

Controle de Sistemas Físicos Reais

Luiz Felipe Pico * Pedro Henrique Cordeiro Soares **

* Faculdade de Engenharia Mecatrônica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, PR, (e-mail: luiz.pico@tec.puc.com.br).

** Faculdade de Engenharia Mecatrônica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, PR, (e-mail: cordeiro.soares@pucpr.edu.br).

Abstract: Many of the physical systems in every day life can be seen as Control Systems. A lot of these have some type of feedback that makes them more stable, which is always more ideal. To make that possible it is necessary to define the inputs and outputs to be studied. A system of coupled tanks can be studied once the input is defined as the input flow rate and the outputs as the output flow rate and the level of the reservoirs. Another example are electronic circuits with groups of resistors, capacitors and inductors. In this case, the input is the initial voltage and the output is the end voltage, in a way that the transfer function represents the gain of the circuit. In a more general way, it is possible to study Automatic Industrial Controllers, whose response changes based on the type (Proportional, Integral, Proportional-Integral, ...) and by the input/error (Unit Step, Unit Ramp, ...). Concludes that there is a huge importance in the Control System area, since in the direct knowledge of the system signal, to the controller actions, primarily in daily systems.

Resumo: Muitos sistemas físicos do dia a dia podem ser vistos como Sistemas de Controle. Muitos desses possuem algum tipo de realimentação do sistema de forma que este fica mais estável, o que é considerado mais ideal. Para isso ser possível é necessário definir entradas e saídas para serem estudadas. Um sistema de tanques acoplados pode ser estudado de forma que a entrada principal é a vazão de entrada dos tanques e as saídas são a vazão de saída e o nível do reservatório. Outro exemplo são circuitos elétricos com conjuntos de Resistores, Capacitores e Indutores onde a entrada é o potencial inicial e a saída o potencial final, de forma que a função de transferência demonstra o ganho do circuito. De forma geral é possível estudar diretamente os Controladores Automáticos Industriais, cuja resposta varia de acordo com o tipo (Proporcional, Integrativo, Proporcional-Integrativo, ...) e com a entrada/erro (Degrau Unitário, Rampa Unitária, ...). Concluindo-se que existe uma grande importância na área de sistemas controladores, tanto no próprio conhecimento dos sinais gerados pelo sistema, quanto as ações para controlados, principalmente em sistemas cotidianos.

Keywords: Control; Automation; Practical Application; Physical Systems; Mechatronics; MATLAB.

Palavras-chaves: Controle; Automação; Aplicação Prática; Sistemas Físicos; Mecatrônica; MATLAB.

1. INTRODUÇÃO

De acordo com Ogata (2004), a teoria de controle é essencial em qualquer campo de engenharia. Pois com ela que foi feito o controle automático de sistemas como veículos espaciais, veículos automobilísticos, sistemas industriais e sensores de controle (temperatura, pressão, etc).

Para analisar um sistema físico e suas respostas, é necessária a criação de um sistema de controle. Sistemas de controle são um conjunto de máquinas e equipamentos, também conhecido como controladores, e a utilização de uma modelagem matemática, cujo o objetivo é analisar mais precisamente sistemas físicos e elétricos.

O uso de Sistemas de controle é uma das principais ferramentas no ramo de engenharia de controle automação e mecatrônica, possibilitando a criação de controladores para inúmeras áreas diferentes. Algumas de suas aplica-

ções são, na área industrial, uso em máquinas de controle numérico computadorizado (CNC), controle de servo mecanismos e em muitos outros sistemas que necessitam um certo grau de precisão.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma visão mais prática sobre a modelagem matemática de respostas de sistemas físicos e comprovando-os através de cálculos e simulações, utilizando alguns exemplos de sistemas físicos existentes.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Para realizar os cálculos e desenhar os gráficos necessários é utilizado o software MATLAB da MathWorks (2021a) versão 9.10.0 (R2021a). Para geração e simulação de funções de transferências e diagramas de blocos, utiliza-se o mesmo software, porém com a biblioteca do SIMULINK também do MathWorks (2021b).

3. SISTEMA DE TANQUES

Um determinado sistema de tanques acoplados possui dois reservatórios conectados de acordo com a Figura 1.

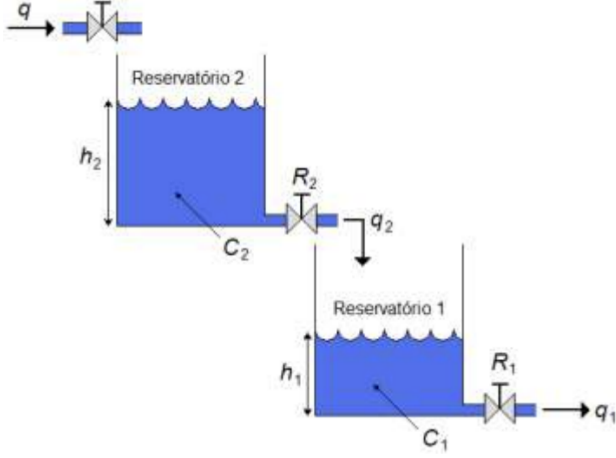


Figura 1. Sistema de Tanques Acoplados.

