + 3x)x = 3x^2 - 4yx - yx - 3x^2 = -5xy$

Vì  $-5xy : 5 = -xy$  với mọi số nguyên  $x, y \Rightarrow B$  luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên  $x, y$

c) Theo đề bài ta có:  $C = x(3x - 4) - 3x(x - 5) = 3x^2 - 4x - 3x^2 + 15x = 11x$

Vì  $11x : 11 = x$  với mọi số nguyên  $x \Rightarrow C$  luôn chia hết cho 11 với mọi số nguyên  $x$

d) Theo đề bài ta có:  $D = xy(3 + 4x) - 4y(x^2 - x) = 3xy + 4x^2y - 4yx^2 + 4xy = 7xy$

Vì  $7xy : 7 = xy$  với mọi số nguyên  $x, y \Rightarrow D$  luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên  $x, y$

e) Theo đề bài ta có:  $P = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} = 2^{10} + 2 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{10} = 7 \cdot 2^{10}$

Vì  $7 \cdot 2^{10} : 7 = 2^{10} \Rightarrow P : 7$  (đpcm)

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Tích  $(-5x)^2 y^2 \cdot \frac{1}{5} xy$  bằng:

a.  $5x^3 y^3$

b.  $-5x^3 y^3$

c.  $-x^3 y^3$

d.  $x^3 y^2$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $(-5x)^2 y^2 \cdot \frac{1}{5} xy = 25 \cdot \frac{1}{5} \cdot (x^2 \cdot x)(y^2 \cdot y) = 5x^3 y^3$

**Câu 2:** Giá trị của biểu thức  $P = -2x^2 y(xy + y^2)$  tại  $x = -1; y = 2$  là:

a. 8

b. -8

c. 6

d. -6

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

Ta có:  $P = -2x^2 y(xy + y^2) = -2 \cdot (-1)^2 \cdot 2[(-1) \cdot 2 + 2^2] = -8$

**Câu 3:** Kết quả của phép tính  $(ax^2 + bx - c) \cdot 2a^2 x$  bằng

a.  $2a^4 x^3 + 2a^2 bx^2 - 2a^2 cx$

b.  $2a^3 x^3 + bx - c$

c.  $2a^4 x^3 + 2a^2 bx^2 - a^2 cx$

d.  $2a^3 x^3 + 2a^2 bx^2 - 2a^2 cx$

**Lời giải**

**Chọn đáp án D**

**Giải thích:**

Ta có:  $(ax^2 + bx - c) \cdot 2a^2 x = 2a^3 x^3 + 2a^2 bx^2 - 2a^2 cx$

**Câu 4:** Tích  $4a^3 b \left( 3ab - b + \frac{1}{4} \right)$  có kết quả bằng

a.  $12a^4 b^2 - 4a^3 b + a^3 b$

b.  $12a^4 b^2 - 4a^3 b^2 + \frac{1}{4} a^3 b$

c.  $12a^3b^2 - 4a^3b^2 + a^3b$

d.  $12a^4b^2 - 4a^3b^2 + a^3b$

**Lời giải****Chọn đáp án D****Giải thích:**

Ta có:  $4a^3b \left( 3ab - b + \frac{1}{4} \right) = 12a^4b^2 - 4a^3b^2 + a^3b$

**Câu 5: Chọn câu sai**A. Giá trị của biểu thức  $ax(ax+y)$  tại  $x=1, y=0$  là  $a^2$ B. Giá trị của biểu thức  $ay^2(ax+y)$  tại  $x=0, y=1$  là  $(a+1)^2$ C. Giá trị của biểu thức  $-xy(x-y)$  tại  $x=-5, y=-5$  bằng 0D. Giá trị của biểu thức  $xy(x+y)$  tại  $x=5, y=-5$  bằng 0**Lời giải****Chọn đáp án B****Giải thích:**Thay  $x=0, y=1$  vào biểu thức  $ay^2(ax+y)$  ta được:  $a.1^2(a.0+1) = a.1 = a$  nên đáp án B sai**Câu 6: Cho  $4(18-5x)-12(3x-7)=15(2x-16)-6(x+14)$ . Kết quả của  $x$  bằng**

A. 8

B. -8

C. 6

D. -6

**Lời giải****Chọn đáp án C****Giải thích:**

Ta có:  $4(18-5x)-12(3x-7)=15(2x-16)-6(x+14) \Rightarrow 80x=480 \Rightarrow x=6$

Vậy  $x=6$ **Câu 7: Cho biểu thức  $P=2x(x^2-4)+x^2(x^2-9)$ . Hãy chọn câu đúng**A. Giá trị của biểu thức  $P$  tại  $x=0$  là 1B. Giá trị của biểu thức  $P$  tại  $x=2$  là -20C. Giá trị của biểu thức  $P$  tại  $x=-2$  là 30

D. Giá trị của biểu thức  $P$  tại  $x = -9$  là 0

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

Thay  $x = 2$  vào  $P$  ta được:  $P = 2.2.(2^2 - 4) + 2^2(2^2 - 9) = 4.0 + 4.(-5) = -20 \Rightarrow B$  đúng.

**Câu 8:** Cho biểu thức  $C = x(y + z) - y(z + x) - z(x - y)$ . Hãy chọn khẳng định đúng

A. Biểu thức  $C$  không phụ thuộc vào  $x, y, z$

B. Biểu thức  $C$  phụ thuộc vào  $x, y, z$

C. Biểu thức  $C$  chỉ phụ thuộc vào  $y$

D. Biểu thức  $C$  chỉ phụ thuộc vào  $z$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $C = x(y + z) - y(z + x) - z(x - y) = xy + xz - yz - xy - xz + xy = 0$

Nên  $C$  không phụ thuộc vào  $x, y, z$

**Câu 9:** Biểu thức  $D = x(x^{2n-1} + y) - y(x + y^{2n-1}) + y^{2n} - x^{2n} + 5$ .  $D$  có giá trị là

A.  $2y^{2n}$

B.  $-5$

C.  $x^{2n}$

D.  $5$

**Lời giải**

**Chọn đáp án D**

**Giải thích:**

Ta có:  $D = x(x^{2n-1} + y) - y(x + y^{2n-1}) + y^{2n} - x^{2n} + 5 = x^{2n} + xy - xy - y^{2n} + y^{2n} - x^{2n} + 5 = 5$

Vậy  $D = 5$

**Câu 10:** Gọi  $x$  là giá trị thỏa mãn  $5(3x + 5) - 4(2x - 3) = 5x + 3(2x - 12) + 1$ . Khi đó

A.  $x > 18$

B.  $x < 17$

C.  $17 < x < 19$

D.  $18 < x < 20$



### Lời giải

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

$$\text{Ta có: } 5(3x+5) - 4(2x-3) = 5x + 3(2x-12) + 1 \Rightarrow 7x + 37 = 11x - 35 \Leftrightarrow 4x = 72 \Leftrightarrow x = 18$$

Vậy  $x = 18$

Suy ra  $17 < x < 19$  nên chọn đáp án C

**Câu 11:** Biết rằng  $x(2-x) + x(x-1) = 2$ . Khi đó  $x$  nhận giá trị nào sau đây

A.  $x = 1$

B.  $x = 2$

C.  $x = 3$

D.  $x = 4$

### Lời giải

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

$$\text{Ta có: } VT = x(2-x) + x(x-1) = 2x - x^2 + x^2 - x = x = 2 = VP$$

**Câu 12:** Cho  $x = 7$ . Giá trị của biểu thức  $P = x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + \dots - 8x^2 + 8x - 5$  là:

A.  $P = 2$

B.  $P = 1$

C.  $P = -1$

D.  $P = 4$

### Lời giải

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

$$\text{Ta có: } P = x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + \dots - 8x^2 + 8x - 5 = x^{15} - (x+1)x^{14} + (x+1)x^{13} - \dots + (x+1)x - 5$$

$$= x^{15} - x^{15} - x^{14} + x^{14} + x^{13} - \dots + x^2 + x - 1 = x - 5 = 7 - 5 = 2$$

**Câu 13:** Rút gọn biểu thức  $P = 10^{n+1} - 6 \cdot 10^n$  ta được:

A.  $10^n$

B.  $-4 \cdot 10^n$

C.  $4 \cdot 10^n$

D.  $5 \cdot 10^n$

### Lời giải

Chọn đáp án C

**Giải thích:**

Ta có:  $P = 10^{n+1} - 6 \cdot 10^n = 10 \cdot 10^n - 6 \cdot 10^n = 4 \cdot 10^n$

**Câu 14:** Thực hiện phép nhân  $(-x)(x + x^2 - 1)$  ta thu được kết quả nào sau đây

A.  $-x^2 + x^3 + x$

B.  $-x^2 - x^3 - x$

C.  $-x^2 - x^3 + x$

D.  $x^3 - x - 1$

### Lời giải

Chọn đáp án C

**Giải thích:**

Ta có:  $(-x)(x + x^2 - 1) = -x \cdot x - x \cdot x^2 + x = -x^2 - x^3 + x$

**Câu 15:** Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng  $(2x + 3y)$  mét và chiều rộng bằng  $7y$  mét. Diện tích mảnh vườn trên được cho bởi công thức nào sau đây

A.  $14xy + 21y$

B.  $14xy + 21y^3$

C.  $14xy + 21y^2$

D.  $21xy + 14y^2$

### Lời giải

Chọn đáp án C

**Giải thích:**

Ta có: Diện tích hình chữ nhật là  $S = (2x + 3y) \cdot 7y = 2x \cdot 7y + 3y \cdot 7y = 14xy + 21y^2$

**Câu 16:** Biết rằng  $2x^2(6x - 1) + 3x\left(\frac{2}{3}x - 4x^2 - 1\right) = 3$ . Khi đó  $x$  nhận giá trị nào sau đây

A.  $x = 1$

B.  $x = -1$

C.  $x = 2$

D.  $x = 0$

### Lời giải

Chọn đáp án B

**Giải thích:**

Ta có:  $2x^2(6x-1)+3x\left(\frac{2}{3}x-4x^2-1\right)=2x^2.6x-2x^2+2x^2-12x^3-3x=-3x\Rightarrow-3x=3\Leftrightarrow x=-1$

**Câu 17:** Cho biểu thức  $M=\frac{3}{229}\left(2+\frac{1}{433}\right)-\frac{1}{229}\cdot\frac{432}{433}-\frac{4}{229.433}$ . Bằng cách đặt  $a=\frac{1}{229}, b=\frac{1}{433}$  và thu gọn biểu thức  $M$  ta được:

A.  $M=4a$

B.  $M=a+2b$

C.  $M=5a$

D.  $M=2a+3b$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } M &= \frac{3}{229}\left(2+\frac{1}{433}\right)-\frac{1}{229}\cdot\frac{432}{433}-\frac{4}{229.433}=3\cdot\frac{1}{229}\left(2+\frac{1}{433}\right)-\frac{1}{229}\cdot\left(1-\frac{1}{433}\right)-4\cdot\frac{1}{229}\cdot\frac{1}{433} \\ &= 3a(2+b)-a(1-b)-4ab=6a+3ab-a+ab=5a\end{aligned}$$

**Câu 18:** Rút gọn biểu thức  $P=5^{n+2}-29.5^n$  ta thu được kết quả nào sau đây

A.  $P=-4.5^n$

B.  $P=-4.5^{n+1}$

C.  $P=5^n$

D.  $P=5^{n+4}$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

$$\text{Ta có: } P=5^{n+2}-29.5^n=25.5^n-29.5^n=-4.5^n$$

**Câu 19:** Thực hiện phép nhân  $xy(x^3-y^2)$  ta thu được kết quả nào sau đây

A.  $x^4y+xy^4$

B.  $x^4y-xy^3$

C.  $x^4y+xy^3$

D.  $x^2y+2y^4$

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

$$\text{Ta có: } xy(x^3-y^2)=x^4y-xy^3$$

**Câu 20:** Biết rằng  $x_0$  thỏa mãn đẳng thức  $2005(x^2 - x) + x(2006 - 2005x) = 2$ . Tính giá trị của

biểu thức  $P = x_0 + \frac{4}{x_0}$ ?

A.  $P = 4$

B.  $P = 2$

C.  $P = 6$

D.  $P = 10$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $2005(x^2 - x) + x(2006 - 2005x) = 2005x^2 - 2005x + 2006x - 2005x^2 = x$

Do đó  $x = 2$ . Giá trị của biểu thức  $P$  là:  $P = 2 + \frac{4}{2} = 4$

**Câu 21:** Tính giá trị của biểu thức  $P = x^{10} - 13x^9 + 13x^8 - 13x^7 + \dots - 13x + 10$

A.  $P = -2$

B.  $P = 2$

C.  $P = 4$

D.  $P = 0$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $P = x^{10} - 13x^9 + 13x^8 - 13x^7 + \dots - 13x + 10 = x^{10} - 12x^9 - x^9 + 12x^8 + x^8 - 12x^7 - x^7$   
 $+ 12x^6 + \dots = x^2 - 12x - x + 10 = x^9(x - 12) - x^8(x - 12) + x^7(x - 12) - \dots + x(x - 12) - x + 10$

Thay  $x = 12$  vào  $P$  ta được:  $P = 12^9(12 - 12) - 12^8(12 - 12) + 12^7(12 - 12) - \dots + 12(12 - 12) - 12 + 10 = -2$

Vậy  $P = -2$

## BÀI TẬP VỀ NHÀ

### Bài 1: Thực hiện phép tính

a)  $A = 10xy(-2x^2y^3 + \frac{3}{8}y^4 - \frac{2}{5}xy)$

b)  $B = \frac{-2}{3}x(-x^4y^2 - 2x^2 - 10xy^2)$

### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $A = 10xy(-2x^2y^3 + \frac{3}{8}y^4 - \frac{2}{5}xy) \Rightarrow A = -20x^3y^4 + \frac{15}{4}xy^5 - 4x^2y^2$

b) Ta có:  $B = \frac{-2}{3}x(-x^4y^2 - 2x^2 - 10xy^2) \Rightarrow B = \frac{2}{3}x^5y^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{20}{3}x^2y^2$

### Bài 2: Thực hiện phép tính

a)  $-2xy^2(x^3y - 2x^2y^2 + 5xy^3)$

b)  $(-2x)(x^3 - 3x^2 - x + 1)$

c)  $\left(-10x^3 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{3}z\right)\left(-\frac{1}{2}xy\right)$

d)  $3x^2(2x^3 - x + 5)$

e)  $(4xy + 3y - 5x)x^2y$

f)  $(3x^2y - 6xy + 9x)\left(-\frac{4}{3}xy\right)$

### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $-2xy^2(x^3y - 2x^2y^2 + 5xy^3) = -2x^5y^3 + 4x^3y^4 - 10x^2y^5$

b) Ta có:  $-2x(x^3 - 3x^2 - x + 1) = -2x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 2x$

c) Ta có:  $\left(-10x^3 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{3}z\right)\left(-\frac{1}{2}xy\right) = 5x^4y - 2xy^2 + \frac{1}{5}xyz$

d) Ta có:  $3x^2(2x^3 - x + 5) = 6x^5 - 3x^3 + 15x^2$

e) Ta có:  $(4xy + 3y - 5x)x^2y = 4x^3y^2 + 3x^2y^2 - 5x^3y$

f) Ta có:  $(3x^2y - 6xy + 9x)\left(-\frac{4}{3}xy\right) = -4x^3y^2 + 8x^2y^2 - 12x^2y$

### Bài 3: Cho các đơn thức $A = ax^2y, B = \frac{1}{2}a^3x^4y, C = \frac{-2}{9}a^2x^5y^2$ . Tính

a)  $A.B.C$

b)  $A^2.BC$

c)  $A.B^2.C^2$

d)  $A.(B+C)$

### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $A.B.C = ax^2y \cdot \frac{1}{2}a^3x^4y \cdot \left(\frac{-2}{9}a^2x^5y^2\right) = -\frac{1}{9}a^6x^{11}y^4$

b) Ta có:  $A^2.B.C = (ax^2y)^2 \cdot \frac{1}{2}a^3x^4y \cdot \left(\frac{-2}{9}a^2x^5y^2\right) = a^2 \cdot \frac{1}{2}a^3 \cdot \left(\frac{-2}{9}a^2\right) \cdot x^4 \cdot x^4x^5 \cdot y^2 \cdot y \cdot y^2 = -\frac{1}{9}a^7x^{13}y^5$

c) Ta có:  $A.B^2.C^2 = ax^2y \cdot \left(\frac{1}{2}a^3x^4y\right)^2 \cdot \left(\frac{-2}{9}a^2x^5y^2\right)^2 = -\frac{2}{729}a^{13}x^{25}y^9$

d) Ta có:  $A.(B+C) = ax^2y \cdot \left(\frac{1}{2}a^3x^4y + \frac{-2}{9}a^2x^5y^2\right) = \frac{1}{2}a^4x^6y^2 - \frac{2}{9}a^3x^7y^3$

**Bài 4:** Cho các đơn thức  $A = x^2y, B = 4x^4y^5, C = \frac{-2}{9}x^3y^7$ . Tính

a)  $A^2(B+C)$

b)  $B(A+C)$

c)  $C(A+B)$

d)  $B^2(A+C)$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  $A^2(B+C) = (x^2y)^2 \left(4x^4y^5 - \frac{2}{9}x^3y^7\right) = x^4y^2 \cdot 4x^4y^5 - x^4y^2 \cdot \frac{2}{9}x^3y^7 = 4x^8y^7 - \frac{2}{9}x^7y^9$

b) Ta có:  $B(A+C) = 4x^4y^5 \left(x^2y - \frac{2}{9}x^3y^7\right) = 4x^6y^6 - \frac{8}{9}x^7y^{12}$

c) Ta có:  $C(A+C) = -\frac{2}{9}x^3y^7 (x^2y + 4x^4y^5) = -\frac{2}{9}x^5y^8 - \frac{8}{9}x^7y^{12}$

d) Ta có:  $B^2(A+C) = (4x^4y^5)^2 \left(x^2y - \frac{2}{9}x^3y^7\right) = 16x^{10}y^{11} - \frac{32}{9}x^{11}y^{17}$

**Bài 5:** Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến  $x$

a)  $A = x(2018 - x) + x(x - 2018)$

b)  $B = x(2 - x) + x(x - 2)$

c)  $C = x^3(x - 1) + x^2(x - x^2)$

d)  $D = x^n(1 - x) + x(x^n - x^{n-1})$

e)  $E = x^3(x - 1) + x^2(x - x^2)$

f)  $F = x^n(1 - x) + x(x^n - x^{n-1})$

g)  $G = x^3(x - 1) + x^2(x - x^2)$

h)  $H = x^n(1 - x) + x(x^n - x^{n-1})$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  $A = x(2018 - x) + x(x - 2018) = 2018x - x^2 + x^2 - 2018x = 0$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào  $x$

b) Ta có:  $B = x(2-x) + x(x-2) = 0$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào  $x$

c) Ta có:  $C = x^3(x-1) + x^2(x-x^2) = 0$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào  $x$

d) Ta có:  $D = x^n(1-x) + x(x^n - x^{n-1}) = 0, n \in N$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào  $x$

e) Ta có:  $E = x^3(x-1) + x^2(x-x^2) = -1$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào  $x$

f) Ta có:  $F = x^n(1-x) + x(x^n - x^{n-1}) = -12$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào  $x$

g) Ta có:  $G = x^3(x-1) + x^2(x-x^2) = -18$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào  $x$

h) Ta có:  $H = x^n(1-x) + x(x^n - x^{n-1}) = -6$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào  $x$

### **Bài 6:** Tính giá trị của các biểu thức, ( $n \in N$ )

a)  $A = 2x(3x^{n-1} + 1) + 6x^n(x^2 - 1)$

b)  $B = 3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2})(n > 1)$

c)  $C = y^{n+1}(2^{n-1} - y^{n-1}) + 2x^{n-1}(x^{n+1} - y^{n+1})$

d)  $D = x^{n-1}(x^n + y^n) + y^{n-1}(x^{2n} + y^{2n})$

e)  $E = 2(x^{2n} + 2x^n y^n + y^{2n}) - y^n(4x^n + 2y^n)$

f)  $F = 4^{n+1} - 3.4^n$

g)  $G = 6^3.3^8.2^8 - 6^6(6^5 - 1)$

### **Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  $A = 2x(3x^{n-1} + 1) + 6x^n(x^2 - 1) = 2x + 6x^{n+2}$

b) Ta có:  $B = 3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2})(n > 1) = 3x^{2n} - y^{2n}$

c) Ta có:  $C = y^{n+1}(2^{n-1} - y^{n-1}) + 2x^{n-1}(x^{n+1} - y^{n+1}) = 2x^{2n} - y^{2n}$

d) Ta có:  $D = x^{n-1}(x^n + y^n) + y^{n-1}(x^{2n} + y^{2n}) = x^{2n-1} + x^{n-1}y^n + x^{2n}y^{n-1} + y^{3n-1}$

e) Ta có:  $E = 2(x^{2n} + 2x^ny^n + y^{2n}) - y^n(4x^n + 2y^n) = 2x^{2n}$

f) Ta có:  $F = 4^{n+1} - 3.4^n = 4^n$

g) Ta có:  $G = 6^3.3^8.2^8 - 6^6(6^5 - 1) = 6^6$

### Bài 7: Tìm $x$ , biết

a)  $x(2-x) + x(x-4) = 2$

b)  $x^3(x-1) + x(x^2 - x^3 + 2019) = 2019$

c)  $2x(3x-4) + 3(x-2x^2) = 25$

d)  $12x(x^5 - 1) + 4x(5 - 3x^5) = 1$

### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $x(2-x) + x(x-4) = 2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy  $x = -1$

b) Ta có:  $x^3(x-1) + x(x^2 - x^3 + 2019) = 2019 \Leftrightarrow 2019x = 2019 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy  $x = 1$

c) Ta có:  $2x(3x-4) + 3(x-2x^2) = 25 \Leftrightarrow -5x = 25 \Leftrightarrow x = -5$

Vậy  $x = -5$

d) Ta có:  $12x(x^5 - 1) + 4x(5 - 3x^5) = 1 \Leftrightarrow 8x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$

Vậy  $x = \frac{1}{8}$

### Bài 8:

a) Cho  $x = 2018$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = x^{2019} - 2019x^{2018} - 2019x^{2017} - \dots - 2019x + 1$

b) Cho  $x = 4$ . Tính giá trị của biểu thức  $Q = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

### Hướng dẫn giải



a) Ta có:

$$\begin{aligned}P &= x^{2019} - 2019x^{2018} - 2019x^{2017} - \dots - 2019x + 1 = x^{2019} - (x+1)x^{2018} + (x+1)x^{2017} - \dots + (x+1)x + 1 \\&= x^{2019} - x^{2019} - x^{2018} + x^{2018} + x^{2017} - x^{2017} - x^{2016} + \dots + x^2 + x + 1 = x + 1 = 2018 + 1 = 2019\end{aligned}$$

Vậy  $P = 2019$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}Q &= x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = x^5 - (x+1)x^4 + (x+1)x^3 - (x+1)x^2 + (x+1)x - 1 \\&= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + x^2 + x - 1 = x - 1 = 4 - 1 = 3\end{aligned}$$

Vậy  $Q = 3$ .

## NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

### A. Tóm tắt lý thuyết

**1. Quy tắc:** Muốn nhân một **đa thức** với một **đa thức**, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích vào với nhau

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD \text{ Với } A, B, C, D \text{ là các đơn thức}$$

$$(A-B)(C-D) = AC - AD - BC + BD \text{ Với } A, B, C, D \text{ là các đơn thức}$$

**Ví dụ:**  $(x+1)(x-3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$

**2. Lưu ý:** Thu gọn các hạng tử đồng dạng (nếu có) trước khi nhân và sau khi nhân

- Nếu phải nhân nhiều đa thức, mỗi lần chỉ nhân hai đa thức với nhau

### B. Bài tập áp dụng và các dạng toán

#### Dạng 1: làm phép tính nhân đa thức với đa thức

**Cách giải:** Sử dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức

#### Bài 1: Làm tính nhân

a.  $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

b.  $(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

c.  $(2x^3 + 3x - 1)(x^2 + 2x - 5)$

d.  $(3x-5)(2x+11) - (2x+3)(3x+7)$

e.  $(3x+1)(x+1)(x-2)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = x^5 - 1$

b) Ta có:  $(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2) = 8x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + 4x^2y - 2xy^2 + y^3 = 8x^3 + y^3$

c) Ta có:  $(2x^3 + 3x - 1)(x^2 + 2x - 5) = 2x^5 + 4x^4 - 10x^3 + 3x^3 + 6x^2 - 15x - x^2 - 2x + 5$   
 $= 2x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 17x + 5$

d) Ta có:  $(3x-5)(2x+11) - (2x+3)(3x+7) = 6x^2 + 33x - 10x - 55 - 6x^2 - 14x - 9x - 21 = -76$

#### Bài 2: Làm tính nhân

a.  $(5xy-1)\left(\frac{1}{10}y^3 - 2x^2 - \frac{2}{5}y\right)$

b.  $(x^2 - 2x + 1)(x - 1)$

c.  $(x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x)$

d.  $(x+3)(x-2)(x+1)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $(5xy-1)\left(\frac{1}{10}y^3-2x^2-\frac{2}{5}y\right)=\frac{1}{2}xy^4-10x^3y-2xy^2-\frac{1}{10}y^3+2x^2+\frac{2}{5}y$

b) Ta có:  $(x^2-2x+1)(x-1)=x^3-x^2-2x^2+2x+x-1=x^3-3x^2+3x-1$

c) Ta có:

$$(x^3-2x^2+x-1)(5-x)=5x^3-x^4-10x^2+2x^3+5x-x^2-5+x=-x^4+7x^3-11x^2+6x-5$$

d) Ta có:  $(x+3)(x-2)(x+1)=(x^2+x-6)(x+1)=x^3+x^2+x^2+x-6x-6=x^3+2x^2-5x-6$

### Bài 3: Thực hiện các phép nhân

a.  $(3x^2+11-5x)(8x-6+2x^2)$

b.  $(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)$

c.  $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$

d.  $(x^{2n}+x^ny^n+y^{2n})(x^n-y^n)(x^{3n}+y^{3n})(n \in N)$

### Lời giải

a) Ta có:  $(3x^2+11-5x)(8x-6+2x^2)=24x^3-18x^2+6x^4+88x-66+22x^2-40x^2+30x-10x^3$   
 $=6x^4-14x^3-36x^2+118x-66$

b) Ta có:

$$(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)=x^7-x^6+x^4-x^3+x^2+x^6-x^5+x^3-x^2+x+x^5-x^4+x^2-x+1$$

$$=x^7+x^2+1$$

c) Ta có:  $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)=x^5-x^4+x^2+x^4-x^3+x+x^3-x^2+1=x^5+x+1$

d) Ta có:  $(x^{2n}+x^ny^n+y^{2n})(x^n-y^n)(x^{3n}+y^{3n})=(x^{3n}-y^{3n})(x^{3n}+y^{3n})=x^{6n}-y^{6n}$

### Bài 4: Thực hiện các phép nhân

a.  $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

b.  $(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd)$

### Lời giải

a) Ta có:  $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+a^2b+b^3+bc^2$   
 $+c^3-abc-bc^2-ac^2=a^3+b^3+c^3-3abc$

$$\begin{aligned}
\text{b) Ta có: } & (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd) \\
& = a^3+ab^2+ac^2+ad^2-a^2b-a^2c-a^2d-abc-abd-acd+a^2b+b^3+bc^2+bd^2 \\
& \quad -ab^2-abc-abd-b^2c-b^2d-bcd+a^2c+b^2c+c^3+cd^2-abc-ac^2-acd \\
& \quad -bc^2-bcd-c^2d+a^2d+b^2d+c^2d+d^3-abd-acd-ad^2-bcd-bd^2-cd^2 \\
& = a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3abd-3acd-3bcd
\end{aligned}$$

## Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức cho trước

### Cách giải:

**Bước 1:** Áp dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức và nhân đa thức với đa thức để rút gọn biểu thức đã cho

**Bước 2:** Thay các giá trị của biến vào biểu thức sau khi đã rút gọn ở bước 1

### Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = (x-3)(x+7) - (2x-5)(x-1)$  với  $x = 0; x = \pm 1$

b.  $B = (3x+5)(2x-1) + (4x-1)(3x+2)$  với  $|x| = 2$

c.  $C = (2x+y)(2z+y) + (x-y)(y-z)$  với  $x = 1; y = 1; |z| = 1$

d.  $D = x(x+2) + y(y-2) - 2xy + 65$  với  $x = y + 5$

e.  $E = x^2 + y(y-2x) + 75$  với  $x = y + 5$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = (x-3)(x+7) - (2x-5)(x-1) = x^2 + 4x - 21 - 2x^2 + 2x + 5x - 5 = -x^2 + 11x - 26$

Thay  $x = 0$  vào biểu thức  $A$  ta được:  $A = -26; x = 1 \Rightarrow A = -1 + 11 - 26 = -16$

b) Ta có:

$$B = (3x+5)(2x-1) + (4x-1)(3x+2) = 6x^2 - 3x + 10x - 5 + 12x^2 + 8x - 3x - 2 = 18x^2 + 12x - 7$$

$$|x| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 18 \cdot 4 + 12 \cdot 2 - 7 = 89 \\ B = 18 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 7 = 41 \end{cases}$$

c) Ta có:

$$C = (2x+y)(2z+y) + (x-y)(y-z) = 4xz + 2xy + 2yz + y^2 + xy - xz - y^2 + yz = 3xz + 3xy + 3yz \\ \Rightarrow C = 3(xz + yz + xy)$$

$$|z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 3(1+1+1) = 9 \\ C = 3(-1-1+1) = -3 \end{cases}$$

d) Ta có:  $D = (y+5)(y+7) + y(y-2) - 2y(y+5) + 65$

Thay  $x = y + 5$  vào biểu thức  $A$  ta được:  $D = 100$

e) Ta có:  $E = x^2 + y(y-2x) + 75 = (x-y)^2$

Thay  $x = y + 5$  vào biểu thức  $E$  ta được:  $E = 5^2 = 25$ .

## Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = \frac{1}{2x^2y^2}(2x+y)(2x-y)$  với  $x=1; y=\frac{1}{2}$

b.  $B = (x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$  với  $x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{2}$

c.  $C = 3a^2(-2a^2-2a-\frac{1}{3})(-a-3)$  với  $a=-2$

d.  $D = (25x^2+10xy+4y^2)(5x-2y)$  với  $x=y+5$

e.  $E = x^2 + y(y-2x) + 75$  với  $x=\frac{1}{5}; y=\frac{1}{2}$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = \frac{1}{2x^2y^2}(2x+y)(2x-y) \Rightarrow A = \frac{1}{2x^2y^2}(4x^2-2xy+2xy-y^2)$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2x^2y^2}(4x^2-y^2) \Rightarrow A = \frac{15}{2}$$

b) Ta có:

$$B = (x+3y)(x^2-3xy+9y^2) \Rightarrow B = x^3-3x^2y+9xy^2+3x^2y-9xy^2+27y^3 \Rightarrow B = x^3+27y^3 \Leftarrow B = \frac{7}{2}$$

c) Ta có:  $C = 3a^2(-2a^2-2a-\frac{1}{3})(-a-3) \Rightarrow C = 6a^5+24a^4+19a^3+3a^2 \Rightarrow C_{(-2)} = 52$

d) Ta có:  $D = (25x^2+10xy+4y^2)(5x-2y) \Rightarrow D = 125x^3-8y^3 \Rightarrow D = 0$

### **Dạng 3: Chứng tỏ giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến**

#### **Cách giải:**

- Sử dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức
- Áp dụng các quy tắc rút gọn đa thức để thu được kết quả không còn chứa biến

#### **Bài 1: Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến**

- a.  $A = (t + 2)(3t - 1) - t(3t + 3) - 2t + 7$
- b.  $B = (2a - 3)(2a + 3) - a(3 + 4a) + 3a + 1$
- c.  $C = (4 - c)(4 - c) + (2 - c)c + 6c + 2002$

#### **Lời giải**

a) Ta có:  $A = (t + 2)(3t - 1) - t(3t + 3) - 2t + 7 \Rightarrow A = 5$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào giá trị của biến

b) Ta có:  $B = (2a - 3)(2a + 3) - a(3 + 4a) + 3a + 1 \Rightarrow B = -8$

Vậy biểu thức  $B$  không phụ thuộc vào giá trị của biến

c) Ta có:  $C = (4 - c)(4 - c) + (2 - c)c + 6c + 2002 \Rightarrow C = 2018$

Vậy biểu thức  $C$  không phụ thuộc vào giá trị của biến

#### **Bài 2: Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến**

- a.  $A = (x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7$
- b.  $B = (x^2 + 2x + 3)(3x^2 - 2x + 1) - 3x^2(x^2 + 2) - 4x(x^2 - 1)$
- c.  $(x^2 - 7)(x + 2) - (2x - 1)(x - 14) + x(-x^2 - 2x - 22) + 35$

#### **Lời giải**

a) Ta có:  $A = (x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7 = 2x^2 + 3x - 10x - 15 - 2x^2 + 6x + x + 7 = -8$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào giá trị của biến

b) Ta có:  $B = (x^2 + 2x + 3)(3x^2 - 2x + 1) - 3x^2(x^2 + 2) - 4x(x^2 - 1) \Rightarrow B = 3$

Vậy biểu thức  $B$  không phụ thuộc vào giá trị của biến

**Bài 3:** Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

a.  $A = x(x^3 + x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x + 3) + 4(x^2 - x - 2)$

b.  $B = (x - 3)(x + 2) + (x - 1)(x + 1) - (2x - 1)x$

c.  $C = (x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7$

**Lời giải**

a) Ta có:  $= x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x^2 + 2x + 6 + 4x^2 - 4x - 8 = -8$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào giá trị của biến

b) Ta có:  $B = (x - 3)(x + 2) + (x - 1)(x + 1) - (2x - 1)x = x^2 + 2x - 3x - 6 + x^2 - 1 - 2x^2 + x = -7$

Vậy biểu thức  $B$  không phụ thuộc vào giá trị của biến

c) Ta có:  $C = (x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7 = 2x^2 + 3x - 10x - 15 - 2x^2 + 6x + x + 7 = -8$

Vậy biểu thức  $C$  không phụ thuộc vào giá trị của biến



#### Dạng 4: Tìm x biết x thỏa mãn điều kiện cho trước

##### Cách giải:

**Bước 1:** Sử dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức để phá ngoặc

**Bước 2:** Nhóm các đơn thức đồng dạng và rút gọn biểu thức ở hai vế để tìm x

##### Bài 1: Tìm x, biết rằng

a.  $(8x+2)(1-3x) + (6x-1)(4x-10) = -50$

b.  $(x^2 - 4x + 16)(x+4) = x(x+1)(x+2) + 3x^2 = 0$

c.  $(3x-5)(7-5x) + (5x+2)(3x-2) - 2 = 0$

d.  $3(2x-3)(3x+2) - 2(x+4)(4x-3) + 9x(4-x) = 6$

e.  $(8x-3)(3x+2) - (4x+7)(x+4) = (2x+1)(5x-1)$

##### Lời giải

a) Ta có:  $(8x+2)(1-3x) + (6x-1)(4x-10) = -50 \Leftrightarrow -62x+12 = -50 \Leftrightarrow x=1$

Vậy  $x=1$

b) Ta có:  $(x^2 - 4x + 16)(x+4) = x(x+1)(x+2) + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow -2x-64 = 0 \Leftrightarrow x=-32$

Vậy  $x=-32$

c) Ta có:

$$(3x-5)(7-5x) + (5x+2)(3x-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow 21x-15x^2-35+25x+15x^2-10x+6x-4=0$$

$$\Leftrightarrow 42x=39 \Leftrightarrow x=\frac{13}{14} \Rightarrow x=\frac{13}{14}$$

Vậy  $x=\frac{13}{14}$

d) Ta có:

$$\Leftrightarrow 18x^2+12x-27x-18-8x^2+6x-32x+24+36x-9x^2=6 \Leftrightarrow x^2-15x-24=0 \Rightarrow x$$

##### Bài 2: Tìm x, biết rằng

a.  $(x+3)(x-1) - x(x-5) = 11$

b.  $(8x-3)(3x+2) - (4x+7)(x+4) = (2x+1)(5x-1)$

##### Lời giải

a) Ta có:  $(x+3)(x-1) - x(x-5) = 11 \Rightarrow 2x + 5x - 3 = 11 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$

Vậy  $x = 2$

b) Ta có:  $\Leftrightarrow 24x^2 + 7x - 6 - 4x^2 - 23x - 28 = 10x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow 10x^2 - 23x - 33 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{33}{10} \end{cases}$

Vậy  $x \in \left\{ -1; \frac{33}{10} \right\}$

### Dạng 5: Chứng minh đẳng thức

**Cách giải:** Thực hiện phép nhân đa thức với đa thức ở vế thứ nhất, sau đó rút gọn đa thức tích để thu được kết quả ở vế còn lại

#### Bài 1: Chứng minh rằng

a.  $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4$

b.  $(t + 2)(t^2 + 4)(t - 2) = t^4 - 16$

c.  $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)(x + y) = x^5 + y^5$

#### Lời giải

a) Ta có:

$$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - a^3b + a^3b - a^2b^2 + a^2b^2 - ab^3 + ab^3 - b^4 = a^4 - b^4 \Rightarrow \text{đpcm}$$

b) Ta có:

$$(t + 2)(t^2 + 4)(t - 2) = (t^3 + 4t + 2t^2 + 8)(t - 2) = t^4 - 16 \Rightarrow \text{đpcm}$$

c) Ta có:  $VT = x^5 + y^5 \Rightarrow \text{đpcm}$

#### Bài 2: Chứng minh rằng đẳng thức sau

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = ab + bc + ca - x^2 \text{ với } x = \frac{a + b + c}{2}$$

#### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VT &= 3x^2 - x(a + b + c + a + b + c) + ab + bc + ca = 3x^2 - 2x(a + b + c) + ab + bc + ca \\ &= 3x^2 - 2x \cdot 2x + ab + bc + ca = -x^2 + ab + bc + ca = VP \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

#### Bài 3: Chứng minh các đẳng thức sau

a.  $(3 - u)(u^2 + 3u + 9) = 27 - u^3$

b.  $(t + 2)(t^2 + 4)(t - 2) = t^4 - 16$

c.  $(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$

d.  $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4$

#### Lời giải

a) Ta có:  $(3 - u)(u^2 + 3u + 9) = 3u^2 + 9u + 27 - u^3 - 3u^2 - 9u = 27 - u^3 \Rightarrow \text{đpcm}$

b) Ta có:  $(t+2)(t^2+4)(t-2) = (t+2)(t^3-2t^2+4t-8) = t^4-16 \Rightarrow \text{đpcm}$

c) Ta có:  $(a^2-ab+b^2)(a+b) = a^3+a^2b-a^2b-ab^2+b^3 = a^3+b^3 \Rightarrow \text{đpcm}$

d)  $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b) = a^3-a^3b+a^3b-a^2b^2+a^2b^2-ab^3+ab^3-b^4 = a^4-b^4 \Rightarrow \text{đpcm}$

#### Bài 4:

a) Chứng minh rằng nếu  $a+b=m; ab=n$  thì  $(x+a)(x+b) = x^2+mx+n$

b) Áp dụng câu a) để viết ngay kết quả của phép nhân:  $(x+3)(x+4); (x-5)(x-3)$  và  $(x+4)(x-6)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $(x+a)(x+b) = x^2+bx+ax+ab = x^2+(a+b)x+ab = x^2+mx+n$

a) Ta có:  $3+4=7; 3.4=12 \Rightarrow (x+3)(x+4) = x^2+7x+12$

+) Ta có:  $(-5)+(-3)=-8; (-5).(-3)=15 \Rightarrow (x-5)(x-3) = x^2-8x+15$

+) Ta có:  $4+(-6)=-2; 4.(-6)=-24 \Rightarrow (x+4)(x-6) = x^2-2x-24$

## Dạng 6: Chứng minh các bài toán về số nguyên

### Cách giải:

**Bước 1:** Gọi số phải tìm và đặt điều kiện

**Bước 2:** Biểu diễn các dữ kiện của đề bài theo số phải tìm

**Bước 3:** Áp dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức để tìm ra đáp án của bài toán

**Bước 4:** Kiểm tra điều kiện và kết luận

### Bài 1:

Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số đầu nhỏ hơn tích của hai số sau là 50

### Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $a, a+1, a+2 (a \in \mathbb{Z})$

Theo bài ra ta có:  $(a+1)(a+2) - a(a+1) = 50 \Leftrightarrow a = 24$

Vậy ba số là: 24, 25, 26

### Bài 2:

Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 52

### Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $a, a+1, a+2 (a \in \mathbb{Z})$

Tích của hai số sau là:  $(a+1)(a+2)$

Tích của hai số đầu là:  $a(a+1)$

Theo bài ra ta có:  $(a+1)(a+2) - a(a+1) = 52 \Rightarrow a = 25$  (thỏa mãn)

Vậy ba số cần tìm là: 25, 26, 27

**\*) Lưu ý:** Có thể gọi ba số lần lượt là:  $x-1; x; x+1 (x \geq 1; x \in \mathbb{N})$

### Bài 3:

Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết rằng nếu cộng ba tích của hai trong ba số ấy ta được 242

### Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $x-1; x; x+1 (x \geq 1; x \in \mathbb{N})$

Ta có:  $x(x-1) + x(x+1) + (x-1)(x+1) = 242 \Leftrightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$

Vậy ba số cần tìm là: 8,9,10

#### **Bài 4:**

Tìm ba số tự nhiên chẵn liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 24

#### **Lời giải**

Gọi ba số tự nhiên chẵn liên tiếp là:  $2n, 2n+2, 2n+4 (n \in \mathbb{N})$

Theo bài ra ta có:  $2(2n+2)(2n+4) - 2n(2n+2) = 24 \Leftrightarrow n = 2$

Vậy ba số cần tìm là: 4,6,8

#### **Bài 5:**

Tìm ba số tự nhiên chẵn liên tiếp, biết nếu ta lấy bình phương của số ở giữa trừ đi tích của số lớn nhất và số bé nhất thì kết quả thu được đúng bằng  $\frac{1}{3}$  của số bé nhất.

#### **Lời giải**

##### **Cách 1:**

Gọi ba số tự nhiên chẵn liên tiếp là:  $2n, 2n+2, 2n+4 (n \in \mathbb{N})$

Tìm được ba số thỏa mãn bài toán là: 12,14,16

**Cách 2:** gọi ba số cần tìm là:  $x, x+2, x+4$  ( $x$  thuộc  $\mathbb{N}$ ;  $x$  chia hết cho 2)

#### **Bài 6:**

Cho  $a$  và  $b$  là hai số tự nhiên. Biết rằng  $a$  chia 5 dư 1,  $b$  chia 5 dư 4. Chứng minh rằng  $ab+1$  chia hết cho 5

#### **Lời giải**

Vì  $a$  chia cho 5 dư 1 nên đặt  $a = 5x+1 (x \in \mathbb{N})$

Vì  $b$  chia 5 dư 4 nên đặt  $b = 5y+4 (y \in \mathbb{N})$

Ta có:  $ab+1 = (5x+1)(5y+4)+1 = 25xy+20x+5y+5 \Rightarrow ab+1 = 5(5xy+4x+y+1):5 \Rightarrow \text{đpcm.}$

### Bài 7:

Cho  $a$  và  $b$  là hai số tự nhiên và  $b < a$ . Biết  $a$  chia 4 dư 1,  $b$  chia 4 dư 3. Chứng minh rằng  $b^2 - a^2$  chia hết cho 4

### Lời giải

$$\text{Đặt } a = 4x + 1; b = 4y + 3 (b \geq a) \Rightarrow b^2 - a^2 = 8(2y^2 + 3y - 2x^2 - x + 1) \Rightarrow (b^2 - a^2) : 4$$

### Bài 8: Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{Z}$ thì

- a)  $A = m(m+5) - (n-3)(n+2) : 6$
- b)  $B = (m-1)(m+1) - (m-7)(m-5) : 12$
- c)  $C = (2m-3)(3n-2) - (3m-2)(2n-3) : 5 \quad \forall m, n$
- d)  $D = 2n^2(n+1) - 2n(n^2 + n - 3) : 6 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- e)  $E = n(3-2n) - (n-1)(1+4n) - 1 : \forall n \in \mathbb{Z}$

### Lời giải

- a) Ta có:  $A = m(m+5) - (n-3)(n+2) : 6 \Leftrightarrow 6(n+1) : 6$  (đpcm)
- b) Ta có:  $B = (m-1)(m+1) - (m-7)(m-5) : 12 \Leftrightarrow B = 12(m-3) : 12 \quad \forall m$  (đpcm)
- c) Ta có:  $C = (2m-3)(3n-2) - (3m-2)(2n-3) : 5 \quad \forall m, n \Leftrightarrow C = 5(m-n) : 5$  (đpcm)
- d) Ta có:  $D = 2n^2(n+1) - 2n(n^2 + n - 3) : 6 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6n : 6$  (đpcm)
- e) Ta có:  $E = n(3-2n) - (n-1)(1+4n) - 1 : \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6(n-n^2) : 6$  (đpcm)

## Dạng 6: Tìm GTNN, GTLN của biểu thức

### Cách giải:

+) Khi tìm GTNN của 1 biểu thức, ta đưa về dạng  $[f(x)]^2 + m$  ( $m$  là hằng số)

Vì  $[f(x)]^2 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow [f(x)]^2 + m \geq m, \forall x \in R$

Dấu "=" xảy ra khi  $f(x) = 0 \Rightarrow x$

Vậy GTNN của biểu thức là  $m$  khi  $x = ..$

+) Khi tìm GTLN ta biến đổi về dạng:  $-[f(x)]^2 + m \leq m, \forall x$

### Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a)  $A = x^2 - 10x + 25$

b)  $B = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$

c)  $C = 2x^2 - 6x + 10$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 \geq 0, \forall x \in R$

Vậy GTNN của biểu thức  $A$  là 0, khi  $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

b) Ta có:  $B = x^2 + y^2 - x + 6y + 10 = (x^2 - x) + (y^2 + 6y) + 10 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \forall x, y \in R$

Vậy GTNN của biểu thức  $A$  là  $\frac{3}{4}$ , khi  $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases}$

c) Ta có:  $C = 2x^2 - 6x + 10 = 2(x^2 - 3x) + 10 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2} \geq \frac{11}{2}$

Vậy GTNN của biểu thức  $C$  là  $\frac{11}{2}$ , khi  $x = \frac{3}{2}$

### Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a)  $A = x - x^2$

b)  $B = 2x - 2x^2 - 5$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, \forall x \in R$



Vậy GTLN của biểu thức  $A$  là  $\frac{1}{4}$ , khi  $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

b) Ta có:  $B = 2x - 2x^2 - 5 = -2(x^2 - x) - 5 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \leq \frac{9}{2}$

Vậy GTNN của biểu thức  $A$  là  $\frac{9}{2}$ , khi  $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Thực hiện phép tính  $(x+1)(x+2)$  ta thu được kết quả nào sau đây

A.  $x^2 + 3x + 2$

B.  $x^2 + 2x + 3$

C.  $x^2 + 2x + 4$

D.  $-x^2 + 2x + -3$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $(x+1)(x+2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

**Câu 2:** Tìm  $x$ , biết:  $6x(5x+3) + 3x(1-10x) = 7$

A.  $x = \frac{1}{3}$

B.  $x = 2$

C.  $x = -\frac{1}{3}$

D.  $x = -1$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $6x(5x+3) + 3x(1-10x) = 7 \Leftrightarrow 30x^2 + 18x + 3x - 30x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

**Câu 3:** Tích  $(x-y)(x+y)$  có kết quả bằng

A.  $x^2 - 2xy + y^2$

B.  $x^2 + y^2$

C.  $x^2 - y^2$

D.  $x^2 + 2xy + y^2$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:  $(x-y)(x+y) = x^2 + xy - xy - y^2$

**Câu 4:** Chọn câu đúng

A.  $(x^2 - 1)(x^2 + 2x) = x^4 - x^3 - 2x$

B.  $(x^2 - 1)(x^2 + 2x) = x^4 - x^2 - 2x$

C.  $(x^2 - 1)(x^2 + 2x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$

D.  $(x^2 - 1)(x^2 + 2x) = x^4 + 2x^3 - 2x$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:  $(x^2 - 1)(x^2 + 2x) = x^2 \cdot x^2 + 2x \cdot x^2 - x^2 - 2x = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$

**Câu 5:**

Cho biểu thức  $A = x(x+1) + (1-x)(1+x) - x$ . Khẳng định nào sau đây đúng

A.  $A = 2 - x$

B.  $A < 1$

C.  $A > 0$

D.  $A > 2$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:  $A = x(x+1) + (1-x)(1+x) - x = x^2 + x + 1 + x - x - x^2 - x = 1$

Vậy  $A = 1 > 0$

**Câu 6:**

Cho hai số tự nhiên  $n$  và  $m$ . Biết rằng  $n$  chia cho 5 dư 1,  $m$  chia cho 5 dư 4. Hãy chọn câu đúng

A.  $mn$  chia 5 dư 1

B.  $mn - n$  chia hết cho 5

C.  $m + n$  chia hết cho 5

D.  $mn$  chia 5 dư 3

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:  $n$  chia 5 dư 1 nên  $n = 5p + 1 (0 < p < n; p \in \mathbb{N})$ ;

$m$  chia 5 dư 4 nên  $m = 5q + 4 (0 < q < m; q \in \mathbb{N})$

Khi đó  $mn = (5p+1)(5q+4) = 25pq + 20p + 5q + 4 = 5(5pq + 4p + q) + 4$

Mà  $5(5pq + 4p + q) : 5 \Rightarrow mn$  chia 5 dư 4, phương án A, D là sai

Ta có:  $m - n = 5q + 4 - (5p + 1) = 5 - 5p + 3$

Mà  $5p : 5; 5q : 5 \Rightarrow m - n$  chia cho 5 dư 3. Vậy phương án B là sai

Ta có:  $m + n = 5q + 4 + 5p + 1 = 5p + 5q + 5 = 5(p + q + 1) : 5 \Rightarrow C$  **đúng**

### Câu 7:

Cho hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, đáy nhỏ lớn hơn chiều cao 2 đơn vị. Biểu thức tính diện tích hình thang là:

A.  $S = 3x^2 - 6x$

B.  $S = \frac{3x^2 - 6x}{2}$

C.  $S = \frac{x^2 + 2x + 4}{2}$

D.  $S = \frac{x^2 - 2x - 4}{2}$

### Lời giải

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

Gọi  $x (x > 2)$  là độ dài đáy nhỏ của hình thang

Theo giả thiết ta có: độ dài đáy lớn là  $2x$ , chiều cao của hình thang là:  $x - 2$

Diện tích hình thang là:  $S = \frac{(x + 2x)(x - 2)}{2} = \frac{3x(x - 2)}{2} = \frac{3x^2 - 6x}{2}$  (đvdt)

### Câu 8:

Chọn câu đúng :

A.  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$

B.  $(x - 1)(x + 1) = 1 - x^2$

C.  $(x - 1)(x + 1) = 1 + x^2$

D.  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 1 - x^2$

### Lời giải

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$

**Câu 9:**

Giá trị của biểu thức  $M = x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1)$  là:

A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

**Lời giải****Chọn đáp án D****Giải thích:**

Ta có:  $M = x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x - (x^4 + x^3 - x^2 - 2x^2 - 2x + 2) = -2$

Vậy  $M = -2$

**Câu 10:**

Cho  $A = (3x + 7)(2x + 3) - (3x - 5)(2x + 11); B = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + x^3 - x + 3$ . Chọn khẳng định đúng

A.  $A = B$ B.  $A = 25B$ C.  $A = 25B + 1$ D.  $A = \frac{B}{2}$ **Lời giải****Chọn đáp án C****Giải thích:**

Ta rút gọn được  $A = 76$  và  $B = 3 \Rightarrow A = 25B + 1 \Rightarrow$  chọn đáp án C

$$+12x^6 + \dots = x^2 - 12x - x + 10 = x^9(x - 12) - x^8(x - 12) + x^7(x - 12) - \dots + x(x - 12) - x + 10$$

**Câu 11:**

Thực hiện phép tính  $(x^2 - 3x)(-2x - 5)$  ta thu được kết quả nào sau đây

A.  $-2x^3 + x^2 + 15x$ B.  $-2x^3 - x^2 + 15x$ C.  $-2x^3 - x^2 - 15x$ D.  $-2x^3 + 2x$ **Lời giải****Chọn đáp án A****Giải thích:**

Ta có:  $(x^2 - 3x)(-2x - 5) = -2x^3 - 5x^2 + 6x^2 + 15x = -2x^3 + x^2 + 15x$

**Câu 12:**

Gọi  $a, b, c, d$  là bốn số tự nhiên liên tiếp thỏa mãn  $ab - cd = -10$ . Tính  $a + b + c + d$

A. 10

B. -10

C. 14

D. 20

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $b = a + 1, c = a + 2, d = a + 3$  (do  $a, b, c, d$  là bốn số tự nhiên liên tiếp)

Theo đề ra ta có:  $a(a + 1) - (a + 2)(a + 3) = a^2 + a - a^2 - 5a - 6 = -4a - 6 = -10$

Nhận thấy  $a = 1 \Rightarrow$  bốn số tự nhiên cần tìm là:  $1, 2, 3, 4 \Rightarrow a + b + c + d = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

**Câu 13:**

Gọi  $a, b, c, d$  là bốn số tự nhiên liên tiếp thỏa mãn  $ac - bd = -7$ . Tính  $\frac{a+b}{c+d}$

A.  $\frac{9}{5}$

B.  $\frac{5}{9}$

C.  $\frac{2}{3}$

D.  $\frac{3}{2}$

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

Ta có:  $b = a + 1, c = a + 2, d = a + 3$  (do  $a, b, c, d$  là bốn số tự nhiên liên tiếp)

Theo bài ra ta có:  $a(a + 2) - (a + 1)(a + 3) = a^2 + 2a - a^2 - 4a - 3 = -2a - 3 = -7$

Nhận thấy  $a = 2 \Rightarrow$  bốn số tự nhiên cần tìm là:  $2, 3, 4, 5 \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{2+3}{4+5} = \frac{5}{9}$

**Câu 14:**

Thực hiện phép tính  $(x - 2)(x + 2)$  ta thu được kết quả nào sau đây?

A.  $x^2 - 4$

B.  $x^2 + 4$

C.  $x^2 - 2x + 4$

D.  $x + 1$

### Lời giải

Chọn đáp án A

**Giải thích:**

Ta có:  $(x-2)(x+2) = x^2 + 2x - 2x - 4 = x^2 - 4$

### Câu 15:

Thực hiện phép tính  $(x+1)(x^2-x+1)$  ta thu được kết quả nào sau đây?

A.  $x^3 + 1$

B.  $x^3 - 1$

C.  $x^2 + 1$

D.  $x^3 + 2$

### Lời giải

Chọn đáp án A

**Giải thích:**

Ta có:  $(x+1)(x^2-x+1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

### Câu 16:

Thực hiện phép tính  $(x^4-4)(x^4+4)$  ta thu được kết quả nào sau đây?

A.  $x^4 - 16$

B.  $x^8 - 16$

C.  $x^{16} - 16$

D.  $x^8 + 16$

### Lời giải

Chọn đáp án B

**Giải thích:**

Ta có:  $(x^4-4)(x^4+4) = x^8 + 4x^4 - 4x^4 - 16 = x^8 - 16$

### Câu 17:

Thực hiện phép tính  $(2x-3)(2x+3)$  ta thu được kết quả nào sau đây?

A.  $4x^2 + 9$

B.  $4x^2 - 9$

C.  $4x^2 + 18$

D.  $4x^2 - 18$

### Lời giải

Chọn đáp án B

**Giải thích:**

Ta có:  $(2x-3)(2x+3) = 4x^2 + 6x - 6x - 9 = 4x^2 - 9$

**Câu 18:**

Một hình thang có đáy lớn bằng  $(x+2)$  mét, đáy bé bằng  $(x+1)$  mét và chiều cao bằng  $(x+3)$  mét. Biết rằng tích độ dài hai đáy lớn và chiều cao hơn tích độ dài đáy bé và chiều cao 4 mét.

Tính diện tích hình thang đã cho

A.  $10m^2$

B.  $20m^2$

C.  $5m^2$

D.  $40m^2$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

***Giải thích:***

Theo đầu bài ta có:  $(x+2)(x+3) - (x+1)(x+3) = x^2 + 5x + 6 - x^2 - 4x - 3 = x + 3 = 4$

Dễ thấy  $x=1 \Rightarrow$  diện tích của hình thang là:  $S = \frac{1}{2}(1+2+1+1) \cdot (1+3) = 10(m^2)$



## BÀI TẬP VỀ NHÀ

### Bài 1: Thực hiện phép tính sau và tính giá trị của các biểu thức

a)  $A = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$  với  $x = 3$

b)  $B = (x+1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$  với  $x = 2$

c)  $C = (x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$  với  $x = 2$

d)  $D = 2x(10x^2 - 5x - 2) - 5x(4x^2 - 2x - 1)$  với  $x = 1$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) = x^5 - 32$

Với  $x = 3 \Rightarrow A = 3^5 - 32 = 243 - 32 = 211$

b) Ta có:  $B = (x+1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) = x^8 - 1$

Với  $x = 2 \Rightarrow B = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$

c) Ta có:  $C = (x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = x^7 + 1$

Với  $x = 2 \Rightarrow C = 2^7 + 1 = 129$

d) Ta có:  $D = 2x(10x^2 - 5x - 2) - 5x(4x^2 - 2x - 1) = x$

Với  $x = 1 \Rightarrow D = 1$

### Bài 2: Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến $x$

a)  $A = (3x+7)(2x+3) - (3x-5)(2x+11)$

b)  $B = (x^2 - 2)(x^2 + x + 1) - x(x^3 + x^2 - 3x - 2)$

c)  $C = x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1)$

d)  $D = (x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = (3x+7)(2x+3) - (3x-5)(2x+11) = 76$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào giá trị của biến  $x$

b) Ta có:  $B = (x^2 - 2)(x^2 + x + 1) - x(x^3 + x^2 - 3x - 2) = 2$

Vậy biểu thức  $B$  không phụ thuộc vào giá trị của biến  $x$

c) Ta có:  $C = x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) = -2$

Vậy biểu thức  $C$  không phụ thuộc vào giá trị của biến  $x$

d) Ta có:  $D = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = 2$

Vậy biểu thức  $D$  không phụ thuộc vào giá trị của biến  $x$

### Bài 3: Tính giá trị của các đa thức

a)  $P(x) = x^7 - 80x^6 + 80x^5 - 80x^4 + \dots + 80x + 15$  với  $x = 79$

b)  $Q(x) = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + \dots + 10x^2 - 10x + 10$  với  $x = 9$

c)  $R(x) = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$  với  $x = 16$

d)  $S(x) = x^{10} - 13x^9 + 13x^8 - 13x^7 + \dots + 13x^2 - 13x + 10$  với  $x = 12$

### Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^7 - 80x^6 + 80x^5 - 80x^4 + \dots + 80x + 15 = x^7 - (x+1)x^6 + (x+1)x^5 - (x+1)x^4 + \dots + (x+1)x + 15 \\ &= x^7 - x^7 - x^6 + x^6 + x^5 - x^5 - x^4 + x^4 + \dots + x^2 + x + 15 = x + 15 = 79 + 15 = 94 \end{aligned}$$

Vậy  $P = 94$

b) Ta có:  $Q(x) = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + \dots + 10x^2 - 10x + 10 = -x + 10$

$\Rightarrow Q(9) = -9 + 10 = 1$ . Vậy  $Q = 1$

c) Ta có:  $R(x) = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20 = -x + 20$

$\Rightarrow R(16) = -16 + 20 = 4$ . Vậy  $Q = 4$

d) Ta có:  $S(x) = x^{10} - 13x^9 + 13x^8 - 13x^7 + \dots + 13x^2 - 13x + 10 = -x + 10$

$\Rightarrow S(12) = -12 + 10 = -2$ . Vậy  $S = -2$

### Bài 4:

Cho biểu thức  $A = (m^2 - 2m + 4)(m + 2) - m^3 + (m + 3)(m - 3) - m^2 - 18$ . Chứng minh rằng giá trị của  $A$  không phụ thuộc vào  $m$

### Lời giải

Ta có:  $A = m^3 + 2m^2 - 2m^2 - 4m + 4m + 8 - m^3 + m^2 - 9 - m^2 - 18 \Rightarrow A = -19$

Vậy biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào tham số  $m$ .

### Bài 5: Tìm $x$ , biết rằng:

a)  $(x^2 + 2x + 4)(2 - x) + x(x - 3)(x + 4) - x^2 + 24 = 0$

b)  $\left(\frac{x}{2} + 3\right)(5 - 6x) + (12x - 2)\left(\frac{x}{4} + 3\right) = 0$

### Lời giải

a) Ta có:  $2x^2 - x^3 + 4x - 2x^2 + 8 - 4x + x^3 + x^2 - 12x - x^2 + 24 = 0 \Rightarrow -12x = -32 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

Vậy  $x = \frac{8}{3}$

b) Ta có:

$$\left(\frac{x}{2} + 3\right)(5 - 6x) + (12x - 2)\left(\frac{x}{4} + 3\right) = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} - 3x^2 + 15 - 18x + 3x^2 + 36x - \frac{x}{2} - 6 = 0 \Rightarrow 16x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{16}$$

Vậy  $x = -\frac{3}{16}$

### Bài 6: Tìm $x$ , biết rằng:

Tìm hai số tự nhiên lẻ liên tiếp, biết bình phương của số lớn lớn hơn bình phương của số nhỏ là 80 đơn vị

### Lời giải

Gọi hai số tự nhiên lẻ liên tiếp là:  $2x + 1; 2x + 3 (x \in \mathbb{N})$

Theo đầu bài ta có:  $(2x + 3)^2 = (2x + 1)^2 + 80 \Rightarrow x = 9$

Vậy hai số tự nhiên liên tiếp là: 19 và 21

### Bài 7: Tìm $x$ , biết rằng:

Chứng minh rằng với  $\forall m \in \mathbb{Z}$  thì  $A = 3m(m^2 + 2) - 2(m^3 - m^2) - 2m^3 - 7m : 6$

### Lời giải

Ta có:  $A = 3m(m^2 + 2) - 2(m^3 - m^2) - 2m^3 - 7m \Rightarrow A = n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$

Lại có ba số nguyên liên tiếp trong đó sẽ có 1 số chia hết cho 2 và 1 số chia hết cho 3 nên

$A:6 \Rightarrow \text{đpcm}$

### Bài 8:

Cho  $a$  và  $b$  là hai số tự nhiên thỏa mãn  $a+3$  và  $b+4$  cùng chia hết cho 5. Chứng minh rằng  $a^2 + b^2$  chia hết cho 5

### Lời giải

Đặt  $a = 5x - 3$  và  $b = 5y - 4$

Từ đó chứng minh được:  $(a^2 + b^2):5$

### Bài 9:

Cho biểu thức  $P = (3x - 4)(4y - 3) - (4x - 3)(3y - 4)$ . Chứng minh rằng biểu thức  $P$  luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên  $x, y$

### Lời giải

Ta có:

$$P = (3x - 4)(4y - 3) - (4x - 3)(3y - 4) = 12xy - 9x - 16y + 12 - 12xy + 16x + 9y - 12 = 7(x - y):7, \forall x, y$$

Vậy  $P$  luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên  $x, y$

### Bài 10:

Tìm 4 số tự nhiên liên tiếp biết rằng tích của hai số đầu nhỏ hơn tích của hai số cuối 38

### Lời giải

Theo đề ra ta có:  $x(x+1) = (x+2)(x+3) - 38 \Leftrightarrow x = 5x - 32 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy  $x = 8$

### Bài 11: Thực hiện phép tính

a)  $A = (2^9 + 2^7 + 1)(2^{23} - 2^{21} + 2^{19} - 2^{17} + 2^{14} - 2^{10} + 2^9 - 2^7 + 1)$

b) Số  $2^{32} + 1$  có là số nguyên tố không

### Lời giải

a) Thực hiện phép nhân rồi rút gọn ta được:

$$A = 2^{32} + (2^{23} + 2^{23} - 2^{24}) + (2^{18} - 2^{17} - 2^{17}) + (2^9 + 2^9 - 2^{10}) + 1 = 2^{32} + 1 \quad (\text{các biểu thức trong ngoặc đều bằng } 0)$$

b) Theo câu a), ta có:  $2^{32} + 1$  là hợp số.

## BẢY HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

### A. Tóm tắt lý thuyết

#### 1) Các hằng đẳng thức đáng nhớ cơ bản

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	Bình phương của một tổng
$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	Bình phương của một hiệu
$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$	Hiệu hai bình phương
$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	Lập phương của một tổng
$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	Lập phương của một hiệu
$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$	Tổng hai lập phương
$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$	Hiệu hai lập phương

#### 2) Bình phương của một tổng 3 hạng tử

a)  $(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA$

b)  $(A+B-C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB - 2BC - 2CA$

c)  $(A-B-C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB + 2BC - 2CA$

#### 3) Một số ứng dụng

a) Tính nhẩm:  $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 + 1 = 9801$

b) Sử dụng đánh giá  $A^2 \geq 0$  kết hợp với biến đổi hằng đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

Ví dụ:  $P = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$

### B. Bài tập và các dạng toán

1. Bình phương của một tổng:  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Ví dụ:  $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

2. Bình phương của một hiệu:  $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Ví dụ:  $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

### Dạng 1: Thực hiện phép tính

**Cách giải:** Sử dụng trực tiếp các hằng đẳng thức đã học để khai triển các biểu thức

#### Bài 1: Thực hiện phép tính

a.  $(x+2y)^2$

b.  $(3x^2 + \frac{5}{2}y)^2$

c.  $(3x-4y)^2$

d.  $(7x^2 - \frac{3}{4})^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $(x+2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

b) Ta có:  $(3x^2 + \frac{5}{2}y)^2 = 9x^4 + 15x^2y + \frac{25}{4}y^2$

c) Ta có:  $(3x-4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$

d) Ta có:  $(7x^2 - \frac{3}{4})^2 = 49x^4 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{9}{16}$

#### Bài 2: Thực hiện phép tính

a.  $(2x+3)^2$

b.  $(6-3u)^2$

c.  $\left(\frac{x}{3} + 4y\right)^2$

d.  $\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{y}\right)^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

b) Ta có:  $(6-3u)^2 = 36 - 36u + 9u^2$

c) Ta có:  $\left(\frac{x}{3} + 4y\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{8}{3}xy + 16y^2$

d) Ta có:  $\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{y}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{xy} + \frac{9}{y^2}$

#### Bài 3: Khai triển các biểu thức sau

a.  $16\left(\frac{-1}{4}x + \frac{4}{5}y\right)^2$

b.  $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$

#### Lời giải

c) Ta có:  $16\left(\frac{-1}{4}x + \frac{4}{5}y\right)^2 = 16\left(\frac{1}{16}x^2 - \frac{2}{5}xy + \frac{16}{25}y^2\right) = x^2 - \frac{32}{5}xy + \frac{256}{25}y^2$

d) Ta có:  $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right)\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) = x^4 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{81}$

**Bài 4:** Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng, của một hiệu

a.  $\frac{x^2}{4} + x + 1$

b.  $-8x + 16 + x^2$

c.  $x^2 + 1 + 2x$

d.  $4x^2 + 4y^2 - 8xy$

**Lời giải**

a) Ta có:  $x^2 + 1 + 2x = (x + 1)^2$

b) Ta có:  $-8x + 16 + x^2 = (x - 4)^2$

c) Ta có:  $\frac{x^2}{4} + x + 1 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$

d) Ta có:  $4x^2 + 4y^2 - 8xy = (2x - 2y)^2$

**Bài 5:** Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng, của một hiệu

a.  $x^2 + 1 + x$

b.  $\frac{9}{4}x^2 + 3x + 4$

c.  $9x^2 - 12x + 4$

d.  $x^2 + 2x(y + 1) + y^2 + 2y + 1$

**Lời giải**

a) Ta có:  $x^2 + 1 + x = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$

b) Ta có:  $\frac{9}{4}x^2 + 3x + 4 = \left(\frac{3}{2}x + 2\right)^2$

c) Ta có:  $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$

d) Ta có:  $x^2 + 2x(y + 1) + y^2 + 2y + 1 = (x + y + 1)^2$

**Bài 6:** Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng, của một hiệu

a.  $9x^2 + 12x + 4 + 6(3x + 2) + 9$

b.  $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2(x + 1)(y + 1) + 2$

c.  $(4x^2 - 4x + 1) - 4y(-1 + 2x) + 4y^2$



### Lời giải

a) Ta có:  $9x^2 + 12x + 4 + 6(3x + 2) + 9 = (3x + 5)^2$

b) Ta có:  $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2(x + 1)(y + 1) + 2 = (x + y + 2)^2$

c) Ta có:  $(4x^2 - 4x + 1) - 4y(-1 + 2x) + 4y^2 = (2x - 1 - 2y)^2$

d) Ta có:  $x^2 + 2x(y + 1) + y^2 + 2y + 1 = (x + y + 1)^2$

### Dạng 2: Chứng minh các đẳng thức

**Cách giải:** Áp dụng các hằng đẳng thức linh hoạt, lựa chọn vế đẳng thức có thể áp dụng hằng đẳng thức dễ dàng

#### Bài 1: Chứng minh các đẳng thức sau

a.  $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = ab$

b.  $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $VT = \frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{4} = \frac{2a \cdot 2b}{4} = ab = VP \Rightarrow \text{đpcm}$

b) Ta có:  $VP = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2(x^2 + y^2) = VT \Rightarrow \text{đpcm}$

#### Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau

a.  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

b.  $(a + b)^2 - (a - b)(a + b) = 2b(a + b)$

### Lời giải

a) Ta có:  $VP = (x + y)^2 - 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = x^2 + y^2 = VT \Rightarrow \text{đpcm}$

b) Ta có:  $VT = (a + b)^2 - (a - b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - b^2) = 2b(a + b) = VP \Rightarrow \text{đpcm}$

#### Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau

a.  $A = (2a + b)^2 - (b - 2a)^2$

b.  $B = (3a + 2)^2 + 2(2 + 3a)(1 - 2b) + (2b - 1)^2$

c.  $C = (m - n)^2 + 4mn$

d.  $D = (6n - 2)^2 + 4(3n - 1)(2 + t) + (t + 2)^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = (2a + b)^2 - (b - 2a)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 - b^2 + 4ab - 4a^2 \Rightarrow A = 8ab$

b) Ta có:  $B = [(3a+2) + (1-2b)]^2 = (3a-2b+3)^2$

c) Ta có:  $C = (m-n)^2 + 4mn \Rightarrow C = m^2 - 2mn + n^2 + 4mn \Rightarrow C = m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2$

d) Ta có:  $D = (6n-2)^2 + 4(3n-1)(2+t) + (t+2)^2 \Rightarrow D = (6n+t)^2$

#### Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau

a.  $A = (5a+5)^2 + 10(a-3)(1+a) + a^2 - 6a + 9$

b.  $B = \frac{(x-1)^2}{4} + x^2 - 1 + (x+1)^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 25a^2 + 50a + 25 + 10a + 10a^2 - 30 - 30a + a^2 - 6a + 9 = (6a+2)^2$

b) Ta có:  $B = \frac{(x-1)^2}{4} + x^2 - 1 + (x+1)^2 \Rightarrow B = \frac{x^2 - 2x + 1}{4} + x^2 - 1 + x^2 + 2x + 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}(3x+1)^2$

#### Bài 5:

Chứng minh rằng biểu thức sau viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai biểu thức

$$A = x^2 + 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 + 4(x+3)^2$$

#### Lời giải

Ta có:  $A = x^2 + 2(x^2 + 2x + 1) + 3(x^2 + 4x + 4) + 4(x^2 + 6x + 9) = 10x^2 + 40x + 25 + 25$

$$= (x^2 + 10x + 25) + (9x^2 + 30x + 25) = (x+5)^2 + (3x+5)^2 \text{ (đpcm)}$$

#### Bài 6:

Chứng minh rằng:  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

#### Lời giải

Ta có:  $VP = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac)^2 + 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2abcd + (bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = VT \Rightarrow \text{đpcm}$$

#### Bài 7:

Gọi  $a, b, c, d$  là độ dài ba cạnh của  $\triangle ABC$ ,  $p$  là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + p^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

#### Lời giải

Theo giả thiết:  $\frac{a+b+c}{2} = p$  hay  $a+b+c = 2p$

$$VT = 3p^2 - 2p(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 + p^2 = a^2 + b^2 + c^2 = VP \text{ (đpcm)}$$

### Bài 8:

Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $A = (x - y + z)^2 - 2(x - y + z)(z - y) + (z - y)^2$

b)  $B = (x + y)^2 + 4(x - y)^2 - 4(x - y)(x + y)$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = (x - y + z)^2 - 2(x - y + z)(z - y) + (z - y)^2 = x^2$

b) Ta có:  $B = (x + y)^2 + 4(x - y)^2 - 4(x - y)(x + y) = (x + y)^2 + 4(x - y)^2 - 2(x - y)(x + y) \cdot 2$

$$B = (x + y)^2 + 4(x - y)^2 - 4(x - y)(x + y) = (x + y)^2 + 4(x - y)^2 - 2(x - y)(x + y) \cdot 2$$

$$\Rightarrow B = [(x + y) - 2(x - y)]^2 = (3y - x)^2$$

### Bài 9: Tìm $x, y$ biết

a)  $(x + 2)^2 + (x - 3)^2 - 2(x - 1)(x + 1) = 9$

b)  $x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

c)  $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y + 1 = 0$

d)  $x^2 - 4x + 5 + y^2 + 2y = 0$

e)  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$

### Lời giải

a) Ta có:  $(x + 2)^2 + (x - 3)^2 - 2(x - 1)(x + 1) = 9 \Rightarrow x = 3$

Vậy  $x = 3$

b) Ta có:  $x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (2y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (1; -\frac{1}{2})$

Vậy  $(x; y) = (1; -\frac{1}{2})$

c) Ta có:  $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + (y - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x; y) = (-1; 1)$

Vậy  $(x; y) = (-1; 1)$

d) Ta có:  $x^2 - 4x + 5 + y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0 \Rightarrow (x; y) = (2; -1)$

Vậy  $(x; y) = (2; -1)$

e) Ta có:  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = y = z$

### Dạng 3: Tính nhanh

**Cách giải:** Áp dụng các hằng đẳng thức một cách linh hoạt và hợp lý cho các số tự nhiên

#### Bài 1: Tính nhanh

a)  $21^2$

b)  $499^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $21^2 = (20 + 1)^2 = 400 + 41 + 1 = 442$

b) Ta có:  $499^2 = (500 - 1)^2 = 50^{2+1} - 250 + 1 = 2500 - 250 + 1 = 2251$

#### Bài 2: Tính nhanh

a)  $1001^2$

b)  $99^2 + 1 + 198$

c)  $99^2$

d)  $98^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $1001^2 = (1000 + 1)^2$

b) Ta có:  $99^2 + 1 + 198 = 100^2 = 10000$

c) Ta có:  $99^2 = (100 - 1)^2$

d) Ta có:  $98^2 = (100 - 2)^2$

#### Bài 3: Tính giá trị của biểu thức sau

a)  $A = (x + y)^2 - (x - y)^2$  với  $xy = \frac{1}{4}$

b)  $B = x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 5y + 6$  với  $x - y = 7$

c)  $C = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 2.(x + 2y)(y - 1) + (y^2 - 2y + 1)$  với  $x + y = 10$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = (x + y)^2 - (x - y)^2 \Rightarrow A = 4xy \Rightarrow A = 4 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow A = 1$

b) Ta có:  $B = x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 5y + 6 \Rightarrow B = (x - y)^2 - 5(x - y) + 6 \Rightarrow B = 7^2 - 35 + 6 \Rightarrow B = 20$

c) Ta có:  $C = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 2.(x + 2y)(y - 1) + (y^2 - 2y + 1) \Rightarrow C = (x + y - 1)^2 = 81$

#### Dạng 4: Chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức

**Cách giải:** Sử dụng các hằng đẳng thức và chú ý rằng

$A^2 \geq 0; -A^2 \leq 0$  với  $A$  là một biểu thức bất kỳ.

