



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΙΤΛΟΣ

Διδακτορική Διατριβή

του

Αλεξάνδρου Φιλοθέου του Χρήστου και της Μαρίνας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΚΑΙ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

ΒΑΣΙΛΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΟΚΧΟΛΜΗΣ

που εκπονήθηκε ως μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων για την απονομή του τίτλου του

Διδάκτορα Μηχανικού

Επιβλέπων

Γεώργιος Δ. Σεργιάδης

Καθηγητής

Συμβουλευτική Επιτροπή

Τραϊανός Β. Γιούλτσας

Καθηγητής

Ανδρέας Λ. Συμεωνίδης

Αναπληρωτής Καθηγητής



*Η κύρια αιτία των προβλημάτων είναι οι λύσεις.*

—Έρικ Σέβαράιντ



Περίληψη

Abstract



# Περιεχόμενα

I	Εισαγωγή	1
II	Προβλήματα—Λύσεις—Συμβολές	3
1	Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις χω- ρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων	5
1.1	Στόχοι του κεφαλαίου και δομή	5
1.2	Μεθοδολογία ευθυγράμμισης προσανατολισμού	6
1.2.1	Η μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση	7
1.2.2	Η μέθοδος Πρώτων Αρχών	9
1.2.3	Η μέθοδος του Προκρούστη	13
1.2.4	Η κλίση της διακριτικής γωνίας του αισθητήρα	19
1.2.5	Η μέθοδος του Πιτυοκάμπτη Σίνι	21
1.2.6	Η μέθοδος του Θησέα	24
1.2.7	Περιορισμοί και ιδιότητες υπό γενικές συνθήκες	28
1.3	Μεθοδολογία ευθυγράμμισης θέσης	34
1.3.1	Η μέθοδος Πρώτων Αρχών	35
1.3.2	Ιδιότητες υπό γενικές συνθήκες	38
1.4	Μεθοδολογία ευθυγράμμισης από κοινού	40
1.4.1	Αντιμετώπιση των υπό γενικές συνθήκες γωνιακών περιορισμών	41
1.4.2	Το σύστημα από κοινού ευθυγράμμισης	46

1.5	Πειραματική αξιολόγηση . . . . .	49
1.6	Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα . . . . .	49
<b>III</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>67</b>
<b>IV</b>	<b>Παραπομπές</b>	<b>69</b>
<b>V</b>	<b>Παραρτήματα</b>	<b>71</b>
	Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις χω- ρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων	73
.1	Απόδειξη του Λήμματος II . . . . .	73
.2	Σφάλματα εκτίμησης θέσης και προσανατολισμού . . . . .	75



# Μέρος Ι

## Εισαγωγή



## Μέρος II

# Προβλήματα—Λύσεις— Συμβολές



# Κεφάλαιο 1

## Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων

Η έρευνα που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο αντλεί τις πηγές της από τις αιτίες περαιτέρω έρευνας του προηγούμενου κεφαλαίου, όπως αυτές διατυπώθηκαν στην τελευταία του ενότητα. Στο παρόν κεφάλαιο επιζητούμε το σχεδιασμό και την ανάπτυξη μεθόδων ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις η οποία λειτουργεί ... και κανε μια ανακεφαλαιωση εδω γιατι αλλαζουμε ταχυτητα και ροτα

### 1.1 Στόχοι του κεφαλαίου και δομή

**Πρόβλημα Π3.** Έστω ένα ρομπότ κινητής βάσης του πεδίου εφαρμογής ??, ικανό να κινείται στο επίπεδο  $x-y$ , εξοπλισμένο με έναν οριζόντια τοποθετημένο αισθητήρα lidar μετρήσεων δύο διαστάσεων που εκπέμπει  $N_s$  ακτίνες. Έστω επίσης ότι τα ακόλουθα είναι διαθέσιμα ή ευσταθούν:

- Ο χάρτης  $M$  του περιβάλλοντος στο οποίο κινείται το ρομπότ

- Μια δισδιάστατη μέτρηση  $\mathcal{S}_R$  μεγέθους  $N_s$ , που λαμβάνεται από την—άγνωστη και αναζητούμενη—στάση  $\mathbf{p}(\mathbf{l}, \theta)$ ,  $\mathbf{l} = (x, y)$
- Μια εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα  $\hat{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\theta})$  στο σύστημα αναφοράς του χάρτη, όπου  $\hat{\mathbf{l}} = (\hat{x}, \hat{y})$  είναι σε μία γειτονιά του  $\mathbf{l}$

Τότε ο στόχος είναι να μειωθεί το μέτρο του σφάλματος στάσης του αισθητήρα  $\mathbf{e}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{p}}) \triangleq \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}$  από την αρχική του τιμή  $\|\mathbf{e}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{p}})\|_2$  βελτιώνοντας την εκτίμηση της στάσης του αισθητήρα σε  $\hat{\mathbf{p}}'(\hat{x}', \hat{y}', \hat{\theta}')$  έτσι ώστε

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{p}}')\|_2 < \|\mathbf{e}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{p}})\|_2 \quad (*)$$

δεδομένων των κάτωθι παραδοχών και περιορισμών:

- Το γωνιακό εύρος του αισθητήρα lidar ισούται με  $\lambda = 2\pi$  (Παραδοχή ??)
- Η λύση του προβλήματος δίνεται μέσω ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις (Παραδοχή ??)
- Η επίλυση του προβλήματος δίνεται χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων ανάμεσα στις εισόδους της μεθόδου επίλυσης (Παραδοχή ??)
- Η εκτέλεση της επίλυσης του προβλήματος πρέπει γίνεται σε χρόνο που να συμβαδίζει με το ρυθμό ανανέωσης εκτιμήσεων στάσης που παρέχει η βασική μέθοδος εκτίμησης στάσης (Επακόλουθο ??)

## 1.2 Μεθοδολογία ευθυγράμμισης προσανατολισμού

Έστω οι παραδοχές του προβλήματος Π3. Έστω επιπλέον ότι  $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l}$ , δηλαδή μόνο ο προσανατολισμός του αισθητήρα πρέπει να εκτιμηθεί. Τότε ας υπολογιστεί η εικονική σάρωση  $\mathcal{S}_V$  μέσω δεσμοβολής (raycasting) από την εκτίμηση  $\hat{\mathbf{p}}$  στον χάρτη  $\mathbf{M}$ . Η εκτίμηση της περιστροφής της εικονικής σάρωσης  $\mathcal{S}_V$  σε σχέση με την πραγματική σάρωση  $\mathcal{S}_R$  μπορεί να βρεθεί μέσω των μεθόδων που παρουσιάζονται στις ενότητες 1.2.1, 1.2.2, και 1.2.3. Το

σφάλμα της εκτίμησης προσανατολισμού μπορεί να μειωθεί περαιτέρω μέσω της μεθόδου που παρουσιάζεται στην ενότητα 1.2.6.

Στα συμφραζόμενα του παρόντος κεφαλαίου, έστω  $\mathcal{F}\{S\}$  ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $S$ ,  $\mathcal{F}^{-1}\{S\}$  ο αντίστροφός του,  $\mathcal{F}_1\{S\}$  ο πρώτος όρος του μετασχηματισμού (υποθέτοντας αρίθμηση από το μηδέν),  $c^*$  ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού  $c$ ,  $|c|$  το μέτρο του, και  $i$  η φανταστική μονάδα.

### 1.2.1 Η μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση

Έστω ότι ο χώρος δειγματοληπτείται επαρκώς πυκνά γωνιακά, τότε για  $k, \xi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ :  $k, \xi \in [0, N_s - 1]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_V[k] &\simeq \mathcal{S}_R[(k - \xi) \bmod N_s] \Rightarrow \\ \mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}(u) &\simeq e^{-i2\pi\xi u/N_s} \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}(u) \end{aligned}$$

και, επομένως, αφού  $2\pi \frac{\xi}{N_s} = \xi \frac{2\pi}{N_s} = \xi\gamma$ , όπου  $\gamma$  είναι η διακριτική γωνία του αισθητήρα:

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}(u) &\triangleq \frac{\mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}^* \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}}{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}| \cdot |\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}|} \\ &\simeq \frac{e^{-i\xi\gamma u} \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}^* \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}}{|e^{-i\xi\gamma u} \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}^*| \cdot |\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}|} \\ &= e^{-i\xi\gamma u} \cdot \frac{\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}^* \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}}{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}| \cdot |\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}|} \\ &= e^{-i\xi\gamma u} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier του  $Q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}$  είναι μία Kronecker  $\delta$ -συνάρτηση  $q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R} = \mathcal{F}^{-1}\{Q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}\}$  με κέντρο  $\xi$ :

$$\xi = \arg \max_u q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}(u) \tag{1.2}$$

Εάν η διαφορά του προσανατολισμού μεταξύ των στάσεων από τις οποίες ελήφθησαν οι σαρώσεις  $\mathcal{S}_R$  και  $\mathcal{S}_V$  είναι  $\Delta\theta = \theta - \hat{\theta}$ , τότε  $\Delta\theta = \xi\gamma + \phi$ , όπου  $\bmod(\Delta\theta, \gamma) = \phi \in [-\frac{\gamma}{2}, +\frac{\gamma}{2}]$ . Τα παραπάνω μάς οδηγούν στη διατύπωση του Λήμματος I:

**Λήμμα I.** Έστω οι παραδοχές του προβλήματος Π3 και  $\hat{l} = l$ . Έστω επίσης ότι (α) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν φέρουν διαταραχές, και (β) ο χάρτης  $M$  αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια. Τότε ενημερώνοντας την εκτίμηση προσανατολισμού  $\hat{\theta}$  σε  $\hat{\theta}'$ :

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + \xi\gamma \quad (1.3)$$

όπου  $\xi$  δίνεται από την εξίσωση (1.2), οδηγεί σε ένα επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού  $\phi$ :

$$|\phi| \leq \frac{\gamma}{2} \quad (1.4)$$

**Επακόλουθο I.** Ο στόχος (\*) επιτυγχάνεται υπό την προϋπόθεση ότι  $|\theta - \hat{\theta}| > \frac{\gamma}{2}$ .

Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $p(x, y, \theta)$  ονομάζεται στο εξής μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση. Στο σχήμα 1.1 απεικονίζεται η αρχική και τελική συνθήκη ευθυγράμμισης προσανατολισμού με εφαρμογή της μεθόδου Fourier-Mellin μίας διάστασης για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων με  $\gamma = 2\pi/360$ , σε ένα μη δομημένο περιβάλλον, του οποίου ο χάρτης το αναπαριστά τέλεια, ενώ οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο. Το σχήμα 1.2 απεικονίζει το μέσο χρόνο εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου σε δέκα εκτελέσεις για αυξανόμενο μέγεθος σαρώσεων  $N_s$ . Ο Αλγόριθμος I παρουσιάζει σε ψευδοκώδικα τη διαδικασία διόρθωσης προσανατολισμού με βάση την εν λόγω μέθοδο.

---

**Αλγόριθμος I rc\_fm**


---

**Input:**  $S_R, S_V, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma$

**Output:**  $\hat{\theta}', q_{\max}$

- 1:  $q_{S_V, S_R} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{Q_{S_V, S_R}\}$  (εξ. 1.1)
  - 2:  $\xi = \arg \max q_{S_V, S_R}$
  - 3:  $q_{\max} \leftarrow q_{S_V, S_R}[\xi] = \max q_{S_V, S_R}$
  - 4:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\theta} + \xi\gamma$
  - 5: **return**  $(\hat{\theta}', q_{\max})$
-





Σχήμα 1.1: Αριστερά: η αρχική  $\hat{p}[0] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[0])$  και τελική  $\hat{p}[1] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[1])$  εκτίμηση στάσης του αισθητήρα σε ένα περιβάλλον με χάρτη  $M$ , για πραγματική στάση  $p(\mathbf{l}, \theta)$ , ως συνέπεια της εφαρμογής της μεθόδου γωνιακής ευθυγράμμισης Fourier-Mellin μίας διάστασης. Δεξιά: το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού ως συνάρτηση της διακριτικής γωνίας  $\gamma$  του αισθητήρα



Σχήμα 1.2: Ο μέσος χρόνος εκτέλεσης μίας επανάληψης των μεθόδων Fourier-Mellin μίας διάστασης (μπλε), Πρώτων Αρχών (πράσινο), και Προκρούστη (κόκκινο), για δέκα εκτελέσεις, ανά μέγεθος σαρώσεων εισόδου  $N_s$

### 1.2.2 Η μέθοδος Πρώτων Αρχών

Έστω μία δισδιάστατη σάρωση  $\mathcal{S}$  που έχει ληφθεί από τη στάση  $(x, y, \theta)$  σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων (Ορισμός ??). Έστω ότι το γωνιακό εύρος της  $\mathcal{S}$  είναι  $\lambda = 2\pi$ . Οι συντεταγμένες του τελικού σημείου της  $n$ -οστής ακτίνας της  $\mathcal{S}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_s - 1$ , στο

σύστημα συντεταγμένων είναι  $(x_n, y_n)$ :

$$x_n - x = d_n \cos(\theta + \frac{2\pi n}{N_s} - \pi) = -d_n \cos(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) \quad (1.5)$$

$$y_n - y = d_n \sin(\theta + \frac{2\pi n}{N_s} - \pi) = -d_n \sin(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) \quad (1.6)$$

Εδώ παρατηρούμε ότι  $-(x_n - x)$  και  $(y_n - y)$  είναι αντίστοιχα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής ποσότητας

$$\begin{aligned} d_n e^{-i(\theta + \frac{2\pi n}{N_s})} &= d_n \cos(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) - i \cdot d_n \sin(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) \\ &\stackrel{(1.5), (1.6)}{=} -(x_n - x) + i \cdot (y_n - y) \end{aligned} \quad (1.7)$$

και, επομένως

$$d_n e^{-i2\pi n/N_s} = e^{i\theta} (-(x_n - x) + i \cdot (y_n - y)) \quad (1.8)$$

Αθροίζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης (1.8) επί του συνόλου των  $N_s$  ακτίνων λαμβάνουμε τον πρώτο όρο του διακριτού μετασχηματισμού Fourier του σήματος  $\{d_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_s - 1$ ,  $\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}\} = \mathcal{F}\{\mathcal{S}\}[1]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}\} &= \sum_{n=0}^{N_s-1} d_n \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \stackrel{(1.8)}{=} \sum_{n=0}^{N_s-1} e^{i\theta} (-(x_n - x) + i \cdot (y_n - y)) \\ &= e^{i\theta} \sum_{n=0}^{N_s-1} [(x - i \cdot y) + (-x_n + i \cdot y_n)] \\ &= e^{i\theta} N_s (x - i \cdot y) - e^{i\theta} \Delta \end{aligned} \quad (1.9)$$

όπου  $\Delta \triangleq \sum_{n=0}^{N_s-1} (x_n - i \cdot y_n)$ .

Συμβολίζοντας με το γράμμα  $R$  τις ποσότητες που αντιστοιχούν στην πραγματική σάρωση  $\mathcal{S}_R$ , η οποία έχει ληφθεί από τη στάση του φυσικού αισθητήρα  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$ , και με  $V$  εκείνες που αντιστοιχούν στην εικονική σάρωση  $\mathcal{S}_V$ , η οποία έχει ληφθεί από τη στάση  $\hat{\mathbf{p}}(x, y, \hat{\theta})$ :

$$\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} = \sum_{n=0}^{N_s-1} d_n^R \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \stackrel{(1.9)}{=} N_s e^{i\theta} (x - i \cdot y) - e^{i\theta} \Delta_R \quad (1.10)$$

$$\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} = \sum_{n=0}^{N_s-1} d_n^V \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \stackrel{(1.9)}{=} N_s e^{i\hat{\theta}}(x - i \cdot y) - e^{i\hat{\theta}} \Delta_V \quad (1.11)$$

Έστω τώρα ότι

$$\begin{aligned} \Delta_R - \Delta_V &= \sum_{n=0}^{N_s-1} (x_n^R - x_n^V) - i \cdot \sum_{n=0}^{N_s-1} (y_n^R - y_n^V) \\ &= N_s(\delta_x - i \cdot \delta_y) \end{aligned} \quad (1.12)$$

όπου

$$\delta_x \triangleq \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} (x_n^R - x_n^V) \quad (1.13)$$

$$\delta_y \triangleq \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} (y_n^R - y_n^V) \quad (1.14)$$

τότε

$$\Delta_V = \Delta_R - N_s(\delta_x - i \cdot \delta_y) \quad (1.15)$$

Ο πρώτος όρος του διακριτού μετασχηματισμού Fourier του σήματος που αποτελείται από τη διαφορά των δύο σημάτων (1.10) και (1.11) είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} &= \sum_{n=0}^{N_s-1} (d_n^R - d_n^V) \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \\ &\stackrel{(1.10), (1.11)}{=} N_s(x - i \cdot y)(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - e^{i\theta} \Delta_R + e^{i\hat{\theta}} \Delta_V \\ &\stackrel{(1.15)}{=} N_s(x - i \cdot y)(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - e^{i\theta} \Delta_R + e^{i\hat{\theta}}(\Delta_R - N_s(\delta_x - i \cdot \delta_y)) \\ &= N_s(x - i \cdot y)(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - \Delta_R(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \\ &= (e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}})[N_s(x - i \cdot y) - \Delta_R] - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \\ &\stackrel{(1.10)}{=} (e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) \frac{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}}{e^{i\theta}} - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \\ &= (1 - e^{-i(\theta - \hat{\theta})}) \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} &= -e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \\ e^{-i(\theta-\hat{\theta})} &= \frac{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}}{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}} - \frac{N_s e^{i\hat{\theta}}}{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Χρησιμοποιώντας την πολική αναπαράσταση  $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|e^{i\angle\mathbf{A}}$ :

$$e^{-i(\theta-\hat{\theta})} = \frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}|}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}|} e^{-i(\angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\})} - \frac{e^{-i(\angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \hat{\theta})}}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}|} (N_s \delta_x - i \cdot N_s \delta_y) \quad (1.17)$$