Neste sistema as equações a seguir são responsáveis por reger o comportamento do próprio:

$$C_1 dh_1 = (q_2 - q_1)dt, \quad (1)$$

$$C_2 dh_2 = (q - q_2)dt \quad (2)$$

$$q_1 = \frac{h_1}{R_1} \quad (3)$$

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2} \quad (4)$$

Onde:

- $C_1 = 4 \rightarrow$ Área do Reservatório 1 (m^2);
- $C_2 = 3 \rightarrow$ Área do Reservatório 2 (m^2);
- $R_1 = 4 \rightarrow$ Resistência da Válvula 1 (s/m^2);
- $R_2 = 2,5 \rightarrow$ Resistência da Válvula 2 (s/m^2);
- $h_1 \rightarrow$ Nível do Reservatório 1 (m);
- $h_2 \rightarrow$ Nível do Reservatório 2 (m);
- $q_1 \rightarrow$ Vazão de Saída do Reservatório 1 (m^3/s);
- $q_2 \rightarrow$ Vazão de Saída do Reservatório 2 (m^3/s);
- $q \rightarrow$ Vazão de Entrada (m^3/s);

A entrada do sistema é a vazão $q(t)$ que resulta nas saídas: $q_1(t)$, $h_1(t)$ e $h_2(t)$. C_1 , C_2 , R_1 e R_2 são constantes em função do tempo.

3.1 Funções de Transferência

Substituindo (4) em (2) e dividindo-a pelo domínio do tempo (dt), encontra-se:

$$C_2 h_2' = q - \frac{h_2}{R_2} \quad (5)$$

Aplicando a Transformada de Laplace, isolando H_2 , e substituindo os valores constantes obtêm-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{2,5}{7,5s + 1}, \quad (6)$$

a qual não possui zeros, porém possui um polo em $-0,1\bar{3}$.

Um processo semelhante pode ser feito ao substituir (3) em (1) e isolar H_1 , chegando-se em

$$H_1 = \frac{H_2}{R_2} \cdot \frac{R_1}{C_1 R_1 s + 1} \quad (7)$$

Para encontrar a função de transferência de H_1 é necessário substituir o H_2 encontrado em (6) e as constantes pré-definidas, de forma que

$$\frac{H_1(s)}{Q(s)} = \frac{4}{120s^2 + 23,5s + 1}, \quad (8)$$

esta também não possui zeros, mas tem polos em $-0,1\bar{3}$ e $-0,0625$.

Consequentemente, em função de (8) e (3), sabe-se que a função de transferência de Q_1 equivale a

$$\frac{Q_1(s)}{Q(s)} = \frac{1}{120s^2 + 23,5s + 1}, \quad (9)$$

equação tal que possui zeros e polos iguais a (8).

O sistema não possui zeros e possui dois polos distintos em $-0,1\bar{3}$ e $-0,0625$.

3.2 Resposta Simples

Para obter-se o valor do nível do reservatório 1 em função do tempo ($h_1(t)$) para uma entrada de $1 m^3/s$ é necessário, primeiro adicionar em (8) a entrada no sistema ($\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$):

$$H_1(s) = \frac{4}{120s^3 + 23,5s^2 + s}, \quad (10)$$

Então dividir em frações parciais:

$$H_1(s) = \frac{900}{17} \cdot \frac{1}{15s + 2} - \frac{2048}{17} \cdot \frac{1}{16s + 1} + \frac{4}{s}, \quad (11)$$

e aplicar a Transformada Inversa de Laplace, resultando em:

$$h_1(t) = \frac{60e^{-\frac{2t}{15}}}{17} - \frac{128e^{-\frac{t}{16}}}{17} + 4 \quad (12)$$

Para um tempo de 0 a 120 segundos a resposta do sistema (12) assemelha-se à Figura 2.

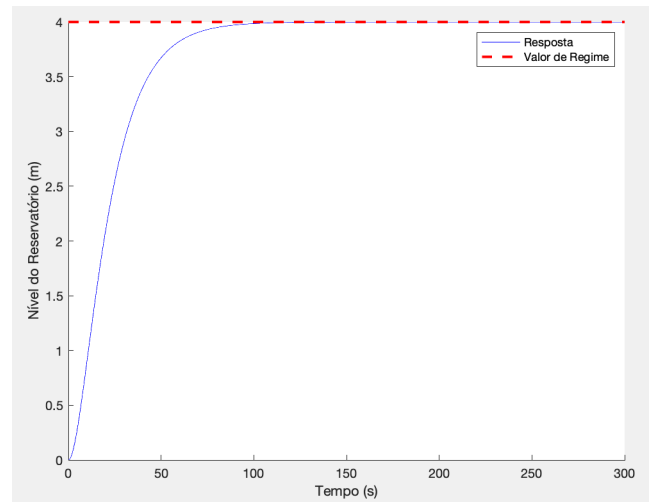


Figura 2. Nível do Reservatório em Função do Tempo para uma entrada de $1 m^3/s$.