##### Bài 1: Chứng minh rằng

a)  $A = 9c^2 - 6c + 3 > 0, \forall c$

b)  $B = 14m - 6m^2 - 13 < 0, \forall m$

##### Lời giải

a) Ta có:  $A = 9c^2 - 6c + 3 = (3c - 1)^2 + 2 > 0, \forall c$

b) Ta có:  $B = 14m - 6m^2 - 13 = -6\left(m - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{29}{6} < 0, \forall m$

##### Bài 2: Chứng tỏ rằng

a)  $A = a^2 - 2a + 2 > 0$

b)  $B = 6b - b^2 - 10 < 0, \forall b$

##### Lời giải

a) Ta có:  $A = a^2 - 2a + 2 \Rightarrow A = (a - 1)^2 + 1 > 0 \Rightarrow A > 0, \forall a$

b) Ta có:  $B = 6b - b^2 - 10 \Rightarrow B = -(b - 3)^2 - 1 < 0, \forall b$

##### Bài 3: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a)  $A = x^2 - 6x + 10$

b)  $B = y^2 + 8y + 15$

c)  $C = u^2 + v^2 - 2u + 3v + 15$

d)  $D = 2x^2 + 5y^2 + 4xy + 8x - 4y - 100$

##### Lời giải

a) Ta có:  $A = x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x = 3$

b) Ta có:  $B = y^2 + 8y + 15 = (y + 4)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow B_{\min} = -1 \Leftrightarrow y = -4$

c) Ta có:  $C = u^2 + v^2 - 2u + 3v + 15 \Rightarrow C = (u - 1)^2 + \left(v + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{47}{4} \geq \frac{47}{4} \Rightarrow C_{\min} = \frac{47}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -\frac{3}{2} \end{cases}$

##### Bài 4: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a)  $A = x^2 - 8x + 19$

b)  $B = 3x^2 - 6x + 5$

c)  $C = x^2 + y^2 - 8x + 4y + 5$

d)  $D = 2x^2 + 8x + 9$

e)  $E = 2x^2 + 5y^2 + 4xy + 8x - 4y - 100$

##### Lời giải

a) Ta có:  $A = x^2 - 8x + 19 = (x - 4)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow A_{\min} = 3 \Leftrightarrow x = 4$

b) Ta có:  $B = 3x^2 - 6x + 5 = 3(x - 1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow B_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

c) Ta có:  $C = x^2 + y^2 - 8x + 4y + 5 = (x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 15 \geq -15 \Rightarrow C_{\min} = -15 \Leftrightarrow x = 4; y = -2$

d) Ta có:  $D = 2x^2 + 8x + 9 = 2(x + 2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow D_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = -2$

e) Ta có:  $2x^2 + 5y^2 + 4xy + 8x - 4y - 100 = (x + 2y)^2 + (y - 2)^2 + (x + 4)^2 - 120 \geq -120$

$\Rightarrow N_{\min} = -120 \Leftrightarrow x = -4; y = 2$

### Bài 5: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a)  $A = -x^2 + 4x - 5$

b)  $B = 12a - 4a^2 + 3$

c)  $C = 2x - 2xy - 2x^2 - y^2$

d)  $D = 4t - 8v - v^2 - t^2 + 2017$

e)  $E = m - \frac{m^2}{4}$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = -x^2 + 4x - 5 \Rightarrow A = -(x - 2)^2 + (-1) \leq -1 \Rightarrow A_{\max} = -1 \Leftrightarrow x = 2$

b) Ta có:  $B = 12a - 4a^2 + 3 = 12 - (2a - 3)^2 \leq 12 \forall a \Rightarrow B_{\max} = 12 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

c) Ta có:  $C = 2x - 2xy - 2x^2 - y^2 = 1 - (x + y)^2 - (x - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow C_{\max} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

d) Ta có:  $D = 4t - 8v - v^2 - t^2 + 2017 \Rightarrow D_{\max} = 2037 \Leftrightarrow v = -4; t = 2$

e) Ta có:  $E = m - \frac{m^2}{4} \rightarrow E = \frac{4m - m^2}{4} \rightarrow E = \frac{-m^2 + 4m - 4 + 4}{4} \Rightarrow E = 1 - \frac{(m - 2)^2}{4} \Rightarrow E_{\max} = 1 \Leftrightarrow m = 2$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = (5a+5)^2 + 10(a-3)(1+a) + a^2 - 6a + 9$

b)  $B = \frac{(x-1)^2}{4} + x^2 - 1 + (x+1)^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = (5a+5)^2 + 10(a-3)(1+a) + a^2 - 6a + 9 \Rightarrow A = (6a+2)^2$

b) Ta có:  $B = \frac{(x-1)^2}{4} + x^2 - 1 + (x+1)^2 \Rightarrow B = \frac{1}{4}(3x+1)^2$

### Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = 100x^2 - 20x + 1$  tại  $x = 10$

b)  $B = 25c^2 - 10cd^2 + d^4$  tại  $c = 5, d = 4$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 100x^2 - 20x + 1 \Rightarrow A = (10x-1)^2 \Rightarrow A(10) = 9801$

b) Ta có:  $B = 25c^2 - 10cd^2 + d^4 \Rightarrow B = (5c-d^2)^2 \Rightarrow B = 21^2 = 441$

### Bài 3: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a)  $A = 8a - 8a^2 + 3$

b)  $B = b - \frac{9b^2}{25}$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 8a - 8a^2 + 3 = -8(a - \frac{1}{2})^2 + 5 \leq 5, \forall a \Rightarrow A_{\max} = 5 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

b) Ta có:  $B = b - \frac{9b^2}{25} = \frac{25}{36} - (\frac{3b}{5} - \frac{5}{6})^2 \leq \frac{25}{36} \forall b \Rightarrow B_{\max} = \frac{25}{36} \Leftrightarrow b = \frac{25}{18}$

### Bài 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a)  $A = \frac{1}{16}c^2 - 9c + 10$

b)  $B = d^2 + 10e^2 - 6de - 10e + 26$

c)  $C = 4x^4 + 12x^2 + 11$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = \frac{1}{16}c^2 - 9c + 10 = \left(\frac{c}{4} - 18\right)^2 - 314 \geq -314, \forall c \Rightarrow A_{\min} = -314 \Leftrightarrow c = 72$

b) Ta có:  $B = d^2 + 10e^2 - 6de - 10e + 26 = (d-3e)^2 + (e-5)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow B_{\min} = 1 \Leftrightarrow d = 15; e = 5$

c) Ta có:  $C = 4x^4 + 12x^2 + 11 \geq 11 \Rightarrow C_{\min} = 11 \Leftrightarrow x = 0$



**C. Hiệu hai bình phương:**  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

**Bài 1: Tính**

a)  $(x + 2y)(x - 2y)$

b)  $3(x + 1)^2 - 2(x - 3)^2 - (x - 2)(x + 2)$

**Lời giải**

a) Ta có:  $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - 4y^2$

b) Ta có:  $3(x + 1)^2 - 2(x - 3)^2 - (x - 2)(x + 2) = 18x - 11$

**Bài 2: Tính**

a) 26.34

b) 95.105

c) 29.31

**Lời giải**

a) Ta có:  $26.34 = 30^2 - 4^2 = 900 - 16 = 884$

b) Ta có:  $95.105 = (100 - 5)(100 + 5) = 100^2 - 5^2 = 10000 - 25 = 9975$

c) Ta có:  $29.31 = (30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899$

**Bài 3: Tính giá trị của các biểu thức sau**

a)  $A = (x + y)^2 - (x - y)^2$  với  $xy = \frac{1}{4}$

b)  $B = (x + 2y + 1)^2 - (x - 2y)^2$  với  $x = y = 1$

c)  $C = 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2 - (x - y)(x + y)$  với  $x = \frac{1}{2}; y = -3$

d)  $D = 5(x + 2y)^2 - (3y + 2x)^2 + (4x - y)^2 + 3(x - 2y)(x + 2y)$  với  $x = \frac{1}{2}; y = -3\frac{1}{4}$

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = [(x + y) + (x - y)][(x + y) - (x - y)] = 4xy \Rightarrow A = 1$

b)  $B = (x + 2y + 1)^2 - (x - 2y)^2 \Rightarrow B = (x + 2y + 1 + x - 2y)(x + 2y + 1 - x + 2y) = (2x + 1)(4y + 1)$   
 $\Rightarrow B = (2 + 1)(4 + 1) \Rightarrow B = 15$

c)  $C = 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2 - (x - y)(x + y) \Rightarrow C = 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x^2 - 4xy - 2y^2 - x^2 + y^2$   
 $\Rightarrow C = 2y^2 - 10xy \Rightarrow C = 2.9 - 10.\frac{1}{2}.(-3) \Rightarrow C = 18 + 15 \Rightarrow C = 33$

d)  $D = 5x^2 + 20xy + 4y^2 - 9y^2 - 12xy - 4x^2 + 16x^2 - 8xy + y^2 + 3x^2 - 12y^2 \Rightarrow D = 4x^2 - 16y^2$

$$\Rightarrow D = 4 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{13}{4} \Rightarrow D = 1 + 52 \Rightarrow D = 53$$

#### Bài 4: Tìm $x$ , biết:

a)  $(x+3)^2 - (x-4)(x+4) = 1$

b)  $3(x+2)^2 + (2x-1)^2 - 7(x+3)(x-3) = 36$

c)  $(x+2)^2 + (x-3)^2 - 2(x+1)(x-1) = 9$

#### Lời giải

a)  $(x+3)^2 - (x-4)(x+4) = 1 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - x^2 + 16 = 1 \Rightarrow 6x = -24 \Rightarrow x = -4$

Vậy  $x = -4$

b)  $3(x+2)^2 + (2x-1)^2 - 7(x+3)(x-3) = 36 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 - 7x^2 + 63 = 36$

$$\Rightarrow 8x = -32 \Rightarrow x = -4$$

Vậy  $x = -4$

c)  $(x+2)^2 + (x-3)^2 - 2(x+1)(x-1) = 9 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + x^2 - 6x + 9 - 2x^2 + 2 = 9$

$$\Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$$

Vậy  $x = 3$

#### Bài 5: Tính nhanh

a)  $A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

b)  $B = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) - 2^{32}$

c)  $C = (2^2 + 4^2 + \dots + 100^2) - (1^2 + 3^2 + \dots + 99^2)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = (100+99)(100-99) + \dots + (2+1)(2-1)$

$$\Rightarrow A = 100 + 99 + \dots + 1$$

b)  $B = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) - 2^{32} = (2-1)(2+1)\dots = 2^{32} - 1 - 2^{32} = -1$

c)  $C = (2^2 + 4^2 + \dots + 100^2) - (1^2 + 3^2 + \dots + 99^2) = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + (100^2 - 99^2)$

$$\Rightarrow C = 3 + 7 + \dots + 199 \Rightarrow C = (3+199) \cdot 50 : 2 = 5050$$

#### Bài 6: So sánh các biểu thức sau

a)  $A = 2008 \cdot 2010$  và  $B = 2009^2 + 1$

b)  $A = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$  và  $B = \frac{3^{16}}{2}$

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = 2009^2 - 1 < B = 2009^2 + 1$

b)  $2A = 2(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) = 3^{16} - 1 \Rightarrow A = \frac{3^{16}-1}{2} < B = \frac{3^{16}}{2}$

**Bài 7:**

Tìm hai số tự nhiên liên tiếp, biết rằng hiệu các bình phương của chúng bằng 31.

**Lời giải**

Gọi hai số tự nhiên liên tiếp là:  $x; (x+1) (x \in \mathbb{N}^*)$

Vì hiệu các bình phương của chúng bằng 31 nên ta có:  $(x+1)^2 - x^2 = 31$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 = 31 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$$

Vậy hai số tự nhiên liên tiếp là: 15 và 16

### D. Lập phương của một tổng

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B) \Rightarrow A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B)$$

### E. Lập phương của một hiệu

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A-B) \Rightarrow A^3 - B^3 = (A-B)^3 + 3AB(A-B)$$

### Dạng 1: Sử dụng hằng đẳng thức khai triển biểu thức cho trước

**Cách giải:** Áp dụng trực tiếp các hằng đẳng thức đã học để phá ngoặc và rút gọn biểu thức

#### Bài 1: Thực hiện phép tính

a)  $(3x+4y)^3$

b)  $(x-3y)^3$

c)  $\left(x-\frac{2}{5}\right)^3$

d)  $\left(3x^2+\frac{n}{4}\right)^3$

#### Lời giải

a) Ta có:  $(3x+4y)^3 = 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$

b) Ta có:  $(x-3y)^3 = x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$

c) Ta có:  $\left(x-\frac{2}{5}\right)^3 = x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{12}{25}x - \frac{8}{125}$

d) Ta có:  $\left(3x^2+\frac{n}{4}\right)^3 = 27x^6 + \frac{27}{4}x^4n + \frac{9}{16}x^2n^2 + \frac{n^3}{64}$

#### Bài 2: Thực hiện phép tính

a)  $(3a+1)^3$

b)  $(4-2b)^3$

c)  $(2c-3d)^3$

d)  $\left(\frac{3x}{y}-\frac{2y}{x}\right)^3$

#### Lời giải

a) Ta có:  $(3a+1)^3 = 27a^3 + 27a^2 + 9a + 1$

b) Ta có:  $(4-2b)^3 = 64 - 96b + 48b^2 - 8b^3$

c) Ta có:  $(2c-3d)^3 = 8c^3 - 36c^2d + 54cd^2 - 27d^3$

d) Ta có:  $\left(\frac{3x}{y}-\frac{2y}{x}\right)^3 = \frac{27x^3}{y^3} - 3 \cdot \frac{9x^2}{y^2} \cdot \frac{2y}{x} + 3 \cdot \frac{3x}{y} \cdot \left(\frac{2y}{x}\right)^2 - \left(\frac{2y}{x}\right)^3 = \frac{27x^3}{y^3} - \frac{54x}{y} + \frac{36y}{x} - \frac{8y^3}{x^3}$

**Bài 3: Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của 1 tổng, 1 hiệu**

a)  $a^3 + 12a^2 + 48a + 64$

b)  $-b^3 + 6b^2 - 12b + 8$

c)  $(m-n)^6 - 6(m-n)^4 + 12(m-n)^2 - 8$

d)  $\frac{8}{27}a^3 - \frac{8}{3}a^2b + 8ab^2 - 8b^3$

**Lời giải**

a) Ta có:  $a^3 + 12a^2 + 48a + 64 = (a+4)^3$

b) Ta có:  $-b^3 + 6b^2 - 12b + 8 = (2-b)^3$

c) Ta có:  $(m-n)^6 - 6(m-n)^4 + 12(m-n)^2 - 8 = [(m-n)^2 - 2]^3$

d) Ta có:  $\frac{8}{27}a^3 - \frac{8}{3}a^2b + 8ab^2 - 8b^3 = \left(\frac{2a}{3} - 2b\right)^3$

**Bài 4: Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của 1 tổng, 1 hiệu**

a)  $m^3 + 9m^2n + 27mn^2 + 27n^3$

b)  $8u^3 - 48u^2v + 96uv^2 - 64v^3$

c)  $(z-t)^3 + 15(z-t)^2 + 75(z-t) + 125$

**Lời giải**

a) Ta có:  $m^3 + 9m^2n + 27mn^2 + 27n^3 = (m+3n)^3$

b) Ta có:  $8u^3 - 48u^2v + 96uv^2 - 64v^3 = (2u-4v)^3$

c) Ta có:  $(z-t)^3 + 15(z-t)^2 + 75(z-t) + 125 = (z-t+5)^3$

**Bài 5: Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của 1 tổng, 1 hiệu**

a)  $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

b)  $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

c)  $x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3$

d)  $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

e)  $\frac{x^3}{8} + \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{3}{2}xy^4 + y^6$

**Lời giải**

a) Ta có:  $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (3x+1)^3$

b) Ta có:  $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x+3y)^3$

c) Ta có:  $x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 = (x^2-x)^3$

d) Ta có:  $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x-1)^3$

e) Ta có:  $\frac{x^3}{8} + \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{3}{2}xy^4 + y^6 = \left(\frac{x}{2} + y^2\right)^3$

## Dạng 2: Sử dụng hằng đẳng thức, tính giá trị của biểu thức cho trước

**Cách giải:** Áp dụng các hằng đẳng thức để rút gọn biểu thức trước, sau đó thay số và tính toán.

### Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = \left(\frac{x}{2} - y\right)^3 - 6\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + 12\left(y - \frac{x}{2}\right) - 8$  với  $x = 206; y = 1$

b)  $B = x^3 - 3x^2 + 3x$  với  $x = 11$

c)  $C = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 3(x^2 + 2x + 1)y + 3(x + 1)^2y + y^3$  với  $x + y = 9$

d)  $D = x^3 + \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{100}x$  với  $x = \frac{9}{10}$

e)  $E = (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - 6(x^2 - 2xy + y^2) + 12(x - y) - 8$  với  $x - y = 12$

f)  $F = x^2(x + 1) - y^2(y - 1) + xy - 3xy(x - y + 1) - 95$  với  $x - y = 7$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = \left(\frac{x}{2} - y\right)^3 - 6\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + 12\left(y - \frac{x}{2}\right) - 8 = \left(\frac{x}{2} - y - 2\right)^3 = 10^6$

b) Ta có:  $B = (x - 1)^3 + 1 = 1001$

c) Ta có:  $C = (x + 1)^3 + 3(x + 1)^2 \cdot y + 3(x + 1)y^2 + y^3 = (x + 1 + y)^3 = 10^3 = 1000$

d) Ta có:  $D = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{10} + 3x \cdot \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^3 - \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{10}\right)^3 - \frac{1}{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}$

e) Ta có:  $E = (x - y)^3 - 3(x - y)^2 \cdot 2 + 3(x - y) \cdot 2^2 - 2^3 = (x - y - 2)^3 = 1000$

f) Ta có:  $F = (x - y)^3 + (x - y)^2 - 95 = 7^3 + 7^2 - 95 = 297$

### Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$  với  $x = 48$

b)  $B = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$  với  $x = 4; y = 6$

c)  $C = (x + y)^3 - 9(x + y)^2 + 27(x + y) - 27$  với  $x = 2; y = 6$

d)  $D = 27x^3z^6 - 54x^2yz^4 + 36xy^2z^2 - 8y^3$  với  $x = 25; y = 150; z = 2$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3 \rightarrow A(48) = 125000$

b) Ta có:  $B = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 \rightarrow B = (3x-2y)^3 \rightarrow B = 0$  với  $x = 4; y = 6$

c) Ta có:  $C = (x+y)^3 - 9(x+y)^2 + 27(x+y) - 27 \rightarrow C = (x+y-3)^3 \rightarrow C = 125$  với  $x = 2; y = 6$

d) Ta có:  $D = 27x^3z^6 - 54x^2yz^4 + 36xy^2z^2 - 8y^3 \rightarrow D = (3xz^2 - 2y)^3 \rightarrow D = 0$  với  $x = 25; y = 150; z = 2$

### Bài 3: Tìm $x$ , biết

a)  $(x+1)^3 - x(x-2)^2 + x - 1 = 0$

b)  $(x-2)^3 - x^3 + 6x^2 = 7$

### Lời giải

a) Ta có:  $(x+1)^3 - x(x-2)^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy  $x = 0$

b) Ta có:  $(x-2)^3 - x^3 + 6x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

Vậy  $x = \frac{5}{4}$

### Dạng 3 : Sử dụng hằng đẳng thức, rút gọn biểu thức

**Cách giải:** Áp dụng các hằng đẳng thức linh hoạt hơn, lựa chọn về đẳng thức có thể áp dụng hằng đẳng thức dễ dàng.

#### Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = (a+b)^3 + (a-b)^3$

b)  $B = (x-y)^3 - 3(y-x)^2 z + 3(x-y)z^2 - z^3$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = (a+b)^3 + (a-b)^3 \Rightarrow A = 2a^3 + 6ab^2$

b) Ta có:  $B = (x-y)^3 - 3(y-x)^2 z + 3(x-y)z^2 - z^3 \Rightarrow B = (x-y-z)^3$

#### Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = 6(c-d)(c+d)^2 + 12(c-d)^2(c+d) + (c+d)^3 + 8(c-d)^3$

b)  $B = (m-n)^3 - (n+p)^3 - 3(n+p)^2(n-m) - 3(n+p)(n-m)^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 6(c-d)(c+d)^2 + 12(c-d)^2(c+d) + (c+d)^3 + 8(c-d)^3 = [c+d+2(c-d)]^3 = (3c-d)^3$

b) Ta có:  $B = (m-n)^3 - (n+p)^3 - 3(n+p)^2(n-m) - 3(n+p)(n-m)^2 = [m-n-(n+p)]^3 = (m-2n-p)^3$



#### Dạng 4 : Sử dụng hằng đẳng thức, tính nhanh biểu thức cho trước

##### Cách giải :

Áp dụng linh hoạt các hằng đẳng thức cho các số tự nhiên

##### Bài 1: Tính nhanh

a)  $11^3$

b)  $99^3$

c)  $101^3$

d)  $9^3$

e)  $1001^3$

##### Lời giải

a) Ta có:  $11^3 = (10+1)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331$

b) Ta có:  $99^3 = (100-1)^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 + 1 = 1000000 - 30000 + 300 + 1 = 970301$

c) Ta có:  $101^3 = (100+1)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 + 1 = 1000000 + 30000 + 300 + 1 = 1030301$

d) Ta có:  $9^3 = (10-1)^3 = 10^3 - 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 - 1 = 1000 - 300 + 30 - 1 = 729$

e) Ta có:  $1001^3 = (1000+1)^3 = 1003003001$

##### Bài 2: Tính nhanh

a)  $47^3 + 9 \cdot 47^2 + 27 \cdot 47 + 27$

b)  $1008^3 - 3 \cdot 1008^2 \cdot 8 + 3 \cdot 1008 \cdot 8^2 - 2^6$

c)  $91^3 + 3 \cdot 91^2 \cdot 9 + 3 \cdot 91 \cdot 3^2 + 9^3$

d)  $102^3 - 6 \cdot 102^2 + 12 \cdot 102 - 8$

##### Lời giải

a) Ta có:  $47^3 + 9 \cdot 47^2 + 27 \cdot 47 + 27 = (47+3)^3 = 50^3 = 125000$

b) Ta có:  $1008^3 - 3 \cdot 1008^2 \cdot 8 + 3 \cdot 1008 \cdot 8^2 - 2^6 = (108-2^3)^3 = 1000^3 = 10^9$

c) Ta có:  $91^3 + 3 \cdot 91^2 \cdot 9 + 3 \cdot 91 \cdot 3^2 + 9^3 = (91+9)^3 = 100^3 = 1000000$

d) Ta có:  $102^3 - 6 \cdot 102^2 + 12 \cdot 102 - 8$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1: Thực hiện phép tính

a)  $(3x^2y^3 + z^4)^3$

b)  $\left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{y^3}{z^2}\right)^3$

c)  $\left(\frac{-2}{5}a^2b^2 + b^2c\right)^3$

d)  $\left(\frac{2c}{d^2} + \frac{4}{cd}\right)^3$

### Lời giải

a) Ta có:  $(3x^2y^3 + z^4)^3 = 27x^6y^9 + 27x^4y^6z^4 + 9x^2y^3z^8 + z^{12}$

b) Ta có:  $\left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{y^3}{z^2}\right)^3 = \frac{x^6}{y^9} - \frac{3x^4}{y^3z^2} + \frac{3x^2y^2}{z^4} - \frac{y^9}{z^6}$

c) Ta có:  $\left(\frac{-2}{5}a^2b^2 + b^2c\right)^3 = \frac{-8}{125}a^6b^6 + \frac{12}{25}a^4b^6c - \frac{6}{5}a^2b^6c^2 + b^6c^3$

d) Ta có:  $\left(\frac{2c}{d^2} + \frac{4}{cd}\right)^3 = \frac{8c^3}{d^6} + \frac{48c}{d^5} + \frac{96}{cd^4} + \frac{64}{c^3d^3}$

### Bài 2: Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu

a)  $A = m^6p^3 - 3m^4n^3p^2 + 3m^2n^6p - n^9$

b)  $\left(\frac{x}{2} + y\right)^3 - 6\left(\frac{x}{2} + y\right)^2z + 6(x + 2y)z^2 - 8z^3$

c)  $(m - n)^3 + 15(m - n)^2(m - p) - 75(n - m)(p - m)^2 - 125(p - m)^3$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = m^6p^3 - 3m^4n^3p^2 + 3m^2n^6p - n^9 = (m^2p - n^3)^3$

b) Ta có:  $\left(\frac{x}{2} + y\right)^3 - 6\left(\frac{x}{2} + y\right)^2z + 6(x + 2y)z^2 - 8z^3 = \left(\frac{x}{2} + y - 2z\right)^3$

c) Ta có:

$$(m - n)^3 + 15(m - n)^2(m - p) - 75(n - m)(p - m)^2 - 125(p - m)^3 = [(m - n) - 5(p - m)]^3 = (6m - n - 5p)^3$$

### Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = (u - v)^3 + 3uv(u + v)$

$$b) B = 3(c-2d)(c+2d)^2 + 3(c-2d)^2(c+2d) + (c+2d)^3 + (c-2d)^3$$

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = (u-v)^3 + 3uv(u+v) \Rightarrow A = u^3 + 6uv^2 - v^3$

b) Ta có:  $B = [(c+2d) + (2-2d)] = 8c^3$

#### **Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức sau**

a)  $A = 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1$  tại  $m = 24,5$

b)  $B = \frac{n^3}{27} - \frac{n^2}{3} + n - 1$  tại  $n = 303$

c)  $C = \left(\frac{m}{n} + 1\right)^3 - 15\left(\frac{m+n}{n}\right)^2 + 75\left(\frac{m-n}{n} + 2\right) - 125 = \left[\left(\frac{m}{n} + 1 - 5\right)\right]^3$  tại  $m = 12, n = 2$

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1 = (2m+1)^3 \Rightarrow A(24,5) = 50^3 = 125000$

b) Ta có:  $B = \frac{n^3}{27} - \frac{n^2}{3} + n - 1 = \left(\frac{n}{3} - 1\right)^3 \Rightarrow B = (303) = 100^3 \Rightarrow B = 1000000$

c) Ta có:  $C = \left[\left(\frac{m}{n} + 1 - 5\right)\right]^3 = \left(\frac{m}{n} - 4\right)^3 \Rightarrow C = 2^3 = 8$

#### **Bài 5: Tính nhanh**

a)  $52^3$

b)  $120^3 - 60.120^2 + 1200.120 - 7999$

c)  $499^3$

d)  $48^3 + 6.48^2 + 12.48 + 9$

**Lời giải**

a) Ta có:  $52^3 = (50+2)^3 = 50^3 + 3.50^2.2 + 3.50.2^2 + 2^3 = 140608$

b) Ta có:  $499^3 = (50-1)^3 = 124251499$

c) Ta có:  $120^3 - 60.120^2 + 1200.120 - 7999 = (120-20)^3 + 1 = 100^3 + 1 = 1000001$

d) Ta có:  $48^3 + 6.48^2 + 12.48 + 9 = (48+2)^3 + 1 = 50^3 + 1 = 125001$

## F. Tổng hai lập phương

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

+)  $A^2 - AB + B^2$ : Được gọi là bình phương thiếu của hiệu

## G. Hiệu hai lập phương

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

+)  $A^2 + AB + B^2$ : Được gọi là bình phương thiếu của tổng

### Dạng 1: Sử dụng hằng đẳng thức để phân tích thành tích hoặc rút gọn biểu thức

#### Cách giải:

Áp dụng trực tiếp các hằng đẳng thức đã học để khai triển các biểu thức đã cho

#### Bài 1: Viết các biểu thức sau dưới dạng tích

a)  $x^3 + 8$

b)  $x^3 - 64$

c)  $27x^3 + 1$

d)  $64x^3 - 27$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

b) Ta có:  $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

c) Ta có:  $27x^3 + 1 = (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$

d) Ta có:  $64x^3 - 27 = (4x)^3 - 3^3 = (4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$

#### Bài 2: Viết các biểu thức sau dưới dạng tích

a)  $27 - y^3$

b)  $125 + t^3$

c)  $a^6 + 8b^3$

d)  $z^9 - 27t^{12}$

e)  $\frac{x^3}{125} - \frac{y^3}{27}$

#### Lời giải

a) Ta có:  $27 - y^3 = 3^3 - y^3 = (3 - y)(9 + 3y + y^2)$

b) Ta có:  $125 + t^3 = 5^3 + t^3 = (5 + t)(25 - 5t + t^2)$

c) Ta có:  $a^6 + 8b^3 = (a^2 + 2b)(a^4 - 2a^2b + 4b^2)$

d) Ta có:  $z^9 - 27t^{12} = (z^3)^3 - (3t^4)^3 = (z^3 - 3t^4)(z^6 + 3z^3t^4 + 9t^8)$

e) Ta có:  $\frac{x^3}{125} - \frac{y^3}{27} = \left(\frac{x}{5}\right)^3 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 = \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right) \left(\frac{x^2}{25} + \frac{xy}{15} + \frac{y^2}{9}\right)$

### Bài 3: Viết các biểu thức sau dưới dạng tích

a)  $(x+5)(x^2-5x+25)$

b)  $(1-x)(x^2+x+1)$

c)  $(y+3t)(9t^2-3yt+y^2)$

d)  $\left(4 - \frac{u}{2}\right) \left(\frac{u^2}{4} + 2u + 16\right)$

### Lời giải

a) Ta có:  $(x+5)(x^2-5x+25) = x^3 + 5^3$

b) Ta có:  $(1-x)(x^2+x+1) = 1 - x^3$

c) Ta có:  $(y+3t)(9t^2-3yt+y^2) = y^3 + 27t^3$

d) Ta có:  $\left(4 - \frac{u}{2}\right) \left(\frac{u^2}{4} + 2u + 16\right) = 4^3 - \frac{u^3}{8}$

### Bài 4: Viết các biểu thức sau dưới dạng tích

a)  $\left(t + \frac{1}{3}\right) \left(t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right)$

b)  $\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{5}\right) \left(\frac{x^2}{25} + \frac{x}{20} + \frac{1}{16}\right)$

c)  $\left(\frac{3}{4}a + b^3\right) \left(\frac{-9}{16}a^2 + \frac{3}{4}ab^3 - b^6\right)$

d)  $(m - 4n^2)(m^2 + 4mn^2 + 16m^4)$

### Lời giải

a) Ta có:  $\left(t + \frac{1}{3}\right) \left(t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right) = t^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$

b) Ta có:  $\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{5}\right) \left(\frac{x^2}{25} + \frac{x}{20} + \frac{1}{16}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \left(\frac{x}{5}\right)^3$

c) Ta có:  $\left(\frac{3}{4}a + b^3\right) \left(\frac{-9}{16}a^2 + \frac{3}{4}ab^3 - b^6\right) = -\left(\frac{3}{4}a\right)^3 - (b^3)^3$

d) Ta có:  $(m - 4n^2)(m^2 + 4mn^2 + 16m^4) = m^3 - (4n^2)^3$

### Bài 5: Rút gọn biểu thức

a)  $A = (k-4)(k^2+4k+16) - (128+k^3)$

b)  $B = (2m+3n)(4m^2-6mn+9n^2) - (3m-2n)(9m^2+6mn+4n^2)$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = (k-4)(k^2+4k+16) - (128+k^3) = k^3 - 64 - 128 - k^3 = -192$

b) Ta có:  $B = 8m^3 + 27n^3 - 27n^3 + 8n^3 \Rightarrow B = 8(m^3 + n^3)$

### Dạng 2: Tính nhanh

**Cách giải:** Áp dụng các hằng đẳng thức đã học với các số tự nhiên để tính giá trị các biểu thức một cách hợp lý

#### Bài 1: Tính nhanh

a)  $21^3$

b)  $199^3$

c)  $18^3 + 2^3$

d)  $23^3 - 27$

### Lời giải

a) Ta có:  $21^3 = 9261$

b) Ta có:  $199^3 = 7880599$

c) ta có:  $5840$

d) Ta có:  $12140$

#### Bài 2: Tính nhanh

a)  $19^3$

b)  $201^3$

c)  $99^3 + 1$

d)  $52^3 - 8$

### Lời giải

a) Ta có:  $19^3 = 6859$

b) Ta có:  $201^3 = 8120601$

c) Ta có:  $99^3 + 1 = 970300$

d) Ta có:  $52^3 - 8 = 140581$

### Dạng 2: Dạng toán tìm x

**Cách giải:** Áp dụng các hằng đẳng thức đã học để rút gọn biểu thức từ đó tìm x

#### Bài 1: Tìm x, biết

a)  $(x+2)(x^2-2x+4) - x(x^2+2) = 0$

b)  $(x-1)^3 - (x+3)(x^2-3x+9) + 3(x^2-4) = 2$

c)  $(x+2)(x^2-2x+4) - x(x^2+2) = 15$

d)  $(x+3)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2-2x+1) = 28$

e)  $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$

f)  $(x^2-1)^3 - (x^4+x^2+1)(x^2-1) = 0$

### Lời giải

a) Ta có:  $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x^2+2)=0 \rightarrow x^3+8-x^3-2x=0 \rightarrow 2x=8 \rightarrow x=4$

Vậy  $x=4$

b) Ta có:  $x^3-3x^2+3x-1-x^3-27+3x^2-12=0 \rightarrow 3x=40 \rightarrow x=\frac{40}{3}$

Vậy  $x=\frac{40}{3}$

c) Ta có:  $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x^2+2)=15 \rightarrow x^3+8-x^3-2x=15 \rightarrow 2x=-7 \rightarrow x=\frac{-7}{2}$

Vậy  $x=\frac{-7}{2}$

d) Ta có:  $(x+3)^3-x(3x+1)^2+(2x+1)(4x^2-2x+1)=28 \rightarrow x^3+9x^2+27x+27-9x^3-6x^2-x+8x^3+1=28$

$$\rightarrow 3x^2+26x=0 \rightarrow x(3x+26)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-26}{3} \end{cases}$$

Vậy  $x \in \left\{0; \frac{-26}{3}\right\}$

e) Ta có:  $(x+1)^3-(x-1)^3-6(x-1)^2=-10 \rightarrow x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1-6x^2+12x-6=-10$

$$\Rightarrow 12x=-6 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$$

Vậy  $x=\frac{-1}{2}$

f) Ta có:  $(x^2-1)^3-(x^4+x^2+1)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x^6-3x^4+3x^2-1-(x^6-1)=0 \Leftrightarrow x=0$

Vậy  $x=0$

### Bài 2:

Tìm các số  $x$  và  $y$ , biết:  $x^3+y^3=152; x^2-xy+y^2=19; x-y=2$

### Lời giải

Ta có:  $(x+y)(x^2-xy+y^2)=152 \Rightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy  $x=5; y=3$

### Bài 3:

**Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:**

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - 16x(x^2 - y) = 32$$

### Lời giải

Ta có:  $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - 16x(x^2 - y) = 32$

$$\Leftrightarrow (2x)^3 - y^3 + (2x)^3 + y^3 - 16x^3 + 16xy = 32 \Leftrightarrow xy = 2$$

Ta có bảng sau:

$x$	1	-1	2	-2
$y$	2	-2	1	-1

### Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức

**Cách giải:** Áp dụng các hằng đẳng thức đã học để rút gọn các biểu thức đã cho, sau đó thay số và tính giá trị của biểu thức

#### Bài 1: Tính giá trị của biểu thức

a)  $A = (7 - m)(m^2 + 7m + 49) - (64 - m^3)$  tại  $m = 2017$

b)  $B = 8a^3 - 27b^3$  biết  $ab = 12; 2a - 3b = 5$

c)  $C = a^3 + b^3 + 6a^2b^2(a + b) + 3ab(a^2 + b^2)$  biết  $a + b = 1$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = (7 - m)(m^2 + 7m + 49) - (64 - m^3) \Rightarrow A = 279$  tại  $m = 2017$

b) Ta có:  $B = 8a^3 - 27b^3 = (2a)^3 - (3b)^3 = (2a - 3b)^3 + 3 \cdot 2a \cdot 3b(2a - 3b) \Rightarrow B = 1205$

khi  $ab = 12; 2a - 3b = 5$

c) Ta có:  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 1 - 3ab; 6a^2b^2(a + b) = 6a^2b^2 \Rightarrow C = 1$

khi  $a + b = 1$

#### Bài 2:

**Tính giá trị của biểu thức**  $A = \frac{2014^2 + 1}{2014^2 - 2013}$

### Lời giải

Ta có:  $A = \frac{2014^2 + 1}{2014^2 - 2013} = \frac{(2014 + 1)(2014^2 - 2014 + 1)}{2014^2 - 2014 + 1} = 2015$



### Bài 3: Rút gọn rồi tính

- a)  $A = (3x-1)(9x^2-3x+1) - (1-3x)(1+3x+9x^2)$  với  $x=10$
- b)  $B = (x-1)^3 - 4x(x+1)(x-1) + 3(x-1)(x^2+x+1)$  với  $x=-2$
- c)  $C = (x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$  với  $x=1$
- d)  $D = (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 6(x+1)^2$  với  $x=1$
- e)  $E = \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^3$  với  $xy=4; x+2y=8$

### Lời giải

- a) Ta có:  $A = (3x-1)(9x^2-3x+1) - (1-3x)(1+3x+9x^2) = 54x^3 = 54000$
- b) Ta có:  $B = -3x^2 + 7x - 4 = -30$  với  $x=-2$
- c) Ta có:  $C = (x^3-1)(x^3-8) = 0$  với  $x=1$
- d) Ta có:  $D = (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 6(x+1)^2 = 1$
- e<sup>(\*)</sup>) Ta có:  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{x+2y}{4} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow E = 5$  với  $xy=4; x+2y=8$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

#### Bài 1: Đơn giản các biểu thức sau

- a)  $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$
- b)  $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
- c)  $C = (x^3-3)(x^4+3x^2+9)$
- d)  $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

### Hướng dẫn giải

- a) Ta có:  $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = x^3 + \frac{1}{8}$
- b) Ta có:  $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2) = x^3 - 27y^3$
- c) Ta có:  $C = (x^3-3)(x^4+3x^2+9) = x^7 - 27$
- d) Ta có:  $(2x-1)(4x^2+2x+1) = 8x^3 - 1$

#### Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = 3(1-a)(9a^2 + 9a + 9) + 81a(a-1)$

b)  $B = (a+b+c)^3 + (a-b-c)^3$

### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $A = 27 - 27a^3 + 81a^2 - 81a = 27(1 - 3a + 3a^2 - a^3) = 27(1-a)^3$

b) Áp dụng hằng đẳng thức:  $A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B)$ ;  $A^3 - B^3 = (A-B)^3 + 3AB(A-B)$

### Bài 3: Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của $x$

a)  $A = 3(x-1)^2 - (x+1)^2 + 2(x-3)(x+3) - (2x+3)^2 - (5-20x)$

b)  $B = -x(x+2)^2 + (2x+1)^2 + (x+3)(x^2-3x+9) - 1$

### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $A = 3x^2 - 6x + 3 - x^2 - 2x - 1 + 2x^2 - 18 - 4x^2 - 12x - 9 - 5 + 20x \Rightarrow A = -30 \Rightarrow \text{đpcm}$

b) Ta có:  $B = -x^3 - 4x^2 - 4x + 4x^2 + 4x + 1 + x^3 + 27 - 1 \Rightarrow B = 27 \Rightarrow \text{đpcm}$

### Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = 2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2)$  biết  $x + y = 1$

b)  $B = x^3 + y^3 + 3xy$  biết  $x + y = 1$

### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $A = 2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2) \Rightarrow A = -1$

b) Ta có:  $B = x^3 + y^3 + 3xy \Rightarrow B = (x+y)^3 \Rightarrow B = 1$

### Bài 5:

Chứng minh rằng với mọi  $a, b, c$  ta có:  $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

### Hướng dẫn giải

Đặt  $A = a+b$ ;  $B = c$ . sau đó biến đổi vế trái bằng vế phải

### Bài 6:

Cho  $a+b+c=0$ . Chứng minh rằng:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

### Hướng dẫn giải

Cách 1:  $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

Thay  $a+b+c=0$ ;  $a+b=-c$ ;  $b+c=-a$ ;  $c+a=-b \Rightarrow 0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \Rightarrow \text{đpcm}$

**Cách 2:** Từ  $a+b+c=0 \rightarrow a=-(b+c) \Rightarrow a^3=-(b+c)^3=-[b^3+c^3-3bc(b+c)]=-b^3-c^3+3ab$

Thay vào  $VT=3abc=VP$

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 1: Chọn câu đúng

A.  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

B.  $(A+B)^2 = A^2 + AB + B^2$

C.  $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

D.  $(A+B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

### Lời giải

Chọn đáp án A

**Giải thích:**

Ta có:  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

### Câu 2: Chọn câu sai

A.  $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$

B.  $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

C.  $(-x-y)^2 = (-x)^2 - 1(-x)y + y^2$

D.  $(x+y)(x+y) = y^2 - x^2$

### Lời giải

Chọn đáp án D

**Giải thích:**

Ta có:  $(x+y)(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq y^2 - x^2 \Rightarrow D$  sai

### Câu 3: Khai triển $4x^2 - 25y^2$ theo hằng đẳng thức ta được:

A.  $(4x-5y)(4x+5y)$

B.  $(4x-25y)(4x+25y)$

C.  $(2x-5y)(2x+5y)$

D.  $(2x-5y)^2$

### Lời giải

Chọn đáp án C

**Giải thích:**

Ta có:  $4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x-5y)(2x+5y)$

### Câu 4: Khai triển $(3x-4y)^2$ ta được:

A.  $9x^2 - 24xy + 16y^2$

B.  $9x^2 - 12xy + 16y^2$

C.  $9x^2 - 24xy + 4y^2$

D.  $9x^2 - 6xy + 16y^2$

### Lời giải

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $(3x - 4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$

**Câu 5:** Biểu thức  $\frac{1}{4}x^2y^2 + xy + 1$  bằng

A.  $\left(\frac{1}{4}xy + 1\right)^2$

B.  $\left(\frac{1}{2}xy + 1\right)^2$

C.  $\left(xy - \frac{1}{2}\right)^2$

D.  $\left(\frac{1}{2}xy - 1\right)^2$

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

Ta có:  $\frac{1}{4}x^2y^2 + xy + 1 = \left(\frac{1}{2}xy\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}xy \cdot 1 + 1 = \left(\frac{1}{2}xy + 1\right)^2$

**Câu 6:** Chọn câu đúng

A.  $(c+d)^2 - (a+b)^2 = (c+d+a+b)(c+d-a+b)$

B.  $(c-d)^2 - (a+b)^2 = (c-d+a+b)(c-d-a+b)$

C.  $(a+b+c-d)(a+b-c+d) = (a+b)^2 - (c-d)^2$

D.  $(c-d)^2 - (a-b)^2 = (c-d+a-b)(c-d-a-b)$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:

+)  $(c+d)^2 - (a+b)^2 = (c+d+a+b)(c+d-(a+b)) = (c+d+a+b)(c+d-a-b) \Rightarrow A$  sai

+)  $(c-d)^2 - (a+b)^2 = (c-d+a+b)[c-d-(a+b)] = (c-d+a+b)(c-d-a-b) \Rightarrow B$  sai

+)  $(c-d)^2 - (a-b)^2 = (c-d+a-b)(c-d-(a-b)) = (c-d+a-b)(c-d-a+b) \Rightarrow D$  sai

+)  $(a+b+c-d)(a+b-c+d) = [(a+b)+(c-d)][(a+b)-(c-d)] = (a+b)^2 - (c-d)^2 \Rightarrow C$  đúng

**Câu 7:**

Rút gọn biểu thức  $A = (3x-1)^2 - 9x(x+1)$  ta được:

A.  $-15x+1$

B. 1

C.  $15x+1$

D.  $-1$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $A = (3x-1)^2 - 9x(x+1) = (3x)^2 - 2.3x+1 - 9x^2 - 9x = -15x+1$

**Câu 8:**

Rút gọn biểu thức  $B = (2a-3)(a+1) - (a-4)^2 - a(a+7)$  ta được:

A. 0

B. 1

C. 19

D.  $-19$

**Lời giải**

**Chọn đáp án D**

**Giải thích:**

Ta có:  $B = (2a-3)(a+1) - (a-4)^2 - a(a+7) = 2a^2 + 2a - 3a - 3 - a^2 + 8a - 16 - a^2 - 7 = -19$

**Câu 9:**

Cho  $B = (x^2+3)^2 - x^2(x^2+3) - 3(x+1)(x-1)$ . Chọn câu đúng

A.  $B < 12$

B.  $B > 13$

C.  $12 < B < 14$

D.  $11 < B < 13$

**Lời giải**

**Chọn đáp án D**

**Giải thích:**

Ta có:  $B = (x^2+3)^2 - x^2(x^2+3) - 3(x+1)(x-1) = x^4 + 6x^2 + 9 - x^4 - 3x^2 - 3x^2 + 3 = 12$

**Câu 10:**

Cho  $C = \frac{(x+5)^2 + (x-5)^2}{x^2 + 25}$  và  $D = \frac{(2x+5)^2 + (5x-2)^2}{x^2 + 1}$ . Tìm mối quan hệ giữa  $C$  và  $D$

A.  $D = 14C + 1$

B.  $D = 14C$

C.  $D = 14C - 1$

D.  $D = 14C - 2$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

$$\text{Ta có: } C = \frac{(x+5)^2 + (x-5)^2}{x^2 + 25} = \frac{x^2 + 10x + 25 + x^2 - 10x + 25}{x^2 + 25} = \frac{2(x^2 + 25)}{x^2 + 25} = 2$$

$$\text{Và } D = \frac{(2x+5)^2 + (5x-2)^2}{x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 20x + 25 + 25x^2 - 20x + 4}{x^2 + 1} = \frac{29(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 29$$

$$\text{Vậy } D = 29; C = 2 \Rightarrow D = 14C + 1 (\text{do: } 29 = 14 \cdot 2 + 1)$$

**Câu 11:**

Có bao nhiêu giá trị  $x$  thỏa mãn:  $(2x-1)^2 - (5x-5)^2 = 0$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

$$\text{Ta có: } (2x-1)^2 - (5x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x-1+5x-5)(2x-1-5x+5) = 0 \Leftrightarrow (7x-6)(4-3x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{4}{3}; \frac{7}{6} \right\}$$

**Câu 12:**

Tìm  $x$ , biết:  $(x-6)(x+6) - (x+3)^2 = 9$

A.  $x = -9$

B.  $x = 9$

C.  $x = 1$

D.  $x = -6$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $(x-6)(x+6)-(x+3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 36 - x^2 - 6x - 9 = 9 \Leftrightarrow -6x - 54 = 0 \Leftrightarrow x = -9$

Vậy  $x = -9$

**Câu 13:**

So sánh  $A = 2016.2018.a$  và  $B = 2017^2 a (a > 0)$

A.  $A = B$

B.  $A < B$

C.  $A > B$

D.  $A \geq B$

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

Ta có:  $A = 2016.2018.a = (2017-1)(2017+1)a = (2017^2 - 1)a$

Vì  $2017^2 - 1 < 2017^2$  và  $a > 0 \Rightarrow (2017^2 - 1)a < 2017^2 a$  hay  $A < B$

**Câu 14:**

So sánh  $M = 2^{32}$  và  $N = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+16)$

A.  $M > N$

B.  $M < N$

C.  $M = N$

D.  $M = N - 1$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:

$$N = 3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+16) = (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+16) = (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+16)$$
$$= \dots = 2^{32} - 1, \text{ mà } 2^{32} - 1 < 2^{32} \Rightarrow N < M$$

**Câu 15:**

Cho  $P = -4x^2 + 4x - 2$ . Chọn khẳng định đúng

A.  $P \leq -1$

B.  $P > 1$

C.  $P > 0$

D.  $P \leq -2$

**Lời giải**



**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

**Ta có:**  $P = -4x^2 + 4x - 2 = -4x^2 + 4x - 1 - 1 = -(4x^2 - 4x + 1) - 1 = -1 - (2x - 1)^2$

**Nhận thấy:**  $-(2x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 - (2x - 1)^2 \leq -1, \forall x \Rightarrow P \leq -1$

**Câu 16:**

**Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:**  $Q = 8 - 8x - x^2$

A.  $x = 8$

B.  $x = 11$

C.  $x = -4$

D.  $x = 24$

**Lời giải**

**Chọn đáp án D**

**Giải thích:**

**Ta có:**  $Q = 8 - 8x - x^2 = -(x^2 + 8x - 8) = -(x + 4)^2 + 24 \leq 24 \Rightarrow Q_{\max} = 24 \Leftrightarrow x = -4$

**Câu 17:**

**Biểu thức**  $E = x^2 - 20x + 101$  **đạt giá trị nhỏ nhất khi**

A.  $x = 9$

B.  $x = 10$

C.  $x = 11$

D.  $x = 12$

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

**Ta có:**  $E = x^2 - 20x + 101 = (x - 10)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow E_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = 10$

**Câu 18:**

**Cho biểu thức**  $K = x^2 - 6x + y^2 - 4y + 6$  **có giá trị nhỏ nhất là**

A. 6

B. 1

C. -7

D. 7

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

**Ta có:**  $K = x^2 - 6x + y^2 - 4y + 6 = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 7 \geq -7 \Rightarrow K_{\min} = -7 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

**Câu 19:**

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $I = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + 4x + 6) + 3$  là:

A. 4

B. 5

C. 3

D. 2

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

Ta có:  $I = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + 4x + 6) + 3 = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + 4x + 5 + 1) + 3 = (x^2 + 4x + 5)^2 + (x^2 + 4x + 5) + 3$   
 $= (x^2 + 4x + 5)^2 + (x^2 + 4x + 4) + 4 = (x^2 + 4x + 5)^2 + (x+2)^2 + 4$

Ta có:  $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1 \geq 1, \forall x \Rightarrow (x^2 + 4x + 5)^2 \geq 1, \forall x$

Vì  $(x+2)^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow (x^2 + 4x + 5)^2 + (x+2)^2 + 4 \geq 1 + 4 = 5$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 5 = 1 \\ (x+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $I$  là 5 khi  $x = -2$

**Câu 20:**

Biểu thức  $(a+b+c)^2$  bằng

A.  $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

B.  $a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + 2ab$

C.  $a^2 + b^2 + c^2 + bc + ac + ab$

D.  $a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca)$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

**Câu 21:**

Chọn câu đúng

$$A. (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$B. (A-B)^2 = A^3 - 3A^2B - 3AB^2 - B^3$$

$$C. (A+B)^3 = A^3 + B^3$$

$$D. (A-B)^3 = A^3 - B^3$$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

**Ta có:**  $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$  nên đáp án A là đúng.

**Câu 22:**

Chọn câu sai

$$A. A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$B. A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$C. (A+B)^3 = (B+A)^3$$

$$D. (A-B)^3 = (B-A)^3$$

**Lời giải**

**Chọn đáp án D**

**Giải thích:**

**Ta có:**  $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ ;  $(B-A)^3 = B^3 - 3B^2A + 3BA^2 - A^3$

Từ đó suy ra  $(A-B)^3 \neq (B-A)^3 \Rightarrow D$  sai

**Câu 23:**

Chọn câu đúng

$$A. 8 + 12y + 6y^2 + y^3 = (8 + y^3)$$

$$B. a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$$

$$C. (2x-y)^3 = 2x^3 - 6x^2y + xy - y^3$$

$$D. (3a+1)^3 = 3a^3 + 9a^2 + 3a + 1$$

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

**Ta có:**  $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \Rightarrow B$  đúng

**Câu 24:**

Chọn câu sai

$$A. (-b-a)^3 = -a^3 - 3ab(a+b) - b^3$$

$$B. (c-d)^3 = c^3 - d^3 + 3cd(d-c)$$

C.  $(y-2)^2 = y^3 - 8 - 6y(y+2)$

D.  $(y-1)^2 = y^3 - 1 - 3y(y-1)$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:  $(y-2)^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8 = y^3 - 8 - 6y(y-2) \neq y^3 - 8 - 6y(y+2) \Rightarrow C$  sai

**Câu 25:**

Viết biểu thức  $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$  dưới dạng lập phương của một tổng

A.  $(x+4)^3$

B.  $(x-4)^3$

C.  $(x-8)^3$

D.  $(x+8)^3$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = x^3 + 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 + 4^3 = (x+4)^3$

**Câu 26:**

Viết biểu thức  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  dưới dạng lập phương của một hiệu, ta được:

A.  $(x+4)^3$

B.  $(x-4)^3$

C.  $(x+2)^3$

D.  $(x-2)^3$

**Lời giải**

**Chọn đáp án D**

**Giải thích:**

Ta có:  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3 \Rightarrow D$  đúng

**Câu 27:**

Viết biểu thức  $(x-3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$  dưới dạng hiệu hai lập phương

A.  $x^3 + (3y)^3$

B.  $x^3 + (9y)^3$

C.  $x^3 - (3y)^3$

D.  $x^3 - (9y)^3$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:  $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2) = x^3 - (3y)^3$

**Câu 28:**

Viết biểu thức  $(x^2+3)(x^4-3x^2+9)$  dưới dạng tổng hai lập phương

A.  $(x^2)^3 + 3^3$

B.  $(x^2)^3 - 3^3$

C.  $(x^2)^3 + 9^3$

D.  $(x^2)^3 - 9^3$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $(x^2+3)(x^4-3x^2+9) = (x^2)^3 + 3^3$

**Câu 29:**

Tìm  $x$ , biết  $x^3+3x^2+3x+1=0$

A.  $x=-1$

B.  $x=1$

C.  $x=-2$

D.  $x=0$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $x^3+3x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^3=0 \Leftrightarrow x=-1$

**Câu 30:**

Cho  $x$ , thỏa mãn  $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x^2-2)=14$ . Chọn câu đúng

A.  $x=-3$

B.  $x=11$

C.  $x=3$

D.  $x=4$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:

$$(x+2)(x^2-2x+4)-x(x^2-2)=14 \Leftrightarrow x^3+2^3-(x^3-2x)=14 \Leftrightarrow x^3+8-x^3+2x=14 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$$

Vậy  $x=3$ .

**Câu 31:**

Cho biểu thức  $A = x^3 - 3x^2 + 3x$ . Tính giá trị biểu thức  $A$  khi  $x = 1001$

A.  $A = 1000^3$

B.  $A = 1001$

C.  $A = 1000^3 - 1$

D.  $A = 1000^3 + 1$

**Lời giải**

Chọn đáp án D

**Giải thích:**

Ta có:  $A = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x-1)^3 + 1$

Thay  $x = 1001$  vào biểu thức  $A$  ta được:  $A = (1001-1)^3 + 1 = 1000^3 + 1$

**Câu 32:**

Rút gọn biểu thức  $M = (2x+3)(4x^2-6x+9) - 4(2x^3-3)$  được giá trị của  $M$  là:

A. Một số lẻ

B. Một số chẵn

C. Một số chính phương

D. Một số chia hết cho 5

**Lời giải**

Chọn đáp án A

**Giải thích:**

Ta có:  $M = (2x+3)(4x^2-6x+9) - 4(2x^3-3) = (2x)^3 + 3^3 - 8x^3 + 12 = 8x^3 + 27 - 8x^3 + 12 = 39$

Vậy  $M$  là một số lẻ.

**Câu 33:**

Giá trị của biểu thức  $P = -2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2)$  khi  $x + y = 1$  là:

A.  $P = 3$

B.  $P = 1$

C.  $P = 5$

D.  $P = 0$

**Lời giải**

Chọn đáp án B

**Giải thích:**

Ta có:  $P = -2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) = -2[(x + y)^3 - 3xy(x + y)] + 3[(x + y)^2 - 2xy]$

Vì  $x + y = 1$  nên ta có:  $P = -2(1 - xy) + 3(1 - 2xy) = -2 + 6xy + 3 - 6xy = 1$

Vậy  $P = 1$

**Câu 34:**

Cho  $P = (4x + 1)^3 - (4x + 3)(16x^2 + 3)$  và  $Q = (x - 2)^3 - x(x + 1)(x - 1) + 6x(x - 3) + 5x$ . Chọn câu đúng

A.  $P = Q$

B.  $P < Q$

C.  $P > Q$

D.  $P = 2Q$

**Lời giải**

Chọn đáp án A

**Giải thích**

Ta có:  $P = (4x + 1)^3 - (4x + 3)(16x^2 + 3) = 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1 - 64x^3 - 12x - 48x^2 - 9 = -8 \Rightarrow P = -8$

$Q = (x - 2)^3 - x(x + 1)(x - 1) + 6x(x - 3) + 5x = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + x + 6x^2 - 18x + 5x = -8 \Rightarrow Q = -8$

Vậy  $P = Q$

**Câu 35:**

Giá trị của biểu thức  $E = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$  là:

A. 2

B. 3

C. 1

D. 4

**Lời giải**

Chọn đáp án A

**Giải thích**

Ta có:  $E = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + 1 - (x^3 - 1) = x^3 + 1 - x^3 + 1 = 2$

Vậy  $E = 2$

**Câu 36:**

Cho  $a + b + c = 0$ . Giá trị của biểu thức  $B = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  bằng

A. 1

B. 1

**Lời giải****Chọn đáp án A*****Giải thích***

Ta có:  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

**Từ đó**  $B = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc = \left[ (a+b)^3 + c^3 \right] - 3ab(a+b+c)$

$$= \underbrace{(a+b+c)}_{=0} \left[ (a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \right] - 3ab \underbrace{(a+b+c)}_{=0} = 0$$

Vậy  $B = 0$



## PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

### A. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

- Phương pháp đặt nhân tử chung là một phương pháp để phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách nhóm các hạng tử có chung nhân tử.
- Phương pháp đặt nhân tử chung ngược lại với phép nhân đơn thức với đa thức, đa thức với đa thức:  $AB + AC = A(B + C)$ ;  $AB - AC = A(B - C)$
- Nhân tử chung là tích của phần hệ số với phần biến và được xác định như sau:
  - +) Phần hệ số: Là UCLN của các hệ số có mặt trong hạng tử
  - +) Phần biến: Là phần biến có mặt trong tất cả các hạng tử của đa thức đó, mỗi biến lấy với số mũ nhỏ nhất
  - +) Viết nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc, viết tất cả các hạng tử còn lại của mỗi hạng tử vào trong dấu ngoặc (dựa vào tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng)

#### Ví dụ:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $A = 5xy - x^2y^2 + 2x^2y$

b)  $B = 2x(x - y) + 3y(y - x)$

c)  $20yz(y + z) - 5(2y + 2z)z^2$

#### Lời giải

a) Đa thức có 3 hạng tử là:  $5xy; x^2y^2; 2x^2y$

+) Nhân tử chung của phần hệ số là:  $UCLN(5; 1; 2) = 1$

+) Nhân tử chung của phần biến là:  $xy$

Vậy nhân tử chung của đa thức trên là:  $1 \cdot xy = xy$

Ta có:  $A = 5xy - x^2y^2 + 2x^2y = xy(5 - xy + 2x)$

b) Không nên khai triển vì biểu thức sẽ làm bài toán phức tạp hơn. Nhận thấy nếu đổi dấu hạng tử thứ 2 thì đa thức xuất hiện nhân tử chung là:  $x - y$

Ta có:  $B = 2x(x - y) - 3y(x - y) = (x - y)(2x - 3y)$

c) Ở hạng tử thứ hai có nhân tử chung là 2; nên sau khi đưa ra ngoài ngoặc thì ta tiếp tục thấy nhân tử chung của đa thức là:  $y + z$

Ta có:  $20yz(y+z) - 10(y+z)z^2 = 10z(y+z)(2y-z)$

\*) Chú ý:

- Để tìm “**nhân tử riêng**” là hạng tử bên trong ngoặc ta lấy đa thức chia cho nhân tử chung
- Đôi khi để làm xuất hiện nhân tử chung, ta phải đổi dấu của các hạng tử

### Dạng 1: phân tích đa thức thành nhân tử

**Cách giải:** Phân tích các hạng tử của đa thức để chọn nhân tử chung thích hợp, sau đó áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng

#### Bài 1: Phân các đa thức sau tích thành nhân tử

a.  $x^3 + 2x$

b.  $3x - 6y$

c.  $5(x+3y) - 15x(x+3y)$

d.  $3(x-y) - 5x(y-x)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^3 + 2x = x(x^2 + 2)$

b) Ta có:  $3x - 6y = 3(x - 2y)$

c) Ta có:  $5(x+3y) - 15x(x+3y) = 5(x+3y)(1-3x)$

d) Ta có:  $3(x-y) - 5x(y-x) = (x-y)(3+5x)$

#### Bài 2: Phân các đa thức sau tích thành nhân tử

a.  $4x^2 - 6x$

b.  $x^3y - 2x^2y^2 + 5xy$

c.  $2x^2(x+1) + 4x(x+1)$

d.  $\frac{2}{5}x(y-1) - \frac{2}{5}y(1-y)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $4x^2 - 6x = 2x(2x - 3)$

b) Ta có:  $x^3y - 2x^2y^2 + 5xy = xy(x^2 - 2xy + 5)$

c) Ta có:  $2x^2(x+1) + 4x(x+1) = 2x(x+1)(x+2)$

d) Ta có:  $\frac{2}{5}x(y-1) - \frac{2}{5}y(1-y) = \frac{2}{5}(y-1)(x+y)$

#### Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a.  $2(x-1)^3 - 5(x-1)^2 - (x-1)$

b.  $x(y-x)^3 - y(x-y)^2 + xy(x-y)$

c.  $xy(x+y) - y(x+y)^2 + y^2(x-y)$

d.  $x(x+y)^2 - y(x+y)^2 + xy - x^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $2(x-1)^3 - 5(x-1)^2 - (x-1) = (x-1)(2x^2 - 9x + 6)$

b) Ta có:  $x(y-x)^3 - y(x-y)^2 + xy(x-y) = (x-y)[-x(x-y)^2 - y^2]$

c) Ta có:  $xy(x+y) - y(x+y)^2 + y^2(x-y) = (x+y)(xy - 2y)$

d) Ta có:  $x(x+y)^2 - y(x+y)^2 + xy - x^2 = (x+y)^2(x-y) - x(x-y) = (x-y)[(x+y)^2 + y^2]$

### Bài 4: Phân tích thành nhân tử

a.  $5x^2y - 10xy^2$

b.  $13x^4y^3 - 26x^2y^2z^2 - 39xy^2z^3$

c.  $9x^2y^2 + 15x^2y - 21xy^2$

d.  $\frac{1}{2}x(x^2 - 4) + 4(x+2)$

### Lời giải

a) Ta có:  $5x^2y - 10xy^2 = 5xy(x - 2y)$

b) Ta có:  $13x^4y^3 - 26x^2y^2z^2 - 39xy^2z^3 = 13xy^2(x^3y + 2xz^2 - 3z^3)$

c) Ta có:  $9x^2y^2 + 15x^2y - 21xy^2 = 3xy(3xy + 5x - 7y)$

d) Ta có:  $\frac{1}{2}x(x^2 - 4) + 4(x+2) = (x+2)\left[\frac{1}{2}x(x-2) + 2\right]$

## Dạng 2: Tính nhanh

**Cách giải:** Phân tích các hạng tử của đa thức để chọn nhân tử chung thích hợp, sau đó áp dụng tính chất phân phối của phép nhân với phép cộng

### Bài 1: Tính hợp lý

a.  $A = 75.20,9 + 5^2.20,9$

b.  $B = 86.15 + 150.1,4$

c.  $C = 93.92 + 14.16$

d.  $D = 98,6.199 - 990.9,86$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 75.20,9 + 5^2.20,9 = 20,9(75 + 25) = 2090$

b) Ta có:  $B = 86.15 + 150.1,4 = 15(86 + 14) = 1500$

c) Ta có:  $C = 93.32 + 14.16 = 93.32 + 7.32 = 32(93 + 7) = 3200$

d) Ta có:  $D = 98,6.199 - 990.9,86 = 98,6.199 - 99.10.9,86 = 98,6.199 - 99.98,6 = 9860$

### Bài 2: Tính hợp lý

a.  $A = 85.12,7 + 5.3.12,7$

b.  $B = 8,4.84,5 + 840.0,155$

c.  $C = 0,78.1300 + 50.6,5 - 39$

d.  $D = 0,12.90 - 110.0,6 + 36 - 25.6$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 85.12,7 + 5.3.12,7 = 1270$

b) Ta có:  $B = 8,4.84,5 + 840.0,155 = 840(840.0,155 = 8,4.15,5)$

c) Ta có:  $C = 0,78.1300 + 50.6,5 - 39 = 1300$

d) Ta có:  $D = 0,12.90 - 110.0,6 + 36 - 25.6 = -72(0,12.90 = 6.18; 110.0,6 = 11.6; 36 = 6.6)$

### Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức

**Cách giải:** Phân tích các hạng tử của đa thức để chọn nhân tử chung thích hợp, sau đó áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng

#### Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = x(x-1) - y(x-1)$  với  $x = 2; y = 1$

b.  $B = x^5(x+2y) - x^3y(x+2y) + x^2y^2(x+2y)$  với  $x = 10; y = -5$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = x(x-1) - y(x-1) = (x-1)(x-y) = 1 \Rightarrow A = 1$  với  $x = 2; y = 1$

b) Ta có:  $B = x^5(x+2y) - x^3y(x+2y) + x^2y^2(x+2y) = (x+2y)(x^5 - x^3y + x^2y^2) = 0$  với  $x = 10; y = -5$

#### Bài 2: Tính giá trị biểu thức

a.  $A = t(10-4t) - t^2(2t-5) - 2t + 5$  với  $t = \frac{5}{2}$

b.  $B = x(x-y)^2 - y(x-y)^2 + xy^2 - x^2y$  với  $x-y = 7; xy = 9$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = t(10-4t) - t^2(2t-5) - 2t + 5 = (2t-5)(t^2 - 2t - 1) = 0$  với  $t = \frac{5}{2}$

b) Ta có:  $B = x(x-y)^2 - y(x-y)^2 + xy^2 - x^2y = (x-y)[(x-y)^2 - xy] = 280$  với  $x-y = 7; xy = 9$

#### Bài 3: Tính giá trị các biểu thức sau

a.  $A = a(b+3) - b(3+b)$  với  $a = 2003, b = 1997$

b.  $B = b^2 - 8b - c(8-b)$  tại  $b = 108, c = -8$

c.  $C = xy(x+y) - 2x - 2y$  tại  $xy = 8, x+y = 7$

d.  $D = y^2(x^2 + y + 1) - mx^2 - my + m$  tại  $x = 10, y = -5$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = a(b+3) - b(3+b) = (b+3)(a-b) \Rightarrow A = 12000$

b) Ta có:  $B = b^2 - 8b - c(8-b) = (b-8)(b+c) \Rightarrow A = 10000$

c) Ta có:  $C = xy(x+y) - 2x - 2y = (x+y)(xy+2) \Rightarrow C = 42$

d) Ta có:  $D = y^2(x^2 + y - 1) - mx^2 - my + m = (x^2 + y - 1)(y^2 - m) \Rightarrow D = 0$

#### **Bài 4: Tính giá trị các biểu thức sau**

Tính giá trị của biểu thức  $9x^4 - 15x^3 - 6x^2 + 5$ , biết  $3x^2 - 5x = 2$

#### **Lời giải**

Ta có:  $9x^4 - 15x^3 - 6x^2 + 5 = 3x^2(3x^2 - 5x) - 6x^2 + 5 = 3x^2 \cdot 2 - 6x^2 + 5 = 5$

Vậy giá trị của biểu thức bằng 5

#### Dạng 4: Tìm x thỏa mãn điều kiện cho trước

**Cách giải:** Ta thực hiện theo 3 bước sau

- Chuyển tất cả các hạng tử về vế trái, vế phải bằng 0
- Phân tích vế trái thành nhân tử để được dạng tích, chẳng hạn  $A.B = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$
- Lần lượt tìm  $x$  từ các đẳng thức  $A = 0$  và  $B = 0$  rồi kết luận

#### Bài 1: Tìm x, biết

a)  $6x(5x-2)-(5x-2).2=0$

b)  $(x^2+1)(x-2)+2x=4$

c)  $8x(x-2017)-2x+4034=0$

d)  $(x+1)=(x+1)^2$

e)  $x^4+5x^3-8x-40=0$

f)  $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}=0$

#### Lời giải

a) Ta có:  $6x(5x-2)-(5x-2).2=0 \Leftrightarrow (5x-2)(6x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2=0 \\ 6x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{2}{5}; \frac{1}{3}\right\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{2}{5}; \frac{1}{3}\right\}$

b)  $(x^2+1)(x-2)+2x=4 \Leftrightarrow (x^2+1)(x-2)+2(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{2\}$

c)  $8x(x-2017)-2x+4034=0 \Leftrightarrow 8x(x-2017)-2(x-2017)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2017 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{2017; \frac{1}{4}\right\}$

d)  $(x+1)=(x+1)^2 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x \in \{0; -1\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{0; -1\}$

e)  $x^4+5x^3-8x-40=0 \Leftrightarrow x^3(x+5)-8(x+5)=0 \Leftrightarrow (x+5)(x-2)(x^2+2x+4)=0 \Leftrightarrow x \in \{2; -5\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{2; -5\}$

f)  $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x \in \{-4; 0\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-4; 0\}$

### Bài 2: Tìm $x$ , biết

a)  $4 - x = 2(x - 4)^2$

b)  $x^4 - 16x^2 = 0$

c)  $x^8 + 36x^4 = 0$

d)  $(x - 5)^3 - x + 5 = 0$

e)  $5(x - 2) - x^2 + 4 = 0$

### Lời giải

a) Ta có:  $4 - x = 2(x - 4)^2 \Leftrightarrow (4 - x)(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{4; \frac{7}{2}\right\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{4; \frac{7}{2}\right\}$

b) Ta có:  $x^4 - 16x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4; 0; 4\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-4; 0; 4\}$

c) Ta có:  $x^8 + 36x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4(x^4 + 36) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{0\}$

d) Ta có:  $(x - 5)^3 - x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 1 \\ x - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \{4; 5; 6\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{4; 5; 6\}$

e) Ta có:  $5(x - 2) - x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; 3\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{2; 3\}$



### Dạng 5: Chứng minh các bài toán số nguyên

**Cách giải:** Phân tích các biểu thức đã cho một cách hợp lý thành các tích và sử dụng tính chất chia hết của số nguyên

#### Bài 1: Chứng minh rằng

- a)  $A = n^2(n+1) + 2n(n+1)$  luôn chia hết cho 6 với mọi  $n \in \mathbb{Z}$
- b)  $B = (4n+3)^2 - 25$  luôn chia hết cho 8
- c)  $C = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$  là số nguyên

#### Lời giải

- a) Ta có:  $A = n^2(n+1) + 2n(n+1) = n(n+1)(n+2) : 2, 3 \Rightarrow A : 6$
- b) Ta có:  $B = (4n+3)^2 - 25 = 8(n+2)(2n-1) : 8 \Rightarrow \text{đpcm}$
- c) Ta có:  $C = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2) : 6 \Rightarrow \text{đpcm}$

#### Bài 2: Chứng minh rằng

- a)  $A = 25^{n+1} - 25^n : 100 \forall n \in \mathbb{N}$
- b)  $B = 50^{n+2} - 50^{n+1} : 245 \forall n \in \mathbb{N}$
- c)  $n^3 - n$  chia hết cho 6 với mọi số nguyên  $n$

#### Lời giải

- a)  $A = 25^{n+1} - 25^n : 100 \forall n \in \mathbb{N}$   
Ta có:  $A = 25^{n+1} - 25^n = 25^n \cdot 24 = 4 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 25^{n-1} = 100 \cdot 6 \cdot 25^{n-1} : 100 \Rightarrow \text{đpcm}$
- b.  $B = 50^{n+2} - 50^{n+1} : 245 \forall n \in \mathbb{N}$   
Ta có:  $B = 50^{n+2} - 50^{n+1} = 245 \cdot 10 \cdot 50^n : 245, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{đpcm}$
- c)  $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) : 6$  vì tích 2 số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 và 3 nên chia hết cho 6

#### Bài 3:

Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để giá trị của biểu thức sau là số nguyên tố:  $A = 5n^3 - 9n^2 + 15n - 27$

#### Lời giải

Ta có:  $A = 5n^3 - 9n^2 + 15n - 27 = (5n-9)(n^2+3) \Rightarrow 5n-9=1 (\text{do } n^2+3 > 1).$

Vậy  $n = 2$  là giá trị cần tìm.