Λόγω του γεγονότος ότι ο προσανατολισμός  $\theta$  του αισθητήρα είναι άγνωστος, τα τελικά σημεία  $\{(x_n^R, y_n^R)\}$  καθίστανται ομοίως άγνωστα, και συνεπώς και οι ποσότητες  $\delta_x, \delta_y$ . Προκειμένου να αποκτήσουμε μια αρχική διαίσθηση ως προς τα μέτρα των τελευταίων κάνουμε την παρατήρηση ότι, εξ ορισμού, οι ποσότητες  $N_s \delta_x$  και  $N_s \delta_y$  ποσοτικοποιούν τη διαφορά της προσέγγισης των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων επί των καμπύλων που ορίζονται από τα τελικά σημεία των δύο σαρώσεων στους δύο κύριους άξονες  $x$  και  $y$ . Η προσέγγιση αυτή οφείλεται στο πεπερασμένο μέγεθος των εκπεμπόμενων ακτίνων  $N_s$ . Επομένως υπό τις υποθέσεις ότι (α) ο χάρτης του περιβάλλοντος είναι τέλεια αναπαράστασή του και (β) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν επηρεάζονται από διαταραχές: καθώς  $N_s \rightarrow \infty$ ,  $N_s \delta_x, N_s \delta_y \rightarrow 0$ , τα οποία με τη σειρά τους σημαίνουν λόγω της εξίσωσης (1.17) ότι  $\frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}|}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}|} \rightarrow 1$  και  $\theta - \hat{\theta} \rightarrow \angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}$ . Η παραπάνω ανάλυση μάς οδηγεί στη διατύπωση του Λήμματος II:

**Λήμμα II.** Έστω οι παραδοχές του προβλήματος Π3 και  $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l}$ . Έστω επίσης ότι (α) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν φέρουν διαταραχές, και (β) ο χάρτης  $\mathbf{M}$  αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια. Τότε ενημερώνοντας την εκτίμηση προσανατολισμού σε  $\hat{\theta}'$ :

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + \angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} \quad (1.18)$$

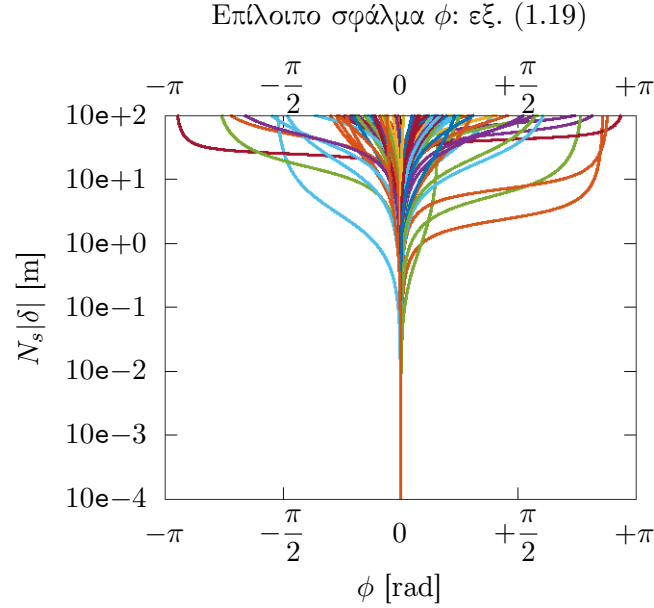
όπου  $\mathcal{F}_1\{\cdot\} = \mathcal{F}\{\cdot\}[1]$ , οδηγεί σε ένα επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού  $\phi$ :

$$\phi = \angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} - \tan^{-1} \frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \sin(\angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \sin(\hat{\theta} + \angle\delta)}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \cos(\angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \cos(\hat{\theta} + \angle\delta)} \quad (1.19)$$

όπου  $\delta = \delta_x - i \cdot \delta_y$ .

Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα Α'.1.

**Επακόλουθο II.** Το μέτρο του σφάλματος  $|\phi|$  είναι αντιστρόφως ανάλογο του αριθμού των ακτίνων  $N_s$  που εκπέμπει ο αισθητήρας στην περίπτωση που τόσο η πραγματική μέτρηση  $S_R$  όσο και η εικονική σάρωση  $S_V$  δεν διαταράσσονται από θόρυβο (σχήμα 1.3).

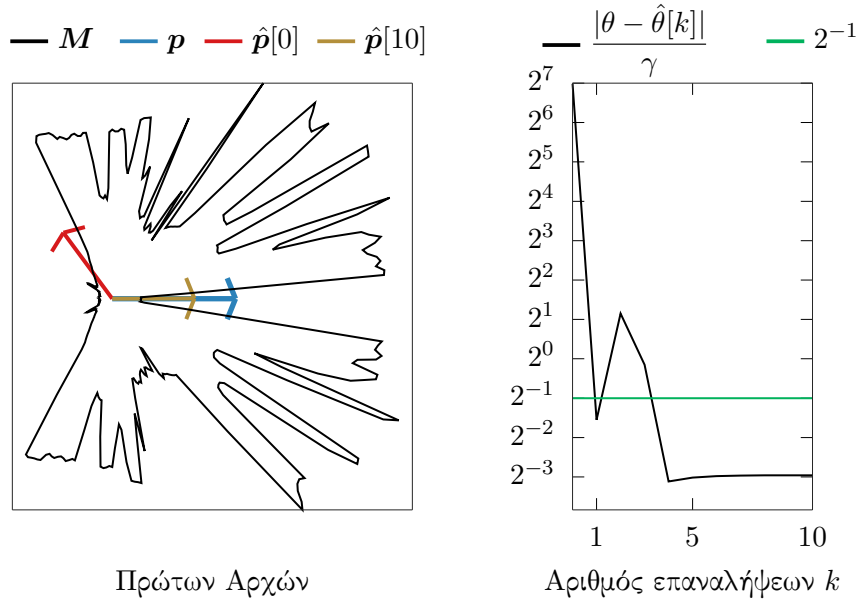


Σχήμα 1.3: Θεωρητικές τιμές του επίλοιπου σφάλματος  $\phi$  (εξ. 1.19) σε εκατό προσομοιώσεις για μεταβλητές τιμές  $N_s |\delta|$ . Το μέτρο  $|\mathcal{F}_1\{S_V\}|$  είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στο διάστημα  $[0.0, 200.0]$ , το μέγεθος  $N_s |\delta|$  στο διάστημα  $[10^{-4}, 10^{+2}]$ , και τα ορίσματα  $\angle \mathcal{F}_1\{S_V\}$ ,  $\angle \delta$  στο  $[-\pi, \pi)$ . Το επίλοιπο σφάλμα  $\phi \rightarrow 0$  καθώς  $N_s \rightarrow \infty \Rightarrow N_s |\delta| \rightarrow 0$

Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$  ονομάζεται στο εξής μέθοδος Πρώτων Αρχών. Στο σχήμα 1.4 απεικονίζεται η αρχική και τελική συνθήκη ευθυγράμμισης προσανατολισμού με εφαρμογή της μεθόδου Πρώτων αρχών για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων με  $\gamma = 2\pi/360$ , υπό τις ίδιες συνθήκες διεξαγωγής μείωσης του σφάλματος προσανατολισμού με αυτές που παρουσιάζονται στο σχήμα 1.1. Το σχήμα 1.2 απεικονίζει το μέσο χρόνο εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου σε δέκα εκτελέσεις για αυξανόμενο μέγεθος σαρώσεων  $N_s$ . Ο Αλγόριθμος II παρουσιάζει σε ψευδοκώδικα τη διαδικασία διόρθωσης προσανατολισμού με βάση την εν λόγω μέθοδο.

### 1.2.3 Η μέθοδος του Προκρούστη

Έστω ότι η προβολή των τελικών σημείων των ακτίνων της σάρωσης  $S_V$  γύρω από τη στάση  $\hat{\mathbf{p}}(x, y, \hat{\theta})$  παράγει το σύνολο σημείων  $\mathbf{P}_V$  στο οριζόντιο επίπεδο. Έστω ότι η ίδια



Σχήμα 1.4: Αριστερά: η αρχική  $\hat{p}[0] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[0])$  και τελική  $\hat{p}[1] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[1])$  εκτίμηση στάσης του αισθητήρα σε ένα περιβάλλον με χάρτη  $M$ , για πραγματική στάση  $\mathbf{p}(\mathbf{l}, \theta)$ , ως συνέπεια της εφαρμογής της μεθόδου γωνιακής ευθυγράμμισης Πρώτων Αρχών. Δεξιά: το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού ως συνάρτηση της διακριτικής γωνίας  $\gamma$  του αισθητήρα

---

#### Αλγόριθμος II rc\_x1

---

**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}(x, y, \hat{\theta})$

**Output:**  $\hat{\theta}'$

- 1:  $\mathbf{R} = \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}[1]$
  - 2:  $\mathbf{V} = \mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}[1]$
  - 3:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\theta} + \arg(\mathbf{R}) - \arg(\mathbf{V})$
  - 4: **return**  $\hat{\theta}'$
- 

προβολή για τη σάρωση  $\mathcal{S}_R$  ως προς τη στάση  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$  παράγει το σύνολο  $\mathbf{P}_R$ . Η περιστροφή της στάσης  $\hat{p}$  που ευθυγραμμίζει βέλτιστα το σύνολο σημείων  $\mathbf{P}_V$  σε σχέση με το  $\mathbf{P}_R$  μπορεί να βρεθεί από τη λύση του Ορθογώνιου Προσchrύστειου προβλήματος [Sch66] για πίνακες εισόδου  $\mathbf{P}_V$  και  $\mathbf{P}_R$ . Στην περίπτωση που ο πίνακας μετασχηματισμού περιορίζεται στο να έχει τη δομή πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}$ :  $\det(\mathbf{R}) = 1$ , το πρόβλημα ευθυγράμμισης ονομάζεται Περιορισμένο Ορθογώνιο Προσchrύστειο πρόβλημα.

Σε αυτή την ενότητα αναζητούμε την λύση αυτού του τελευταίου προβλήματος ως μέσο επίλυσης του προβλήματος Α'2, διότι ο περιορισμός του πίνακα μετασχηματισμού σε πίνακα περιστροφής δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού της γωνίας περιστροφής της εκτίμησης στάσης από την οποία το εικονικό διάνυσμα σαρώσεων εμφανίζει τη βέλτιστη ευθυγράμμιση

με το πραγματικό διάνυσμα  $\mathcal{S}_R$ . Η λύση του Περιορισμένου Ορθογώνιου Προσχωρούστειου προβλήματος δίνεται στο [Ume91] και περιγράφεται παρακάτω.

Δεδομένου ότι στα συμφραζόμενα του προβλήματός Π3 η θέση  $l$  είναι άγνωστη, τα τελικά σημεία κάθε σάρωσης λαμβάνονται με την προβολή κάθε σάρωσης στο επίπεδο  $x-y$  σύμφωνα με το τοπικό σύστημα αναφοράς της κάθεμίας, δηλαδή σαν να είχε ληφθεί η κάθε μιά από το  $O(0,0,0)$ . Ο πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  που ευθυγραμμίζει βέλτιστα το σύνολο  $\mathbf{P}_V$  με το  $\mathbf{P}_R$  είναι ο πίνακας που ελαχιστοποιεί την απόκλιση των περιστραμμένων σημείων  $\mathbf{R}\mathbf{P}_V$  από το  $\mathbf{P}_R$ :

$$\arg \min_{\mathbf{R}} \|\mathbf{P}_R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_V\|_F^2$$

όπου  $\|\mathbf{A}\|_F = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{1/2}$  δηλώνει το μέτρο Frobenius του πίνακα πραγματικών τιμών  $\mathbf{A}$ . Έστω ο τελεστής  $\text{tr}(\mathbf{A})$  ότι δηλώνει το ίχνος του πίνακα  $\mathbf{A}$ . Τότε

$$\|\mathbf{P}_R - \mathbf{R}\mathbf{P}_V\|_F^2 = \text{tr}(\mathbf{P}_R^\top \mathbf{P}_R + \mathbf{P}_V^\top \mathbf{P}_V) - 2 \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top) \quad (1.20)$$

Δεδομένου ότι μόνο ο δεύτερος όρος της δεξιάς πλευράς εξαρτάται από τον πίνακα  $\mathbf{R}$ , για την ελαχιστοποίηση της (1.20) ως προς  $\mathbf{R}$  αρκεί να βρεθεί ο πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  που μεγιστοποιεί το ίχνος  $\text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_V\mathbf{P}_R^\top)$ . Ο βέλτιστος πίνακας  $\mathbf{R}$  δίνεται από το Λήμμα III:

**Λήμμα III.** Έστω  $\mathbf{P}_R$  και  $\mathbf{P}_V$  πίνακες διαστάσεων  $2 \times N_s$ ,  $\mathbf{R}$  πίνακας διαστάσεων  $2 \times 2$ , και  $\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$  η αποσύνθεση του  $\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top$  σε ιδιάζουσες τιμές (Singular Value Decomposition—SVD). Τότε ο πίνακας  $\mathbf{R}$  που ελαχιστοποιεί το μέτρο  $\|\mathbf{P}_R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_V\|_F^2$  δίνεται από τη σχέση  $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\top$ , όπου  $\mathbf{S} = \text{diag}(1, \det(\mathbf{U}\mathbf{V}))$ .

**Επακόλουθο III.** Η τιμή του μέγιστου ίχνους  $T(\mathbf{P}_R, \mathbf{P}_V) \triangleq \max \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top)$  είναι

$$\max \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top) = \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{S}) \quad (1.21)$$

Το Λήμμα III παρέχει τον βέλτιστο πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}$  υπό την προϋπόθεση ότι τόσο το σύνολο  $\mathbf{P}_R$  όσο και το  $\mathbf{P}_V$  είναι γνωστά. Ωστόσο, στα συμφραζόμενα του προβλήματος Π3 τα τελικά σημεία  $\mathbf{P}_R$  υπολογίζονται από έναν αυθαίρετο προσανατολισμό επειδή ο επιθυμητός προσανατολισμός είναι θεμελιωδώς άγνωστος. Επομένως ο υπολογισμός του πίνακα  $\mathbf{R}$  και

η εξαγωγή του σχετικού προσανατολισμού του  $\mathbf{P}_V$  σε σχέση με το  $\mathbf{P}_R$  από τον πίνακα  $\mathbf{R}$  σε ένα βήμα είναι αδύνατη. Αυτό που μπορεί να γίνει για την εκτίμηση του προσανατολισμού της στάσης  $\mathbf{p}$  ως προς τον προσανατολισμό της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  είναι το εξής. Υπολογίζεται το γινόμενο  $\mathbf{P}_R \mathbf{P}_V^\top$  σε  $O(N_s^2)$ , η αποσύνθεσή του σε ιδιάζουσες τιμές σε  $O(1)$ , καταγράφεται η τιμή του ίχνους  $\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{S})$  σε  $O(1)$ , μετατοπίζεται ο πίνακας  $\mathbf{P}_V$  κατά στήλες προς τα αριστερά μία φορά, και επαναλαμβάνεται η διαδικασία  $N_s - 1$  φορές. Έστω ότι η επανάληψη  $\psi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  καταγράφει το μέγιστο ίχνος: τότε η περιστροφή της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  κατά  $\psi\gamma$  μεγιστοποιεί το ίχνος  $\text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top)$  και ελαχιστοποιεί το μέτρο του σφάλματος ευθυγράμμισης (1.20) για μία δεδομένη διακριτική γωνία  $\gamma$ . Η παραπάνω διαδικασία αποδίδει τη βέλτιστη περιστροφή επειδή το ίχνος  $\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{S})$  ουσιαστικά αναλαμβάνει το ρόλο ενός μέτρου ευθυγράμμισης μεταξύ των συνόλων σημείων  $\mathbf{P}_V$  και  $\mathbf{P}_R$ .

Η παραπάνω διαδικασία καταγραφής  $N_s$  ιχνών μπορεί να υπολογιστεί είτε με ευθύ τρόπο, πολυπλοκότητας  $O(N_s^3)$ , είτε μέσω με της μεθόδου που παρουσιάζεται στο [DBH15] με σημαντικά μειωμένη πολυπλοκότητα  $O(N_s \log N_s)$ . Η μέθοδος αυτή θα αναφέρεται στο εξής ως μέθοδος DBH και περιγράφεται παρακάτω.

Έστω  $\tilde{\mathbf{A}}$  ο πίνακας  $\mathbf{A}$  με αντίστροφη σειρά στηλών,  $\mathbf{P}_R = [\mathbf{p}_R^x; \mathbf{p}_R^y]$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_V = [\mathbf{p}_V^x; \mathbf{p}_V^y]$ . Έστω επίσης ότι ο τελεστής  $\odot$  υποδηλώνει τον πολλαπλασιασμό κατά στοιχείο. Τότε υπολογίζονται τέσσερα διανύσματα μεγέθους  $N_s$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{11} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^x\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^x\}\} \\ \mathbf{m}_{12} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^y\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^x\}\} \\ \mathbf{m}_{21} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^x\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^y\}\} \\ \mathbf{m}_{22} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^y\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^y\}\} \end{aligned}$$

Μετά τον υπολογισμό των διανυσμάτων  $\mathbf{m}_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2$ , υπολογίζονται  $N_s$  πίνακες  $\mathbf{M}_j$ , μεγέθους  $2 \times 2$ , σύμφωνα με:

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11}^j & \mathbf{m}_{12}^j \\ \mathbf{m}_{21}^j & \mathbf{m}_{22}^j \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

όπου  $j = 0, \dots, N - 1$ , και  $\mathbf{m}_{kl}^j$  είναι το  $j$ -οστό στοιχείο του διανύσματος  $\mathbf{m}_{kl}$ . Ο πίνακας



$\mathbf{M}_j$  είναι ίσος με τον πίνακα  $\mathbf{P}_R(\mathbf{P}_V^{N_s-1-j})^\top$ , όπου ο συμβολισμός  $\mathbf{A}^k$  δηλώνει τον πίνακα  $\mathbf{A}$  του οποίου οι στήλες έχουν μετατοπιστεί  $k$  φορές προς τα αριστερά. Η απόδειξη χρησιμοποιεί το Θεώρημα Κυκλικής Συνέλιξης του DFT και παραλείπεται.