3.3 Simulação Linear

Para avaliar as saídas do sistema é possível realizar diversas simulações com entradas diferentes e avaliar a reação de cada uma para cada entrada.

A figura 3 representa as saídas em função de uma entrada equivalente a um degrau unitário $\mathcal{H}\{t\}$.

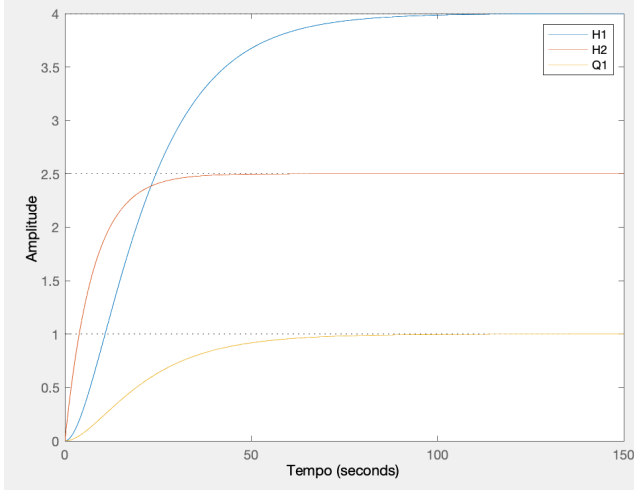


Figura 3. Saídas do Sistema para uma entrada de degrau unitário.

Já a figura 4 representa as mesmas saídas para uma entrada igual a um impulso unitário $\delta(t)$.

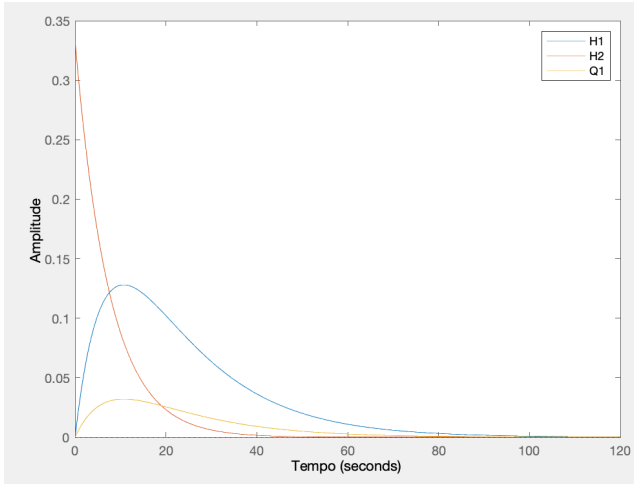


Figura 4. Saídas do Sistema para uma entrada de impulso unitário.

Por fim, a figura 5 parte de uma entrada senoidal $u(t)$ com amplitude entre ± 3 Volts e frequência de 0,5 Hz, equivalente à:

$$u(t) = 3 \sin(\pi t) \quad (13)$$

4. CIRCUITOS ELÉTRICOS

Circuitos elétricos também podem ser expressados e calculados através de sistemas de controle. Considerando dois circuitos: A (Figura 6) e B (Figura 7) é possível modelar suas entradas e saídas pela teoria de controle.

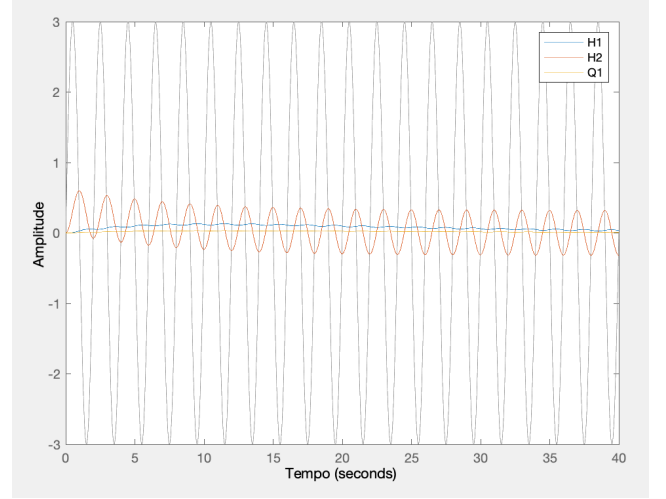


Figura 5. Saídas do Sistema para uma entrada senoidal com amplitude de 3 Volts e frequência de 0,5 Hz.

