Algoritmos genéticos aplicados a robótica

Pedro Henrique Centenaro

1 Problemas de otimização

1.1 Conceitos básicos

A otimização, também chamada de programação, é uma área da matemática dedicada ao estudo da obtenção de "valores ótimos", termo que abrange grande variedade de significados. Um caso relativamente simples de problema de otimização é a determinação de máximos e mínimos em funções contínuas. Por exemplo, suponha que a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 100$ represente o gasto de energia com algum processo industrial, sendo x um parâmetro controlável do processo. Nesta situação, a forma ótima de conduzir o processo é aquela cujo x minimiza o gasto de energia $f(x)$. Em outras palavras, queremos x^* tal que $f(x^*) = \min f(x)$.

Para determinar x^*, seguimos o procedimento detalhado por Stewart [1]. Começamos calculando $f'(x)$ e $f''(x)$. Feito isso, determinamos as raízes de $f'(x)$, que, neste caso, são $x_1 = \frac{1}{3}$ e $x_2 = 3$. Por fim, calculamos $f''(x_1) = -8$ e $f''(x_2) = 8$. De $f''(x_1) < 0$ e $f''(x_2) > 0$ concluímos que x_1 é ponto de máximo e x_2 é ponto de mínimo de $f(x)$. Portanto, $x^* = 3$.

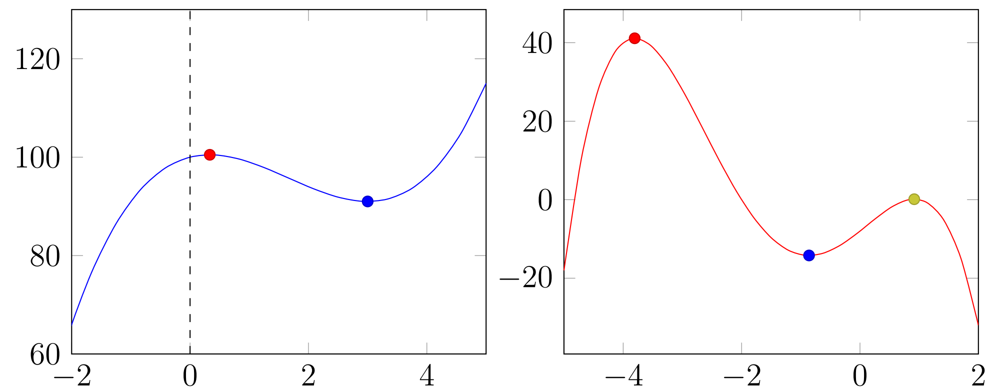

Figura 1: Gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.

Um leitor astuto pode perceber que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; ou seja, x pode ser infinitamente melhorado e, consequentemente, x^* não existe. No entanto, isso muito provavelmente não faz sentido físico para o processo. Convém, portanto, impor uma *restrição* como $x \geq 0$ ao problema. No gráfico de $f(x)$, esta restrição é a reta tracejada. Com a restrição imposta, é evidente que x^* existe e é o valor mínimo que a função assume.

Agora suponha uma função contínua como $g(x)$, apresentada na Figura 1. Perceba que nunca ocorre $g(x) \to \infty$, então deve existir um limite superior para o intervalo de valores retornado por esta função. De fato, a função tem dois máximos, apresentados no gráfico. O ponto mais à direita é maior do que todos os pontos nas suas imediatudes; já o ponto mais à esquerda é maior do que todos os outros pontos gerados pela função. Nestas condições, chamamos o ponto à direita de *máximo local* e o ponto à esquerda de *máximo global* da função.

1.2 Otimização avançada

Problemas práticos de otimização costumam envolver múltiplas variáveis, que estão sujeitas a vários tipos de restrições. Um exemplo simples de problema aplicado de otimização é apresentado por Zhang [2]. Considere dois produtos, X e Y. Cada unidade de X é vendida por 1 dólar, e cada unidade de Y é vendida por 6 dólares. Supondo que a demanda por X e Y seja de 200 e 300 unidades por dia, respectivamente, e que seja possível produzir no máximo 400 produtos de qualquer tipo diariamente, deseja-se saber quantas unidades de X e Y produzir para maximizar os lucros da empresa. Neste caso, tem-se o problema de otimização

$$\max\ x_1 + 6x_2 \tag{1}$$
$$x_1 \leq 200 \tag{2}$$
$$x_2 \leq 300 \tag{3}$$
$$x_1 + x_2 \leq 400 \tag{4}$$
$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{5}$$

Referências

[1] James Stewart. *Cálculo*. 8ª ed. Vol. 1. Cengage Learning, 2016.

[2] Xiaolan Zhang. *Linear Programming CISC5835, Algorithms for Big Data CIS, Fordham Univ.* 2020. URL: https://storm.cis.fordham.edu/~zhang/cs5835/slides/LinearProgramming_handout.