Αφού υπολογιστούν και σχηματιστούν όλοι οι  $N_s$   $\mathbf{M}_j$  πίνακες, κάθε ένας αποσυντίθεται σε ιδιάζουσες τιμές. Το ίχνος κάθε πίνακα  $\mathbf{R}_j\mathbf{M}_j$  καταγράφεται με την εφαρμογή του Λήμματος III και του Επακόλουθου III. Έστω ότι το μέγιστο ίχνος καταγράφεται για τον δείκτη  $J$ , τότε η περιστροφή της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  κατά  $(N_s - 1 - J)\gamma = \psi\gamma$  επιτυγχάνει το ίδιο αποτέλεσμα με την ευθεία μέθοδο υψηλότερης πολυπλοκότητας για μία δεδομένη διακριτική γωνία  $\gamma$ . Εάν η διαφορά του προσανατολισμού μεταξύ των στάσεων από τις οποίες ελήφθησαν οι σαρώσεις  $\mathcal{S}_R$  και  $\mathcal{S}_V$  είναι  $\Delta\theta = \theta - \hat{\theta}$ , τότε  $\Delta\theta = (N_s - 1 - J)\gamma + \phi$ , όπου  $\text{mod}(\Delta\theta, \gamma) = \phi \in [-\frac{\gamma}{2}, +\frac{\gamma}{2}]$ . Τα παραπάνω μας οδηγούν στη διατύπωση του Λήμματος IV:

**Λήμμα IV.** Έστω οι παραδοχές του προβλήματος Π3 και  $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l}$ . Έστω επίσης ότι (α) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν φέρουν διαταραχές, και (β) ο χάρτης  $\mathbf{M}$  αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια. Τότε ενημερώνοντας την εκτίμηση προσανατολισμού σε  $\hat{\theta}'$ :

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + \psi\gamma \quad (1.23)$$

όπου  $\psi$  δίνεται από τη γραμμή 5 του Αλγορίθμου III, οδηγεί σε ένα επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού  $\phi$ :

$$|\phi| \leq \frac{\gamma}{2} \quad (1.24)$$

**Επακόλουθο IV.** Ο στόχος (\*) επιτυγχάνεται υπό την προϋπόθεση ότι  $|\theta - \hat{\theta}| > \frac{\gamma}{2}$ .

Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$  ονομάζεται στο εξής μέθοδος του Προκρούστη. Στο σχήμα 1.5 απεικονίζεται το κέρδος της εφαρμογής της μεθόδου DBH έναντι της αφελούς μεθόδου σε χρόνο εκτέλεσης για αύξοντες αριθμούς εκπαιεμένων από τον αισθητήρα σάρωσης ακτίνων  $N_s$ .

Στο σχήμα 1.6 απεικονίζεται η αρχική και τελική συνθήκη ευθυγράμμισης προσανατολισμού με εφαρμογή της μεθόδου Προκρούστη για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων με  $\gamma = 2\pi/360$ , σε ένα μη δομημένο περιβάλλον, του οποίου ο χάρτης το ανα-



Σχήμα 1.5: Το ποσοστό του χρόνου εκτέλεσης της μεθόδου ευθυγράμμισης Προκρούστη με την εφαρμογή της μεθόδου DBH προς το χρόνο εκτέλεσης χωρίς την εφαρμογή της, για αυξανόμενο αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων του αισθητήρα σάρωσης

παριστά τέλεια, ενώ οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο. Το σχήμα 1.2 απεικονίζει το μέσο χρόνο εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου σε δέκα εκτελέσεις για αυξανόμενο μέγεθος σαρώσεων  $N_s$ . Ο Αλγόριθμος II παρουσιάζει σε ψευδοκώδικα τη διαδικασία διόρθωσης προσανατολισμού με βάση την εν λόγω μέθοδο. Ο Αλγόριθμος IV παρουσιάζει σε ψευδοκώδικα τη μέθοδο DBH.

---

#### Αλγόριθμος III rc\_uf

---

**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma$

**Output:**  $\hat{\theta}', T$

- 1:  $\mathbf{P}_R \leftarrow \text{project}(\mathcal{S}_R, (0, 0, 0))$
  - 2:  $\mathbf{P}_V \leftarrow \text{project}(\mathcal{S}_V, (0, 0, 0))$
  - 3:  $(J, T) \leftarrow \text{rc\_uf\_core}(\mathbf{P}_R, \mathbf{P}_V)$  (Αλγόριθμος IV)
  - 4:  $N_s = 2\pi/\gamma$
  - 5:  $\psi = N_s - 1 - J$
  - 6:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\theta} + \psi\gamma$
  - 7: **return**  $(\hat{\theta}', T)$
-



Σχήμα 1.6: Αριστερά: η αρχική  $\hat{p}[0] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[0])$  και τελική  $\hat{p}[1] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[1])$  εκτίμηση στάσης του αισθητήρα σε ένα περιβάλλον με χάρτη  $M$ , για πραγματική στάση  $p(\mathbf{l}, \theta)$ , ως συνέπεια της εφαρμογής της μεθόδου γωνιακής ευθυγράμμισης Προκρούστη. Δεξιά: το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού ως συνάρτηση της διακριτικής γωνίας  $\gamma$  του αισθητήρα

#### 1.2.4 Η κλίνη της διακριτικής γωνίας του αισθητήρα

Η μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση (ενότητα 1.2.1) και η μέθοδος του Προκρούστη (ενότητα 1.2.3), σε αντίθεση με την μέθοδο Πρώτων Αρχών (ενότητα 1.2.2), είναι διακριτές μέθοδοι εκτίμησης υπό την έννοια ότι λειτουργούν μειώνοντας την αρχική εκτίμηση προσανατολισμού κατά ακέραια πολλαπλάσια της σταθεράς διακριτικής γωνίας  $\gamma$ , με αποτέλεσμα αυθαίρετα επίλοιπα σφάλματα προσανατολισμού  $\phi$  όπως ορίζονται από τα Λήμματα I και IV. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να ιδωθεί ως μία έτερη Προκρούστεια ιδιότητα,<sup>1</sup> που αφορά σε δύο μεθόδους αυτή τη φορά, υπό την έννοια ότι το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού  $|\theta - \hat{\theta}| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  τεμαχίζεται στην κλίνη  $K\gamma$ ,  $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , στη βάση διακριτής και εξωτερικής λογικής:—το αρχικό σφάλμα προσαρμόζεται στη μέθοδο, αντί η μέθοδος να είναι προσαρμόσιμη στο αρχικό σφάλμα.

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τα Λήμματα I, II, και IV τα τελικά σφάλματα προσανατολισμού των τριών ως άνω μεθόδων εξαρτώνται από τον αμετάβλητο αριθμό των εκπεμπόμενων από

<sup>1</sup>Στη μυθολογία ο Πολυπύμων, γνωστότερος ως Προκρούστης, ήταν ένας απαγωγέας ξένων, και μάλιστα της Ιεράς Οδού της Αττικής. Αφού φιλοξενούσε τα θύματά του προσφέροντάς τους ένα πλουσιοπάροχο δείπνο, τα προσκαλούσε να ξαπλώσουν σε ένα κρεβάτι διαστάσεων τέτοιων που το ύψος του θύματος καλείτο να προσαρμοστεί στο μήκος του κρεβατιού, είτε μέσω τεμαχισμού του σώματός του, είτε μέσω τάνυσής του. Ο Πολυπύμων είχε την ατυχία να απαγάγει τον Θησέα, ο οποίος, άρτι αφιχθείς από τη δολοφονία του Μινώταυρου, τον τιμώρησε χρησιμοποιώντας την τεχνική του εναντίον τού.

---

**Αλγόριθμος IV** rc\_uf\_core
 

---

**Input:**  $P_R, P_V$ **Output:**  $J, T(P_R, P_V)$ 

```

1: reverse( $P_V$ )
2:  $p_R^x \leftarrow$  first row of  $P_R$ 
3:  $p_R^y \leftarrow$  second row of  $P_R$ 
4:  $p_V^x \leftarrow$  first row of  $P_V$ 
5:  $p_V^y \leftarrow$  second row of  $P_V$ 
6:  $m_{11} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p_R^x\} \odot \mathcal{F}\{p_V^x\}\}$ 
7:  $m_{12} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p_R^y\} \odot \mathcal{F}\{p_V^x\}\}$ 
8:  $m_{21} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p_R^x\} \odot \mathcal{F}\{p_V^y\}\}$ 
9:  $m_{22} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p_R^y\} \odot \mathcal{F}\{p_V^y\}\}$ 
10:  $T \leftarrow \{\emptyset\}$ 
11: for  $j = 0 : N_s - 1$  do
12:    $M_j \leftarrow \begin{bmatrix} m_{11}(j) & m_{12}(j) \\ m_{21}(j) & m_{22}(j) \end{bmatrix}$ 
13:    $(U, D, V) \leftarrow \text{SVD}(M_j)$ 
14:   append trace( $D \cdot \text{diag}(1, \det(UV))$ ) to  $T$ 
15: end for
16: reverse( $T$ )
17:  $J \leftarrow \arg \max T$ 
18:  $T_{\max} \leftarrow \max\{T\} = T[J]$ 
19: return ( $J, T_{\max}$ )

```

---

τον φυσικό αισθητήρα απόστασης ακτίνων, ή, ισοδύναμα, από την αμετάβλητη διακριτική του γωνία  $\gamma$ . Το πεπερασμένο και αμετάβλητο των εκπεμπόμενων ακτίνων του φυσικού αισθητήρα, σε συνδυασμό με το αυθαίρετο του ρυθμού των αλλαγών του περιβάλλοντος (σχήμα ??), μπορούν να οδηγήσουν σε υποδειγματοληψία τμημάτων του περιβάλλοντος ή/και του χάρτη του, με συνέπεια τη μη βέλτιστη σύγκλιση της εκτίμησης προσανατολισμού.

Οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις αφορούν στα σφάλματα στάσης της συνολικής μεθόδου ευθυγράμμισης, όχι μόνο λόγω των μη επιλύσιμων σφαλμάτων προσανατολισμού αυτών καθεαυτά, αλλά και λόγω της διάδοσής τους στην διαδεχόμενη της μεθόδου ευθυγράμμισης προσανατολισμού μέθοδο ευθυγράμμισης της θέσης (Παρατήρηση ??): λόγω σύζευξης των δύο ειδών ευθυγράμμισης, η μέθοδος εκτίμησης θέσης απαιτεί επί της αρχής μηδενικά σφάλματα προσανατολισμού. Κατ' ελάχιστον, όμως, στην περίπτωση των δύο ως άνω Προ-

χρούστειων μεθόδων, το τελικό σφάλμα προσανατολισμού τους μπορεί να έχει τιμή έως και  $\gamma/2$ . Για την επίλυση αυτού του προβλήματος εξετάζουμε δύο υποψήφιες μεθόδους, οι οποίες παρουσιάζονται στις επόμενες δύο ενότητες.

### 1.2.5 Η μέθοδος του Πιτυοκάμπτη Σίνι

Προτού εισάγουμε τη μέθοδο που ελαττώνει τα σφάλματα εκτίμησης προσανατολισμού που προτείνουμε, πρέπει να εξετάσουμε το λόγο για την πολυπλοκότητά και την επιτυχία της σε σχέση με την αφελή μέθοδο επιχείρησης ελάττωσης του σφάλματος εκτίμησης του προσανατολισμού, η οποία παρουσιάζεται στην παρούσα ενότητα.

Δεδομένων ότι

- το τελικό σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού των τριών ως άνω μεθόδων είναι αντι-στρόφως ανάλογο του αριθμού εκπεμπομένων ακτίνων  $N_s$
- ο τελευταίος είναι *αμετάβλητος* όσο αφορά στον φυσικό αισθητήρα αποστάσεων (με την έννοια ότι δεν μπορεί να προσδώσει περισσότερες μετρήσεις από  $N_s = 2\pi/\gamma$ )
- ο τελευταίος είναι *μεταβλητός* όσο αφορά στον εικονικό αισθητήρα αποστάσεων (με την έννοια ότι, εφόσον οι εικονικές σαρώσεις είναι υπολογιστέες μέσω του χάρτη, μπορεί να υπολογιστεί ένας αυθαίρετος αριθμός εικονικών ακτίνων εντός του)

ένας αφελής τρόπος επίλυσης του προβλήματος ελάττωσης του σφάλματος προσανατολισμού συνίσταται στην αύξηση των εκπεμπόμενων ακτίνων

- του φυσικού αισθητήρα με την παρεμβολή των τιμών των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης
- του εικονικού αισθητήρα με την δεσμοβολή ισάριθμων ακτίνων της πραγματικής σάρωσης εντός του χάρτη  $M$

Σε αυτή την περίπτωση η αύξηση του αριθμού των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης μέσω παρεμβολής γίνεται με διχοτόμηση όλων των  $N_s$  γωνιών μεταξύ γειτονικών ακτίνων, και εισαγωγή ακτίνων σε γωνίες  $n\gamma + \gamma/2$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_s - 1$ , των οποίων η αναφερόμενη απόσταση τίθεται σε  $S'_R{}^{\text{interp}}[n] = \frac{1}{2}(S_R[n] + S_R[n + 1])$ , όπου  $S_R[N_s] = S_R[0]$ . Με αυτόν τον τρόπο η προκύπτουσα διακριτική γωνία είναι  $\gamma' = \gamma/2$ . Αυτή διαδικασία θα μπορούσε να

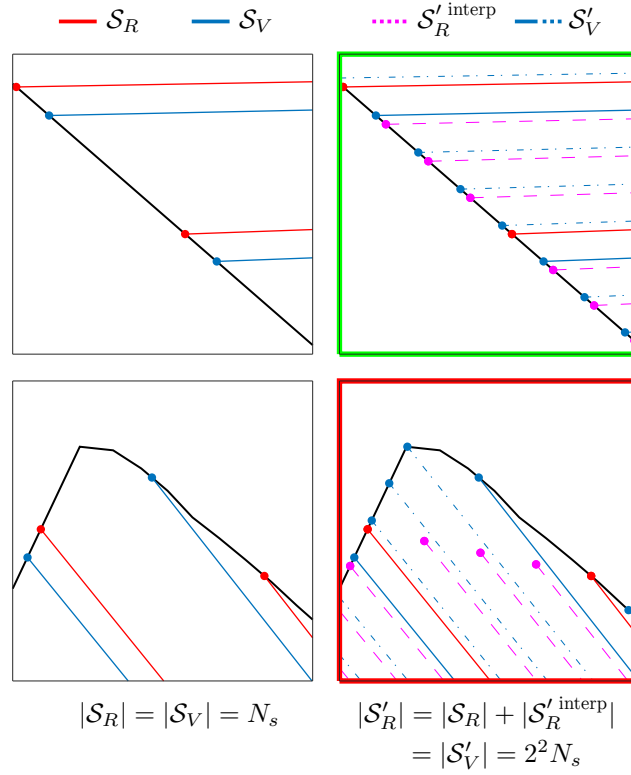
επαναληφθεί περαιτέρω, έως ότου η τελική διακριτική γωνία φτάσει σε ένα αποδεκτά χαμηλό επίπεδο  $\gamma^{(\nu)} = \gamma/2^\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Όσο αφορά στην εικονική σάρωση, δεδομένου ότι παράγεται από το χάρτη, δεν απαιτεί τη χρήση παρεμβολής—ο αριθμός των απαιτούμενων εικονικών ακτίνων  $N'_s$  καθορίζεται από το μέγεθος της πραγματικής σάρωσης:  $N'_s = 2^\nu N_s$ . Λόγω της χρήσης της τεχνικής διχοτόμησης ακτίνων ονομάζουμε αυτή τη μέθοδο ως μέθοδο του Πιτυοκάμπτη Σίνι.<sup>2</sup>

**Παρατήρηση Ι.** Κατά τη διάρκεια αυτής της μεθόδου ελάττωσης του σφάλματος προσανατολισμού η πραγματική σάρωση και ο χάρτης δειγματοληπτούνται με ρυθμό δειγματοληψίας  $2^\nu$ , με αποτέλεσμα μία πραγματική σάρωση και μία εικονική σάρωση, αποτελούμενες από  $2^\nu N_s$  ακτίνες. Η διόρθωση προσανατολισμού εκτελείται μία φορά, και έχει ως αποτέλεσμα μία εκτίμηση προσανατολισμού.

Στο σχήμα 1.7 απεικονίζεται μία μεγέθυνση των δύο περιοχών του σχήματος ?? που περικλείονται σε κόκκινα και πράσινα πλαίσια. Η παραπάνω μεθοδολογία υπερδειγματοληψίας προσομοιώνει τέλεια τις επιπρόσθετες αποστάσεις που θα λάμβανε ένας αισθητήρας με  $2^2 N_s$  ακτίνες σε σχέση με έναν αισθητήρα  $N_s$  ακτίνων σε γραμμικά τμήματα του περιβάλλοντος (επάνω σειρά). Όμως, σε μη γραμμικά ή απότομα μεταβαλλόμενα τμήματα του περιβάλλοντος (κάτω σειρά), η μέθοδος παρεμβολής αστοχεί στην προσομοίωση των επιπρόσθετων αποστάσεων λόγω εισαγωγής σφαλμάτων απόστασης που οφείλονται στην επινόηση τεχνητών μετρήσεων. Το μέγεθος αυτών των σφαλμάτων εξαρτάται από το μέγεθος της διακριτικής γωνίας του αισθητήρα, τον ρυθμό υπερδειγματοληψίας, και τον χάρτη ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

Αυτό σημαίνει ότι η εισαγωγή παρεμβαλλόμενων ακτίνων έχει το αμετάβλητο και ακούσιο αποτέλεσμα η λύση να εισάγει τα δικά της σφάλματα στην επιζητούμενη εκτίμηση. Επιπλέον, αυτό το σφάλμα δεν μπορεί να ελεγχθεί, και, κατά συνέπεια, είναι αναγκαία εναλλακτική προσέγγιση λύσης του προβλήματος. Για του λόγου το αληθές, στο σχήμα 1.8 εκτίθεται το μέγεθος, η τυχαιότητα, και η αστάθεια αυτών των σφαλμάτων. Όπως και πριν απεικονίζονται οι αρχικές και τελικές συνθήκες ευθυγράμμισης προσανατολισμού για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων με  $\gamma = 2\pi/360$ , σε ένα μη δομημένο περιβάλλον, του

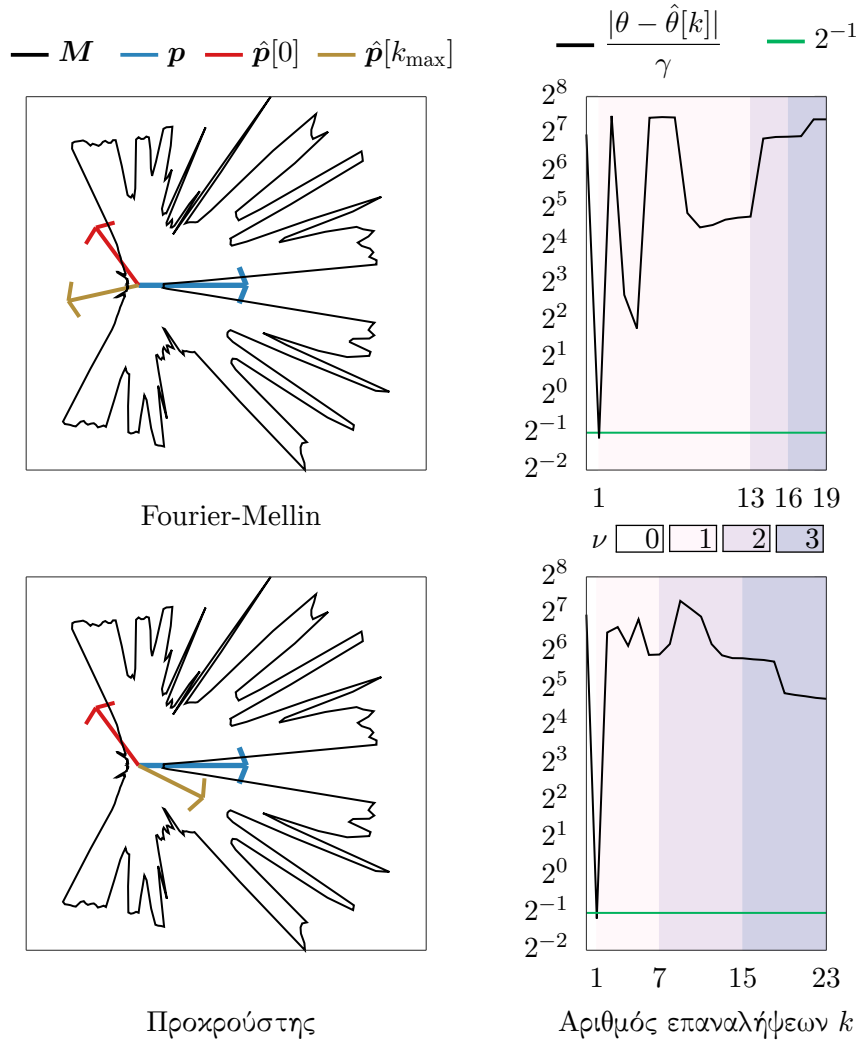
<sup>2</sup>Ο Σίνις, επονομαζόμενος Πιτυοκάμπτης, ήταν γιος του Προκρούστη Πολυμήμονος. Σε συνέχεια της γενεαλογίας του ο Σίνις απήγαγε ξένους, των οποίων τα άκρα έδενε σε δύο λυγισμένα πεύκα (κεκαμμένες πιτύες) προτού αφήσει τα τελευταία να πάρουν τη φυσική τους κλίση, διχοτομώντας έτσι τα σώματά των θυμάτων του. Για κακή του τύχη εξοντώθηκε επίσης από τον Θησέα.