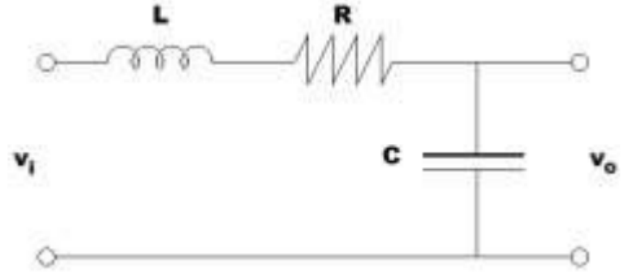


Figura 6. Circuito A (RLC)

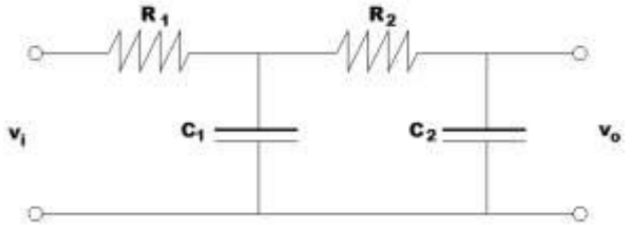


Figura 7. Circuito B (RC)

Em ambos circuitos tem-se v_i como a entrada do sistema medida em Volts, e v_o como a saída, também medida em Volts. Os outros valores na imagem são constantes em função do tempo e tem seus valores como: $L = 2H$, $R = 10\Omega$, $C = 5F$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $C_1 = 15F$ e $C_2 = 3F$.

Considera-se também i como a corrente da malha do Circuito A em Amperes. No Circuito B tem-se:

- $i_1 \rightarrow$ Corrente da malha composta por R_1 e C_1 (A)
- $i_2 \rightarrow$ Corrente da malha composta por R_2 , C_1 e C_2 (A)
- $v_2 \rightarrow$ Potência do nó entre R_1 , R_2 e C_1 (V)

4.1 Equações de Comportamento

Circuito A

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (14)$$

$$v_i(t) - v_o(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) \quad (15)$$

Circuito B

$$v_2(t) = \frac{1}{C_1} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt \quad (16)$$

$$v_o(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt \quad (17)$$

$$v_i(t) - v_2(t) = R_1 \cdot i_1(t) \quad (18)$$

$$v_2(t) - v_o(t) = R_2 \cdot i_2(t) \quad (19)$$

4.2 Funções de Transferência

Circuito A

Para calcular a função de transferência que rege o Circuito A, substitui-se os valores constantes e aplica-se a Transformada de Laplace em (14) e (15), resultando em:

$$V_o(s) = \frac{I(s)}{5s} \quad (20)$$

$$V_i(s) - V_o(s) = I(s) \cdot (2s + 10) \quad (21)$$

Isolando $I(s)$ em (20), substituindo em (21) e por fim isolando V_o/V_i encontra-se:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{10s^2 + 50s + 1}, \quad (22)$$

uma função de transferência sem zeros e com polos em 0,0201 e -4,98.

Circuito B

De forma similar, substituindo as constantes e aplicando Laplace nas equações que regem o comportamento do Circuito B, encontra-se:

$$V_2(s) = \frac{I_1(s) - I_2(s)}{15s} \quad (23)$$

$$V_o(s) = \frac{I_2(s)}{3s} \quad (24)$$

$$V_i(s) - V_2(s) = 5I_1(s) \quad (25)$$

$$V_2(s) - V_o(s) = 10I_2(s) \quad (26)$$

Substituindo (24) em (26), encontra-se que:

$$V_2(s) = I_2(s) \cdot \frac{30s + 1}{3s}, \quad (27)$$

agora levando esse valor para (23):

$$I_1(s) = I_2(s) \cdot (150s + 6), \quad (28)$$

somando (25) com (26) e substituindo pelo valor de I_1 calculado:

$$V_i(s) - V_o(s) = I_2(s) \cdot (750s + 40), \quad (29)$$

recupera-se o valor de I_2 de (24) e isola-se V_o/V_i para encontrar a função de transferência:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{2250s^2 + 120s + 1}, \quad (30)$$

também sem zeros, mas com polos em -0,0103 e 0,0430.

4.3 Diagrama de Blocos

Circuito A

A figura 8 representa o processo do Circuito A, através de um diagrama de blocos que pode ser reduzido e simplificado até a Função de Transferência (22)

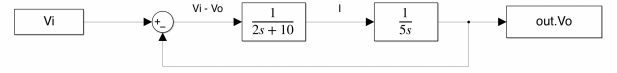


Figura 8. Diagrama de Blocos do Circuito A

Circuito B

Da mesma forma, a figura 9, representa o Circuito B. Este pode ser reduzido e simplificado até a Função de Transferência (30)

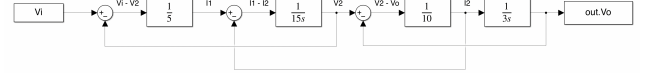


Figura 9. Diagrama de Blocos do Circuito B

4.4 Resposta Simples

Para exemplificar a resposta do sistema a uma entrada específica, aplica-se ao processo do Circuito B uma entrada de:

$$v_i(t) = 2V \therefore V_i(s) = \frac{2}{s}, \quad (31)$$

a qual resulta em:

$$V_o(s) = \frac{2}{2250s^3 + 120s^2 + s}, \quad (32)$$

ao dividir em frações parciais e aplicar a transformada inversa de laplace:

$$v_o(t) = 2 - 2e^{-\frac{2t}{75}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{t\sqrt{6}}{150}\right) + \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \sinh\left(\frac{t\sqrt{6}}{150}\right) \right], \quad (33)$$

cuja resposta em função do tempo é representada pela figura 10. Considerando uma margem de 2% do seu valor de pico, esta função se estabiliza a partir do tempo 406s.