#### Bài 4: Chứng minh rằng

a) Chứng minh rằng  $3^{15} + 3^{16} + 3^{17}$  chia hết cho 13

b) Chứng minh rằng hiệu các bình phương hai số lẻ bất kì thì chia hết cho 8.

#### Lời giải

a) Ta có:  $3^{15} + 3^{16} + 3^{17} = 3^{15}(1 + 3 + 3^2) = 3^{15} \cdot 13$  chia hết cho 13

b) Gọi hai số lẻ bất kì là  $2a + 1$  và  $2b + 1$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ )

Ta có:  $(2a + 1)^2 - (2b + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 - 4b^2 - 4b - 1 = 4a^2 + 4a - 4b^2 - 4b = 4a(a + 1) - 4b(b + 1)$

Ta thấy  $a(a + 1)$  và  $b(b + 1)$  đều là tích của hai số nguyên liên tiếp, chúng chia hết cho 2

Do đó  $4a(a + 1)$  và  $4b(b + 1)$  đều chia hết cho 8

Vậy  $(2a + 1)^2 - (2b + 1)^2$  chia hết cho 8

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Phân tích đa thức  $x^3 + 12x$  thành nhân tử ta được

A.  $x^2(x+12)$

B.  $x(x^2+12)$

C.  $x(x^2-12)$

D.  $x^2(x-12)$

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

Ta có:  $x^3 + 12x = x(x^2 + 12)$

**Câu 2:** Đẳng thức nào sau đây đúng

A.  $y^5 - y^4 = y^4(y-1)$

B.  $y^5 - y^4 = y^3(y^2-1)$

C.  $y^5 - y^4 = y^5(1-y)$

D.  $y^5 - y^4 = y^4(y+1)$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $y^5 - y^4 = y^4(y-1)$

**Câu 3:** Chọn câu sai

A.  $(x-1)^3 + 2(x-1)^2 = (x-1)^2(x+1)$

B.  $(x-1)^3 + 2(x-1) = (x-1)[(x-1)^2 + 2]$

C.  $(x-1)^3 + 2(x-1)^2 = (x-1)[(x-1)^2 + 2x - 2]$

D.  $(x-1)^3 + 2(x-1)^2 = (x-1)(x+3)$

**Lời giải**

**Chọn đáp án D**

**Giải thích:**

Ta có:  $(x-1)^3 + 2(x-1)^2 = (x-1)^2(x-1+2) = (x-1)^2(x+1) \Rightarrow D \text{ sai}$

**Câu 4:**

Phân tích đa thức  $3x(x-3y)+9y(3y-x)$  thành nhân tử ta được

A.  $3(x-3y)^2$

B.  $(x-3y)(3x+9y)$

C.  $(x-3y)+(3-9y)$

D.  $(x-3y)+(3x-9y)$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $3x(x-3y)+9y(3y-x)=3x(x-3y)-9y(x-3y)=3(x-3y)^2 \Rightarrow A$  đúng

**Câu 5:**

Cho  $3a^2(x+1)-4bx-4b=(x+1)(...)$ , điền biểu thức thích hợp vào dấu ...

A.  $3a^2-b$

B.  $3a^2+4b$

C.  $3a^2-4b$

D.  $3a^2+b$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:  $3a^2(x+1)-4bx-4b=3a^2(x+1)-4b(x+1)=(x+1)(3a^2-4b) \Rightarrow$  chọn đáp án C

**Câu 6:**

Tìm nhân tử chung của biểu thức  $5x^2(5-2x)+4x-10$  có thể là

A.  $5-2x$

B.  $5+2x$

C.  $4x-10$

D.  $4x+10$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

**Giải thích:**

Ta có:  $5x^2(5-2x)+4x-10=5x^2(5-2x)+2(2x-5)=(5-2x)(5x^2-2)$

Vậy nhân tử chung là:  $(5-2x)$ .

**Câu 7:**

Tìm giá trị của  $x$  thỏa mãn:  $3x(x-2)-x+2=0$

A.  $x = 2; x = -\frac{1}{3}$

B.  $x = -2; x = \frac{1}{3}$

C.  $x = 2; x = 3$

D.  $x = 2; x = \frac{1}{3}$

**Lời giải**

**Chọn đáp án D**

**Giải thích:**

Ta có:  $3x(x-2) - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2; \frac{1}{3}\right\} \Rightarrow$  chọn đáp án D

**Câu 8:**

Có bao nhiêu giá trị của  $x$  thỏa mãn:  $5(2x-5) = x(2x-5)$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

**Giải thích:**

Ta có:  $5(2x-5) = x(2x-5) \Leftrightarrow 5(2x-5) - x(2x-5) = 0 \Leftrightarrow (2x-5)(5-x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{5; \frac{5}{2}\right\}$

Vậy có 2 giá trị của  $x$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 9:**

Cho  $x_1, x_2$  là hai giá trị thỏa mãn  $x(5-10x) - 3(10x-5) = 0$ . Khi đó  $x_1 + x_2$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$

B. -3

C.  $\frac{-5}{2}$

D.  $\frac{-7}{2}$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

**Giải thích:**

Ta có:  $x(5-10x) - 3(10x-5) = 0 \Leftrightarrow (5-10x)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -3 + \frac{1}{2} = \frac{-5}{2}$$

### Câu 10:

Cho  $x_0$  là giá trị lớn nhất thỏa mãn  $4x^4 - 100x^2 = 0$ . Chọn câu đúng

A.  $x_0 < 2$

B.  $x_0 < 0$

C.  $x_0 > 3$

D.  $1 < x_0 < 5$

### Lời giải

Chọn đáp án C

**Giải thích:**

$$\text{Ta có: } 4x^4 - 100x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 \cdot x^2 - 10x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 0 \\ x^2 - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } x_0 = 5 \Rightarrow x_0 > 3$$

### Câu 11:

Phân tích đa thức  $7x^2y^2 - 21xy^2z + 7xyz + 14xy$  ta được:

A.  $7xy + (xy - 3xyz + z + 2)$

B.  $7xy(xy - 21yz + z + 14)$

C.  $7xy(xy - 3y^2z + z + 2)$

D.  $7xy(xy - 3yz + z + 2)$

### Lời giải

Chọn đáp án D

**Giải thích:**

$$\text{Ta có: } 7x^2y^2 - 21xy^2z + 7xyz + 14xy = 7xy \cdot xy - 7xy \cdot 3yz + 7xy \cdot z + 7xy \cdot 2 = 7xy(xy - 3yz + z + 2)$$

### Câu 12:

Cho  $(a-b)(a+2b) - (b-a)(2a-b) - (a-b)(a+3b)$ . Khi đặt nhân tử chung  $a-b$  ra ngoài thì nhân tử còn lại là:

A.  $2a - 2b$

B.  $2a - b$

C.  $2a + 2b$

D.  $a - b$

### Lời giải

Chọn đáp án A

***Giải thích:***

Ta có:  $(a-b)(a+2b)-(b-a)(2a-b)-(a-b)(a+3b)=(a-b)(a+2b+2a-b-a-3b)=(a-b)(2a-2b)$

Vậy nhân tử còn lại là  $2a-2b$

**Câu 13:**

Cho  $A = 2019^{n+1} - 2019^n$ . Khi đó  $A$  chia hết cho số nào dưới đây với mọi  $n \in \mathbb{N}$

A. 2019

B. 2018

C. 2017

D. 2016

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

***Giải thích:***

Ta có:  $A = 2019^{n+1} - 2019^n = 2019^n \cdot 2019 - 2019^n = 2019^n (2019 - 1) = 2018 \cdot 2019^n$

Vì  $2018 : 2018 \Rightarrow A : 2018, \forall n \in \mathbb{N}$

**Câu 14:**

Biết  $a - 2b = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $B = a(a-b)^3 + 2b(b-a)^3$

A. 0

B. 1

C.  $(a-b)^3$

D.  $2a+b$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

***Giải thích:***

Ta có:  $B = a(a-b)^3 + 2b(b-a)^3 = (a-2b)(a-b)^3$

Mà  $a - 2b = 0 \Rightarrow B = 0 \cdot (a-b)^3 = 0$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $8x^3 - 2x$

b)  $5x - 25x^2 + \frac{10x^3}{9}$

c)  $-5x^3(x+1) + x + 1$

d)  $\frac{x^3}{27} + \frac{x^6}{729} - x^9$

#### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x+1)(2x-1)$

b) Ta có:  $5x - 25x^2 + \frac{10x^3}{9} = 5x\left(1 - 5x + \frac{2}{9}x^2\right)$

c) Ta có:  $-5x^3(x+1) + x + 1 = (x+1)(-5x^3 + 1)$

d) Ta có:  $\frac{x^3}{27} + \frac{x^6}{729} - x^9 = x^3\left(\frac{1}{27} - \frac{x^3}{729} - x^6\right)$

### Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $x(y-x)^2 - x^2 + 2xy - y^2$

b)  $x(x-y)^2 - y(x-y)^2 + xy^2 - x^2y$

#### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $x(y-x)^2 - x^2 + 2xy - y^2 = (x-y)^2(x-1)$

b) Ta có:  $x(x-y)^2 - y(x-y)^2 + xy^2 - x^2y = (x-y)\left[(x-y)^2 - xy\right]$

### Bài 3: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = m^2(m+n) - n^2m - n^3$  tại  $m = -2017, n = 2017$

b)  $B = n^3 - 3n^2 - n(3-n)$  tại  $n = 13$

#### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $A = m^2(m+n) - n^2m - n^3 = (m+n)(m^2 - n^2) = 0$  tại  $m = -2017, n = 2017$

b) Ta có:  $B = n^3 - 3n^2 - n(3-n) = 1820$

### Bài 4: Tìm $x$ , biết rằng

a)  $2 - x = 2(x-2)^3$  t

b)  $8x^3 - 72 = 0$



$$c) (x-1,5)^6 + 2(1,5-x)^2 = 0$$

$$d) 2x^3 + 3x^2 + 3 + 2x = 0$$

$$e) x^3 - 4x - 14x(x-2) = 0$$

$$f) x^2(x+1) - x(x+1) + x(x-1) = 0$$

### Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Ta có: } 2-x = 2(x-2)^3 \Leftrightarrow x = 2$$

$$b) \text{ Ta có: } 8x^3 - 72 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 0; 3\}$$

$$c) \text{ Ta có: } (x-1,5)^6 + 2(1,5-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$d) \text{ Ta có: } 2x^3 + 3x^2 + 3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x^2(2x+3) + (2x+3) = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-3}{2}\right\}$$

$$e) \text{ Ta có: } x^3 - 4x - 14x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) - 14x(x-2) \Leftrightarrow x(x-2)[x+2-14] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x-12) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2; 12\}$$

$$f) \text{ Ta có: } x^2(x+1) - x(x+1) + x(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)x(x-1) + x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1; -2\}$$

### Bài 5: Chứng minh rằng

$$a) A = 15^n + 15^{n+2} : 113, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b) B = n^4 - n^2 : 4, \forall n \in \mathbb{Z}$$

### Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Ta có: } A = 15^n + 15^{n+2} = 113.2.15^n : 113$$

$$b) \text{ Ta có: } B = n^4 - n^2 = n^2(n-1)(n+1) = \underbrace{n(n+1)}_{\vdots 2} \cdot \underbrace{n(n-1)}_{\vdots 2}$$

Vậy  $B : 4$

## B. PHƯƠNG PHÁP DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC

**\*) Phương pháp:** Sử dụng hằng đẳng thức để biến đổi đa thức thành tích các nhân tử hoặc dưới dạng lũy thừa của một đa thức đơn giản

**Ví dụ:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $A = x^2 + 2x + 1$

b)  $B = x^2 - 6x + 9 - x^4$

c)  $C = x^3 - 2x^3 + x^2$

### Lời giải

Phân tích định hướng:

a) Nhận thấy đây là vế trái của hằng đẳng thức  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Áp dụng ta có:  $A = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

b) Nhận thấy 3 hạng tử đầu tiên và hạng tử cuối đều có thể đưa về được bình phương, sau đó xuất hiện hằng đẳng thức  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Ta có:  $B = x^2 - 6x + 9 - x^4 = (x^2 - 6x + 9) - (x^2)^2 = (x-3)^2 - (x^2)^2 = (x-3-x^2)(x-3+x^2)$

c) Ta thấy đa thức có nhân tử chung là  $x$ , sau đó gặp vế phải hằng đẳng thức  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ta có:  $C = x^3 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$

Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

1)  $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

2)  $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

3)  $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

4)  $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$

5)  $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$

6)  $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$

7)  $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A-B)^3$

8)  $(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB + BC + CA)$

### Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

**Cách giải:** Chuyển đa thức đã cho về đúng dạng của hằng đẳng thức cần sử dụng và phân tích thành nhân tử

#### Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $4x^2 + 4xy + 4y^2$

b)  $(2x+1)^2 - (x-1)^2$

c)  $9 - 6x + x^2 - y^2$

d)  $-(x+2) + 3(x^2 - 4)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $4x^2 + 4xy + 4y^2 = (2x + y)^2$

b) Ta có:  $(2x+1)^2 - (x-1)^2 = [(2x+1) - (x-1)][(2x+1) + (x-1)] = 3x(x+2)$

c) Ta có:  $9 - 6x + x^2 - y^2 = (3-x)^2 - y^2 = (3-x-y)(3-x+y)$

d) Ta có:  $-(x+2) + 3(x^2 - 4) = -(x+2) + 3(x+2)(x-2) = (x+2)(3x-7)$

#### Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $5x^2 - 10xy^2 + 5y^4$

b)  $\frac{x^4}{2} - 2x^2$

c)  $49(y-4)^2 - 9(y+2)^2$

d)  $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 2(ab+2)^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $5x^2 - 10xy^2 + 5y^4 = 5(x - y^2)^2$

b) Ta có:  $\frac{x^4}{2} - 2x^2 = 2x^2 \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \left( \frac{x}{2} + 1 \right)$

c) Ta có:  $49(y-4)^2 - 9(y+2)^2 = [7(y-4)]^2 - [3(y+2)]^2 = 4(2y-17)(5y-11)$

d) Ta có:  $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 2(ab+2)^2 = (a^2 + b^2 - 5 - \sqrt{2}ab - 2\sqrt{2})(a^2 + b^2 - 5 + \sqrt{2}ab + 2\sqrt{2})$

#### Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

b)  $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 - z^3$

c)  $(4t+2)^3 + 8(1-2t)^3$

d)  $x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz$

#### Lời giải

a) Ta có:  $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 = (2a - 3b)^3$

b) Ta có:  $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 - z^3 = (2x + y)^3 - z^3 = (2x + y - z)(4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + zy)$

c) Ta có:  $(4t + 2)^3 + 8(1 - 2t)^3 = 16(12t^2 + 1)$

d) Ta có:  $x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz = (x + y - z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz)$

#### Bài 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^3 - 64$

b)  $\frac{1}{36}a^2 - \frac{1}{4}b^2$

c)  $4x^2 - 4x + 1 - y^2 - 8y - 16$

d)  $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$

e)  $x^2 - y^2 + 10 - 6y + 16 = (x + 5)^2 - (y + 3)^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^3 - 64 = x^3 - 4^3$

b) Ta có:  $\frac{1}{36}a^2 - \frac{1}{4}b^2 = \left(\frac{1}{6}a - \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b\right)$

c) Ta có:  $4x^2 - 4x + 1 - y^2 - 8y - 16 = (2x - 1)^2 - (y + 4)^2 = (2x - y - 5)(2x + y + 3)$

d) Ta có:  $(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$

e) Ta có:  $x^2 - y^2 + 10 - 6y + 16 = (x + 5)^2 - (y + 3)^2$

#### Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$

b)  $(x^2 + 4x + 4)^3 - y^6$

c)  $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

d)  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$

b) Ta có:  $(x^2 + 4x + 4)^3 - y^6 = [(x + 2)^2]^3 - (y^2)^3 = [(x + 2)^2 - y^2][(x + 2)^4 + (x + 2)^2 y^2 + y^4]$

c) Ta có:  $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = [(x + y + z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3)$

$= (x + y + z - x)[(x + y + z)^2 + (x + y + z)x + x^2] - (y + z)(y^2 - yz + z^2)$

$= (y + z)(3x^2 + 3xy + 3xz + 3yz) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

c) Ta có:  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = (x - y - z)[(x - y)^2 - (x - y)(y - z) + (y - z)^2] + (z - x)^3$

$$\begin{aligned}
 &= (x-z) \left[ (x-y)^2 - (x-y)(y-z) + (y-z)^2 - (x-z)^2 \right] = (x-z) \left[ (x-y)(x-y-y+z) + (y-z+x-z) \right] \\
 &= (x-z) \left[ (x-y)(x-2y+z) + (y-x)(y-2z+x) \right] = 3(x-y)(x-z)(z-y)
 \end{aligned}$$

### Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^2 - 2xy + y^2 - 4$

b)  $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$

c)  $3a^2 - 6ab + 3b^2 - 12c^2$

d)  $x^2 - 2xy + y^2 - m^2 + 2mn - n^2$

e)  $a^2 - 10a + 25 - y^2 - 4yz - 4z^2$

f)  $x^2 + 3cd(2 - 3cd) - 10xy - 1 + 25y^2$

g)  $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

h)  $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = (x-y)^2 - 4 = (x-y-2)(x-y+2)$

b) Ta có:  $x^2 - y^2 - 2yz - z^2 = x^2 - (y+z)^2 = (x-y-z)(x+y+z)$

c) Ta có:  $3a^2 - 6ab + 3b^2 - 12c^2 = 3[(a-b)^2 - 4c^2] = 3(a-b-2c)(a-b+2c)$

d) Ta có:  $x^2 - 2xy + y^2 - m^2 + 2mn - n^2 = (x-y)^2 - (m-n)^2 = (x-y-m+n)(x-y+m-n)$

e) Ta có:  $a^2 - 10a + 25 - y^2 - 4yz - 4z^2 = (a-5)^2 - (y+2z)^2 = (a-5-y-2z)(a-5+y-2z)$

f) Ta có:  $x^2 + 3cd(2 - 3cd) - 10xy - 1 + 25y^2 = (x-5y)^2 - (3cd-1)^2 = (x-5y-3cd+1)(x-5y+3cd-1)$

g) Ta có:  $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) = [a^2 - (b-c)^2][a^2 - (b+c)^2]$   
 $= (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)$

h) Ta có:  $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = (4x^2 - 3x - 18 - 4x^2 - 3x)(4x^2 - 3x - 18 + 4x^2 + 3x)$   
 $= (-6x - 18)(8x^2 - 18) = -12(x+3)(4x^2 - 9) = -12(x+3)(2x-3)(2x+3)$

**Dạng 2: Phân tích đa thức  $ax^2 + bx + c$  thành nhân tử bằng kĩ thuật bổ sung hằng đẳng thức (tách hạng tử)**

**Cách giải:** Tách hạng tử  $c$  thành  $c_1 + c_2$  sao cho  $ax^2 + bx + c_1$  tạo thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu

**Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

a)  $x^2 + 2x - 8$

b)  $x^2 + 5x + 6$

c)  $4x^2 - 12x + 8$

d)  $3x^2 + 8xy + 5y^2$

**Lời giải**

a) Ta có:  $x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + 1 - 9 = (x + 1)^2 - 3^2 = (x + 4)(x - 2)$

b) Ta có:  $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 4x + 4 + x + 2 = (x + 2)^2 + (x + 2) = (x + 2)(x + 3)$

c) Ta có:  $4x^2 - 12x + 8 = 4x^2 - 12x + 9 - 1 = (2x - 3)^2 - 1 = 4(x - 2)(x - 1)$

d) Ta có:  $3x^2 + 8xy + 5y^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2) + 2xy + 2y^2 = 3(x + y)^2 + 2y(x + y) = (x + y)(3x + 5y)$

**Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

a)  $x^2 + 6x + 8$

b)  $2x^2 + 14x + 12$

c)  $9x^2 + 24x + 15$

d)  $6x^2 - xy - 7y^2$

**Lời giải**

a) Ta có:  $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$

b) Ta có:  $2x^2 + 14x + 12 = 2(x + 6)(x + 1)$

c) Ta có:  $9x^2 + 24x + 15 = 3(3x + 5)(x + 1)$

d) Ta có:  $6x^2 - xy - 7y^2 = (6x - 7y)(x + y)$

### Dạng 3: Tính nhanh biểu thức

**Cách giải:** Sử dụng các hằng đẳng thức một cách hợp lý để phân tích các biểu thức đã cho thành tích rồi tính

#### Bài 1: Tính nhanh

a)  $35^2 - 15^2$

b)  $48^2 - 42^2 + 64 - 52^2$

c)  $72^2 + 144.16 + 16^2 - 12^2$

d)  $\frac{43^2 - 11^2}{(36,5)^2 - (27,5)^2}$

#### Lời giải

a) Ta có:  $35^2 - 15^2 = (35 - 15)(35 + 15) = 20.50 = 1000$

b) Ta có:  $48^2 - 42^2 + 64 - 52^2 = (48^2 - 52^2) + (8^2 - 42^2)$

c) Ta có:  $72^2 + 144.16 + 16^2 - 12^2 = 72^2 + 2.72.16 + 16^2 - 12^2 = (72 + 16)^2 - 12^2 = 88^2 - 12^2 = 7600$

d) Ta có:  $\frac{43^2 - 11^2}{(36,5)^2 - (27,5)^2} = \frac{(43 - 11)(43 + 11)}{(36,5 - 27,5)(36,5 + 27,5)} = \frac{32.54}{9.64} = 3$

#### Bài 2: Tính nhanh

a)  $85^2 - 15^2$

b)  $93^2 + 21.93^2 + 3.49.93 + 343$

c)  $73^2 - 13^2 - 10^2 + 20.13$

d)  $\frac{97^2 + 83^2}{180} - 97.83$

#### Lời giải

a) Ta có:  $85^2 - 15^2 = (85 + 15)(85 - 15) = 7000$

b) Ta có:  $93^2 + 21.93^2 + 3.49.93 + 343 = 1000000$

c) Ta có:  $73^2 - 13^2 - 10^2 + 20.13 = (73^2 - 10^2) + 13(20 - 13) = 5320$

d) Ta có:  $\frac{97^2 + 83^2}{180} - 97.83 = \frac{97^2 + 83^2 - 97.83.180}{180} = 196$

#### Bài 3:

Xét hằng đẳng thức  $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ . Lần lượt cho  $x$  bằng  $1, 2, 3, \dots, n$  rồi cộng từng vế  $n$  đẳng thức trên để tính của giá trị biểu thức  $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

#### Lời giải

Từ hằng đẳng thức đã cho ta có:

$$2^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1; 3^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1; \dots; (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

Cộng từng vế  $n$  đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được:

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n$$

$$\text{Do đó: } 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) = (n+1) \left[ (n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1 \right]$$

$$= (n+1) \left( n^2 + \frac{n}{2} \right) = \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1)$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

#### Bài 4:

Xét hằng đẳng thức  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ . Lần lượt cho  $x$  bằng  $1, 2, 3, \dots, n$  rồi cộng từng vế  $n$  đẳng thức trên để tính của giá trị biểu thức  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

#### Lời giải

$$\text{Ta có: } (1+1)^2 = 1^2 + 2.1 + 1; (2+1)^2 = 2^2 + 2.2 + 1; \dots; (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$\text{Cộng từng vế } n \text{ đẳng thức trên rồi rút gọn: } (n+1)^2 = 1^2 + 2(1 + 2 + \dots + n) + n$$

$$\text{Từ đó tính được: } S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

#### Bài 5:

Tính  $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

#### Lời giải

$$\text{Xét hằng đẳng thức } (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Lần lượt cho  $x$  bằng  $1, 2, 3, \dots, n$  ta được:

$$(1+1)^4 = 1^4 + 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$$

$$(2+1)^4 = 2^4 + 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1$$

.....

$$(n+1)^4 = n^4 + 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1$$



Cộng từng vế  $n$  đẳng thức trên rồi rút gọn:

$$\begin{aligned}(n+1)^4 &= 1^4 + 4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 4(1 + 2 + \dots + n) + n \\ &= 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n\end{aligned}$$

Ta đã biết  $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

$$S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \Rightarrow S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

#### Dạng 4: Tìm $x$ thỏa mãn điều kiện cho trước

**Cách giải:** Ta thực hiện theo 3 bước

- Chuyển tất cả các hạng tử sang về trái, về phải bằng 0
- Phân tích về trái thành nhân tử đưa về dạng tích:  $A.B = 0$
- Lần lượt tìm  $x$  từ các đẳng thức  $A = 0, B = 0$  rồi kết luận

#### Bài 1: Tìm $x$ , biết rằng:

a)  $x - 3 = (3 - x)^2$

b)  $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

c)  $27x^3 - 54x^2 + 36x = 8$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x - 3 = (3 - x)^2 \Leftrightarrow (x - 3) - (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(4 - x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{3; 4\}$

b) Ta có:  $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

c) Ta có:  $27x^3 - 54x^2 + 36x = 8 \Leftrightarrow (3x - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

#### Bài 2: Tìm $x$ , biết rằng:

a)  $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$

b)  $(2x - 5)^2 - (5 + 2x)^2 = 0$

c)  $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

b) Ta có:  $(2x - 5)^2 - (5 + 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) Ta có:  $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

#### Bài 3: Tìm $x$ , biết rằng:

a)  $x^5 - 81x = 0$

b)  $9(4x + 3)^2 = 16(3x - 5)^2$

c)  $(x - 3)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

### Lời giải

a) Ta có:  $x^5 - 81x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 81) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = 0$

$$\Leftrightarrow x \in \{-3; 0; 3\}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-3; 0; 3\}$

b) Ta có:

$$9(4x + 3)^2 = 16(3x - 5)^2 \Leftrightarrow 9(4x + 3)^2 - 16(3x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow (12x + 9 - 12x + 20)(12x + 9 + 12x - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow 29(24x - 11) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{24}$$

Vậy  $x = \frac{11}{24}$

c) Ta có:  $(x - 3)^2 = 4x^2 - 20x + 25 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = (2x - 5)^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 - (2x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow (2 - x)(3x - 8) = 0$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{2; \frac{8}{3}\right\}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{2; \frac{8}{3}\right\}$

### Dạng 5: Chứng minh các bài toán về số học

**Cách giải:** Số nguyên a chia hết cho số nguyên b nếu có số nguyên k sao cho  $a = bk$

Từ đó cần phân tích biểu thức ra thừa số để xuất hiện số chia

#### Bài 1: Chứng minh rằng

a)  $A = (3n-1)^2 - 4 : 3 \forall n \in \mathbb{N}$

b)  $B = 100 - (7n+3)^2 : 7 \forall n \in \mathbb{N}$

c)  $C = (3n+1)^2 - 25 : 3 \forall n \in \mathbb{N}$

d)  $D = (4n+1)^2 - 9 = 8(2n-1)(n+1) : 8$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = (3n-1)^2 - 4 = 3(n-1)(3n+1) : 3 \forall n \in \mathbb{N}$

b) Ta có:  $B = 100 - (7n+3)^2 = 7(1-n)(13-7n) : 7 \forall n \in \mathbb{N}$

c) Ta có:  $C = (3n+1)^2 - 25 = 3(3n-4)(n+2) : 3$

d) Ta có:  $D = (4n+1)^2 - 9 = 8(2n-1)(n+1) : 8$

#### Bài 2: Chứng minh rằng

a)  $n^3 - n : 6$  với mọi  $n$  là số tự nhiên

b)  $n^4 - 1 : 4$  với  $n$  là số tự nhiên lẻ bất kỳ

c) Hiệu các bình phương của hai số lẻ liên tiếp chia hết cho 8

d)  $[(2n-1)^3 - (2n-1)] : 8$

e)  $[(5n+2)^2 - 4] : 5$

#### Lời giải

a) Ta có:  $n^3 - n : 6 \Leftrightarrow n(n+1)(n-1) : 6 (dpcm)$

b) Ta có:  $n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)(n+1)(n^2 + 1)$

c) Gọi hai số lẻ liên tiếp là:  $2n+1; 2n+3 \Rightarrow (2n+3)^2 - (2n+1)^2 = 12n+9-4n-1 = 8n+8 = 8(n+1) : 8 \forall n$

d)  $[(2n-1)^3 - (2n-1)] : 8 \Leftrightarrow \underbrace{4n(n-1)}_{:2} (2n-1) : 8$

e)  $[(5n+2)^2 - 4] = (5n+2-2)(5n+2+2) = 5n(5n+4) : 5n$

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### Câu 1:

Phân tích đa thức  $x^3y^3 + 6x^2y^2 + 12xy + 8$  thành nhân tử ta được:

A.  $(xy + 2)^2$

B.  $(xy + 8)^2$

C.  $x^3y^3 + 8$

D.  $(x^3y^3 + 2)^3$

### Lời giải

Chọn đáp án A

**Giải thích:**

Ta có:  $x^3y^3 + 6x^2y^2 + 12xy + 8 = (xy)^3 + 3(xy)^2 \cdot 2 + 3 \cdot xy \cdot 2^2 + 2^3 = (xy + 2)^3$

### Câu 2:

Chọn câu đúng

A.  $(5x - 4)^2 - 49x^2 = -8(3x + 1)(x + 2)$

B.  $(5x - 4)^2 - 49x^2 = (3x - 1)(x + 2)$

C.  $(5x - 4)^2 - 49x^2 = -8(3x - 1)(x - 2)$

D.  $(5x - 4)^2 - 49x^2 = -8(3x - 1)(x + 2)$

### Lời giải

Chọn đáp án D

**Giải thích:**

Ta có:  $(5x - 4)^2 - 49x^2 = (5x - 4)^2 - (7x)^2 = (5x - 4 + 7x)(5x - 4 - 7x) = (12x - 4)(-2x - 4)$   
 $= 4(3x - 1) \cdot (-2) \cdot (x + 2) = -8(3x - 1)(x + 2)$

### Câu 3:

Chọn câu sai

A.  $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

B.  $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$

C.  $\frac{x^2}{4} + 2xy + 4y^2 = \left(\frac{x}{2} + 2y\right)^2$

D.  $\frac{x^2}{4} + 2xy + 4y^2 = \left(\frac{x}{4} + 2y\right)^2$

### Lời giải

Chọn đáp án D

**Giải thích:**

Ta có:  $\frac{x^2}{4} + 2xy + 4y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2y + (2y)^2 = \left(\frac{x}{2} + 2y\right)^2 \Rightarrow C \text{ đúng và } D \text{ sai}$

#### Câu 4:

Cho  $(4x^2 + 4x + 3)^2 - (4x^2 + 4x + 3) = mx(x+1) (m \in \mathbb{R})$ . Chọn câu đúng về giá trị của  $m$

A.  $n > 47$

B.  $m < 0$

C.  $m:9$

D.  $m$  là số nguyên tố

#### Lời giải

Chọn đáp án B

**Giải thích:**

Ta có:  $(4x^2 + 4x + 3)^2 - (4x^2 + 4x + 3) = (8x^2 + 8x) \cdot (-6) = 8x \cdot (x+1) \cdot (-6) = -48x(x+1)$

Nên  $m = -48 < 0$

#### Câu 5:

Cho  $8x^3 - 64 = (2x - 4)(\dots)$ . Biểu thức thích hợp điền vào dấu ... là:

A.  $2x^2 + 8x + 8$

B.  $2x^2 + 8x + 16$

C.  $4x^2 - 8x + 16$

D.  $4x^2 + 8x + 16$

#### Lời giải

Chọn đáp án D

**Giải thích:**

Ta có:  $8x^3 - 64 = (2x)^3 - 4^3 = (2x - 4)(4x^2 + 8x + 16)$

#### Câu 6:

Phân tích đa thức  $\frac{x^3}{8} + 8y^3$  thành nhân tử, ta được:

A.  $\left(\frac{x}{2} + 2y\right)\left(\frac{x^2}{2} + xy + 2y^2\right)$

B.  $\left(\frac{x}{2} + 2y\right)\left(\frac{x^2}{4} - xy + 4y^2\right)$

C.  $\left(\frac{x}{2} + 2y\right)\left(\frac{x^2}{2} - xy + 4y^2\right)$

D.  $\left(\frac{x}{2} + 2y\right)\left(\frac{x^2}{4} - 2xy + 4y^2\right)$

#### Lời giải

Chọn đáp án B

***Giải thích:***

Ta có:  $\frac{x^3}{8} + 8y^3 = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + (2y)^3 = \left(\frac{x}{2} + 2y\right)\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \cdot 2y + (2y)^2\right) = \left(\frac{x}{2} + 2y\right)\left(\frac{x^2}{4} - xy + 4y^2\right)$

**Câu 7:**

Cho  $(x+y)^3 - (x-y)^3 = A.y(Bx^2 + Cy^2)$ . Biết  $A, B, C$  là các số nguyên tố. Khi đó  $A+B+C=?$

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

***Giải thích:***

Ta có:  $(x+y)^3 - (x-y)^3 = [x+y-(x-y)][(x+y)^2 + (x+y)(x-y) + (x-y)^2] = 2y(3x^2 + y^2)$

$\Rightarrow A=2; B=3; C=1 \Rightarrow A+B+C=2+3+1=6$

**Câu 8:**

Cho  $(4x^2 + 2x - 18)^2 - (4x^2 + 2x)^2 = m.(4x^2 + 2x - 9)$ . Khi đó giá trị của  $m$  là:

A.  $m = -18$

B.  $m = 36$

C.  $m = -36$

D.  $m = 18$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

***Giải thích:***

Ta có:  $(4x^2 + 2x - 18)^2 - (4x^2 + 2x)^2 = (4x^2 + 2x - 18 - 4x^2 - 2x)(4x^2 + 2x - 18 + 4x^2 + 2x)$

$= (8x^2 + 4x - 18).(-18) = 2(4x^2 + 2x - 9).(-18) = -36(4x^2 + 2x - 9) \Rightarrow m = -36$

**Câu 9:**

Giá trị của  $x$  thỏa mãn:  $5x^2 - 10x + 5 = 0$  là:

A.  $x = 1$

B.  $x = -1$

C.  $x = 2$

D.  $x = 5$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

***Giải thích:***

Ta có:  $5x^2 - 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow 5(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy  $x = 1$

**Câu 10:**

Có bao nhiêu giá trị của  $x$  thỏa mãn  $(2x-5)^2 - 4(x-2)^2 = 0$  ?

A. 2

B. 1

C. 0

D. 4

**Lời giải**

**Chọn đáp án B**

***Giải thích:***

Ta có:  $(2x-5)^2 - 4(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2 - [2(x-2)]^2 = 0 \Leftrightarrow (4x-9) \cdot (-1) = 0$

$\Leftrightarrow -4x+9=0 \Leftrightarrow 4x=9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$ . Vậy  $x=\frac{9}{4}$

**Câu 11:**

Gọi  $x_1, x_2, x_3$  là các giá trị thỏa mãn  $4(3x-5)^2 - 9(9x^2 - 25)^2 = 0$ . Khi đó  $x_1 + x_2 + x_3$  bằng

A. -3

B.  $-\frac{3}{5}$

C.  $-\frac{5}{3}$

D.  $-\frac{5}{9}$

**Lời giải**

**Chọn đáp án C**

***Giải thích:***

Ta có:

$4(3x-5)^2 - 9(9x^2 - 25)^2 = 0 \Leftrightarrow 4(3x-5)^2 - 9[(3x)^2 - 5^2]^2 = 0 \Leftrightarrow 4(3x-5)^2 - 9(3x-5)^2(3x+5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3x-5)^2 \{4 - [3(3x+5)]^2\} = 0 \Leftrightarrow (3x-5)^2 [2^2 - (9x+15)^2] = 0 \Leftrightarrow (3x-5)^2 (9x+17)(-9x-13) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5=0 \\ 9x+17=0 \\ -9x-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{5}{3}; \frac{-17}{9}; \frac{-13}{9} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{3} + \frac{-17}{9} + \frac{-13}{9} = \frac{-5}{3}$



**Câu 12:**

Cho  $x+n=2(y-m)$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $A=x^2-4xy+4y^2-4m^2-4mn-n^2$  bằng:

A.  $A=1$

B.  $A=0$

C.  $A=2$

D. Chưa đủ dữ kiện để tính

**Lời giải****Chọn đáp án B****Giải thích:**

Ta có:  $A=x^2-4xy+4y^2-4m^2-4mn-n^2=(x-2y)^2-(2m-n)^2=(x-2y+2m+n)(x-2y-2m-n)$

Ta có:  $x+n=2(y-m) \Leftrightarrow x+n=2y-2m \Leftrightarrow x-2y+n+2m=0$

Thay  $x-2y+n+2m=0$  vào  $A$  ta được:  $A=0.(x-2y-2m-n)=0$

Vậy  $A=0$

**Câu 13:**

Cho  $9a^2-(a-3b)^2=(ma+nb)(4a-3b)$  với  $m,n \in R$ . Khi đó giá trị của  $m$  và  $n$  là:

A.  $m=-2; n=-3$

B.  $m=3; n=2$

C.  $m=3; n=-4$

D.  $m=2; n=3$

**Lời giải****Chọn đáp án D****Giải thích:**

Ta có:  $9a^2-(a-3b)^2=(3a)^2-(a-3b)^2=(3a-a+3b)(3a+a-3b)=(2a+3b)(4a-3b)$

$\Rightarrow m=2; n=3$

**Câu 14:**

Đa thức  $4b^2c^2-(c^2+b^2-a^2)^2$  được phân tích thành:

A.  $(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

B.  $(b+c+a)(b-c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

C.  $(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)^2$

D.  $(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b-c)$

**Lời giải**

**Chọn đáp án A**

***Giải thích:***

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } 4b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2 &= (2bc)^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2 = (2bc - c^2 - b^2 + a^2)(2bc + c^2 + b^2 - a^2) \\ &= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] = (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)\end{aligned}$$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $(3x+1)^2 - (3x-1)^2$

b)  $(x+y)^2 - (x-y)^2$

c)  $(x+y)^3 - (x-y)^3$

d)  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

#### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $(3x+1)^2 - (3x-1)^2 = (3x+1+3x-1)(3x+1-3x+1) = 12x$

b) Ta có:  $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

c) Ta có:  $(x+y)^3 - (x-y)^3 = 2y(3x^2 + y^2)$

d) Ta có:  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

### Bài 2: Tính nhanh

a)  $73^2 - 27^2$

b)  $36^2 - 14^2$

c)  $63^2 - 27^2 + 72^2 - 18^2$

d)  $54^2 + 82^2 - 18^2 - 46^2$

#### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $73^2 - 27^2 = (73-27)(73+27) = 4600$

b) Ta có:  $36^2 - 14^2 = (36+14)(36-14) = 1100$

c) Ta có:  $63^2 - 27^2 + 72^2 - 18^2 = 8100$

d) Ta có:  $54^2 + 82^2 - 18^2 - 46^2 = 7200$

### Bài 3: Tìm $x$ , biết rằng:

a)  $x^2 - 10x = -25$

b)  $4x^2 - 4x = -1$

c)  $(1-2x)^2 = (3x-2)^2$

d)  $(x-2)^3 + (5-2x)^3 = 0$

#### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $x^2 - 10x = -25 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

b) Ta có:  $4x^2 - 4x = -1 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

c) Ta có:  $(1-2x)^2 = (3x-2)^2 \Leftrightarrow (1-2x)^2 - (3x-2)^2 \Leftrightarrow (3-5x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3}{5}\right\}$

d) Ta có:  $(x-2)^3 + (5-2x)^3 = 0 \Leftrightarrow (x-2+5-2x)\left[(x-2)^2 - (x-2)(5-2x) + (5-2x)^2\right] = 0 \Leftrightarrow x = 3$

**Bài 4: Chứng minh rằng**

a)  $2^9 - 1 : 73$

b)  $5^6 - 10^4 : 9$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  $2^9 - 1 = (2^3)^3 - 1 = (2^3 - 1)(2^6 + 2^3 + 1) = 7.73 : 73$

b) Ta có:  $5^6 - 10^4 = (5^6 - 1) - (10^4 - 1) = (5^3 - 1)(5^3 + 1) - (10^2 - 1)(10^2 + 1) = 126(5^3 - 1) - 99(10^2 + 1) : 9$

**Bài 5: Chứng minh với mọi số nguyên n ta có:**

a)  $(n+3)^2 - (n-1)^2 : 8$

b)  $(n+6)^2 - (n-6)^2 : 24$

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  $(n+3)^2 - (n-1)^2 = 8(n+1) : 8$

b) Ta có:  $(n+6)^2 - (n-6)^2 = 24n : 24$

### C. PHƯƠNG PHÁP NHÓM CÁC HẠNG TỬ

1. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử là cách nhóm các hạng tử phù hợp nhằm xuất hiện nhân tử chung hoặc sử dụng các hằng đẳng thức

2. Ôn tập tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng

$$AB \pm AC = A(B \pm C)$$

3. Lưu ý: Đối với một đa thức có nhiều cách nhóm những hạng tử thích hợp

\*) Ta có thể tổng quát phương pháp này như sau:

“Cho đa thức  $A+B+C+D$  ( $A, B, C, D$  là các biểu thức)

Nếu  $A, B, C, D$  không có nhân tử chung nào thì hãy thử với  $(A+B)$  và  $(C+D)$  hoặc các phép giao hoán khác. Tức là nhóm các hạng tử có nhân tử chung lại với nhau hoặc tạo thành một hằng đẳng thức để làm xuất hiện nhân tử chung của đa thức”.

\*) Phương pháp:

- Quan sát trong đa thức xem những hạng tử nào có nhân tử chung
- Nhóm các hạng tử và đặt nhân tử chung cho mỗi nhóm
- Đa thức hiện tại đã xuất hiện nhân tử chung chưa? Nếu chưa phải nhóm lại. Đôi khi, ta phải sắp xếp lại vị trí các hạng tử mới xuất hiện nhân tử chung.

#### Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

**Cách giải:** nhóm các hạng tử phù hợp nhằm xuất hiện nhân tử chung hoặc sử dụng các hằng đẳng thức

#### Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a.  $2xy + 3z + 6y + xz$

b.  $a^4 - 9a^3 + a^2 - 9a$

c.  $3x^2 + 5y - 3xy + (-5x)$

d.  $x^2 - (a+b)x + ab$

#### Lời giải

a)  $2xy + 3z + 6y + xz = (2xy + xz) + (3z + 6y) = x(2y + z) + 2(2y + z) = (x + 2)(2y + z)$

b)  $a^4 - 9a^3 + a^2 - 9a = a(a - 9)(a^2 + 1)$

c)  $3x^2 + 5y - 3xy + (-5x) = (x - y)(3x + 5)$

d)  $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$

**Bài 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử**

a.  $4x^2 - 4xy + y^2 - 9t^2$

b.  $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 - z^3$

c.  $x^2 - y^2 + 8x + 6y + 7$

d.  $x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x$

**Lời giải**

a)  $4x^2 - 4xy + y^2 - 9t^2 = (2x - y)^2 - (3t)^2 = (2x - y - 3t)(2x - y + 3t)$

b)  $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 - z^3 = (x - y)^3 - z^3 = (x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz)$

c)  $x^2 - y^2 + 8x + 6y + 7 = (x^2 + 8x + 16) - (y^2 - 6y + 9) = (x + 4)^2 - (y - 3)^2 = (x + 4 - y + 3)(x + 4 + y - 3) = (x - y + 7)(x + y + 1)$

d)  $x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x = x^3(x - 9) + x(x - 9) = x(x - 9)(x^2 + 1)$

**Bài 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử**

a.  $mx^2 + my^2 - nx^2 - ny$

b.  $mz - 2z - m^2 + 2m$

c.  $x^2y^2 + y^3 + zx^2 + yz$

d.  $2x^2 + 4mx + x + 2m$

**Lời giải**

a)  $mx^2 + my^2 - nx^2 - ny = m(x^2 + y^2) - n(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(m - n)$

b)  $mz - 2z - m^2 + 2m = (m - 2)(z - m)$

c)  $x^2y^2 + y^3 + zx^2 + yz = y^2(x^2 + y) + z(x^2 + y) = (x^2 + y)(y^2 + z)$

d)  $2x^2 + 4mx + x + 2m = 2x(x + 2m) + (x + 2m) = (x + 2m)(2x + 1)$

**Bài 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử**

a.  $x^4 + 2x^2 + 1 + x^3 + x$

b.  $4x^2 - 9y^2 + 4x - 6y$

c.  $3x^2 - 2(x - y)^2 - 3y^2$

d.  $x(x + 1)^2 + x(x - 5) - 5(x + 1)^2$

**Lời giải**

a.  $x^4 + 2x^2 + 1 + x^3 + x = (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$

b.  $4x^2 - 9y^2 + 4x - 6y = (2x - 3y)^2 - (3y - 2)^2 = (2x - 3y - 3y + 2)(2x - 3y + 3y - 2) = (2x - 6y + 2)(2x) = 2x(2x - 6y + 2)$

c.  $3x^2 - 2(x - y)^2 - 3y^2 = 3(x - y)(x + y) - 2(x - y)^2 = (x - y)(3x + 3y - 2x + 2y) = (x - y)(x + 5y)$

d.  $x(x + 1)^2 + x(x - 5) - 5(x + 1)^2 = x(x + 1)^2 + x(x - 5) - 5(x + 1)^2 = x(x + 1)^2 + x(x - 5) - 5(x + 1)^2$

**Bài 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử**

a)  $x^3 + y(1 - 3x^2) + x(3y^2 - 1) - y^3$

b)  $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$

c)  $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 2xyz$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } x^3 + y(1 - 3x^2) + x(3y^2 - 1) - y^3 &= x^3 + y - 3x^2y + 3xy^2 - x - y^3 = (x - y)^3 - (x - y) \\ &= (x - y)(x^2 - 2xy + y^2 - 1) = (x - y)(x - y - 1)(x - y + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz &= (x^2y + xy^2) + (xz^2 + yz^2) + (x^2z + y^2z + 2xyz) \\ &= xy(x + y) + z^2(x + y) + (x + y)^2z = (x + y)(xy + z^2 + xz + yz) = (x + y)(y + z)(z + x) \end{aligned}$$

$$\text{c) } xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 2xyz = (x + y)(y + z)(z + x)$$

**Bài 6:**a. Chứng minh nếu :  $x + y + z = 0$  thì  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ b. Áp dụng phân tích đa thức sau thành nhân tử :  $(a^2 + b^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 - (b^2 + c^2)^3$ **Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a. Ta có : } x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y) - 3xyz \\ &= (x + y + z) \left[ (x + y)^2 - z(x + y) + z^2 \right] - 3xy(x + y + z) = (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xz - zy - xy) \end{aligned}$$

Từ đó nếu  $x + y + z = 0$  thì  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 

$$\begin{aligned} \text{a. } (a^2 + b^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 - (b^2 + c^2)^3 &= (a^2 + b^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 + (-b^2 - c^2)^3 = 3(a^2 + b^2)(c^2 - a^2)(-b^2 - c^2) \\ &= 3(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a + c)(a - c) \end{aligned}$$

**Bài 7: Phân tích đa thức sau thành nhân tử**

a)  $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

b)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

**Lời giải**

$$\text{a) } (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$\text{b) } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

## Dạng 2: Tính nhanh

**Cách giải:** Nhóm các hạng tử một cách thích hợp sau đó áp dụng các quy tắc tính nhanh

### Bài 1: Tính nhanh

a)  $A = 15.64 + 25.100 + 36.15 + 60.100$

b)  $B = 47^2 + 48^2 - 25 + 94.48$

c)  $C = 9^3 - 9^2 \cdot (-1) - 9.11 + (-1).11$

### Lời giải

a)  $A = 15.64 + 25.100 + 36.15 + 60.100 = (15.64 + 36.15) + (25.100 + 60.100) = 100.(15 + 85) = 1000$

b)  $B = 47^2 + 48^2 - 25 + 94.48 = (47^2 + 2.47.48 + 48^2) - 5^2 = (47 + 48)^2 - 5^2 = 9000$

c)  $C = 9^3 - 9^2 \cdot (-1) - 9.11 + (-1).11 = (9^3 + 9^2) - (9.11 + 1.11) = 9^2(9 + 1) - 11(9 + 1) = 700$

### Bài 2: Tính nhanh

a)  $A = 33.55 + 33.67 + 45.33 + 67^2$

b)  $B = -64 + 104^3 - 12.104^2 + 48.104 - 50^3$

c)  $C = 2016.2018 - 2017^2$

### Lời giải

a)  $A = 33.55 + 33.67 + 45.33 + 67^2 = 10000$

b)  $B = -64 + 104^3 - 12.104^2 + 48.104 - 50^3 = 875000$

c)  $C = 2016.2018 - 2017^2 = (2017 - 1)(2017 + 1) - 2017^2 = 1$



### Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến

**Cách giải:** Phân tích các biểu thức đã cho thành nhân tử bằng cách nhóm các hạng tử, sau đó thay giá trị cụ thể của biến vào biểu thức và tính toán

#### Bài 1: Tính nhanh giá trị của các biểu thức sau

- a)  $A = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x$  khi  $x = 3$   
b)  $B = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$  khi  $x = 2$   
c)  $C = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$  khi  $x = 2$   
d)  $D = 2x(10x^2 - 5x - 2) - 5x(4x^2 - 2x - 1)$  khi  $x = -5$

#### Lời giải

a) Ta có:

$$A = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x = (x^4 + 2x^3) + (4x^2 + 8x) = x^3(x+2) + 4x(x+2) = (x+2)(x^3 + 4x) = x(x+2)(x^2 + 4)$$

$$\text{Khi } x = 3 \text{ thì } A = 3(3+2)(3^2 + 4) = 195$$

b) Ta có:  $B = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)[(x^6 + x^4) + (x^2 + 1)] = (x-1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$

$$\text{Khi } x = 2 \text{ thì } B = (2-1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) = 85$$

c) Ta có:

$$C = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x = (x^6 - x^5) + (x^4 - x^3) + (x^2 - x) = (x-1)(x^5 + x^3 + x) = x(x-1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$= x(x-1)((x^4 + 2x^2 + 1) - x^2) = x(x-1)(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$$

$$\text{Khi } x = 2 \text{ thì } C = 2(2-1)(2^2 + 1 - 2)(2^2 + 1 + 2) = 2.1.3.7 = 42$$

d) Ta có:  $D = 2x(10x^2 - 5x - 2) - 5x(4x^2 - 2x - 1) = x[(20x^2 - 10x - 4) - (20x^2 - 10x - 5)] = x$

$$\text{Khi } x = -5 \text{ thì } D = -5$$

#### Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau

- a)  $A = y^2 + xy + x + 2y + 1$  với  $x = 100, y = 99$   
b)  $B = xy + xz + 2x - y - z - 2$  với  $x = 101, y = 100, z = 98$   
c)  $C = xyz - 3xy - 2xz + 6x - yz + 3y + 2z - 6$  với  $x = 101, y = 202, z = 303$   
d)  $D = 3x^2 - 2(x-y)^2 - 3y^2$  với  $x = 4; y = -4$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = y^2 + xy + x + 2y + 1 = (y+1)^2 + x(y+1) = (y+1)(x+y+1) = 100.200 = 20000$

Vậy  $A = 20000$

b.  $B = xy + xz + 2x - y - z - 2$  với  $x = 101$ ;  $y = 100$ ;  $z = 98$

c) Ta có:  $C = (xyz - yz) - 3xy + 3y - 2xz + 2z + 6x - 6 = (x-1)(yz - 3y - 2z + 6) \Rightarrow C = 0$

Vậy  $C = 0$

d)  $D = 3x^2 - 2(x-y)^2 - 3y^2 = (x-y)(x+5y) \Rightarrow D = -128$

Vậy  $D = -128$

### Bài 3: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $D = 4(x-2)(x+1) + (2x-4)^2 + (x+1)^2$  với  $x = \frac{-1}{2}$

b)  $E = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$  với  $x = 6$ ;  $y = 5$ ;  $z = 4$

c)  $F = x^{2017} - 10x^{2016} + 10x^{2015} - \dots - 10x^2 + 10x - 10$  với  $x = 9$

### Lời giải

a) Ta có:  $D = 4(x-2)(x+1) + (2x-4)^2 + (x+1)^2 = 9(x-1)^2 = \frac{81}{4}$

Vậy  $D = \frac{81}{4}$

b) Ta có:  $E = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) = 2$

Vậy  $E = 2$

c) Thay  $10 = x+1$  vào  $F$  ta được  $F = -1$

### Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = 5x^2 + 10xy + 5y^2 - 105z^2$  với  $x = 5$ ,  $y = 7$ ,  $z = 12$

b)  $B = 16x^2 - y^2 + 4x + y$  với  $x = 1,3$ ;  $y = 0,8$

c)  $C = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  với  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $z = 5$

d)  $D = 99x^{100} + 99x^{99} + 99x^{98} + \dots + 99x^2 + 99x + 99$  với  $x = 100$

### Lời giải

$$\text{a) } A = 5x^2 + 10xy + 5y^2 - 105z^2 = 5(x+y)^2 - 105z^2 \Rightarrow A = 5.12^2 - 105.12^2 = -100.12^2 = -14400$$

$$\text{b) } B = 16x^2 - y^2 + 4x + y = \left(16x^2 + 4x + \frac{1}{4}\right) - \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = (4x+y)(4x-y+1) \Rightarrow B = 32,4$$

$$\text{c) } C = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \Rightarrow C = 70$$

$$\text{d) Ta có: } x^{101} - 1 = (x-1)(x^{100} + x^{99} + \dots + x^2 + x + 1) \Rightarrow D = 99(x^{100} + x^{99} + \dots + x^2 + x + 1) = 99 \frac{x^{101} - 1}{x - 1}$$

$$\text{Với } x = 100 \Rightarrow D = 100^{101} - 1$$

### Bài 5: Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\text{a) } C = xyz - xy - yz - xz + x + y + z - 1 \text{ với } x = 9, y = 51, z = 101$$

$$\text{b) } D = y^3 + 4x^2y + 4xy + 8x^3 + 2xy^2 \text{ với } 2x + y = 1$$

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } C &= xyz - xy - yz - xz + x + y + z - 1 = xy(z-1) - z(x+y) + (x+y) + (z-1) \\ &= (z-1)(zy+1) - (x+y)(z-1) = (x-1)(y-1)(z-1) \end{aligned}$$

$$\text{Với } x = 9, y = 51, z = 101 \text{ ta có: } C = (9-1)(51-1)(101-1) = 40000$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } D &= y^3 + 4x^2y + 4xy + 8x^3 + 2xy^2 = (2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2) + 2xy(2x+y) + 4xy \\ &= 4x^2 - 2xy + y^2 + 2xy + 4xy = 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x+y)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } D = 1$$

#### Dạng 4: Tìm $x$ thỏa mãn điều kiện cho trước

**Cách giải:** Thực hiện theo 3 bước

- Chuyển tất cả các hạng tử sang về trái, về phải bằng 0
- Phân tích về trái thành nhân tử đưa về dạng tích  $A.B = 0$
- Lần lượt tìm  $x$  từ các đẳng thức  $A = 0; B = 0$  rồi kết luận

#### Bài 1: Tìm $x$ biết

a)  $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$

b)  $(x^3 - x^2)^2 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 4\}$

Vậy  $\Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 4\}$

b) Ta có:  $(x^3 - x^2)^2 - 4x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) + 4(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x)[x^2(x^2 - x) - 4] + 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^5 - x^4 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; \pm\sqrt{2}\}$

Vậy  $x \in \{1; \pm\sqrt{2}\}$

#### Bài 2: Tìm $x$ biết

a)  $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = 0$

b)  $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x = 0$

c)  $x^4 + 5x^3 - 8x - 40 = 0$

d)  $(x^3 - x^2) - 4x^2 + 8x - 4 = 0$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

b) Ta có:  $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$

c) Ta có:  $x^4 + 5x^3 - 8x - 40 = 0 \Leftrightarrow x^3(x+5) - 8(x+5) = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-2)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5; 2\}$

d) Ta có:  $(x^3 - x^2) - 4x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) - 4(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$

#### Bài 3: Tìm $x$ biết

a)  $x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = 0$

b)  $(x+2)^2 - 2x(2x+3) = (x+1)^2$

$$\text{c) } x^2(x-5)+5-x=0$$

$$\text{d) } 3x^4-9x^3=-9x^2+27x$$

### Lời giải

$$\text{a) Ta có: } x^4+4x^3-16x-16=0 \Leftrightarrow (x^4-16)+4x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x+2)^2=0 \Leftrightarrow x \in \{\pm 2\}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-2; 2\}$$

$$\text{b) Ta có: } (x+2)^2-2x(2x+3)=(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2-(x+1)^2-2x(2x+3)=0 \Leftrightarrow (2x+3)-2x(2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(1-2x)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right\}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{c) Ta có: } x^2(x-5)+5-x=0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x \in \{5; 1; -1\}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-1; 1; 5\}$$

$$\text{d) Ta có: } 3x^4-9x^3=-9x^2+27x \Leftrightarrow 3x^3(x-3)+9x(x-3)=0 \Leftrightarrow (3x^3+9x)(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x^2+3)(x-3)=0 \Leftrightarrow x \in \{0; 3\}$$

$$\text{Vậy } x \in \{0; 3\}$$

### Bài 4: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức cho trước

$$\text{a) } xy-2y+3x-6=2$$

$$\text{b) } xy+3x-2y-7=0$$

### Lời giải

$$\text{a) Ta có: } xy-2y+3x-6=2 \Leftrightarrow y(x-2)+3(x-2)=2 \Leftrightarrow (x-2)(y+3)=2.1=1.2=-1.-2=-2.-1$$

$$\Rightarrow (x; y) = (3; -1); (1; -5); (4; -2); (0; -4)$$

$$\text{b) Ta có: } xy+3x-2y-7=0 \Leftrightarrow (x-2)(y+7)=1 \Rightarrow (x; y) = (3; 2); (1; -4)$$

**Dạng 5: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức dạng  $ax^2 + bx + c$** 

**Cách giải:** Tách hạng tử  $c$  thành  $c_1 + c_2$  sao cho  $ax^2 + bx + c_1$  tạo thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu

**Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau**

a)  $A = x^2 + 2x + 5$

b)  $B = x^2 - 5x + 8$

c)  $C = 2x^2 + 4x + 7$

d)  $D = x^2 - x + 1$

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 \geq 0, \forall x \Rightarrow A_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = -1$

b) Ta có:  $B = x^2 - 5x + 8 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}, \forall x \Rightarrow B_{\min} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

c) Ta có:  $C = 2x^2 + 4x + 7 = 2\left(x^2 + 2x + \frac{7}{2}\right) = 2\left(x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{2}\right) = 2(x+1)^2 + 5 \geq 5, \forall x \Rightarrow C_{\min} = 5 \Leftrightarrow x = -1$

d) Ta có:  $D = x^2 - x + 1 = \left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x \Rightarrow D_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

**Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau**

a)  $A = -x^2 + 2x + 7$

b)  $B = 5x - 3x^2 + 6$

c)  $C = -4x^2 + x - 1$

d)  $D = x^2 - x + 1$

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = -x^2 + 2x + 7 = -(x-1)^2 + 8 \leq 8, \forall x \Rightarrow A_{\max} = 8 \Leftrightarrow x = 1$

b) Ta có:  $B = 5x - 3x^2 + 6 = -\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{49}{12} \leq \frac{49}{12}, \forall x \Rightarrow B_{\max} = \frac{49}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$

c) Ta có:  $C = -4x^2 + x - 1 \Rightarrow C_{\max} = \frac{-1}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$

d) Ta có:  $D = x^2 - x + 1 \Rightarrow D_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^3 - 1 + 5x^2 - 5 + 3x - 3$

b)  $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$

c)  $3x^2(a-b+c) + 36xy(a-b+c) + 108y^2(a-b+c)$

d)  $x^2 - 2xy + y^2 - 4m^2 + 4mn - n^2$

#### Lời giải

a) Ta có:

$$x^3 - 1 + 5x^2 - 5 + 3x - 3 = (x-1)(x^2 + x + 1) + 5(x-1)(x+1) + 3(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 1 + 5x + 5 + 3)$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1 + 5x + 5 + 3) = (x-1)(x^2 + 6x + 9) = (x-1)(x+3)^2$$

b) Ta có:

$$a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = a^3(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^3 + 1) = (a+1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$$

c) Ta có:  $3x^2(a-b+c) + 36xy(a-b+c) + 108y^2(a-b+c) = 3(a-b+c)(x^2 + 12y + 36y^2)$

$$= 3(a-b+c)(x+6y)^2$$

d) Ta có:  $x^2 - 2xy + y^2 - 4m^2 + 4mn - n^2 = (x-y)^2 - (4m-n)^2 = (x-y-4m+n)(x-y+4m-n)$

### Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $5x^3 - 3x^2y - 45xy^2 + 27y^3$

b)  $3x^2(a-b+c) + 36xy(a-b+c) + 108y^2(a-b+c)$

c)  $x^2 - 2xy + y^2 - 4m^2 + 4mn - n^2$

d)  $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

e)  $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $5x^3 - 3x^2y - 45xy^2 + 27y^3 = (5x-3y)(x-3y)(x+3y)$

b) Ta có:  $3x^2(a-b+c) + 36xy(a-b+c) + 108y^2(a-b+c) = 3(a-b+c)(x+6y)^2$

c) Ta có:  $x^2 - 2xy + y^2 - 4m^2 + 4mn - n^2 = (x-y-2m+n)(x-y+2m-n)$

d) Ta có:  $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$

e) Ta có:  $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

### Bài 3: Tính nhanh

a)  $108.95 - 25.90 + 46.190 - 75.90$

b)  $57^2 + 43^2 - 400 + 85.57$

#### Lời giải

a) Ta có:  $108.95 - 25.90 + 46.190 - 75.90 = 54.190 + 46.190 - (25.90 + 75.90) = 100.190 - 100.90 = 10000$

b) Ta có:  $57^2 + 43^2 - 400 + 85.57 = (57^2 + 43^2 + 86.57) - 20^2 = 100^2 - 20^2 = 120.80 = 96000$

### Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = \left(\frac{t}{3}\right)^2 - 4(t-v)^2 + 2tv + 9v^2$  tại  $t = 6; v = -1$

b)  $B = 8(x-3)(2x+3) + (2x-6)^2 + 4(2x+3)^2$  tại  $x = \frac{-3}{2}$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = \left(\frac{t}{3}\right)^2 - 4(t-v)^2 + 2tv + 9v^2 = -195$  tại  $t = 6; v = -1$

b) Ta có:  $B = 8(x-3)(2x+3) + (2x-6)^2 + 4(2x+3)^2 = 81$  tại  $x = \frac{-3}{2}$

### Bài 5: Tìm x biết

a)  $x^2(x+5) - 9x = 45$

b)  $9(5-x) + x^2 - 10x = -25$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^2(x+5) - 9x = 45 \Leftrightarrow x^2(x+5) - 9(x+5) = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5; -3; 3\}$

b)  $9(5-x) + x^2 - 10x = -25 \Leftrightarrow 9(5-x) + (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-5-9) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x-14) = 0 \Leftrightarrow x \in \{5; 14\}$

### Bài 6: Chứng minh rằng

a)  $n^3 + 3n^2 - n - 3$  chia hết cho 48 với n lẻ

b)  $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$  chia hết cho 384 với mọi n chẵn lớn hơn 4

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = n^2(n+3) - (n+3) = (n+3)(n^2-1) = (n+3)(n-1)(n+1)$

Đặt  $n = 2k+1$  (n lẻ)  $\Rightarrow A = \underbrace{8k(k+1)(k+2)}_{:6} \Rightarrow A : 48 \forall n \in \mathbb{Z}$

b) Ta có:  $B = n(n-4)(n-2)(n+2)$



$$\text{Đặt } n = 2k + 2 (k \geq 1) \Rightarrow A = 16 \underbrace{(k-1)k(k+1)(k+2)}_{:24} \Rightarrow B:384$$

### **Bài 7:**

Tìm các số tự nhiên  $n$  để giá trị của biểu thức sau là số nguyên tố  $A = 5n^3 - 9n^2 + 15n - 27$

### **Lời giải**

Ta có:  $A = 5n^3 - 9n^2 + 15n - 27 = (n^2 + 3)(5n - 9) \Rightarrow 5n - 9 = 1 \Leftrightarrow n = 2 \Rightarrow A = 7$  (thỏa mãn)

Vậy  $n = 2$  là giá trị cần tìm.

## D. PHỐI HỢP NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

**\*) Phương pháp:** Để phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp, ta nên chú ý chọn các phương pháp theo thứ tự ưu tiên như sau:

**Bước 1:** Đầu tiên ta xét xem các hạng tử có xuất hiện nhân tử chung không

+) Có nhân tử chung: Áp dụng phương pháp đặt nhân tử chung. Sau đó ta xem đa thức trong ngoặc là bài toán mới và quay về bước 1 và tiếp tục thực hiện đến kết quả cuối cùng

+) Nếu không có nhân tử chung chuyển sang bước 2

**Bước 2:** Nếu đa thức có dạng của một hằng đẳng thức thì áp dụng phương pháp hằng đẳng thức. Nếu không thì chuyển qua bước 3

**Bước 3:** Dùng phương pháp nhóm hạng tử thích hợp để xuất hiện hằng đẳng thức hoặc nhân tử chung

**Ví dụ:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $A = 2x^2 + 4x + 2 - 2y^2$

b)  $B = 5x^3z - 10x^2z - 5xz^3 - 5xy^2z + 5xz + 10xyz^2$

**Hướng giải:**

a) Ta có:  $A = 2x^2 + 4x + 2 - 2y^2 = 2(x^2 + 2x + 1 - y^2) \rightarrow$  nhân tử chung

$= 2[(x^2 + 2x + 1) - y^2] \rightarrow$  nhóm hạng tử thích hợp của đa thức trong ngoặc

$= 2[(x+1)^2 - y^2] \rightarrow$  Xuất hiện hằng đẳng thức

$= 2(x+1-y)(x+1+y) \rightarrow$  Dùng hằng đẳng thức

b) Có:  $B = 5x^3z - 10x^2z - 5xz^3 - 5xy^2z + 5xz + 10xyz^2 = 5xz(x^2 - 2x - z^2 - y^2 + 1 + 2yz) \rightarrow$  nhân tử chung

$= 5xz[(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2yz + z^2)] \rightarrow$  nhóm hạng tử thích hợp của đa thức trong ngoặc

$= 5xz[(x^2 - 1)^2 - (y - z)^2] \rightarrow$  Xuất hiện hằng đẳng thức

$= 5xz(x-1-y+z)(x-1+y-z) \rightarrow$  Dùng hằng đẳng thức.

### Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp các phương pháp cơ bản

**Cách giải:** Sử dụng phối hợp cả ba phương pháp cơ bản

- Phương pháp đặt nhân tử chung
- phương pháp dùng hằng đẳng thức

- Phương pháp nhóm hạng tử

**Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

a)  $3x - 3y + x^2 - y^2$

b)  $x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy$

c)  $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2$

d)  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3$

**Lời giải**

a) Ta có:  $3x - 3y + x^2 - y^2 = (x - y)(x + y + 3)$

b) Ta có:  $x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy = (x + y - 2xy)(2 + y + 2xy)$

c) Ta có:  $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 = x^2(x + 1)(x - 2)(x - 4)$

d) Ta có:  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3 = (x - 1 - y)\left[(x + 1)^2 + (x - 1)y + y^2\right]$

**Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

a)  $x^2(x - 3)^2 - (x - 3)^2 - x^2 + 1$

b)  $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

c)  $(x + y)^3 - (x - y)^3$

d)  $2a^2(x + y + z) - 4ab(x + y + z) + 2b^2(x + y + z)$

**Lời giải**

a) Ta có:  $x^2(x - 3)^2 - (x - 3)^2 - x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 4)$

b) Ta có:  $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2)(x^2 + 4)$

c) Ta có:  $(x + y)^3 - (x - y)^3 = 2y(3x^2 + y^2)$

d) Ta có:  $2a^2(x + y + z) - 4ab(x + y + z) + 2b^2(x + y + z) = 2(x + y + z)(a - b)^2$

**Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

a)  $x^2y - 4xy + 4y - 4y^3$

b)  $2x^3y - 2xy^3 - 4xy^2 - 2xy$

c)  $x^4 - x^2 + 2x + 2$

**Lời giải**

a) Ta có:  $x^2y - 4xy + 4y - 4y^3 = y(x - 2 - 2y)(x - 2 + 2y)$

b) Ta có:  $2x^3y - 2xy^3 - 4xy^2 - 2xy = 2xy(x^2 - y^2 - 2y - 1) = 2xy\left[x^2 - (y + 1)^2\right] = 2xy(x - y - 1)(x + y + 1)$

c) Ta có:  $x^4 - x^2 + 2x + 2 = x^2(x^2 - 1) + 2(x + 1) = (x + 1)(x^3 - x^2 + 2) = (x + 1)\left[(x^3 + 1) - (x^2 - 1)\right]$

**Bài 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

a)  $x^2 - 16 - 4xy + 4y^2$

b)  $x^5 - x^4y + 2x^4 - 2x^3y$

c)  $x^6 + 2x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 1$

**Lời giải**

a) Ta có:  $x^2 - 16 - 4xy + 4y^2 = (x^2 - 4xy + 4y^2) - 16 = (x - 2y)^2 - 4^2 = (x - 2y - 4)(x - 2y + 4)$

b) Ta có:  $x^5 - x^4y + 2x^4 - 2x^3y = x^4(x - y) + 2x^3(x - y) = x^3(x - y)(x + 2)$

c) Ta có:  $x^6 + 2x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 1 = (x^3)^2 + 2x^3(x^2 - 1) + (x^2 - 1)^2 = (x^3 + x^2 - 1)^2$

**Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

a)  $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$

b)  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$

**Lời giải**

a) Ta có:  $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 12 \Leftrightarrow (y + 6)(y - 2) \Leftrightarrow (x^2 + x + 6)(x^2 + x - 2)$

Với  $y = x^2 + x$

b) Ta có:  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24 = (y - 1)(y + 1) - 24 \left( y = x^2 + 5x + 5 \right)$   
 $= y^2 - 25 = (y + 5)(y - 5) = x(x + 5)(x^2 + 5x + 10)$

**Bài 6: Tìm x, biết**

a)  $8x^3 - 50x = 0$

b)  $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

c)  $4x^2 - 25 - (2x + 5)(2x + 7) = 0$

d)  $(x - 2)(x^2 + 2x + 7) + 2(x^2 - 4) - 5(x - 2) = 0$

**Lời giải**

a) Ta có:  $8x^3 - 50x = 0 \Leftrightarrow 2x(4x^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow 2x(2x + 5)(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 0; \frac{\pm 5}{2} \right\}$

b) Ta có:  $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) - (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$

c.  $4x^2 - 25 - (2x + 5)(2x + 7) = 0 \Leftrightarrow (2x + 5)(2x - 5 - 2x - 7) = 0 \Leftrightarrow (2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{2}$

Vậy  $x = \frac{-5}{2}$

d.  $(x - 2)(x^2 + 2x + 7) + 2(x^2 - 4) - 5(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 7 + 2x + 4 - 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 4x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy  $x = 2$

### Bài 7: Tìm $x$ , biết

a)  $x^9 + x^8 - x - 1 = 0$

b)  $2(x+3) - x^2 - 3x = 0$

a)  $6x^2 - 15x - (2x-5)(2x+5) = 0$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^9 + x^8 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^8(x+1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^4-1)(x^4+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

b) Ta có:  $2(x+3) - x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow (x+3)(2-x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 2\}$

c) Ta có:  $6x^2 - 15x - (2x-5)(2x+5) = 0 \Leftrightarrow (2x-5)(-2x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{5}{2}\right\}$

### Bài 8:

Chứng minh rằng  $A = n^5 - n : 30, \forall n \in \mathbb{Z}$

#### Lời giải

Ta có:  $A = n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)[(n^2 - 4) + 5]$

$$= \underbrace{n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2)}_{:2,3,5} + 5 \underbrace{n(n+1)(n-1)}_{:3,2}$$

### Bài 9:

Cho ba số  $a, b, c$  thỏa mãn  $a+b+c=1$  và  $a^3+b^3+c^3=1$ . Chứng minh rằng

$$a^{2015} + b^{2015} + c^{2015} = 1 (*)$$

#### Lời giải

$$\text{Từ: } a+b+c=1 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 1 \Leftrightarrow [(a+b)+c] = 1 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{cases}$$

+) TH1:  $a = -b \Rightarrow a^{2015} = -b^{2015}$  mà  $a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow (*)$  thỏa mãn

+) Hai trường hợp còn lại tương tự.

## Dạng 2: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp tách hạng tử

Xét đa thức bậc hai:  $ax^2 + bx + c$

### 1. Tách hạng tử bậc nhất $bx$

+) Tính tích  $ac$  sao đó phân tích  $ac$  ra tích của hai thừa số  $ac = a_1c_1 = a_2c_2$

+) Chọn ra hai thừa số có tổng bằng  $b$ , chẳng hạn  $ac = a_1c_1$  với  $a_1 + c_1 = b$

+) Tách  $bx = a_1x + c_1x$

Dùng phương pháp nhóm hạng tử

### 2. Tách $c = c_1 + c_2$ sao cho $ax^2 + bx + c_1 = (\dots \pm \dots)^2$

#### Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^2 - 5x + 6$

b)  $3x^2 + 9x - 30$

c)  $3x^2 - 5x - 2$

d)  $x^2 - 7xy + 10y^2$

e)  $x^3 - 7x - 6$

f)  $x^2 - 2x - y^2 + 4y - 3$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

b) Ta có:  $3x^2 + 9x - 30 = 3(x - 2)(x + 5)$

c) Ta có:  $3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$

d) Ta có:  $x^2 - 7xy + 10y^2 = (x - 2y)(x - 5y)$

e) Ta có:  $x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$

f) Ta có:  $x^2 - 2x - y^2 + 4y - 3 = (x - 1)(x + 3)(x^2 + 3)$

#### Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^2 - 3x + 2$

b)  $4x^2 - 36x + 56$

c)  $2x^2 + 5x + 2$

d)  $2x^2 - 9x + 7$

e)  $4x^2 - 4x - 9y^2 + 12y - 3$

f)  $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$

g)  $x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

b) Ta có:  $4x^2 - 36x + 56 = 4(x-2)(x-7)$

c) Ta có:  $2x^2 + 5x + 2 = (x+2)(2x+1)$

d) Ta có:  $2x^2 - 9x + 7 = (x-1)(2x-7)$

e) Ta có:  $4x^2 - 4x - 9y^2 + 12y - 3 = (2x+3y-3)(2x-3y+1)$

f) Ta có:  $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = (x-3)(x^3 + x^2 - x + 1)$

g) Ta có:  $x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y = (x+y)(x+y-1)(x+y+1)$

### Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $3x^2 + 8x + 4$

b)  $x^2 + 4x + 3$

c)  $x^4 + 3x^2 + 4$

d)  $x^2 - 2x - 3$

e)  $x^2 - 10x + 24$

f)  $x^4 + 2x^3 + 6x - 9$

### Lời giải

a) Ta có:  $3.4 = 12 = 2.6$  và  $2+6=8$

Vậy:  $3x^2 + 8x + 4 = 3x^2 + 2x + 6x + 4 = (x+2)(3x+2)$

c)  $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$

f)  $x^4 + 2x^3 + 6x - 9 = (x-1)(x+3)(x^2+3)$

### Bài 4: Tìm $x$ , biết

a)  $x^2 + 5x - 6 = 0$

b)  $x^2 - 2x - 3 = 0$

c)  $x^2 - x - 6 = 0$

d)  $x^3 + 2x^2 - 3 = 0$

### Lời giải

d) Ta có:  $x^3 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) + (2x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left[ \left( x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy  $x = 1$

### Bài 5: Tìm $x$ , biết

Chứng minh rằng  $A = n^4 - 6n^3 + 27n^2 - 54n + 32 : 2, \forall n \in \mathbb{Z}$

### Lời giải

### Lời giải

Ta có:  $A = n^4 - n^3 - 5n^3 + 5n^2 + 22n^2 - 32n + 32 = (n-1)(n^3 - 5n^2 + 22n - 32) = (n-1)(n^3 - 2n^2 - 3n^2 + 6n + 16n - 32) = (n-1)\underbrace{(n^3 - 2n^2 - 3n^2 + 6n + 16n - 32)}_{:2} = (n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 16)$  (đpcm).



### Dạng 3: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp thêm, bớt hạng tử

**Cách giải:** Thêm, bớt cùng một hạng tử, sau đó sử dụng phương pháp nhóm hạng tử để phân tích

#### Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp thêm, bớt hạng tử

a)  $x^4 + x^2 + 1$

b)  $x^4 + 4$

c)  $x^4 + 3x^2 + 4$

d)  $x^4 + 64$

e)  $4x^4 + 1$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

b) Ta có:  $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

c) Ta có:  $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - x^2 = (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

#### Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp thêm, bớt hạng tử

a)  $x^5 + x^4 + 1$

b)  $x^8 + x^4 + 1$

c)  $x^4 + 2x^2 + 2(x^2 + 1)(x^2 + 6x - 1) + (x^2 + 6x - 1)^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 = x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

b) Ta có:  $x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)$

c) Ta có:  $x^4 + 2x^2 + 2(x^2 + 1)(x^2 + 6x - 1) + (x^2 + 6x - 1)^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)(x^2 + 6x - 1) + (x^2 + 6x - 1)^2 - 1 = \left[ (x^2 + 1) + (x^2 + 6x - 1) \right]^2 - 1 = (2x^2 + 6x + 1)(2x^2 + 6x - 1)$

#### Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp thêm, bớt hạng tử

a)  $x^8 + 64$

b)  $x^4 + 4y^4$

c)  $x^5 + x + 1$

#### Lời giải

a) Ta có:  $x^8 + 64 = (x^4 - 4x^2 + 8)(x^4 + 4x^2 + 8)$

b) Ta có:  $x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$

c) Ta có:  $x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

**Bài 4:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp thêm, bớt hạng tử

a)  $64x^4 + 81$

b)  $x^8 + 4y^4$

c)  $x^8 + x^7 + 1$

**Lời giải**

a) Ta có:  $64x^4 + 81 = (8x^2 - 12x + 9)(8x^2 + 12x + 9)$

b) Ta có:  $x^8 + 4y^4 = (x^4 - 2x^2y + 2y^2)(x^4 + 2x^2y + 2y^2)$

c) Ta có:  $x^8 + x^7 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$

**Bài 5:**

Chứng minh rằng với mọi  $x, y$  nguyên thì  $A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$  là một số chính phương

**Lời giải**

Ta có:  $A = x^4 + 10x^3y + 35x^2y^2 + 50xy^3 + 25y^4 = (x^4 + 2x^2 \cdot 5xy + 25x^2y^2) + (10x^2y^2 + 50xy^3) + 25y^4$   
 $= (x^2 + 5xy)^2 + 25y^2(x^2 + 5xy) + (5y^2)^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$  (đpcm).

### Dạng 3: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt biến phụ

**Cách giải:** Đặt các hạng tử giống nhau thành biến mới để đưa đa thức đã cho về một đa thức với biến vừa đặt. Áp dụng các phương pháp phân tích đã có ở trên để phân tích

#### Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $25y^2 + 10y^8 + 1$

b)  $(x-1)^4 - 2(x^2 - 2x + 1)^2 + 1$

c)  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$

d)  $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$

e)  $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

#### Lời giải

a) Ta có:  $25y^2 + 10y^8 + 1 = (5y + 1)^2$

b) Ta có:  $(x-1)^4 - 2(x^2 - 2x + 1)^2 + 1 = x(2-x)(x^2 - 2x + 2)$

c) Ta có:  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = x(x+5)(x^2 + 5x + 10)$

d) Ta có:  $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = (x+2)(x+4)(x^2 + 5x + 8)$

e) Ta có:  $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + 5x - 1)(x^2 + x - 1)$

#### Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $\frac{36}{x^6} - \frac{24}{x^3} + 4$

b)  $(x^2 - 1)^2 - 18(x+1)(x-1)$

c)  $(x+1)(x+3)(x+5) + (x+7) + 15$

d)  $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2$

#### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{36}{x^6} - \frac{24}{x^3} + 4 = \left(\frac{6}{x^3} - 2\right)^2$

b) Ta có:  $(x^2 - 1)^2 - 18(x+1)(x-1) = (x+1)(x-1)(x^2 - 19)$

c) Ta có:  $(x+1)(x+3)(x+5) + (x+7) + 15 = (x+2)(x+6)(x^2 + 8x + 10)$

d) Ta có:  $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = (x+2)^2(x^2 + 6x + 4)$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $2x^2 - 5x + 2$

b)  $3x^2 - 10xy + 3y^2$

c)  $x^8 + x^4 + 1$

d)  $2xy - x^2 + 3y^2 - 4y + 1$

e)  $8x^2 - 12xy + 4y^2 - 2x - 1$

f)  $x^2 - 10x + 9$

#### Lời giải

a) Ta có:  $2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$

b) Ta có:  $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$

c) Ta có:  $x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)$

d) Ta có:  $2xy - x^2 + 3y^2 - 4y + 1 = -(x^2 - 2xy + y^2) + (4y^2 - 4y + 1) = (3y - x - 1)(x + y - 1)$

e) Ta có:  $8x^2 - 12xy + 4y^2 - 2x - 1 = 9x^2 - 12xy + 4y^2 - x^2 - 2x - 1 = (2x - 2y - 1)(4x - 2y + 1)$

f) Ta có:  $x^2 - 10x + 9 = (x - 1)(x - 9)$

### Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $4x^{16} + 81$

b)  $625t^9 + 75t^3 + 9$

c)  $(5 - y)^6 - 2(125 - 75y + 15y^2 - y^3) + 1$

d)  $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

#### Lời giải

a) Ta có:  $4x^{16} + 81 = (2x^8 - 6x^4 + 9)(2x^8 + 6x^4 + 9)$

b) Ta có:  $625t^9 + 75t^3 + 9 = (25t^3 + 1)(25t^3 + 2)$

c) Ta có:  $(5 - y)^6 - 2(125 - 75y + 15y^2 - y^3) + 1 = (4 - y)^2 (y^2 - 11y + 31)^2$

d) Ta có:  $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2018)$

### Bài 3: Tính giá trị của biểu thức

a)  $4x^{16} + 81$

b)  $625t^9 + 75t^3 + 9$

c)  $(5 - y)^6 - 2(125 - 75y + 15y^2 - y^3) + 1$

d)  $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = x^2 - 8x + 7 = 2016$

b) Ta có:  $B = x^4 - 2x^3 + x^2 = 8100$

c) Ta có:  $C = m^6 - 2m^4 - m + m^2 + m^3 = 2$

#### Bài 4:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  thì  $A = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n : 24$

#### Lời giải

Ta có:  $A = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n = (n-2)(n-1)n(n+1)$  là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3, 8

suy ra  $A = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$  chia hết cho 24.

#### Bài 5:

Tính  $(a-b)^{2017}$ , biết  $a+b=9$  và  $ab=20$  và  $a < b$

#### Lời giải

Ta tính được  $a=4$ ;  $b=5$   $a=4, b=5 \Rightarrow (a-b)^{2017} = -1$

#### Bài 6:

a) Phân tích đa thức  $n^4 + \frac{1}{4}$  thành nhân tử

b) Áp dụng: Rút gọn  $S = \frac{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4}) \dots (19^4 + \frac{1}{4})}{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4}) \dots (20^4 + \frac{1}{4})}$

#### Lời giải

a) Ta có:  $n^4 + \frac{1}{4} = n^4 + 2.n^2.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - n^2 = \left(n^2 - n + \frac{1}{2}\right)\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) = \left[(n-1)n + \frac{1}{2}\right]\left[(n+1)n + \frac{1}{2}\right]$

b) Áp dụng ta được:  $S = \frac{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4}) \dots (19^4 + \frac{1}{4})}{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4}) \dots (20^4 + \frac{1}{4})} = \frac{(0.1 + \frac{1}{2})(1.2 + \frac{1}{2})(2.3 + \frac{1}{2}) \dots (19.20 + \frac{1}{2})}{(1.2 + \frac{1}{2})(2.3 + \frac{1}{2})(3.4 + \frac{1}{2}) \dots (20.21 + \frac{1}{2})} = \frac{1}{841}$

## CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

### A. Tóm tắt lý thuyết

#### 1. Các khái niệm cơ bản của phép chia đơn thức

Cho  $A$  và  $B$  là hai đơn thức,  $B$  khác 0

- Ta nói đơn thức  $A$  chia hết cho đơn thức  $B$  nếu tìm được một đơn thức  $Q$  sao cho  $A = BQ$
- $A$  được gọi là đơn thức bị chia,  $B$  gọi là đơn thức chia,  $Q$  gọi là đơn thức thương
- Đơn thức  $A$  chia hết cho đơn thức  $B$  khi mỗi biến của  $B$  đều là biến của  $A$  với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong  $A$

#### 2. Quy tắc chia đơn thức cho đơn thức (trường hợp chia hết)

- Chia hệ số của đơn thức  $A$  cho hệ số của đơn thức  $B$
- Chia lũy thừa của từng biến trong  $A$  cho lũy thừa của cùng biến đó trong  $B$
- Nhân các kết quả tìm được với nhau

#### 3. Đơn thức $A$ chia hết cho đơn thức $B$ nếu

- Mỗi biến của  $B$  đều là biến của  $A$
- Số mũ của biến đó trong  $B$  không lớn hơn số mũ của biến đó trong  $A$

#### 4. Nhắc lại một số quy tắc về lũy thừa

- Chia hai lũy thừa cùng cơ số:  $a^m : a^n = a^{m-n} (m, n \in \mathbb{N}, m \geq n)$
- Nhân hai lũy thừa cùng cơ số:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n} (x \neq 0; m, n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa của một tích:  $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m (a, b \neq 0; m \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa của một thương:  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} (b \neq 0; m \in \mathbb{N})$

### B. Bài tập áp dụng và các dạng toán

#### Dạng 1: Thực hiện phép chia

**Cách giải:** Áp dụng trực tiếp quy tắc chia đơn thức cho đơn thức (trường hợp chia hết) và chú ý quy tắc về lũy thừa.

#### Bài 1: Tính

a)  $25^8 : 5^{12}$

b)  $\left(\frac{49}{25}\right)^{12} : \left(\frac{7}{5}\right)^{24}$

c)  $\left(\frac{1}{9}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{49}$

### Lời giải

a) Ta có:  $25^8 : 5^{12} = 5^{16} : 5^{12} = 5^4$

b) Ta có:  $\left(\frac{49}{25}\right)^{12} : \left(\frac{7}{5}\right)^{24} = \left(\frac{7}{5}\right)^{24} : \left(\frac{7}{5}\right)^{24} = 1$

c) Ta có:  $\left(\frac{1}{9}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{49} = \left(\frac{1}{3}\right)^{50} : \left(\frac{1}{3}\right)^{49} = \frac{1}{3}$

### Bài 2: Tính

a)  $\left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{5}{3}\right)^4$

b)  $(-18)^4 : 9^4$

c)  $\left(\frac{6}{5}\right)^2 : \left(\frac{7}{5}\right)^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $\left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

b) Ta có:  $(-18)^4 : 9^4 = 18^4 : 9^4 = 2^4 = 16$

c) Ta có:  $\left(\frac{6}{5}\right)^2 : \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 7}\right)^2 = \frac{36}{49}$

### Bài 3: Tính

a)  $\left(\frac{-5}{4}\right)^6 : \left(\frac{5}{4}\right)^3$

b)  $28^7 : (-4)^7$

c)  $\left(\frac{9}{7}\right)^9 : \left(\frac{-9}{-7}\right)^3$

### Lời giải

a) Ta có:  $\left(\frac{-5}{4}\right)^6 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$

b) Ta có:  $28^7 : (-4)^7 = -7^7$

c) Ta có:  $\left(\frac{9}{7}\right)^9 : \left(\frac{-9}{-7}\right)^3 = \frac{9^6}{7^6}$

### Bài 4: Thực hiện phép tính

a)  $x^8 : x^7$

b)  $36x^7 : 12x^4$

c)  $(-x)^9 : (-x)^5$

d)  $32(-y)^8 : (-2y^4)$

### Lời giải

a) Ta có:  $x^8 : x^7 = x$

b) Ta có:  $36x^7 : 12x^4 = (36 : 12)x^{7-4} = 3x^3$

c) Ta có:  $(-x)^9 : (-x)^5 = (-x)^{9-5} = (-x)^4 = x^4$

d) Ta có:  $32(-y)^8 : (-2y^4) = [32 : (-2)](y^8 : y^4) = -16y^4$

### Bài 5: Tính

a)  $\frac{20}{9}x^3 : 5x^2$

b)  $x^{10} : \frac{-5}{4}(-x)^8$

c)  $19z^8 : (3z)^2$

d)  $\frac{25}{4}(-x^3)^5 : \frac{5}{8}(-x)^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{20}{9}x^3 : 5x^2 = \left(\frac{20}{9} : 5\right)x^{3-2} = \frac{4}{9}x$

b) Ta có:  $x^{10} : \frac{-5}{4}(-x)^8 = \left(1 : \frac{-5}{4}\right)x^{10} : x^8 = \frac{-4}{5}x^2$

c)  $19z^8 : (3z)^2 = 19z^8 : 9z^2 = \frac{19}{9}z^{8-2} = \frac{19}{9}z^6$

d)  $\frac{25}{4}(-x^3)^5 : \frac{5}{8}(-x)^2 = \left(\frac{25}{4} : \frac{5}{8}\right)(-x)^{15} : (-x)^2 = -10x^{13}$

### Bài 6: Chia các đơn thức sau

a)  $15x^2y^2 : 5xy^2$

b)  $x^3y^4 : x^3y$

c)  $5x^2y^4 : 10x^2y$

d)  $\frac{3}{4}(xy)^3 : \left(\frac{-1}{2}x^2y^2\right)$

### Lời giải

a) Ta có:  $15x^2y^2 : 5xy^2 = 3x$

b) Ta có:  $x^3y^4 : x^3y = y^3$

c) Ta có:  $5x^2y^4 : 10x^2y = \frac{1}{2}y^3$

d) Ta có:  $\frac{3}{4}(xy)^3 : \left(\frac{-1}{2}x^2y^2\right) = \frac{-3}{2}xy$



**Bài 7: Chia các đơn thức sau**

a)  $9x^5y^7z : 4x^4y^7$

b)  $121x^5y^6 : (-11x^4y^2)$

c)  $\frac{27}{8}x^3y^5z^2 : \frac{9}{4}xz$

d)  $(4-y)^7 : (y-4)^4$

**Lời giải**

a) Ta có:  $9x^5y^7z : 4x^4y^7 = \frac{9}{4}xz$

b) Ta có:  $121x^5y^6 : (-11x^4y^2) = [121 : (-11)]x^{5-4}y^{6-2} = -11xy^4$

c) Ta có:  $\frac{27}{8}x^3y^5z^2 : \frac{9}{4}xz = \left(\frac{27}{8} : \frac{9}{4}\right)x^{3-1}y^5z^{2-1} = \frac{3}{2}x^2y^5z$

d) Ta có:  $(4-y)^7 : (y-4)^4 = (4-y)^7 : (4-y)^4 = (4-y)^3$

**Bài 8: Chia các đơn thức sau**

a)  $15a^2bc : 3a^2b$

b)  $-21x^2y^5z^3 : 7xy^2z^3$

c)  $\frac{3}{2}x^2y^3z^4 : \frac{1}{4}y^2z$

d)  $\frac{-3}{2}(x-y)^6 : 5(x-y)^3$

e)  $\frac{-12}{25}x^4y^3z^5 : \frac{4}{5}x^4yz^2$

**Lời giải**

a) Ta có:  $15a^2bc : 3a^2b = 5c$

b) Ta có:  $-21x^2y^5z^3 : 7xy^2z^3 = -3xy^3$

c) Ta có:  $\frac{3}{2}x^2y^3z^4 : \frac{1}{4}y^2z = 6x^2yz^3$

d) Ta có:  $\frac{-3}{2}(x-y)^6 : 5(x-y)^3$

e) Ta có:  $\frac{-12}{25}x^4y^3z^5 : \frac{4}{5}x^4yz^2$

**Bài 9: Thực hiện phép tính**

a)  $(21a^4b^2x^3 - 6a^2b^3x^5 + 9a^3b^4x^4) : (3a^2b^2x^2)$

b)  $(81a^4x^4y^3 - 36x^5y^4 - 18ax^5y^4 - 18ax^5y^5) : (-9x^3y^3)$

c)  $(10x^3y^2 + 12x^4y^3 - 6x^5y^4) : \left(\frac{-1}{2}x^3y^2\right)$

$$d) \left( \frac{-10}{3}x^2yz^3 + \frac{15}{2}xy^3z^4 - 5xyz^2 \right) : \left( \frac{5}{3}xyz^2 \right)$$

$$e) \left[ (x+y)^4 - 3(x+y)^2 + x+y \right] : (x+y)$$

### Lời giải

a) Ta có:

$$(21a^4b^2x^3 - 6a^2b^3x^5 + 9a^3b^4x^4) : (3a^2b^2x^2) = \frac{21a^4b^2x^3}{3a^2b^2x^2} - \frac{6a^2b^3x^5}{3a^2b^2x^2} + \frac{9a^3b^4x^4}{3a^2b^2x^2} = 7a^2x - 2bx^3 + 3ab^2x^2$$

$$b) \text{ Ta có: } (81a^4x^4y^3 - 36x^5y^4 - 18ax^5y^4 - 18ax^5y^5) : (-9x^3y^3) = -9a^4x + 4x^2y + 2ax^2y + 2ax^2y^2$$

$$c) \text{ Ta có: } (10x^3y^2 + 12x^4y^3 - 6x^5y^4) : \left( \frac{-1}{2}x^3y^2 \right) = -20 - 24xy + 12x^2y^2$$

$$d) \text{ Ta có: } \left( \frac{-10}{3}x^2yz^3 + \frac{15}{2}xy^3z^4 - 5xyz^2 \right) : \left( \frac{5}{3}xyz^2 \right) = -2xz + \frac{9}{2}y^2z^2 - 3$$

$$e) \text{ Ta có: } \left[ (x+y)^4 - 3(x+y)^2 + x+y \right] : (x+y) = (x+y)^3 - 3(x+y) + 1$$

### Bài 10: Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$A = \frac{2}{3}x^2y^3 : \left( -\frac{1}{3}xy \right) + 2x(y-1)(y+1) + 2(x-2)(x, y \neq 0)$$

### Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2}{3}x^2y^3 : \left( -\frac{1}{3}xy \right) + 2x(y-1)(y+1) + 2(x-2) = \frac{\frac{2}{3}x^2y^3}{-\frac{1}{3}xy} + 2x(y-1)(y+1) + 2(x-2)$$

$$\Rightarrow A = -2xy^2 + 2xy^2 - 2x + 2x - 4 = -4$$

Vậy giá trị của biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

### Bài 11:

Tìm đa thức  $P(x)$ , biết  $5x^3 \cdot P(x) = 25x^6 - 30x^5 + 10x^3$

### Lời giải

$$\text{Ta có: } 5x^3 \cdot P(x) = 25x^6 - 30x^5 + 10x^3 \Rightarrow P(x) = (25x^6 - 30x^5 + 10x^3) : (5x^3)$$

$$= 5x^3 - 6x^2 + 2$$

Vậy đa thức  $P(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2$ .

### Bài 12: Tìm đa thức $P(x)$ , biết

a)  $5x^3.P(x) = 25x^6 - 30x^5 + 10x^3$

b)  $(-2x^4y).P(x) = -6x^8y^5 + 18x^6y^2 + 2x^4y$

#### Lời giải

a) Ta có:  $\Rightarrow P(x) = (25x^6 - 30x^5 + 10x^3) : 5x^3 = 5x^3 - 6x^2 + 2$

Vậy đa thức cần tìm  $P(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2$

b) Ta có:  $(-2x^4y).P(x) = -6x^8y^5 + 18x^6y^2 + 2x^4y \Rightarrow P(x) = (-6x^8y^5 + 18x^6y^2 + 2x^4y) : (-2x^4y)$   
 $= 3x^4y^4 - 9x^2y - 1$

Vậy đa thức cần tìm  $P(x) = 3x^4y^4 - 9x^2y - 1$ .

## Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức

**Cách giải:** Thực hiện phép chia để tìm kết quả trước, sau đó thay số và tính giá trị của biểu thức

### Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = 15x^5y^3 : 10xy^2$  tại  $x = -3; y = \frac{2}{3}$

b)  $B = -(x^3y^5z^2)^2 : (-x^2y^3z)^3$  tại  $x = 1; y = -1; z = 100$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 15x^5y^3 : 10xy^2 = \frac{3}{2}x^4y \Rightarrow A = 81$  tại  $x = -3; y = \frac{2}{3}$

b) Ta có:  $B = -(x^3y^5z^2)^2 : (-x^2y^3z)^3 \Rightarrow B = yz = -100$  tại  $x = 1; y = -1; z = 100$

### Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = (-x^3y^3)^4 : (-x^{12}y^{11})$  tại  $x = \frac{3}{4}; y = \frac{-4}{3}$

b.  $B = 25(x^2y^4)^2 : 15x^4y^6$  tại  $x = 2017; y = \frac{3}{5}$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = (-x^3y^3)^4 : (-x^{12}y^{11}) = (-1)^4 x^{12}y^{12} : (-x^{12}y^{11}) = -y = \frac{4}{3}$  tại  $x = \frac{3}{4}; y = \frac{-4}{3}$

b) Ta có:  $B = 25(x^2y^4)^2 : 15x^4y^6 = \frac{5}{3}y^2 \Rightarrow B = \frac{3}{5}$  tại  $x = 2017; y = \frac{3}{5}$

### Bài 3: Tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = \frac{3}{4}(x-2)^3 : \frac{-1}{2}(2-x)$  tại  $x = 3$

b.  $B = (x-y+z)^5 : (-x+y-z)^3$  tại  $x = 17; y = 16; z = 1$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = \frac{3}{4}(x-2)^3 : \frac{-1}{2}(2-x) = \frac{3}{2}(x-2)^2 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$  tại  $x = 3$

b) Ta có:  $B = (x-y+z)^5 : (-x+y-z)^3 = -(x-y+z)^2 \Rightarrow D = -4$  tại  $x = 17; y = 16; z = 1$

#### Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = 54(x - y - 1)^2 : -18(1 - x + y)$  tại  $x = 21; y = -10$

b.  $B = (2 - 2x)^6 : (x - 1)^3$  tại  $x = 11$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 54(x - y - 1)^2 : -18(1 - x + y) = 3(x - y - 1) \Rightarrow A = 90$  tại  $x = 21; y = -10$

b) Ta có:  $B = (2 - 2x)^6 : (x - 1)^3 = 64(x - 1)^3 \Rightarrow B = 64000$  tại  $x = 11$

#### Bài 5: Tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = (-15x^3y^5z^4) : 5x^2y^4z^4 (x = \frac{-2}{3}; y = \frac{-3}{2}; z = 1000)$

b.  $B = (-3m^2n^2p)^2 : 27m^3np2m^3n^3 (p = \frac{1}{2})$

c.  $C = (-ax^2y^3)^4 : (-ax^2y^3)^3 (a = \frac{1}{2}; x = \frac{1}{3}; y = \frac{3}{5})$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = (-15x^3y^5z^4) : 5x^2y^4z^4 = -3xy = -3 \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{2} \Rightarrow A = -3$

b) Ta có:  $B = (-3m^2n^2p)^2 : 27m^3np2m^3n^3 (p = \frac{1}{2})$

c) Ta có:  $C = (-ax^2y^3)^4 : (-ax^2y^3)^3 (a = \frac{1}{2}; x = \frac{1}{3}; y = \frac{3}{5}) \Rightarrow A = -ax^2y^3 = \frac{-3}{250}$

### Dạng 3: Tìm điều kiện của $n$ để biểu thức $A$ chia hết cho biểu thức $B$

**Cách giải:** Sử dụng lý thuyết về điều kiện về số mũ của các biến để đơn thức  $A$  chia hết cho đơn thức  $B$

#### Bài 1:

Tìm số tự nhiên  $n$  để đa thức  $A$  chia hết cho đa thức  $B$  trong các trường hợp sau:

a.  $A = 4x^{n+1}y^2$  và  $B = 3x^3y^{n-1}$

b.  $A = 7x^{n-1}y^5 - 5x^3y^4$  và  $B = 5x^2y^n$

c.  $A = x^4y^3 + 3x^3y^3 + x^2y^n$  và  $B = 4x^ny^2$

#### Lời giải

a) Ta có  $\frac{A}{B} = \frac{4x^{n+1}y^2}{3x^3y^{n-1}}$

Để đa thức  $A$  chia hết cho đa thức  $B$ , khi và chỉ khi  $\begin{cases} n+1 \geq 3 \\ 2 \geq n-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 3 \end{cases}$

b) Ta có  $\frac{A}{B} = \frac{7x^{n-1}y^5 - 5x^3y^4}{5x^2y^n} = \frac{7x^{n-1}y^5}{5x^2y^n} - \frac{5x^3y^4}{5x^2y^n}$

Để đa thức  $A$  chia hết cho đa thức  $B$ , khi và chỉ khi  $\begin{cases} n-1 \geq 2 \\ 5 \geq n \\ 4 \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 4 \end{cases}$

c) Ta có  $\frac{A}{B} = \frac{x^4y^3 + 3x^3y^3 + x^2y^n}{4x^ny^2} = \frac{x^4y^3}{4x^ny^2} + \frac{3x^3y^3}{4x^ny^2} + \frac{x^2y^n}{4x^ny^2}$

Để đa thức  $A$  chia hết cho đa thức  $B$ , khi và chỉ khi  $\begin{cases} 4 \geq n \\ 3 \geq n \\ 2 \geq n \\ n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ 2 \geq n \end{cases} \Leftrightarrow n = 2.$

#### Bài 2:

Cho các đơn thức  $A = 3x^{n-1}y^5$  và  $B = -2x^2y^{n+1}$ . Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho đơn thức  $A$  chia hết cho đơn thức  $B$ . Tìm thương  $\frac{A}{B}$  ứng với mỗi giá trị tìm được của  $n$

#### Lời giải

Điều kiện để đơn thức  $A$  chia hết cho đơn thức  $B$  là:

$$\begin{cases} n-1 \geq 2 \\ n+1 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow n=3; n=4$$

- Với  $n=3$  thì  $\frac{A}{B} = \frac{3x^2y^5}{-2x^2y^4} = -\frac{3}{2}y$

- Với  $n=4$  thì  $\frac{A}{B} = \frac{3x^3y^5}{-2x^2y^5} = -\frac{3}{2}x$

### Bài 3:

Tìm điều kiện của  $n$  để biểu thức  $A$  chia hết cho biểu thức  $B$  trong các trường hợp sau:

a.  $A = 14x^8y^n$  và  $B = -7x^7y^4$

b.  $A = 20x^5y^{2n}$  và  $B = 3x^2y^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $A:B \Leftrightarrow n \in N; n \geq 4$

b) Ta có:  $A:B \Leftrightarrow n \in N; n \geq 1$

### Bài 4:

Tìm điều kiện của  $n$  để biểu thức  $A$  chia hết cho biểu thức  $B$  trong các trường hợp sau

a.  $A = -21x^3y^2z^{2n-1}$  và  $B = 4x^3yz$

b.  $A = \frac{7}{4}x^{3n+1}y^8z^3$  và  $B = \frac{4}{-7}x^{10}y^{2n}z^3$

### Lời giải

a) Ta có:  $A:B \Leftrightarrow n \in N; 2n-1 \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 1 (n \in N)$

b) Ta có:  $A:B \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N \\ 3n+1 \geq 10 \\ 8 \geq 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N \\ n \geq 3 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{1; 2\}$

### Bài 5:

Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để hai biểu thức  $A$  và  $B$  đồng thời chia hết cho biểu thức  $C$

a.  $A = x^6y^{2n-6}; B = 2x^{3n}y^{18-2n}; C = 5x^2y^4$

b.  $A = 20x^n y^{2n+3} z^2; B = 21x^6 y^{3-n} t; C = 22x^{n-1} y^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $\begin{cases} A:C \\ B:C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z \\ 2n-6 \geq 4 \\ 3n \geq 2 \\ 18-2n \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z \\ n \geq 5 \\ n \geq 1 \\ n \leq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z \\ 11 \geq n \geq 5 \end{cases}$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} A:C \\ B:C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z \\ n \geq n-1 \\ 2n+3 \geq 2 \\ 6 \geq n-1 \\ 3-n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z \\ 5 \geq n \geq 0 \end{cases}$$

### Bài 6:

Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để hai biểu thức  $P$  và  $Q$  đồng thời chia hết cho biểu thức  $R$

$$\text{a. } P = \frac{1}{15}x^3y^{3n-1}z^2; Q = 3x^3y^{11-3n}z; R = 5x^3y^5$$

$$\text{b. } P = \frac{-8}{9}x^5y^{7-n}; Q = \frac{-7}{8}x^{2n-8}yzt; R = \frac{6}{7}x^4y$$

### Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} P:R \\ Q:R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z \\ 3n-1 \geq 5 \\ 11-3n \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z \\ 2 \geq n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow n = 2$$

Vậy  $n = 2$  là giá trị cần tìm

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} P:R \\ Q:R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z \\ 7-n \geq 1 \\ 2n-8 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z \\ 8 \geq n \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{6; 7; 8\}$$

Vậy  $n \in \{6; 7; 8\}$  là giá trị cần tìm.



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1: Làm tính chia

a)  $22x^4y^2z : 5x^2y$

b)  $(-5x)^3y^2z^2 : 15x^3y$

c)  $\frac{3}{8}(xy^2)^5 : (\frac{-1}{2}x^2y)^2$

d)  $(-x^3y^6z^9)^{10} : (xyz)^{15}$

### Lời giải

### Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) : (1 - 2x)^2 (x = 501)$  tại  $x = 501$

b)  $B = \frac{-3}{8}(x+3)^3 : \frac{-8}{9}(3+x)(x = -2)$  tại  $x = -2$

c)  $C = (-x - y + z)^3 : (-y + z - x)^{-2} (x = y = 3; z = 1)$  tại  $x = y = 3; z = 1$

### Lời giải

### Bài 3:

Tìm điều kiện của  $n$  để biểu thức  $A$  chia hết cho biểu thức  $B$

a)  $A = 14x^8y^n; B = -7x^7y^4$

b)  $A = 20x^5y^{2n}; B = 3x^2y^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $A : B \Leftrightarrow n \in N; n \geq 4$

b) Ta có:  $A : B \Leftrightarrow n \in N; n \geq 1$

### Bài 4:

Tìm các giá trị nguyên của  $n$  để hai biểu thức  $A$  và  $B$  đồng thời chia hết cho biểu thức  $C$

a.  $A = \frac{5}{3}x^3y^{3n-1}; B = \frac{-2}{5}x^{3n}y^{7-2n}; C = 6x^ny^4$

b.  $B = \frac{17}{23}x^{2n}y^{6-3n}; B = 3^2x^3y^{3-2n}; C = 3x^3y^4$

### Lời giải

a) Tìm được  $n \in \{0; 1\}$

b) Tìm được  $n \in \emptyset$

### Bài 5:

Thực hiện phép tính rồi tìm GTNN của biểu thức  $A = (9xy^2 - 6x^2y) : (-3xy) + (6x^2y + 2x^4) : (2x^2)$

### Lời giải

Ta có  $A = (9xy^2 - 6x^2y) : (-3xy) + (6x^2y + 2x^4) : (2x^2) = -3y + 2x + 3y + x^2 = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$

Vậy GTNN của  $A$  bằng  $-1$ , đạt được khi  $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

### **Bài 6:**

Chúng minh rằng  $(2x^6y^3 + 4x^8y^3 + x^4y^3) : (x^4y^3)$  dương với mọi  $x, y$  khác 0

### **Lời giải**

Đặt  $A = (2x^6y^3 + 4x^8y^3 + x^4y^3) : (x^4y^3) = 2x^2 + 4x^4 + 1 = 4x^4 + 2x^2 + 1$

Vì  $\begin{cases} x^4 \geq 0 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^4 + 2x^2 + 1 \geq 1 > 0$

Vậy biểu thức đã cho luôn dương với mọi  $x, y$  khác 0.

## CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

### A. Tóm tắt lý thuyết

#### \*) Quy tắc

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho B) ta thực hiện theo các bước sau:

- Chia lần lượt từng hạng tử của đa thức A cho đơn thức B
- Cộng các kết quả tìm được lại với nhau

$$\begin{aligned}\text{Ví dụ: } (12x^3y^4 + 6x^4y^2 - 3x^3y^3) : 3x^2y^2 &= (12x^3y^4 : 3x^2y^2) + (6x^4y^2 : 3x^2y^2) - (3x^3y^3 : 3x^2y^2) \\ &= 4xy^2 + 2x^2 - xy\end{aligned}$$

$$(A + B) : C = (A : C) + (B : C)$$

### B. Bài tập áp dụng

#### Dạng 1: Thực hiện phép chia

**Cách giải:** Áp dụng trực tiếp quy tắc chia đa thức cho đơn thức và chia đơn thức cho đơn thức (trường hợp chia hết)

#### Bài 1: Thực hiện phép tính

a.  $(6.8^4 - 5.8^3 + 8^2) : 8^2$

b.  $(5.9^2 + 3^5 - 2.3^3) : 3^2$

c.  $(7.5^8 - 8.5^4 + 125) : 5^2$

d.  $(3.4^2 + 8^2 + 3.16^2) : 2^3$

#### Lời giải

a.  $(6.8^4 - 5.8^3 + 8^2) : 8^2 = 6.8^2 - 40 + 1 = 343$

b.  $(5.9^2 + 3^5 - 2.3^3) : 3^2 = 5.3^2 + 3^3 - 2 = 45 + 27 - 2 = 70$

$$c. (7.5^8 - 8.5^4 + 125) : 5^2 = 7.5^6 - 8.5^2 + 5$$

$$d. (3.4^2 + 8^2 + 3.16^2) : 2^3 = 6 + 8 + 96 = 110$$

**Bài 2:** Làm tính chia

$$a. (2x^3 + 3x^4 - 12x^2) : x$$

$$b. (4x^2y^3 - 9x^2y^2 + 25xy^4) : 2xy^2$$

$$c. (-5x^3y^3 + 14x^5y - 8x^2y^3) : 3x^2y$$

**Lời giải**

$$a) (2x^3 + 3x^4 - 12x^2) : x = 2x^2 + 3x^3 - 12x$$

$$b) (4x^2y^3 - 9x^2y^2 + 25xy^4) : 2xy^2 = 2xy - \frac{9}{2}x + \frac{25}{2}x$$

$$c) (-5x^3y^3 + 14x^5y - 8x^2y^3) : 3x^2y = -\frac{5}{3}xy^2 + \frac{14}{3}x^3 - \frac{8}{3}xy$$

**Bài 3:** Làm tính chia

$$a. [2(x+y)^3 - 3(x+y)^2] : 3(x+y)$$

$$b. [15(x-y)^3 + 12(y-x)^2 - x + y] : (3y-3x)$$

$$c. (64x^3 + y^3) : (8x+2y)$$

**Lời giải**

$$a) [2(x+y)^3 - 3(x+y)^2] : 3(x+y) = \frac{2}{3}(x+y)^2 - (x+y)$$

$$b) = [15(x-y)^3 + 12(x-y)^2 - (x-y)] : -3(x-y) = -5(x-y)^2 - 4(x-y) + \frac{1}{3}$$

$$c) (64x^3 + y^3) : (8x+2y) = (8x)^3 + y^3 = 64x^2 - 8xy + y^2$$

**Bài 4:** Làm tính chia

a.  $(xy^2 + \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{3}x^3y) : 5xy$

b.  $(2x^3y^4z^2 - x^2y^5z - 3x^4y^4z^3) : \frac{1}{3}xy^3z$

c.  $(\frac{-10}{3}x^2yz^3 + \frac{15}{2}xy^3z^4 - 5xyz^2) : \frac{10}{3}xyz$

d.  $(15x^3y^5 - 20x^4y^4 - 25x^5y^3) : (-5x^3y^2)$

**Lời giải**

a.  $(xy^2 + \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{3}x^3y) : 5xy = \frac{1}{5}y + \frac{1}{15}x + \frac{1}{15}x^2$

b.  $(2x^3y^4z^2 - x^2y^5z - 3x^4y^4z^3) : \frac{1}{3}xy^3z = 6x^2yz - 3xy^2 - 9x^3yz^2$

c.  $(\frac{-10}{3}x^2yz^3 + \frac{15}{2}xy^3z^4 - 5xyz^2) : \frac{10}{3}xyz = -xz^2 + \frac{3}{2}y^2z^2 - \frac{3}{2}z$

d.  $(15x^3y^5 - 20x^4y^4 - 25x^5y^3) : (-5x^3y^2) = -3y^3 + 4xy^2 + 5x^2y$

**Bài 5:** Làm tính chia

a.  $[15(x-y)^3 + 12(y-x)^2 - x + y] : (3y-3x)$

b.  $[3(2x-4y)^3 - 8(2y-x)^4] : (4y^2 - 4xy + x^2)$

c.  $[8(x+2y)^5 - 10(x+2y)^6] : 3(-x-2y)^2$

**Lời giải**

a.  $[15(x-y)^3 + 12(y-x)^2 - x + y] : (3y-3x) = 5(x-y)^2 + 4(x-y) - \frac{1}{3}$

b.  $[3(2x-4y)^3 - 8(2y-x)^4] : (4y^2 - 4xy + x^2) = 24(x-2y) - 8(x-2y)^2$

$$c. \left[ 8(x+2y)^5 - 10(x+2y)^6 \right] : 3(-x-2y)^2 = \frac{8}{3}(x+2y)^3 - \frac{10}{3}(x+y)^4$$

**Bài 6:** Tìm đa thức A, biết

$$a. 6x^4 \cdot A = 24x^9 - 30x^8 + \frac{1}{2}x^5$$

$$b. A \cdot (-2,5x^3y^2) = 5x^6y^4 + 7,5x^5y^3 - 10x^3y^2$$

**Lời giải**

$$a. 6x^4 \cdot A = 24x^9 - 30x^8 + \frac{1}{2}x^5 \Rightarrow A = (24x^9 - 30x^8 + \frac{1}{2}x^5) : 6x^4 = 4x^5 - 5x^3 + \frac{1}{12}x$$

$$b. A \cdot (-2,5x^3y^2) = 5x^6y^4 + 7,5x^5y^3 - 10x^3y^2 \Rightarrow A = -2x^3y^2 - 3x^2y + 4$$

**Bài 7:** Tìm x, biết

$$a. (4x^4 + 3x^3) : (-x^3) + (15x^2 + 6x) : 3x = 0$$

$$b. \left( x^2 - \frac{1}{2}x \right) : 2x - \left[ (3x-1)^2 : (3x-1) \right] = 0$$

**Lời giải**

$$a. (4x^4 + 3x^3) : (-x^3) + (15x^2 + 6x) : 3x = 0 \Leftrightarrow -4x - 3 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$b. \left( x^2 - \frac{1}{2}x \right) : 2x - \left[ (3x-1)^2 : (3x-1) \right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - (3x-1) = 0 \Rightarrow \frac{-3}{2}x = -1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

**Bài 8:** Chứng minh rằng với mọi x, y khác 0 thì giá trị của biểu thức sau luôn dương

$$A = (7x^4y^3 - 6x^2y^5 + 2x^2y^3) : (-2x^2y^3) + 8(x+1)(x-1) + 10$$

**Lời giải**

$$A = (7x^4y^3 - 6x^2y^5 + 2x^2y^3) : (-2x^2y^3) + 8(x+1)(x-1) + 10 = 4,5x^2 + 3y^2 + 1 \geq 1 \forall x, y (dpcm)$$

## Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức

**Cách giải:** Thực hiện phép chia để tìm kết quả trước, sau đó thay số và tính giá trị của biểu thức

**Bài 9:** Tính giá trị của biểu thức

a.  $A = (15x^5y^3 - 10x^3y^2 + 20x^4y^4) : 5x^2y^2$  tại  $x = -1; y = 2$

b.  $B = [(2x^2y)^2 + 3x^4y^3 - 6x^3y^2] : (xy)^2$  tại  $x = y = -2$

c.  $C = (-2x^2y^2 + 4xy - 6xy^3)^4 : \frac{2}{3}xy$  tại  $x = \frac{1}{2}; y = 4$

d.  $D = \left( \frac{1}{3}x^2y^5 - \frac{2}{3}x^5y^2 \right) : 2x^2y^2$  tại  $x = -3; y = 3$

**Lời giải**

a.  $A = (15x^5y^3 - 10x^3y^2 + 20x^4y^4) : 5x^2y^2 = 3x^3y - 2x + 4x^2y^2$

b.  $B = [(2x^2y)^2 + 3x^4y^3 - 6x^3y^2] : (xy)^2 = 4x^2 + 3x^2y - 6x = 4$

c.  $C = (-2x^2y^2 + 4xy - 6xy^3)^4 : \frac{2}{3}xy = -144$

**Bài 10:** Tính giá trị của biểu thức

a.  $A = [12(2x+3y)^3 - 18(2x+3y)^2] : (-6x-9y)$  tại  $x = \frac{3}{2}; y = 1$

b.  $B = [(2x-y)^4 + 8(y-2x)^2 - 2x+y] : (2x-4y)$  tại  $x = 1; y = -2$

c.  $C = [-5(x-4y)^3 + 7(x-4y)^2] : 2(4y-x)$  tại  $x = -2; y = \frac{-1}{2}$

$$d. D = \left[ (3x+2y)^3 9x^2 + 12xy + y^2 \right] : (8y+12x) \text{ tại } x = \frac{2}{3}; y = \frac{-1}{2}$$

### Lời giải

$$a. A = \left[ 12(2x+3y) - 18(2x+3y)^2 \right] : (-6x-9y) = -4(2x+3y)^2 + 6(2x+3y) = -108$$

$$b. B = \left[ (2x-y) + 8(y-2x)^2 - 2x+y \right] : (2y-4x) = \frac{-95}{2}$$

$$c. C = \left[ -5(x-4y)^3 + 7(x-4y)^2 \right] : 2(4y-x) = 3$$

### Dạng 3 : Tìm điều kiện của n để biểu thức A chia hết cho biểu thức B

**Cách giải :** Sử dụng lý thuyết về điều kiện về số mũ của các biến để đa thức A chia hết cho đơn thức B (nghĩa là mọi hạng tử của đa thức A chia hết cho đơn thức B)

**Bài 11:** Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B

$$a. A = 14x^8y^4 - 9x^{2n}y^6; B = -2x^7y^n$$

$$b. B = 4x^9y^{2n} + 9x^8y^5z; B = 3x^{3n}y^4$$

$$c. A = -8y^{12}z^{10} - 21y^{20}z^{2n-1}; B = -6y^{2n}z^9$$

$$d. A = \frac{2}{3}x^{3n+1}y^5z^6 + 3x^{14}y^6z^4; B = \frac{1}{7}x^{13}y^5z^{2n-5}$$

### Lời giải

$$a. A:B \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq n \\ 2n \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq n \leq 4 (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow n = 4$$

$$b. A:B \Leftrightarrow \begin{cases} 2n \geq 4 \\ 8 \geq 3n \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq n \leq \frac{8}{3} (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow n = 2$$

$$c. A:B \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \geq 2n \\ 2n-1 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{5; 6\}$$



$$d. A:B \Leftrightarrow \begin{cases} 3n+1 \geq 13 \\ 4 \geq 2n-5 \end{cases} \Leftrightarrow n=4$$

## BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 1:** Thực hiện phép tính

a.  $(-2 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^5 + 10^3) : 100$

b.  $(2 \cdot 27^2 + 3^8 - 4 \cdot 9^3) : 9^2$

**Bài 2:** Làm tính chia

a.  $(8y^6 - 11y^7 - 10y^3) : 3y^3 = \frac{8}{3}y^3 - \frac{11}{3}y^4 - \frac{10}{3}$

b.  $(12x^2y^4z^3 + 12xy^3z^3 - 3y^2z^3) : 3y^2z^3 = 4x^2y^2 + 4xy - 1$

c.  $[12(y-z)^4 - 3(z-y)^5] : 6(y-z)^2 = 2(y-z)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^3$

d.  $[2(x-2y+z)^3 + 4(2y-x-z)^2] : (2z-4y+2x) = -(x-2y+z)^2 - 4(x-2y+z)$

**Lời giải**

a.  $(8y^6 - 11y^7 - 10y^3) : 3y^3 = \frac{8}{3}y^3 - \frac{11}{3}y^4 - \frac{10}{3}$

b.  $(12x^2y^4z^3 + 12xy^3z^3 - 3y^2z^3) : 3y^2z^3 = 4x^2y^2 + 4xy - 1$

c.  $[12(y-z)^4 - 3(z-y)^5] : 6(y-z)^2 = 2(y-z)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^3$

d.  $[2(x-2y+z)^3 + 4(2y-x-z)^2] : (2z-4y+2x) = -(x-2y+z)^2 - 4(x-2y+z)$

**Bài 3:** Tính giá trị của biểu thức

a.  $A = \left[ (3ab)^2 - 9a^2b^4 \right] : 8ab^2$  tại  $a = \frac{2}{3}; b = \frac{3}{2}$

b.  $B = \left[ -4(a+b)^3 - (2a+2b)^5 \right] : (-3a-3b)^2$  tại  $a = 3; b = -2$

**Bài 4:** Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B

a.  $A = -13x^{17}y^{2n-3} + 22x^{16}y^7; B = -7x^{3n+1}y^6$

b.  $A = 20x^5y^{2n} - 10x^4y^{3n} + 15x^5y^6; B = 3x^{2n}y^{n+1}$

**Lời giải**

a.  $A : B \Leftrightarrow \begin{cases} 2n-3 \geq 6 \\ 16 \geq 3n+1 \end{cases} \Leftrightarrow n = 5$

b.  $A : B \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq 2n \\ 2n \geq n+1 \\ 6 \geq n+1 \end{cases} \Leftrightarrow n = 1$

## CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

### A. Tóm tắt lý thuyết

1) **Phép chia hết:** Là phép chia có đa thức dư bằng 0

Quy tắc chia:

- Sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa giảm dần của biến
- Lấy hạng tử cao nhất của đa thức bị chia chia cho hạng tử cao nhất của đa thức chia ta được thương là 1
- Nhân thương 1 với đa thức chia và lấy đa thức bị chia trừ đi tích đó
- Lấy hạng tử cao nhất của đa thức vừa tìm được chỉ cho hạng tử cao nhất đa thức chia ta được thương là 2
- Tiếp tục lặp lại các bước trên đến khi nhận được hiệu bằng 0

2) **Phép chia có dư:** Là phép chia có đa thức dư khác 0

**Quy tắc chia:** Làm tương tự phép chia hết đến khi thu được đa thức dư có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức chia

\*) **Chú ý:** Với hai đa thức tùy ý  $A$  và  $B$  của cùng một biến ( $B \neq 0$ ) tồn tại duy nhất một cặp đa thức  $Q$  và  $R$  sao cho  $A = BQ + R$ , trong đó  $R = 0$  hoặc bậc của  $R$  nhỏ hơn bậc của  $B$

$\Rightarrow$  cho hai đa thức  $A$  và  $B (B \neq 0)$  tồn tại duy nhất hai đa thức  $Q$  và  $R$  sao cho  $A = BQ + R$

+) Nếu  $R = 0$  thì  $A$  chia hết cho  $B$

+) Nếu  $R \neq 0$  và bậc của  $R$  nhỏ hơn bậc của  $B$  thì ta có phép chia có dư và dư là  $R$

### B. Bài tập áp dụng

#### Dạng 1: thực hiện phép tính

**Cách giải:** Áp dụng quy tắc chia đa thức cho đa thức để thực hiện phép chia

#### Bài 1: Thực hiện phép tính

a)  $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x - 3)$

b)  $(2x^3 + 5x^2 - 2x + 3) : (2x^2 - x + 1)$

c)  $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1)$

#### Lời giải

a)  $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x - 3) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

$$b) (2x^3 + 5x^2 - 2x + 3) : (2x^2 - x + 1) = x + 3$$

$$c) (x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1) = x^2 + 1$$

### Bài 2:

Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến rồi tính

$$a) (5x^2 - 3x^3 + 15 - 9x) : (5 - 3x)$$

$$b) (-4x^2 + x^3 - 20 + 5x) : (x - 4)$$

$$c) (-x^2 + 6x^3 - 26x + 21) : (3 - 2x)$$

$$d) (2x^4 - 13x^3 - 15 + 5x + 21x^2) : (4x - x^2 - 3)$$

### Lời giải

$$a) (5x^2 - 3x^3 + 15 - 9x) : (5 - 3x) = x^2 + 3$$

$$b) (-4x^2 + x^3 - 20 + 5x) : (x - 4) = x^2 + 5$$

$$c) (-x^2 + 6x^3 - 26x + 21) : (3 - 2x) = -3x^2 - 4x + 7$$

$$d) (2x^4 - 13x^3 - 15 + 5x + 21x^2) : (4x - x^2 - 3) = -2x^2 + 5x + 3$$

### Bài 3: Thực hiện phép chia

$$a) (3x^3 + 10x^2 - 5) : (3x + 1)$$

$$b) (x^3 - 4x + 7) : (x^2 - 2x + 1)$$

$$c) (4x^3 - 3x^2 + 1) : (x^2 + 2x - 1)$$

$$d) (2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 20x + 9) : (x^2 - 4x + 1)$$

### Lời giải

$$a) (3x^3 + 10x^2 - 5) : (3x + 1) = (x^2 + 3x - 1) - 4$$

$$b) (x^3 - 4x + 7) : (x^2 - 2x + 1) = (x + 2) + (-x + 5)$$

$$c) (4x^3 - 3x^2 + 1) : (x^2 + 2x - 1) = (4x - 11) + (26x - 10)$$

$$d) (2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 20x + 9) : (x^2 - 4x + 1) = (2x^2 - 3x + 5) + (3x + 4)$$

## Dạng 2: Tính nhanh

**Cách giải:** Sử dụng các quy tắc tính toán hoặc dùng hằng đẳng thức để tính nhanh các phép chia

### Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử rồi thực hiện phép chia

a.  $(24x^5 - 9x^3 + 18x^2) : 3x$

b.  $(-5x^4 - 12x^3 - 13x^2) : (-2x^2)$

c.  $(-8x^5 + x^3 - 2x^2) : 2x^2$

d.  $(14x^6 - 21x^4 - 35x^2) : (-7x^2)$

#### Lời giải

a)  $(24x^5 - 9x^3 + 18x^2) : 3x = 3x(8x^4 - 3x^2 + 6x) : 3x = 8x^4 - 3x^2 + 6x$

b)  $(-5x^4 - 12x^3 - 13x^2) : (-2x^2) = \frac{5}{2}x^2 + 6x + \frac{13}{2}$

c)  $(-8x^5 + x^3 - 2x^2) : 2x^2 = -2x^3 + \frac{1}{2}x + 1$

d)  $(14x^6 - 21x^4 - 35x^2) : (-7x^2) = -2x^4 + 3x^2 + 5$

### Bài 2: Sử dụng hằng đẳng thức để thực hiện phép chia

a.  $(x^2 - 2x + 1) : (x - 1)$

b.  $(2x^4 - 8x^2 + 8) : (4 - 2x^2)$

c.  $(125 - 8x^3) : (4x - 10)$

d.  $(1 + 3x^3 + 3x^6 + x^9) : (-1 - x^3)$

#### Lời giải

a)  $(x^2 - 2x + 1) : (x - 1) = (x - 1)^2 : (x - 1) = x - 1$

b)  $(2x^4 - 8x^2 + 8) : (4 - 2x^2) = -x^2 + 2$

c)  $(125 - 8x^3) : (4x - 10) = \frac{-1}{2}(4x^2 + 10x + 25)$

d)  $(1 + 3x^3 + 3x^6 + x^9) : (-1 - x^3) = -(x^3 + 1)^2$

### Bài 3: Thực hiện nhanh các phép tính

a.  $(a^2 - 6ab + 9b^2) : (a - 3b)$

b.  $(a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3) : (3b - a)^2$

c.  $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 + 2ab + b^2)$

#### Lời giải

$$a) (a^2 - 6ab + 9b^2) : (a - 3b) = (a - 3b)^2 : (a - 3b) = a - 3b$$

$$b) (a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3) : (3b - a)^2 = (a - 3b)^3 : (3b - a)^2 = a - 3b$$

$$c) (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 + 2ab + b^2) = (a - b)^2$$

#### Bài 4: Thực hiện phép chia bằng cách phân tích đa thức thành nhân tử

$$a. (x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1)$$

$$b. (x^2 + 5x + 6) : (x + 3)$$

$$c. (x^3 + x^2 - 12) : (x - 2)$$

$$d. (x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8) : (2 - x^2)$$

#### Lời giải

$$a. (x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1) = x^2 + 1$$

$$b. (x^2 + 5x + 6) : (x + 3) = x + 2$$

$$c. (x^3 + x^2 - 12) : (x - 2) \Leftrightarrow [(x^3 - 8) + (x^2 - 4)] : (x - 2) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 3x + 6) : (x - 2) = x^2 + 3x + 6$$

$$d. (x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8) : (2 - x^2) = (x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 4) = -x^4 + 4x^2 - 4$$

#### Bài 5: Sử dụng hằng đẳng thức để thực hiện phép chia

$$a. (8x^3 + 27) : (2x + 3)$$

$$b. (x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8) : (2 - x^2)$$

$$c. (-8a^3 + 48a^2b - 96ab^2 + 64b^3) : (a - 2b)$$

#### Lời giải

$$a. (8x^3 + 27) : (2x + 3) = 4x^2 - 6x + 9$$

$$b. (x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8) : (2 - x^2) = (x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 4) : (2 - x^2) = -x^4 + 4x^2 - 4$$

$$c. (-8a^3 + 48a^2b - 96ab^2 + 64b^3) : (a - 2b) = -8(a - 2b)^2$$

### Dạng 3: Tìm đa thức thỏa mãn điều kiện cho trước

**Cách giải:** chuyển vế và thực hiện phép chia

#### Bài 1: Tìm đa thức $M$

a.  $x^3 - 5x^2 + x - 5 = (x - 5).M$

b.  $(x^2 - 4x - 3).M = 2x^4 - 13x^3 + 14x^2 + 15x$

#### Lời giải

a.  $x^3 - 5x^2 + x - 5 = (x - 5).M \Rightarrow M = (x^3 - 5x^2 + x - 5) : (x - 5) = x^2 + 1$

b.  $(x^2 - 4x - 3).M = 2x^4 - 13x^3 + 14x^2 + 15x \Rightarrow M = 2x^2 - 5x$

#### Bài 2: Tìm đa thức $M$

c.  $2x^6 - x^4 - 2x^2 + 1 = M.(2x^2 - 1)$

d.  $(x^2 + x + 1).M = x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3$

#### Lời giải

c.  $2x^6 - x^4 - 2x^2 + 1 = M.(2x^2 - 1) \Rightarrow M = x^4 - 1$

d.  $(x^2 + x + 1).M = x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3 \Rightarrow M = x^2 - 2x - 3$

## Dạng 4: Tìm điều kiện để phép chia hết

**Cách giải:** Thực hiện phép chia sau đó đồng nhất đa thức dư với đa thức 0

### Bài 1: Tìm $a$ để

a.  $(x^3 - 3x + a) : (x - 1)^2$                       b.  $(x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a) : (x^2 - x + 5)$

c.  $(x^3 - 9x^2 + 17x - 25 + a) : (x^2 - 2x + 3)$       d.  $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2a) : (x - 1)$

e.  $(x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + a) : (x^2 - x - 2)$

## Lời giải

a.  $(x^3 - 3x + a) : (x - 1)^2 \Leftrightarrow a = 2$       b.  $(x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a) : (x^2 - x + 5) \Leftrightarrow a = 5$

c.  $(x^3 - 9x^2 + 17x - 25 + a) : (x^2 - 2x + 3) \Leftrightarrow a = 4$       d.  $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2a) : (x - 1)$

e.  $(x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + a) : (x^2 - x - 2)$

**Bài 2:** Tìm a và b để đa thức A chia hết cho đa thức B

a.  $A = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b$ ;  $B = x^2 - x - 2$

b.  $A = x^4 - 7x^3 + 10x^2 + (a-1)x + b - a$ ;  $B = x^2 - 2x + 3$

## Lời giải

a.  $A:B \Leftrightarrow (a-1)x + (b+30) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ b+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-30 \end{cases}$

b.  $A:B \Leftrightarrow (a-2)x+b-a+5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ b-a+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$

**Bài 3:** Tìm các số nguyên n để giá trị của biểu thức

a.  $(2n^2 + n - 7) \div (n - 2)$       b.  $(n^3 + 6n^2 - 7n + 4) \div (n - 2)$

c.  $(3n^3 + 10n^2 - 5) \div (3n + 1)$

## Lời giải

a.  $(2n^2 + n - 7) \div (n - 2)$

Ta có:  $\frac{2n^2+n-7}{n-2} = 2n+5+\frac{3}{n-2} \Rightarrow n-2 \in U_{(3)} = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{3; 1; 5; -1\}$

b.  $(n^3 + 6n^2 - 7n + 4) : (n - 2) \Leftrightarrow 22 : (n - 2) \Rightarrow n - 2 \in U_{(22)}$

c.  $(3n^3 + 10n^2 - 5) : (3n + 1) \Leftrightarrow -4 : (3n + 1)$



#### Bài 4:

Tìm giá trị nguyên của  $m$  để  $\frac{2n^2 + 3n + 3}{2n - 1}$  là số nguyên?

#### Lời giải

Ta có:  $2n^2 + 3n + 3 = (2n - 1)(n + 2) + 5 \Rightarrow 2n + 1 \in U_{(5)} = \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow n \in \{0; 1; -2; 3\}$

#### Bài 5:

Cho hai đa thức  $A = 98m + m^3 - 6m^5 + m^6 - 26 + 10m^4$ ;  $B = 1 - m + m^3$

- Chứng minh rằng với mọi giá trị nguyên của  $m$  thì thương của phép chia  $A$  cho  $B$  là một bội của 6
- Xác định giá trị nguyên của  $m$  để đa thức dư = 0.

#### Lời giải

a. Đặt phép chia  $A$  cho  $B$  ta được thương là  $m^3 - 6m^2 + 11m - 6$  và dư  $17m^2 - 81m - 20$

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = (m^3 - m^2) - (5m^2 - 5m) + (6m - 6) = (m - 1)(m - 2)(m - 3) : 6 \forall m \in \mathbb{Z}$$

b. Đa thức dư:

$$17m^2 - 81m - 20 = 0 \Leftrightarrow (17m^2 - 4m) + (85m - 20) = 0 \Leftrightarrow (m + 5)(17 - 4m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5(t / m) \\ m = \frac{17}{4}(\text{loại}) \end{cases}$$

#### Bài 6:

Tìm  $a$  và  $b$  biết đa thức  $x^3 + ax + b$  khi chia cho đa thức  $x - 1$  dư 4 còn khi chia cho đa thức  $x - 5$  dư là 112

#### Lời giải

Đặt  $A = x^3 + ax + b$

Vì  $A$  chia cho  $x - 1$  dư 4, ta viết thành  $A = (x - 1).P + 4$

Tại  $x = 1 \Rightarrow 1 + a + b = 0.P + 4 = 4 \Rightarrow b = 3 - a(1)$

Tương tự ta có:  $5^3 + 5a + b = 112 \Rightarrow 5a + b + 13 = 0(2)$

Thay (1) và (2) thu được:  $5a + (3 - a) + 13 = 0 \Leftrightarrow a = -4 \Rightarrow b = 7$

### Bài 7:

Tìm  $m$  và  $n$  biết đa thức  $x^3 - mx^2 - n$  khi chia cho đa thức  $x - 3$  dư là 27 còn khi chia cho đa thức  $x + 1$  được dư là 7

### Lời giải

Đặt  $A = x^3 - mx^2 - n$ ;  $A(3) = 27 - 9m - n = 27 \Rightarrow n = -9m$ ;  $A(-1) = -1 - m - n = 7 \Rightarrow m + n = -8$

$\Rightarrow m = 1; n = -9$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1: Tìm đa thức M, biết

a.  $(2x^3 + 9x^2 + 15x + 9) = M \cdot (2x + 3)$

b.  $(2x^2 - 2x + 1) \cdot M = 6x^4 - 4x^3 + x^2 + x$

#### Lời giải

a.  $(2x^3 + 9x^2 + 15x + 9) = M \cdot (2x + 3)$

b.  $(2x^2 - 2x + 1) \cdot M = 6x^4 - 4x^3 + x^2 + x$

### Bài 2:

Tìm a và b để đa thức A chia hết cho đa thức B với:

a.  $A = 4x^3 + 15x^2 + 24x + 3 + a; B = x^2 + 4x + 7$

b.  $A = x^4 + 3x^3 - x^2 + (2a - 3)x + 3b + a; B = x^2 + 3x - 1$

#### Lời giải

a) Tìm được  $a = -10$

b)  $A : B \Leftrightarrow (2a - 3)x + 3b + a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{-1}{2} \end{cases}$

### Bài 3:

Tìm các hệ số a, b và c biết:

a) Đa thức  $x^3 + 2ax + b : (x - 1)$  còn khi chia cho đa thức  $x + 2$  được dư là 3

b) Đa thức  $ax^3 + bx^2 + c$  chia cho đa thức  $x$  dư -3 còn khi chia cho đa thức  $x^2 - 4$  được dư là  $4x - 11$

#### Lời giải

a) Đặt  $A(x) = x^3 + 2ax + b : (x - 1)$

Ta có  $A(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2a + b = 0 \Rightarrow b = -1 - 2a(1); A(-2) = 3 \Leftrightarrow -8 - 4a + b = 3(2) \Rightarrow a = -1; b = 1$

b) Đặt  $B(x) = ax^3 + bx^2 + c$

Ta có  $B(0) = -3 \Rightarrow c = -3$

Vì  $B(x) : x^2 - 4$  được dư là  $4x - 11 \Rightarrow B(x) = (x^2 - 4) \cdot P + 4x - 11 = (x - 2)(x + 2) \cdot P + 4x - 11$

$$\text{Tại } x = 2 \Rightarrow B(2) = 4.2 - 11 = -3 \Rightarrow 8a + 4b + c = -3$$

$$x = -2 \Rightarrow B(-2) = 4.(-2) - 11 = -19 \Rightarrow -8a + 4b + c = -19$$

Giải ra ta được:  $a = 1; b = -2$

## PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. Kiến thức cần nhớ

**1. Định nghĩa:** Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức đại số có dạng  $\frac{A}{B}$ , trong đó  $A$  và  $B$  là các đa thức khác 0,  $A$  được gọi là tử thức (hay tử),  $B$  được gọi là mẫu thức (hay mẫu)

**Chú ý:** Mỗi đa thức được coi là một phân thức với mẫu thức bằng 1

2. Hai phân thức bằng nhau

Hai phân thức  $\frac{A}{B}$  và  $\frac{C}{D}$  gọi là bằng nhau nếu  $A.D = B.C$

**3. Chú ý :**

- Các tính chất về tỷ lệ thức và dãy tỷ số bằng nhau của phân số cũng đúng cho phân thức
- Các giá trị của chữ làm cho mẫu thức nhận giá trị bằng 0 gọi là giá trị làm phân thức vô nghĩa hay không xác định.