Σχήμα 1.7: Μεγέθυνση των δύο περιοχών που περιλαμβάνονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα στο σχήμα ???. Οι κόκκινες γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες της πραγματικής μέτρησης  $S_R$ . Οι μπλε γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες της εικονικής μέτρησης  $S_V$ . Οι διακεκομμένες φούξια γραμμές απεικονίζουν τις παρεμβαλλόμενες ακτίνες του πραγματικού αισθητήρα. Οι διακεκομμένες μπλε γραμμές απεικονίζουν τις πρόσθετες ακτίνες του εικονικού αισθητήρα. Εδώ ο ρυθμός υπερδειγματοληψίας είναι  $\mu = 2''$ ,  $\nu = 2$ . Τα σχήματα στην αριστερή πλευρά δείχνουν τις αρχικές σάρωσεις μεγέθους  $N_s$ . Τα δεξιά σχήματα δείχνουν την παρεμβαλλόμενη πραγματική σάρωση και την εικονική σάρωση ίσου μεγέθους  $N'_s = 2'' N_s$ . Η παρεμβολή των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης είναι ακριβής σε γραμμικά τμήματα. Σε μη γραμμικά τμήματα, όμως, οι αποστάσεις των παρεμβαλλόμενων ακτίνων είναι αυθαίρετα λανθασμένες, και δεν μπορεί να διασφαλιστεί ότι το σφάλμα προσανατολισμού φράσσεται άνωθεν από την τιμή  $\gamma/2^{\nu+1}$ .

οποίου ο χάρτης το αναπαριστά τέλεια, ενώ οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο. Η μέθοδος του Πιτυοκάμπτη Σίνι εφαρμόζεται επί των μεθόδων Fourier-Mellin μίας διάστασης (άνω) και Προχρούστη (κάτω). Εδώ ο βαθμός υπερδειγματοληψίας  $\nu$  έχει αρχική τιμή  $\nu = \nu_{\min} = 0$  και αυξάνει διαδοχικά κάθε φορά που η εκτίμηση προσανατολισμού δεν εμφανίζει μεταβολή ως προς την προηγούμενη τιμή της πάνω από  $\gamma/2$  rad, έως ότου  $\nu = \nu_{\max} = 3$ .

Στην ενότητα 1.2.6 παρουσιάζουμε τη μέθοδο που, σε αντίθεση με τη μέθοδο του Πιτυοκάμπτη Σίνι, ελαττώνει το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού με τρόπο ευσταθή, προβλεπόμενο, και αναλογικό ως προς το ρυθμό δειγματοληψίας  $\mu = 2''$  του χάρτη  $M$ .



Σχήμα 1.8: Η λανθασμένη προσέγγιση ελάττωσης του γωνιακού σφάλματος εκτίμησης της μεθόδου Πιτυοκάμπτη Σίνι για διαδοχική υπερδειγματοληψία βαθμών  $(\nu_{\min}, \nu_{\max}) = (0, 3)$ . Το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi^{(\nu)}$  φράσσεται από την ποσότητα  $\gamma/2^{1+\nu}$  μόνο στο τέλος του βήματος δειγματοληψίας  $\nu = 0$

### 1.2.6 Η μέθοδος του Θησέα

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται κατανοητό ότι οποιαδήποτε προσπάθεια μείωσης του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού θα πρέπει να περιοριστεί από την απαγόρευση εφεύρεσης πραγματικών μετρήσεων. Στο σχήμα 1.9 απεικονίζεται η μεθοδολογία που εισάγουμε, η οποία εγγυάται ότι το τελικό σφάλμα προσανατολισμού  $|\phi| \in [0, \gamma/2^{1+\nu}]$  στην περίπτωση που οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο και ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια, για  $\nu = 2$  και  $\gamma = 2\pi/360$ .

Αντί της κατασκευής μίας εικονικής σάρωσης  $2^\nu N_s$  ακτίνων, και της εκτέλεσης διόρθωσης





Σχήμα 1.9: Μεγέθυνση της μη γραμμικής περιοχής που περικλείεται με κόκκινο χρώμα στο σχήμα ?? . Οι κόκκινες γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες της πραγματικής σάρωσης  $S_R$ . Οι μπλε, καφέ, πράσινες, και μωβ γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες  $2^\nu = 2^2$  διακριτών εικονικών σαρώσεων που λαμβάνονται από την εκτίμηση στάσης  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta})$  σε  $\gamma/2^\nu$ ,  $\nu = 2$  γωνιακά βήματα, ξεκινώντας από τον εκτιμώμενο προσανατολισμό του αισθητήρα  $\hat{\theta}$ . Η εικονική σάρωση που συμβολίζεται με μωβ χρώμα σημειώνει την υψηλότερη τιμή της μετρικής Ποσοστού Διάκρισης (PD) μεταξύ όλων των  $2^\nu$  εικονικών σαρώσεων. Χρησιμοποιώντας τη μετρική PD και επιλέγοντας την εκτίμηση προσανατολισμού που αντιστοιχεί στην εικονική σάρωση με τη μέγιστη τιμή PD, το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού φράσσεται εγγυημένα άνωθεν από την τιμή  $\gamma/2^{\nu+1}$  στην περίπτωση όπου οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο και ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια

του προσανατολισμού μία φορά (Παρατήρηση I), το βέλτιστο σφάλμα προσανατολισμού  $|\phi| \in [0, \gamma/2^{1+\nu}]$  για έναν δεδομένο ρυθμό δειγματοληψίας  $\mu = 2^\nu$  και διακριτική γωνία  $\gamma$  μπορεί να επιτευχθεί με τον υπολογισμό  $2^\nu$  εικονικών σαρώσεων μεγέθους  $N_s$ , εκτελώντας διόρθωση προσανατολισμού  $2^\nu$  φορές. Η διόρθωση προσανατολισμού πραγματοποιείται μία φορά μεταξύ της ανόθευτης πραγματικής σάρωσης και της εικονικής σάρωσης  $S_V^k$ , η οποία λαμβάνεται από τη στάση  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta}_k)$ :

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta} + k \cdot \gamma/2^\nu, \quad k = 0, \dots, 2^\nu - 1 \quad (1.25)$$

για συνολικά  $2^\nu$  φορές, με αποτέλεσμα  $2^\nu$  εκτιμήσεις προσανατολισμού.

Όσο αφορά στις μεθόδους Fourier-Mellin μίας διάστασης και τη μέθοδο του Προχρού-στη, η μετρική ευθυγράμμισης μεταξύ της  $k$ -οστής εικονικής σάρωσης και της πραγματικής σάρωσης υπολογίζεται σύμφωνα το Ποσοστό Διάκρισης (Percent Discrimination—PD). Η

μετρική του Ποσοστού Διάκρισης για την  $k$ -οστή εικονική σάρωση  $PD_k \in [0, 1]$ , και είναι ανάλογη του βαθμού ευθυγράμμισης μεταξύ των σαρώσεων  $S_R$  και  $S_V^k$  για όλες τις  $2^\nu$  σαρώσεις  $S_V^k$ . Το Ποσοστό Διάκρισης ανάμεσα στην πραγματική μέτρηση  $S_R$  και την εικονική σάρωση  $S_V^k$  ορίζεται ως:

$$PD_k = \frac{2 \Phi(\Psi, \Omega_k)}{\Phi(\Psi, \Psi) + \Phi(\Omega_k, \Omega_k)} \quad (1.26)$$

Για τη μεν περίπτωση της μεθόδου Fourier-Mellin:  $\Phi = \max q$ , όπου  $q = \mathcal{F}^{-1}\{Q\}$ , με τον όρο  $Q$  να ορίζεται από την εξίσωση (1.1) με ορίσματα τα διανύσματα σαρώσεων εισόδου  $\Psi = S_R$  και  $\Omega_k = S_V^k$ .

Για τη δε περίπτωση της μεθόδου του Προκρούστη:  $\Phi = T$ , όπου  $T$  είναι το μέγιστο ίχνος με ορίσματα τους πίνακες  $\Psi = P_R$  και  $\Omega_k = P_{V_k}$  (Επακόλουθο III). Εδώ το σύνολο σημείων  $P_R$  κατέχει τις συντεταγμένες των τελικών σημείων των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης  $S_R$  προβεβλημένες στο επίπεδο  $x-y$  από την αρχή  $O(0, 0, 0)$  όπως προηγουμένως, και το σύνολο  $P_{V_k}$  κατέχει τις συντεταγμένες των τελικών σημείων της  $k$ -οστής εικονικής σάρωσης, επίσης προβεβλημένες στο επίπεδο  $x-y$  από το  $O$ .

Όσο αφορά στη μέθοδο Πρώτων Αρχών η σύγκριση ανάμεσα στις σαρώσεις  $S_R$  και  $S_V^k$  δεν είναι δόκιμη, καθώς αυτή αποτελεί μέθοδο συνεχούς χώρου, και συνεπώς δεν ορίζεται μετρική ευθυγράμμισης.

Έστω τώρα ότι  $k_{\max} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : k_{\max} \in [0, 2^{\nu-1}]$  συμβολίζει το δείκτη της  $k$ -οστής εικονικής σάρωσης  $S_V^{k_{\max}}$  που σημειώνει τον υψηλότερο δείκτη ευθυγράμμισης  $PD_k$ :  $PD_{k_{\max}} = \max\{PD_k\}$ . Έστω επίσης  $I \in \mathbb{Z}$  το ακέραιο πολλαπλάσιο κατά το οποίο εάν πολλαπλασιαστεί η διακριτική γωνία  $\gamma$  τότε η σάρωση  $S_V^{k_{\max}}$  ευθυγραμμίζεται με την  $S_R$  με τρόπο τέτοιο που παράγεται η μετρική ευθυγράμμισης  $PD_{k_{\max}}$ . Τότε εάν η εκτίμηση προσανατολισμού του αισθητήρα ενημερωθεί σε

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + I \cdot \gamma + k_{\max} \cdot \frac{\gamma}{2^\nu} \quad (1.27)$$

το επίλοιπο σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi$  φράσσεται από:

$$|\phi| = \text{mod} (|\theta - \hat{\theta}'|, \gamma) \leq \frac{\gamma}{2^{1+\nu}} < \frac{\gamma}{2} \quad (1.28)$$

για  $\nu \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

Ο στόχος (\*) επιτυγχάνεται με τη μέθοδο που εισαγάγαμε σε αυτή την ενότητα για τη μέθοδο Fourier-Mellin μίας διάστασης (ενότητα 1.2.1) και τη μέθοδο του Προκρούστη (ενότητα 1.2.3) υπό τις προϋποθέσεις ότι (α)  $\mathbf{l} = \hat{\mathbf{l}}$ , (β) το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού είναι  $|\theta - \hat{\theta}| > \gamma/2^{1+\nu}$  για δεδομένο βαθμό δειγματοληψίας  $\nu$ , (γ) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο, και (δ) ο χάρτης του περιβάλλοντος το αναπαριστά τέλεια.

Στο σχήμα 1.10 απεικονίζονται οι ίδιες αρχικές συνθήκες με αυτές της διαμόρφωσης του σχήματος 1.8. Η ευθυγράμμιση προσανατολισμού εκτελείται και πάλι διαδοχικά για βαθμούς δειγματοληψίας του χάρτη  $\mathbf{M}(\nu_{\min}, \nu_{\max}) = (0, 3)$ , αλλά αυτή τη φορά το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi^{(\nu)}$  φράσσεται στο τέλος κάθε βήματος δειγματοληψίας  $\nu$  από την ποσότητα  $\frac{\gamma}{2^{1+\nu}}$ . Στο σχήμα 1.11 απεικονίζεται ο μέσος χρόνος εκτέλεσης της μεθόδου Fourier-Mellin μίας διάστασης με χρήση της επιπρόσθετης μεθόδου του Θησέα για αυξανόμενο αριθμό ακτίνων  $N_s$  με βάση την ίδια διαμόρφωση.

Στο σχήμα 1.12 η άνω σειρά απεικονίζει τα πραγματικά δεδομένα Ποσοστών Διάκρισης και επίλοιπων σφαλμάτων των υποψήφιων προσανατολισμών ανά βαθμό δειγματοληψίας, τα οποία παρήχθησαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου Θησέα επί των μεθόδων γωνιακής ευθυγράμμισης Fourier-Mellin και Προκρούστη που παρουσιάζονται στην εικόνα 1.10. Στην αριστερή πλευρά της κάτω σειράς απεικονίζεται σχηματικά η εξέλιξη της ημίσειας κατάτμησης του επίλοιπου σφάλματος προσανατολισμού ανά βαθμό δειγματοληψίας, και στη δεξιά το Ποσοστό Διάκρισης που αντιστοιχεί σε κάθε σφάλμα. Συγκεκριμένα, με γκρι χρώμα σημειώνεται η μετρική που εμφανίζει τη μέγιστη τιμή ανάμεσα σε όλες εκείνες του ίδιου βαθμού δειγματοληψίας. Αντιπαραβάλλοντας αυτές με τα δεδομένα της δεξιάς στήλης της άνω σειράς και στη συνέχεια αυτά με εκείνα της αριστερής στήλης της ίδιας σειράς παρατηρούμε ότι τα ελάχιστα επίλοιπα σφάλματα εμφανίζουν τα μέγιστα ποσοστά διάκρισης, σε συνέπεια με την εξίσωση (1.28) και την ανάλυση της παρούσας ενότητας.

Ο Αλγόριθμος V παρουσιάζει τη μέθοδο διόρθωσης προσανατολισμού που προτείνουμε σε μορφή ψευδοκώδικα, για ορίσματα  $\mathbf{rc} = \{\mathbf{rc\_fm}, \mathbf{rc\_uf}\}$  (Αλγόριθμοι I και III).



Σχήμα 1.10: Η ορθή προσέγγιση ελάττωσης του γωνιακού σφάλματος εκτίμησης της μεθόδου Θησέα για διαδοχική υπερδειγματοληψία βαθμών  $(\nu_{\min}, \nu_{\max}) = (0, 3)$ . Το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi^{(\nu)}$  των δύο μεθόδων φράσσεται στο τέλος κάθε βήματος δειγματοληψίας  $\nu$  από την ποσότητα  $\gamma/2^{1+\nu}$

### 1.2.7 Περιορισμοί και ιδιότητες υπό γενικές συνθήκες

Οι μέθοδοι εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $\hat{p}$  που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες εμφανίζουν σε πραγματικές συνθήκες διαφορετική συμπεριφορά ως προς τις ιδεατές συνθήκες, οι οποίες επιφέρουν περιορισμούς ως προς το σφάλμα της τελικής τους εκτίμησης.

Η μέθοδος Πρώτων Αρχών (ενότητα 1.2.2) πάσχει σε γενικές συνθήκες από δύο αιτίες. Η πρώτη αφορά στο σφάλμα εκτίμησης της σε συνθήκες μη σύμπτωση της εκτίμησης θέσης



Σχήμα 1.11: Μέσος χρόνος εκτέλεσης της μεθόδου Fourier-Mellin μίας διάστασης με χρήση της μεθόδου του Θησέα για  $(\nu_{\min}, \nu_{\max}) = (0, 3)$ , για αυξανόμενο αριθμό ακτίνων  $N_s$

---

#### Αλγόριθμος V rc\_theseus

---

**Input:**  $rc, M, \mathcal{S}_R, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma, N_s, \nu$

**Output:**  $\hat{\theta}'$

- 1:  $(\hat{\Theta}, \mathbf{PD}) \leftarrow \text{rc\_theseus\_core}(rc, M, \mathcal{S}_R, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma, N_s, \nu)$
  - 2:  $k_{\max} \leftarrow \arg \max \mathbf{PD}$
  - 3:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\Theta}[k_{\max}]$
  - 4: **return**  $\hat{\theta}'$
- 

με την πραγματική θέση. Το αριστερό γράφημα του σχήματος 1.13 απεικονίζει το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού σε αυτή την περίπτωση με κίτρινο και μαύρο χρώμα, και με γκρι την περίπτωση όπου η εκτίμηση θέσης και η πραγματική θέση είναι ίσες.