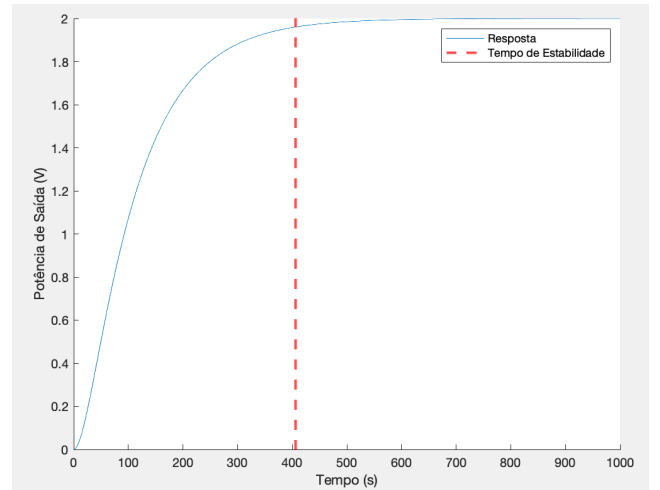


Figura 10. V_o do Circuito B após uma entrada de 2V

4.5 Simulação Linear

A figura 11 representa o que acontece ao aplicar uma simulação linear em ambos os circuitos com um entrada de degrau. O Circuito A entra em estabilidade em 195

segundos e o Circuito B em 406 segundos. Portanto o Circuito A é mais rápido.

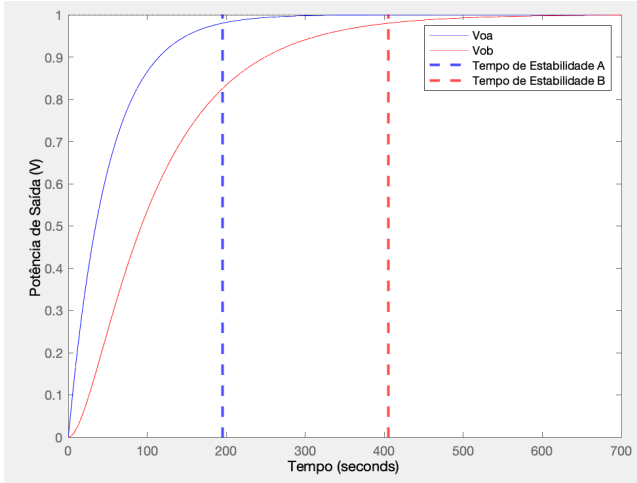


Figura 11. Resposta dos circuitos A e B para uma entrada constante

5. CONTROLADORES AUTOMÁTICOS INDUSTRIAIS

Por trás de todas as análises anteriores havia um controlador que agia a través de uma ação de controle. As ações de controle são responsáveis por agirem sobre o sinal de erro do sistema, transformando ele no sinal desejado.

Existem inúmeras ações controle, dentre elas as cinco mais comuns são, proporcional, integral, proporcional integrativa, proporcional derivativa e proporcional integrativa derivativa. Essas ações agem de forma diferente dependendo dos sinais atribuídos.

Para se entender melhor a funcionalidade das ações de controle, será utilizado dois sistemas com sinais de entradas diferentes, que podem ser observados na figura 12 e na figura 13.

Todos os gráficos serão plotagem de $u(t) \times t$ e seguem a ordem de sinal com degrau unitário e rampa unitária.

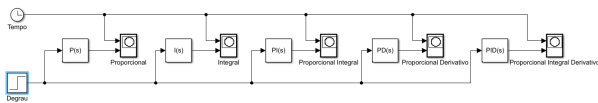


Figura 12. Sistema criado a partir de um impulso unitário

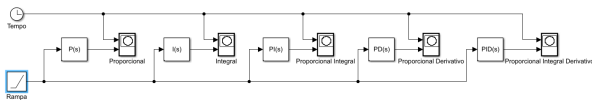


Figura 13. Sistema criado a partir de uma rampa unitária

5.1 Controlador Proporcional (P)

O controlador proporcional age diretamente no sinal de erro, a través de um ganho proporcional na função. Ele pode ser retratado como na seguinte equação:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P \quad (34)$$

Realizando as simulações e levando em consideração o $K_P = 4$, chegamos nos gráficos apresentados na figura 14 e na figura 15. Ambos apresentam os sinais de entrada como degrau e rampa unitárias, mas também apresentam como foram afetados pelo ganho proporcional, fazendo com que o degrau unitário chegasse no mesmo valor do ganho e aumentando o grau de inclinação da rampa unitária.