### B. Bài tập vận dụng và các dạng toán

#### Dạng 1: Tìm điều kiện xác định của phân thức

**\*) Chú ý :** Các phân thức được xác định khi mẫu thức nhận các giá trị khác 0

#### Bài 1: Tìm điều kiện xác định của các phân thức sau

a.  $\frac{5x-4}{2x^2-x}$

b.  $\frac{2018}{x(x-1)(x-2)}$

c.  $\frac{x^2-4}{-x^2+4x-5}$

d.  $\frac{x+y}{(x+3)^2+(y-2)^2}$

#### Lời giải

a) Điều kiện xác định  $2x^2-x \neq 0 \Leftrightarrow x(2x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

b) Điều kiện xác định  $x(x-1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{0;1;2\}$

c) Ta có  $-x^2+4x-5 = -(x-2)^2-1 \leq -1 < 0$  với mọi  $x$  nên phân thức đã cho luôn có nghĩa

d) Điều kiện xác định  $x=-3; y=2$  không đồng thời xảy ra

## Bài 2:

Chứng minh rằng phân thức sau luôn có nghĩa  $\frac{x+2y}{x^4-2x^2+y^4+2}$

### Lời giải

Ta có  $x^4-2x^2+y^4+2=(x^2-1)^2+y^2+1 \geq 1 > 0$

Vậy với mọi  $x, y$  biểu thức luôn có nghĩa

## Bài 3: Tìm điều kiện xác định của các phân thức sau

a.  $\frac{x^2-4}{9x^2-16}$

b.  $\frac{3x-2}{x^2-4x+4}$

c.  $\frac{2x^2-5}{x^2-1}$

d.  $\frac{x^2+y^2}{2x}$

e.  $\frac{2}{(x+1)(x-3)}$

f.  $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$

g.  $\frac{8}{x^2+y^2}$

h.  $\frac{x^2y+2x}{x^2-2x+1}$

i.  $\frac{5x+4y}{x^2+6x+10}$

k.  $\frac{2x+5y}{x^2-4}$

l.  $\frac{3x+7y}{(x-1)^2+y^2}$

m.  $\frac{2018x+2019y}{9x^2-24x+16}$

### Lời giải

a) Điều kiện xác định  $9x^2-16 \neq 0 \Leftrightarrow (3x-4)(3x+4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{4}{3} \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$

b) Điều kiện xác định  $x^2-4x+4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

c) Điều kiện xác định  $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

d) Điều kiện xác định  $2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

e) Điều kiện xác định  $(x-1)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

f) Điều kiện xác định  $x^2-5x+6 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$

g) Điều kiện xác định  $x$  và  $y$  không đồng thời bằng 0

h) Điều kiện xác định  $x^2 - 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

i) Ta có  $x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1 > 0$  với mọi  $x$

Nên phân thức đã cho xác định với mọi giá trị của  $x$

k) Điều kiện xác định  $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$

l) Điều kiện xác định  $x = 1; y = 0$  không đồng thời xảy ra

m) Điều kiện xác định  $9x^2 - 24x + 16 \neq 0 \Leftrightarrow (3x-4)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{4}{3}$

## Dạng 2: Chứng minh đẳng thức

**Cách giải:** Thực hiện theo 3 bước

- **Bước 1:** Lựa chọn 1 trong 3 cách biến đổi thường dùng sau

Cách 1: Biến đổi vế trái thành vế phải

Cách 2: Biến đổi vế phải thành vế trái

Cách 3: Biến đổi đồng thời 2 vế

- **Bước 2:** Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử

- **Bước 3:** Rút gọn bằng cách triệt tiêu nhân tử chung và sử dụng định nghĩa hai phân thức bằng nhau nếu cần, từ đó suy ra điều phải chứng minh

### Bài 1: Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \frac{1}{x+2} = \frac{2x-1}{2x^2+3x-2} \left( x \neq -2; x \neq \frac{1}{2} \right)$$

$$b) \frac{y^2-5y+4}{y-4} = \frac{y^2-3y+2}{y-2} (y \neq 2; y \neq 4)$$

$$c) \frac{3a^2-10a+3}{2(a-3)} = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} (a \neq 3)$$

$$d) \frac{b^2+3b+9}{b^3-27} \cdot \frac{b-2}{b^2-5b+6} (b \neq 2; b \neq 3)$$

### Lời giải

$$a) \text{ Ta có } VP = \frac{2x-1}{2x^2+3x-2} = \frac{1}{x+2} = VT \Rightarrow dpcm$$

$$b) \text{ Ta có } VT = \frac{y^2-5y+4}{y-4} = \frac{(y-1)(y-4)}{y-4} = y-1; VP = \frac{y^2-3y+2}{y-2} = \frac{(y-1)(y-2)}{y-2} = y-1 \Rightarrow VT = VP$$

$$c) \text{ Ta có } VT = \frac{3a^2-10a+3}{2(a-3)} = \frac{(3a-1)(a-3)}{a-3} = \frac{3a-1}{2} = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} = VP \Rightarrow dpcm$$

$$d) \text{ ta có } VT = \frac{b^2+3b+9}{b^3-27} = \frac{1}{b-3}; VP = \frac{b-2}{b^2-5b+6} = \frac{1}{b-3} \Rightarrow VT = VP \Rightarrow dpcm$$

### Bài 2: Chứng minh các đẳng thức

$$a) \frac{xy^3}{7} = \frac{5x^4y^4}{35x^3y}$$

$$b) \frac{x-2}{x+2} = \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$$

$$c) \frac{x^2(x+3)}{x(x+3)^2} = \frac{x}{x+3}$$

$$d) \frac{x^2-8x+7}{x-1} = \frac{x^2-6x-7}{x+1}$$

### Lời giải



a) Ta có:  $xy^3 \cdot 35x^3y = 7 \cdot 5x^4y^4 = 35x^4y^4 \Rightarrow \frac{xy^3}{7} = \frac{5x^4y^4}{35x^3y}$

b) Ta có:  $(x-2)(x^2-4) = (x-2)^2(x+2) \Rightarrow \frac{x-2}{x+2} = \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$

c) Ta có:  $x^2(x+3)(x+3) = x^2(x+3)^2 \Rightarrow \frac{x^2(x+3)}{x(x+3)^2} = \frac{x}{x+3}$

d) Ta có:  $(x^2-8x+7)(x+1) = (x^2-6x-7)(x-1) \Rightarrow \frac{x^2-8x+7}{x-1} = \frac{x^2-6x-7}{x+1}$

### Bài 3: Ba phân thức sau có bằng nhau không

$$A = \frac{2x+3}{15}; B = \frac{2x^2-13x-24}{15x-20}; C = \frac{10x^2+11x-6}{75x-30}$$

#### Lời giải

Ta có  $(2x+3)(15x-20) = 5(2x+3)(x-4) = 15(2x^2-13x-24) \Rightarrow A = B(1)$

Lại có  $(2x+3)(75x-30) = 15(2x+3)(5x-2) = 15(10x^2+11x-6) \Rightarrow A = C(2)$

Từ (1)(2)  $\Rightarrow A = B = C$

### Dạng 3: Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước

**Cách giải:** Thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Phân tích tử và mẫu thành nhân tử ở hai vế

**Bước 2:** Triệt tiêu các nhân tử chung và rút ra đa thức cần tìm

#### Bài 1: Tìm đa thức $A$ để các phân thức sau bằng nhau

a)  $\frac{3x}{A} = \frac{3}{x+1}$

b)  $\frac{A}{2x-1} = \frac{6x^2+3x}{4x^2-1}$

c)  $\frac{x^4-3x^3}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x+3}$

d)  $\frac{7(x+y)}{4} = \frac{7x^2-7y^2}{A}$

#### Lời giải

a) Ta có  $\frac{3x}{A} = \frac{3}{x+1} \Rightarrow A = \frac{3x(x+1)}{3} = x(x+1)$

b) Ta có  $\frac{A}{2x-1} = \frac{6x^2+3x}{4x^2-1} \Rightarrow A = \frac{(6x^2+3x)(2x-1)}{4x^2-1} = 3x$

c) Ta có  $\frac{x^4-3x^3}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x+3} \Rightarrow A = \frac{(x+3)x^3(x-3)}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow A = x^3$

d) Ta có  $\frac{7(x+y)}{4} = \frac{7x^2-7y^2}{A} \Rightarrow A = \frac{4 \cdot (7x^2-7y^2)}{7(x+y)} \Rightarrow A = 4(x-y)$

#### Bài 2: Tìm đa thức $A$ để các phân thức sau bằng nhau

a)  $\frac{A}{2x-3} = \frac{2x^2+3x}{4x^2-9} \left( x \neq \pm \frac{3}{2} \right)$

b)  $\frac{b^2-3b}{2b^2-3b-9} = \frac{b^2+3b}{A} \left( b \neq \frac{-3}{2}; b \neq \pm 3 \right)$

c)  $\frac{2y-1}{(y-3)B} = \frac{1}{y^2-4y+3} \left( y \neq \frac{1}{2}; y \neq 1; y \neq 3 \right)$

d)  $\frac{a-1}{a^2+2a+4} = \frac{B}{a^3-8} (a \neq 2)$

#### Lời giải

a) **Cách 1:** Ta có  $\frac{A}{2x-3} = \frac{2x^2+3x}{4x^2-9} \Rightarrow \frac{A}{2x-3} = \frac{x}{2x-3} \Rightarrow A = x$

**Cách 2:** Ta có  $A = \frac{(2x^2+3x)(2x-3)}{4x^2-9} = \frac{x(2x+3)(2x-3)}{(2x+3)(2x-3)} = x \Rightarrow A = x$

b) Ta có:  $\frac{b^2-3b}{2b^2-3b-9} = \frac{b(b-3)}{(2b+3)(b-3)} = \frac{b(b+3)}{A} \Rightarrow A = 2b^2+9b+9$

c) Ta có  $y^2 - 4y + 3 = (y-1)(y-3) \Rightarrow B = 2y^2 - 3y + 1$

d) Ta có :  $a^3 - 8 = (a-2)(a^2 + 2a + 4) \Rightarrow B = a^2 - 3a + 2$

### Bài 3:

Tìm cặp đa thức  $P$  và  $Q$  thỏa mãn đẳng thức  $\frac{(x+1)P}{x^2-4} = \frac{(x-1)Q}{x^2-4x+4} (x \neq \pm 2)$

### Lời giải

Ta có :  $\frac{(x+1)P}{x^2-4} = \frac{(x-1)Q}{x^2-4x+4} \Rightarrow P = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}Q$

Chọn  $Q = (x+1)(x-2) \Rightarrow P = (x-1)(x+2)$

### Bài 4:

Cho đẳng thức  $\frac{x^2-1}{(x^2-2x+1)A} = \frac{x+1}{(x^2-x-6)B} (x \neq -2; 1; 3)$ . Hãy tìm một cặp đa thức  $A$  và  $B$  thỏa mãn đẳng thức trên

### Lời giải

Ta có:  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ;  $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) \Rightarrow B = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}A$

Chọn  $A = (x+2)(x-3) \Rightarrow B = x-1$

#### Dạng 4: Chứng minh đẳng thức có điều kiện

**Cách giải:** Thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Xuất phát từ điều phải chứng minh, áp dụng tính chất của ai phân thức bằng nhau

**Bước 2:** Thu gọn biểu thức và dựa vào điều kiện đề bài cho để lập luận

##### Bài 1:

Cho hai phân thức  $\frac{P}{Q}$  và  $\frac{R}{S}$  thỏa mãn  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} (P \neq Q)$ . Chứng minh  $R \neq S$  và  $\frac{P}{Q+P} = \frac{R}{R+S}$ .

##### Lời giải

Điều cần chứng minh  $\frac{P}{Q+P} = \frac{R}{R+S} \Leftrightarrow P(R+S) = R(P+Q) \Leftrightarrow PS = RQ \Leftrightarrow \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} (dpcm)$

##### Bài 2:

Chứng minh đẳng thức  $\frac{P-Q}{Q} = \frac{R-S}{S}$  với hai phân thức  $\frac{P}{Q}$  và  $\frac{R}{S}$  thỏa mãn  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ .

##### Lời giải

Ta có:  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \Rightarrow \frac{P}{Q} - 1 = \frac{R}{S} - 1 \Rightarrow \frac{P-Q}{Q} = \frac{R-S}{S} (dpcm)$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1:

Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \frac{x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} (x \neq \pm 1)$$

$$b) \frac{4y^3-y}{5-10y} = \frac{-2y^2-y}{5} \left( y \neq \frac{1}{2} \right)$$

### Hướng dẫn

$$a) \text{ Gọi ý: } x^2-3x+2 = (x-1)(x-2); x^2-1 = (x-1)(x+1) \Rightarrow dpcm$$

$$b) \text{ Gọi ý: } 4y^3-y = y(2y-1)(2y+1)$$

### Bài 2:

Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \frac{-u^2+3u-2}{(u+2)(u-1)} = \frac{u^2-4u+4}{4-u^2} (u \neq \pm 2; u \neq 1)$$

$$b) \frac{v^3+27}{v^2-3v+9} = v+3$$

### Hướng dẫn

$$a) \text{ Gọi ý: } -u^2+3u-2 = (2-u)(u-1); u^2-4u+4 = (2-u)^2$$

$$b) \text{ Gọi ý: } v^3+27 = (v+3)(v^2-3v+9)$$

### Bài 3: Tìm đa thức $M$ trong mỗi đẳng thức sau

$$a) \frac{3x^2-2x-5}{M} = \frac{3x-5}{2x-3} \left( x \neq -1; x \neq \frac{3}{2} \right)$$

$$b) \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4} = \frac{M}{x^2-4x+4} (x \neq \pm 2)$$

### Hướng dẫn

$$a) \text{ Đáp số: } M = (x+1)(2x-3)$$

$$b) \text{ Đáp số: } M = (2x-1)(x-2)$$

### Bài 4: Tìm đa thức $N$ trong mỗi đẳng thức sau

$$a) \frac{x+1}{N} = \frac{x^2-2x+4}{x^3+8} (x \neq -1; x \neq -2)$$

$$b) \frac{(x-3)N}{3+x} = \frac{2x^3-8x^2-6x+36}{2+x} (x \neq \pm 3; x \neq -2)$$

### Hướng dẫn

$$a) \text{ Đáp số: } N = (x+1)(x+2)$$

b) Đáp số:  $N = 2(x+3)(x-3)$

### Bài 5:

Cho hai phân thức  $\frac{A}{B}$  và  $\frac{C}{D}$  và  $\frac{E}{F}$  thỏa mãn  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$ . Chứng minh  $\frac{A+C-E}{B+D-F} = \frac{A}{B}$

### Hướng dẫn

Ta có:  $\frac{A+C-E}{B+D-F} = \frac{A}{B} \Rightarrow CB - EB = DA - FA$

Mà  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC$ ;  $\frac{A}{B} = \frac{E}{F} \Rightarrow AF = BE \Rightarrow \text{đpcm}$

### Bài 6:

Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để phân thức sau có giá trị nguyên

a)  $\frac{3}{2x-1}$

b)  $\frac{5}{x^2+1}$

c)  $\frac{7}{x^2-x+1}$

### Hướng dẫn

a) Vì  $x$  nguyên nên  $2x-1$  nguyên

do đó  $\frac{3}{2x-1}$  nguyên  $\Leftrightarrow 2x-1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2\}$

b) Vì  $x$  nguyên nên  $x^2+1$  nguyên

do đó  $\frac{5}{x^2+1}$  nguyên  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=1 \\ x^2+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases}$

c) Vì  $x$  nguyên nên  $x^2-x+1$  nguyên

do đó  $\frac{7}{x^2-x+1}$  nguyên  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1=1 \\ x^2-x+1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=0 \\ (x-3)(x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 1; 3\}$

### Bài 7:

a) Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3x-2y}{3x+2y}$ , biết  $9x^2+4y^2=20xy$  và  $2y < 3x < 0$

b) Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{x-y}{x+y}$ , biết  $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{10}{3}$  và  $0 < x < y$

### Hướng dẫn

a) Vì  $2y < 3x < 0$  nên  $3x-2y > 0$  và  $3x+2y < 0$  suy ra  $A < 0$

$$\text{Ta có } A^2 = \frac{(3x-2y)^2}{(3x+2y)^2} = \frac{9x^2+4y^2-12xy}{9x^2+4y^2+12xy} = \frac{20xy-12xy}{20xy+12xy} = \frac{8xy}{32xy} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-1}{2} \text{ (vì } A < 0)$$

$$\text{b) Ta có } \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3(x^2+y^2) = 10xy$$

$$B^2 = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2+2xy} = \frac{3(x^2+y^2)-6xy}{3(x^2+y^2)+6xy} = \frac{10xy-6xy}{10xy+6xy} = \frac{4xy}{16xy} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } 0 < x < y \Rightarrow x-y < 0 \text{ và } x+y > 0$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{x-y}{x+y} < 0 \Rightarrow B = \frac{-1}{2}.$$

## ÔN TẬP TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

### A. kiến thức cần nhớ

#### 1. Tính chất cơ bản của phân thức

a. Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có  $\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M}$ ,  $M$  là đa thức khác đa thức 0

b. Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có  $\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$ ,  $N$  là nhân tử chung của  $A$  và  $B$

#### 2. Quy tắc đổi dấu:

- Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

Ta có:  $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$

- Nếu đổi dấu tử hoặc mẫu đồng thời đổi dấu của phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:  $\frac{A}{B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}$

### B. Bài tập áp dụng

#### Dạng 1: Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước

**Cách giải:** Ta thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử ở hai vế

**Bước 2:** Triệt tiêu các nhân tử chung và rút ra đa thức cần tìm

#### Bài 1:

a.  $\frac{2a^3 + 4a^2}{a^2 - 4} = \frac{\dots}{a-2} (a \neq \pm 2)$

b.  $\frac{5(x+y)}{3} = \frac{5x^2 - 5y^2}{\dots} (x \neq y)$

#### Lời giải

a) Biến đổi được  $\frac{2a^3 + 4a^2}{a^2 - 4} = \frac{2a^2(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{2a^2}{a-2} \Rightarrow$  đa thức cần tìm là  $2a^2$

b) Biến đổi được  $\frac{5(x+y)}{3} = \frac{5(x-y)(x+y)}{3(x-y)} \Rightarrow$  đa thức cần tìm là  $3(x-y)$



## Bài 2:

a.  $\frac{6b^2 - 9b}{4b^2 - 9} = \frac{3b}{A} \left( b \neq \pm \frac{3}{2} \right)$

b.  $\frac{n-m}{2-m} = \frac{m-n}{A} (m \neq 2)$

### Lời giải

a) Ta có  $\frac{6b^2 - 9b}{4b^2 - 9} = \frac{3b(2b-3)}{(2b-3)(2b+3)} \Rightarrow A = 2b+3$

b) Ta có  $\frac{n-m}{2-m} = \frac{m-n}{m-2} \Rightarrow A = m-2$

## Dạng 2: Biến đổi phân thức theo yêu cầu

**Cách giải:** Ta thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử hoặc lựa chọn tử thức (hay mẫu thức) thích hợp tùy theo yêu cầu bài toán

**Bước 2:** Sử dụng tính chất cơ bản của phân thức để đưa về phân thức mới thỏa mãn yêu cầu bài toán

### Bài 1:

Cho phân thức  $\frac{12a^2 - 12a + 3}{(6a - 3)(5 - a)}$  ( $a \neq 2; a \neq 5$ ). Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức  $A = 1 - 2a$

#### Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{12a^2 - 12a + 3}{(6a - 3)(5 - a)} = \frac{(6a - 3)(2a - 1)}{(6a - 3)(5 - a)} = \frac{1 - 2a}{a - 5} \Rightarrow \text{phân thức cần tìm là } \frac{1 - 2a}{a - 5}$$

### Bài 2:

Biến đổi phân thức  $\frac{x^2 - 7}{4x + 3}$  ( $x \neq -\frac{3}{4}; x \neq 0$ ) thành một phân thức bằng nó và có mẫu thức là  $B = 12x^2 + 9x$

#### Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{x^2 - 7}{4x + 3} = \frac{3x^3 - 21x}{12x^2 + 9x} \Rightarrow \text{phân thức cần tìm là } \frac{3x^3 - 21x}{12x^2 + 9x}$$

### Bài 3:

Cho hai phân thức  $\frac{y + 4}{2y}; \frac{y^2 - 16}{3y + 1}$  ( $y \neq -\frac{1}{3}; y \neq 0; y \neq 4$ ). Biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức

#### Lời giải

$$\text{Ta có tử thức của phân thức là } y^2 - 16 = (y - 4)(y + 4) \Rightarrow \frac{y + 4}{2y} = \frac{(y + 4)(y - 4)}{2y(y - 4)} = \frac{y^2 - 16}{2y^2 - 8y}$$

### Bài 4:

Biến đổi  $\frac{u+2}{5}$  và  $\frac{3u}{u-1}$  ( $u \neq 1$ ) thành cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức

### Lời giải

Ta có cặp phân thức có cùng mẫu là  $5(u-1) \Rightarrow \frac{u^2+u-2}{5(u-1)}; \frac{15u}{5(u-1)}$

### Bài 5:

Biến đổi mỗi phân thức sau thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức  $B$  sau đây

a)  $\frac{2x-5}{3x^2+4}$  và  $B = 2x^2 - 3x - 5$

b)  $\frac{(x+1)(x^2+x-6)}{(x^2-9)(x^2+3x+2)}$  và  $B = x - 2$

### Lời giải

a)  $B = 2x^2 - 3x - 5 = (x+1)(2x-5)$  nên  $\frac{2x-5}{3x^2+4} = \frac{(2x-5)(x+1)}{(3x^2+4)(x+1)} = \frac{2x^2-3x-5}{3x^3+3x^2+4x+4}$

b)  $\frac{(x+1)(x^2+x-6)}{(x^2-9)(x^2+3x+2)} = \frac{(x+1)(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+3)(x+2)(x+1)} = \frac{x-2}{x^2-x-6}$

### Dạng 3: Chứng minh cặp phân thức bằng nhau

**Cách giải:** Ta thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử

**Bước 2:** Rút gọn từng phân thức từ đó suy ra điều phải chứng minh

**Chú ý:** Trong nhiều trường hợp, có thể sử dụng định nghĩa hai phân thức bằng nhau

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$$

#### Bài 1:

Cho cặp phân thức  $\frac{9x-6}{3x^2+3x-(2x+2)}$  và  $\frac{3x^2-3x+3}{x^3+1}$  với  $x \neq -1; x \neq \frac{2}{3}$ . Chứng tỏ cặp phân thức trên bằng nhau

#### Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{9x-6}{3x^2+3x-(2x+2)} = \frac{3(3x-2)}{(3x-2)(x+1)} = \frac{3}{x+1}; \frac{3x^2-3x+3}{x^3+1} = \frac{3(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{3}{x+1}$$

#### Bài 2:

Cho hai phân thức  $\frac{y^2+5y+6}{3y+6}$  và  $\frac{2y^2+5y-3}{6y-3}$  với  $y \neq -2; y \neq \frac{1}{2}$ . Cặp phân thức này có bằng nhau không?

#### Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{y^2+5y+6}{3y+6} = \frac{2y^2+5y-3}{6y-3} = \frac{y+3}{3}$$

#### Bài 3: Chứng minh đẳng thức

$$\text{a. } \frac{x^5-1}{x-1} = x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\text{b. } \frac{2x^2+xy-y^2}{2x^2-3xy+y^2} = \frac{x+y}{x-y}$$

#### Lời giải

$$\text{a) Ta có } (x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1) = x^5-1 \Rightarrow \frac{x^5-1}{x-1} = x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\text{b) Ta có } VT = \frac{2x^2+xy-y^2}{2x^2-3xy+y^2} = \frac{2x^2+2xy-xy-y^2}{2x^2-2xy-xy+y^2} = \frac{x+y}{x-y} = VP$$

#### Bài 4:

Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

$$\text{a. } A = \frac{(x^2 + a)(a + 1) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

$$\text{b. } B = \frac{9x^2 - 1}{1 - 3x} + \frac{3xy - 3x + 2y - 2}{y - 1} \left(x \neq \frac{1}{3}; y \neq 1\right)$$

#### Lời giải

$$\text{a. } A = \frac{(x^2 + a)(a + 1) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1} = \frac{x^2 + ax^2 + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - ax^2 - a + a^2 + a^2x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^2(a^2 + a + a) + (a^2 + a + 1)}{x^2(a^2 - a + 1) + (1 - a + a^2)} = \frac{a^2 + a + 1}{a^2 - a + 1}$$

$$\text{b. } B = \frac{9x^2 - 1}{1 - 3x} + \frac{3xy - 3x + 2y - 2}{y - 1} = \frac{(3x - 1)(3x + 1)}{-(3x - 1)} + \frac{3x(y - 1) + 2(y - 1)}{y - 1}$$

$$\Rightarrow B = \frac{3x + 1}{-1} + 3x + 2 = 1 \Rightarrow B = 1(dpcm)$$

#### Dạng 4: Tính giá trị của phân thức

**Cách giải:** Ta thực hiện theo ba bước sau

**Bước 1:** Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử

**Bước 2:** Rút gọn từng phân thức

**Bước 3:** Thay giá trị của biến vào phân thức và tính

#### Bài 1: Tính giá trị của phân thức

a.  $A = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$  với  $x \neq -1$  tại  $3x - 1 = 0$

b.  $B = \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$  ( $x \neq 2; x \neq 3$ ) tại  $x^2 - 4 = 0$

#### Lời giải

a) Ta có  $A = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)^2} = \frac{x-3}{x+1}$

Theo đầu bài  $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow A = -2$

b) Ta có  $B = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3}$

Theo đầu bài  $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(\text{loại}) \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{-1}{5}$

#### Bài 2: Tính giá trị của phân thức

a.  $A = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$  ( $x \neq 1; x \neq \frac{1}{2}$ ) tại  $|2x + 1| = 3$

b.  $B = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 4x + 3}$  ( $x \neq 2; x \neq 3$ ) tại  $x^2 - 8x + 15 = 0$

#### Lời giải

a)  $A = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{2x^2 - 2x - x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{x+1}{2x-1}$

Theo đầu bài  $|2x + 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1(\text{loại}) \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

b) Loại trường hợp  $x = 3$  và thay  $x = 5 \Rightarrow B = \frac{7}{2}$

### Bài 3: Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = \frac{a^2 b^3}{a^3 b^2}$  với  $a = 12; b = -36$

b)  $B = \frac{2y - 2x}{x^2 - 2xy + y^2}$  với  $x - y = \frac{-1}{2}$

c)  $C = \frac{(x-2)(2x+2x^2)}{(x+1)(4x-x^3)}$  với  $x = \frac{-1}{2}$

d)  $D = \frac{x - xy - y + y^2}{y^3 - 3y^2 + 3y - 1}$  với  $x = \frac{-3}{4}; y = \frac{1}{2}$

#### Lời giải

a. Ta có:  $A = \frac{a^2 b^3}{a^3 b^2} = \frac{b}{a} = \frac{-36}{12} = -3 \Rightarrow A = -3$

b.  $B = \frac{2y - 2x}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{2(y - x)}{(x - y)^2} = \frac{-2(x - y)}{(x - y)^2} = \frac{(-2) \cdot \frac{-1}{2}}{\frac{1}{4}} = 4$  với  $x - y = \frac{-1}{2}$

c.  $C = \frac{(x-2)(2x+2x^2)}{(x+1)(4x-x^3)} = \frac{2x(x-2)(1+x)}{x(2-x)(2+x)(x+1)} = \frac{-2}{x+2} = \frac{-2}{\frac{-1}{2}+2} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = \frac{-4}{3}$  với  $x = \frac{-1}{2}$

d.  $D = \frac{x - xy - y + y^2}{y^3 - 3y^2 + 3y - 1} = \frac{x(1-y) - y(1-y)}{(y-1)^3} = \frac{(y-x)(y-1)}{(y-1)^3} = \frac{y-x}{(y-1)^2} = 5$  với  $x = \frac{-3}{4}; y = \frac{1}{2}$

e.  $E = \frac{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1} = \frac{x^6(x+1) + x^4(x+1) + x^2(x+1) + (x+1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x^4+1}{x-1} \Rightarrow A = 17$

### Bài 4:

Cho  $x, y$  thỏa mãn  $x > y > 0$  và  $x^2 + 3y^2 = 4xy$ . Tính  $A = \frac{2x+5y}{x-2y}$

#### Lời giải

Ta có:  $x^2 + 3y^2 = 4xy \Leftrightarrow (x-y)(x-3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y(\text{loại}) \\ x = 3y(t/m) \end{cases}$

Với  $x = 3y \Rightarrow A = 11$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1:

Tìm đa thức thích hợp điền vào các chỗ trống thỏa mãn mỗi đẳng thức sau

$$a) \frac{x^2 + 8}{2x - 1} = \frac{2x^3 + 16x}{\dots} \left( x \neq 0; x \neq \frac{1}{2} \right)$$

$$b) \frac{\dots}{x - y} = \frac{2x^2 - 2xy}{2(y - x)^2} (x \neq y)$$

### Lời giải

a) Đa thức cần tìm là  $2x(2x - 1)$

b) Đa thức cần tìm là  $x$

### Bài 2:

Tìm đa thức  $M$ , biết

$$a) \frac{3y^2 + 6y}{(y - 1)M} = \frac{3y}{y - 1} (y \neq -2; y \neq 1)$$

$$b) \frac{-2a^2 + 4ab - 2b^2}{a + b} = \frac{M}{b^2 - a^2} (a \neq \pm b)$$

### Lời giải

a) Đa thức cần tìm là  $M = y + 2$

b) Đa thức cần tìm là  $M = 2(a - b)^3$

### Bài 3:

Hoàn thành chuỗi đẳng thức sau  $\frac{(m - 2)(\dots)}{2m^2 - m - 3} = \frac{\dots}{4m^2 - 9} = \frac{\dots}{8m^3 - 27} \left( m \neq 1; m \neq \pm \frac{3}{2} \right)$

### Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{(m - 2)(m + 1)}{2m^2 - m - 3} = \frac{2m^2 - m - 6}{(2m - 3)(2m + 3)} = \frac{4m^3 - 2m^2 - 3m - 18}{(2m - 3)(4m^2 + 6m + 9)}$$

### Bài 4:

Cho cặp phân thức  $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x - 4}$  và  $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} (x \neq -1; x \neq 2; x \neq 4)$

a) Hai phân thức này có luôn bằng nhau không

b) Tìm giá trị cụ thể của  $x$  để hai phân thức bằng nhau

### Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{x - 1}{x - 4} \text{ và } \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{x - 3}{x - 2}$$



Vậy hai phân thức không luôn bằng nhau

$$\text{b) } \frac{x^2-1}{x^2-3x-4} = \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-4} = \frac{x-2}{x-4} \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = (x-2)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2 = x^2-7x+12 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

### Bài 5:

Với giá trị  $x$  thỏa mãn  $2x^2 - 7x + 3 = 0$ . Tính giá trị của phân thức

$$\text{a) } A = \frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$$

$$\text{b) } B = \frac{x^3-27}{x^2-2x-3}$$

### Lời giải

$$\text{Ta có } 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{a) } A = \frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1} = \frac{x-1}{2x+1} \Rightarrow \begin{cases} A(3) = \frac{2}{7} \\ A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

$$\text{b) } B = \frac{x^3-27}{x^2-2x-3} = \frac{x^2+3x+9}{x+1} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{43}{6}$$

## RÚT GỌN PHÂN THỨC

### A. Kiến thức

\*) Để rút gọn một phân thức ta có thể làm như sau:

**Bước 1:** Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi cả tử và mẫu thành nhân tử

**Bước 2:** Sử dụng các tính chất cơ bản của phân thức đã học để rút gọn phân thức đã cho

\*) Tính chất cơ bản của phân thức

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \quad (M \text{ là đa thức khác đa thức } 0)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \quad (N \text{ là một nhân tử chung})$$

\*) Quy tắc đổi dấu của phân thức:  $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$

### B. Bài tập và các dạng toán

#### Dạng 1: Rút gọn phân thức

**Cách giải:** Thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử

**Bước 2:** Rút gọn bằng cách triệt tiêu nhân tử chung

#### Bài 1: Rút gọn các phân thức sau

a)  $\frac{6x+12}{24x^2+48x} \quad (x \neq -2; x \neq 0)$

b)  $\frac{48a^3-75a}{3(a-2)-(a-2)(8-4a)} \left( a \neq \frac{5}{4}; a \neq 2 \right)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{6x+12}{24x^2+48x} = \frac{6(x+2)}{24x(x+2)} = \frac{1}{4x}$

b) Ta có:  $\frac{48a^3-75a}{3(a-2)-(a-2)(8-4a)} = \frac{3a(16a^2-25)}{(a-2)[3-(8-4a)]} = \frac{3a(4a-5)(4a+5)}{(a-2)(4a-5)} = \frac{3a(4a+5)}{a-2}$

#### Bài 2: Rút gọn các phân thức sau

a)  $\frac{b^2+2b+1}{3b^3+3b^2} \quad (b \neq -1; b \neq 0)$

b)  $\frac{9u^2v^2+3u^2}{12uv^5+4uv^3} \quad (u \neq 0; v \neq 0)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{b^2 + 2b + 1}{3b^3 + 3b^2} = \frac{b + 1}{3b^2}$

b) Ta có:  $\frac{9u^2v^2 + 3u^2}{12uv^5 + 4uv^3} = \frac{3u}{4v^3}$

### Bài 3: Đơn giản các phân thức sau

a)  $\frac{2y^3 - y^2 - 2y + 1}{y^3 + 3y^2 - y - 3} (y \neq -3; y \neq \pm 1)$

b)  $\frac{m^4 - n^4}{n^3 - m^3} (m \neq n)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{2y^3 - y^2 - 2y + 1}{y^3 + 3y^2 - y - 3} = \frac{(2y - 1)(y^2 - 1)}{(y + 3)(y^2 - 1)} = \frac{2y - 1}{y + 3}$

b) Ta có:  $\frac{m^4 - n^4}{n^3 - m^3} = \frac{(m - n)(m + n)(m^2 + n^2)}{-(m - n)(m^2 + mn + n^2)} = -\frac{(m + n)(m^2 + n^2)}{m^2 + mn + n^2}$

### Bài 4: Tối giản các phân thức sau

a)  $\frac{7x^3 + 7x}{x^4 - 1} (x \neq \pm 1)$

b)  $\frac{48y - 12y^2 + 3y^3}{y^3 + 64} (y \neq -4)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{7x^3 + 7x}{x^4 - 1} = \frac{7x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{7x}{x^2 - 1}$

b) Ta có:  $\frac{48y - 12y^2 + 3y^3}{y^3 + 64} = \frac{3y(y^2 - 4y + 16)}{(y + 4)(y^2 - 4y + 16)} = \frac{3y}{y + 4}$

### Bài 5:

Thu gọn phân thức sau  $M = \frac{x^{10} - x^8 - x^7 + x^6 + x^4 - x^2 - x + 1}{x^{30} + x^{24} + x^{18} + x^{12} + x^6 + 1}$

#### Lời giải

Ta có:  $TS = (x^{10} + x^4) - (x^8 + x^2) - (x^7 + x) + (x^6 + 1) = (x^6 + 1)(x^4 - x^2 - x + 1)$

$MS = x^{24}(x^6 + 1) + x^{12}(x^6 + 1) + (x^6 + 1) = (x^6 + 1)\left(x^{24} + x^{12} + 1\right) \Rightarrow M = \frac{x^4 - x^2 - x + 1}{x^{24} + x^{12} + 1}$

**Bài 6:**

Thu gọn phân thức sau  $N = \frac{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

**Lời giải**

Ta có:  $N = \frac{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x^6 + x^4 + x^2 + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x-1}$

**Bài 7:**

Cho phân thức  $A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

a) Rút gọn  $A$

b) Chứng minh rằng  $A$  luôn không âm với mọi giá trị của  $x$

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$

b) Với mọi  $x$ , ta có:  $(x+1)^2 \geq 0; x^2 + 1 > 0 \Rightarrow A \geq 0 (dpcm)$

**Bài 8:**

Cho phân thức  $B = \frac{-a^4 + a^3 + a - 1}{a^4 + a^3 + 3a^2 + 2a + 2}$

a) Rút gọn  $B$

b) Chứng minh rằng  $B$  luôn không âm với mọi giá trị của  $a$

**Lời giải**

a) Rút gọn được  $B = \frac{-a^4 + a^3 + a - 1}{a^4 + a^3 + 3a^2 + 2a + 2} = \frac{-(a-1)^2}{a^2 + 2}$

b) Ta có:  $-(a-1)^2 \leq 0; a^2 + 2 > 0 \Rightarrow B \leq 0 \forall m (dpcm)$

**Bài 9: Rút gọn các phân thức sau**

a)  $A = \frac{x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^4 - 1}$

b)  $B = \frac{x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1}{x^{45} + x^{40} + x^{35} + \dots + x^5 + 1}$

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = \frac{x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^4 - 1} = \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^2 + 1}$

b) Ta có:  $B = \frac{x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1}{x^{45} + x^{40} + x^{35} + \dots + x^5 + 1} = \frac{x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1}{(x^{45} + x^{35} + x^{25} + x^{15} + x^5) + (x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1)} = \frac{1}{x^5 + 1}$

### Bài 10:

Cho  $x < 0$ . Hãy rút gọn  $A = \frac{|x-1| + |x| + x}{3x^2 - 4x + 1}$

### Lời giải

Ta có:  $x < 0 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = 1 - x; |x| = -x \Rightarrow A = \frac{1 - x}{3x^2 - 4x + 1} = \frac{1 - x}{3x^2 - 3x - x + 1} = \frac{1}{1 - 3x}$

### Bài 11:

Cho  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \neq 0$ , hãy rút gọn  $A = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{(ax + by + cz)^2}$

### Lời giải

Đặt  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \neq 0 \Rightarrow x = ak; y = bk; z = ck \Rightarrow A = \frac{(k^2 a^2 + k^2 b^2 + k^2 c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{[k(a^2 + b^2 + c^2)]} = 1$

### Bài 12: Rút gọn các phân thức sau

a)  $\frac{15x^2 y^3 z^8}{9x^3 y^3 z^4}$

b)  $\frac{y^2 - xy}{4xy - 4y^2}$

c)  $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + 1}$

d)  $\frac{xy^3 - x^3 y}{x^2 + xy}$

e)  $\frac{x^2 + y^2 - 1 + 2xy}{x^2 - y^2 + 1 + 2x}$

f)  $\frac{x^2 + xz - xy - yz}{x^2 + xz + xy + yz}$

g)  $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2}$

### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{15x^2 y^3 z^8}{9x^3 y^3 z^4} = \frac{5z^4}{3x}$

b) Ta có:  $\frac{y^2 - xy}{4xy - 4y^2} = \frac{y(y - x)}{4y(x - y)} = \frac{-1}{4}$

c) Ta có:  $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + 1} = \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{(x-1)^2}{(x^2 - x + 1)}$

d) Ta có:  $\frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + xy} = \frac{xy(y-x)(y+x)}{x(x+y)} = y(y-x)$

e) Ta có:  $\frac{x^2 + y^2 - 1 + 2xy}{x^2 - y^2 + 1 + 2x} = \frac{(x+y)^2 - 1}{(x+1)^2 - y^2} = \frac{x+y-1}{x+1-y}$

f) Ta có:  $\frac{x^2 + xz - xy - yz}{x^2 + xz + xy + yz} = \frac{x-y}{x+y}$

g) Ta có:  $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3 + x^2 - x^2 - x - 2x - 2} = \frac{[(x+1)(x-1)]^2}{(x+1)(x^2 - x - 2)} = \frac{[(x+1)(x-1)]^2}{(x+1)(x+1)(x-2)} = \frac{(x-1)^2}{(x-2)}$

### Bài 13:

Cho  $A = \frac{mn^2 + n^2(n^2 - m) + 1}{m^2n^4 + 2n^4 + m^2 + 2}$

a) Rút gọn  $A$

b) Chứng minh  $A > 0$

c) Với giá trị nào của  $m$  thì biểu thức  $A$  đạt GTLN

### Lời giải

b) Ta có  $A = \frac{mn^2 + n^2(n^2 - m) + 1}{m^2n^4 + 2n^4 + m^2 + 2} = \frac{1}{m^2 + 2} > 0$

c) Ta có  $A = \frac{1}{m^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \forall m \Rightarrow \max A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 0$

### Bài 14:

Cho  $A = \frac{x^3 - x^2 - 10x - 8}{x^3 - 4x^2 + 5x - 20}$

a) Rút gọn  $A$

b) Với giá trị nào của  $x$  thì  $A = 0; A > 0$

### Lời giải

a) Ta có  $A = \frac{x^3 - x^2 - 10x - 8}{x^3 - 4x^2 + 5x - 20} = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 12x + 2x - 8}{x^2(x-4) + 5(x-4)} = \frac{(x+1)(x+2)}{x^2 + 5}$

b) Ta có:  $x^2 + 5 > 0 \Rightarrow A = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$

c)  $A > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -2 \end{cases}$

## Dạng 2: Chứng minh đẳng thức

**Cách giải:**

**Cách 1:** Thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử

**Bước 2:** Rút gọn bằng cách triệt tiêu nhân tử chung

**Cách 2:** Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$

### Bài 1:

**Chứng minh đẳng thức**  $\frac{2x^2 + 3xy + y^2}{2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3} = \frac{1}{x-y} \quad (y \neq -2x; y \neq \pm x)$

#### Lời giải

Ta có  $VT = \frac{2x(x+y) + y(x+y)}{x^2(x+2y) - y^2(x+2y)} = \frac{(2x+y)(x+y)}{(2x+y)(x^2-y^2)} = \frac{1}{x-y} = VP \Rightarrow dpcm$

### Bài 2:

**Chứng minh đẳng thức**  $\frac{a^2b - 2ab^2 + b^3}{2a^2 - ab - b^2} = \frac{ab - b^2}{2a + b} \quad (b \neq -2a; b \neq a)$

#### Lời giải

Ta có  $VT = \frac{a^2b - 2ab^2 + b^3}{2a^2 - ab - b^2} = \frac{b(a-b)^2}{(2a+b)(a-b)} = \frac{b(a-b)}{2a+b} = VP$

### Bài 3:

**Cho hai phân thức**  $P = \frac{4xy^2 - 4x^2y + x^3}{4x^3 - 8x^2y}$  và  $Q = \frac{2xy - x^2 - 2y + x}{4x - 4x^2} \quad (x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2y)$ . **Chứng tỏ rằng**  $P = Q$

#### Lời giải

**Cách 1:** Rút gọn được  $P = \frac{4xy^2 - 4x^2y + x^3}{4x^3 - 8x^2y} = \frac{x - 2y}{4x} = Q$

**Cách 2:** Xét  $P = Q \Leftrightarrow (4xy^2 - 4x^2y + x^3)(4x - 4x^2) = (2xy - x^2 - 2y + x)(4x^3 - 8x^2y)$

Sử dụng phương pháp nhân đa thức với đa thức để đưa về biểu thức luôn đúng.

#### **Bài 4:**

Chúng tỏ rằng hai phân thức  $A = \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y^3 - 6y^2x + 12yx^2 - 8x^3}$  và  $B = \frac{-1}{2x - y} (y \neq 2x)$  bằng nhau

#### **Lời giải**

Ta có:  $A = \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y^3 - 6y^2x + 12yx^2 - 8x^3} = \frac{(2x - y)^2}{(y - 2x)^3} = \frac{-1}{x - 2y} = B \Rightarrow dpcm$



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1: Rút gọn các phân thức sau

a)  $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 9} (x \neq -3)$

b)  $\frac{x^2 + xy - x - y}{x^2 - xy - x + y} (x \neq 1; x \neq y)$

#### Hướng dẫn

a) Ta có  $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 9} = \frac{x + 2}{x + 3}$

b) Ta có  $\frac{x^2 + xy - x - y}{x^2 - xy - x + y} = \frac{x + y}{x - y}$

### Bài 2: Thu gọn các phân thức sau

a)  $\frac{a^3 - 6a^2 + 9a}{a^2 - 9} (a \neq \pm 3)$

b)  $\frac{10pq(2q-1)^2}{15p^3 - 30p^4} \left( p \neq 0; p \neq \frac{1}{2} \right)$

#### Hướng dẫn

a) Ta có  $\frac{a^3 - 6a^2 + 9a}{a^2 - 9} = \frac{a^2 - 3a}{a + 3}$

b) Ta có  $\frac{10pq(2q-1)^2}{15p^3 - 30p^4} = \frac{-2q(2p-1)^2}{3p^2}$

### Bài 3: Tối giản các phân thức sau

a)  $\frac{4m^2 - 8mn}{5(2n - m)^3} (m \neq 2n)$

b)  $\frac{9 - (b + 2)^2}{b^2 + 10b + 25} (b \neq -5)$

#### Hướng dẫn

a) Ta có  $\frac{4m^2 - 8mn}{5(2n - m)^3} = \frac{-4m}{5(2n - m)^2}$

b) Ta có  $\frac{9 - (b + 2)^2}{b^2 + 10b + 25} = \frac{1 - b}{b + 5}$

### Bài 4:

Rút gọn phân thức sau  $P = \frac{x^7 - x^4 + x^3 - 1}{x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1}$

#### Hướng dẫn

Ta có 
$$P = \frac{x^7 - x^4 + x^3 - 1}{x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)(x^4+1)}{(x^2+x+1)(x^4+1)} = x-1$$

### Bài 5:

Cho phân thức  $Q = \frac{1-x^4}{x^{10}-x^8+4x^6-4x^4+4x^2-4} (x \neq \pm 1)$ . Chứng minh  $Q$  luôn nhận giá trị âm với mọi  $x \neq \pm 1$ .

### Hướng dẫn

Thu gọn được 
$$Q = \frac{1-x^4}{x^{10}-x^8+4x^6-4x^4+4x^2-4} = -\frac{(1+x^2)}{(x^4+2)^2} \leq 0 \forall x \neq \pm 1$$

### Bài 6:

Chứng minh đẳng thức 
$$\frac{u-uv+v-u^2}{v^3-3v^2+3v-1} = \frac{u+v}{-v^2+2v-1} (v \neq 1)$$

### Hướng dẫn

Ta có 
$$VT = \frac{u-uv+v-u^2}{v^3-3v^2+3v-1} = \frac{(1-v)(u+v)}{(v-1)^3} = \frac{u+v}{-v^2+2v-1} (v \neq 1)$$

### Bài 7:

Chứng tỏ hai phân thức  $A = \frac{ab+cx+ax+bc}{ay+2cx+2ax+cy}$  và  $B = \frac{x+b}{2x+y}$  bằng nhau với  $y \neq -2x; a \neq -c$

### Hướng dẫn

Ta có : 
$$A = \frac{ab+cx+ax+bc}{ay+2cx+2ax+cy} = \frac{(a+c)(x+b)}{(a+c)(2x+y)} = \frac{x+b}{2x+y} = B \Rightarrow dpcm$$

### Bài 8:

Tìm GTNN của các phân thức sau

a)  $A = \frac{x^2+4x+6}{3}$

b)  $B = \frac{4+2|1-2x|}{5}$

### Hướng dẫn

a) Ta có:  $x^2+4x+6 = (x+2)^2+2 \geq 2 \forall x \in R \Rightarrow A = \frac{(x+2)^2+2}{3} \geq \frac{2}{3} \forall x \in R \Rightarrow \min A = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -2$

b)  $|1-2x| \geq 0 \Rightarrow 2|1-2x| \geq 0 \Rightarrow 4+2|1-2x| \geq 4 \Rightarrow \frac{4+2|1-2x|}{5} \geq \frac{4}{5} \Rightarrow \min B = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

### Bài 9:

Tìm GTLN của các phân thức sau

$$\text{a) } A = \frac{12}{3 + |5x+1| + |2y-1|}$$

$$\text{b) } B = \frac{5}{4x^2 + 4x + 2y + y^2 + 3}$$

### Hướng dẫn

$$\text{a) Có: } 3 + |5x+1| + |2y-1| \geq 3 \Rightarrow A \leq 4 \Rightarrow \max A = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) Có: } 4x^2 + 4x + 2y + y^2 + 3 = (2x+1)^2 + (y+1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow N \leq 5 \Rightarrow B_{\max} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

## ÔN TẬP RÚT GỌN TỔNG HỢP

### Bài 1:

Cho  $A = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left( \frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

a. Rút gọn A

b. Tìm x để A = 0

c. Tìm x để A = 1

d. Tìm x để A > 0

### Lời giải

Điều kiện xác định:  $x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$

a.  $A = 1 + \frac{1}{x+2} : \left[ \frac{2}{x-2} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} \right] = 1 + \frac{1}{x+2} : \frac{2(x+2) - x - (x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$$= 1 + \frac{1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{6} = 1 + \frac{x-2}{6} = \frac{x+4}{6}$$

b.  $A = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = 0 \Rightarrow x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4(tm)$

c.  $A = 1 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = 1 \Rightarrow x+4 = 6 \Leftrightarrow x = 2(loại)$

d.  $A > 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} > 0 \Rightarrow x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4 (x \neq 0; \pm 2)$

### Bài 2:

Cho biểu thức d.  $A = \left( \frac{x^2+3x}{x^3+3x^2+9x+27} + \frac{3}{x^2+9} \right) : \left( \frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3-3x^2+9x-27} \right)$

a. Rút gọn A

b. Tính giá trị A khi  $|x| = 5$

c. Tìm x để A = 5

d. Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$

### Lời giải

Điều kiện xác định:  $x \neq 3; x \neq -3$

a.  $A = \left[ \frac{x(x+3)}{(x+3)(x^2+9)} + \frac{3}{x^2+9} \right] : \left[ \frac{1}{x-3} - \frac{6x}{(x-3)(x^2+9)} \right] = \left( \frac{x}{x^2+9} + \frac{3}{x^2+9} \right) : \frac{x^2-6x+9}{(x-3)(x^2+9)}$

$$A = \frac{x+3}{x^2+9} : \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x^2+9)} = \frac{x+3}{x^2+9} \cdot \frac{x^2+9}{x-3} = \frac{x+3}{x-3} (x \neq 3; x \neq -3)$$

$$b. |x|=5 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \rightarrow A=4 \\ x=-5 \rightarrow A=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$c. A=5 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-3} = 5(x \equiv \pm 3) \Rightarrow x+3=5x-15 \Rightarrow x=\frac{9}{2} (t/m)$$

$$d. A = \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-3+6}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}, A \in Z \Leftrightarrow x-3 \in U(6) \Leftrightarrow x-3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{4; 2; 5; 1; 6; 0; 9; 3\} \Rightarrow x \in \{4; 2; 5; 1; 6; 0; 9; -3\}$$

### Bài 3:

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{2x-x^2}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) \left( \frac{2}{x^2} + \frac{1-x}{x} \right)$

a. Tìm điều kiện của x để A có nghĩa

b. Rút gọn A

c. Tìm giá trị nguyên của x để A nguyên

### Lời giải

$$a. A \text{ xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+8 \neq 0 \\ x^3-2x^2+4x-8 \neq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+4) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$b. A = \left[ \frac{2x-x^2}{2(x^2+4)} - \frac{2x^2}{(x-2)(x^2+4)} \right] \cdot \left[ \frac{2}{x^2} + \frac{x(1-x)}{x^2} \right] = \frac{x(2-x)^2+4x^2}{2(2-x)(x^2+4)} \cdot \frac{2+2x-x-x^2}{x^2}$$

$$= \frac{4x-4x^2+x^3+4x^2}{2(2-x)(x^2+4)} \cdot \frac{(1+x)(2-x)}{x^2} = \frac{x(x^2+4)(x+1)(2-x)}{2x^2(2-x)(x^2+4)} = \frac{x+1}{2x} (x \neq 0, x \neq 2)$$

$$c. A \in Z \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x} \in Z \Rightarrow \frac{x+1}{x} \in Z \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} \in Z \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in Z \Leftrightarrow x \in U(1) = \{\pm 1\}$$

$$+) x=1 \Rightarrow A=1 \in Z$$

$$+) x=-1 \Rightarrow A=0 \in Z$$

$$\text{Vậy } x \in \{\pm 1\}$$

### Bài 4:

Cho biểu thức  $A = \frac{2}{x} - \left( \frac{x^2}{x^2-xy} + \frac{x^2-y^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2-xy} \right) : \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$

a. Tìm điều kiện của x, y để A xác định

b. Rút gọn A

c. Tính A với  $|2x-1|=1; |y+1|=\frac{1}{2}$

d. Tìm giá trị nguyên của x, y để  $A = 1$

### Lời giải

a. Biểu thức A xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - xy \neq 0 \\ xy \neq 0 \\ y^2 - xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x(x-y) \neq 0 \\ xy \neq 0 \\ y(y-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq y \\ y \neq 0 \end{cases}$

b.  $A = \frac{2}{x} - \left[ \frac{x^2}{x(x-y)} + \frac{x^2-y^2}{xy} + \frac{y^2}{y(x-y)} \right] 2 : \frac{x^2-xy+y^2}{x-y} = \frac{2}{x} - \frac{x^2y+(x^2-y^2)+xy^2}{xy(x-y)} : \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$   
 $= \frac{2}{x} - \frac{x^2y+x^3-x^2y-xy^2+y^3+xy^2}{xy(x-y)} \cdot \frac{x-y}{x^2-xy+y^2} = \frac{2}{x} - \frac{x^3+y^3}{xy} \cdot \frac{1}{x^2-xy+y^2}$   
 $= \frac{2}{x} - \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy(x^2-xy+y^2)} = \frac{2}{x} - \frac{x+y}{xy} = \frac{2y-x-y}{xy} = \frac{y-x}{xy}$

c.  $|2x-1|=1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0(\text{loại}) \end{cases}; |y+1|=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y+1=\frac{1}{2} \\ y+1=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

+) Với  $x=1, y=-\frac{1}{2} \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{2}-1\right) : \left(-\frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{-3}{2} : \frac{-1}{2} = 3$

+) Với  $x=1, y=-\frac{3}{2} \Rightarrow A = \left(-\frac{3}{2}-1\right) : \left(-\frac{3}{2} \cdot 1\right) = \frac{-5}{2} : \frac{-3}{2} = \frac{5}{3}$

d.  $A=1 \Leftrightarrow y-x=xy \Leftrightarrow xy+x-y=0 \Leftrightarrow x(y+1)-(y+1)+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(y+1)=-1$

+)  $\begin{cases} x-1=1 \\ y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} (tm)$

+)  $\begin{cases} x-1=-1 \\ y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} (\text{loại})$

### Bài 5:

Cho biểu thức  $A = \frac{-18}{x} \left( \frac{x^2+x}{5x^2-10x+5} : \frac{3x+3}{5x-5} \right)$

a. Tìm điều kiện của x để A xác định

b. Rút gọn A

c. Tính A tại  $x = 2$ ;  $x = -1$

d. Tìm x để  $A = 5$

e. Tìm x để  $A > 0$

f. Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

### Lời giải

$$\text{a. Biểu thức A xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 5x^2 - 10x + 5 \neq 0 \\ 5x - 5 \neq 0 \\ 3x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{b. } A = \frac{-6}{x-1} (x \neq 0; x \neq \pm 1)$$

$$\text{d. } A = 5 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{-6}{5} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{6}{5} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{5} (tm)$$

e. A nhận giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow \frac{-6}{x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{6}{x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-1 \in U(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \rightarrow x \in \{2, 3, 4, 7, -2, -5\}$$

$$\text{f. } A > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1 (x \neq 0; -1)$$

### Bài 6:

$$\text{Cho hai biểu thức } A = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}; B = \frac{2x^2 - 8x + 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$$

a. Tìm điều kiện của x để B xác định

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của A

c. Tìm giá trị của x để A, B nguyên

d. Tìm giá trị của x để  $A \cdot B < 0$

### Lời giải

a. B xác định

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 3x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) - 2x(x+1) - 3(x+1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1; x \neq 3$$

b. Ta có:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}; x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5} \geq 0 \Rightarrow A \geq 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ c. Ta}$$

$$\text{có: } A \cdot B = \frac{2}{x-3}; A \cdot B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{x-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-3 \in U(2) \Leftrightarrow x \in \{4; 2; 5; 1\}$$

$$\text{d. } A \cdot B < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 (2 > 0) \Leftrightarrow x < 3 (x \neq -1)$$

### Bài 7:

Cho các biểu thức  $A = \frac{2x^2 + 2x}{1 - x^2}; B = \frac{1 - 2x}{x^2 - 3x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2}$

a. Rút gọn A, B

b. Tính giá trị của A khi:  $|x - 2| = 3$

c. Tính  $C = A - B$

d. Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $C \in \mathbb{Z}$

### Lời giải

Ta có:  $\begin{cases} 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) \\ x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \end{cases} \Rightarrow \text{DKXD: } x \neq \pm 1, x \neq \pm 2$

a.  $A = \frac{2x^2 + 2x}{1 - x^2} = \frac{2x}{1 - x}; B = \frac{x}{x - 1}$

b.  $|x - 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5(tm) \Rightarrow A = \frac{-5}{2} \\ x = -1(loai) \end{cases}$

c.  $C = A - B = \frac{2x}{1 - x} - \frac{x}{x - 1} = \frac{2x + x}{1 - x} = \frac{3x}{1 - x}$

d. Nếu  $x = 0 \Rightarrow C = \frac{3 \cdot 0}{1 - 0} = 0(tm) \Rightarrow x = 0(tm)$

+)  $x \neq 0 \Rightarrow C = \frac{3x}{1 - x} = \frac{-3x}{x - 1} = \frac{-3(x - 1) - 3}{x - 1} = -3 - \frac{3}{x - 1} \Rightarrow (x - 1) \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow x \in \{-2; 0; 4\}$

### Bài 8:

Cho các biểu thức  $A = \frac{2x}{x + 3} + \frac{x + 1}{x - 3} + \frac{3 - 11x}{9 - x^2}; B = \frac{x - 3}{x + 1} (0 \leq x \neq 9)$

a. Rút gọn A

b. Với  $P = A \cdot B$ , tìm x để  $P = \frac{9}{2}$

c. Tìm x để  $B < 1$

d. Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  P = A. B là số nguyên

### Lời giải

a.  $A = \frac{2x}{x + 3} + \frac{x + 1}{x - 3} + \frac{3 - 11x}{9 - x^2} = \frac{2x(x - 3) + (x + 1)(x + 3) - (3 - 11x)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{3x}{x - 3} (0 \leq x \neq 9)$

b.  $P = A \cdot B = \frac{3x}{x - 3} \cdot \frac{x - 3}{x + 1} = \frac{3x}{x + 1} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 6x = 9(x + 1) \Leftrightarrow x = -3(tm)$

c.  $B < 1 \Leftrightarrow \frac{x - 3}{x + 1} < 1 \Leftrightarrow x - 3 < x + 1 \Leftrightarrow -3 < 1 (\text{vô.số.nghiệm})$





$$\text{a. } A = \frac{2x^2+1}{x^2+1} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} \right] = \frac{2x^2+1}{x-1}$$

$$\text{b. } x = \frac{-1}{2} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1}{\frac{-1}{2} - 1} = -1$$

$$\text{c. } A < 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x+2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\text{d. } A = \frac{2x^2+1}{x-1} = \frac{2(x^2-1)+3}{x-1} = 2(x+1) + \frac{3}{x-1} \Rightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Leftrightarrow x \in \{2; 0; 4; -2\}.$$

## QUY ĐỒNG MẪU THỨC NHIỀU PHÂN THỨC

### A. kiến thức cần nhớ

Để quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1: Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung

Bước 2: Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu

Bước 3: Nhân cả tử và mẫu với nhân tử phụ tương ứng.

### B. Bài tập áp dụng

#### Bài 1: Quy đồng mẫu thức các phân thức sau

a)  $\frac{3}{x^2-3}$  và  $\frac{5}{2x-6}$  ( $x \neq 0; x \neq 3$ )

b)  $\frac{1}{2a^2-4a+2}$  và  $\frac{3}{5a^2-5a}$  ( $a \neq 0; a \neq 1$ )

#### Lời giải

a) Ta có :  $x^2-3 = x(x-3); 2x-6 = 2(x-3)$

Chọn mẫu thức chung là:  $2x(x-3)$ . Khi đó  $\frac{3}{x^2-3} = \frac{3 \cdot 2}{x(x-3) \cdot 2} = \frac{6}{2x^2-6x}; \frac{5}{2x-6} = \frac{5x}{2x^2-6x}$

b) Ta có:  $2a^2-4a+2 = 2(a-1)^2; 5a^2-5a = 5a(a-1)$

Chọn mẫu thức chung là:  $10a(a-1)^2$ . Khi đó  $\frac{1}{2a^2-4a+2} = \frac{5a}{10a(a-1)^2}; \frac{3}{5a^2-5a} = \frac{6(a-1)}{10a(a-1)^2}$

#### Bài 2: Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức

a)  $\frac{5y}{2y+8}$  và  $\frac{y+2}{y^2-16}$  ( $y \neq \pm 4$ )

b)  $\frac{7b}{b^2-4b+4}$  và  $\frac{b}{3b^2-6b}$  ( $b \neq 0; b \neq 2$ )

#### Lời giải

a) Mẫu thức chung :  $2(y^2-16) \Rightarrow$  ta được  $\frac{5y^2-20y}{2(y^2-16)}; \frac{2y+4}{2(y^2-16)}$

b) Mẫu thức chung :  $3b(b-2)^2 \Rightarrow$  ta được  $\frac{21b^2}{3b(b-2)^2}; \frac{b^2-2b}{3b(b-2)^2}$

#### Bài 3: Quy đồng mẫu thức các phân thức sau

a)  $x^2+2$  và  $\frac{x^4}{x^2-2}$  ( $x \neq \pm\sqrt{2}$ )

$$b) \frac{4m-4}{2m^2+6m} \text{ và } \frac{m-3}{5m^2+10m} (m \neq -3; m \neq -2; m \neq 0)$$

**Lời giải**

$$a) \text{ Quy đồng được : } x^2 + 2 = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$$

$$b) \text{ Mẫu thức chung : } 5m(m+3)(m+2) \Rightarrow \text{ ta được } \frac{10m^2+10m-20}{5m(m+3)(m+2)}; \frac{m^2-9}{5m(m+3)(m+2)}$$

**Bài 4:** Tìm các phân thức mới bằng phân thức đã cho và có chung mẫu thức

$$a) \frac{u+2}{2u-u^2} \text{ và } \frac{u+3}{8-8u+2u^2} (u \neq 0; u \neq 2) \quad b) \frac{7}{3p^3-12p} \text{ và } \frac{1}{p^2+5p+6}$$

**Lời giải**

$$a) \text{ Ta quy đồng được : } \frac{u+2}{2u-u^2} = \frac{8-2u^2}{2u(2-u)^2}; \frac{u+3}{8-8u+2u^2} = \frac{u^2+3u}{2u(2-u)^2}$$

b) Ta quy đồng được:

$$\frac{7}{3p^3-12p} = \frac{7p+21}{3p(p-2)(p+2)(p+3)}; \frac{1}{p^2+5p+6} = \frac{3p^2-6p}{3p(p-2)(p+2)(p+3)}$$

**Bài 5:** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau

$$a) \frac{11}{108m^4n} \text{ và } \frac{5}{36mn^3} (m \neq 0; n \neq 0)$$

$$b) \frac{x^3}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3} \text{ và } \frac{x}{y^2-xy} (x \neq y; y \neq 0)$$

**Lời giải**

$$a) \text{ Quy đồng mẫu ta được : } \frac{11}{108m^4n} = \frac{11n^2}{108m^4n^3}; \frac{5}{36mn^3} = \frac{15m^3}{108m^4n^3}$$

$$b) \text{ Quy đồng mẫu ta được: } \frac{x^3}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3} = \frac{x^3y}{y(x-y)^3}; \frac{x}{y^2-xy} = \frac{-x(x-y)^2}{y(x-y)^3}$$

**Bài 6:** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau

$$a) \frac{2x+1}{15xy^4} \text{ và } \frac{y-3}{21x^2y^3} (x \neq 0; y \neq 0)$$

b)  $\frac{a-2b}{-a^2+ab+12b^2}$  và  $\frac{a-3b}{a^2-2ab-8b^2} (a \neq -3b; -2b; 4b)$

**Lời giải**

a) Ta quy đồng được :  $\frac{2x+1}{15xy^4} = \frac{7x(2x+1)}{105x^2y^4}; \frac{y-3}{21x^2y^3} = \frac{5y(y-3)}{105x^2y^4}$

b) Ta có:  $-a^2+ab+12b^2 = -(a-4b)(a+3b); a^2-2ab-8b^2 = (a-4b)(a+2b)$

Ta quy đồng được :

$$\frac{a-2b}{-a^2+ab+12b^2} = \frac{-a^2+4b^2}{(a-4b)(a+3b)(a+2b)}; \frac{a-3b}{a^2-2ab-8b^2} = \frac{a^2-9b^2}{(a-4b)(a+3b)(a+2b)}$$

**Bài 7: Đưa các phân thức về cùng mẫu**

a)  $\frac{10}{x+3}; \frac{5}{2x-6}$  và  $\frac{1}{9-3x} (x \neq \pm 3)$

b)  $\frac{7a^2-2a+5}{a^3-1}; \frac{1-3a}{a^2+a+1}$  và  $5 (a \neq 1)$

**Lời giải**

a)

b)

**Bài 8: Tìm các phân thức mới bằng phân thức đã cho và có chung mẫu thức**

a)  $\frac{5}{2x}; \frac{7}{x-2y}$  và  $\frac{x-y}{8y^2-2x^2} (x \neq 0; x \neq \pm 2y)$

b)  $\frac{6b^2-5b+11}{b^3-1}; \frac{3b}{b^2+b+1}$  và  $\frac{7}{b-1} (b \neq 1)$

**Lời giải**

a)

b)

**Bài 9:**

Cho đa thức  $A = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$  và hai phân thức

$$\frac{x}{2x^2+5x-3}; \frac{x+2}{x^2+x-6} \left( x \neq -3; \frac{1}{2}; 2 \right).$$

- a) Chi đa thức A lần lượt cho các mẫu thức của hai phân thức đã cho
- b) Quy đồng mẫu thức của hai phân thức đã cho

**Lời giải**

- a)
- b)

**Bài 10:**

Cho các phân thức  $\frac{1}{a^2 - a - 2}; \frac{a}{a^2 + 3a + 2} (a \neq \pm 2; a \neq -1)$ . Không dùng cách phân tích các mẫu thành nhân tử, hãy chứng tỏ rằng có thể quy đồng mẫu thức hai phân thức này với mẫu thức chung là  $M = a^3 + a^2 - 4a - 4$

**Lời giải**

- a)
- b)

**Bài 11:**

Cho các phân thức  $\frac{x-3}{2x^2-3x-2}; \frac{2x-1}{x^2+x-6} \left( x \neq -3; x \neq \frac{-1}{2} \right)$ . Không dùng cách phân tích các mẫu thành nhân tử, hãy chứng tỏ rằng có thể quy đồng mẫu thức hai phân thức này với mẫu thức chung là  $N = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

**Lời giải**

- a)
- b)

**Bài 12:**

Cho hai phân thức  $\frac{1}{x^2 + ax - 2}; \frac{2}{x^2 + 4x + b} (x \neq -3; x \neq -1; x \neq 2)$

- a) Hãy xác định a và b biết rằng khi quy đồng mẫu thức chúng trở thành những phân thức có mẫu thức chung là  $A = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
- b) Với a và b tìm được hãy viết hai phân thức đã cho và hai phân thức thu được sau khi quy đồng với mẫu thức chung là  $A = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

**Lời giải**

a)

b)

## PHÉP CỘNG CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. Kiến thức cần nhớ

**1. Cộng hai phân thức cùng mẫu:** Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$$

**Ví dụ:**  $\frac{2x^2-x}{x^2+x+1} + \frac{x^3-2x^2}{x^2+x+1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}$

**2. Cộng hai phân thức khác mẫu:** Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta làm theo hai bước:

- **Bước 1:** Quy đồng mẫu thức

- **Bước 2:** Cộng các phân thức cùng mẫu vừa tìm được

### 3. Các tính chất

- Giao hoán:  $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$

- Kết hợp:  $(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}) + \frac{E}{F} = \frac{C}{D} + (\frac{A}{B} + \frac{E}{F})$

- Cộng với số 0:  $\frac{A}{B} + 0 = \frac{A}{B}$

### B. Bài tập và các dạng toán

#### Dạng 1: Cộng các phân thức đại số thông thường

**Cách giải:** Sử dụng kết hợp 2 quy tắc cộng phân thức đã nêu trong phần lý thuyết.

#### Bài 1: Thực hiện các phép tính sau

a.  $A = \frac{x^2}{6x+12} + \frac{4x+4}{6x+12} (x \neq -2) = \frac{x+2}{6}$

b)  $B = \frac{3a+7}{5a^2b} + \frac{2a+2}{5a^2b} (a \neq 0, b \neq 0)$

c)  $C = \frac{mn-3n}{2m^2n^3} + \frac{7mn+3n}{2m^2n^3} (m, n \neq 0)$

d)  $D = \frac{11y-6}{4y^2-1} + \frac{3y+6}{4y^2-1} \left( y \neq \pm \frac{1}{2} \right)$

#### Lời giải

a)  $A = \frac{x^2}{6x+12} + \frac{4x+4}{6x+12} (x \neq -2) = \frac{x+2}{6}$

b)  $B = \frac{3a+7}{5a^2b} + \frac{2a+2}{5a^2b} = \frac{5a+9}{5a^2b}$



$$c) C = \frac{mn-3n}{2m^2n^3} + \frac{7mn+3n}{2m^2n^3} (m, n \neq 0)$$

$$d) D = \frac{11y-6}{4y^2-1} + \frac{3y+6}{4y^2-1} = \frac{14y}{4y^2-1}$$

### Bài 2: Thực hiện các phép tính sau

$$a) A = \frac{2-x}{2x^2y^2} + \frac{5+2y}{8x^3y^2} + \frac{x-7}{4x^3y} (x \neq 0; y \neq 0)$$

$$b) B = \frac{u+10}{u-2} + \frac{u-18}{u-2} + \frac{u+2}{u^2-4} \left( u \neq \pm \frac{1}{2} \right)$$

$$c) C = \frac{1}{x-1} + \frac{x-2}{x^2-1} + \frac{x+1}{x^2-2x+1} (x \neq \pm 1)$$

#### Lời giải

$$a) A = \frac{2-x}{2x^2y^2} + \frac{5+2y}{8x^3y^2} + \frac{x-7}{4x^3y} = \frac{4x(2-x)}{8x^3y^2} + \frac{5+2y}{8x^3y^2} + \frac{2y(x-7)}{8x^3y^2} = \frac{8x-4x^2+5-10y+2xy}{8x^3y^2}$$

$$b) B = \frac{u+10}{u-2} + \frac{u-18}{u-2} + \frac{u+2}{u^2-4} = \frac{2u-7}{u-2}$$

$$d) C = \frac{1}{x-1} + \frac{x-2}{x^2-1} + \frac{x+1}{x^2-2x+1} = \frac{3x^2-x+2}{(x+1)(x-1)^2}$$

### Bài 3: Thực hiện phép cộng các phân thức sau

$$a. A = \frac{1}{x-y} + \frac{3xy}{x^3-y^3} + \frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$$

$$b. B = \frac{-1}{2p+q} + \frac{p}{4p^2-q^2} + \frac{q}{8p^3+q^3} (q \neq \pm 2p)$$

$$c. C = \frac{1}{x-1} + \frac{x-2}{x^2-1} + \frac{x+1}{x^2-2x+1} (x \neq \pm 1)$$

#### Lời giải

$$a. A = \frac{1}{x-y} + \frac{3xy}{x^3-y^3} + \frac{x-y}{x^2+xy+y^2} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3} + \frac{3xy}{x^3-y^3} + \frac{(x-y)^2}{x^3-y^3} = \frac{2x^2+2y^2+2xy}{x^3-y^3} = \frac{2}{x-y}$$

$$b. B = \frac{-1}{2p+q} + \frac{p}{4p^2-q^2} + \frac{q}{8p^3+q^3} (q \neq \pm 2p) = \frac{-4x^2+8x-12y+2xy+5}{8x^3y^2}$$

$$c. C = \frac{1}{x-1} + \frac{x-2}{x^2-1} + \frac{x+1}{x^2-2x+1} (x \neq \pm 1) = \frac{3x^2-x+2}{(x+1)(x-1)}$$

### Dạng 2: Cộng các phân thức đại số có sử dụng quy tắc đổi dấu

**Cách giải:** Thực hiện theo hai bước

- **Bước 1:** Áp dụng quy tắc đổi dấu phân thức:  $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$

- **Bước 2:** Thực hiện tương tự dạng 1

**Bài 4: Sử dụng quy tắc đổi dấu để thực hiện các phép tính sau**

$$\text{a. } A = \frac{3x^2 - x}{x-1} + \frac{x+2}{1-x} + \frac{3-2x^2}{x-1} \quad (x \neq 1)$$

$$\text{b) } B = \frac{2}{y+2} + \frac{4}{y-2} + \frac{5y+2}{4-y^2} \quad (y \neq \pm 2)$$

**Lời giải**

$$\text{a) } A = \frac{3x^2 - x}{x-1} + \frac{x+2}{1-x} + \frac{3-2x^2}{x-1} = \frac{3x^2 - x}{x-1} - \frac{x+2}{x-1} + \frac{3-2x^2}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$$

$$\text{b) } B = \frac{2}{y+2} + \frac{4}{y-2} + \frac{5y+2}{4-y^2} = \frac{2}{y+2} + \frac{4}{y-2} - \frac{5y+2}{(y-2)(y+2)} = \frac{y+2}{(y-2)(y+2)} = \frac{1}{y-2}$$

**Bài 5: Thực hiện phép cộng các phân thức sau**

$$\text{a. } A = \frac{2-a^2}{a-3} + \frac{a-2a^2}{3-a} + \frac{7-5a}{a-3} \quad (a \neq 3)$$

$$\text{b) } B = \frac{3-3b}{2b} + \frac{3b-1}{2b-1} + \frac{11b-5}{2b-4b^2} \quad \left(b \neq 0; b \neq \frac{1}{2}\right)$$

**Lời giải**

$$\text{a) } A = \frac{2-a^2}{a-3} + \frac{a-2a^2}{3-a} + \frac{7-5a}{a-3} = \frac{2-a^2}{a-3} - \frac{a-2a^2}{a-3} + \frac{7-5a}{a-3} = \frac{(a-3)^2}{a-3} = a-3$$

$$\text{b) } B = \frac{3-3b}{2b} + \frac{3b-1}{2b-1} + \frac{11b-5}{2b-4b^2} = \frac{3-3b}{2b} - \frac{3b-1}{1-2b} + \frac{11b-5}{2b(1-2b)} = \frac{-4b+2}{2b(2b-1)} = \frac{-1}{b}$$

**Bài 6: Cộng các phân thức sau**

$$\text{a. } A = \frac{1}{v^2+8v+16} + \frac{1}{8v-v^2-16} + \frac{v}{v^2-16} \quad (v \neq \pm 4)$$

$$\text{b) } B = \frac{m}{m-2n} + \frac{m}{m+2n} - \frac{4mn}{4n^2-m^2} \quad (m \neq \pm 2n)$$

**Lời giải**

$$\text{a) } A = \frac{1}{v^2+8v+16} + \frac{1}{8v-v^2-16} + \frac{v}{v^2-16} = \frac{1}{(v+4)^2} - \frac{1}{(v-4)^2} + \frac{v}{(v-4)(v+4)} \Rightarrow A = \frac{v^3-32v}{(v^2-16)^2}$$

$$\text{b) } B = \frac{m}{m-2n} + \frac{m}{m+2n} - \frac{4mn}{4n^2-m^2} = \frac{m}{m-2n} + \frac{m}{m+2n} + \frac{4mn}{m^2-4n^2} = \frac{2m}{m-2n}$$

**Bài 7: Thực hiện các phép tính sau**

$$\text{a. } A = \frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{3}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

$$b) B = \frac{r+1}{r^2-rs} + \frac{32r^2}{s^2-r^2} + \frac{1-r}{r^2+rs} (r \neq 0; r \neq \pm s)$$

**Lời giải**

$$a) A = \frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{3}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x} = \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{3}{x^2+x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2+x+1}$$

$$b) B = \frac{r+1}{r^2-rs} + \frac{32r^2}{s^2-r^2} + \frac{1-r}{r^2+rs} = \frac{r+1}{r(r-s)} + \frac{32}{(r-s)(s+r)} + \frac{1-r}{r(r+s)} = \frac{-32r^2+2s+2}{(r-s)(r+s)}$$

**Bài 8:** Sử dụng quy tắc đổi dấu để thực hiện các phép tính sau

$$a) A = \frac{1-2x}{2x} + \frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2x-4x^2}$$

$$b) B = \frac{2x+1}{2x^2-x} + \frac{32x^2}{1-4x^2} + \frac{1-2x}{2x^2+x}$$

$$c) C = \frac{1}{v^2+8v+16} + \frac{1}{8v-v^2-16} + \frac{v}{v^2-16} (v \neq \pm 4)$$

$$d) D = \frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2} + \frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1} + \frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$$

$$e) E = \frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)} + \frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)} + \frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}$$

**Lời giải**

$$a) A = \frac{1-2x}{2x} + \frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2x-4x^2} = \frac{1-2x}{2x} - \frac{2x}{1-2x} + \frac{1}{2x(1-2x)} = \frac{(1-2x)^2-4x^2+1}{2x(1-2x)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2-4x}{2x(1-2x)} = \frac{1}{x}$$

$$b) B = \frac{2x+1}{2x^2-x} + \frac{32x^2}{1-4x^2} + \frac{1-2x}{2x^2+x} [MTC : x(2x+1)(2x-1)]$$

$$c) C = \frac{1}{v^2+8v+16} + \frac{1}{8v-v^2-16} + \frac{v}{v^2-16} (v \neq \pm 4) = \frac{v^3-32v}{(v^2-16)^2}$$

$$d) D = \frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2} + \frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1} + \frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2} = 1$$

$$e) E = \frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)} + \frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)} + \frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}$$

Ta có:

$$(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)=(b-c)(a-b)(a+b+c); (c-a)(b^2+ab-c^2-ac)=(c-a)(b-c)(a+b+c)$$

$$(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)=(a-b)(c-a)(a+b+c) \Rightarrow E = \frac{c-a+a-b+b-c}{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

### Dạng 3: Tính giá trị biểu thức tổng của các phân thức

**Cách giải:** Thực hiện theo 2 bước

**Bước 1:** Thực hiện phép cộng các phân thức đại số

**Bước 2:** Thay giá trị của biến vào phân thức và tính

#### Bài 9: Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = \frac{x^2}{5x+25} + \frac{2(x-5)}{x} + \frac{50+5x}{x(x+5)}$  tại  $x = -2$

b. Cho biểu thức  $B = \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{2}{x^2-x} + \frac{4x}{1-x^3}$  ( $x \neq 0; x \neq 1$ )

+) Rút gọn biểu thức B

+) Tính giá trị của biểu thức tại  $x = 2$

**Lời giải**

a.  $A = \frac{x^2}{5x+25} + \frac{2(x-5)}{x} + \frac{50+5x}{x(x+5)} = \frac{x+5}{5} = \frac{3}{5}$

b.  $B = \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{2}{x^2-x} + \frac{4x}{1-x^3}$  ( $x \neq 0; x \neq 1$ )  $= \frac{2}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{7}$

#### Bài 10:

Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{1}{a+3} + \frac{2}{a^2+5a+6} + \frac{3}{4a^2+15a+14}$  với  $a = 1$

**Lời giải**

$$A = \frac{1}{a+3} + \frac{2}{a^2+5a+6} + \frac{3}{4a^2+15a+14} = \frac{1}{a+3} + \frac{2}{(a+2)(a+3)} + \frac{3}{(a+2)(4a+7)}$$

$$= \frac{4a^2+26a+37}{(a+2)(a+3)(4a+7)} = \frac{67}{132}$$

#### Bài 11: Tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = \frac{1}{y^2-xy} + \frac{1}{x^2-xy}$ , biết  $xy = -1$

b.  $B = \frac{3a-2b}{2a+5} + \frac{3b-a}{b-5}$ , biết  $a-2b = 5$

c.  $C = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$ , biết  $3y-x=6$

d. Cho  $x, y, z$  là các số khác nhau và  $x+y+z=2017$ .