Επιπρόσθετα, η μέθοδος Πρώτων Αρχών εμφανίζει μη προβλέψιμη και ασταθή συμπεριφορά όταν ο χάρτης του περιβάλλοντος δεν το αναπαριστά τέλεια. Στο σχήμα 1.14 απεικονίζεται το μέσο σφάλμα προσανατολισμού της μεθόδου Πρώτων Αρχών και η τυπική του απόκλιση σε εκατό επαναλήψεις πειραμάτων με ένα σύνολο δεδομένων 778 περιβαλλόντων και χαρτών. Στο αριστερό σχήμα ο χάρτης αναπαριστά στην εντέλεια το περιβάλλον, σε αντίθεση με το δεξιό σχήμα, στο οποίο ο χάρτης είναι διεφθαρμένος.

Εδώ παρατηρούμε ότι ενώ στην πρώτη περίπτωση το σφάλμα προσανατολισμού αυξάνεται με συνέπεια για αυξανόμενο επίπεδο διαταραχών και μειώνεται με συνέπεια για αυξανόμενο αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων, στη δεύτερη δεν εμφανίζει καμία συνέπεια. Ταυτόχρονα παρατηρούμε τον μεγαλύτερο περιορισμό της μεθόδου, ήτοι την αδιαφορία του σφάλματος ως

$ \phi^{(0)} /\frac{\gamma}{2^0} = 0.45 < 2^{-1}$	$PD^{(0)} = 0.99101$
└ $ \phi_0^{(1)} /\frac{\gamma}{2^1} = 0.45$	└ $PD_0^{(1)} = 0.99101$
└ $ \phi_1^{(1)} /\frac{\gamma}{2^1} = 0.22 < 2^{-1}$	└ $PD_1^{(1)} = 0.99986 \geq PD_*^{(1)}$
└ $ \phi_0^{(2)} /\frac{\gamma}{2^2} = 0.19 < 2^{-1}$	└ $PD_0^{(2)} = 0.99986 \geq PD_*^{(2)}$
└ $ \phi_0^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 0.39 < 2^{-1}$	└ $PD_0^{(3)} = 0.99986 \geq PD_*^{(3)}$
└ $ \phi_1^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 1.39$	└ $PD_1^{(3)} = 0.99721$
└ $ \phi_2^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 2.39$	└ $PD_2^{(3)} = 0.98130$
└ $ \phi_3^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 3.39$	└ $PD_3^{(3)} = 0.98516$
└ $ \phi_4^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 3.60$	└ $PD_4^{(3)} = 0.99101$
└ $ \phi_5^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 2.60$	└ $PD_5^{(3)} = 0.99575$
└ $ \phi_6^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 1.60$	└ $PD_6^{(3)} = 0.99835$
└ $ \phi_7^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 0.60$	└ $PD_7^{(3)} = 0.99973$
└ $ \phi_1^{(2)} /\frac{\gamma}{2^2} = 1.195$	└ $PD_1^{(2)} = 0.98130$
└ $ \phi_2^{(2)} /\frac{\gamma}{2^2} = 1.80$	└ $PD_2^{(2)} = 0.99101$
└ $ \phi_3^{(2)} /\frac{\gamma}{2^2} = 0.80$	└ $PD_3^{(2)} = 0.99835$



Σχήμα 1.12: Τα πραγματικά δεδομένα Ποσοστών Διάκρισης  $PD_{0:2^{\nu}-1}^{(\nu)}$  και επίλοιπων σφαλμάτων  $\phi_{0:2^{\nu}-1}^{(\nu)}$  των υποψήφιων προσανατολισμών που αφορούν στα επίπεδα δειγματοληψίας  $\nu$ , τα οποία προέκυψαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου Θησέα επί των μεθόδων γωνιακής ευθυγράμμισης Fourier-Mellin και Προκρούστη που παρουσιάζονται στην εικόνα 1.10. Η κάτω σειρά απεικονίζει σχηματικά: στα αριστερά την αναδρομική εξέλιξη της κατάτμησης του αρχικού επίλοιπου σφάλματος  $\phi^{(0)}$  σε ημίσεια σφάλματα, και στα δεξιά τα αντιστοιχούντα μέγιστα ποσοστά διάκρισης ανά βαθμό δειγματοληψίας. Παρατηρήστε πως υπάρχει ευθεία αντιστοιχία του μέγιστου ποσοστού διάκρισης (γκρι) με το ελάχιστο επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού

---

**Αλγόριθμος VI** `rc_theseus_core`

---

**Input:**  $\text{rc}, M, \mathcal{S}_R, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma, N_s, \nu$ **Output:**  $\hat{\Theta}, \text{PD}$ 

```

1:  $\hat{\Theta}, \text{PD} \leftarrow \{\emptyset\}$ 
2: for  $k = 0 : 2^\nu - 1$  do
3:    $\hat{p}_k \leftarrow (x, y, \hat{\theta} + k \cdot \gamma / 2^\nu)$ 
4:    $\mathcal{S}_V^k \leftarrow \text{scan\_map}(M, \hat{p}_k, N_s)$ 
5:    $(\hat{\theta}', w_k) \leftarrow \text{rc}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}_k, \gamma)$ 
6:   append  $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}' + k \cdot \gamma / 2^\nu$  to  $\hat{\Theta}$ 
7:    $(\cdot, w_k^R) \leftarrow \text{rc}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_R, \hat{p}_k, \gamma)$ 
8:    $(\cdot, w_k^V) \leftarrow \text{rc}(\mathcal{S}_V^k, \mathcal{S}_V^k, \hat{p}_k, \gamma)$ 
9:   append  $\frac{2w_k}{w_k^R + w_k^V}$  to  $\text{PD}$ 
10:   $k \leftarrow k + 1$ 
11: end for
12: return  $(\hat{\Theta}, \text{PD})$ 

```

---



---

**Αλγόριθμος VII** `scan_map`

---

**Input:**  $M, p(x, y, \theta), N_s$ **Output:**  $\mathcal{S}_V$ 

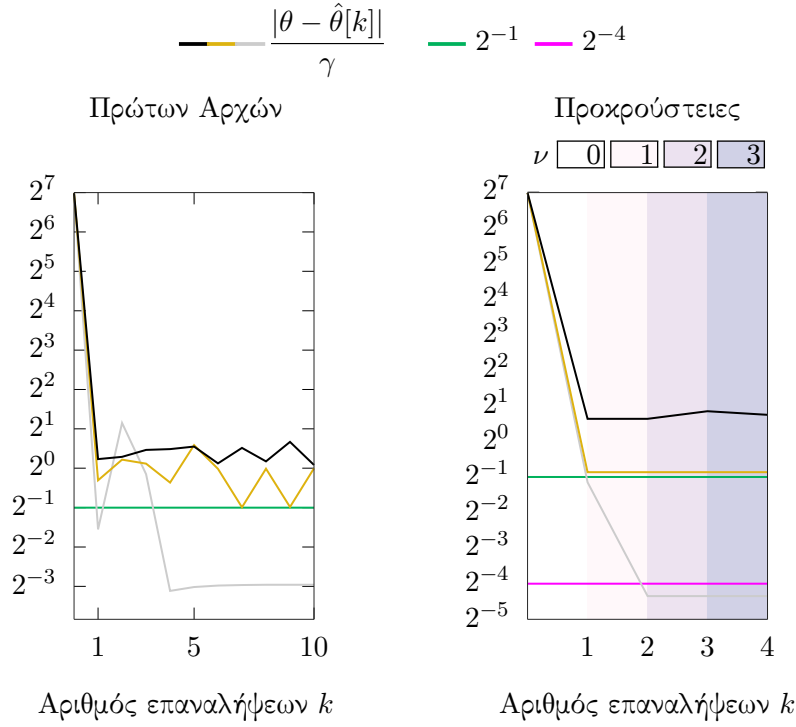
```

1:  $\mathcal{S}_V \leftarrow \{\emptyset\}$ 
2: for  $n = 0 : N_s - 1$  do
3:    $\lambda_n \leftarrow -\pi + \frac{2\pi}{N_s}n$ 
4:    $\theta_n \leftarrow \lambda_n + \hat{\theta}$ 
5:    $(x_n, y_n) \leftarrow \text{intersect}(M, (x, y, \theta_n))$ 
6:    $d_n \leftarrow \|(x - x_n, y - y_n)\|_2$ 
7:   append  $(d_n, \lambda_n)$  to  $\mathcal{S}_V$ 
8: end for
9: return  $\mathcal{S}_V$ 

```

---

προς τον αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων όταν ο χάρτης δεν αναπαριστά τέλεια το περιβάλλον, η οποία είναι η γενική περίπτωση. Αυτή η ιδιότητα είναι κρίσιμη γιατί η μέθοδος λειτουργεί στον συνεχή γωνιακό χώρο και, σε αντίθεση με τις Προκρούστειες μεθόδους των ενοτήτων 1.2.1 και 1.2.3, δεν είναι δυνατή η εφαρμογή εσωτερικής μεθόδου επιπρόσθετης μείωσης των σφαλμάτων της, όπως η μέθοδος του Θησέα.

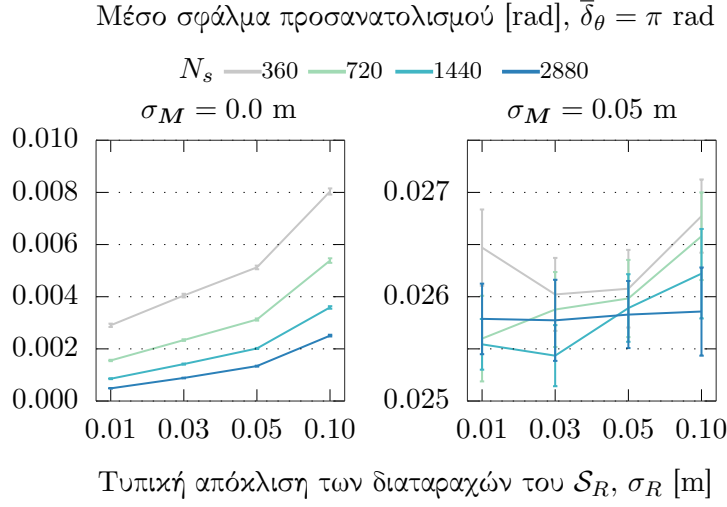


Σχήμα 1.13: Τα αποτελέσματα των ίδιων πειραμάτων με αυτά που εκτίθενται στα σχήματα 1.4 (στα αριστερά στο παρόν σχήμα) και 1.10 (δεξιά), για την ίδια εκτίμηση στάσης, μετατοπισμένη όμως κατά  $-0.06$  m (κίτρινο χρώμα) και  $-0.12$  m (μαύρο) στον οριζόντιο άξονα. Στο αριστερό γράφημα παρατηρούμε πως σε περίπτωση μη σύμπτωσης της εκτίμησης θέσης με την πραγματική θέση το μέτρο του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού της μεθόδου Πρώτων Αρχών είναι σημαντικά αυξημένο σε σχέση με αυτό της ειδικής περίπτωσης του αρχικού πειράματος (γκρι). Στο δεξιό γράφημα παρατηρούμε πως στην ίδια περίπτωση το μέτρο του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού των Προκρούστεων μεθόδων δεν ήταν δυνατό να μειωθεί λιγότερο από  $\gamma/2$  για κανένα βαθμό δειγματοληψίας, σε αντίθεση με την περίπτωση σύμπτωσης θέσεων (γκρι)

Οι μέθοδοι διακριτού χώρου Fourier-Mellin και Προκρούστη, με και δίχως τη χρήση της μεθόδου του Θησέα, επηρεάζονται από διαφορετικά προβλήματα που αναδύονται στη γενική περίπτωση, η οποία αφορά και εδώ στη γενική συνθήκη όπου η εκτίμηση θέσης δεν συμπίπτει ακριβώς με την πραγματική θέση. Όσο αφορά στην πρώτη περίπτωση, το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού δεν είναι δυνατό να μειωθεί κάτω από  $\gamma/2$  σε ένα βήμα λόγω του γεγονότος ότι από διαφορετικές θέσεις είναι ορατά διαφορετικά σημεία του περιβάλλοντος και του χάρτη, με συνέπεια μεγαλύτερη αναντιστοιχία μεταξύ των σαρώσεων εισόδου, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της μεθόδου Πρώτων Αρχών. Αυτός ο περιορισμός εκτίθεται στο δεξιό γράφημα του σχήματος 1.13.

Στη δεύτερη περίπτωση, όταν δηλαδή χρησιμοποιείται η μέθοδος του Θησέα για την περαιτέρω μείωση του σφάλματος προσανατολισμού, το αναδυόμενο πρόβλημα είναι μεγαλύτερης





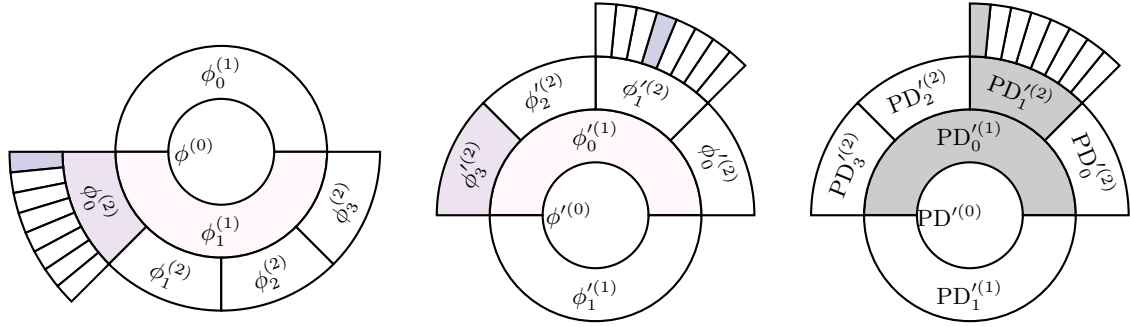
Σχήμα 1.14: Μέσο σφάλμα προσανατολισμού της μεθόδου Πρώτων Αρχών και η τυπική του απόκλιση σε εκατό πειράματα, όπου το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού  $\Delta\theta = \theta - \hat{\theta}$  εξήχθη από ομοιόμορφη κατανομή  $\Delta\theta \in U(-\bar{\delta}_\theta, +\bar{\delta}_\theta)$ , όπου  $\bar{\delta}_\theta = \pi$ . Τα δύο σχήματα απεικονίζουν τα σφάλματα προσανατολισμού για αυξανόμενη τυπική απόκλιση  $\sigma_R$  των κανονικά κατανεμημένων και μηδενικής μέσης τιμής διαταραχών της πραγματικής σάρωσης  $\mathcal{S}_R$ ,  $\sigma_R \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.10\}$  m, και αυξανόμενο αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων  $N_s$ . Στο αριστερό σχήμα ο χάρτης αναπαριστά στην εντέλεια το περιβάλλον, σε αντίθεση με το δεξιό σχήμα, στο οποίο ο χάρτης είναι διεφθαρμένος

βαρύτητας διότι η μη σύμπτωση των δύο θέσεων διαταράσσει την ευθεία αντιστοιχία ανάμεσα στις αύξουσες τιμές του Ποσοστού Διάκρισης των σφαλμάτων προσανατολισμού και τα φθίνοντα μέτρα των τελευταίων. Με άλλα λόγια, στη γενική περίπτωση, όπου η εκτίμηση θέσης δεν ισούται με την πραγματική θέση, το υψηλότερο Ποσοστό Διάκρισης δεν αντιστοιχεί στο ελάχιστο σφάλμα προσανατολισμού. Αυτό το πρόβλημα εκτίθεται στο σχήμα 1.15.

Κατά συνέπεια ανακεφαλαιώνουμε τους περιορισμούς των μεθόδων εκτίμησης προσανατολισμού στις εξής παρατηρήσεις:

**Παρατήρηση II.** Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μετά την εφαρμογή των μεθόδων εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών, Fourier-Mellin, και Προκρούστη, το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού είναι ανάλογο του σφάλματος θέσης.

**Παρατήρηση III.** Στη μέθοδο Πρώτων Αρχών είναι αδόκιμη η εφαρμογή μεθόδου υπερδειγματοληψίας του χάρτη και εσωτερικής ιεράρχησης των σφαλμάτων προσανατολισμού—σε αντιστοιχία με τη μέθοδο του Θησέα—για την περαιτέρω μείωση του σφάλματος προσανατολισμού, λόγω της συνεχούς φύσεώς της.



Σχήμα 1.15: Στα αριστερά παρατίθεται η βέλτιστη πορεία κατάτμησης του αρχικού επίλοιπου σφάλματος (σχήμα 1.12). Στη μέση παρατίθεται η κατάτμηση των επίλοιπων σφαλμάτων προσανατολισμού ανά βαθμό δειγματοληψίας  $\nu$  με βάση τη μέθοδο του Θησέα στο πείραμα που αφορά στο δεξί γράφημα του σχήματος 1.13, και με χρώμα τα πραγματικά ελάχιστα σφάλματα. Στα δεξιά παρατίθενται με γκρι τα αντιστοιχούντα μέγιστα ποσοστά διάκρισης ανά βαθμό δειγματοληψίας. Παρατηρήστε πως πλέον, όχι μόνο δεν υφίσταται ευθεία αντιστοιχία του μέγιστου ποσοστού διάκρισης με το ελάχιστο επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού, αλλά και τα τελευταία δεν αντιστοιχούν στα βέλτιστα σφάλματα προσανατολισμού του αριστερού γραφήματος

**Παρατήρηση IV.** Επιπρόσθετα, ακόμα και να ήταν δυνατή η εφαρμογή τέτοιας μεθόδου, η μη φθίνουσα σχέση του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού με τον αύξοντα βαθμό δειγματοληψίας στη γενική συνθήκη όπου ο χάρτης του περιβάλλοντος δεν το αναπαριστά τέλεια θα καθιστούσε οποιαδήποτε εσωτερική σύγκριση πρακτικά αδιάφορη.

**Παρατήρηση V.** Στις Προκρούστειες μεθόδους με εφαρμογή της μεθόδου του Θησέα η εσωτερική σύγκριση μεταξύ των τιμών της μετρικής του Ποσοστού Διάκρισης οδηγεί σε μη βέλτιστα σφάλματα προσανατολισμού, ακόμα και όταν ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια και ο αισθητήρας σαρώσεων δεν επηρεάζεται από διαταραχές.