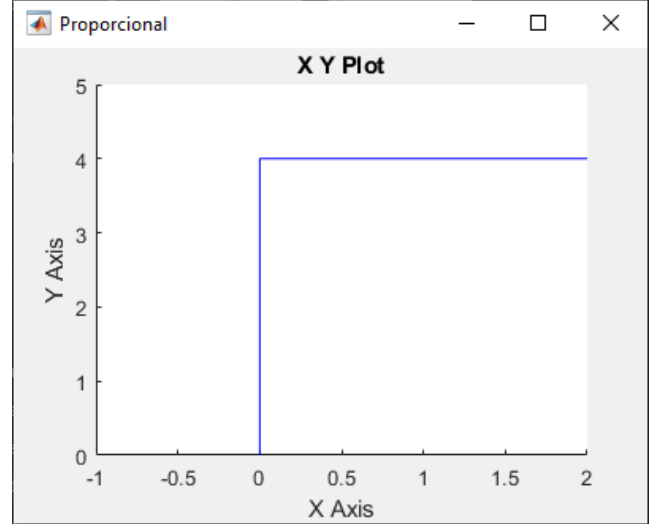


Figura 14. Controlador Proporcional com entrada de degrau

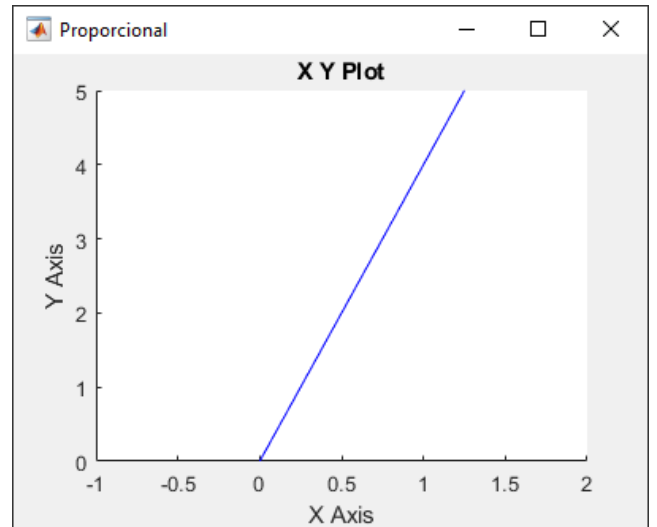


Figura 15. Controlador Proporcional com entrada de rampa

5.2 Controlador Integral (I)

A ação realizada pelo controle integral na função, age a través de um ganho integrativo, que é o ganho proporcional dividido pelo tempo integrativo.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s} \quad (35)$$

Realizando as simulações e levando em consideração o $K_P = 4$ e $T_I = 2$, chegamos nos gráficos apresentados na figura 16 e na figura 17. Neles podem ser observados que o degrau unitário apresenta a mesma ação de uma rampa

e a rapa unitária apresenta uma parábola com início em zero.

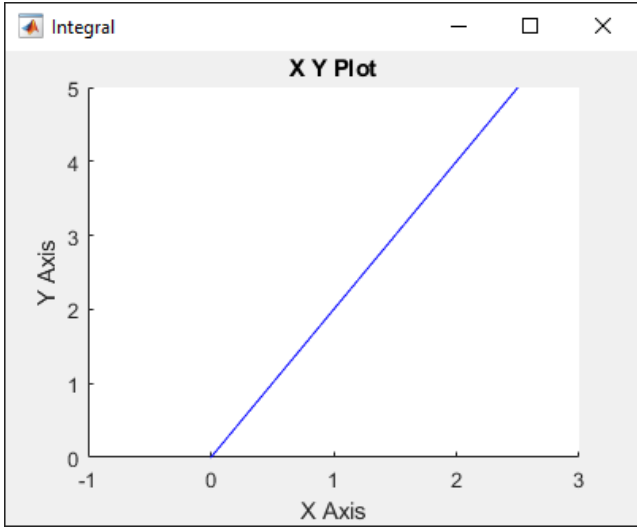


Figura 16. Controlador Integral com entrada de degrau

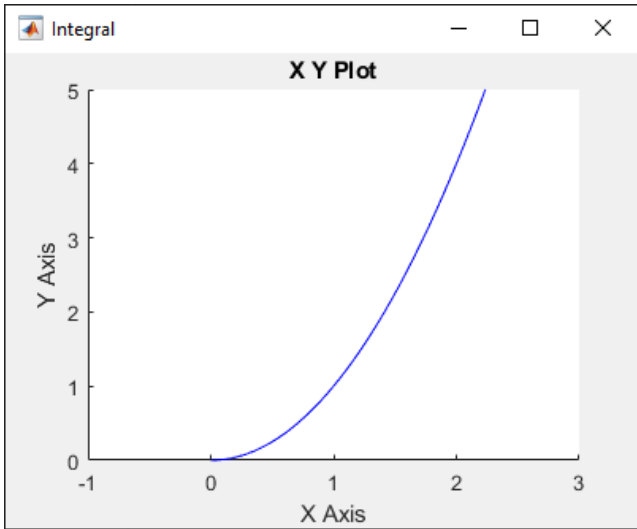


Figura 17. Controlador Integral com entrada de rampa

5.3 Controlador Proporcional-Integral (PI)

A ação realizada pelo controle proporcional integral na função, age a traves de um ganho proporcional mais um ganho integrativo.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_P s + K_I}{s} \quad (36)$$

Realizando as simulações e levando em consideração o $K_P = 4$ e $T_I = 2$, chegamos nos gráficos apresentados na figura 18 e na figura 19. Neles podem ser observados que o degrau unitário apresenta a mesma ação de uma rampa mais elevada por ter um ganho proporcional, e a rapa unitária apresenta uma parábola com início afetado pelo ganho proporcional.