Tính  $A = \frac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^3}{(z-x)(z-y)}$

**Lời giải**

a.  $A = \frac{1}{y^2-xy} + \frac{1}{x^2-xy} = \frac{-1}{xy} = 1$

b. Ta có  $B = \frac{3a-2b}{2a+5} + \frac{3b-a}{b-5} = \frac{3a-2b}{2a+a-2b} + \frac{3b-a}{-a+2b+b} = 1+1=2$

c. Ta có  $3y-x=6 \Rightarrow x=3y-6 \Rightarrow C = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6} = \frac{3y-6}{y-2} + \frac{2x-x-6}{x-6} = 3+1=4$

d. MTC :  $(x-y)(x-z)(y-z)$

Tử số  $= x^3(y-z) - y^3(x-z) + z^3(x-y) = x^3(y-z) - y^3(x-z) + z^3[(x-z) + (z-y)]$

$= (y-z)(x^3 - z^3) - (x-z)(y^3 - z^3) = (x+y)(y-z)(x-z)(x+y+z) \Rightarrow A = x+y+z = 2017$

#### Dạng 4: Rút gọn biểu thức có điều kiện

#### Bài 12:

Cho  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 2018$ .

Tính giá trị của  $A = \frac{2018a}{ab+2018a+2018} + \frac{b}{bc+b+2018} + \frac{c}{ac+c+1}$

**Lời giải**

$A = \frac{abc.a}{ab+abc.a+abc} + \frac{b}{bc+b+abc} + \frac{c}{ac+c+1} = \frac{ac}{ac+c+1} + \frac{1}{ac+c+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$

#### Bài 13:

Cho  $a, b, c \neq 0$  và  $a+b+c=0$ . Rút gọn :  $A = \frac{a^2}{a^2-b^2-c^2} + \frac{b^2}{b^2-c^2-a^2} + \frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$

**Lời giải**

Ta có:  $a+b+c=0 \rightarrow b+c=-a \rightarrow (b+c)^2 = a^2 \rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$

Tương tự:

$$b^2 - c^2 - a^2 = 2ac; c^2 - a^2 - b^2 = 2ab \rightarrow A = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} = \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vì: } a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 = (a+b+c)[\dots] - 3ab(a+b) = 3abc$$

#### Bài 14:

Cho  $a, b, c \neq 0$  và  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ . Tính giá trị của :  $A = (1 + \frac{a}{b})(1 + \frac{b}{c})(1 + \frac{c}{a})$

#### Lời giải

Ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a+b+c) \left[ (a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \right] - 3ab(a+b+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \end{cases} \quad \text{+) Nếu:}$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow A = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+c}{a} = \frac{-c}{b} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{a} = -1$$

$$\text{+) Nếu: } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a=b=c \Rightarrow A = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$$

#### Bài 15:

Cho  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ . Tính  $A = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$

#### Lời giải

$$A = \left(\frac{b+c}{a} + 1\right) + \left(\frac{a+c}{b} + 1\right) + \left(\frac{a+b}{c} + 1\right) - 3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 = -3$$

#### Dạng 5: Dạng toán liên quan đến toán đố

**Cách giải:** Ta thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Thiết lập các biểu thức theo yêu cầu của bài toán

**Bước 2:** Sử dụng kết hợp hai quy tắc cộng phân thức đại số đã biết

#### Bài 1:

Một đội máy xúc trên công trường nhận nhiệm vụ xúc  $11600m^3$  đất. Giai đoạn đầu còn nhiều khó khăn nên máy làm việc với năng suất trung bình  $xm^3 / \text{ngày}$  và đội đào được  $5000m^3$ . Sau đó công việc ổn định hơn, năng suất của máy tăng  $25m^3 / \text{ngày}$

a) Hãy biểu diễn

- Thời gian xúc  $5000m^3$  đầu tiên

- Thời gian làm nốt phần việc còn lại
- Thời gian làm việc để hoàn thành công việc

b) Tính thời gian làm việc để hoàn thành công việc với  $x = 250m^3 / \text{ngày}$

### Lời giải

**Chú ý:** Khối lượng công việc = năng suất nhân thời gian làm việc

a) Các biểu thức thu được là

-  $\frac{5000}{x}$  (ngày)

- Thời gian làm phần còn lại = (khối lượng công việc còn lại chia năng suất mới), ta được:

$\frac{6600}{x+25}$  (ngày)

- Tổng thời gian là:  $\frac{5000}{x} + \frac{6600}{x+25}$  (ngày)

b) Thay  $x = 250$  vào biểu thức ta được 44 ngày

### Bài 2:

Con tàu du lịch đưa khách từ Hà Nội đến Bắc Giang. Sau đó, nó nghỉ lại tại Bắc Giang 2 giờ rồi quay về Hà Nội. Độ dài khúc sông từ Hà Nội đến Bắc Giang là 70 km. Vận tốc của dòng nước là 5km/h. Vận tốc riêng của con tàu (tức là vận tốc trong nước yên lặng) là xkm/h

a) Hãy biểu diễn qua x

- Thời gian ngược từ Hà Nội đến Bắc Giang
- Thời gian xuôi từ Bắc Giang về Hà Nội
- Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi về tới Hà Nội

b) Tính thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi con tàu về tới Hà Nội, biết rằng vận tốc lúc ngược dòng của con tàu là 20km/h

### Lời giải

a) Công thức chuyển động là:  $S = vt$

Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước

Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng – vận tốc dòng nước

Ta được các biểu thức là:

$$- \frac{70}{x-5}(h)$$

$$- \frac{70}{x+5}(h)$$

$$- \frac{70}{x-5} + \frac{70}{x+5} + 2(h)$$

$$b) \frac{47}{6}(h) = 7h50'$$

### Bài 3:

Đầu tháng 5 năm 2019, toàn thế giới ghi nhận hàng chục ngàn máy tính bị nhiễm 1 loại vi rút mới. Theo ước tính, có 150 000 thiết bị điện tử trở thành nạn nhân của cuộc tấn công mạng này. Trong thời gian đầu virus mới được phát tán, trung bình một ngày khi nhận x thiết bị nhiễm virus và giai đoạn này khiến 60 000 thiết bị thiệt hại. Sau đó tốc độ lan truyền gia tăng 500 thiết bị nhiễm virus mỗi ngày

a) Hãy biểu diễn

- Thời gian 60000 thiết bị đầu tiên nhiễm virus
- Thời gian số thiết bị còn lại bị lây nhiễm
- Thời gian để 150 000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus với  $x = 4000$ .

### Lời giải

a) Ta nhận được các kết quả sau

$$- \frac{60000}{x} \text{ (ngày)}$$

$$- \frac{90000}{x+500} \text{ (ngày)}$$

$$- \frac{90000}{x+500} + \frac{60000}{x} \text{ (ngày)}$$

b) Kết quả 35 ngày.

### BÀI TẬP VỀ NHÀ

#### Bài 1: Thực hiện các phép tính sau

$$a) A = \frac{11x+10}{3x-3} + \frac{15x+13}{4-4x} (x \neq 1)$$

$$b) B = \frac{1}{a+3} + \frac{4}{3a^2+14a+15} (a \neq -3, a \neq -\frac{5}{3})$$

### Lời giải

$$a) A = \frac{11x+10}{3x-3} + \frac{15x+13}{4-4x} (x \neq 1)$$

$$b) B = \frac{1}{a+3} + \frac{4}{3a^2+14a+15} (a \neq -3, a \neq -\frac{5}{3}) = \frac{3a+9}{(3a+5)(a+3)} = \frac{3}{3a+5}$$



## Bài 2: Cộng các phân thức sau

a)  $A = \frac{b^3+b}{b^3+1} + \frac{b}{b^2-b+1} + \frac{2}{b+1} (b \neq -1)$

b)  $B = \frac{2}{(u-v)(v-w)} + \frac{2}{(v-w)(w-u)} + \frac{2}{(w-u)(u-v)} (u \neq v \neq w)$

### Lời giải

a)  $A = \frac{b^3+b}{b^3+1} + \frac{b}{b^2-b+1} + \frac{2}{b+1} (b \neq -1) \Rightarrow A = \frac{b^3+3b^2+2}{b^3+1}$

b)  $B = \frac{2}{(u-v)(v-w)} + \frac{2}{(v-w)(w-u)} + \frac{2}{(w-u)(u-v)} (u \neq v \neq w) \Rightarrow B = 0$

## Bài 3: Thực hiện các phép tính sau

a)  $A = \frac{5y+3}{y^2-3y} + \frac{9-y}{9-3y} (y \neq 0; y \neq 3)$

b)  $B = \frac{6m^2+11m+4}{m^3-1} + \frac{2m-1}{m^2+m+1} + \frac{7}{1-m} (m \neq 1)$

### Lời giải

a)  $A = \frac{5y+3}{y^2-3y} + \frac{9-y}{9-3y} (y \neq 0; y \neq 3) \Rightarrow A = \frac{(y+3)^2}{3y(y-3)}$

b)  $B = \frac{6m^2+11m+4}{m^3-1} + \frac{2m-1}{m^2+m+1} + \frac{7}{1-m} (m \neq 1) \Rightarrow B = \frac{m+2}{m^2+m+1}$

## Bài 4: Thực hiện các phép tính sau

a)  $B = \frac{y}{4x^2-2xy} + \frac{4x}{2y^2-4xy} (x \neq 0, y \neq 2x)$

b)  $C = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} (x \neq \pm 1)$

### Lời giải

a)  $B = \frac{y}{4x^2-2xy} + \frac{4x}{2y^2-4xy} (x \neq 0, y \neq 2x) = \frac{-(2x+y)}{2xy}$

b)  $C = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} (x \neq \pm 1) = \frac{32}{1-x^{32}}$

## Bài 5:

Rút gọn rồi tính  $A = \frac{1}{a+3} + \frac{2}{a^2+5a+6} + \frac{3}{4a^2+15a+14}$  tại  $a=1$

**Lời giải**

a) Ta có:  $a^2+5a+6=(a+2)(a+3)$ ;  $4a^2+15a+14=(a+2)(4a+7)$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{a+3} + \frac{2}{a^2+5a+6} + \frac{3}{4a^2+15a+14} = \frac{4a^2+26a+37}{(a+3)(a+2)(4a+7)}$$

b) Thay  $a=1$  vào biểu thức  $A$ , ta được  $A = \frac{67}{132}$ .

## PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. Kiến thức cần nhớ

#### 1. Trừ hai phân thức cùng mẫu:

Muốn trừ hai phân thức cùng mẫu ta lấy tử trừ tử và giữ nguyên mẫu:  $\frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}$

#### 2. Trừ hai phân thức khác mẫu: Ta thực hiện theo các bước sau

- Bước 1: Quy đồng mẫu thức
- Bước 2: Trừ các phân thức cùng mẫu vừa tìm được

#### 3. Phân thức đối

- Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0
- Mọi phân thức  $\frac{A}{B}$  đều có phân thức đối là:  $\frac{-A}{B}$

#### 4. Quy tắc đổi dấu: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}$

#### 5. Quy tắc trừ: $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + (-\frac{C}{D})$

### B. Bài tập áp dụng

#### Dạng 1: Thực hiện phép tính có sử dụng quy tắc trừ các phân thức đại số

**Cách giải:** Ta thực hiện theo hai bước

- Bước 1: Áp dụng quy tắc trừ các phân thức đại số
- Bước 2: Thực hiện tương tự phép cộng các phân thức đại số

#### Bài 1: Làm tính trừ các phân thức sau

a)  $A = \frac{2x-1}{5x^2y} - \frac{4x-1}{5x^2y} \quad (x \neq 0; y \neq 0)$

b)  $B = \frac{y+8}{y^2-16} - \frac{2}{y^2+4y} \quad (y \neq 0; y \neq \pm 4)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = \frac{2x-1}{5x^2y} - \frac{4x-1}{5x^2y} = \frac{2x-1-4x+1}{5x^2y} = \frac{-2x}{5x^2y} = \frac{-2}{5xy}$

b) Ta có:  $B = \frac{y+8}{y^2-16} - \frac{2}{y^2+4y} = \frac{y+8}{(y-4)(y+4)} - \frac{2}{y(y+4)} = \frac{y+2}{y(y-4)}$

## Bài 2: Thực hiện các phép tính sau

a)  $A = \frac{ab}{a^2 - b^2} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} (a \neq \pm b)$

b)  $B = \frac{1}{u - 6u^2} - \frac{36u - 18}{36u^2 - 1} \left( u \neq 0; u \neq \pm \frac{1}{6} \right)$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = \frac{ab}{a^2 - b^2} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} = \frac{ab}{a^2 - b^2} + \frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{a}{a - b}$

b) Ta có:  $B = \frac{1}{u - 6u^2} - \frac{36u - 18}{36u^2 - 1} = \frac{1}{u(1 - 6u)} - \frac{18(u - 2)}{(6u - 1)(6u + 1)} = \frac{1 - 6u}{u(1 + 6u)}$

## Bài 3: Trừ các phân thức sau

a)  $A = \frac{x+1}{x-5} - \frac{1-x}{x+5} - \frac{2x(1-x)}{25-x^2} (x \neq \pm 5)$

b)  $B = m^2 + 1 - \frac{m^4 - 4m^2 + 3}{m^2 - 1} (m \neq \pm 1)$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = \frac{x+1}{x-5} - \frac{1-x}{x+5} - \frac{2x(1-x)}{25-x^2} = \frac{x+1}{x-5} - \frac{1-x}{x+5} + \frac{2x(1-x)}{(x-5)(x+5)}$

$$\Rightarrow A = \frac{(x+1)(x+5) - (1-x)(x-5) + 2x(1-x)}{(x-5)(x+5)} = \frac{2}{x-5}$$

b) Ta có:  $B = m^2 + 1 - \frac{m^4 - 4m^2 + 3}{m^2 - 1} = \frac{(m^2 + 1)(m^2 - 1)}{(m-1)(m+1)} - \frac{m^4 - 4m^2 + 3}{(m-1)(m+1)} = \frac{4(m^2 - 1)}{(m-1)(m+1)} = 4$

## Bài 4: Thực hiện phép trừ các phân thức sau

a)  $A = \frac{1}{u^2 - u + 1} + 1 - \frac{u^2 + 2}{u^3 + 1} (u \neq -1)$

b)  $B = \frac{-4x}{(x-3)(x^2-9)} + \frac{2}{x^2-6x+9} + \frac{x}{x^2-9} (x \neq \pm 3)$

### Lời giải

a) Ta có:  $A = \frac{1}{u^2 - u + 1} + 1 - \frac{u^2 + 2}{u^3 + 1} = \frac{1}{u^2 - u + 1} + 1 - \frac{u^2 + 2}{(u+1)(u^2 - u + 1)} = \frac{u}{u+1}$

b) Ta có:  $B = \frac{-4x}{(x-3)(x^2-9)} + \frac{2}{x^2-6x+9} + \frac{x}{x^2-9} = \frac{-4x}{(x-3)^2(x+3)} + \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{x}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-2}{x^2-9}$

### Bài 5: Thực hiện các phép tính sau

a.  $A = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2x^2}{1-x^2}$

b.  $B = \frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} - \frac{6}{x-1}$

c.  $C = \frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1}$

d.  $D = \frac{18}{(x-3)(x^2-9)} - \frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{x}{x^2-9}$

#### Lời giải

a.  $A = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2x^2}{1-x^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x-1} + \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$

b.  $B = \frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} - \frac{6}{x-1} = \frac{-12}{x^2+x+1}$

c. MTC:  $(x-1)^2(x+1)^2$

d. MTC:  $(x-3)^2(x+3)$

### Bài 6:

Tính:  $A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} - \frac{8}{x^8+1} - \frac{16}{x^{16}+1}$

#### Lời giải

Ta có:  $A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} - \frac{8}{x^8+1} - \frac{16}{x^{16}+1} = \frac{32}{x^{32}-1}$

### Bài 7:

Cho:  $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} = 2017$ . Tính  $B = \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{y+z} + \frac{x^2}{z+x}$

#### Lời giải

$$A - B = \frac{x^2 - y^2}{x+y} + \frac{y^2 - z^2}{y+z} + \frac{z^2 - x^2}{z+x} = (x-y) + (y-z) + (z-x) = 0 \Rightarrow A = B = 2017$$

### Dạng 2: Tìm phân thức thỏa mãn yêu cầu bài toán

**Cách giải:** Ta thực hiện theo hai bước

- **Bước 1:** Đưa phân thức cần tìm về riêng một vế

- **Bước 2:** Sử dụng quy tắc cộng, trừ các phân thức đại số từ đó suy ra phân thức cần tìm

### Bài 1: Tìm phân thức A, biết

$$\text{a) } \frac{4}{x^2+x+1} - A = \frac{2}{1-x} + \frac{2x^2+4x}{x^3-1} \quad (x \neq 0, x \neq 1)$$

$$\text{b) } \frac{2a-6}{a^3-3a^2-a+3} + A = \frac{6}{a-3} - \frac{2a^2}{1-a^2} \quad (a \neq \pm 1, a \neq 3)$$

#### Lời giải

$$\text{a. } A = \frac{4}{x^2+x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x^3-1} = \frac{2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{x^2+x+1}$$

$$\text{b. } \frac{2a-6}{a^3-3a^2-a+3} + A = \frac{6}{a-3} - \frac{2a^2}{1-a^2} \quad (a \neq \pm 1, a \neq 3) \Rightarrow A = \frac{2a}{a-3}$$

### Bài 2:

Chứng minh:  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x(x+3)}$ . Từ đó tính nhanh biểu thức: Với các mẫu khác 0

$$A = \frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+6)} + \dots + \frac{1}{(x+12)(x+15)}$$

#### Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{x+3}{x(x+3)} - \frac{x}{x(x+3)} = \frac{3}{x(x+3)} \quad (\text{dpcm})$$

$$3A = \frac{3}{x(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \dots + \frac{3}{(x+12)(x+15)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+15} = \frac{15}{x(x+15)} \Rightarrow M = \frac{5}{x(x+15)}$$

### Bài 3:

Chứng minh:  $\frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} = \frac{1}{q(q+1)}$ . Áp dụng tính nhanh biểu thức sau với các mẫu khác 0.

$$A = \frac{1}{q(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+5)(q+6)}$$

#### Lời giải

$$A = \frac{1}{q(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+5)(q+6)} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q+6} = \frac{6}{q(q+6)}$$

## BÀI TẬP VỀ NHÀ

### Bài 1:

a)  $\frac{x+6}{x^2-4} - \frac{2}{x^2+2x} (x \neq 0, x \neq \pm 2)$

b)  $\frac{1}{3y-1} - \frac{1}{3y+1} - \frac{2y-3}{1-9y^2} (y \neq \pm \frac{1}{3})$

c)  $\frac{3a+5}{6a^3b} - \frac{5-11a}{6a^3b} (a \neq 0; b \neq 0)$

d)  $\frac{3m^2+2m+1}{m^3-1} - \frac{1-m}{m^2+m+1} - \frac{2}{m-1} (m \neq 1)$

### Lời giải

a)  $\frac{x+6}{x^2-4} - \frac{2}{x^2+2x} (x \neq 0, x \neq \pm 2) = \frac{x+2}{x(x-2)}$

b)  $\frac{1}{3y-1} - \frac{1}{3y+1} - \frac{2y-3}{1-9y^2} (y \neq \pm \frac{1}{3}) = \frac{2y-1}{9y^2-1}$

c)  $\frac{3a+5}{6a^3b} - \frac{5-11a}{6a^3b} = \frac{7}{3a^2b}$

d)  $\frac{3m^2+2m+1}{m^3-1} - \frac{1-m}{m^2+m+1} - \frac{2}{m-1} = \frac{2m}{m^2+m+1}$

### Bài 2: Thực hiện phép trừ các phân thức sau

a)  $\frac{5}{u} + \frac{u}{u+6} - \frac{30}{u^2+6u} (u \neq -6; u \neq 0)$

b)  $\frac{3p+1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{p+3}{1-p^2} (p \neq \pm 1)$

### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{5}{u} + \frac{u}{u+6} - \frac{30}{u^2+6u} = \frac{5}{u} + \frac{u}{u+6} - \frac{30}{u(u+6)} = \frac{u+5}{u+6}$

b) Ta có:  $\frac{3p+1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{p+3}{1-p^2} = \frac{3p+1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p+1} - \frac{3p+1}{(p-1)(p+1)} = \frac{p+3}{(p-1)^2}$

### Bài 3:

Tìm phân thức A, thỏa mãn đẳng thức:  $A + \frac{6}{x^2-1} = \frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1} (x \neq \pm 1)$

### Lời giải

Ta có:  $A + \frac{6}{x^2-1} = \frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1} (x \neq \pm 1) \Rightarrow A = \frac{10(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

#### Bài 4:

Thực hiện phép trừ:  $\frac{1}{b-2} - \frac{1}{b}$  ( $b \neq 0, b \neq 2$ ), với các mẫu khác 0

Áp dụng tính:  $A = \frac{2}{b-2} + \frac{2}{(b-2)(b-4)} + \dots + \frac{2}{(b-2016)(b-2018)}$

#### Lời giải

Ta có:  $\frac{1}{b-2} - \frac{1}{b} = \frac{2}{b(b-2)} \Rightarrow A = \frac{2018}{b(b-2018)}$



## PHÉP NHÂN CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. Lý thuyết

1. Quy tắc nhân: Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với

nhau:  $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}$

2. Các tính chất của phép nhân phân thức

a. Giao hoán:  $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B}$

b. Kết hợp:  $\left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}\right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}\right)$

c. Phân phối của phép nhân đối với phép cộng:  $\frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$

### B. Bài tập

#### Dạng 1: Sử dụng quy tắc nhân để thực hiện phép tính

Cách giải: Vận dụng quy tắc nhân các phân thức

#### Bài 1: Thực hiện các phép tính sau

a)  $\frac{8x}{15y^3} \cdot \frac{4y^2}{x^2} (x \neq 0; y \neq 0)$

b)  $\frac{9a^2}{a+3} \cdot \frac{a^2-9}{6a^3} (a \neq -3; a \neq 0)$

Lời giải

a)  $\frac{8x}{15y^3} \cdot \frac{4y^2}{x^2} = \frac{8x \cdot 4y^2}{15y^3 \cdot x^2} = \frac{32}{15xy}$

b)  $\frac{9a^2}{a+3} \cdot \frac{a^2-9}{6a^3} = \frac{9a^2 \cdot (a+3)(a-3)}{6a^3(a+3)} = \frac{3(a-3)}{2a}$

#### Bài 2: Nhân các phân thức sau

a)  $\frac{4n^2}{17m^4} \cdot \left(-\frac{7m^2}{12n}\right) (m \neq 0; n \neq 0)$

b)  $\frac{3b+6}{(b-9)^3} \cdot \frac{2b-18}{(b+2)^2} (b \neq -2; b \neq 9)$

Lời giải

a)  $\frac{4n^2}{17m^4} \cdot \left(-\frac{7m^2}{12n}\right) = \frac{4n^2 \cdot (-7m^2)}{17m^4 \cdot 12n} = \frac{-n}{13m^2}$

b)  $\frac{3b+6}{(b-9)^3} \cdot \frac{2b-18}{(b+2)^2} = \frac{3(b+2) \cdot 2 \cdot (b-9)}{(b-9)^3 \cdot (b+2)^2} = \frac{6}{(b-9)^2 \cdot (b+2)}$

### Bài 3: Thực hiện các phép tính sau

a.  $\frac{a^2 - b^2}{a - b} \cdot \frac{a^2}{(a + b)^2}$

b.  $\frac{3x - 3y}{2x + 2y} \cdot \frac{8x + 8y}{15x - 15y}$

c.  $\frac{2u^2 - 20u + 50}{5u + 5} \cdot \frac{2u^2 - 2}{4(u - 5)^2} (u \neq \pm 5)$

d.  $\frac{v + 3}{v^2 - 4} \cdot \frac{8 - 12v + 6v^2 - v^3}{7v + 21} (v \neq -3; v \neq \pm 2)$

e.  $\frac{3x - 1}{10x^2 + 2x} \cdot \frac{25x^2 + 10x + 1}{1 - 9x^2} (x \neq \frac{-1}{5}; \pm \frac{1}{3}; 0)$

#### Lời giải

c.  $\frac{2u^2 - 20u + 50}{5u + 5} \cdot \frac{2u^2 - 2}{4(u - 5)^2} = \frac{u - 1}{5(u - 5)}$

d.  $\frac{v + 3}{v^2 - 4} \cdot \frac{8 - 12v + 6v^2 - v^3}{7v + 21} = \frac{-(v - 2)^2}{7(v + 2)}$

e.  $\frac{3x - 1}{10x^2 + 2x} \cdot \frac{25x^2 + 10x + 1}{1 - 9x^2} = -\frac{5x + 1}{2x(3x + 1)}$

### Bài 4: Thực hiện phép tính

a.  $\frac{y - 1}{2y} (y^2 + y + 1 + \frac{y^3}{y - 1}) (y \neq 0, y \neq 1)$

b.  $\frac{a^3 + 2a^2 - a - 2}{3a + 15} (\frac{1}{a - 1} - \frac{2}{a + 1} + \frac{1}{a + 2}) (a \neq -5, -2, \pm 1)$

#### Lời giải

a.  $\frac{y - 1}{2y} (y^2 + y + 1 + \frac{y^3}{y - 1}) = \frac{y - 1}{2y} (\frac{y^3 - 1}{y - 1} + \frac{y^3}{y - 1}) = \frac{2y^3 - 1}{2y}$

b.  $\frac{a^3 + 2a^2 - a - 2}{3a + 15} (\frac{1}{a - 1} - \frac{2}{a + 1} + \frac{1}{a + 2}) = \frac{1}{3}$

### Bài 5: Thực hiện phép tính

a.  $\frac{x^3 - y^3}{2y} \cdot \left[ \frac{2y}{4 - 2y - 2x + xy} + \frac{2xy + 4y}{(x - y)(x^2 - 4)} \right]$

b.  $\frac{2}{x} - (\frac{x^2}{x^2 + xy} - \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2}) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$

c.  $(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}) \cdot \frac{1 + \frac{a}{b + c}}{1 - \frac{a}{b + c}} \cdot \frac{b^2 + c^2 - (b - c)^2}{a + b + c}$

#### Lời giải

$$a. = \frac{x^3 - y^3}{2y} \cdot 2y \left[ \frac{1}{(x-2)(y-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-y)} \right] = \frac{x^2 + xy + y^2}{y-2}$$

$$b. \frac{2}{x} - \left( \frac{x^2}{x^2 + xy} - \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} = \frac{2}{x} + \frac{x-y}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

$$c. \left( 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \cdot \frac{1 + \frac{a}{b+c}}{1 - \frac{a}{b+c}} \cdot \frac{b^2 + c^2 - (b-c)^2}{a+b+c} = a+b+c$$

### Bài 6:

Cho  $A = \left[ \left( x^4 - x + \frac{x-3}{x^3+1} \right) \cdot \frac{(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)(x+1)}{x^9 + x^7 - 3x^2 - 3} + 1 - \frac{2(x+6)}{x^2+1} \right] \cdot \frac{4x^2 + 4x + 1}{(x+3)(4-x)}$

a. Rút gọn A

b. Chứng minh rằng :  $-5 \leq P \leq 0$

### Lời giải

$$\begin{aligned} a. A &= \left[ \frac{x^7 + x^4 - x^4 - x + x - 3}{x^3 + 1} \cdot \left[ \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + 2x(1-x)}{(x^7 - x^3)(x^2 + 1)} \right] \cdot (x+1) + 1 - \frac{2(x+6)}{x^2 + 1} \right] \cdot \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(4-x)} \\ &= \left[ \frac{x^7 - 3}{x^3 + 1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x^7 - x^3)(x^2 + 1)} + 1 - \frac{2(x+6)}{x^2 + 1} \right] \cdot \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(4-x)} \\ &= \left[ \frac{(x-1)(x^3 + 1)}{(x^3 + 1)(x^2 + 1)} + 1 - \frac{2(x+6)}{x^2 + 1} \right] \cdot \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(4-x)} = \frac{x-1+x^2+1-2x-12}{x^2+1} \cdot \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(4-x)} \\ &= \frac{x^2 - x + 12}{x^2 + 1} \cdot \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(4-x)} = \frac{(x+3)(4-x)(2x+1)^2}{(x^2+1)(x+3)(4-x)} = \frac{-(2x+1)^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

b. Vì  $(2x+1)^2 \geq 0; x^2 \geq 0 \Rightarrow -(2x+1)^2 \leq 0 \Rightarrow A \leq 0 \forall x$

+) Xét  $A - (-5) = \frac{-(2x+1)^2}{x^2+1} + 5 = \frac{(x-2)^2}{x^2+1} \geq 0 \Rightarrow A \geq -5$

### Dạng 2: Rút gọn biểu thức

**Cách giải:** Sử dụng hợp lý 3 quy tắc đã học: Quy tắc cộng, trừ, nhân phân thức để tính toán

**\*) Chú ý:**

- Đối với phép nhân có nhiều hơn hai phân thức, ta vẫn nhân các tử thức với nhau và các mẫu thức với nhau
- Tính toán biểu thức trong dấu ngoặc trước (nếu có)

### Bài 7: Rút gọn biểu thức

a.  $A = \frac{t^4 + 4t^2 + 8}{2t^3 + 2} \cdot \frac{t}{12t^2 + 1} \cdot \frac{3t^3 + 3}{t^4 + 4t^2 + 8} (t \neq -1)$

b.  $B = \frac{y-1}{2y} \cdot \left( y^2 + y + 1 + \frac{y^3}{y-1} \right) (y \neq 0; y \neq 1)$

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = \frac{t^4 + 4t^2 + 8}{2t^3 + 2} \cdot \frac{t}{12t^2 + 1} \cdot \frac{3t^3 + 3}{t^4 + 4t^2 + 8} = \frac{(t^4 + 4t^2 + 8) \cdot t \cdot 3(t^3 + 1)}{2(t^3 + 1) \cdot (12t^2 + 1) \cdot (t^4 + 4t^2 + 8)} = \frac{3t}{2(12t^2 + 1)}$

b) Ta có:  $B = \frac{y-1}{2y} \cdot \left( y^2 + y + 1 + \frac{y^3}{y-1} \right) = \frac{y-1}{2y} \cdot \left( \frac{y^3 - 1}{y-1} + \frac{y^3}{y-1} \right) = \frac{2y^3 - 1}{2y}$

### Bài 8: Thực hiện phép tính sau

a)  $A = \frac{x^6 + 2x^3 + 3}{x^3 - 1} \cdot \frac{3x}{x+1} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^6 + 2x^3 + 3} (x \neq \pm 1)$

b)  $B = \frac{a^3 + 2a^2 - a - 2}{3a + 15} \cdot \left( \frac{1}{a-1} - \frac{2}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) (a \neq -5; -2; \pm 1)$

#### Lời giải

a)  $A = \frac{x^6 + 2x^3 + 3}{x^3 - 1} \cdot \frac{3x}{x+1} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^6 + 2x^3 + 3} = \frac{3x}{x^2 - 1}$

b)  $B = \frac{a^3 + 2a^2 - a - 2}{3a + 15} \cdot \left( \frac{1}{a-1} - \frac{2}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) = \frac{(a-1)(a+1)(a+2)}{3(a+5)} \cdot \left( \frac{1}{a-1} - \frac{2}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right)$

$$\Rightarrow B = \frac{(a-1)(a+1)(a+2)}{3(a+5)} \cdot \left( \frac{1}{a-1} - \frac{2}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) = \frac{(a+1)(a+2)}{3(a+5)} - \frac{2(a-1)(a+2)}{3(a+5)} + \frac{(a-1)(a+1)}{3(a+5)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

### Bài 9:

Tính hợp lý biểu thức sau:  $M = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{1}{1+x^8} \cdot \frac{1}{1+x^{16}} (x \neq \pm 1)$

#### Lời giải

Áp dụng hằng đẳng thức  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Ta có:  $M = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{1}{1+x^8} \cdot \frac{1}{1+x^{16}} = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{1}{1+x^8} \cdot \frac{1}{1+x^{16}}$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{1-x^{16}} \cdot \frac{1}{1+x^{16}} = \frac{1}{1-x^{32}}$$

### Bài 10:

Rút gọn biểu thức  $P = xy$ , biết  $(3a^3 - 3b^3)x - 2b = 2a (a \neq b)$

và  $(4a + 4b)y = 9(a - b)^2 (a \neq -b)$

### Lời giải

**Biến đổi**  $x = \frac{2(a+b)}{3(a^3-b^3)}; y = \frac{9(a-b)^2}{4(a+b)} \Rightarrow P = x \cdot y = \frac{2(a+b)}{3(a^3-b^3)} \cdot \frac{9(a-b)^2}{4(a+b)} = \frac{3(a-b)}{2(a^2+ab+b^2)}$

### Bài 11: Tính giá trị của các biểu thức sau.

a.  $A = \left( \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - 1 \right) \cdot \frac{x-y}{2y}$  Với  $x = 15, y = -15$

b.  $B = \left( \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} \right) \cdot \left( \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} + \frac{1}{x-y} \right)$  Với  $x = 15, y = 5$

c.  $C = (x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) \cdot \frac{x+y+z}{x+y-z}$  Với  $x = 8,6; y = 2, z = 1,4$

### Lời giải

a.  $A = \left( \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - 1 \right) \cdot \frac{x-y}{2y} = \frac{y}{x+y} = 15$

b.  $B = \left( \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} \right) \cdot \left( \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} + \frac{1}{x-y} \right) = 2x + y = 7$

c.  $C = (x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) \cdot \frac{x+y+z}{x+y-z} = [x - (y-z)^2] \cdot \frac{x+y+z}{x+y-z} = (z+x)^2 - y^2 = 96$

## BÀI TẬP VỀ NHÀ

### Bài 1: Làm tính nhân

a)  $\frac{x^2-49}{2x+1} \cdot \frac{3}{7-x} \left( x \neq \frac{-1}{2}; x \neq 7 \right)$

b)  $\frac{3y^2-2y}{y^2-1} \cdot \frac{1-y^4}{(2-3y)^2} \left( y \neq \pm 1; y \neq \frac{2}{3} \right)$

### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{x^2-49}{2x+1} \cdot \frac{3}{7-x} = -\frac{3(x+7)}{2x+1} \left( x \neq \frac{-1}{2}; x \neq 7 \right)$

b) Ta có :  $\frac{3y^2-2y}{y^2-1} \cdot \frac{1-y^4}{(2-3y)^2} = \frac{y(y^2+1)}{(3y-2)^2} \left( y \neq \pm 1; y \neq \frac{2}{3} \right)$

### Bài 2: Thực hiện phép nhân các phân thức sau

a)  $\frac{a-3}{a+1} \cdot \frac{a^2-7a-8}{a^2-5a+6} (a \neq -1; 2; 3)$

b)  $\frac{b^2}{2b^2+12b+18} \cdot (4b+12) (b \neq -3)$

#### Lời giải

a)  $\frac{a-3}{a+1} \cdot \frac{a^2-7a-8}{a^2-5a+6} = \frac{a-3}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(a-8)}{(a+2)(a-3)} = \frac{a-8}{a+2}$

b)  $\frac{b^2}{2b^2+12b+18} \cdot (4b+12) = \frac{b^2 \cdot 4(b+3)}{2(b^2+6b+9)} = \frac{b^2 \cdot 4(b+3)}{2(b+3)^2} = \frac{2b^2}{b+3}$

### Bài 3: Thực hiện các phép tính sau

a)  $\frac{m^3-1}{2m+4} \left( \frac{1}{m-1} - \frac{m+1}{m^2+m+1} \right) (m \neq -2; m \neq 1)$

b)  $\frac{u^3}{u-2017} \cdot \frac{2001-2u}{u+2} + \frac{u^3}{u-2017} \cdot \frac{u+16}{u+2} (u \neq -2; u \neq 2017)$

#### Lời giải

a)  $\frac{m^3-1}{2m+4} \left( \frac{1}{m-1} - \frac{m+1}{m^2+m+1} \right) = \frac{1}{2} (m \neq -2; m \neq 1)$

b)  $\frac{u^3}{u-2017} \cdot \frac{2001-2u}{u+2} + \frac{u^3}{u-2017} \cdot \frac{u+16}{u+2} = \frac{u^3}{u+2} (u \neq -2; u \neq 2017)$

### Bài 4:

Rút gọn biểu thức  $A = mn$  biết  $(4a^2-25)m = 7a+7 \left( a \neq \pm \frac{5}{2} \right)$

và  $(5a^3+5)n = 6a^2+15a (a \neq -1)$

#### Lời giải

Biến đổi được  $m = \frac{7(a+1)}{(2a-5)(2a+5)}; n = \frac{3a(2a+5)}{5(a^3+1)} \Rightarrow A = mn = \frac{21a}{(2a-5)(a^2-a+1)}$

### Bài 5:

Tìm phân thức T thỏa mãn đẳng thức sau

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x+6} \cdots \frac{x+14}{x+16} \cdot \frac{x+16}{x+18} \cdot \frac{x+18}{x+20} \cdot T = \frac{1}{2} \text{ với các mẫu thỏa mãn khác } 0$$

### Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x+6} \cdots \frac{x+14}{x+16} \cdot \frac{x+16}{x+18} \cdot \frac{x+18}{x+20} \cdot T = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x+20} T = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \frac{x+20}{2}.$$

## PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. Lý thuyết

1. Phân thức nghịch đảo: Hai phân thức được gọi là nghịch đảo nếu tích của chúng bằng 1.

Phân thức nghịch đảo của  $\frac{A}{B}$  là  $\frac{B}{A}$

2. Quy tắc chia: Muốn chia phân thức  $\frac{A}{B}$  cho phân thức  $\frac{C}{D}$  khác 0, ta nhân  $\frac{A}{B}$  với phân thức nghịch đảo của  $\frac{C}{D}$

$$\text{Ta có } \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C} \left( \frac{C}{D} \neq 0 \right)$$

### B. Bài tập

#### Dạng 1: Sử dụng quy tắc chia để thực hiện phép tính

**Cách giải:** Áp dụng công thức  $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C} \left( \frac{C}{D} \neq 0 \right)$

**\*) Chú ý:** Đối với phép chia nhiều hơn hai phân thức, ta vẫn nhân với nghịch đảo của các phân thức đứng sau dấu chia theo thứ tự từ trái sang phải

- Ưu tiên tính toán đối với biểu thức trong dấu ngoặc trước (nếu có)

#### Bài 1: Làm tính chia phân thức

a)  $\frac{1-9x^2}{x^2+4x} : \frac{2-6x}{3x} \left( x \neq -4; x \neq 0; x \neq \frac{1}{3} \right)$

b)  $\frac{y^3+8}{y-1} : (y^2-2y+4) (y \neq 1)$

#### Lời giải

a)  $\frac{1-9x^2}{x^2+4x} : \frac{2-6x}{3x} = \frac{(1-3x)(1+3x) \cdot 3x}{2(1-3x)x(x+4)} = \frac{3(1+3x)}{2(x+4)}$

b)  $\frac{y^3+8}{y-1} : (y^2-2y+4) = \frac{y+2}{y-1}$

#### Bài 2: Chia các phân thức sau

a)  $\frac{27-a^3}{5a+10} : \frac{a-3}{3a+6} (a \neq -2, a \neq 3)$

b)  $(2b^2-32) : \frac{b+4}{7b-2} \left( b \neq -4; b \neq \frac{2}{7} \right)$

#### Lời giải



$$a) \frac{27-a^3}{5a+10} : \frac{a-3}{3a+6} (a \neq -2, a \neq 3) = \frac{-5}{9} (a^2 + 3a + 9)$$

$$b) (2b^2 - 32) : \frac{b+4}{7b-2} = \frac{2(b-4)(b+4) \cdot (7b-2)}{b+4} = 2(b-4)(7b-2)$$

### Bài 3: Chia các phân thức sau

$$a) \frac{m^2 - 5m + 6}{m^2 + 7m + 12} : \frac{m^2 - 6m + 9}{m^2 + 4m} (m \neq -4, \pm 3, 0)$$

$$b) \frac{u^2 - 4uv + 4v^2}{2u^2 - 2uv + 2v^2} : \frac{4u - 8v}{6u^3 + 6v^3} (u \neq -v; u \neq 2v)$$

### Lời giải

$$a) \frac{m^2 - 5m + 6}{m^2 + 7m + 12} : \frac{m^2 - 6m + 9}{m^2 + 4m} (m \neq -4, \pm 3, 0) = \frac{m^2 - 2m}{m^2 - 9}$$

$$b) \frac{u^2 - 4uv + 4v^2}{2u^2 - 2uv + 2v^2} : \frac{4u - 8v}{6u^3 + 6v^3} = \frac{(u-2v)^2 \cdot 6 \cdot (u+v)(u^2 - uv + v^2)}{2(u^2 - uv + v^2) \cdot 4(u-2v)} = \frac{3(u^2 - v^2)}{4}$$

### Bài 4: Thực hiện phép tính

$$a. \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{2x^2 - 2xy + 2y^2} : \frac{4x - 8y}{6x^3 + 6y^3} (x \neq -y, x \neq 2y)$$

$$b. \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2n - 15} : \frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 10n + 21} (n \neq -5, -4, -1, 3, 7)$$

$$c. \frac{x^4 - 8xy^3}{2xy + 5y^2} : \frac{x^3 + 2x^2y + 4xy^2}{2x + 5y} (x \neq 0, y \neq 0, x \neq \frac{-5}{2}y)$$

### Lời giải

$$c. \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{2x^2 - 2xy + 2y^2} : \frac{4x - 8y}{6x^3 + 6y^3} (x \neq -y, x \neq 2y) = \frac{3}{4} (x-2y)(x+y)$$

$$d. \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2n - 15} : \frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 10n + 21} (n \neq -5, -4, -1, 3, 7) = \frac{(n-1)(n-7)}{(n+4)(n+5)}$$

$$e. \frac{x^4 - 8xy^3}{2xy + 5y^2} : \frac{x^3 + 2x^2y + 4xy^2}{2x + 5y} (x \neq 0, y \neq 0, x \neq \frac{-5}{2}y) = \frac{x-2y}{y}$$

### Bài 5: Rút gọn biểu thức

$$a) \frac{4x^2}{25y^2} : \frac{6x}{5y} : \frac{2x}{9y} (p \neq 0; q \neq 0)$$

$$b) \frac{x+4}{x+5} : \left( \frac{x+5}{x+6} : \frac{x+6}{x+4} \right) (x \neq -6; x \neq -5; x \neq -4)$$

$$c) \frac{3x^2}{7y^2} : \left( \frac{6x}{7y} : \frac{2x}{3y} \right) (x \neq 0; y \neq 0)$$

**Lời giải**

$$a) \frac{4x^2}{25y^2} : \frac{6x}{5y} : \frac{2x}{9y} = \frac{3}{5}$$

$$b) \frac{x+4}{x+5} : \left( \frac{x+5}{x+6} : \frac{x+6}{x+4} \right) = \frac{(x+6)^2}{(x+5)^2}$$

$$c) \frac{3x^2}{7y^2} : \left( \frac{6x}{7y} : \frac{2x}{3y} \right) = \frac{x^2}{3y^2}$$

### Bài 6: Thực hiện phép tính

$$a. A = \left( -\frac{-2x+10}{x} + \frac{5x+50}{x^2+5x} + \frac{x^2}{5x+25} \right) : \frac{3x+15}{7}$$

$$b. B = \left[ \frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)} + \frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)} \right] : \left[ \frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x-1)} \right]$$

$$c. C = \left[ \left( \frac{x-y}{2y-x} - \frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x} \right] : \frac{x+1}{2x^2+y+2}$$

**Lời giải**

$$a. A = \left( -\frac{-2x+10}{x} + \frac{5x+50}{x^2+5x} + \frac{x^2}{5x+25} \right) : \frac{3x+15}{7} = \frac{7}{15}$$

$$b. B = \left[ \frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)} + \frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)} \right] : \left[ \frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x-1)} \right] = \frac{x+2}{2}$$

$$c. A = \left[ \frac{2x^2+y-2}{(x+y)(2y-x)} : \frac{(2x^2+y-2)(2x^2+y+2)}{(x+y)(x+1)} \right] : \frac{x+1}{2x^2+y+2} = \frac{1}{2y-x}$$

### Dạng 2: Tìm phân thức thỏa mãn đẳng thức cho trước

**Cách giải:** Thực hiện theo hai bước:

**Bước 1:** Đưa phân thức cần tìm về riêng một vế

**Bước 2:** Sử dụng quy tắc nhân và chia các phân thức đại số, từ đó suy ra phân thức cần tìm

### Bài 1: Tìm phân thức A, biết

$$a. \frac{2x+3y}{x^3-y^3} \cdot A = \frac{4x^2+6xy}{3x^2+3xy+3y^2} \left( x \neq -\frac{3}{2}y; x \neq y \right)$$

$$b. \frac{a-2b}{27a^3+b^3} \cdot A = \frac{a^2-4ab+4b^2}{9a^2-3ab+b^2} \left( a \neq -\frac{1}{3}b, a \neq 2b \right)$$

### Lời giải

$$a. \frac{2x+3y}{x^3-y^3} \cdot A = \frac{4x^2+6xy}{3x^2+3xy+3y^2} (x \neq \frac{-3}{2}y; x \neq y) \Rightarrow A = \frac{2}{3}x(x-y)$$

$$b. \frac{a-2b}{27a^3+b^3} \cdot A = \frac{a^2-4ab+4b^2}{9a^2-3ab+b^2} (a \neq -\frac{1}{3}b, a \neq 2b) \Rightarrow A = (3a+b)(a-2b)$$

### Bài 2: Điền phân thích hợp vào chỗ trống

$$a. \frac{4x^2+8x+16}{x^3-5x^2-x+5} : (...) = \frac{x^3-8}{(x+1)(x-5)} (x \neq -1; x \neq 2; x \neq 5)$$

$$b. \frac{x}{x+1} : \frac{x+3}{x+1} : \frac{x+5}{x+3} : \frac{x+9}{x+7} : (...) = 3$$

### Lời giải

a) Gọi phân thức cần tìm là  $\frac{A}{B}$

$$\text{Ta có } \frac{4x^2+8x+16}{x^3-5x^2-x+5} : (...) = \frac{x^3-8}{(x+1)(x-5)} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{4x^2+8x+16}{x^3-5x^2-x+5} : \frac{x^3-8}{(x+1)(x-5)} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{4}{(x-1)(x-2)}$$

$$b) \text{ Ta tìm được } \frac{A}{B} = \frac{x}{3(x+9)}$$

### BÀI TẬP VỀ NHÀ

#### Bài 1: Thực hiện phép tính sau

$$a. \frac{5xy}{2x-3} : \frac{15xy^3}{12-8x} \left( x \neq 0; x \neq \frac{3}{2}; y \neq 0 \right)$$

$$b. (a^2-25) : \frac{4a+20}{3a-1} \left( a \neq -5; a \neq \frac{1}{3} \right)$$

### Lời giải

a)

b)

#### Bài 2: Rút gọn biểu thức

$$a. \frac{m+7}{m+8} : \frac{m+8}{m+9} : \frac{m+9}{m+7} (m \neq -9; m \neq -8; m \neq -7)$$

$$b. \frac{n+7}{n+8} : \left( \frac{n+8}{n+9} \cdot \frac{n+9}{n+7} \right) (n \neq -9; n \neq -8; n \neq -7)$$

### Lời giải

$$\text{a) } \frac{m+7}{m+8} : \frac{m+8}{m+9} : \frac{m+9}{m+7} = \frac{(m+7)^2}{(m+9)^2}$$

$$\text{b) } \frac{n+7}{n+8} : \left( \frac{n+8}{n+9} \cdot \frac{n+9}{n+7} \right) = \frac{(n+7)^2}{(n+8)^2}$$

### Bài 3: Thực hiện phép tính sau

$$\text{a. } A = \frac{x^4 - xy^3}{2xy + y^2} : \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{2x + y}$$

$$\text{b. } B = \frac{5x^2 - 10xy + 5y^2}{2x^2 - 2xy + 2y^2} : \frac{8x - 8y}{10x^3 + 10y^3}$$

$$\text{c. } C = \frac{b^2 + 2b}{3b^2 - 6b + 3} : \frac{2b + 4}{5b - 5}$$

$$\text{d. } D = \frac{4u + 6v}{u - 2} : \frac{4u^2 + 12uv + 9v^2}{8 - u^3}$$

### Lời giải

$$\text{a. } A = \frac{x^4 - xy^3}{2xy + y^2} : \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{2x + y} = \frac{x - y}{y}$$

$$\text{b. } B = \frac{5x^2 - 10xy + 5y^2}{2x^2 - 2xy + 2y^2} : \frac{8x - 8y}{10x^3 + 10y^3} = \frac{25}{8}(x^2 - y^2)$$

$$\text{c. } C = \frac{b^2 + 2b}{3b^2 - 6b + 3} : \frac{2b + 4}{5b - 5} = \frac{5b}{6(b - 1)}$$

$$\text{d. } D = \frac{4u + 6v}{u - 2} : \frac{4u^2 + 12uv + 9v^2}{8 - u^3} = \frac{-2(u^2 + 2u + 4)}{2u + 3v}$$

### Bài 4: Tìm phân thức P, biết

$$\text{a. } P \cdot \frac{x^2 + 3x}{x - 4} = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x} \quad (x \neq -3, x \neq 0, x \neq 4) \quad \text{b. } P : \frac{4q^2 - 4}{2q + 3} = \frac{4q^2 + 12q + 9}{q - 1} \quad (q \neq \frac{-3}{2}, q \neq 1)$$

### Lời giải

$$\text{a. } P \cdot \frac{x^2 + 3x}{x - 4} = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x} \quad (x \neq -3, x \neq 0, x \neq 4) \Rightarrow P = \frac{x - 3}{x^2}$$

$$\text{b. } P : \frac{4q^2 - 4}{2q + 3} = \frac{4q^2 + 12q + 9}{q - 1} \quad (q \neq \frac{-3}{2}, q \neq 1) \Rightarrow P = 4(2q + 3)(q + 1).$$

## BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỶ. GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC

### 1. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ

- Biểu thức hữu tỉ là một phân thức hoặc biểu thị một dãy các phép toán: Cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức
- Biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức nhờ các quy tắc của phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức đã học

### 2. Giá trị của phân thức

- Giá trị của một phân thức chỉ được xác định với điều kiện giá trị của mẫu thức khác 0
- Chú ý: Biểu thức hữu tỉ có hai biến  $x$  và  $y$  thì giá trị của biểu thức đó chỉ được xác định với các cặp số  $(x; y)$  làm cho giá trị của mẫu thức khác 0

#### Dạng 1: Biến đổi biểu thức hữu tỉ thành phân thức

##### Cách giải:

- Sử dụng kết hợp các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân thức đại số đã học để biến đổi
- Biến đổi cho tới khi được phân thức có dạng:  $\frac{A}{B}$ , với A, B là các đa thức, B khác đa thức 0

#### Bài 1: Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức

a.  $A = \frac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} \quad (x \neq 0, x \neq \frac{1}{2})$

b.  $B = \frac{1 + \frac{4}{a-2}}{1 + \frac{2a}{a^2 + 2a + 4}} \quad (a \neq \pm 2)$

c.  $C = \frac{\frac{y}{4} - 2 + \frac{15}{4y}}{\frac{y}{2} + \frac{6}{y} - \frac{7}{2}} \quad (y \neq 0, 3, 4)$

d.  $D = \frac{3b - \frac{1}{9b^2}}{1 + \frac{1}{3b} + \frac{1}{9b^2}} \quad (b \neq 0)$

##### Lời giải

a.  $A = \frac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} \quad (x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}) \Rightarrow A = \frac{2x+1}{x} : \frac{2x-1}{x} = \frac{2x+1}{2x-1}$

b.  $B = \frac{1 + \frac{4}{a-2}}{1 + \frac{2a}{a^2 + 2a + 4}} \quad (a \neq \pm 2) \Rightarrow B = \frac{a+2}{a-2} : \frac{a^2+4a+4}{a^2+2a+4} = \frac{a^2+2a+4}{a^2-4}$

$$c. C = \frac{\frac{y}{4} - 2 + \frac{15}{4y}}{\frac{y}{2} + \frac{6}{y} - \frac{7}{2}} (y \neq 0, 3, 4) \Rightarrow C = \frac{y^2 - 8y + 15}{4y} : \frac{y^2 - 7y + 12}{2y} = \frac{y-5}{2(y-4)}$$

$$d. D = \frac{3b - \frac{1}{9b^2}}{1 + \frac{1}{3b} + \frac{1}{9b^2}} (b \neq 0) \Rightarrow D = \frac{27b^3 - 1}{9b^2} : \frac{9b^2 + 3b + 1}{9b^2} = 3b - 1$$

## Dạng 2: Thực hiện phép tính với các biểu thức hữu tỉ

**Cách giải:** Sử dụng kết hợp các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân thức đại số đã học để biến đổi

### Bài 1: Thực hiện các phép tính sau

$$a. A = (4x^2 - 1) \left( \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} - 1 \right) (x \neq \pm \frac{1}{2})$$

$$b. B = \left( \frac{3}{x+3} - \frac{9}{x^2+6x+9} \right) : \left( \frac{3}{x^2-9} + \frac{1}{3-x} \right) (x \neq 0, \pm 3)$$

$$c. C = \left( \frac{1}{x^2+8x+16} - \frac{1}{x^2-8x+16} \right) : \left( \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} \right)$$

$$d. D = \left[ \frac{1}{(x-2y)^2} + \frac{2}{x^2-4y^2} + \frac{1}{(x+2y)^2} \right] \cdot \frac{x^2+4xy+4y^2}{16x}$$

### Lời giải

$$a. A = (4x^2 - 1) \frac{(2x+1) - (2x-1) - (4x^2-1)}{(2x+1)(2x-1)} = 3 - 4x^2$$

$$b. B = \left( \frac{3}{x+3} - \frac{9}{x^2+6x+9} \right) : \left( \frac{3}{x^2-9} + \frac{1}{3-x} \right) = \frac{3x}{(x+3)^2} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{-x} = \frac{9-3x}{x+3}$$

$$c. C = \left( \frac{1}{x^2+8x+16} - \frac{1}{x^2-8x+16} \right) : \left( \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} \right) = \frac{-16x}{(x^2-16)^2} \cdot \frac{x^2-16}{2x} = \frac{8}{16-x^2}$$

$$d. D = \left[ \frac{1}{(x-2y)^2} + \frac{2}{x^2-4y^2} + \frac{1}{(x+2y)^2} \right] \cdot \frac{x^2+4xy+4y^2}{16x} = \frac{4x^2}{(x-2y)^2(x+2y)^2} \cdot \frac{(x+2y)^2}{16x} = \frac{x}{4(x-2y)^2}$$

### Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau

$$a. A = \left( \frac{4a+b}{a^2-4ab} + \frac{4a-b}{a^2+4ab} \right) \cdot \frac{a^2-16b^2}{a^2+b^2} (a \neq 0; a \neq \pm 4b)$$

$$b. B = \left( \frac{t}{t+2} + 1 \right) : \left( 1 - \frac{3t^2}{4-t^2} \right) (t \neq \pm 1; t \neq \pm 2)$$

### Lời giải

$$a) A = \left( \frac{4a+b}{a^2-4ab} + \frac{4a-b}{a^2+4ab} \right) \cdot \frac{a^2-16b^2}{a^2+b^2} = \frac{8(a^2+b^2)}{a(a^2-16b^2)} \cdot \frac{a^2-16b^2}{a^2+b^2} = \frac{8}{a}$$

$$b) B = \left( \frac{t}{t+2} + 1 \right) : \left( 1 - \frac{3t^2}{4-t^2} \right) = \frac{2t+2}{t+2} \cdot \frac{4-t^2}{4-4t^2} = \frac{2-t}{2-2t}$$

### Bài 3:

Cho biểu thức:  $A = \frac{x^2+2x}{2x+12} + \frac{x-6}{x} + \frac{108-6x}{2x(x+6)}$

a. Tìm điều kiện của biến x để giá trị của biểu thức được xác định

b. Rút gọn phân thức

c. Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng  $\frac{3}{2}$

d. Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng  $\frac{-9}{2}$

e. Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng 1

### Lời giải

a.  $x \neq -6; x \neq 0$

b.  $x^3 + 4x^2 - 6x + 36 = (x+6)(x^2 - 2x + 6) \Rightarrow A = \frac{x^2 - 2x + 6}{2x}$

c.  $A = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(tm) \\ x = 3(tm) \end{cases}$

d.  $\begin{cases} x = -6(tm) \\ x = -1(tm) \end{cases}$

e.  $P = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 2 = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

### Bài 4:

Cho biểu thức:  $A = \frac{a^2+2a}{2a+10} + \frac{a-5}{a} + \frac{50-5a}{2a(a+5)}$

a. Tìm điều kiện xác định của biểu thức A

b. Rút gọn biểu thức

c. Tính giá trị của biểu thức tại  $a = -1$

d. Tìm giá trị của  $a$  để  $A = 0$

### Lời giải

a.  $a \neq 0, a \neq -5$

$$b. A = \frac{a^2 + 2a}{2a + 10} + \frac{a - 5}{a} + \frac{50 - 5a}{2a(a + 5)} = \frac{a^3 + 4a^2 - 5a}{2a(a + 5)} = \frac{a(a - 1)(a + 5)}{2a(a + 5)} = \frac{a - 1}{2}$$

c. Thay  $a = -1$  (thảo mãn) vào  $A$  ta được:  $A = -1$

$$d. A = 0 \Leftrightarrow a = 1(t/m)$$

### Dạng 3: Tìm $x$ để giá trị của một phân thức đã cho thỏa mãn điều kiện cho trước

**Cách giải:** Ta sử dụng các kiến thức sau

-  $\frac{A}{B} > 0$  khi và chỉ khi  $A$  và  $B$  cùng dấu

-  $\frac{A}{B} < 0$  khi và chỉ khi  $A$  và  $B$  trái dấu

- Ta có:  $a^2 \geq 0 \forall a$

- Với  $a, b \in \mathbb{Z} (b \neq 0) \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \in U(a)$

### Bài 5:

Cho phân thức  $A = \frac{x+2}{x-1} (x \neq 1)$

a. Tìm  $x$  để  $A > 1$

b. Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$

### Lời giải

$$a. A > 1 \Rightarrow \frac{3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1 (tm)$$

$$b. A = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1} \Rightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-1) \in U(3) \Rightarrow x \in \{-2; 0; 2; 4\}$$

### Bài 6:

Cho phân thức:  $A = \frac{x^2 - x + 2}{x - 3} (x \neq 3)$

a. Tìm  $x$  để  $A < 0$

b. Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$

### Lời giải

$$a. Ta có: x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0 \Rightarrow A < 0 \Leftrightarrow x < 3$$

$$b. A = x + 2 + \frac{8}{x-3} \Rightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-3) \in U(8) \Rightarrow x \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\}$$



### Bài 7: Tìm x để

a. phân thức:  $A = \frac{8}{x^2 - 4x + 12}$  đạt giá trị lớn nhất

b. phân thức:  $B = \frac{-5}{x^2 + 2x + 11}$  đạt giá trị nhỏ nhất

#### Lời giải

a. Ta có:  $x^2 - 4x + 12 = (x - 2)^2 + 8 \geq 8 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 4x + 12} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow A \leq 1 \Rightarrow A_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

b.  $x^2 + 2x + 11 \geq 10 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 2x + 11} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow B \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow \min B = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = -1$

### Bài 8:

Cho biểu thức  $C = \frac{x^2}{x-2} \cdot \left(\frac{x^2+4}{x} - 4\right) + 3$

a. Tìm điều kiện xác định của biểu thức C

b. Rút gọn biểu thức C

c. Tìm x để C có giá trị nhỏ nhất

#### Lời giải

a.  $x \neq 0, x \neq 2$

b.  $C = \frac{x^2}{x-2} \cdot \left(\frac{x^2+4}{x} - 4\right) + 3 = x^2 - 2x + 3$

c.  $C = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min C = 2 \Leftrightarrow x = 1$

### Bài 9:

Cho biểu thức  $D = \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x+2}\right) - \frac{x^2 + 6x + 4}{x}$

a. Tìm điều kiện xác định của biểu thức D

b. Rút gọn biểu thức D

c. Tìm x để D có giá trị lớn nhất

#### Lời giải

a.  $x \neq 0, x \neq -2$

b.  $D = -x^2 - 2x - 2$

c.  $D = -(x+1)^2 - 1 \leq -1 \Rightarrow D_{\max} = -1 \Leftrightarrow x = -1$

**Bài 10:**

Cho biểu thức sau:  $A = \left( \frac{2x-x^2}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) \cdot \left( \frac{2}{x^2} + \frac{1-x}{x} \right)$

a. Tìm điều kiện xác định của A

b. Rút gọn A

c. Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 2017$

d. Tìm x để biểu thức  $A > \frac{1}{2}$

e. Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để giá trị biểu thức  $A \in \mathbb{Z}$

**Lời giải**

a.  $x \neq 0, x \neq 2$

$$b. A = \frac{x+1}{2x}$$

$$c. A = \frac{x+1}{2x} = \frac{1009}{2017}$$

$$d. A = \frac{x+1}{2x} > \frac{1}{2} \Rightarrow x > 0; x \neq 2$$

$$e. A = \frac{x+1}{2x} \Rightarrow 2A = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}; A \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(1) \Rightarrow x \in \{\pm 1\} (t/m)$$

**BÀI TẬP VỀ NHÀ****Bài 1:**

Cho biểu thức  $A = \frac{3}{x^2 - 2x + 2}$

a. Tìm x để A đạt giá trị lớn nhất

b. Tìm x để  $A \in \mathbb{Z}$

**Lời giải**

a. Giá trị lớn nhất của  $A = 3$  khi  $x = 1$

b. Chứng minh được:  $0 < A \leq 3, A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{1, 2, 3\}$

$$+) A = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$+) A = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$+) A = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x \in \{1 \pm \sqrt{2}; 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; 1\}$$

**Bài 2: Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức**

$$a. A = \frac{4 - \frac{4n}{m} + \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m} - \frac{2}{n}} (m \neq 0, n \neq 0, n \neq 2m)$$

$$c. C = \frac{\frac{2a}{a+3} + 1}{\frac{3}{a^2 - 9}} (a \neq \pm 3)$$

$$\text{b. } B = \frac{1}{3} + \frac{x}{1 - \frac{x}{x+3}} (x \neq -3)$$

$$\text{d. } D = \frac{1 - \frac{6}{b+3}}{1 - \frac{b^2-10}{b^2-9}} (b \neq \pm 3)$$

### Lời giải

$$\text{a. } A = \frac{4 - \frac{4n}{m} + \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m} - \frac{2}{n}} (m \neq 0, n \neq 0, n \neq 2m) = \frac{(2m-n)^2}{m^2} \cdot \frac{mn}{n-2m} = \frac{(n-2m).n}{m}$$

$$\text{b. } B = \frac{1}{3} + \frac{x}{1 - \frac{x}{x+3}} (x \neq -3) = \frac{1}{3} + \frac{x(x+3)}{3} = \frac{x^2 + 3x + 1}{3}$$

$$\text{c. } C = \frac{\frac{2a}{a+3} + 1}{\frac{3}{a^2-9}} (a \neq \pm 3) = \frac{3a-3}{a-3} \cdot \frac{(a-3)(a+3)}{3} = a^2 + 2a - 3$$

$$\text{d. } D = \frac{1 - \frac{6}{b+3}}{1 - \frac{b^2-10}{b^2-9}} (b \neq \pm 3) = \frac{b-3}{b+3} : \frac{1}{b^2-9} = (b-3)^2.$$

## PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ DẠNG $ax + b = 0$

### A. Lý thuyết

**1. Cách giải:** Ta thực hiện theo các bước sau

- Quy đồng mẫu hai vế rồi khử mẫu
- Thực hiện các phép tính và chuyển vế đưa về dạng  $ax + b = 0$
- Giải phương trình
- Kết luận

**2. Chú ý các kiến thức liên quan**

- Các hằng đẳng thức đáng nhớ
- Cách giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối cơ bản
- Các quy tắc về đổi dấu

### B. Bài tập

#### Dạng 1: Sử dụng các phép biến đổi để giải một số phương trình đơn giản

**Cách giải:** Thực hiện các quy tắc chuyển vế đổi dấu, quy tắc nhân, hằng đẳng thức, quy đồng mẫu thức....để biến đổi phương trình về dạng  $ax + b = 0$

#### Bài 1: Giải các phương trình sau

a)  $7x - 4 = 3x + 12$

b)  $3x - 6 + x = 9 - x$

c)  $\frac{2x-3}{4} = \frac{2+3x}{2}$

d)  $\frac{10x+3}{12} = 1 + \frac{6x+8}{9}$

#### Lời giải

a)  $7x - 4 = 3x + 12 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{4\}$

b)  $3x - 6 + x = 9 - x \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{3\}$

c)  $\frac{2x-3}{4} = \frac{2+3x}{2} \Leftrightarrow 4x - 6 = 8 + 12x \Leftrightarrow 8x = -14 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{4}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{-7}{4} \right\}$

d)  $\frac{10x+3}{12} = 1 + \frac{6x+8}{9} \Leftrightarrow \frac{30x+9}{36} = \frac{36}{36} + \frac{24x+32}{36} \Leftrightarrow 6x = 59 \Leftrightarrow x = \frac{59}{6}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{59}{6} \right\}$

### Bài 2: Giải các phương trình sau

a)  $4x - 5 = x + 7$

b)  $10x - 12 - 3x = 6 + x$

c)  $\frac{5x-4}{3} = \frac{2+3x}{2}$

d)  $\frac{7x-1}{6} + 2x = \frac{16-x}{5}$

#### Lời giải

a)  $4x - 5 = x + 7 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{4\}$

b)  $10x - 12 - 3x = 6 + x \Leftrightarrow 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{3\}$

c)  $\frac{5x-4}{3} = \frac{2+3x}{2} \Leftrightarrow 10x - 8 = 6 + 9x \Leftrightarrow x = 14$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{14\}$

d)  $\frac{7x-1}{6} + 2x = \frac{16-x}{5} \Leftrightarrow 35x - 5 + 60x = 96 - 6x \Leftrightarrow 101x = 101 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{1\}$

### Bài 3: Giải các phương trình sau

a.  $(1-x)^2 + (x+2)^2 = 2x(x-3) - 7$

b.  $(1-x)^3 + (x-2)^3 = -3(x-1)^2$

c.  $(1-2x)^2 = 3x(x-3) + (x-1)^2$

d.  $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6(x+1)^2$

#### Lời giải

a.  $(1-x)^2 + (x+2)^2 = 2x(x-3) - 7 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{-3}{2} \right\}$

b.  $(1-x)^3 + (x-2)^3 = -3(x-1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$

c.  $(1-2x)^2 = 3x(x-3) + (x-1)^2 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{0\}$

$$d. (1+x)^3 + (1-x)^3 = 6(x+1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{-1}{3}\right\}$

#### Bài 4: Giải các phương trình sau

$$a. \frac{3x-1}{4} + \frac{6x-2}{8} = \frac{1-3x}{6}$$

$$b. \frac{x-4}{4} - x + 3 = \frac{x}{3} - \frac{2-x}{6}$$

$$c. \frac{2x-3}{3} - \frac{x-6}{6} = \frac{4x+3}{5} - 17$$

$$d. \frac{(x-1)(x+5)}{3} - \frac{(x+2)(x+5)}{12} = \frac{(x-1)(x+2)}{4}$$

#### Lời giải

$$a. \frac{3x-1}{4} + \frac{6x-2}{8} = \frac{1-3x}{6} \Leftrightarrow 48x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$b. \frac{x-4}{4} - x + 3 = \frac{x}{3} - \frac{2-x}{6} \Leftrightarrow \frac{3x-12}{12} - \frac{12x}{12} + \frac{36}{12} = \frac{4x}{12} - \frac{4-2x}{12} \Leftrightarrow 3x - 12 - 12x + 36 = 4x - 4 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-28}{15}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \left\{\frac{-28}{15}\right\}$$

#### Bài 5:

Giải phương trình sau:  $\frac{5x + \frac{3x-4}{5}}{15} = \frac{\frac{3-x}{15} + 7x}{5} + 1 - x$

#### Lời giải

$$\frac{5x + \frac{3x-4}{5}}{15} = \frac{\frac{3-x}{15} + 7x}{5} + 1 - x \Leftrightarrow 5x + \frac{3x-4}{5} = 3\left(\frac{3-x}{15} + 7x\right) + 15(1-x) \Leftrightarrow 5x + \frac{3x-4}{5} = \frac{3-x}{5} + 6x + 15$$

$$5x + \frac{3x-4}{5} = \frac{3-x}{5} + 6x + 15 \Leftrightarrow 25x + 3x - 4 = 3 - x + 30x + 75 \Leftrightarrow x = -78$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-78\}$

#### Bài 6: Tìm giá trị của m để

a. phương trình:  $\frac{m+x}{5} - x + 5 = \frac{x+m-1}{3} - \frac{x-3}{3}$  (1) có nghiệm gấp 6 lần nghiệm của phương trình:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} = 3 \quad (2)$$

b. phương trình  $\frac{x}{3} + \frac{4x}{9} + 80 = x$  có nghiệm gấp 18 lần nghiệm của phương trình:

$$6m - x = 2(8m - 3x)$$

### Lời giải

$$a) \frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} = 3 \Leftrightarrow \frac{6x+6}{12} + \frac{4x+8}{12} + \frac{3x+9}{12} = \frac{36}{12} \Leftrightarrow 13x = 13 \Leftrightarrow x = 1$$

Vì phương trình (1) có nghiệm gấp 6 lần nghiệm của phương trình (2) nên nghiệm của phương trình (1) là  $x = 6$

Thay  $x = 6$  vào phương trình (1) ta được:

$$\frac{m+6}{5} - 1 = \frac{6+m-1}{3} - \frac{6-3}{3} \Leftrightarrow \frac{m+6}{5} = \frac{5+m}{3} \Leftrightarrow 3m+18 = 25+5m \Leftrightarrow 2m = -7 \Leftrightarrow m = \frac{-7}{2}$$

Vậy  $m = \frac{-7}{2}$  là giá trị cần tìm.