Λόγω των παραπάνω διαπιστώσεων είναι αναγκαία η εφεύρεση επιπρόσθετων μεθόδων, και εξωτερικών ως προς τις παραπάνω προσεγγίσεις, για τη σύγκλιση στο βέλτιστο κατά περίπτωση σφάλμα προσανατολισμού.

### 1.3 Μεθοδολογία ευθυγράμμισης θέσης

Έστω τώρα το αντίστροφο ως προς την προηγούμενη ενότητα πρόβλημα: έστω ότι η πραγματική και η εκτιμώμενη στάση είναι ίσες ως προς τον προσανατολισμό  $\hat{\theta} = \theta$ , αλλά άνισες ως προς τη θέση  $\hat{l} \neq l$ .

### 1.3.1 Η μέθοδος Πρώτων Αρχών

Εάν ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια και ο φυσικός αισθητήρας αναφέρει μετρήσεις χωρίς διαταραχές, τότε η εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα μπορεί να οδηγηθεί αυθαίρετα κοντά στην πραγματική θέση. Σε πραγματικές συνθήκες, όταν οι ακτίνες των πραγματικών σαρώσεων ή/και των εικονικών σαρώσεων αλλοιώνονται από προσθετικό θόρυβο πεπερασμένου μέγιστου μέτρου, η εκτίμηση θέσης μπορεί να φραχθεί σε μια γειτονιά της πραγματικής θέσης του αισθητήρα. Το Θεώρημα I τυποποιεί αυτή τη δήλωση [Fil22].

**Θεώρημα I.** Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Προβλήματος Π3, και ότι  $\hat{\theta} = \theta$ . Έστω επίσης ότι η εικονική σάρωση  $\mathcal{S}_V$  που συλλαμβάνεται από τη στάση  $\hat{p}$  εντός του χάρτη  $M$  συμβολίζεται με  $\mathcal{S}_V|_{\hat{p}}$ . Έστω ακόμα ότι οι δισδιάστατες σαρώσεις  $\mathcal{S}_R$  και  $\mathcal{S}_V$  είναι απαλλαγμένες από διαταραχές, δηλαδή ότι οι αποστάσεις που καταγράφουν οι ακτίνες της πραγματικής σάρωσης προς τα γύρω του εμπόδια αντιστοιχούν στις πραγματικές αποστάσεις του αισθητήρα από τα εν λόγω εμπόδια, και ότι ο χάρτης του περιβάλλοντος το αναπαριστά τέλεια. Αντιμετωπίζοντας την εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα ως μεταβλητή κατάστασης  $\hat{l}[k] = [\hat{x}[k], \hat{y}[k]]^\top$  και ενημερώνοντάς την σύμφωνα με την εξίσωση διαφορών

$$\hat{l}[k+1] = \hat{l}[k] + \mathbf{u}[k] \quad (1.29)$$

όπου  $\hat{l}[0] = \hat{l} = [\hat{x}, \hat{y}]^\top$ , (δηλαδή η παρεχόμενη αρχική εκτίμηση της θέσης),  $\mathbf{u}$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $2 \times 1$  που στο εξής θα αναφέρεται ως *διάνυσμα ελέγχου*:

$$\mathbf{u}[k] = \frac{1}{N_s} \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,r}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{p}[k]}) \\ X_{1,i}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{p}[k]}) \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

όπου  $X_{1,r}(\cdot)$  και  $X_{1,i}(\cdot)$  είναι, αντίστοιχα, το πραγματικό και φανταστικό μέρος της μιγαδικής ποσότητας  $X_1$ :

$$X_1(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{p}[k]}) = X_{1,r}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{p}[k]}) + i \cdot X_{1,i}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{p}[k]})$$

$$= \sum_{n=0}^{N_s-1} (\mathcal{S}_R[n] - \mathcal{S}_V[n]|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}) \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{N_s}} \quad (1.31)$$

όπου  $\mathcal{S}_R[n]$  και  $\mathcal{S}_V[n]|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}$  είναι, αντίστοιχα, οι αναφερόμενες αποστάσεις της  $n$ -οστής ακτίνας της πραγματικής  $\mathcal{S}_R$  και εικονικής σάρωσης  $\mathcal{S}_V|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}$ , και  $\hat{\mathbf{p}}[k] = (\hat{l}[k], \hat{\theta})$ —τότε η εκτίμηση θέσης  $\hat{l}[k]$  συγκλίνει ομοιόμορφα ασυμπτωτικά στην πραγματική θέση  $\mathbf{l}$  καθώς  $k \rightarrow \infty$ .

**Επακόλουθο V.** Μια λύση που ικανοποιεί το στόχο (\*) είναι αυστηρά εγγυημένη για κάθε αρχική θέση  $\hat{l}[0]$  στην περίπτωση που οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν φέρουν διαταραχές και ο χάρτης  $\mathbf{M}$  δεν είναι διεφθαρμένος ως προς το περιβάλλον που αναπαριστά.

Στην πράξη το σύστημα ελέγχου (1.29, 1.30) αφήνεται να επαναληφθεί είτε έως ότου το μέτρο του διανύσματος ελέγχου  $\mathbf{u}[k]$  φτάσει σε ένα επαρκώς μικρό μέγεθος  $\|\mathbf{u}[k]\|_2 < \varepsilon_u$ , όπου  $\varepsilon_u$  είναι επαρκώς μικρό—π.χ.  $\varepsilon_u < 10^{-3}$ —ή για  $I_T > 0$  επαναλήψεις (ένα αρκετά μεγάλο, εξωτερικά παρεχόμενο όριο μέγιστων επαναλήψεων—π.χ.  $I_T \geq 20$ ). Επομένως, συμβολίζοντας με  $k_{stop} \in (0, I_T]$  τον δείκτη της τελευταίας επανάληψης, και με  $\hat{\mathbf{l}}' = \hat{l}[k_{stop}]$  τότε  $\|\mathbf{e}(\mathbf{l}, \hat{\mathbf{l}}')\|_2 < \|\mathbf{e}(\mathbf{l}, \hat{l}[0])\|_2$ , και επομένως ο στόχος (\*) ικανοποιείται.

Στο σχήμα 1.16 απεικονίζονται οι τροχιές της εκτίμησης θέσης βάσει εφαρμογής του Θεωρήματος I για έναν αισθητήρα  $N_s = 360$  ακτίνων, με θέση  $\mathbf{l} = (0.83, -0.98)$  [m] και αρχική εκτίμηση θέσης  $\hat{\mathbf{l}} = (4.0, -4.0)$  [m]. Οι ακτίνες της πραγματικής σάρωσης  $\mathcal{S}_R$  και των εικονικών σαρώσεων  $\mathcal{S}_V$  διαταράσσονται από θόρυβο κανονικά κατανομημένο με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση  $\sigma_R$  και  $\sigma_V$  αντίστοιχα. Η άνω σειρά απεικονίζει τις τροχιές εκτίμησης για τυπικές αποκλίσεις  $\sigma_R = \sigma_V = 0.0$  m, και η κάτω σειρά για  $\sigma_R = \sigma_V = 0.05$  m.

Το σχήμα 1.17 απεικονίζει το μέσο χρόνο εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου διόρθωσης της εκτίμησης θέσης σε δέκα εκτελέσεις για μέγιστο αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων  $I_T = 20$ , για αυξανόμενο μέγεθος σαρώσεων  $N_s$ . Ο αλγόριθμος VIII παραθέτει σε ψευδοκώδικα τη μέθοδο εκτίμησης της θέσης για δεδομένη και γνωστή εκτίμηση προσανατολισμού.



Σχήμα 1.16: Οι τροχιές της εκτίμησης θέσης βάσει εφαρμογής του Θεωρήματος I για επίπεδο διαταραχών αποστάσεων  $\sigma_R = \sigma_V = 0.0$  m (άνω σειρά) και  $\sigma_R = \sigma_V = 0.05$  m (κάτω σειρά). Τα τελικά σφάλματα εκτίμησης θέσης είναι  $2.04e-07$  m και  $5.72e-03$  m αντίστοιχα. Η εκτίμηση θέσης συγκλίνει ομοιόμορφα ασυμπτωτικά στην πρώτη περίπτωση (Θεώρημα I), ενώ στη δεύτερη είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε μία γειτονιά της πραγματικής θέσης (Θεώρημα II)



Σχήμα 1.17: Ο μέσος χρόνος εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου διόρθωσης της εκτίμησης θέσης για δέκα εκτελέσεις, ανά μέγεθος σαρώσεων εισόδου  $N_s$

---

**Αλγόριθμος VIII tc\_x1**

---

**Input:**  $M, \mathcal{S}_R, \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}), k_{max}, \varepsilon_u, N_s$ **Output:**  $\hat{p}'(\hat{x}', \hat{y}', \hat{\theta})$ 

```

1:  $k \leftarrow 0$ 
2: while  $k < k_{max}$  do
3:    $\mathcal{S}_V \leftarrow \text{scan\_map}(M, \hat{p}, N_s)$ 
4:    $X_1 \leftarrow \text{diff\_dft}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V)$ 
5:    $(X_{1,r}, X_{1,i}) \leftarrow (\text{re}(X_1), \text{im}(X_1))$ 
6:    $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{1}{N_s} \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,r} \\ X_{1,i} \end{bmatrix}$ 
7:    $\hat{p} \leftarrow \hat{p} + \mathbf{u}_k$ 
8:   if  $\|\mathbf{u}_k\|_2 < \varepsilon_u$  then
9:     break
10:  end if
11:   $k \leftarrow k + 1$ 
12: end while
13:  $\hat{p}' \leftarrow \hat{p}$ 
14: return  $\hat{p}'$ 

```

---



---

**Αλγόριθμος IX diff\_dft**

---

**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V$ **Output:**  $X_1$ 

```

1: assert  $|\mathcal{S}_R| = |\mathcal{S}_V|$ 
2:  $N_s \leftarrow |\mathcal{S}_R|$ 
3:  $\Delta \leftarrow \{\emptyset\}$ 
4: for  $n = 0 : N_s - 1$  do
5:    $d_n \leftarrow \mathcal{S}_R[n] - \mathcal{S}_V[n]$ 
6:   append  $d$  to  $\Delta$ 
7: end for
8:  $\mathbf{X} \leftarrow \mathcal{F}\{\Delta\}$ 
9:  $X_1 \leftarrow \mathbf{X}[1]$ 
10: return  $X_1$ 

```

---

**1.3.2 Ιδιότητες υπό γενικές συνθήκες**

Σε αντιστοιχία με τις μεθόδους ευθυγράμμισης προσανατολισμού, το σφάλμα θέσης της μεθόδου ευθυγράμμισης θέσης Πρώτων Αρχών αυξάνει σε γενικές συνθήκες μη σύμπτωσης

της εκτίμησης προσανατολισμού με τον πραγματικό προσανατολισμό του αισθητήρα, και σε συνθήκες διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα και μη απολύτου σύμπτωσης του χάρτη με το περιβάλλον που αναπαριστά.

Σε πραγματικές συνθήκες, όταν οι ακτίνες των πραγματικών σαρώσεων ή/και των εικονικών σαρώσεων αλλοιώνονται από προσθετικό θόρυβο πεπερασμένου μέγιστου μέτρου, η εκτίμηση θέσης δεν είναι ικανή να προσεγγίσει ασυμπτωτικά την πραγματική θέση με την εφαρμογή του Θεωρήματος I. Παρ' όλα αυτά, η εκτίμηση θέσης μπορεί να φραχθεί σε μια γειτονιά της πραγματικής θέσης του αισθητήρα. Το Θεώρημα II τυποποιεί αυτή τη δήλωση [Fil22].

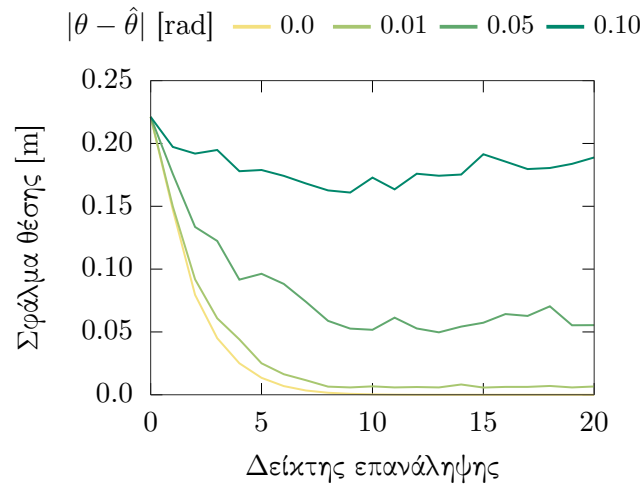
**Θεώρημα II.** Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος I. Έστω επιπλέον ότι η αποστάσεις που αναφέρονται από την πραγματική  $\mathcal{S}_R$  και εικονική  $\mathcal{S}_V$  σάρωση επηρεάζονται από προσθετικές διαταραχές με πεπερασμένο μέγιστο μέτρο. Τότε η εκτίμηση θέσης  $\hat{l}[k]$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη για  $k \geq k_0$  και ομοιόμορφα τελικά φραγμένη σε μια γειτονιά της πραγματικής θέσης  $l$ . Το μέγεθος της γειτονιάς εξαρτάται από τα δύο μέγιστα μέτρα (με την έννοια της infinity norm) των διαταραχών που αλλοιώνουν τις πραγματικές τιμές των δύο σαρώσεων.

**Επακόλουθο VI.** Σε σύγκριση με την περίπτωση που δεν υπάρχουν διαταραχές, μια λύση που ικανοποιεί το στόχο (\*) δεν είναι αυστηρά εγγυημένη για κάθε αρχική θέση  $\hat{l}[0]$  στην περίπτωση που οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα φέρουν διαταραχές ή/και ο χάρτης  $M$  είναι διεφθαρμένος ως προς το περιβάλλον που αναπαριστά.

Ας συμβολίσουμε και πάλι με  $k_{stop} \in (0, I_T]$  τον δείκτη της τελευταίας επανάληψης, με  $\hat{l}' = \hat{l}[k_{stop}]$  την τελική εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα, και με  $B$  το τελικό φράγμα (ultimate bound) του σφάλματος θέσης. Εάν  $\|e(l, \hat{l}[0])\|_2 > B$ , το Θεώρημα II εγγυάται την ικανοποίηση του στόχου (\*) εάν  $k_{stop} \geq k_0$ . Εάν, από την άλλη πλευρά, εάν  $\|e(l, \hat{l}[0])\|_2 \leq B$ , δεν είναι βέβαιο ότι  $\|e(l, \hat{l}')\|_2 < \|e(l, \hat{l}[0])\|_2$ —αυτό που είναι βέβαιο σε αυτή την περίπτωση, όμως, είναι ότι  $\|e(l, \hat{l}[k])\|_2 \not\geq B$  για όλα κάθε  $k \geq 0$ .

Επιπρόσθετα, σε γενικές συνθήκες δεν υφίσταται σύμπτωση της εκτίμησης προσανατολισμού και του πραγματικού προσανατολισμού. Το σχήμα 1.18 απεικονίζει την εξέλιξη του μέτρου του σφάλματος εκτίμησης θέσης για αυξανόμενες τιμές του σφάλματος εκτίμησης

προσανατολισμού  $|\theta - \hat{\theta}|$  σε ένα πείραμα όπου το αρχικό σφάλμα θέσης είναι  $[-0.1165, 0.188]$  m.



Σχήμα 1.18: Η εξέλιξη του μέτρου σφάλματος εκτίμησης θέσης για αυξανόμενες τιμές του μέτρου του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού. Το τελικό σφάλμα θέσης είναι ανάλογο του αρχικού σφάλματος προσανατολισμού

**Παρατήρηση VI.** Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μετά την εφαρμογή του Θεωρήματος I το σφάλμα θέσης είναι ανάλογο με το σφάλμα προσανατολισμού.

## 1.4 Μεθοδολογία ευθυγράμμισης από κοινού

Οι δύο προηγούμενες ενότητες περιγράφουν μεθόδους ελάττωσης (α) του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού όταν η εκτίμηση θέσης συμπίπτει με τη θέση του αισθητήρα, και (β) του σφάλματος εκτίμησης θέσης όταν η εκτίμηση προσανατολισμού ισούται με τον προσανατολισμό του αισθητήρα. Ωστόσο στη γενική περίπτωση καμία ισότητα δεν ισχύει. Επιπρόσθετα, στη γενική περίπτωση διαταραχές επηρεάζουν τις μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα αποστάσεων και το βαθμό ταύτισης του χάρτη  $M$  ως προς το περιβάλλον που αναπαριστά.

Οι τελευταίες δύο προτάσεις είναι κρίσιμης σημασίας για την από κοινού επίδοση των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες δύο ενότητες, λόγω των περιορισμών των ενότητων 1.2.7 και 1.3.2, και της Παρατήρησης ??.



### 1.4.1 Αντιμετώπιση των υπό γενικές συνθήκες γωνιακών περιορισμών

Η παράκαμψη ή ο μετριασμός των επιδράσεων των περιορισμών που εμφανίζουν οι μέθοδοι ευθυγράμμισης σε γενικές συνθήκες ανισότητας στάσεων και διαταραχών στοχεύει στη λύση δύο ειδών προβλημάτων, δεδομένων των ιδιοτήτων των Παρατηρήσεων II και VI:

- Το πρώτο αφορά αποκλειστικά στη μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών, και περιγράφεται στην Παρατήρηση III
- Το δεύτερο πρόβλημα αφορά στις συγγενείς Παρατηρήσεις IV και V

Δεδομένου ότι όλες οι μέθοδοι εκτίμησης προσανατολισμού επηρεάζονται από την έλλειψη μηχανισμού σύγκρισης εκτιμήσεων ως προς το σφάλμα τους, προσεγγίζουμε τη λύση των τριών πρώτων προβλημάτων με τον ακόλουθο κοινό τρόπο.

Έστω ότι προσθέτουμε στη μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών την λειτουργία δειγματοληψίας του χάρτη που παρουσιάστηκε στην ενότητα 1.2.6. Έστω επίσης ότι αφαιρούμε από τη μέθοδο του Θησέα τη λειτουργία υπολογισμού και σύγκρισης των τιμών της μετρικής Ποσοστού Διάκρισης για κάθε εκτιμώμενη εκτίμηση προσανατολισμού. Τότε οι τρεις μέθοδοι γίνονται εναλλάξιμες υπό την έννοια ότι, για μία δεδομένη εκτίμησης στάσης και ένα δεδομένο βαθμό δειγματοληψίας  $\nu$ , καθεμία παράγει ένα σύνολο εκτιμήσεων στάσης μεγέθους  $2^\nu$ .