5.4 Controlador Proporcional-Derivativo (PD)

A ação realizada pelo controle proporcional derivativo na função, age a traves de um ganho proporcional mais um

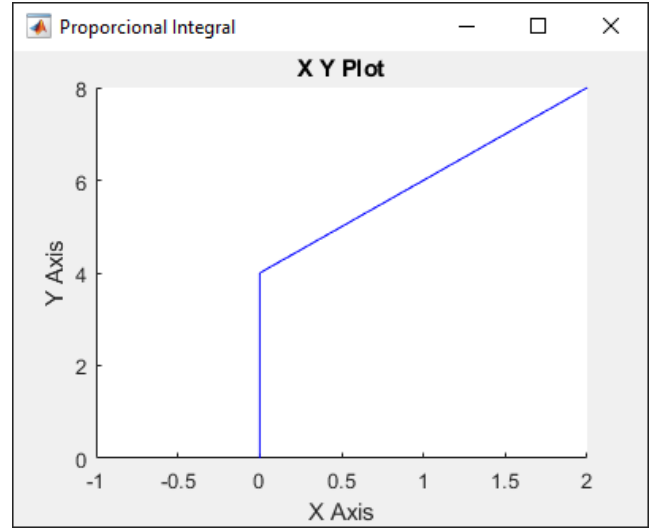


Figura 18. Controlador Proporcional Integral com entrada de degrau

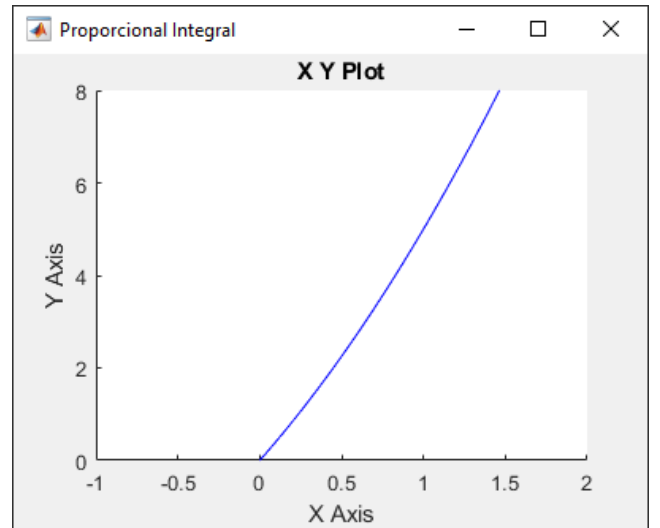


Figura 19. Controlador Proporcional Integral com entrada de rampa

ganho derivativo, que é o ganho derivativo é o ganho proporcional multiplicado pelo tempo derivativo.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_D s \quad (37)$$

Realizando as simulações e levando em consideração o $K_P = 4$ e $T_D = 0,8$, chegamos nos gráficos apresentados na figura 20 e na figura 21. Neles podem ser observados que o degrau unitário apresenta um pico inicial, juntamente com uma interferência em no sinal final, muito próximo do valor do ganho proporcional. Já a rapa unitária apresenta uma elevação gerada pelo ganho proporcional e uma interferência gerada pelo ganho derivativo.

5.5 Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

A ação realizada pelo controle proporcional integral derivativo, age a traves de todos os ganhos listados até agora, ganho proporcional, integral e derivativo.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \quad (38)$$