### Bài 7: Giải các phương trình sau

$$a. \frac{2x+1}{3} + \frac{2(4x+1)}{4} = \frac{3x+2(x+1)}{6} + \frac{5+11x}{12}$$

$$b. \frac{x + \frac{2(3-x)}{5}}{14} - \frac{5x-4(x-1)}{24} = \frac{7x+2 + \frac{9-3x}{5}}{12} + \frac{2}{3}$$

$$c. \frac{8(x+22)}{45} - \frac{7x+149 + \frac{6(x+12)}{5}}{9} = \frac{x+35 + \frac{2(x+50)}{9}}{5}$$

### Lời giải

$$b. \Leftrightarrow \frac{5x+2(3-x)}{70} - \frac{5x-4(x-1)}{24} = \frac{35x+10+9-3x}{60} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3x+6}{70} - \frac{x+4}{24} = \frac{32x+19}{60} + \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ (mẫu thức chung = 840).}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-2\}$

$$c. \Leftrightarrow \frac{8(x+22)}{45} - \frac{5(7x+149) + 6(x+12)}{45} = \frac{9(x+35) + 2(x+50)}{45} \Leftrightarrow x = -24$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-24\}$

## Dạng 2: Giải một số phương trình đặc biệt

**Cách giải:** Xét phương trình ẩn  $x$ , có dạng:

$$\frac{x+a}{b} + \frac{x+c}{d} = \frac{x+e}{f} + \frac{x+g}{h} \cdot \begin{cases} a+b=c+d=e+f=g+h=k \\ a-b=c-d=e-f=g-h=k \end{cases}$$

**Bước 1:** Cộng mỗi phân thức trên với 1 hoặc -1

**Bước 2:** Quy đồng tử phân thức, chuyển về nhóm nhân tử chung

**Chú ý:** Có thể mở rộng số phân thức nhiều hơn và tùy bài toán ta sẽ cộng hoặc trừ đi hằng số thích hợp.

### Bài 8: Giải các phương trình sau

a.  $\frac{x+2}{7} + \frac{x+3}{6} = \frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{4}$

b.  $\frac{x-12}{21} + \frac{x-10}{23} = \frac{x-8}{25} + \frac{x-6}{27}$

c.  $\frac{x+7}{3} + \frac{x+5}{4} = \frac{x+3}{5} + \frac{x+1}{6}$

d.  $\frac{x+19}{3} + \frac{x+13}{5} = \frac{x+7}{7} + \frac{x+1}{9}$

e.  $\frac{x-342}{15} + \frac{x-323}{17} + \frac{x-300}{19} + \frac{x-273}{21} = 10$

### Lời giải

a.  $\Leftrightarrow \frac{x+2}{7} + 1 + \frac{x+3}{6} + 1 = \frac{x+4}{5} + 1 + \frac{x+5}{4} + 1 \Leftrightarrow (x+9)\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -9$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-9\}$

b.  $\Leftrightarrow \frac{x-12}{21} - 1 + \frac{x-10}{23} - 1 = \frac{x-8}{25} - 1 + \frac{x-6}{27} - 1 \Leftrightarrow (x-33)\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{25} - \frac{1}{27}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 33$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{33\}$

c.  $\Leftrightarrow \frac{x+7}{3} + 2 + \frac{x+5}{4} + 2 = \frac{x+3}{5} + 2 + \frac{x+1}{6} + 2 \Leftrightarrow (x+13)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -13$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-13\}$

d.  $\Leftrightarrow \frac{x+19}{3} + 3 + \frac{x+13}{5} + 3 = \frac{x+7}{7} + 3 + \frac{x+1}{9} + 3 \Leftrightarrow x = -28$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-28\}$

e.  $\Leftrightarrow \left(\frac{x-342}{15} - 1\right) + \left(\frac{x-323}{17} - 2\right) + \left(\frac{x-300}{19} - 3\right) + \left(\frac{x-273}{21} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = 357$



Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{357\}$ .

### Bài 9: Giải các phương trình sau

a.  $\frac{x+81}{19} + \frac{x+82}{18} = \frac{x+84}{16} + \frac{x+85}{15}$

b.  $\frac{x-22}{8} + \frac{x-21}{9} + \frac{x-20}{10} + \frac{x-19}{11} = 4$

c.  $\frac{-x+12}{7} + \frac{-x+13}{6} = \frac{-x+15}{4} + \frac{-x+16}{3}$

#### Lời giải

a)  $\frac{x+81}{19} + \frac{x+82}{18} = \frac{x+84}{16} + \frac{x+85}{15} \Leftrightarrow (x+100) \left( \frac{1}{19} + \frac{1}{18} - \frac{1}{16} - \frac{1}{15} \right) = 0 \Leftrightarrow x = -100$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-100\}$ .

b)  $\frac{x-22}{8} + \frac{x-21}{9} + \frac{x-20}{10} + \frac{x-19}{11} = 4 \Leftrightarrow (x-30) \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 30$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{30\}$ .

c)  $\frac{-x+12}{7} + \frac{-x+13}{6} = \frac{-x+15}{4} + \frac{-x+16}{3} \Leftrightarrow (19-x) \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 19$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{19\}$ .

### Dạng 3: Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ

**Cách giải:** Tùy thuộc vào mỗi phương trình mà ta có thể lựa chọn cách đặt ẩn phụ phù hợp để làm giảm sự phức tạp của phương trình đã cho.

### Bài 10: Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

a.  $\frac{3x-1}{2} - \frac{2-6x}{5} = \frac{1}{2} + (3x-1)$

b.  $(x^2 + 2x + 1) - \frac{x+1}{3} = \frac{6(x+1)^2 - 5x - 5}{6}$

c.  $2 + \frac{x-2}{2} - \frac{2x-4}{3} - \frac{5}{6}(2-x) = 0$

d.  $(x-1) - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{1+(2x-2)}{2}$

#### Lời giải

a. Đặt  $t = 3x-1 \Rightarrow \frac{t}{2} + \frac{2t}{5} = \frac{1}{2} + t \Rightarrow t = -5 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{-4}{3} \right\}$ .

b. Đặt  $t = x+1 \Rightarrow t^2 - \frac{t}{3} = \frac{6t^2 - 5t}{6} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = -1$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-1\}$ .

$$\text{c. } 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{2x-4}{3} - \frac{5}{6}(2-x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{2(x-2)}{3} + \frac{5}{6}(x-2) = 0$$

$$\text{Đặt } t = x-2 \Rightarrow 2 + \frac{t}{2} - \frac{2t}{3} + \frac{5}{6}t = 0 \Rightarrow 6 + 3t - 4t + 5t = 0 \Leftrightarrow 4t = -6 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ .

$$\text{d. } (x-1) - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{1+(2x-2)}{2} \Leftrightarrow (x-1) - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{1+2(x-1)}{2} \Leftrightarrow t - \frac{2t}{3} = \frac{1+2t}{2}$$

$$\Leftrightarrow t - \frac{2t}{3} = \frac{1+2t}{2} \Leftrightarrow 6t - 4t = 3 + 6t \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ .

## BÀI TẬP VỀ NHÀ

### Bài 1: Giải các phương trình sau

a.  $x + 1 = 3x - 1$

b.  $x - 4 + 2x = 4 - x$

c.  $\frac{2x+3}{4} = 1 + \frac{x-7}{5}$

d.  $\frac{x+3}{4} + 1 = \frac{1-x}{6}$

### Lời giải

a)  $x + 1 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{1\}$ .

b)  $x - 4 + 2x = 4 - x \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{2\}$ .

c)  $\frac{2x+3}{4} = 1 + \frac{x-7}{5} \Leftrightarrow 10x + 15 = 20 + 4x - 28 \Leftrightarrow 6x = -23 \Leftrightarrow x = \frac{-23}{6}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{-23}{6} \right\}$ .

d)  $\frac{x+3}{4} + 1 = \frac{1-x}{6} \Leftrightarrow 3x + 9 + 12 = 2 - 2x \Leftrightarrow 5x = -19 \Leftrightarrow x = \frac{-19}{5}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{-19}{5} \right\}$ .

### Bài 2: Giải các phương trình sau

a.  $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2x(x+1) - 6$

b.  $(1+x)^3 - (x-2)^2 = 9(x-1)^2$

c.  $\frac{x-1}{2} + \frac{3x+4}{4} = \frac{1-3x}{8}$

d.  $\frac{x + \frac{2(x-1)}{5}}{3} = 1 + \frac{x}{12}$

### Lời giải

a)  $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2x(x+1) - 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 2x^2 + 2x - 6 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{4\}$ .

b)  $(1+x)^3 - (x-2)^2 = 9(x-1)^2 \Leftrightarrow 1 + 3x + 3x^2 + x^3 - (x^2 - 6x + 8) = 9x^2 - 18x + 9$

$\Leftrightarrow -9x + 9 = -18x + 9 \Leftrightarrow x = 0$ . Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{0\}$ .

c)  $\frac{x-1}{2} + \frac{3x+4}{4} = \frac{1-3x}{8} \Leftrightarrow 4x - 4 + 6x + 8 = 1 - 3x \Leftrightarrow 13x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{13}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{-3}{13} \right\}$ .

### Bài 3: Giải các phương trình sau

$$a. \frac{18-x}{5} + \frac{17-x}{6} = \frac{16-x}{7} + \frac{15-x}{8}$$

$$b. \frac{x-30}{10} + \frac{x-28}{9} + \frac{x-26}{8} = -6$$

$$c. \frac{x+81}{19} + \frac{x+82}{18} + \frac{x+83}{17} = \frac{x+84}{16} + \frac{x+85}{15} + \frac{x+86}{14}$$

$$d. \frac{20-x}{3} + \frac{22-x}{4} = \frac{24-x}{5} + \frac{26-x}{6}$$

### Lời giải

$$a. \frac{18-x}{5} + \frac{17-x}{6} = \frac{16-x}{7} + \frac{15-x}{8} \Leftrightarrow (23-x)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 23$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{23\}$ .

$$b. \frac{x-30}{10} + \frac{x-28}{9} + \frac{x-26}{8} = -6 \Leftrightarrow (x-10)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{10\}$ .

$$c. \frac{x+81}{19} + \frac{x+82}{18} + \frac{x+83}{17} = \frac{x+84}{16} + \frac{x+85}{15} + \frac{x+86}{14} \Leftrightarrow x = -100$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-100\}$ .

$$d. \frac{20-x}{3} + \frac{22-x}{4} = \frac{24-x}{5} + \frac{26-x}{6} \Leftrightarrow x = 14$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{14\}$ .

### Bài 4: Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

$$a. \frac{3x-1}{2} - \frac{2-6x}{5} = \frac{1}{2} + (3x-1)$$

$$b. (x+1) - \frac{x+1}{3} = \frac{5(x+1)-1}{6}$$

### Lời giải

$$a) \frac{3x-1}{2} - \frac{2-6x}{5} = \frac{1}{2} + (3x-1) \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2} + \frac{2(3x-1)}{5} = \frac{1}{2} + (3x-1)$$

Đặt  $t = 3x-1 \Rightarrow$  ta được:

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2} + \frac{2t}{5} = \frac{1}{2} + t \Leftrightarrow 5t + 4t = 5 + 10t \Leftrightarrow t = -5 \Rightarrow 3x-1 = -5 \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

$$b) \text{ Đặt } t = x+1 \Rightarrow t - \frac{t}{3} = \frac{5t-1}{6} \Leftrightarrow 6t - 2t = 5t - 1 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{0\}$ .



## ÔN TẬP PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

### A. Lý thuyết

1. Phương trình dạng:  $A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases}$

2. Mở rộng:  $A_1(x).A_2(x)....A_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1(x) = 0 \\ A_2(x) = 0 \\ ..... \\ A_n(x) = 0 \end{cases}$

3. Giải phương trình đưa về dạng tích:

- Chuyển tất cả các hạng tử sang về trái để vế phải bằng 0
- Phân tích vế trái thành nhân tử
- Giải phương trình thu được

4. Chú ý: Đa thức bậc  $n$  có không quá  $n$  nghiệm, vậy phương trình bậc  $n$  có không quá  $n$  nghiệm.

### B. Bài tập

#### Dạng 1: Giải phương trình tích

**Cách giải:** Áp dụng công thức  $A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases}$

#### Bài 1: Giải các phương trình sau

a.  $(3x-2)(x+1) = 0$

b.  $(x^2+3)(2x-1) = 0$

c.  $(x+3)(2x+3)(x-5) = 0$

#### Lời giải

$$\text{a) } (3x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ x=-1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$

$$\text{b) } (x^2+3)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

c)  $(x+3)(2x+3)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -3; \frac{-3}{2}; 5 \right\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ -3; \frac{-3}{2}; 5 \right\}$ .

### Bài 2: Giải các phương trình sau

a.  $(2x-1)\frac{5x-10}{10} + (2x-1)\frac{3x+12}{6} - (2x-1)x = 0$

b.  $(x-3)(2x+1)(7-x)(x^2+2) = 0$

c.  $(x+7)\left(\frac{x+5}{2} - \frac{4x}{3}\right) = 0$

d.  $(4x+3)\left(\frac{3x+7}{4} - \frac{x-3}{12}\right) = 0$

### Lời giải

a)  $(2x-1)\frac{5x-10}{10} + (2x-1)\frac{3x+12}{6} - (2x-1)x = 0 \Leftrightarrow (2x-1)\left(\frac{5x-10}{10} + \frac{3x+12}{6} - x\right) = 0$

$\Leftrightarrow (2x-1)(15x-30+15x+60-30x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ .

b)  $(x-3)(2x+1)(7-x)(x^2+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 7; 3; \frac{-1}{2} \right\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ 7; 3; \frac{-1}{2} \right\}$ .

c)  $(x+7)\left(\frac{x+5}{2} - \frac{4x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+7)(3x+15-8x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-7; 3\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-7; 3\}$ .

d)  $\Leftrightarrow (4x+3)(9x+21-x+3) = 0 \Leftrightarrow (4x+3)(8x+24) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{3}{4}; -3 \right\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ -\frac{3}{4}; -3 \right\}$ .

### Dạng 2 : Đưa về phương trình tích dạng đơn giản

**Cách giải:** Ta thực hiện theo các bước sau

- Biến đổi phương trình đã cho về dạng phương trình tích

- Áp dụng công thức:  $A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases}$

### Bài 1: Giải các phương trình sau

a.  $2x(3x-2) - (x+1)(3x-2) = 0$

b.  $(x-2)(x^2-3x+5) = x^3-2x^2$

c.  $\frac{1}{2}(x+1)(3-x) + x = 3$

d.  $3x^2-2x-1=0$

### Lời giải

a.  $\Leftrightarrow (3x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$ . Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{1; \frac{2}{3}\right\}$ .

b.  $\Leftrightarrow (x-2)(-3x+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{-5}{3} \end{cases}$ . Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{2; \frac{-5}{3}\right\}$ .

c.  $\Leftrightarrow (3-x)\left(\frac{x+1}{2}-1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$ . Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{1; 3\}$ .

d.  $3x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1}{3} \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{1; \frac{-1}{3}\right\}$

### Bài 2: Giải các phương trình sau

a.  $(2x-1)^2 + (x-3)(2x-1) = 0$

b.  $2(x-5)(x+2) = x^2-5x$

c.  $(2x+1)(1-x) + 2x = 2$

d.  $x^2-5x+6=0$

### Lời giải

a) Ta có  $(2x-1)^2 + (x-3)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x-1+x-3) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(3x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right\}$



$$\text{b) } 2(x-5)(x+2) = x^2 - 5x \Leftrightarrow 2(x-5)(x+2) = x(x-5) \Leftrightarrow (x-5)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{5; -4\}$

$$\text{c) } (2x+1)(1-x) + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2-2x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$

$$\text{d) } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{2; 3\}$$

### Bài 3: Phân tích vế trái thành nhân tử rồi giải các phương trình sau

$$\text{a. } x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\text{b. } x^3 + x^2 - 2 = 0$$

$$\text{c. } x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\text{d. } x^4 + x^3 + 6x^2 + 5(x+1) = 0$$

$$\text{e. } (x+1)^2(x+2) + (x-1)^2(x-2) = 12$$

$$\text{f. } 6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$$

### Lời giải

$$\text{a. } \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{1; -2\}$$

$$\text{b. } \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{1\}$$

$$\text{c. } \Leftrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

$$\text{d. } \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{1; -3\}$$

$$\text{e. } \Leftrightarrow 2x^3 + 10x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{1\}$

$$\text{f. } \Leftrightarrow 6x^4 - 6x^3 + 5x^3 - 5x^2 - 2x^2 + 2x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(6x^3 + 5x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(6x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(2x-1)(3x+1) = 0 \Rightarrow x \in \left\{1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$$

### Bài 4:

Cho phương trình  $\frac{x^2}{16} - m = \frac{1}{2}(2m+1)(m-1)x$ . Tìm giá trị tham số  $m$  để phương trình có nghiệm  $x = 4$

**Lời giải**

Vì  $x = 4$  là nghiệm nên thay vào phương trình ta có:

$$1 - m = 2(2m+1)(m-1) \Leftrightarrow (1-m)(4m+3) = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{1; -\frac{3}{4}\right\}$$

**Bài 5:**

Tìm giá trị của tham số  $a$  để phương trình  $\frac{2}{5-t} - a - t = 2a(a+2)$  nhận  $t = 3$  làm nghiệm.

**Lời giải**

Thay  $t = 3$  vào phương trình ta được:

$$1 - a - 3 = 2a(a+2) \Leftrightarrow 2a(a+2) + a + 2 = 0 \Leftrightarrow (a+2)(2a+1) = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{-2; -\frac{1}{2}\right\}$$

**Dạng 3: Đưa về phương trình tích bằng cách sử dụng các hằng đẳng thức**

**Cách giải:** Ta thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ một cách hợp lý đưa phương trình đã cho về dạng phương trình tích

**Bước 2:** Áp dụng công thức:  $A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases}$

**Bài 1: Giải các phương trình sau**

a.  $(x-2)^2 = (2x+3)^2$

b.  $x^2 + (2x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 3$

c.  $x^3 - 1 + (x-1)(2-x^2) = 0$

d.  $\frac{x^3}{2} = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1$

**Lời giải**

a)  $(x-2)^2 = (2x+3)^2 \Leftrightarrow (-x-5)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$\text{b) } x^2 + (2x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 3 \Leftrightarrow (x + \sqrt{3})(3x - 2\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{c) } x^3 - 1 + (x - 1)(2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \frac{x^3}{2} = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1 \Leftrightarrow \frac{x^3}{2} = (x + 1 - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 \left( \frac{x}{2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$$

### Bài 2: Giải các phương trình sau

$$\text{a. } \frac{(x-3)^2}{4} - (x+2)^2 = 0$$

$$\text{b. } (x-2)(2x+1) + x^2 = 4$$

$$\text{c. } x^3 + 1 = (x+1)(x-5)$$

$$\text{d. } \frac{(x+1)^3}{3} = x^2 + 2x + 1$$

#### Lời giải

$$\text{a) } \frac{(x-3)^2}{4} - (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{x-3}{2} - x - 2 \right) \left( \frac{x-3}{2} + x + 2 \right) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -7; \frac{-1}{3} \right\}$$

$$\text{b) } (x-2)(2x+1) + x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)(2x+1+x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; -1\}$$

$$\text{c) } x^3 + 1 = (x+1)(x-5) \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1 - x + 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; \pm 2\}$$

$$\text{d) } \frac{(x+1)^3}{3} = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^3}{3} = (x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 \left( \frac{x+1}{3} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$$

### Bài 3: Giải các phương trình sau

$$\text{a. } (x+1)^3 - (1-x)^3 = 0$$

$$\text{b. } (x+1)^3 - 9(x+1) = 0$$

$$\text{c. } x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\text{d. } 9x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

#### Lời giải

$$\text{a) } (x+1)^3 - (1-x)^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (1 - 3x + 3x^2 + x^3) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Cách khác:  $(x+1)^3 - (1-x)^3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow x+1 = 1-x \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{b) } (x+1)^3 - 9(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)[(x+1)^2 - 9] = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4; -1; 2\}$$

$$\text{c) } x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)[(x+1)^2 + 3] = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$d) 9x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x)^3 + (x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$$

#### Bài 4: Giải các phương trình sau

$$a. (x+2)^3 + (x+1)^3 = 0$$

$$b. (x-2)^3 - 4(x-2) = 0$$

$$c. x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$d. 2x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

#### Lời giải

$$a) (2x+3)\left[(x+2)^2 - (x+2)(x+1) + (x+1)^2\right] = 0 \Leftrightarrow (2x+3)(x^2 + 4x + 4 - x^2 - 3x - 2 + x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(x^2 + 4x + 4 - x^2 - 3x - 2 + x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (2x+3)(x^2 + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$$

$$b) (x-2)^3 - 4(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left[(x-2)^2 - 4\right] = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2; 4\}$$

$$c) x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3\}$$

$$d) 2x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

#### Dạng 4: Đặt ẩn phụ kết hợp với các phương pháp khác

**Cách giải:** Phát hiện sự giống nhau, tương đồng trong các phương trình và đặt ẩn phụ để đơn giản phương trình

#### Bài 1: Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

$$a. (x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) + 4 = 0$$

$$b. (2x+1)^2 - 2x - 1 = 2$$

$$c. (x^2 - 3x)^2 + 5(x^2 - 3x) + 6 = 0$$

$$d. (x^2 - x - 1)(x^2 - x) - 2 = 0$$

#### Lời giải

$$a. \text{Đặt } t = x^2 - x \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = -1; x = 2$$

$$a. \text{Đặt } t = 2x+1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$c. (x^2 - 3x)^2 + 5(x^2 - 3x) + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t \in \{-2; -3\} \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$$

$$d. (x^2 - x - 1)(x^2 - x) - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1).t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t \in \{-1; 2\} \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$$

#### Bài 2: Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

$$a. (x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) + 1 = 0$$

$$b. (5-2x)^2 + 4x - 10 = 8$$

c.  $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 1) = 3$

d.  $x(x-1)(x^2 - x + 1) - 6 = 0$

### Lời giải

a)  $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b)  $(5-2x)^2 + 4x - 10 = 8 \Leftrightarrow (5-2x)^2 - 2(5-2x) - 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 9$

$\Leftrightarrow (t-1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow t \in \{-2; 4\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

c)  $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 1) = 3 \Leftrightarrow (t+2).t = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1; -3\} \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$

### Bài 3: Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

a.  $(2x^2 - 3x + 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 3) - 16 = 0$

b.  $(x-1).x.(x+4)(x+5) - 84 = 0$

c.  $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$

### Lời giải

a.  $\Leftrightarrow y^2 - 3(y-4) - 16 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = \frac{3}{2} \\ x = -1; x = \frac{5}{2} \end{cases}$

b.  $\Leftrightarrow (x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 5) - 84 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y - 84 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{vonghiem} \\ x^2 + 4x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{2; -6\}$

c.  $\Leftrightarrow t^4 - 10x^2t^2 + 9x^4 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - x^2)(t^2 - 9x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = x^2 \\ t^2 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - x + 1)^2 - x^2 = 0 \\ (x^2 - x + 1)^2 - 9x^2 = 0 \end{cases}$

+)  $(x^2 - x + 1) - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

+)  $(x^2 - x + 1) - 9x^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2[(x-2)^2 - 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

### BÀI TẬP VỀ NHÀ

### Bài 1: Giải các phương trình sau

a.  $\frac{2x+5}{6} - \frac{(2x+5)(x-10)}{3} = 0$

b.  $(4x-1)(x+5) = x^2 - 25$

c.  $2x^3 - 6x^2 = x^2 - 3x$

d.  $x(x+3)^3 - \frac{x}{4}(x+3) = 0$

### Hướng dẫn giải

a.  $x \in \left\{ \frac{-5}{2}; \frac{21}{2} \right\}$

b.  $x \in \left\{ -5; \frac{4}{3} \right\}$

c.  $x \in \left\{ 3; 0; \frac{1}{2} \right\}$

d.  $x \in \left\{ \frac{-5}{2}; \frac{-7}{2} \right\}$

### Bài 2: Giải các phương trình sau

a.  $(x-1)^2 = (2x+5)^2$

b.  $\frac{(x-3)^3}{2} = x^2 - 4x + 4$

c.  $x^3 + 8 = -2x(x+2)$

d.  $4x^2 + 8x - 5 = 0$

### Lời giải

a.  $x \in \left\{ -6; \frac{-4}{3} \right\}$

b.  $x \in \{2; 4\}$

c.  $x = -2$

d.  $x \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-5}{2} \right\}$

### Bài 3: Giải các phương trình sau

a.  $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$

b.  $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 9 = 0$

### Lời giải

a.  $\Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2 - x + 4) = 0 \Rightarrow x \in \{1; -2\}$

b.  $\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$

### Bài 4: Giải các phương trình sau

a.  $(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) + 9 = 0$

b.  $(4x-5)^2 + 7(4x-5) - 8 = 0$

c.  $(x+3)^2(x^2 + 6x + 1) = 9$

d.  $2x(8x-1)(8x^2 - x + 2) - 126 = 0$

### Lời giải

a.  $x \in \{-1; 3\}$

b.  $x \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{-3}{4} \right\}$

c.  $x = \{-6; 0\}$

d.  $x \in \{\frac{-7}{8}; 1\}$

## PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

### A. Lý thuyết

1. **Lưu ý:** Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta cần đặc biệt chú ý đến điều kiện xác định là tất cả các mẫu thức phải khác 0

2. **Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu**

- Tìm điều kiện xác định của phương trình
- Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu
- Giải phương trình vừa nhận được
- Kiểm tra và kết luận

3. **Chú ý:** Khi nhân hai vế của một phương trình với cùng một đa thức hoặc khi bình phương hai vế của một phương trình, ta thu được 1 phương trình tương đương.

### B. Bài tập

#### Dạng 1: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

**Cách giải:** Biểu thức  $\frac{A(x)}{B(x)}$  với  $A(x), B(x)$  là các đa thức xác định  $\Leftrightarrow B(x) \neq 0$

#### Bài 1:

Tìm ĐKXĐ của các biểu thức sau

a)  $A = \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$

b)  $B = \left( \frac{2}{x^2+1} + 3 \right) : \frac{x-1}{2x-3}$

#### Lời giải

a)  $A$  xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

b)  $B$  xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 2x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$

#### Bài 2:

Tìm ĐKXĐ của các biểu thức sau

a)  $A = \frac{5x+1}{3x-2} - \frac{x}{4}$

b)  $B = \left( \frac{3}{3x^2+1} + \frac{1}{4} \right) : \frac{5x}{3-x}$

#### Lời giải



a)  $A$  xác định  $\Leftrightarrow 3x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{2}{3}$

b)  $B$  xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 3 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$

### Bài 3:

Chứng minh các biểu thức sau xác định với mọi giá trị của  $x$

a)  $A = \frac{5-7x}{x^2+x+1} - \frac{7}{3}$

b)  $B = \frac{x+10}{4x^2+2x+3} - \frac{2}{x^2+1}$

### Lời giải

a) Ta có  $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x \Rightarrow$  đpcm

b) Ta có  $4x^2 + 2x + 3 = \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \forall x; x^2 + 1 > 0 \forall x \Rightarrow$  đpcm

### Bài 4:

Chứng minh các biểu thức sau xác định với mọi giá trị của  $y$

a)  $A = \frac{|2-3t|}{t^2+4t+5} + \frac{t-1}{2}$

b)  $B = \frac{t+1}{t^2-3t+3} - \frac{2t^2-3}{3}$

### Lời giải

a) Ta có  $t^2 + 4t + 5 = (t+2)^2 + 1 > 0 \forall t \Rightarrow$  đpcm

b) Ta có  $t^2 - 3t + 3 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall t \Rightarrow$  đpcm

### Dạng 2: Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

**Cách giải:** Áp dụng các bước giải như trong phần tóm tắt lý thuyết

### Bài 1: Giải các phương trình sau

a)  $\frac{4}{2x-3} - \frac{7}{3x-5} = 0$

b)  $\frac{4}{2x-3} + \frac{4x}{4x^2-9} = \frac{1}{2x+3}$

#### Lời giải

a) Điều kiện xác định:  $x \neq \frac{3}{2}; x \neq \frac{5}{3}$

$$\frac{4}{2x-3} - \frac{7}{3x-5} = 0 \Leftrightarrow \frac{4(3x-5) - 7(2x-3)}{(2x-3)(3x-5)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+1}{(2x-3)(3x-5)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

b) Điều kiện xác định:  $x \neq \pm \frac{3}{2}$

$$\frac{4}{2x-3} + \frac{4x}{4x^2-9} = \frac{1}{2x+3} \Leftrightarrow 4(2x+3) + 4x = 2x-3 \Leftrightarrow 10x = -15 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

### Bài 2: Giải các phương trình sau

a)  $\frac{2}{2x+1} + \frac{x}{4x^2-1} = \frac{7}{2x-1}$

b)  $\frac{x^2+5}{25-x^2} = \frac{3}{x+5} + \frac{x}{x-5}$

#### Lời giải

a) Điều kiện xác định  $x \neq \pm \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{2x+1} + \frac{x}{4x^2-1} = \frac{7}{2x-1} \Leftrightarrow 2(2x-1) + x = 7(2x+1) \Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-1\}$

b) Điều kiện xác định  $x \neq \pm 5$

$$\frac{x^2+5}{25-x^2} = \frac{3}{x+5} + \frac{x}{x-5} \Leftrightarrow -x^2-5 = 3(x-5) + x(x+5) \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{1\}$

### Bài 3: Giải các phương trình sau

$$a) \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} = \frac{4x+5}{x^2+3x+2}$$

$$b) \frac{2(x^2+x+6)}{x^3-8} + \frac{2}{2-x} = \frac{3}{x^2+2x+4}$$

### Lời giải

a) Điều kiện xác định  $x \neq -1; x \neq -2$

$$\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} = \frac{4x+5}{x^2+3x+2} \Leftrightarrow 3(x+2) - 2(x+1) = 4x+5 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$

b) Điều kiện xác định  $x \neq 2$

$$\frac{2(x^2+x+6)}{x^3-8} + \frac{2}{2-x} = \frac{3}{x^2+2x+4} \Leftrightarrow 2(x^2+x+6) - 2(x^2+2x+4) = 3(x-2) \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{2\}$

### Bài 4: Giải các phương trình sau

$$a) \frac{6}{-x^2+6x-8} + \frac{x+3}{x-4} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$b) \frac{6}{x^3+1} - \frac{1-x}{x^2-x+1} = \frac{5}{x+1}$$

### Lời giải

a) Ta có:  $-x^2+6x-8 = -(x^2-6x+8) = -(x-4)(x-2)$

Điều kiện xác định  $x \neq 4; x \neq 2$

$$\begin{aligned} \frac{6}{-x^2+6x-8} + \frac{x+3}{x-4} &= \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{-6}{(x-4)(x-2)} + \frac{x+3}{x-4} = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow -6 + (x+3)(x-2) = (x+1)(x-4) \\ \Leftrightarrow -6 + x^2 - 2x + 3x - 6 &= x^2 - 4x + x - 4 \Leftrightarrow x - 12 = -3x - 4 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (loại)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện xác định  $x \neq -1$

$$\frac{6}{x^3+1} - \frac{1-x}{x^2-x+1} = \frac{5}{x+1} \Leftrightarrow 6 - (1-x)(x+1) = 5(x^2-x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ 0; \frac{5}{4} \right\}$

### Bài 5: Giải các phương trình sau

$$a) \frac{x+5}{x^2-5x} + \frac{5-x}{2x^2+10x} = \frac{x-5}{2x^2-50}$$

$$b) \frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{3}{x^2-x-2} = \frac{1}{x^2-4}$$

### Lời giải

a) Điều kiện xác định:  $x \neq 0; x \neq \pm 5$

$$\frac{x+5}{x^2-5x} + \frac{5-x}{2x^2+10x} = \frac{x-5}{2x^2-50} \Leftrightarrow \frac{x+5}{x(x-5)} + \frac{5-x}{2x(x+5)} = \frac{x-5}{2(x-5)(x+5)} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{7}$$

b) Điều kiện xác định:  $x \neq -1; x \neq \pm 2$

$$\frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{3}{x^2-x-2} = \frac{1}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{3}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow x = -13$$

### Bài 6: Giải các phương trình sau

$$a. x + \frac{2x-1}{x-2} = 3x + \frac{3}{x-2}$$

$$b. \frac{5x+1}{5} - \frac{2x-1}{2x+2} = 2 + \frac{x^2+4x+1}{x+1}$$

$$c. \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}$$

### Lời giải

a) Điều kiện xác định:  $x \neq 2$

$$x + \frac{2x-1}{x-2} = 3x + \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2} - \frac{3}{x-2} = \frac{2x(x-2)}{(x-2)} \Leftrightarrow x = 1$$

b) Điều kiện xác định:  $x \neq -1$

$$\frac{5x+1}{5} - \frac{2x-1}{2x+2} = 2 + \frac{x^2+4x+1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{5x+1}{5} - \frac{2x-1}{2(x+1)} = 2 + \frac{x^2+4x+1}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{-3}{58}$$

c. Điều kiện xác định:  $x \neq 0; x \neq \pm 2$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x(x-2)} = \frac{8}{x(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow x = 3$$

### Bài 7: Giải các phương trình sau

$$a. \frac{5}{8x} - \frac{x-3}{4x^2-8x} = \frac{x+1}{2x^2-4x} - \frac{x+8}{16-8x}$$

$$b. \frac{5-x}{4x^2-8x} + \frac{7}{8x} = \frac{x-1}{2x(x-2)} + \frac{1}{8x-16}$$

$$c. \frac{14}{20-6x-2x^2} + \frac{x^2+4x}{x^2+5x} - \frac{x+3}{2-x} + 3 = 0$$

$$d. \frac{13-x}{x+3} + \frac{6x^2+6}{x^4-8x^2+9} - \frac{3x+6}{x^2+5x+6} - \frac{2}{x-3} = 0$$

$$e. \frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12} - \frac{1}{x^2-4} - \frac{4}{2x^2+7x+6} + \frac{1}{2x+3} = 0$$

## Hướng dẫn

a.  $\Leftrightarrow x = -1; x = -8$

c.  $20 - 6x - 2x^2 = 2(2 - x)(x + 5) \Rightarrow x = 1$

d.  $\Leftrightarrow \frac{13-x}{x+3} + \frac{6(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-9)} - \frac{3(x+2)}{(x+2)(x+3)} - \frac{2}{x-3} = 0$

e.  $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = x^2(2x+3) - 4(2x+3) = (2x+3)(x+2)(x-2); 2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(2x+3)$

ĐKXD:  $x \neq \pm 2; x \neq \frac{-3}{2}; S = \{1; 5\}$

### Bài 8:

Cho phương trình ẩn  $x$ :  $\frac{x}{3a+x} - \frac{x}{x-3a} = \frac{a^2}{9a^2-x^2}$

a. Giải phương trình khi  $a = 1$

b. Tìm các giá trị của  $a$  khi  $x = 1$

### Lời giải

a. Thay  $a = 1$  vào phương trình ta được  $x = \frac{1}{6}$

b. Thay  $x = 1$  và  $\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 6 \end{cases}$

### Bài 9:

Cho phương trình ẩn  $x$ :  $\frac{x-1}{x+a} - \frac{x}{x-a} = \frac{x+2a}{a^2-x^2}$

a. Giải phương trình khi  $a = 2$

b. Tìm các giá trị của  $a$  để phương trình có nghiệm  $x = 1$

### Lời giải

a. Thay  $a = 2$  vào phương trình ta được  $x = \frac{3}{2}$

b. Thay  $x = 1$  và  $\Rightarrow a = 0$

### Bài 10:

Cho phương trình ẩn  $x$ :  $\frac{1}{x+m} - \frac{5}{x-2m} = \frac{2m-4}{(x+m)(2m-x)}$

a. Giải phương trình khi  $m=1$

b. Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có nghiệm  $x=-2$ .

### Lời giải

a) Thay  $m=1$  vào phương trình ta được:  $\frac{1}{x+1} - \frac{5}{x-2} = \frac{-2}{(x+1)(2-x)} \Leftrightarrow x = \frac{-9}{4}$

b) Thay  $x=-2$  vào phương trình ta được:

$$\frac{1}{-2+m} - \frac{5}{-2-2m} = \frac{2m-4}{(-2+m)(2m+2)} \Leftrightarrow \frac{1}{m-2} + \frac{5}{2(m+1)} = \frac{2m-4}{2(m-2)(m+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{5}{4} \end{cases}$$

## BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 11:** Giải các phương trình sau

$$\text{a. } \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x-12}{x^2-4}$$

$$\text{b. } \frac{-x^2+12x+4}{x^2+3x-4} = \frac{12}{x+4} + \frac{12}{3x-3}$$

$$\text{c. } \frac{1}{2x^2+5x-7} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{3}{2x^2-5x-7}$$

### Hướng dẫn giải

a. Điều kiện xác định  $x \neq \pm 2$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x-12}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x-12}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

b) Điều kiện xác định  $x \neq 1; x \neq -4$

$$\frac{-x^2+12x+4}{x^2+3x-4} = \frac{12}{x+4} + \frac{12}{3x-3} \Leftrightarrow \frac{-x^2+12x+4}{(x-1)(x+4)} = \frac{12}{x+4} + \frac{12}{3(x-1)} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{c. } x = \frac{7}{3}; x = -4$$

### Bài 2:

Giải phương trình sau  $\frac{x^2-2x+2}{x-1} + \frac{x^2-8x+20}{x-4} = \frac{x^2-4x+6}{x-2} + \frac{x^2-6x+12}{x-3}$

### Lời giải

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2+1}{x-1} + \frac{(x-4)^2+4}{x-4} = \frac{(x-2)^2+2}{x-2} + \frac{(x-3)^2+3}{x-3} \Leftrightarrow x-1 + \frac{1}{x-1} + x-4 + \frac{4}{x-4} = x-2 + \frac{2}{x-2} + x-3 + \frac{3}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \{0; \frac{5}{2}\}$$

### Bài 3:

Cho phương trình ẩn  $x$ :  $\frac{m}{x+m} + \frac{x}{x+2m} = \frac{3}{(x+m)(x+2m)} + 1$

a. Giải phương trình với  $m=1$

b. Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có nghiệm  $x=5$

### Lời giải

$$\text{a. } m = \frac{-3}{5}$$

$$\text{b. } m = \frac{-3}{5}$$





## ÔN TẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### A. Lý thuyết

**1. Định nghĩa:** Phương trình có dạng  $ax + b = 0$  ( $a \neq 0$ ) là phương trình bậc nhất một ẩn

Trong đó  $a, b$  là hai số đã cho và  $a \neq 0$

**2. Hai quy tắc biến đổi phương trình**

- Quy tắc nhân (hoặc chia) với một số khác 0: Khi nhân (hoặc chia) hai vế của phương trình với một số khác 0 ta được phương trình mới tương đương với phương trình đã cho

$$A(x) + B(x) = C(x) \Leftrightarrow mA(x) + mB(x) = mC(x); A(x) + B(x) = C(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{m} + \frac{B(x)}{m} = \frac{C(x)}{m} (m \neq 0) - \text{Quy}$$

tắc chuyển vế:  $A(x) + B(x) = C(x) \Leftrightarrow A(x) = C(x) - B(x)$

**3. Cách giải:**  $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất  $x = \frac{-b}{a}$

### B. Bài tập

#### Dạng 1: Nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn

**Cách giải:** Dựa vào định nghĩa phương trình bậc nhất một ẩn

**Bài 1:** Hãy xét xem các phương trình sau có là phương trình bậc nhất một ẩn hay không? Nếu có hãy chỉ ra hệ số  $a$  và  $b$

a)  $3x - 4 = 0$

b)  $0x + 3 = 0$

c)  $\frac{1}{2}x = 0$

d)  $\frac{x^2}{3} - 7 = 0$

#### Lời giải

a) Là phương trình bậc nhất một ẩn với  $a = 3; b = -4$

b) Không là phương trình bậc nhất một ẩn

c) Là phương trình bậc nhất một ẩn với  $a = \frac{1}{2}; b = 0$

d) Không là phương trình bậc nhất một ẩn

**Bài 2:** Hãy xét xem các phương trình sau có là phương trình bậc nhất một ẩn hay không? Nếu có hãy chỉ ra hệ số  $a$  và  $b$

a)  $x - 1 = 0$

b)  $0x - 1 = 0$

c)  $\frac{1}{3}x = 0$

d)  $x^2 - 4 = 0$

**Lời giải**

a) Là phương trình bậc nhất một ẩn với  $a = 1; b = -1$

b) Không là phương trình bậc nhất một ẩn

c) Là phương trình bậc nhất một ẩn với  $a = \frac{1}{3}; b = 0$

d) Không là phương trình bậc nhất một ẩn

**Bài 3:** Tìm  $m$  để các phương trình sau là các phương trình bậc nhất ẩn  $x$

a)  $(m - 4)x + 2 - m = 0$

b)  $(m^2 - 4)x - m = 0$

c)  $(m - 1)x^2 - 6x + 8 = 0$

d)  $\frac{m - 2}{m - 1}x + 5 = 0$

**Lời giải**

a) Điều kiện  $m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

b) Điều kiện  $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

c) Điều kiện  $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

d) Điều kiện  $m \neq 2; m \neq 1$

**Bài 4:** Tìm  $m$  để các phương trình sau là các phương trình bậc nhất ẩn  $x$

a)  $(m - 1)x + m + 1 = 0$

b)  $(m^2 - 1)x + m = 0$

c)  $(m + 1)x^2 + x - 1 = 0$

d)  $\frac{m - 3}{m + 1}x - 6 = 0$

**Lời giải**

a) Điều kiện  $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

b) Điều kiện  $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

c) Điều kiện  $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

d) Điều kiện  $m \neq 3; m \neq -1$

**Bài 5:** Chứng minh rằng các phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số  $m$

a)  $(m^2 + 1)x - 3 = 0$

b)  $(m^2 + 2m + 3)x + m - 1 = 0$

**Lời giải**

a) Ta có  $a = m^2 + 1 > 0 \forall m \Rightarrow$  phương trình luôn là bậc nhất một ẩn

b) Ta có  $a = m^2 + 2m + 3 = (m + 1)^2 + 2 > 0 \forall m \Rightarrow$  phương trình luôn là bậc nhất một ẩn

**Bài 6:** Chứng minh rằng các phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số  $m$

a)  $(m^2 + 2)x + 4 = 0$

b)  $(m^2 - 2m + 2)x + m = 0$

**Lời giải**

a) Ta có  $a = m^2 + 2 > 0 \forall m$  phương trình luôn là bậc nhất một ẩn

b) Ta có  $a = m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 > 0 \forall m \Rightarrow$  phương trình luôn là bậc nhất một ẩn

## **Dạng 2: Giải phương trình**

**Cách giải:** Sử dụng các quy tắc chuyển vế hoặc nhân (chia) với một số khác 0 để giải các phương trình đã cho

### **Bài 1: Giải các phương trình sau**

a)  $3x - 6 = 0$

b)  $2x - x + 4 = 0$

c)  $x - 4 = 7 - 2x$

d)  $8 - 2x = 9 - x$

**Lời giải**

a)  $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{2\}$

b)  $2x - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-4\}$

c)  $x - 4 = 7 - 2x \Leftrightarrow 3x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{11}{3}\right\}$

d)  $8 - 2x = 9 - x \Leftrightarrow x = -1$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-1\}$

### Bài 2: Giải các phương trình sau

a)  $2x - 4 = 0$

b)  $2x + x - 3 = 0$

c)  $2x - 3 = 5 + x$

d)  $7 - 3x = 5 - 2x$

### Lời giải

a)  $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{2\}$

b)  $2x + x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{1\}$

c)  $2x - 3 = 5 + x \Leftrightarrow x = 8$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{8\}$

d)  $7 - 3x = 5 - 2x \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{2\}$

### Bài 3: Giải các phương trình sau

a)  $2(x - 2) + 3(x + 6) = 5(x + 3) - 1$

b)  $x^2 - 4x + 3 - (x + 1)^2 = 4(x - 2)$

c)  $(3x - 1)^2 - (2 - 3x)^2 = 5x + 2$

### Lời giải

a)  $2(x - 2) + 3(x + 6) = 5(x + 3) - 1 \Leftrightarrow 2x - 4 + 3x + 18 = 5x + 15 - 1 \Leftrightarrow 14 = 14$

Vậy phương trình có vô số nghiệm

b)  $x^2 - 4x + 3 - (x + 1)^2 = 4(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - x^2 - 2x - 1 = 4x - 8 \Leftrightarrow 8x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$

c)  $(3x - 1)^2 - (2 - 3x)^2 = 5x + 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 - 4 + 12x - 9x^2 = 5x + 2 \Leftrightarrow x = 5$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{5\}$

### Bài 4: Giải các phương trình sau

- a.  $(3x-1)^2 - 5(2x+1)^2 + (6x-3)(2x+1) = (x-1)^2$
- b.  $(x+2)^3 + [-(x-2)^3] = 12x(x-1) + 8$
- c.  $(2x-1)^2 + (x+4)^2 + 5 = 2x(x+1) + (x+2)^2 + 2x^2 - 2x + 18$

### Lời giải

a)  $\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 - 5(4x^2 + 4x + 1) + 12x^2 + 6x - 6x - 3 = x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 - 20x^2 - 20x - 5 + 12x^2 + 6x - 6x - 3 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow -24x = 8 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ .

b)  $\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 12x^2 - 12x + 8 \Leftrightarrow 8 = -12x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ .

### Bài 5: Giải các phương trình sau

- a.  $(m-2)x + m + 3 = 0$  khi  $m = 3$
- b.  $(m^2 - 4m + 5)x = 2m - 1$  khi  $m = 2$

### Lời giải

a) Thay  $m = 3$  vào phương trình ta được:  $x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{-6\}$ .

b) Thay  $m = 2$  vào phương trình ta được:  $x = 3$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{3\}$ .

### Bài 6: Giải các phương trình sau

- a.  $(m+1)x + m - 1 = 0$  khi  $m = 2$
- b.  $(m^2 + 2m + 3)x = m + 2$  khi  $m = -1$

### Lời giải

a) Thay  $m = 2$  vào phương trình ta được:  $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$ .

b) Thay  $m = -1$  vào phương trình ta được:  $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ .

**Bài 7: Tìm các giá trị của  $m$  để các phương trình sau có nghiệm tương ứng**

- a.  $5x - 2m = x - 2$  có nghiệm là  $x = -1$
- b.  $5(m + 3x)(x + 1) - 4.5 = 80$  có nghiệm là  $x = 2$
- c.  $(2x + 1)(9x + 2m) - 5(x + 2) = 40$  có nghiệm là  $x = 2$
- d.  $2(2x + 1) + 18 = 3(x + 2)(2x + m)$  có nghiệm là  $x = 1$
- e.  $3(m + 2x)(x + 2) - 2(2x + 1) = 18$  có nghiệm là  $x = 1$

**Lời giải**

**Bài 8:**

Cho hai phương trình ẩn  $x$  là  $3x + 3 = 0(1)$  và  $5 - mx = 7(2)$

Tìm giá trị của  $m$  sao cho nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2)

**Lời giải**

Phương trình (1)  $\Leftrightarrow x = -1$ .

Thay  $x = -1$  vào phương trình (2) ta được  $5 + m = 7 \Leftrightarrow m = 2$

Vậy  $m = 2$ .

**Bài 9:**

Cho biểu thức  $A = t^2(m - 1) - t(m - 1)(t - 2) + (t - m)$ , với  $m$  là tham số

a. Rút gọn  $A$

b. Khi  $m = 2$ . Tìm  $t$  để  $A = 0$

**Lời giải**

a) Rút gọn được  $A = (2m - 1)t - m$

b) Với  $m = 2 \Rightarrow A = 3t - 2 \Rightarrow A = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ .

Vậy  $t = \frac{2}{3}$  là giá trị cần tìm.

### Bài 10:

Cho biểu thức  $B = -t^2(m+1) + t(m+1)(t+1) + 2t - m$ , với  $m$  là tham số

a. Rút gọn  $B$

b. Khi  $m = 3$ . Tìm  $t$  để  $B = 0$

### Lời giải

a)  $B = -t^2(m+1) + t(m+1)(t+1) + 2t - m = -t^2m - t^2 + mt^2 + mt + t^2 + 2t - m = (m+2)t - m$

b) Thay  $m = 3$  vào  $B$  ta được  $B = 5t - 3$

$$B = 0 \Rightarrow 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$$

Vậy  $t = \frac{3}{5}$  là giá trị cần tìm.

### Dạng 3: Biện luận phương trình dạng: $ax + b = 0$

#### Cách giải:

+) Nếu  $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

+) Nếu  $a = 0 \Rightarrow 0.x = b \Rightarrow \begin{cases} b \neq 0 \Rightarrow \text{ptvn} \\ b = 0 \Rightarrow \text{ptvosonghiem} \end{cases}$

### Bài 1: Giải và biện luận các phương trình sau

a.  $2x + m(2mx + 4) = 2$

b.  $a(ax + 1) = x(a + 2) + 2(a : \text{thamso})$

c.  $a(x - a) = 3(x + 3) - 6a$

d.  $(m^2 - 4)x = 3m - 6$

### Lời giải

a.  $2x + m(2mx + 4) = 2 \Leftrightarrow (m^2 + 1)x = 1 - 2m, m^2 + 1 > 0 \Rightarrow x = \frac{1 - 2m}{m^2 + 1}$

b.  $a(ax + 1) = x(a + 2) + 2 \Leftrightarrow (a + 1)(a - 2)x = 2 - a(1)$

+) Nếu  $a \neq 2, a \neq -1 \Rightarrow x = \frac{2 - a}{(a + 1)(a - 2)} = \frac{-1}{a + 1}$

+) Nếu  $a = -1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 0x = 3 \rightarrow \text{ptvn}$

+) Nếu  $a = 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 0x = 0 \rightarrow \text{ptvsn}$

c.  $a(x - a) = 3(x + 3) - 6a \Leftrightarrow ax - a^2 - 3x - 9 + 6a = 0 \Leftrightarrow (a - 3)x = (a - 3)^2(1)$

+) Nếu  $a \neq 3 \Rightarrow x = a - 3$

+) Nếu  $a = 3 \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow \text{ptvsn}$

d.  $(m^2 - 4)x = 3m - 6$

+) Nếu  $m \neq \pm 2 \Rightarrow x = \frac{3}{m+2}$

+) Nếu  $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0x = 0 \rightarrow \text{ptvsn} \\ 0x = -12 \rightarrow \text{ptvn} \end{cases}$

### Bài 2:

Cho phương trình  $(m^2 - 1)(x + 2) + 1 = m(1)$

a. Tìm  $m$  để  $x = 3$  là nghiệm phương trình (1)

b. Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm

c. Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm duy nhất

### Lời giải

a. Thay  $x = 3$  vào phương trình ta được:  $5m^2 - m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-4}{5} \end{cases}$

b.  $(m^2 - 1)(x + 2) + 1 = m(1) \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = -2m^2 + m + 1$

Để phương trình có nghiệm thì xảy ra 2 trường hợp

+) Phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

+) Phương trình có vô số nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -2m^2 + m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Vậy  $m \neq 1$  là giá trị cần tìm

c. Phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ \frac{-2m^2 + m + 1}{m^2 - 1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-4}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-4}{5}$

### Bài 3:

Cho phương trình  $m(x + 1) - 2x = m^2 + m - 4$ . Tìm  $m$  sao cho?

a. Phương trình nhận 1 làm nghiệm

b. Phương trình có nghiệm



### c. Phương trình vô nghiệm

#### Lời giải

a. Thay  $x=1$  vào phương trình, ta được  $m=-1; m=2$

b. Để phương trình có nghiệm thì xảy ra 2 trường hợp

$$m(x+1)-2x=m^2+m-4 \Leftrightarrow (m-2)x=m^2-4$$

+) Phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

+) Phương trình có vô số nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=0 \\ m^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$

Vậy phương trình có nghiệm với mọi  $m$

c. Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=0 \\ m^2-4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$

Vậy không có giá trị nào để phương trình vô nghiệm.

### BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 1:** Tìm  $m$  để các phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn  $x$

a)  $(m+1)x+2-m=0$

b)  $(m^2-4)x+2m+1=0$

c)  $(m-2)x^2-2x+1$

d)  $\frac{2m+1}{m-2}x-3=0$

#### Lời giải

a) Điều kiện  $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

b) Điều kiện  $m^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

c) Điều kiện  $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$

d) Điều kiện  $m \neq 2; m \neq \frac{-1}{2}$

**Bài 2:** Chứng minh các phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m

a)  $(m^2 + 4)x - 4 = 0$

b)  $(m^2 - m + 1)x + 1 = 0$

**Lời giải**

a) Ta có  $a = m^2 + 4 > 0 \forall m \Rightarrow$  đpcm

b) Ta có  $a = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall m \Rightarrow$  đpcm

**Bài 3:** Giải các phương trình sau

a)  $2x - 4 = 0$

b)  $2x + x - 3 = 0$

c)  $2x - 3 = 5 + x$

d)  $7 - 3x = 5 - 2x$

**Lời giải**

a) Ta có  $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

b) Ta có  $2x + x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

c) Ta có  $2x - 3 = 5 + x \Leftrightarrow x = 8$

d) Ta có  $7 - 3x = 5 - 2x \Leftrightarrow x = 2$

**Bài 4:** Giải các phương trình sau

a)  $(2m - 1)x + m + 1 = 0$  khi  $m = 1$

b)  $(m^2 - 2m + 5)x = 2m + 1$  khi  $m = 1$

**Lời giải**

a) Thay  $m = 1$  vào phương trình ta được:  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

b) Thay  $m = 1$  vào phương trình ta được:  $4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

**Bài 5:**

Cho biểu thức  $A = 2t^2(m - 1) - t(m - 1)(2t - 1) + t + m$ , với  $m$  là tham số

a. Rút gọn  $A$

b. Khi  $m = 1$ . Tìm  $t$  để  $A = 0$

**Lời giải**

a)  $A = 2t^2(m-1) - t(m-1)(2t-1) + t + m = 2mt^2 - 2t^2 - 2mt^2 + mt + 2t^2 - t + t + m = mt + m$

b) Thay  $m = 2$  vào  $A$  ta được  $A = 2t + 2$

$$A = 0 \Rightarrow 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Vậy  $t = -1$  là giá trị cần tìm.

## ÔN TẬP GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

### A. Lý thuyết

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình

#### Bước 1: Lập phương trình

- Đặt ẩn và tìm điều kiện phù hợp của ẩn
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết thông qua ẩn và các đại lượng đã biết
- Lập phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng

#### Bước 2: Giải phương trình

#### Bước 3: Kiểm tra điều kiện và đưa ra kết luận của bài toán

### B. Các dạng toán

#### Dạng 1 : Toán về tỉ số, quan hệ giữa các số

1. Tỉ số của hai số  $a$  và  $b (b \neq 0)$  là số  $\frac{a}{b}$

Ta có  $a\% = \frac{a}{100}$

2. Biểu diễn số có hai chữ số

$$\overline{ab} = 10a + b (a, b \in N, 0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9)$$

3. Biểu diễn số có ba chữ số

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c (a, b, c \in N, 0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9)$$

#### Bài 1:

Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ hai  $= \frac{4}{5}$  số sách ở giá thứ nhất. Tính số sách lúc đầu ở mỗi giá ?

#### Lời giải

Gọi số sách ở giá thứ nhất là:  $x$  (cuốn sách) ( $50 < x < 450$ )

Số sách ở giá thứ hai là  $450 - x$  (cuốn sách)

Khi chuyển 50 cuốn sách từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ nhất và thứ hai lần lượt là:  $x - 50; 450 - x + 50 = 500 - x$  (cuốn sách)

Vì Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ hai  $= \frac{4}{5}$  số sách ở giá thứ nhất nên ta có phương trình:

$$500 - x = \frac{4}{5}(x - 50) \Leftrightarrow 2500 - 5x = 4x - 200 \Leftrightarrow 2700 = 9x \Leftrightarrow x = 300 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số sách lúc đầu ở giá thứ nhất là 300 (cuốn sách)

Số sách ở giá thứ hai lúc đầu là 150 (cuốn sách).

### **Bài 2:**

Tìm hai số tự nhiên, biết số lớn hơn số nhỏ 3 đơn vị và tổng các bình phương của chúng = 369

### **Lời giải**

Gọi số lớn là  $x$  ( $x \in \mathbb{N}^*, x > 3$ )

Vậy số nhỏ là  $x - 3$

Tổng các bình phương của chúng là:  $x^2 + (x - 3)^2 = 369 \Leftrightarrow x = 15(tm)$

Vậy số lớn là 15, số nhỏ là 12

### **Bài 3:**

Cho một số có hai chữ số, tổng của hai chữ số đó bằng 10 và tích của hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho 12 đơn vị. Tìm số đã cho

### **Lời giải**

Gọi chữ số hàng chục là  $x$  ( $x \in \mathbb{N}^*, x \leq 9$ )

$\Rightarrow$  Số hàng đơn vị là  $10 - x$

Số cần tìm có dạng  $\overline{x(10-x)} = 9x + 10$

Tích của hai chữ số là  $x(10 - x) = 10x - x^2$

Theo bài ra ta có:  $9x + 10 - (10x - x^2) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy số cần tìm là 28

#### Bài 4:

Tìm số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số = 7. Nếu thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số của nó thì được 1 số lớn hơn số đã cho 180 đơn vị.

#### Lời giải

Gọi chữ số hàng chục là  $x$  ( $x \in N^*, x \leq 9$ )

Chữ số hàng đơn vị là  $7 - x$  ( $x \leq 7$ )

Số đã cho có dạng:  $\overline{x(7-x)} = 9x + 7$

Khi xen chữ số 0 vào giữa ta được:  $\overline{x0(7-x)} = 100x + 7 - x = 99x + 7$

Theo bài ra ta có:  $100x + 7 - x - (9x + 7) = 180 \Leftrightarrow x = 25$

Vậy số cần tìm là 25

#### Bài 5:

Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5, hiệu của số đó và số bằng chữ số hàng chục của nó thì bằng 68. Tìm số đó

#### Lời giải

Số tự nhiên chia hết cho 5 có tận cùng bằng 0 hoặc 5

Vì số tự nhiên là lẻ nên chữ số hàng đơn vị là 5

Gọi chữ số hàng chục là  $x$  ( $0 < x \leq 9, x \in N$ )

Theo bài ra ta có:  $\overline{x5} - x = 68 \Leftrightarrow x = 7(tm)$

Vậy số cần tìm là 75

#### Bài 6:

Hai số nguyên dương có tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ hai bằng  $\frac{3}{5}$ . Nếu lấy số thứ nhất chia cho 9 và số thứ hai chia cho 6 thì thương của phép chia số thứ nhất cho 9 bé hơn thương của phép chia số thứ hai cho 6 là 3 đơn vị. Tìm hai số đó, biết rằng phép chia đều là phép chia hết

#### Lời giải

Gọi số thứ nhất là  $x$  ( $x \in N^*$ )

Số thứ hai là  $\frac{3}{5}x$

Thương của số thứ nhất chia cho 9 là  $\frac{3x}{5}:9 = \frac{x}{15}$

Thương của số thứ 2 chia cho 6 là  $\frac{x}{6}$

Do phép chia là phép chia hết  $\Rightarrow x:15$  và  $x$  nguyên dương

Theo đầu bài ta có phương trình:  $\frac{x}{6} - \frac{x}{15} = 3 \Leftrightarrow x = 30(tm)$

### **Bài 7:**

Tìm một số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng: Nếu thêm chữ số 1 vào bên phải của số ấy thì được 1 số gấp 3 lần số được tạo nên khi ta thêm chữ số 1 vào bên trái số đã cho

### **Lời giải**

Gọi số tự nhiên cần tìm là:  $\overline{abcde} = x (x \in N, 10000 < x \leq 99999)$

Ta có:  $\overline{abcde1} = 10x + 1; \overline{1abcde} = x + 100000$

Theo bài ra ta có:  $10x + 1 = 3(x + 100000) \Leftrightarrow x = 42857$

Vậy số cần tìm là 42857

### **Bài 8:**

Tổng các chữ số hàng đơn vị và hàng trăm của một số có ba chữ số bằng 16. Nếu viết các số ấy theo thứ tự ngược lại thì được số nhỏ hơn số đã cho 198 đơn vị. Biết rằng số đã cho chia hết cho 9. Tìm số đó

### **Lời giải**

Gọi số phải tìm là:  $\overline{xyz} (0 < x \leq 9; 0 \leq y, z \leq 9)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 16(1) \\ 100x + 10y + z = (100z + 10y + x) = 198 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 16 \\ x - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ z = 7 \end{cases}$$

Do số cần tìm chia hết cho 9 nên tổng các chữ số của nó chia hết cho 9  $\Rightarrow y = 2 \Rightarrow 972$

### **Bài 9: Tuyển sinh vào 10 Bắc Giang, 30/06/2013**

Tìm hai số tự nhiên hơn kém nhau 12 đơn vị biết tích của chúng bằng 20 lần số lớn cộng với 6 lần số bé.

### **Lời giải**

Gọi số bé là  $x (x \in N)$

Khi đó số lớn là  $x+12$

Vì tích của chúng bằng 20 lần số lớn cộng với 6 lần số bé nên ta có phương trình :

$$x.(x+12) = 20(x+12) + 6x \Leftrightarrow x = 24$$

Vậy số bé là 24; số lớn là 36.

### **Bài 10: Tuyển sinh vào 10 Nghệ An, 2018 - 2019**

Nhân ngày sách Việt Nam, 120 học sinh khối 8 và 100 học sinh khối 9 cùng tham gia phong trào xây dựng “Tủ sách nhân ái”. Sau một thời gian phát động, tổng số sách cả hai khối đã quyên góp được là 540 quyển. Biết rằng mỗi học sinh khối 9 quyên góp nhiều hơn mỗi học sinh khối 8 1 quyển. Hỏi mỗi khối đã quyên góp được bao nhiêu quyển sách (Mỗi học sinh cùng một khối quyên góp số lượng sách như nhau).

#### **Lời giải**

Gọi  $x$  (quyển sách) là số sách khối 8 quyên góp ( $x \in N^*; x < 540$ )

$\Rightarrow$  Số sách khối 9 là  $540 - x$  (quyển sách)

Số sách 1 học sinh khối 9 quyên góp là  $\frac{540-x}{100}$  (quyển sách)

Số sách 1 học sinh khối 8 quyên góp là  $\frac{x}{120}$  (quyển sách)

Theo đề bài ta có phương trình  $\frac{540-x}{100} - \frac{x}{120} = 1 \Leftrightarrow \frac{6(540-x) - 5x}{600} = 1 \Leftrightarrow x = 240$  (tm)

Vậy khối 8 góp 240 (quyển sách), khối 9 góp 300 (quyển sách).



## Dạng 2 : Toán chuyển động

### A. Các bài toán liên quan đến lực cản (Lực cản của gió, của nước,...)

Cần chú ý tới vận tốc xuôi và vận tốc ngược với lực cản như sau

$$\left. \begin{array}{l} V_{xuoi} = V_{thuc} + V_{nuoc} \\ V_{nguoc} = V_{thuc} - V_{nuoc} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{xuoi} - V_{nguoc} = 2V_{nuoc}$$

#### Bài 1:

Một ca nô xuôi dòng 39km rồi ngược dòng 28km hết thời gian bằng nó đi 70km khi nước yên lặng. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 3km/h

#### Lời giải

	$S$	$v$	$t$
Xuôi dòng	39	$x+3$	$\frac{39}{x+3}$
Ngược dòng	28	$x-3$	$\frac{28}{x-3}$
Yên lặng	70	$x$	$\frac{70}{x}$

Ta có phương trình  $\Rightarrow \frac{39}{x+3} + \frac{28}{x-3} = \frac{70}{x} \Rightarrow x = 10(km/h)$

**Bài 2:** Lúc 7<sup>h</sup> sáng một chiếc ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức quay trở về và đến A lúc 11<sup>h</sup>30'. Tính vận tốc của ca nô khi xuôi dòng biết vận tốc của dòng nước là 6 km/h

	$S$	$v$			$t$
		$V_{thuc}$	$V_{nuoc}$	$V_{cd}$	
Xuôi dòng	36	$x$	6	$x+6$	$\frac{36}{x+6}$
Ngược dòng	36	$x$	6	$x-6$	$\frac{36}{x-6}$

Gọi vận tốc thực của ca nô là  $x$  ( $x > 0$ )

Vận tốc xuôi dòng là  $x+6 \Rightarrow t_{xuoi} = \frac{36}{x+6}$

Vận tốc ngược dòng là:  $x - 6 \Rightarrow t_{xuôi} = \frac{36}{x - 6}$

Tổng thời gian cả đi lẫn về là:  $\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{36}{x + 6} + \frac{36}{x - 6} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = 18(km / h)$

### Bài 3:

Một canô đi xuôi khúc sông từ  $A$  đến  $B$  hết 1 giờ 10 phút và đi ngược dòng sông từ  $B$  về  $A$  hết 1 giờ 30 phút. Biết vận tốc của dòng nước là 2 km/h. Tính vận tốc riêng của canô

#### Lời giải

**Cách 1:** Gọi vận tốc riêng của ca nô là  $x$  ( $x > 0$ , km/h)

Vận tốc canô xuôi dòng là  $x + 2(km / h)$

Vận tốc canô ngược dòng là  $x - 2(km / h)$

Theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{7}{6}(x + 2) = \frac{9}{6}(x - 2) \Leftrightarrow x = 16(tm)$

**Cách 2:** Gọi quãng đường  $AB$  là  $x$  ( $x > 0$ , km/h)

Vì vận tốc canô xuôi dòng hơn vận tốc ngược dòng là 4(km/h) nên ta có:

$$x : \frac{7}{6} - x : \frac{9}{6} = 4 \Leftrightarrow x = 21(km) \Rightarrow v = 16(km / h)$$

### Bài 4: Tuyển sinh vào 10 Hà Nội, năm học 2015 - 2016

Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km. Sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

#### Lời giải

Gọi vận tốc của tàu khi nước yên lặng là  $x$  (km/h,  $x > 2$ )

Vận tốc xuôi dòng là  $x + 2(km / h) \Rightarrow$  thời gian xuôi dòng là  $\frac{48}{x + 2}(h)$

Vận tốc ngược dòng là  $x - 2(km / h) \Rightarrow$  thời gian ngược dòng là  $\frac{60}{x - 2}(h)$

Theo đầu bài ta có phương trình:  $\frac{48}{x + 2} + 1 = \frac{60}{x - 2} \Leftrightarrow x = 22(km / h)$

### **Bài 5:** Tuyển sinh vào 10 KonTum, năm học 2014 - 2015

Một bè gỗ được thả trôi trên sông từ cầu Đắc Lắc. Sau khi thả bè gỗ trôi được 3 giờ 20 phút, một người chèo thuyền độc mộc cũng xuất phát từ cầu Đắc Lắc đuổi theo và đi được 10 km thì gặp bè gỗ. Tính vận tốc của bè gỗ, biết vận tốc của người chèo thuyền độc mộc lớn hơn vận tốc của bè gỗ là 4 km/h.

#### **Lời giải**

Gọi  $x$  là vận tốc của bè gỗ ( $x > 0$ )

Vận tốc của người chèo thuyền độc mộc là:  $x + 4$  (km/h)

Thời gian người chèo thuyền độc mộc là:  $\frac{10}{x+4}$  (h)

Thời gian bè gỗ trôi được là:  $\frac{10}{x}$  (h)

Theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{10}{x} - \frac{10}{x+4} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy vận tốc bè gỗ là 2 (km/h)

### **Bài 6:** Tuyển sinh vào 10 Bình Định, năm học 2015

Trên một vùng biển được xem như bằng phẳng và không có các chướng ngại vật. Vào lúc 6 giờ có một tàu cá đi thẳng qua tọa độ  $X$  theo hướng từ Nam đến Bắc với vận tốc không đổi. Đến 7h một tàu du lịch cũng đi thẳng qua tọa độ  $X$  nhưng theo hướng từ Đông sang Tây với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá 12 km/h. Đến 8h khoảng cách giữa hai tàu là 60 km. Tính vận tốc của mỗi tàu?

#### **Lời giải**

Gọi vận tốc tàu cá là  $x$  (km/h,  $x > 0$ )

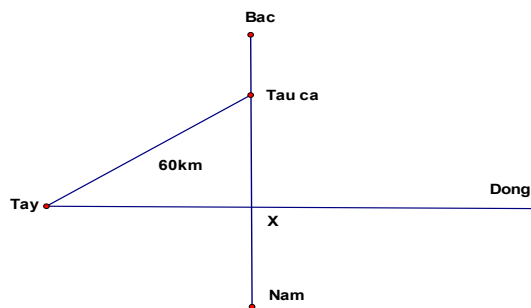
Quãng đường đi của tàu cá là  $S = 2x$  (km)

Vận tốc của tàu Du lịch là  $x + 12$  (km/h)

Quãng đường tàu du lịch đi được là  $x + 12$  (km)

Ta có phương trình  $(2x)^2 + (x + 12)^2 = 60^2 \Leftrightarrow x = 24$  (km/h)

Vậy vận tốc của tàu cá là 24 (km/h)



Vận tốc của tàu du lịch là  $36(km/h)$

## B) Chuyển động không có lực cản (chuyển động đường bộ)

### B1. Có một đối tượng tham gia chuyển động

$$S = v.t \Rightarrow v = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{v}$$

#### Bài 1:

Một người đi xe máy từ  $A$  đến  $B$  với vận tốc  $25km/h$ . Lúc về người đó đi với vận tốc  $30km/h$ , nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính  $AB$ ?