Αυτό που επιζητούμε σε αυτό το στάδιο είναι η εφεύρεση ενός μέτρου σύγκρισης των  $2^\nu$  εκτιμήσεων προσανατολισμού ως προς το (άγνωστο) σφάλμα τους. Το μέτρο σύγκρισης θα πρέπει να αντικατοπτρίζει τις ιδιότητες που περιγράφονται από τις παρατηρήσεις II και VI, και συνεπώς τα κριτήρια που πρέπει να ικανοποιεί αυτή η μετρική θα είναι, με βάση τα παραπάνω, τα ακόλουθα δύο:

- (K1) Δεδομένης της παρατήρησης VI, η μετρική θα πρέπει για δεδομένο σφάλμα θέσης να αυξάνει για αυξανόμενο μέτρο σφάλματος προσανατολισμού
- (K2) Δεδομένης της παρατήρησης II, η μετρική θα πρέπει για δεδομένο σφάλμα προσανατολισμού να αυξάνει για αυξανόμενο μέτρο σφάλματος θέσης

Για την ικανοποίηση των K1 και K2 εισάγουμε τη μετρική Cumulative Absolute Error per Ray (CAER), η οποία δίνεται από την εξίσωση (1.32), και παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 1.19 για μεταβλητές τιμές διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα και επίπεδα διαφθοράς του χάρτη ως προς το περιβάλλον που αναπαριστά, σε αντιστοιχία με το σχήμα 1.14.

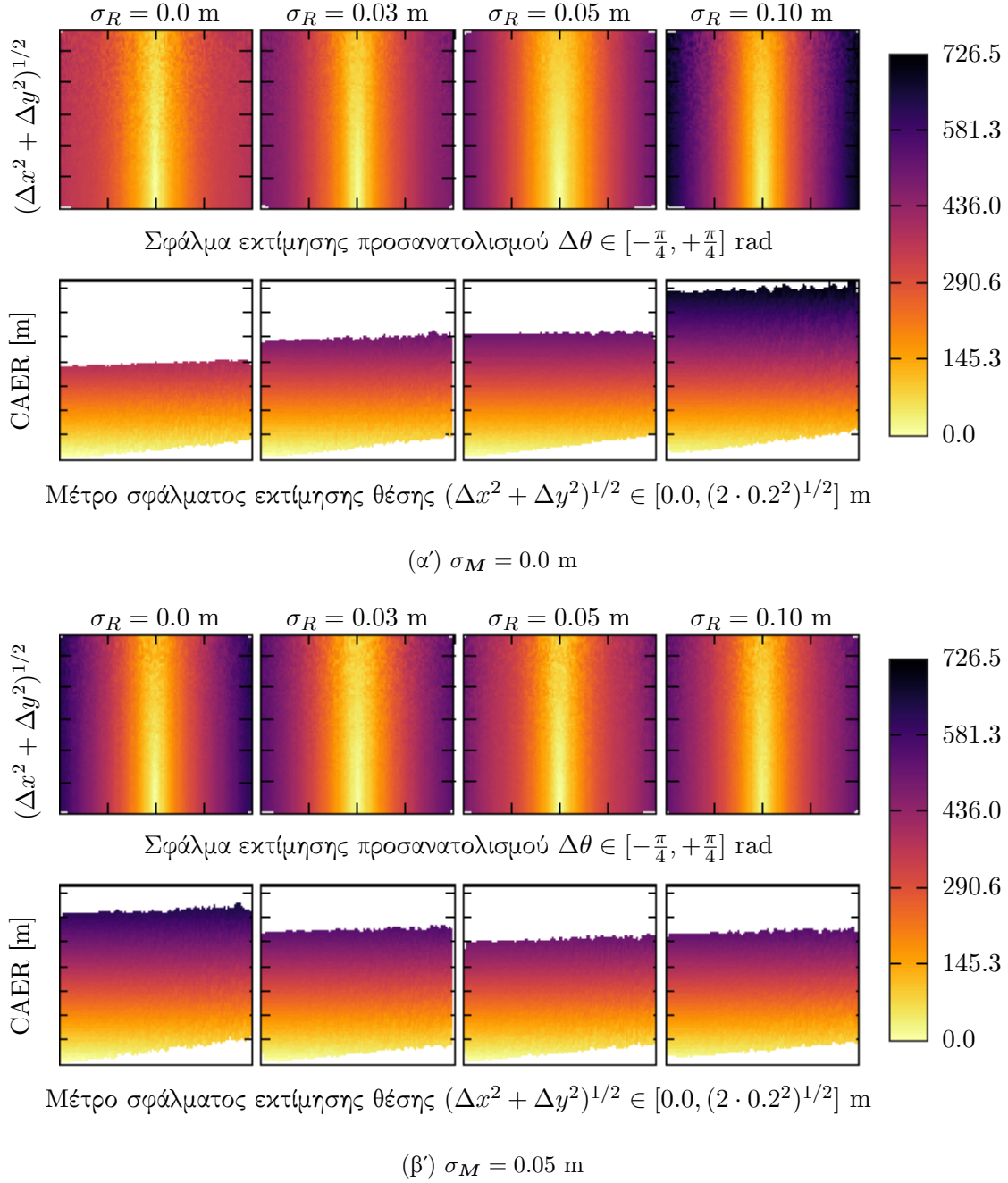
$$\text{CAER}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V) \triangleq \sum_{n=0}^{N_s-1} \left| \mathcal{S}_R[n] \Big|_{(x,y,\theta)} - \mathcal{S}_V[n] \Big|_{(\hat{x},\hat{y},\hat{\theta})} \right| \quad (1.32)$$

Με την εισαγωγή της λειτουργίας δειγματοληψίας κατά Θησέα στη μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών, την αφαίρεση του υπολογισμού και σύγκρισης των τιμών του Ποσοστού Διάκρισης, και την εισαγωγή της μετρικής CAER καταφέρνουμε να χτυπήσουμε με ένα σμπάρο δύο τριγώνια για όλες τις μεθόδους εκτίμησης προσανατολισμού, διότι με αυτόν τον τρόπο:

- ιδρύουμε έναν ορθολογικό μηχανισμό σύγκρισης των εκτιμήσεων προσανατολισμού της μεθόδου εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών (Παρατηρήσεις III και IV)
- παρακάμπτουμε τον ύφαλο που δημιουργεί η σύγκριση τους μέσω της μετρικής Ποσοστού Διάκρισης για τις Προκρούστειες μεθόδους σε συνθήκες ανισότητας θέσεων (Παρατήρηση V )

Καθώς κάθε μέθοδος εξάγει πλέον  $2''$  εκτιμήσεις προσανατολισμού, όλες με την ίδια εκτίμηση θέσης, συλλαμβάνοντας από την κάθε μία εικονική σάρωση εντός του  $\mathbf{M}$  και εισάγοντας την στη μετρική CAER παράγει μία τιμή που αυξάνει για αυξανόμενο σφάλμα προσανατολισμού (σχήμα 1.19, πρώτη και τρίτη σειρά)—και αυτή η ιδιότητα διατηρείται στη γενική συνθήκη όπου οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα και η ταύτιση του χάρτη με το περιβάλλον που αναπαριστά είναι διεφθαρμένες από θόρυβο.

Σε αυτό το σημείο έχουμε εκμεταλλευτεί μόνο την ιδιότητα της παρατήρησης II. Για τον επιπρόσθετο διαχωρισμό ανάμεσα στις εκτιμήσεις προσανατολισμού εκμεταλλευόμαστε την καμπυλότητα της CAER και την ιδιότητα της παρατήρησης VI με τον εξής τρόπο: δεδομένου ότι εκτιμήσεις στάσης μεγαλύτερου σφάλματος προσανατολισμού οδηγούν σε (α) υψηλότερα σφάλματα θέσης όταν εισαχθούν στη μέθοδο εκτίμησης θέσης Πρώτων Αρχών, και (β) υψηλότερες τιμές CAER, αν εισάγουμε τις  $2''$  εκτιμήσεις στάσης που έχουν προέλθει από τις τρεις



Σχήμα 1.19: Κατόψεις (πρώτη και τρίτη σειρά) και πλάγιες όψεις (δεύτερη και τέταρτη) της μετρικής CAER (εξίσωση 1.32) από  $10^5$  ζεύγη μίας σάρωσης σταθερής στάσης και εικονικών σαρώσεων που συνελήφθησαν από τυχαίες στάσεις, ανάλογα με την απόσταση  $(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$ ,  $\Delta x, \Delta y \in [-0.2, +0.2]$  m, και το σχετικού προσανατολισμό  $\Delta\theta \in [-\pi/4, +\pi/4]$  rad των στάσεων από όπου αυτές καταγράφηκαν, για αυξανόμενες τιμές της τυπικής απόκλισης των διαταραχών των πραγματικών μετρήσεων  $\sigma_R$ , και διαφθοράς του χαρτί  $\sigma_M$ . Οι εκτιμήσεις στάσεις που είναι πιο κοντά στην πραγματική στάση από άποψη (α) προσανατολισμού και (β) θέσης παρουσιάζουν χαμηλότερες τιμές CAER από εκείνες που απέχουν περισσότερο από αυτήν

μεθόδους εκτίμησης προσανατολισμού στη μέθοδο εκτίμησης θέσης για έναν περιορισμένο αριθμό επαναλήψεων, τότε οι περισσότεροι ανακριβείς ως προς τον προσανατολισμό στάσεις

θα οδηγηθούν σε περισσότερο ανακριβείς θέσεις, και, κατά συνέπεια, οι εικονικές σαρώσεις που συλλαμβάνονται από αυτές θα οδηγήσουν σε μεγαλύτερες τιμές CAER σε σχέση με τις λιγότερο ανακριβείς στάσεις κατά προσανατολισμό. Ταυτόχρονα, με αυτόν τον τρόπο, γίνεται εφικτό να εισαχθεί μόνο μία εκτίμηση στάσης από τις  $2^\nu$  στη μέθοδο εκτίμησης θέσης (αυτή με τη χαμηλότερη τιμή CAER), με αποτέλεσμα χαμηλότερο χρόνο εκτέλεσης της από κοινού μεθόδου ευθυγράμμισης.



Σχήμα 1.20: Το μπλοκ διάγραμμα του τελικού συστήματος εκτίμησης προσανατολισμού του συστήματος ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις, FSMSM

Πιο συγκεκριμένα: έστω τα δεδομένα του Προβλήματος Π3. Έστω επίσης βαθμός δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Τότε το τελικό σύστημα εκτίμησης προσανατολισμού CAER-based Orientation Estimation, το οποίο απεικονίζεται σε μπλοκ διάγραμμα στο σχήμα 1.20 και σε ψευδοκώδικα στον Αλγόριθμο X, υπολογίζει πρώτα  $2^\nu$  εκτιμήσεις στάσης, οι οποίες αποτελούν διατεταγμένα στοιχεία του συνόλου  $\hat{P}_{OE} = \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}_k)\}$ ,  $k = 0, \dots, 2^\nu - 1$ . Όλες οι στάσεις του  $\hat{P}_{OE}$  έχουν ίσες εκτιμήσεις θέσης, αλλά διαφορετικές εκτιμήσεις προσανατολισμού. Η τελική εκτίμηση προσανατολισμού για κάθε υποψήφια αρχική εκτίμηση προσανατολισμού  $\hat{\theta}_k = \hat{\theta} + k \cdot \gamma / 2^\nu$  μεσολαβείται χρησιμοποιώντας έναν από τους βασικούς αλγορίθμους των ενότητων 1.2.1, 1.2.2, και 1.2.3, και ο δείκτης  $k$  είναι ο δείκτης που καθορίζει τη διάταξή τους στο σύνολο  $\hat{P}_{OE}$ .

---

**Αλγόριθμος X** caer-based\_orientation\_estimation

---

**Input:**  $\mathbf{rc}, \mathbf{M}, \mathcal{S}_R, \hat{\mathbf{p}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}), \gamma, N_s, \nu$ **Output:**  $\hat{\mathbf{p}}_C(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}_C)$ 

```

1:  $\hat{\mathbf{P}}_{OE} \leftarrow \{\emptyset\}$ 
2: for  $k = 0 : 2^\nu - 1$  do
3:    $\hat{\mathbf{p}}_k \leftarrow (\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta} + k \cdot \gamma / 2^\nu)$  (εξ. 1.25)
4:    $\mathcal{S}_V^k \leftarrow \text{scan\_map}(\mathbf{M}, \hat{\mathbf{p}}_k, N_s)$  (αλγ. VII)
5:    $\hat{\theta}' \leftarrow \text{rcm}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{\mathbf{p}}_k, \gamma)$  (αλγ. XI)
6:    $\hat{\theta}_k \leftarrow \hat{\theta}' + k \cdot \gamma / 2^\nu$ 
7:   append  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}_k)$  to  $\hat{\mathbf{P}}_{OE}$ 
8:    $k \leftarrow k + 1$ 
9: end for
10:  $\hat{\mathbf{P}}_{RPE} \leftarrow \{\emptyset\}$ 
11: for  $k = 0 : 2^\nu - 1$  do
12:    $\hat{\mathbf{p}}'_k \leftarrow \text{tc\_x1}(\mathbf{M}, \mathcal{S}_R, \hat{\mathbf{P}}_{OE}[k], 1, \infty, N_s)$  (αλγ. VIII)
13:   append  $\hat{\mathbf{p}}'_k$  to  $\hat{\mathbf{P}}_{RPE}$ 
14: end for
15:  $\mathbf{C} \leftarrow \{\emptyset\}$ 
16: for  $k = 0 : 2^\nu - 1$  do
17:    $\mathcal{S}_V^{k'} \leftarrow \text{scan\_map}(\mathbf{M}, \hat{\mathbf{P}}_{RPE}[k], N_s)$ 
18:   append  $\text{CAER}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V^{k'})$  to  $\mathbf{C}$  (εξ. 1.32)
19: end for
20:  $k_{\min} \leftarrow \arg \min\{\mathbf{C}\}$ 
21:  $\hat{\mathbf{p}}_C(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}_C) \leftarrow \hat{\mathbf{P}}_{OE}[k_{\min}]$ 
22: return  $\hat{\mathbf{p}}_C$ 

```

---

Προκειμένου να δημιουργηθεί μία ευκρινώς διαχωρισμένη ιεραρχία τιμών μετρικών αξιολόγησης του σφάλματος των εκτιμήσεων προσανατολισμού, κάθε εκτίμηση στάσης του  $\hat{\mathbf{P}}_{OE}$  μεταφέρεται στο σύστημα εκτίμησης θέσης, όπου η θέση κάθε εκτίμησης στάσης μετατοπίζεται μία φορά ( $I_T = 1$ ), σύμφωνα με τον Αλγόριθμο VIII. Αυτή η λειτουργία, η οποία συμβολίζεται με τον τελεστή  $\text{RPE}(\cdot)$  στο σχήμα 1.20, παράγει το σύνολο  $\hat{\mathbf{P}}_{RPE} = \{(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{\theta}_k)\}$ ,  $|\hat{\mathbf{P}}_{RPE}| = 2^\nu$ . Με την πρόβα εκτίμησης θέσης κάθε εκτίμησης στάσης του  $\hat{\mathbf{P}}_{OE}$  και την κα-

**Αλγόριθμος XI rcm****Input:**  $rc, \mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}), \gamma$ **Output:**  $\hat{\theta}'$ 

```

1: if  $rc = rc\_fm$  then
2:    $(\hat{\theta}', \cdot) \leftarrow rc\_fm(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}), \gamma)$  (αλγ. I)
3: else if  $rc = rc\_x1$  then
4:    $\hat{\theta}' \leftarrow rc\_x1(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}))$  (αλγ. II)
5: else if  $rc = rc\_uf$  then
6:    $(\hat{\theta}', \cdot) \leftarrow rc\_uf(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}), \gamma)$  (αλγ. III)
7: end if
8: return  $\hat{\theta}'$ 

```

ταγραφή της τιμής CAER για κάθε μια από τις μετατοπισμένες εκτιμήσεις στάσης του  $\hat{P}_{RPE}$ , είναι δυνατόν να καθοριστεί μια κατάταξη σφάλματος στάσης μεταξύ όλων των εκτιμήσεων του συνόλου  $\hat{P}_{OE}$ , και ταυτόχρονα να διατηρείται μόνο μία εκτίμηση στάσης για την επόμενη επανάληψη της συνολικής μεθόδου εκτίμησης.<sup>3</sup> Η εκτίμηση στάσης  $\hat{p}_C \in \hat{P}_{OE}$  η οποία όταν μετατοπιστεί μία φορά καταγράφει την ελάχιστη τιμή CAER μεταξύ όλων των παρομοίως μεταχειρισθέντων εκτιμήσεων στάσης του  $\hat{P}_{OE}$  είναι αυτή που εξάγεται από το τελικό σύστημα εκτίμησης προσανατολισμού.

**1.4.2 Το σύστημα από κοινού ευθυγράμμισης**

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε το τελικό γενικό σύστημα που στοχεύει στην επίλυση του προβλήματος Π3 και το είναι ικανό να ενσωματώσει τη μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού της προηγούμενης ενότητας και τη μέθοδο εκτίμησης θέσης (ενότητα 1.3). Το προτεινόμενο σύστημα εκτιμά αρχικά τον προσανατολισμό του αισθητήρα (ισοδύναμα του ρομπότ στον οποίο είναι προσαρτημένος—Παρατήρηση ??), και στη συνέχεια θέση του, ως προς το σύστημα συντεταγμένων του χάρτη  $M$ . Ως συνέπεια της παρατήρησης ??, η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι την ικανοποίηση συνθήκης τερματισμού. Η μέθοδος αυτή περιγράφεται στα ακόλουθα.

<sup>3</sup>Σε αντίθετη περίπτωση η διόρθωση της θέσης των 2' εκτιμήσεων στάσης και η επανατροφοδότησή τους στο σύστημα θα προκαλούσε εκθετικό κόστος σε χρόνο εκτέλεσης.