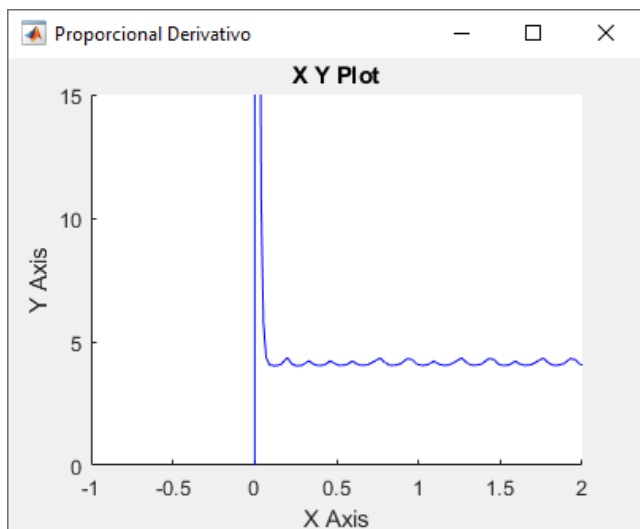


Figura 20. Controlador Proporcional Derivativo com entrada de degrau

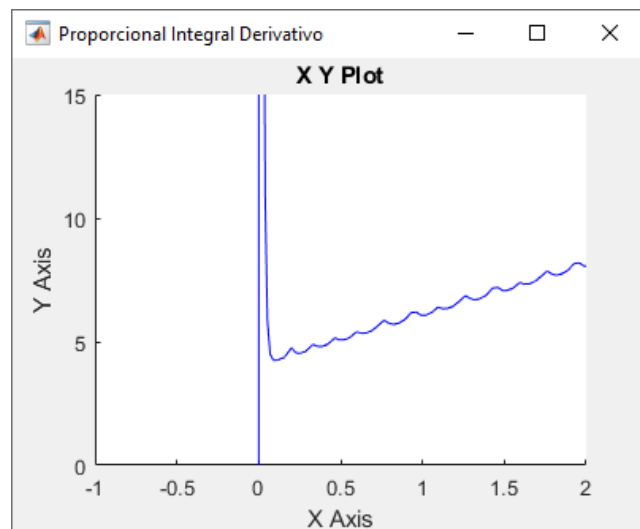


Figura 22. Controlador Proporcional Integral Derivativo com entrada de degrau

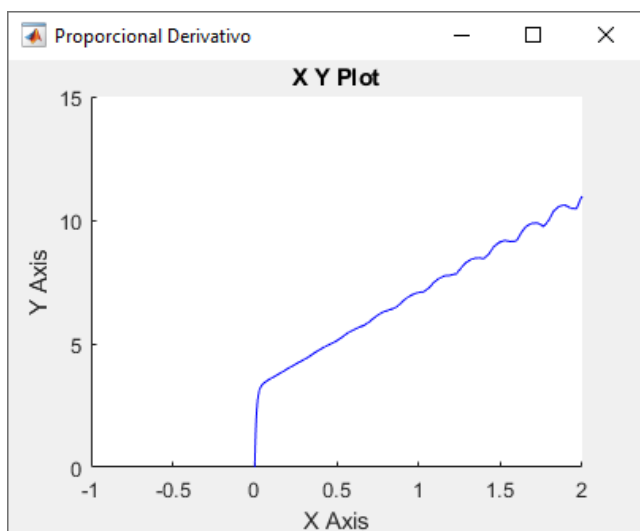


Figura 21. Controlador Proporcional Derivativo com entrada de rampa

Realizando as simulações e levando em consideração o $K_P = 4$; $T_I = 2$ e $T_D = 0,8$, chegamos nos gráficos apresentados na figura 22 e na figura 23. Neles podem ser observados que o degrau unitário apresenta um pico, uma elevação, uma interferência e uma aparência similar a uma rampa. Já o gráfico gerado pela rampa unitária, apresentou uma elevação, juntamente com uma interferência e uma parábola.

6. CONCLUSÃO

Concluiu-se que existe uma alta importância no conhecimento de sistemas de controle para todas as áreas de engenharia. Apenas com os poucos exemplos montados, foi possível identificar as suas inúmeras aplicações. Também é possível analisar a importância de haver um conhecimento maior tanto dos sinais de entrada e saída, quanto as ações dos controladores e como elas afetam a saída do sistema.

Até um sistema simples como o de um tanque acoplado pode ser analisado por sistemas de controle. E como an-

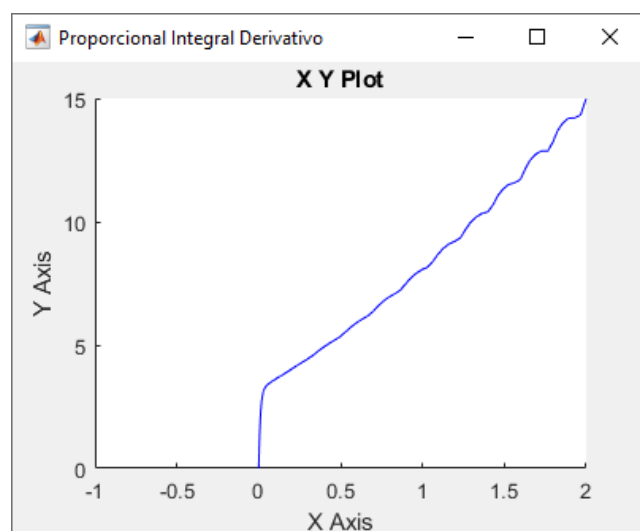


Figura 23. Controlador Proporcional Integral Derivativo com entrada de rampa

tes demonstrado, esse sistema tem a tendência de atingir um regime de equilíbrio, baseado na entrada aplicada no sistema. A mesma tendência foi verificada nos circuitos elétricos, nos quais o tempo dessa estabilização depende das transformações realizadas no sistema. Desse último, gera-se uma relação entre os resistores, indutores e capacitores, com as ações de controle proporcional, derivativo e integral, respectivamente. Essas ações são responsáveis por, alterar ou encontrar o estado de equilíbrio do sistema.

REFERÊNCIAS

- MathWorks (2021a). Matlab version 9.10.0 (r2021a). URL <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>. Acesso em: 20/10/2021.
- MathWorks (2021b). Simulink (r2021a). URL <https://www.mathworks.com/products/simulink.html>. Acesso em: 20/10/2021.
- Ogata, K. (2004). *Engenharia de Controle Modernos*. Prentice-Hall.