#### Lời giải

	$S$	$v$	$t$
$A$ đến $B$	$x$	25	$\frac{x}{25}$
$B$ về $A$	$x$	30	$\frac{x}{30}$

$$\Rightarrow \frac{x}{30} + \frac{1}{3} = \frac{x}{25} \Leftrightarrow \frac{5x}{150} + \frac{50}{150} = \frac{6x}{150} \Leftrightarrow x = 50$$

Vậy quãng đường  $AB$  dài 50 km.

#### Bài 2:

Một người đi xe đạp từ  $A$  đến  $B$  với vận tốc  $15 km/h$ . Sau đó quay về từ  $B$  về  $A$  với vận tốc  $12 km/h$ . Cả đi lẫn về hết 4 giờ 30 phút. Tính quãng đường  $AB$

#### Lời giải

	$S$	$v$	$t$
$A$ đến $B$	$x$	15	$\frac{x}{15}$
$B$ về $A$	$x$	12	$\frac{x}{12}$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} + \frac{x}{12} = \frac{9}{2} \Rightarrow x = 30 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy quãng đường  $AB$  dài 30 km

#### Bài 3:

Một người đi xe máy từ  $A$  đến  $B$  với vận tốc  $30km/h$ . Khi đến  $B$  người đó nghỉ 20 phút rồi quay về  $A$  với vận tốc  $25km/h$ . Tính  $AB$ ? Biết tổng thời gian cả đi lẫn về là 5 giờ 50 phút

#### Lời giải

	$S$	$v$	$t$
--	-----	-----	-----

Đi	$x$	30	$\frac{x}{30}$
Nghỉ			$\frac{1}{3}$
Về	$x$	25	$\frac{x}{25}$

$$\Rightarrow \frac{x}{30} + \frac{1}{3} + \frac{x}{25} = 5\frac{5}{6} \Leftrightarrow x = 75 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy quãng đường  $AB$  dài 75 km

#### Bài 4:

Một xe ô tô dự định đi từ  $A$  đến  $B$  với vận tốc 48km/h, sau khi đi được 1h thì xe bị hỏng phải dừng lại 15 phút để sửa. Do đó để đến  $B$  đúng dự định ô tô phải tăng vận tốc thêm 6km/h. Tính quãng đường  $AB$

#### Lời giải

	$S$	$v$	$t$
Dự định	$x$	48	$\frac{x}{48}$
Thực tế	$x$	54	$\frac{x}{54}$

$$\Rightarrow \frac{x}{48} = \frac{x}{54} + 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow x = 540(km)$$

Vậy quãng đường  $AB$  dài 540 km

#### Bài 5:

Một ô tô dự định đi từ Hà Nội lên Bắc Ninh với vận tốc trung bình 50km/h. Sau khi đi được  $\frac{3}{4}$  quãng đường đầu, do trời mưa người lái xe giảm vận tốc 16km trên suốt quãng đường còn lại, vì thế ô tô đã đến B muộn hơn dự định 21 phút. Tính quãng đường Hà Nội – Bắc Ninh

### Lời giải

	$S$		$v$	$t$
Dự định	$x$		50	$\frac{x}{50}$
$\frac{3}{4}$ đường đầu	$\frac{3x}{4}$		50	$\frac{3x}{20}$
$\frac{1}{4}$ đường sau	$\frac{x}{4}$		40	$\frac{x}{160}$

$$\Rightarrow \frac{3x}{200} + \frac{x}{160} = \frac{7}{20} + \frac{x}{50} \Leftrightarrow x = 280(km)$$

Vậy quãng đường dài 280 km.

### Bài 6:

Lúc 7<sup>h</sup> một người đi xe máy từ  $A$  đến  $B$  dài 45km, tới  $B$  người đó làm việc trong 1<sup>h</sup>30' rồi quay về tới  $A$  lúc 11h. Đoạn đường  $AB$  gồm một đoạn đường bằng phẳng và 1 đoạn đường lên dốc. Vận tốc lên dốc là 24km/h, xuống dốc là 45km/h và trên đường bằng là 40km/h. Hỏi đoạn đường bằng dài bao nhiêu km?

### Lời giải

Gọi đoạn đường bằng là  $x(km, 0 < x < 45)$

Đoạn đường lên dốc là  $45 - x(km)$

Thời gian lên dốc là:  $\frac{45-x}{24}(h)$

Thời gian xuống dốc là:  $\frac{45-x}{45}(h)$

Tổng thời gian cả đi lẫn về (không tính thời gian làm việc ở  $B$ ) là:  $11 - 7 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}(h)$

Theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{2x}{40} + \frac{45-x}{24} + \frac{45-x}{45} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 27(km)$

### **Bài 7: Tuyển sinh vào 10 Bắc Ninh, năm học 2011**

Một người đi xe đạp từ  $A$  đến  $B$  cách nhau 24km. Khi đi từ  $B$  trở về  $A$  người đó tăng vận tốc thêm 4km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ  $A$  đến  $B$ ?

#### **Lời giải**

Gọi vận tốc của xe đạp đi từ  $A$  đến  $B$  là  $x(km/h)$  ( $x > 0$ )

Thời gian để xe đạp đi từ  $A$  đến  $B$  là  $\frac{24}{x}(h)$

Vận tốc của xe đạp đi từ  $B$  đến  $A$  là  $x+4(km/h)$

Thời gian để xe đạp đi từ  $B$  đến  $A$  là  $\frac{24}{x+4}(h)$

Theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12(t/m) \\ x = -16(loại) \end{cases}$

Vậy vận tốc của xe đạp đi từ  $A$  đến  $B$  là  $12(km/h)$

### **Bài 8: Tuyển sinh vào 10 Bắc Ninh, năm học 2013**

Một người đi xe đạp từ  $A$  đến  $B$  cách nhau 36 km. Khi đi từ  $B$  trở về  $A$ , người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ  $A$  đến  $B$

#### **Lời giải**

Gọi vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ  $A$  đến  $B$  là  $x(km/h)$  ( $x > 0$ )

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ  $A$  đến  $B$  là  $\frac{36}{x}(h)$

Vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ  $B$  đến  $A$  là  $x+3(km/h)$

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ  $B$  đến  $A$  là  $\frac{36}{x+3}(h)$

Ta có phương trình:  $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = \frac{36}{60} \Leftrightarrow x = 12$

Vậy vận tốc của người đi xe đạp là  $12(km/h)$

**Bài 9:** Tuyển sinh vào 10 Bắc Ninh, năm học 2016

Quãng đường từ Bắc Ninh đi Hà Nội dài 30km. Một ô tô từ Bắc Ninh đi Hà Nội, rồi từ Hà Nội về Bắc Ninh. Biết vận tốc lúc đi lớn hơn vận tốc lúc về là 10 km/h. Do đó, thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 9 phút. Tính vận tốc của ô tô khi đi từ Bắc Ninh ra Hà Nội.

**Lời giải**

Gọi vận tốc của ô tô lúc đi là  $x(km/h)$  ( $x > 0$ )

Khi đó vận tốc của xe lúc về là  $x - 10(km/h)$

Thời gian lúc đi là  $\frac{30}{x}(h)$

Thời gian lúc về là  $\frac{30}{x-10}(h)$

Theo đầu bài ta có phương trình:  $\frac{30}{x-10} - \frac{30}{x} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow x^2 - 10x - 2000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -40(loại) \\ x = 50(t/m) \end{cases}$

Vậy vận tốc của ô tô lúc đi là  $50(km/h)$ .

**Bài 10:** Tuyển sinh vào 10 Hà Nội, năm học 2008

Trên quãng đường dài 80km, một người đi từ A đến B với vận tốc xác định. Khi từ B trở về A người đó đi theo đường khác dài hơn 20km nhưng vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi 9 km/h. Vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 1 giờ. Tính vận tốc lúc đi.

**Lời giải**

Gọi vận tốc lúc đi là  $x(km/h)$  ( $x > 0$ )

Vận tốc lúc về là  $x + 9(km/h)$

Thời gian đi là  $\frac{80}{x}(h)$

Thời gian lúc về là  $\frac{100}{x+9}(h)$

Theo đầu bài ta có phương trình:  $\frac{80}{x} = \frac{100}{x+9} + 1 \Leftrightarrow x^2 + 29x + 720 = 9 \Leftrightarrow x = 16$

Vậy vận tốc lúc đi là  $16(km/h)$



**Bài 11: Tuyển sinh vào 10 Hà Nội, năm học 2013 - 2014**

Quãng đường từ  $A$  đến  $B$  dài 90km. Một người đi xe máy từ  $A$  đến  $B$ . Khi đến  $B$ , người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về  $A$  với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ  $A$  đến lúc trở về đến  $A$  là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ  $A$  đến  $B$ .

**Lời giải**

Gọi  $x$  là vận tốc của xe máy đi từ  $A$  đến  $B$  ( $x > 0$ )(km/h)

Vận tốc của xe máy đi từ  $B$  đến  $A$  là  $x+9$ (km/h)

Thời gian lúc đi từ  $A$  đến  $B$  là  $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian lúc về từ  $B$  đến  $A$  là  $\frac{90}{x+9}$ (h)

Theo đầu bài ta có phương trình:  $\frac{90}{x} + \frac{90}{x+9} + \frac{1}{2} = 5 \Leftrightarrow x^2 = 31x - 180 = 0 \Leftrightarrow x = 36$

Vậy vận tốc của xe máy đi từ  $A$  đến  $B$  là 36(km/h)

**Bài 12: Tuyển sinh vào 10 Ninh Bình, năm học 2017 – 2018**

Một ô tô dự định đi từ bến xe  $A$  đến bến xe  $B$  cách nhau 90 km với vận tốc không đổi. Tuy nhiên, ô tô khởi hành muộn 12 phút so với dự định. Để đến bến xe  $B$  đúng giờ ô tô đã tăng vận tốc thêm 5 km/h so với vận tốc dự định. Tìm vận tốc dự định của ô tô.

**Lời giải**

Đổi: 12 phút =  $\frac{1}{5}$  giờ.

Gọi vận tốc dự định của ô tô là  $x$  (đơn vị: km/h, điều kiện:  $x > 0$ ).

Vận tốc thực tế của ô tô là  $x+5$  (km/h).

Thời gian ô tô dự định đi từ  $A$  đến  $B$  là:  $\frac{90}{x}$  (giờ).

Thời gian thực tế để ô tô đi từ  $A$  đến  $B$  là:  $\frac{90}{x+5}$  (giờ).

Theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{90}{x} - \frac{90}{x+5} = \frac{1}{5}$ .

$$\Rightarrow 90.5(x+5) - 90.5x = x(x+5) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2250 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -50 \\ x = 45 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện  $x > 0$  suy ra vận tốc dự định của ô tô là 45 km/h.

## B2. Hai đối tượng tham gia chuyển động

### Bài 1:

Hai người đi từ  $A$  đến  $B$ , vận tốc của người thứ nhất là 40km/h, vận tốc người thứ hai là 25km/h. Để đi hết quãng đường  $AB$  người thứ nhất cần ít hơn người thứ hai là 1<sup>h</sup>30'. Tính  $AB$

#### Lời giải

	$S$	$v$	$t$
Người 1	$x$	40	$\frac{x}{40}$
Người 2	$x$	25	$\frac{x}{25}$

$$\Rightarrow \frac{x}{40} + \frac{3}{2} = \frac{x}{25} \Leftrightarrow x = 100(km)$$

Vậy quãng đường  $AB$  dài 100 km

### Bài 2:

Một người đi xe đạp từ  $A$  đến  $B$  cách nhau 50km. Sau đó 1<sup>h</sup>30' một người đi xe máy cũng từ  $A$  đến  $B$  và đến sớm hơn 1<sup>h</sup>. Tính vận tốc của mỗi xe, biết vận tốc của xe máy gấp 2,5 lần vận tốc của xe đạp

#### Lời giải

	$S$	$v$	$t$
Xe đạp	50	$x$	$\frac{50}{x}$
Xe máy	50	2,5x	$\frac{50}{2,5x}$

$$\Rightarrow \frac{50}{x} = \frac{3}{2} + \frac{50}{2,5x} + 1 \Leftrightarrow x = 30(km/h)$$

Vậy vận tốc của xe đạp là 30km/h

Vận tốc của xe máy là 75km/h

### Bài 3:

Một ô tô đi từ  $A$  đến  $B$  cùng lúc đó ô tô thứ hai đi từ  $B$  đến  $A$  với vận tốc  $= \frac{2}{3}$  vận tốc ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ chúng gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết  $AB = 400km$

#### Lời giải

	$S$	$v$	$t$
Xe 1	$5x$	$x$	5
Xe 2	$\frac{10x}{3}$	$\frac{2}{3}x$	5

$$\Rightarrow 5x + \frac{2}{3}x \cdot 5 = 400 \Leftrightarrow x = 80$$

Vậy vận tốc của xe thứ nhất là  $80 \text{ km/h}$

#### Bài 4:

Hai xe ô tô khởi hành từ hai địa điểm  $A$  và  $B$  ngược chiều nhau. Xe đi từ  $A$  có vận tốc  $40 \text{ km/h}$ , xe đi từ  $B$  có vận tốc  $30 \text{ km/h}$ . Nếu xe đi từ  $B$  khởi hành sớm hơn xe đi từ  $A$  là 6 giờ thì hai xe gặp nhau tại 1 địa điểm cách đều  $A$  và  $B$ . Tính độ dài quãng đường  $AB$

#### Lời giải

	$S$	$v$	$t$
A đến B	$\frac{x}{2}$	40	$\frac{x}{80}$
B về A	$\frac{x}{2}$	30	$\frac{x}{120}$

Gọi độ dài quãng đường  $AB$  là  $x(\text{km})(x > 0)$

$$\Rightarrow \frac{x}{80} + 6 = \frac{x}{60} \Leftrightarrow x = 1440(\text{km})$$

Vậy quãng đường  $AB$  dài  $1440 \text{ km}$

#### Bài 5: Tuyển sinh vào 10 Hà Nội, năm học 2017

Một xe ô tô và một xe máy Cùng khởi hành từ  $A$  để đi đến  $B$  với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường  $AB$  dài  $120 \text{ km}$ . Do vận tốc của xe ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là  $10 \text{ km/h}$  nên xe ô tô đến  $B$  sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe ?

#### Lời giải

Gọi vận tốc của ô tô là  $x(\text{km/h})(x > 10)$

Thời gian ô tô đi trên  $AB$  là  $\frac{120}{x}(\text{h})$

Khi đó vận tốc của xe máy là  $x - 10(\text{km/h})$

Thời gian xe máy đi trên  $AB$  là:  $\frac{120}{x-10}(\text{h})$

Do ô tô đến sớm hơn xe máy 36 phút  $= \frac{3}{5}(\text{h})$  nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x-10} - \frac{120}{x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ x = -40 \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ô tô là  $50 \text{ (km/h)}$ ; Vận tốc của xe máy là  $40 \text{ (km/h)}$

### Bài 6: Tuyển sinh vào 10 Hải Dương, năm học 2015 - 2016

Khoảng cách giữa hai tỉnh  $A$  và  $B$  là 60km. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc đi từ  $A$  đến  $B$  với vận tốc bằng nhau. Sau khi đi được 1 giờ thì xe của người thứ nhất bị hỏng nên phải dừng lại sửa xe 20 phút, còn người thứ hai tiếp tục đi với vận tốc ban đầu. Sau khi sửa xe xong, người thứ nhất đi với vận tốc nhanh hơn trước 4km/h nên đã đến  $B$  cùng lúc với người thứ hai. Tính vận tốc hai người đi lúc đầu.

#### Lời giải

Gọi vận tốc hai người đi lúc đầu là  $x (km/h)$  ( $x > 10$ )

Thời gian đi từ  $A$  đến  $B$  của người thứ hai là:  $\frac{60}{x} (h)$

Quãng đường người thứ nhất đi được trong 1h đầu là  $x (km)$

Quãng đường còn lại là  $60 - x (km)$

$\Rightarrow$  Thời gian người thứ nhất đi quãng đường còn lại là:  $\frac{60 - x}{x + 4} (h)$

Theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{60}{x} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{60 - x}{x + 4} \Leftrightarrow x^2 + 16x - 720 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -36 \end{cases}$

Vậy vận tốc của hai người là  $20 (km/h)$

### Dạng 3: Toán có nội dung hình học

### Ghi nhớ các công thức:

- Chu vi của tam giác
- Chu vi của hình chữ nhật
- Diện tích tam giác, hình chữ nhật, tam giác vuông, hình vuông, hình thoi.

#### Bài 1:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích  $30m^2$ . Biết chiều dài hơn chiều rộng  $1m$ , tính chu vi của hình chữ nhật

#### Lời giải

Gọi chiều rộng là  $x(m)$  ( $x > 0$ )

Chiều dài là  $x+1(m)$

Vì diện tích hình chữ nhật là 30, nên ta có:  $x(x+1) = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6(\text{loại}) \\ x = 5 \end{cases}$

Vậy chu vi hình chữ nhật là  $22m$

#### Bài 2: Tuyển sinh vào 10 Bắc Ninh, năm học 2012

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi  $34m$ . Nếu tăng chiều dài  $3m$  và giảm chiều rộng  $2m$  thì diện tích tăng  $45m^2$ . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật

#### Lời giải

Gọi chiều dài là  $a(m)$  ( $0 < a < 34$ )

Chiều rộng hình chữ nhật là  $17-a(m)$

Diện tích ban đầu là  $a(17-a)(m^2)$

Tăng chiều dài  $3m$ , ta được chiều dài mới  $a+3$

Giảm chiều rộng  $2m$ , ta được chiều rộng mới  $15-a$

Diện tích mới của hình chữ nhật là:  $(a+3)(15-a)$

$\Rightarrow (a+3)(15-a) = a(17-a) + 40 \Leftrightarrow a = 12(m)$

#### Bài 3: Tuyển sinh vào 10 năm học 2015

Một hình chữ nhật có chu vi bằng  $28m$ . Đường chéo của hình chữ nhật dài  $10m$ . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật

**Lời giải**

Gọi chiều dài là  $x (0 < x < 28)$

Chiều rộng hình chữ nhật là  $14 - x$

Theo bài ra ta có:  $x^2 + (14 - x)^2 = 10^2 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy chiều dài là  $8m$ , chiều rộng là  $6m$

**Bài 4: Tuyển sinh vào 10 Hải Dương, năm học 2014**

Một sân trường hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng  $16m$ . Hai lần chiều dài kém 5 lần chiều rộng  $28m$ . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật

**Lời giải**

Gọi chiều rộng là  $x (x > 0)$

Chiều dài là  $x + 16$

Ta có phương trình:  $2(x + 16) + 28 = 5x \Leftrightarrow 3x = 60 \Leftrightarrow x = 20$

Vậy chiều dài  $36m$ , chiều rộng  $20m$

**Bài 5:**

Một nông dân có một mảnh ruộng hình vuông. Ông ta khai hoang mở rộng thêm thành một mảnh ruộng hình chữ nhật, một bề thêm  $8m$ , một bề thêm  $12m$ . Diện tích mảnh ruộng hình chữ nhật hơn diện tích mảnh ruộng hình vuông  $3136m^2$ . Hỏi độ dài cạnh của hình vuông ban đầu bằng bao nhiêu ?

**Lời giải**

Gọi độ dài cạnh hình vuông ban đầu là  $x (m) (x > 0)$

Diện tích hình vuông là  $x^2$

Diện tích hình chữ nhật là:  $(x + 8)(x + 12) = x^2 + 3136 \Leftrightarrow x^2 + 20x + 96 = x^2 + 3136 \Leftrightarrow x = 152(m)$

Vậy cạnh hình vuông ban đầu là  $152m$

**Bài 6: Tuyển sinh vào 20 Hà Nội, năm học 2010**

Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng là 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

**Lời giải**

Gọi chiều rộng là  $x(m)$  ( $0 < x < 13$ )

Ta có phương trình  $x^2 + (x + 7)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x = 5$

Vậy chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là 12m và 5m

**Bài 7: Tuyển sinh vào 10 Hà Nội, năm học 2016**

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m<sup>2</sup>. Nếu tăng chiều dài thêm 10m và giảm chiều rộng 6m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ?

**Lời giải**

**Cách 1:** Giải bằng cách lập phương trình

Gọi chiều dài hình chữ nhật là  $x(m)$  ( $x > 0$ )

Suy ra chiều rộng của hình chữ nhật là:  $\frac{720}{x}(m)$

Theo bài ra ta có phương trình:  $(x + 10)(\frac{720}{x} - 6) = 720 \Leftrightarrow 6x^2 + 60x - 7200 = 0 \Leftrightarrow x = 30$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 30 (m)

Chiều rộng hình chữ nhật là 24 (m)

**Bài 8: Tuyển sinh vào 10 Bắc Giang, năm học 2015**

Nhà bạn Dũng được ông bà Nội cho một mảnh đất hình chữ nhật. Khi bạn Nam đến nhà bạn Dũng chơi, Dũng đó Nam tìm ra kích thước của mảnh đất khi cho biết: mảnh đất đó có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng và nếu giảm chiều rộng đi 2m, tăng chiều dài lên gấp đôi thì diện tích mảnh đất đó sẽ tăng thêm 20m<sup>2</sup>. Các em hãy giúp Nam tìm ra chiều dài và chiều rộng của mảnh đất nhà bạn Dũng.

**Lời giải**

**Cách 1:** Giải bằng cách lập phương trình

Gọi chiều rộng của mảnh đất là  $x(m)$  ( $x > 2$ )

Vậy chiều dài là  $4x(m)$

Diện tích mảnh đất là  $4x^2(m^2)$

Diện tích mảnh đất sau khi giảm chiều rộng 2m và tăng chiều dài lên gấp đôi là  $8x(x-2)(m^2)$

Theo bài ra ta có phương trình:  $8x(x-2) - 4x^2 = 20 \Leftrightarrow x = 5$

Vậy chiều rộng là  $5m$ ; chiều dài là  $20m$

#### **Dạng 4: Toán về năng suất**

Ta sử dụng các kiến thức sau



+)  $A = N.t$

$A$ : Khối lượng công việc

$N$ : Năng suất

$t$ : Thời gian

+) Tỷ lệ phần trăm  $a\% = \frac{a}{100}$

### Bài 1:

Một tổ sản xuất theo kế hoạch mỗi ngày làm được 50sp, khi thực hiện mỗi ngày làm được 57sp nên hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày và vượt mức 13sp. Hỏi theo kế hoạch tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm

### Lời giải

	N	A	t
Dự định	50	<b>x</b>	$\frac{x}{50}$
Thực tế	57	$x + 13$	$\frac{x+13}{57}$

Gọi số sản phẩm dự định là  $x (x > 0)$

Số sản phẩm thực tế là  $x + 13$

Thời gian dự định là  $\frac{x}{50} (h)$

Thời gian thực tế là  $\frac{x+13}{57}$

Ta có phương trình:  $\frac{x}{50} - \frac{x+13}{57} = 1 \Leftrightarrow x = 500$

### Dạng 5: Bài toán liên quan đến công việc làm chung, làm riêng

**Cách giải:** Chú ý có ba đại lượng tham gia

- Toàn bộ công việc

- Phần việc làm trong 1 ngày, 1 giờ,...

- Thời gian làm xong công việc

+) Nếu làm xong công việc trong  $x$  ngày thì 1 ngày làm được  $\frac{1}{x}$  công việc

### Bài 1:

Hai vòi nước cùng chảy vào 1 cái bể thì sau 4 giờ 48 phút đầy bể. Mỗi giờ lượng nước của vòi 1 chảy được = 1,5 lượng nước chảy được của vòi 2. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu đầy bể

### Lời giải

	Thời gian đầy bể	Thời gian 1 giờ chảy
Vòi 1		$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$
Vòi 2	$x$	$\frac{1}{x}$
2 vòi	$\frac{24}{5}$	

Gọi  $x(h)$  là thời gian vòi 2 một mình chảy đầy bể ( $x > 0$ )

1 (h) vòi 2 chảy được  $\frac{1}{x}$  (bể)

1h vòi 1 chảy được  $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2x}$  (bể)

1h cả hai vòi chảy được:  $\frac{5}{24}$  (bể)

Ta có phương trình  $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow x = 12$

Vậy vòi 2 chảy 1 mình trong 12(h)

1 giờ vòi 1 chảy được  $\frac{5}{24} - \frac{1}{12} = \frac{1}{8}$

Vòi 1 chảy trong 8(h)

### Bài 2:

Hai vòi nước cùng chảy vào 1 cái bể sau 12 giờ thì đầy bể. Nếu vòi 1 chảy 1 mình trong 3 giờ rồi khóa lại mở vòi 2 chảy tiếp trong 18 giờ thì cả hai chảy đầy bể. Hỏi mỗi vòi chảy 1 mình trong bao lâu thì đầy bể?

### Lời giải

Gọi thời gian vòi 1 chảy 1 mình đầy bể là  $x(x > 12)(h)$

Trong 1 giờ vòi 1 chảy 1 mình được  $\frac{1}{x}$  (bể), vòi 2 chảy 1 mình được  $\frac{1}{12} - \frac{1}{x}$  (bể)

Theo bài ra ta có phương trình:  $3 \cdot \frac{1}{x} + 18(\frac{1}{12} - \frac{1}{x}) = 1 \Leftrightarrow x = 30$

Vậy vòi 1 chảy 1 mình trong 30 giờ thì đầy bể

1 giờ vòi 2 chảy được  $\frac{1}{20}$  (bể)

Vậy vòi 2 chảy trong 20 giờ thì đầy bể

### Bài 3:

Hai lớp 8A và 8B cùng nhau trồng hoa trong vườn trường sau 24 giờ thì hoàn thành công việc. Nếu cả 2 lớp làm trong 10 giờ rồi lớp 8A nghỉ để lớp 8B làm tiếp một mình trong 35 giờ thì cả hai lớp hoàn thành được một nửa công việc. Tính thời gian mỗi lớp làm riêng để hoàn thành công việc

### Lời giải

Ta có phương trình:  $10 \cdot \frac{1}{24} + 35(\frac{1}{24} - \frac{1}{x}) = 1$

Lớp 8A làm trong 40 giờ, 8B làm trong 60 giờ

### Dạng 5: Bài toán liên quan đến tỉ số phần trăm

**Cách giải:** Chú ý đổi các số liệu phần trăm trong bài toán ra phân số rồi tính toán

### Bài 1:

Hai tổ công nhân sản xuất được 800 sản phẩm trong tháng đầu. Tháng thứ hai tổ 1 làm vượt mức 15%, tổ 2 vượt mức 20%. Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 sản phẩm. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

### Lời giải

Gọi số sản phẩm tháng đầu tổ 1 sản xuất được là  $x (x \in \mathbb{N})$

Số sản phẩm tháng đầu tổ 2 sản xuất được là  $800 - x$

Theo bài ra ta có:  $\frac{115}{100} + \frac{120}{100}(800 - x) = 945 \Leftrightarrow x = 300$

### Bài 2:

Năm 2016 dân số của Nam Định và Bắc Ninh là 4 triệu người. Năm 2017 dân số Nam Định tăng 1,2%, dân số Bắc Ninh tăng 1,1%. Tổng dân số hai tỉnh năm 2017 là 4045000 người. Tính số dân mỗi tỉnh năm nay

### Lời giải

Dân số Nam Định là 1 triệu,

Dân số của Bắc Ninh là 3 triệu dân

### Dạng 6: Toán liên quan đến tính tuổi

**Chú ý :** Sau mỗi năm tuổi mỗi người tăng lên 1 tuổi

### Bài 1:

Biết rằng cách đây 4 năm thì tuổi bố gấp 5 lần tuổi con. Hiện nay tuổi bố gấp 3 lần tuổi con. Tính tuổi 2 bố con hiện nay

#### Lời giải

Gọi tuổi con hiện nay là  $x$  (tuổi) ( $x \in \mathbb{N}^*$ )

Tuổi bố hiện nay là  $3x$

Theo bài ra ta có phương trình:  $3x - 4 = 5(x - 4) \Leftrightarrow x = 8$

Vậy tuổi con là 8 tuổi, bố là 24 tuổi

### Bài 2:

Hiệu số tuổi của hai anh em là 8. Tính tuổi của mỗi người hiện nay, biết rằng tuổi em cách đây 4 năm bằng nửa tuổi anh hiện nay

#### Lời giải

Ta có phương trình:  $2(x - 4) = x + 8 \Leftrightarrow x = 16$

Vậy em là 16 tuổi, anh là 24 tuổi

# LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG, PHÉP NHÂN

## TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

### A. Lý thuyết

#### 1. Định nghĩa bất đẳng thức

- Ta gọi hệ thức dạng  $a > b$  ( $a < b, a \geq b, a \leq b$ ) là một bất đẳng thức, trong đó:  $a$  và  $b$  làm lần lượt được gọi là vế trái và vế phải.

- Để chứng minh bất đẳng thức  $a > b$ , ta xét hiệu  $a - b$  và chứng minh rằng hiệu đó là số dương.

#### 2. Các tính chất

a.  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  (cộng hai vế bất đẳng thức với cùng một số)

b. Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số

+) Nếu  $a < b \Rightarrow a.c < b.c (c > 0)$

+) Nếu  $a > b \Rightarrow a.c < b.c (c < 0)$

#### 3. Tính chất bắc cầu

Nếu  $a > b$  và  $b > c$  thì suy ra được:  $a > c$

\*) **Chú ý:** Các tính chất trên còn đúng trong trường hợp các dấu  $\geq; \leq$

### B. Bài tập

#### Bài 1:

Cho  $a > b, c > d$ . Chứng minh rằng:  $a + c > b + d$

#### Lời giải

Ta có: 
$$\left. \begin{array}{l} a > b \Rightarrow a + c > b + c \\ c > d \Rightarrow b + c > b + d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$$

#### Bài 2:

Cho  $a > b > 0$  và  $c > d > 0$ . Chứng minh rằng  $ac > bd$

#### Lời giải

Ta có: 
$$\left. \begin{array}{l} a > b \Rightarrow a.c > b.c (c > 0) \\ c > d \Rightarrow b.c > b.d (b > 0) \end{array} \right\} \Rightarrow ac > bd \quad (\text{đpcm})$$

### Bài 3:

Cho  $a > 2$  và  $b > 2$ . Chứng minh rằng  $ab > a + b$

### Lời giải

Ta có: 
$$\left. \begin{array}{l} a > 2 \Rightarrow a.b > 2.b(b > 0) \\ b > 2 \Rightarrow a.b > 2.a(a > 0) \end{array} \right\} \Rightarrow ab + ab > 2b + 2a \Rightarrow 2ab > 2(a + b) \Leftrightarrow ab > a + b \text{ (đpcm)}$$

### Bài 4:

Cho  $0 < a < b$ . Hãy so sánh

a.  $a^2$  và  $ab$

b.  $b^2$  và  $ab$

c.  $a^2$  và  $b^2$

### Lời giải

a) Ta có:  $a < b \Rightarrow a.a < a.b \Rightarrow a^2 < ab(1)$

b) Ta có:  $a < b \Rightarrow a.b < b.b \Rightarrow ab < b^2(2)$

c) Từ (1)(2)  $\Rightarrow a^2 < b^2$

### Bài 5:

Chứng minh bất đẳng thức sau:  $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy$

### Lời giải

Xét hiệu:  $x^2 + y^2 - \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}(1)$

Xét hiệu:  $\frac{(x+y)^2}{2} - 2xy = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy(2)$

Từ (1)(2)  $\Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy$  (đpcm)

### Bài 6:

Cho số thực  $x \neq 0$ . Chứng minh rằng:

a.  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  nếu  $x > 0$

b.  $x + \frac{1}{x} \leq -2$  nếu  $x < 0$

### Lời giải

a) Ta có:  $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \forall x > 0$

b) Ta có  $x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{(x+1)^2}{x} \leq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \forall x < 0$

### Bài 7:

Cho  $x, y$  là hai số khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

a.  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$  nếu  $x, y$  cùng dấu

b.  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} < -2$  nếu  $x, y$  khác dấu

### Lời giải

a. Xét  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{(x-y)^2}{xy} > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$

b. Xét  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = \frac{(x+y)^2}{xy} < 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} < -2$

### Bài 8:

Cho các số dương  $x, y, z$ . Chứng minh:  $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 6$

### Lời giải

Xét:  $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} - 6 = \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) = \frac{(x-z)^2}{xz} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$

### Bài 9:

Chứng minh các bất đẳng thức sau:  $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

### Lời giải

Xét hiệu:  $3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0(1)$

Xét hiệu:  $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0(2)$

Từ (1)(2)  $\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

### Bài 10:

Chứng minh rằng:  $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)+1 \geq 0$

### Lời giải

Ta có:

$$(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)+1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-4)(a-2)(a-3)+1 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2-5a+4)(a^2-5a+6)+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-5a+4)^2 + 2(a^2-5a+4)+1 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2-5a+5)^2 \geq 0(dpcm)$$



**Bài 11:**

Cho  $x > y$ . Chứng minh rằng:  $x^5 - y^5 \geq xy^4 - x^4y$  (1)

**Lời giải**

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^5 - y^5 - xy^4 + x^4y \geq 0 \Leftrightarrow (x^5 + x^4y) - (y^5 + xy^4) \geq 0 \Leftrightarrow x^4(x+y) - y^4(x+y) \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)(x^4 - y^4) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2(x-y)(x^2 + y^2) \geq 0 \end{aligned}$$

**Bài 12:**

Cho  $a + b > 2$ . Chứng minh rằng:  $a^4 + b^4 > 2$

**Lời giải**

Ta có:  $a + b > 2 \Rightarrow (a + b)^2 > 4 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 4$

Mà:  $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) > 4 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 > 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2$   
 $\Rightarrow (a^2 + b^2)^2 > 4 \Rightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 > 4$

Lại có:  $(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \Rightarrow a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0 \Rightarrow (a^4 + b^4 + 2a^2b^2) + (a^4 + b^4 - 2a^2b^2) > 4 \Rightarrow 2a^4 + 2b^4 > 4$   
 $\Rightarrow a^4 + b^4 > 2$

**Bài 13:**

Với mọi  $x, y, z$  chứng minh rằng:

a.  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

b.  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

c.  $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

**Lời giải**

a.  $x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx = \frac{1}{2}[(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)]$

$= \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geq 0 \Leftrightarrow x = y = z$

b.  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y)^2 - 2z(x - y) + z^2 = (x - y + z)^2 \geq 0$

c.  $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \geq 0$

## BÀI TẬP VỀ NHÀ

### Bài 1:

Chứng minh bất đẳng thức  $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$ , với  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

### Lời giải

Ta có:  $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ; ...;  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow A < 1 - \frac{1}{n} < 1 (đpcm)$

### Bài 2:

Chứng minh bất đẳng thức sau với  $a, b, c$  là các số dương

$$(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 6abc$$

### Lời giải

Ta có:  $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow (a^2 + b^2)c \geq 2abc (c > 0)$

Tương tự:  $(b^2 + c^2)a \geq 2abc$ ;  $(c^2 + a^2)b \geq 2abc \Rightarrow đpcm.$

## BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### A. Lý thuyết

1. Định nghĩa: Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng  $ax + b < 0$  (hoặc  $ax + b > 0; ax + b \leq 0; ax + b \geq 0$ ) trong đó  $a, b$  là hai số đã cho và  $a \neq 0$ .

### 2. Bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình có cùng tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương

3. Quy tắc chuyển vế:  $A(x) + B(x) < C(x) \Leftrightarrow A(x) < C(x) - B(x)$

4. Quy tắc nhân (hoặc chia) với một số khác 0:

+) Nhân với cùng một số dương:  $A(x) + B(x) < C(x) \Leftrightarrow mA(x) + mB(x) < mC(x) (m > 0)$

+) Nhân với cùng một số âm:  $A(x) + B(x) < C(x) \Leftrightarrow mA(x) + mB(x) > mC(x) (m < 0)$

5. Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn:  $ax + b < 0 (a > 0)$

Ta có:  $ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$  (chia cho 1 số dương)

- Tương tự cho các trường hợp còn lại (chú ý tuân thủ quy tắc 3 và 4)

### B. Bài tập

#### Dạng 1: Nhận dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn

**Cách giải:** Dựa vào định nghĩa bất phương trình bậc nhất một ẩn

#### Bài 1:

Xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn hay không?

a)  $0x + 3 \geq 0$

b)  $x - 1 = 0$

c)  $\frac{2}{3}x \leq 0$

d)  $\frac{2x^2}{5} + 1 > 0$

#### Lời giải

Các bất phương trình là bất phương trình bậc nhất một ẩn là: b và c

-  $0x + 3 \geq 0$  không là bất phương trình bậc nhất một ẩn vì hệ số của ẩn  $x$  bằng 0

-  $\frac{2x^2}{5} + 1 > 0$  không là bất phương trình bậc nhất một ẩn vì  $x^2$  là ẩn bậc hai.

### Bài 2:

Trong các bất phương trình sau đâu là bất phương trình bậc nhất một ẩn? Vì sao?

a)  $|-2x+3|>0$

b)  $\frac{x}{3}-\frac{5}{4}=0$

c)  $\frac{1}{x}+4\leq 0$

d)  $\frac{-3x-8}{4}\geq 0$

### Lời giải

a) Không phải bất phương trình bậc nhất một ẩn vì  $x$  nằm trong dấu giá trị tuyệt đối

b) Không phải bất phương trình bậc nhất một ẩn vì  $\frac{x}{3}-\frac{5}{4}=0$  là một phương trình

c) Không vì ẩn  $x$  nằm dưới mẫu số.

d) Là phương trình bậc nhất một ẩn

### Bài 3:

Tìm  $m$  để các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $x$

a)  $(m+2)x-1\geq 0$

b)  $(m-2)x+6<0$

c)  $(m^2-4)x+2m-1\leq 0$

d)  $(m^2-4)x^2+x-1\leq 0$

### Lời giải

a)  $(m+2)x-1\geq 0$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $\Leftrightarrow m+2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -2$

b)  $(m-2)x+6<0$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $\Leftrightarrow m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$

c)  $(m^2-4)x+2m-1\leq 0$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $\Leftrightarrow m^2-4\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$

d)  $(m^2-4)x^2+x-1\leq 0$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $\Leftrightarrow m^2-4=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$

### Bài 4:

Tìm  $m$  để các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $x$

a)  $(m-1)x<6$

b)  $(m-1)x^2+x-1<0$

c)  $(m^2-1)x<6$

d)  $(m^2-1)x^2+x-1\geq 0$

### Lời giải

a)  $(m-1)x<6$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $\Leftrightarrow m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$

b)  $(m-1)x^2 + x - 1 < 0$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $\Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

c)  $(m^2-1)x < 6$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $\Leftrightarrow m^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

d)  $(m^2-1)x^2 + x - 1 \geq 0$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn  $\Leftrightarrow m^2-1=0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

### Bài 5:

Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m

a)  $(m^2+3)x+1 \leq 0$

b)  $-(m^2+m+4)x > -2m+3$

### Lời giải

a) Ta có:  $m^2+3 > 0, \forall m \in R \Rightarrow (m^2+3)x+1 \leq 0$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn

b) Ta có:  $m^2+m+4 = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall m \Rightarrow -(m^2+m+4)x > -2m+3$  là phương trình bậc nhất một ẩn.

### Bài 6:

Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m

a)  $(m^2+1)x-2 > 0$

b)  $(m^2+4m+4)x < 2$

### Lời giải

a) Ta có:  $m^2+1 > 0 \Rightarrow (m^2+1)x-2 > 0$  là phương trình bậc nhất một ẩn.

b) Ta có:  $m^2+4m+4 = (m+2)^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow (m^2+4m+4)x < 2$  là bất phương trình bậc nhất một ẩn

## Dạng 2: Giải bất phương trình dạng cơ bản

**Cách giải:** Sử dụng các hằng đẳng thức, các quy tắc chuyển vế, nhân, chia với 1 số khác 0 để giải các bất phương trình đã cho.

### Bài 1:

Giải các bất phương trình sau

a.  $2x-8 > 0$

b.  $\frac{3}{2}x < -9$

c.  $3x - 3 > x + 5$

d.  $\frac{x+4}{2} + x < -7$

**Lời giải**

a)  $2x - 8 > 0 \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4$

b)  $\frac{3}{2}x < -9 \Leftrightarrow 3x < -18 \Leftrightarrow x < -6$

c)  $3x - 3 > x + 5 \Leftrightarrow 3x - x > 5 + 3 \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4$

d)  $\frac{x+4}{2} + x < -7 \Leftrightarrow x + 4 + 2x < -14 \Leftrightarrow 3x < -18 \Leftrightarrow x < -6$

**Bài 2:**

Giải các bất phương trình sau và biểu diễn trên trục số

a.  $3(4x + 1) - 2(5x + 2) < 4(x + 1)$

b.  $\frac{3}{4}x + 1 \leq \frac{1}{4}x + 3$

**Lời giải**

a)  $3(4x + 1) - 2(5x + 2) < 4(x + 1) \Leftrightarrow 12x + 3 - 10x - 4 < 4x + 4 \Leftrightarrow x > -4$

b)  $\frac{3}{4}x + 1 \leq \frac{1}{4}x + 3 \Leftrightarrow 3x + 4 \leq x + 12 \Leftrightarrow x < 4$

**Bài 3:**

Giải các bất phương trình sau

a.  $3x + 15 < 0$

b.  $5x + 4 > -11 + 2x$

c.  $\frac{x}{2} - \frac{11}{5} \leq \frac{-1}{5}$

d.  $\frac{3}{4}x + 1 \leq \frac{1}{4}x + 3$

**Lời giải**

a)  $3x + 15 < 0 \Leftrightarrow 3x < -15 \Leftrightarrow x < -5$

b)  $5x + 4 > -11 + 2x \Leftrightarrow 5x - 2x > -11 - 4 \Leftrightarrow 3x > -15 \Leftrightarrow x < -5$

c)  $\frac{x}{2} - \frac{11}{5} \leq \frac{-1}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq \frac{11}{5} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$

d)  $\frac{3}{4}x + 1 \leq \frac{1}{4}x + 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$

#### Bài 4:

Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số

a.  $(2x+3)(2x-1) < (2x-5)^2$

b.  $(x-1)(x+2) < (x-1)^2 + 3$

#### Lời giải

a)  $(2x+3)(2x-1) < (2x-5)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 6x - 3 < 4x^2 - 20x + 25 \Leftrightarrow 4x - 3 < -20x + 25$

$$\Leftrightarrow x < \frac{7}{6}$$

b)  $(x-1)(x+2) < (x-1)^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 < x^2 - 2x + 1 + 3 \Leftrightarrow x - 2 < -2x + 4 \Leftrightarrow x < 2$

#### Bài 5:

Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số

a.  $(x+1)^2 + 2x^2 < (2x+3)^2 - (x-3)^2$

b.  $2x(x-7) + (3-x)^2 > 3(x+1)^2$

#### Lời giải

a)  $(x+1)^2 + 2x^2 < (2x+3)^2 - (x-3)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2x^2 < (2x+3+x-3)(2x+3-x+3)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 1 < 3x(x+6) \Leftrightarrow 2x + 1 < 18x \Leftrightarrow 16x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{16}$$

b)  $2x(x-7) + (3-x)^2 > 3(x+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 9 - 6x + x^2 > 3x^2 + 6x + 6 \Leftrightarrow -20x + 9 > 6x + 6$

$$\Leftrightarrow 26x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{26}$$

#### Bài 6:

Giải các bất phương trình sau và viết tập nghiệm bằng kí hiệu tập hợp

a.  $\frac{7(x-2)}{6} - 2 > \frac{2(x+1)}{3}$

b.  $x - \frac{2x+1}{2} > 2x - \frac{2}{3}$

#### Lời giải

a)  $\frac{7(x-2)}{6} - 2 > \frac{2(x+1)}{3} \Leftrightarrow 7x - 14 - 12 > 4x + 4 \Leftrightarrow 3x > 30 \Leftrightarrow x > 10 \Rightarrow D = (10; +\infty)$

b)  $x - \frac{2x+1}{2} > 2x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6x - 6x - 3 > 12x - 4 \Leftrightarrow 12x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{12} \Rightarrow D = \left(-\infty; \frac{1}{12}\right)$

### Bài 7:

Giải các bất phương trình sau và viết tập nghiệm bằng kí hiệu tập hợp

a.  $\frac{x+2}{7} - \frac{1}{21} > \frac{3x+1}{3}$

b.  $1 + \frac{x-2}{3} > 5 - x + \frac{3(x-2)}{3}$

### Lời giải

a)  $\frac{x+2}{7} - \frac{1}{21} > \frac{3x+1}{3} \Leftrightarrow 3x+6-1 > 21x+7 \Leftrightarrow 18x < -2 \Leftrightarrow x < \frac{-1}{9} \Rightarrow D = \left(-\infty; \frac{-1}{9}\right)$

b)  $1 + \frac{x-2}{3} > 5 - x + \frac{3(x-2)}{3} \Leftrightarrow 3+x-2 > 15-3x+3x-6 \Leftrightarrow x > 8 \Rightarrow D = (8; +\infty)$

### Bài 8:

Giải các bất phương trình sau

a.  $x^2 - 4x \geq 0$

b.  $x^2 - 5x + 6 < 0$

c.  $x^4 - 3x^3 - x + 3 \leq 0$

d.  $\frac{x-3}{x+2} > 2$

### Lời giải

a)  $x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 0 \\ x-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4; x \leq 0$

b)  $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$   
 $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3$

c)  $x^4 - 3x^3 - x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\underbrace{(x^2+x+1)}_{>0} \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

d)  $\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-x-7}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-(x+7)}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+7}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 > 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -7 \\ x < -2 \end{cases}$   
 $\begin{cases} x+7 < 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -7 \\ x > -2 \end{cases}$

$\Rightarrow -7 < x < -2$

### Bài 9:

Giải bất phương trình sau:



$$\text{a. } \frac{\frac{7}{3}x-4}{3} - \frac{x+18}{-6} < \frac{\frac{5}{4}x-2}{-1}$$

$$\text{b. } (5x - \frac{2}{3}) - \frac{2x^2 - x}{2} \geq \frac{x(1-3x)}{3} - \frac{5x}{4}$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\frac{7}{3}x-4}{3} - \frac{x+18}{-6} < \frac{\frac{5}{4}x-2}{-1} &\Leftrightarrow \frac{\frac{7}{3}x-4}{3} + \frac{x+18}{6} < -\frac{5}{4}x+2 \Leftrightarrow 4\left(\frac{7}{3}x-4\right) + 2(x+18) < -15x+24 \\ &\Leftrightarrow \frac{28x}{3} - 16 + 2x + 36 < -15x + 24 \Leftrightarrow 28x - 48 + 6x + 108 < -45x + 72 \Leftrightarrow 79x < 12 \Leftrightarrow x < \frac{12}{79} \end{aligned}$$

**Bài 10:**

Cho biểu thức  $A = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2 - 3x}\right) : \left(\frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x+3}\right)$

a. Rút gọn  $A$

b. Tìm  $x$  để  $A < -1$

**Lời giải**

$$\text{a) } A = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2 - 3x}\right) : \left(\frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x+3}\right) = \frac{-(x+3)}{x} (x \neq 0, x \neq \pm 3)$$

$$\text{b) } A < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x+3)}{x} < -1 \\ x \neq 0, x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3}{x} < 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

**Bài 11:**

Cho biểu thức  $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2}\right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a. Rút gọn  $A$

b. Tìm  $x$  để  $A > 0$

**Lời giải**

$$\text{a. } A = \frac{2}{1-2x} \left(x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{b. } A > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1-2x} > 0 \\ x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq x < \frac{1}{2}$$

### Dạng 3: Các bài toán về số

**Cách giải:** Ta thực hiện theo hai bước sau

**Bước 1:** Sử dụng các quy tắc (hoặc thiết lập bất phương trình dựa trên giả thiết bài toán) để giải các bất phương trình đã cho

**Bước 2:** Dựa vào nghiệm đã giải đánh giá và đưa ra kết luận theo yêu cầu bài toán.

#### Bài 1:

Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn đồng thời cả hai phương trình

a.  $3(n+2)+4n-3 < 24$  và  $(n-3)^2 - 43 \leq (n-4)(n+4)$

b.  $2(3n-4) < 3(4n-3)+16(1)$  và  $4(1+n) < 3n+5$

c.  $\frac{n-1}{5} - \frac{n-2}{3} > 1(1)$  và  $\frac{x-1}{5} - \frac{x-2}{3} < 3(2)$

d.  $\frac{n+17}{5} - \frac{3n-7}{4} > -2(1)$  và  $n - \frac{n-1}{3} - \frac{2n-5}{5} + \frac{n+8}{6} > 7(2)$

#### Lời giải

a)  $3(n+2)+4n-3 < 24 \Leftrightarrow n < 3; (n-3)^2 - 43 \leq (n-4)(n+4) \Leftrightarrow n \geq -3 \Rightarrow n \in \{0;1;2\}$

b)  $2(3n-4) < 3(4n-3)+16 \Leftrightarrow x > \frac{-5}{2}; 4(1+n) < 3n+5 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow x \in \{0\}$

c)  $\frac{n-1}{5} - \frac{n-2}{3} > 1 \Leftrightarrow x < -4; \frac{x-1}{5} - \frac{x-2}{3} < 3 \Leftrightarrow x > -19 \Rightarrow x \in \emptyset$

d)  $\frac{n+17}{5} - \frac{3n-7}{4} > -2 \Leftrightarrow x < 13; n - \frac{n-1}{3} - \frac{2n-5}{5} + \frac{n+8}{6} > 7 \Leftrightarrow x > \frac{80}{13} \Rightarrow x \in \{6; \dots; 1\}$

#### Bài 2:

Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và số đó lớn hơn 13 nhưng nhỏ hơn 29.

#### Lời giải

Gọi số cần tìm là:  $\overline{ab} = 10a + b (a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0)$

Theo giả thiết ta có:  $\overline{ab} = 10a + b = 10a + a - 2 = 11a - 2$

Vì số đó lớn hơn 13 nhưng nhỏ hơn 29 nên ta có:

$$11a - 2 > 13; 11a - 2 < 29 \Leftrightarrow \frac{15}{11} < a < \frac{31}{11} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 20$$

### Bài 3:

Một số tự nhiên có ba chữ số biết rằng chữ số hàng trăm lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 1, chữ số hàng chục bằng chữ số hàng đơn vị. Tìm số đó, biết số đó lớn hơn 210 nhưng nhỏ hơn 303

### Lời giải

Gọi số cần tìm là:  $\overline{abc} = 100a + 10b + c (a, b, c \in N, a \neq 0)$

Theo giả thiết ta có:  $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 100(c + 1) + 10c + c = 111c + 100$

Vì số đó lớn hơn 210 nhưng nhỏ hơn 303 nên ta có :

$$210 < 111c + 100 < 303 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow b = 1; a = 2 \Rightarrow 211$$

#### Dạng 4: Giải bất phương trình dạng đặc biệt $\frac{x+a}{b} + \frac{x+c}{d} < \frac{x+e}{f} + \frac{x+g}{h}$

##### Cách giải:

- Nếu  $a+b=c+d=e+f=g+h=k$ . Ta cộng mỗi phân thức thêm 1

- Nếu  $a-b=c-d=e-f=g-h=k$ . Ta cộng mỗi phân thức thêm -1

- Quy đồng đưa về dạng:  $(x-k)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} - \frac{1}{h}\right) < 0$

##### \*) Chú ý:

- Cần xét xem  $\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} - \frac{1}{h}$  là số âm hay số dương để đưa ra đánh giá về dấu của  $x-k$

- Có thể mở rộng số phân thức nhiều hơn và tùy từng bài toán ta sẽ cộng hoặc trừ đi hằng số thích hợp.

#### Bài 1:

Giải các bất phương trình sau

a.  $\frac{x+2}{6} + \frac{x+5}{3} > \frac{x+3}{5} + \frac{x+6}{2}$

b.  $\frac{2x-4}{2014} + \frac{2x-2}{2016} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015}$

##### Lời giải

a)  $\Leftrightarrow \frac{x+2}{6} + 1 + \frac{x+5}{3} + 1 > \frac{x+3}{5} + 1 + \frac{x+6}{2} + 1 \Leftrightarrow x < -8$

b)  $\frac{2x-4}{2014} - 1 + \frac{2x-2}{2016} - 1 < \frac{2x-1}{2017} - 1 + \frac{2x-3}{2015} - 1 \Leftrightarrow 2x - 2018 < 0 \Leftrightarrow x < 1009$

#### Bài 2:

Giải các bất phương trình sau

a.  $\frac{x+81}{19} + \frac{x+82}{18} > \frac{x+84}{16} + \frac{x+85}{15}$

b.  $\frac{x-22}{8} + \frac{x-21}{9} + \frac{x-20}{10} + \frac{x-19}{11} < 4$

##### Lời giải

a)  $\frac{x+81}{19} + \frac{x+82}{18} > \frac{x+84}{16} + \frac{x+85}{15} \Leftrightarrow x > -100$

b)  $\frac{x-22}{8} + \frac{x-21}{9} + \frac{x-20}{10} + \frac{x-19}{11} < 4 \Leftrightarrow x < 30$

## B. BÀI TẬP VỀ NHÀ

### Bài 1:

Giải các bất phương trình sau và biểu diễn trên trục số

a.  $\frac{x}{2}(4x-3)+2(3-x)(x+4)\leq 0$

b.  $x(1-2x)+(x+1)^2+(x-2)^2<0$

c.  $x^2(2x-1)+(x+2)^2-2x^3-x+3>0$

d.  $(x+2)^2-2(x+3)(x-4)>x(3-x)$

### Hướng dẫn giải

a.  $\Leftrightarrow x \geq \frac{48}{7}$

b.  $\Leftrightarrow x > 5$

c.  $\Leftrightarrow x > \frac{-7}{3}$

d.  $\Leftrightarrow x < \frac{2}{7}$

### Bài 2:

Giải các bất phương trình sau

a.  $\frac{7x-8}{32}-\frac{5-x}{16}>\frac{x+9}{2}+\frac{1}{8}$

b.  $\frac{1-2x}{4}-2<\frac{1-5x}{8}$

c.  $\frac{x^2-2x}{3}+\frac{x^2+2x-2}{2}\leq\frac{5x^2+10x+11}{6}$

d.  $\frac{x^2-3x-10}{4}+\frac{x^2-65}{12}>\frac{x^2+1}{3}$

### Hướng dẫn giải

a.  $\Leftrightarrow x < \frac{-166}{7}$

b.  $x \leq \frac{11}{2}$

c.  $x \geq \frac{-17}{11}$

d.  $\Leftrightarrow x < -11$

### Bài 3:

Tìm giá trị của x thỏa mãn cả hai phương trình sau

a.  $2(3x-4)<3(4x-3)+16$  và  $4(1+x)<3x+5$

b.  $\frac{2x}{5}+\frac{3-2x}{3}\geq\frac{3x+2}{2}$  và  $\frac{x}{2}+\frac{3-2x}{5}\geq\frac{3x-5}{6}$

c.  $\frac{3x-2}{5}\geq\frac{x}{2}+0,8$  và  $1-\frac{2x-5}{6}>\frac{3-x}{4}$

### Hướng dẫn giải

a) Ta có:  $2(3x-4)<3(4x-3)+16 \Leftrightarrow 6x-8<12x-9+16 \Leftrightarrow 6x>-15 \Leftrightarrow x>\frac{-5}{2}(1)$

$$4(1+x) < 3x+5 \Leftrightarrow 4+4x < 3x+5 \Leftrightarrow x < 1(2)$$

Từ (1)(2)  $\Rightarrow \frac{-5}{2} < x < 1$  là các giá trị cần tìm

#### Bài 4:

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}; B = \frac{2x^2 - 8x + 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$

a. Tìm điều kiện của  $x$  để  $B$  xác định

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A$

c. Tìm giá trị của  $x$  để  $AB$  nguyên

d. Tìm giá trị của  $x$  để  $AB < 0$

#### Hướng dẫn giải

a.  $B$  xác định

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 3x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) - 2x(x+1) - 3(x+1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1; x \neq 3$$

b. Ta có  $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0 \forall x \in R; x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0, \forall x \in R \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5} \geq 0$

$$\Rightarrow A \geq 0 \Leftrightarrow x = -1$$

c. Ta có  $AB = \frac{2}{x-3}; AB \in Z \Leftrightarrow \frac{2}{x-3} \in Z \Leftrightarrow x-3 \in U(2) \Leftrightarrow x \in \{4; 2; 5; 1\}$

d.  $AB < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 (2 > 0) \Leftrightarrow x < 3 (x \neq -1)$

## PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

### A. Lý thuyết

#### 1. Định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số

Giá trị tuyệt đối của số  $x$ , ký hiệu là  $|x|$ , được định nghĩa là khoảng cách từ số  $x$  đến số 0 trên trục số. Như vậy ta có  $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

#### 2. Tính chất

a.  $|x| \geq 0$

b.  $|x| = |-x|$

c.  $|x|^2 = x^2$

#### 3. Cách giải phương trình chứa trị tuyệt đối cơ bản

a. Giải phương trình dạng  $|x| = |y|$

Ta có:  $|x| = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$

b. Giải phương trình dạng:  $|x| = y$

#### Cách giải:

##### +) Cách 1: Xét 2 trường hợp

- Trường hợp 1: Với  $x \geq 0 \Rightarrow x = y$

- Trường hợp 2: Với  $x < 0 \Rightarrow -x = y$

+) Cách 2: Ta có:  $|x| = y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x = y \\ x = -y \end{cases}$

### B. Bài tập

#### Dạng 1: Rút gọn biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

**Cách giải:** Ta thực hiện theo các bước sau

**Bước 1:** Dựa vào định nghĩa giá trị tuyệt đối để bỏ dấu giá trị tuyệt đối

**Bước 2:** Sử dụng các kiến thức biến đổi để thu gọn biểu thức

#### Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = |x - 7| + 2x - 3$

b)  $B = |-3x|^2 - 8x^2 + |x - 2|(x \geq 2)$

$$c) C = \frac{x^3 - |x|}{(x^2 + 1)|-x|} (x < 0)$$

### Lời giải

$$a) \text{ Từ định nghĩa } |x-7| = \begin{cases} x-7, x \geq 7 \\ -(x-7), x < 7 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{cases} 3x-10 (x \geq 7) \\ x+4 (x < 7) \end{cases}$$

$$b) x \geq 2 \Rightarrow |x-2| = x-2; |-3x|^2 = 9x^2 \Rightarrow B = x^2 + x - 2$$

$$c) x < 0 \Rightarrow |x| = |-x| = -x \Rightarrow C = \frac{x^3 + x}{-x(x^2 + 1)} = -1$$

### Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau

$$a) D = 3x + |x-1| - 2$$

$$b) E = |2x^2 + 1| - |-3x| + 5 (x \geq 0)$$

$$c) F = \frac{x^2 - |2x| + 1}{(x+1)|-x|} (x < 0)$$

### Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } |x-1| = \begin{cases} x-1 (x \geq 1) \\ -x+1 (x < 1) \end{cases} \Rightarrow D = \begin{cases} 4x-3 (x \geq 1) \\ 2x-1 (x < 1) \end{cases}$$

b) Ta có:

$$E = |2x^2 + 1| - |-3x| + 5 (x \geq 0) \Rightarrow -3x \leq 0 \Rightarrow |-3x| = 3x \Rightarrow E = 2x^2 + 1 - 3x + 5 = 2x^2 - 3x + 6$$

$$c) x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - |2x| + 1 = (x+1)^2 \\ |-x| = |x| = -x \end{cases} \Rightarrow F = \frac{-(x+1)}{x}$$

### Bài 3: Thu gọn các biểu thức sau

$$a. A = \frac{x^3 + |4x-3| - 4|1-x| - 2}{x^2 + x + 1} (x > 1)$$

$$b. B = (x+3)(|x-3|-1) + |4x-13| (3 \leq x < \frac{13}{4})$$

### Lời giải

$$a) x > 1 > \frac{3}{4} \Rightarrow |4x-3| = 4x-3; |1-x| = |x-1| = x-1 \Rightarrow A = \frac{x^3 + 4x - 3 - 4(x-1) - 2}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = x - 1$$

$$b. x \geq 3 \Rightarrow |x-3| = x-3; x < \frac{13}{4} \Rightarrow |4x-13| = 13-4x \Rightarrow B = (x+3)(x-4) + 13 - 4x = x^2 - 5x + 1$$



**Bài 4:** Thu gọn các biểu thức sau

a.  $C = \frac{x^2 + |4x - 1| - |2x + 7|}{x + 4} \left(x \geq \frac{1}{4}\right)$

b.  $D = x^2 + |1 + 2x| + |4x| \left(\frac{-1}{2} \leq x \leq 0\right)$

**Lời giải**

a) Ta có:

$$x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow |4x - 1| = 4x - 1; |2x + 7| = 2x + 7 \Rightarrow C = \frac{x^2 + 4x - 1 - 2x - 7}{x + 4} = \frac{x^2 + 2x - 8}{x + 4} = x - 2$$

b) Ta có:  $\frac{-1}{2} \leq x \leq 0 \Rightarrow |1 + 2x| = 1 + 2x; |4x| = -4x \Rightarrow D = x^2 + 1 + 2x - 4x = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

## Dạng 2: Giải các phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

**Cách giải:** Thực hiện theo các bước sau

**Bước 1:** Sử dụng các công thức linh hoạt theo từng cách viết để chuyển về giải phương trình bậc nhất

**Bước 2:** Đối chiếu điều kiện rồi kết luận tập nghiệm.

### Bài 1: Giải các phương trình sau

a.  $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 5 = 1$

b.  $|10x - 3| + \frac{1}{4} = 5\%$

c.  $3 - |4x - 3| = -5 + |4x - 3|$

d.  $\frac{3|x - 11|}{2} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}|x - 11|$

### Lời giải

a)  $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 5 = 1 \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{3}\right| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = 6 \\ x + \frac{1}{3} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{17}{3}; \frac{-19}{3}\right\}$

b)  $|10x - 3| + \frac{1}{4} = 5\% \Leftrightarrow |10x - 3| = \frac{1}{20} - \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

c)  $\Leftrightarrow |4x - 3| = 4 \Rightarrow x \in \left\{\frac{7}{4}; \frac{-1}{4}\right\}$

d)  $\Leftrightarrow |x - 11| = 2 \Rightarrow x \in \{13; 9\}$

### Bài 2: Giải các phương trình sau

a.  $2|5x| - 3 = 4$

b.  $\frac{7}{2} - 3|5 - 2x| = \frac{9}{2}$

c.  $|3x - 1| + 4 = 6 - |3x - 1|$

d.  $\frac{|3x + 4|}{2} - 1 = \frac{1}{3}$

### Lời giải

a)  $2|5x| - 3 = 4 \Leftrightarrow 2|5x| = 7 \Leftrightarrow |5x| = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{7}{2} \\ 5x = -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\pm \frac{7}{10}\right\}$

b)  $\frac{7}{2} - 3|5 - 2x| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 3|5 - 2x| = \frac{7}{2} - \frac{9}{2} \Leftrightarrow 3|5 - 2x| = -1 \Leftrightarrow |5 - 2x| = \frac{-1}{3} \Rightarrow x \in \emptyset$

$$c) |3x-1|+4=6-|3x-1| \Leftrightarrow 2|3x-1|=2 \Leftrightarrow |3x-1|=1 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$$

$$d) \frac{|3x+4|}{2}-1=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{|3x+4|}{2}=1+\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{|3x+4|}{2}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow |3x+4|=\frac{8}{3} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-4}{9}; \frac{-20}{9}\right\}$$

### Bài 3: Giải các phương trình sau

$$a. |4-5x|=|5-6x|$$

$$b. |3x+2|-|7x+1|=0$$

$$c. |x^2-2x-3|+|x+1|=0$$

$$d. \frac{1}{4}|x-5|=|3x+1|$$

#### Lời giải

$$a) |4-5x|=|5-6x| \Leftrightarrow \begin{cases} 4-5x=5-6x \\ 4-5x=-5+6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{9}{11} \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{1; \frac{9}{11}\right\}.$$

$$b) |3x+2|-|7x+1|=0 \Leftrightarrow |3x+2|=|7x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=7x+1 \\ 3x+2=-7x-1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{\frac{-3}{10}; \frac{1}{4}\right\}$$

$$c) \text{ Do } |x^2-2x-3|+|x+1|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-2x-3| \geq 0 \\ |x+1| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x^2-2x-3|+|x+1|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-2x-3|=0 \\ |x+1|=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

$$d) \frac{1}{4}|x-5|=|3x+1| \Leftrightarrow |x-5|=|4(3x+1)| \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=4(3x+1) \\ x-5=-4(3x+1) \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{\frac{-9}{11}; \frac{1}{13}\right\}$$

### Bài 4: Giải các phương trình sau

$$a. |2x+4|=|1-2x|$$

$$b. |15x-7|-|5x+3|=0$$

$$c. |x^2-9|+3|x+3|=0$$

$$d. 3\left|\frac{1}{3}x-2\right|=|4-x|$$

#### Lời giải

$$a) |2x+4|=|1-2x| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4=1-2x \\ 2x+4=-1+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=-3 \\ 0x=-5(\text{vô lý}) \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-3}{4}$$

$$b) |15x-7|-|5x+3|=0 \Leftrightarrow |15x-7|=|5x+3| \Leftrightarrow \begin{cases} 15x-7=5x+3 \\ 15x-7=-5x-3 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{1; \frac{1}{5}\right\}$$

$$c) |x^2-9|+3|x+3|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-9|=0 \\ |x+3|=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3$$

$$d) 3\left|\frac{1}{3}x-2\right|=|4-x| \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{1}{3}x-2\right)=4-x \\ 3\left(\frac{1}{3}x-2\right)=-4+x \end{cases} \Rightarrow x=5$$

### Bài 5: Giải các phương trình sau

a.  $|5x|=x+2$

b.  $|7x-3|-2x+6=0$

c.  $|x^2-x-3|+x=0$

d.  $|4x^2-1|+3x|2x-1|=0$

### Lời giải

a)  $|5x|=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 5x = \pm(x+2) \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

b)  $|7x-3|-2x+6=0 \Leftrightarrow |7x-3|=2x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6 \geq 0 \\ 7x-3 = \pm(2x-6) \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

c)  $\Leftrightarrow |x^2-x-3|=-x \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2-x-3 = \pm x \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; -\sqrt{3}\}$

d)  $\Leftrightarrow |2x-1|(|2x+1|+3x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1|=0 \\ |2x+1|+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ \begin{cases} 3x \geq 0 \\ 2x+1 = \pm 3x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-1}{5} \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{-1}{5}\right\}$

### Bài 6: Giải các phương trình sau

a.  $|9-x|=2x$

b.  $|x-15|+1-3x=0$

c.  $|x^2-x+1|-x=0$

d.  $|x^2-1|-2x|x-1|=0$

### Lời giải

a)  $|9-x|=2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 9-x = \pm 2x \end{cases} \Rightarrow x=3$

b)  $|x-15|+1-3x=0 \Leftrightarrow |x-15|=3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x-15 = \pm(3x-1) \end{cases} \Rightarrow x=4$

c)  $\Leftrightarrow |x-5|=|4(3x+1)| \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=12x+4 \\ 5-x=12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-9}{11} \\ x=\frac{1}{13} \end{cases}$

d)  $|2-x|=|2x-3|$

*Cách 1:*  $|2-x|=|2x-3| \Leftrightarrow 2-x = \pm(2x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}$

*Cách 2 :*  $|2-x|=|2x-3| \Leftrightarrow (2-x)^2 = (2x-3)^2 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{5}{3}\right\}$

### Dạng 3: Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối lồng nhau

#### Bài 1: Giải các phương trình sau

a.  $|3 - |x + 1|| = 4$

b.  $||x^2 - 1| - 1| = 2$

#### Lời giải

a.  $|3 - |x + 1|| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - |x + 1| = 4 \\ 3 - |x + 1| = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 1| = -1 \\ |x + 1| = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \in \{6; -8\} \end{cases} \Rightarrow x \in \{6; -8\}$

b.  $||x^2 - 1| - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 1| - 1 = -2 \\ |x^2 - 1| - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 1| = -1 \\ |x^2 - 1| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \in \{\pm 2\} \end{cases} \Rightarrow x \in \{\pm 2\}$

#### Bài 2: Giải các phương trình sau

a.  $||x + 2| + 7| = 9$

b.  $||2x - 1| - 3| = 5$

#### Lời giải

a.  $||x + 2| + 7| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 2| + 7 = 9 \\ |x + 2| + 7 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 2| = 2 \\ |x + 2| = -16 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-4; 0\}$

b.  $||2x - 1| - 3| = 5 \Leftrightarrow |2x - 1| - 3 = \pm 5 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{9}{2}; \frac{-7}{2} \right\}$

## BÀI TẬP VỀ NHÀ

### Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau

a.  $A = |x - 9| + 7 - |x| (x \geq 9)$

b.  $B = |-3x|^2 - 8x^2 + x - 2 (x \geq 0)$

c.  $C = (x + \frac{1}{2})(x^2 - x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})(x > 1)$

### Hướng dẫn giải

a.  $A = |x - 9| + 7 - |x| (x \geq 9) = 2$

b.  $B = |-3x|^2 - 8x^2 + x - 2 (x \geq 0) = x^2 + x - 2$

c.  $C = (x + \frac{1}{2})(x^2 - x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})(x > 1) = x^3 + \frac{1}{8}$

### Bài 2: Giải các phương trình sau

a.  $3 + |x^2 + 1| = 5$

b.  $|x - \frac{1}{2}| - 2 = 5 - |x - \frac{1}{2}|$

c.  $|-3x| = 4$

d.  $\frac{|4 - 5x| + 4}{5} = 2$

### Hướng dẫn giải

a.  $3 + |x^2 + 1| = 5 \Leftrightarrow x = \pm 1$

b.  $|x - \frac{1}{2}| - 2 = 5 - |x - \frac{1}{2}| \Leftrightarrow x \in \{-3; 4\}$

c.  $|-3x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{3}$

d.  $\frac{|4 - 5x| + 4}{5} = 2 \Leftrightarrow x \in \{\frac{-5}{2}; \frac{9}{4}\}$

### Bài 3: Giải các phương trình sau

a.  $|2x - 1| = |2x - 5|$

b.  $|7 - x| - |2 - 3x| = 0$

c.  $|x - 4| + |x^2 - 5x + 4| = 0$

d.  $|\frac{x^2 - x - 2}{x - 1}| - |x| = 0$

### Hướng dẫn giải

a.  $|2x - 1| = |2x - 5| \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

b.  $|7 - x| - |2 - 3x| = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{-5}{2}; \frac{9}{4}\}$

c.  $|x - 4| + |x^2 - 5x + 4| = 0 \Leftrightarrow x = 4$

d.  $|\frac{x^2 - x - 2}{x - 1}| - |x| = 0 \Leftrightarrow x = 1$

#### Bài 4: Giải các phương trình sau

a.  $|x-6| = -5x+9$

b.  $|x+1| = x^2+x$

c.  $|x^2-2x|+4=2x$

d.  $\left| \frac{x^2+x-6}{x-1} \right| = x-2$

#### Hướng dẫn giải

a.  $|x-6| = -5x+9 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

b.  $|x+1| = x^2+x \Leftrightarrow x = \pm 1$

c.  $|x^2-2x|+4=2x \Leftrightarrow x=2$

d.  $\left| \frac{x^2+x-6}{x-1} \right| = x-2 \Leftrightarrow x=2$

#### Bài 5: Giải các phương trình sau

a.  $\left| x \left| x^2 + \frac{1}{4} \right| \right| = \frac{3}{4}x$

b.  $|(x+3)|2x-5|| = 2x-5$

#### Hướng dẫn giải

a.  $\left| x \left| x^2 + \frac{1}{4} \right| \right| = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow x \in \{0; \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

b.  $|(x+3)|2x-5|| = 2x-5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

#### Bài 6:

Giải phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ  $|x^2-5x+5| = -2x^2+10x-11$

#### Hướng dẫn giải

Đặt  $t = x^2-5x+5 \Rightarrow |t| = -2t-1 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow x \in \{2; 3\}$ .