Σχήμα 1.21: Η κεντρική μέθοδος εκτίμησης στάσης του FSMSM, One-step Pose Estimation

Έστω οι προϋποθέσεις του προβλήματος Π3, δηλαδή η αρχική εκτίμηση εισόδου  $\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ , η πραγματική σάρωση  $S_R$ , και ο χάρτης  $M$ . Τότε η μέθοδος ελάττωσης του συνολικού σφάλματος εκτίμησης στάσης που προτείνουμε, την οποία ονομάζουμε Fourier Scan-to-Map-Scan Matching (FSMSM) και η οποία παρουσιάζεται στο σχήμα 1.22—η μέθοδος μειώνει το σφάλμα εκτίμησης με την επαναληπτική εκτέλεση της διαδικασίας εκτίμησης στάσης ενός βήματος (One-step Pose Estimation, OPE—σχήμα 1.21), μέχρι να ικανοποιηθεί ένα σύνολο συνθηκών τερματισμού. Η FSMSM ξεκινά με ένα αρχικό βαθμό δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu = \nu_{\min}$ . Η εκτίμηση της στάσης εισόδου επεξεργάζεται από την OPE, και η έξοδός της  $\hat{p}'$  εξετάζεται ως προς συνθήκες ανάκτησης και σύγκλισης. Εάν η προκύπτουσα εκτίμηση στάσης βρεθεί εκτός του χάρτη  $M$  τότε δημιουργείται με τυχαίο τρόπο μια νέα εκτίμηση από την αρχική εκτίμηση  $\hat{p}$ , και η διαδικασία επανεκκινεί, με αρχική εκτίμηση τη νέα. Εάν δεν παρατηρείται σημαντική διόρθωση της εκτίμησης  $\|\hat{p}' - \hat{p}\|_2 < \varepsilon_{dp}$ , τότε ο βαθμός δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu$  αυξάνεται και η τελευταία εκτίμηση της OPE της τροφοδοτείται ως νέα αρχική συνθήκη. Η αύξησή του βαθμού δειγματοληψίας χρησιμεύει ως μέσο μείωσης του σφάλματος προσανατολισμού και συνεπώς του σφάλματος εκτίμησης θέσης (Παρατηρήσεις II και VI). Διαφορετικά, η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται με νέα αρχική εκτίμηση την τελευταία της OPE έως ότου δεν παρατηρηθεί σημαντική διόρθωση. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου επιτευχθεί μέγιστος βαθμός δειγματοληψίας χάρτη  $\nu = \nu_{\max}$ , οπότε η FSMSM τερματίζει εάν πληρούται μια τελική συνθήκη. Αυτή η τελική συνθήκη διευκολύνει την αποφυγή τοπικών μεγίστων. Στην περίπτωση που αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται, δημιουργείται και πάλι με τυχαίο τρόπο μία νέα στάση και η διαδικασία επανεκκινεί.



Σχήμα 1.22: Το διάγραμμα ροής του FSMSM. Η εκτέλεση αρχίζει με έναν αρχικό ελάχιστο βαθμό δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu_{\min}$ , τη σάρωση  $S_R$  που καταγράφεται από τον φυσικό αισθητήρα, και το χάρτη  $M$  του περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκεται το ρομπότ. Η αρχική εκτίμηση της στάσης παρέχεται από έναν παρατηρητή κατά τη διάρκεια εκτίμησης στάσης βάσει περιορισμένης αβεβαιότητας, ή με τη μορφή μιας υπόθεσης κατά τη διάρκεια εκτίμησης στάσης βάσει καθολικής αβεβαιότητας. Η εσωτερική μέθοδος One-step Pose Estimation (σχήμα 1.21) καλείται επαναληπτικά, ενημερώνοντας την εκτίμηση στάσης μέχρι να επιτευχθεί ένας μέγιστος βαθμός δειγματοληψίας και σύγκλιση της εκτίμησης

Η κεντρική μέθοδος One-step Pose Estimation χρησιμοποιεί μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού της ενότητας 1.4.1 και τη μέθοδο εκτίμησης θέσης της ενότητας 1.3. Στην τελευταία ο αριθμός των επαναλήψεων  $I_T$  είναι αύξουσα συνάρτηση του βαθμού δειγματοληψίας του



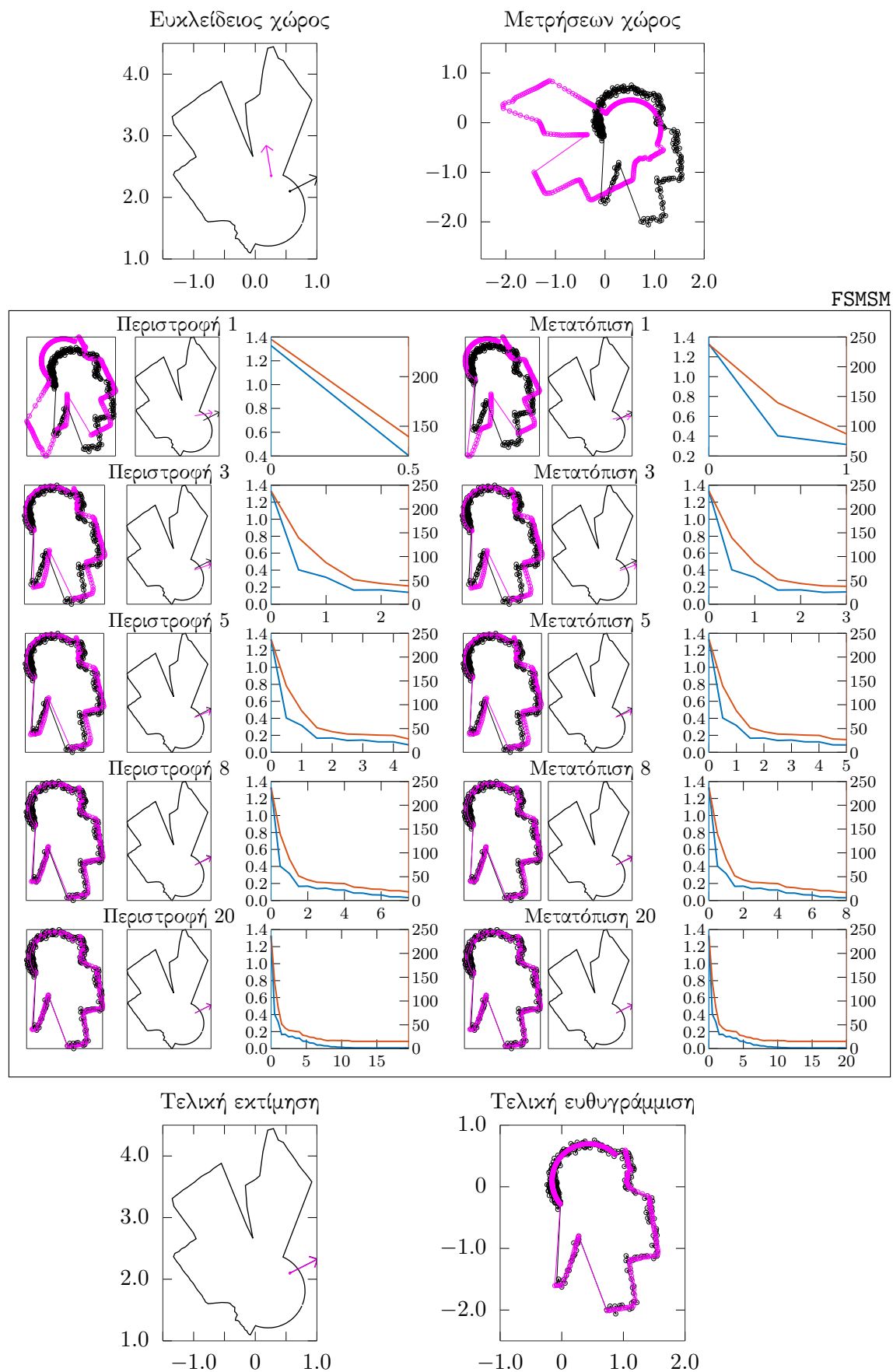
χάρτη  $\nu$  ( $I_T = f(\nu)$  στο σχήμα 1.21).<sup>4</sup> Το σύστημα εκτίμησης θέσης παράγει την εκτίμηση στάσης  $\hat{p}'$ , η οποία στη συνέχεια τροφοδοτείται πίσω στο σύστημα εκτίμησης προσανατολισμού με τη μορφή της νέας του εκτίμησης στάσης:  $\hat{p} \leftarrow \hat{p}'$ . Στην πράξη, το σύνολο στάσεων  $\hat{P}_{OE}$  συμπληρώνεται με μία στάση της οποίας η θέση είναι ίση με  $\hat{p}$ , και της οποίας ο προσανατολισμός είναι ίσος με τον προσανατολισμό της  $\hat{p}_C$  που παράγει την ελάχιστη τιμή CAER με την πάροδο του χρόνου. Αυτή η προσθήκη εισάγει μια μορφή μνήμης στο σύστημα, η οποία το βοηθά στην αποφυγή αποκλίσεων και η οποία, ως εκ τούτου, ωφελεί την ταχύτητα εκτέλεσης.

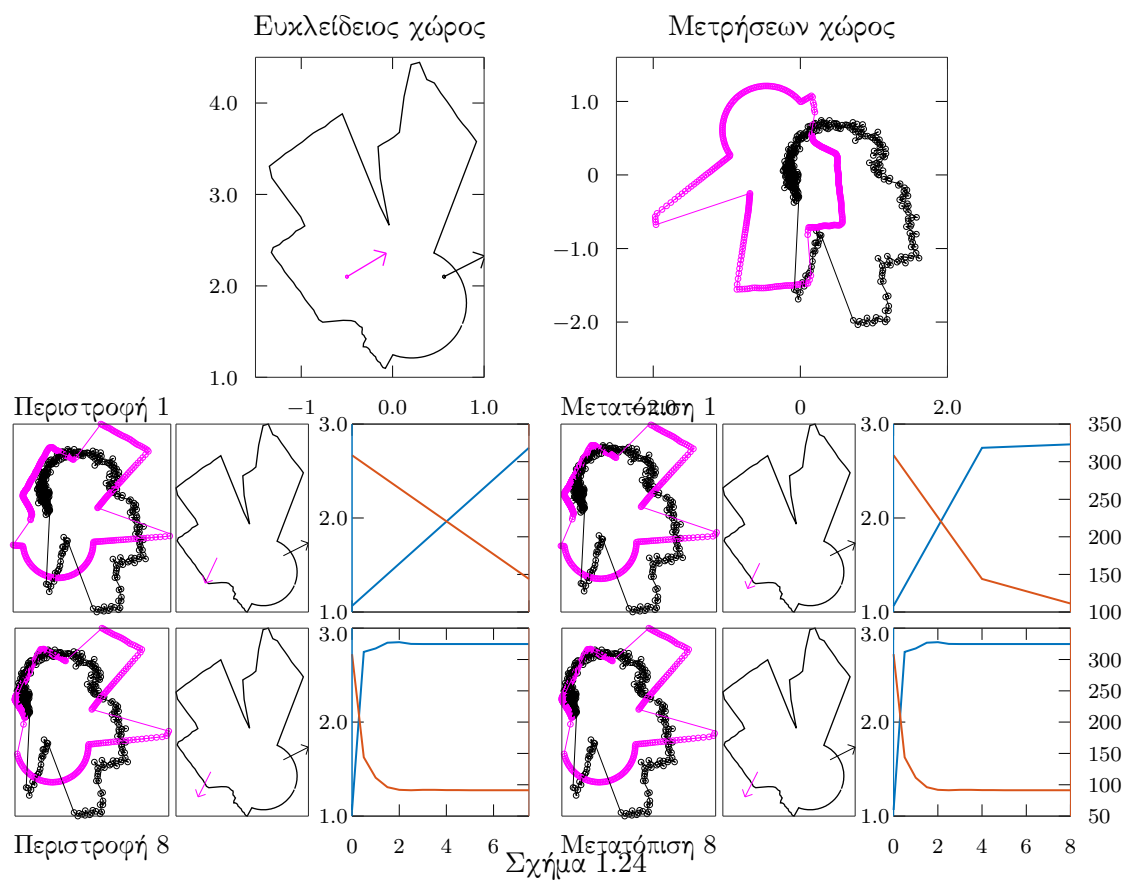
## 1.5 Πειραματική αξιολόγηση

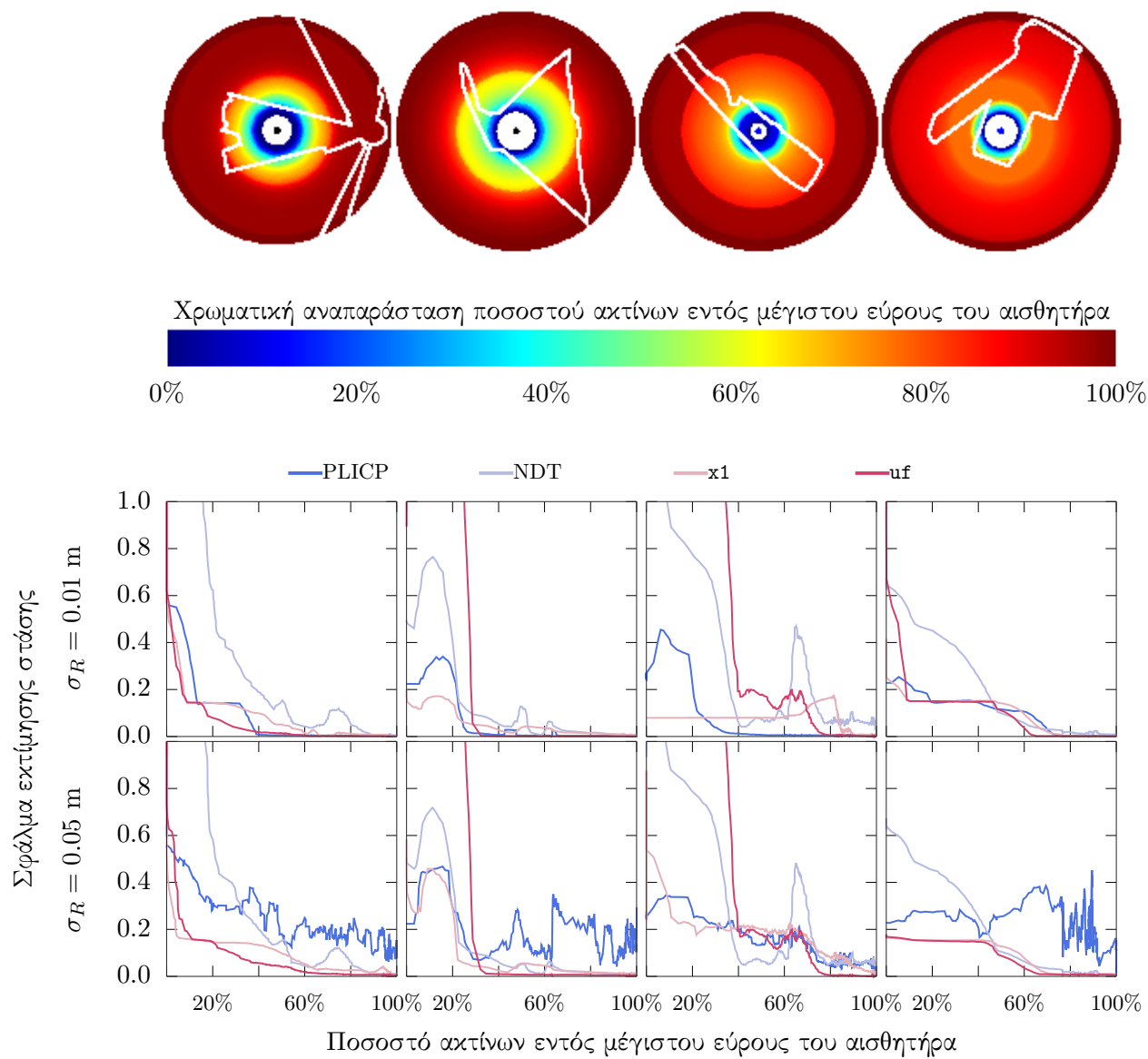
## 1.6 Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα

---

<sup>4</sup>Η λογική της αλυσιδωτής σύνδεσης του αριθμού των επαναλήψεων της με το βαθμό δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu$  είναι η ακόλουθη. Δεδομένου ότι το σφάλμα προσανατολισμού είναι αντιστρόφως ανάλογο του  $\nu$ , σε χαμηλούς βαθμούς δειγματοληψίας χάρτη, όταν το σφάλμα εκτίμησης θέσης είναι στα υψηλότερά του επίπεδα, εάν ο αριθμός των επαναλήψεων ήταν υψηλός τότε η εκτίμηση της θέσης θα ήταν ευάλωτη σε απόκλιση. Επομένως ο αριθμός των επαναλήψεων διατηρείται χαμηλός στα αρχικά στάδια έτσι ώστε να υπάρχει ισορροπία μεταξύ της μείωσης του σφάλματος θέσης και της απόκλισης της εκτίμησης θέσης. Σε υψηλότερες τιμές του  $\nu$  το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού έχει μειωθεί, και στη συνέχεια η απόκλιση περιορίζεται ή/και επιτυγχάνεται σε υψηλότερες τιμές επανάληψης  $I_T$ . Καθώς η εκτίμηση προσανατολισμού γίνεται όλο και πιο ακριβής, το σύστημα εκτίμησης θέσης αφήνεται να επαναλάβει τη διαδικασία του περισσότερες φορές ώστε να είναι εφικτή η περαιτέρω μείωση του σφάλματος θέσης.

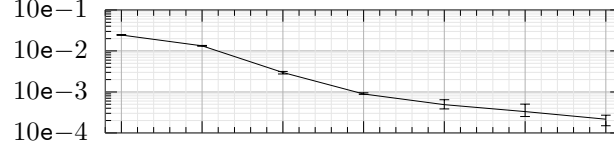




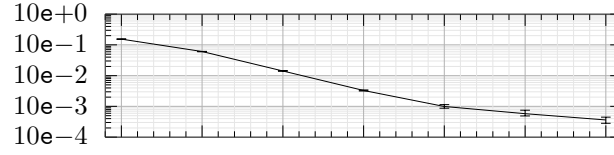


Σχήμα 1.25

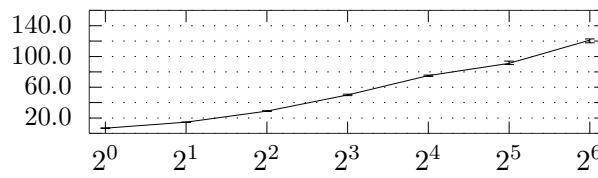
Σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού [rad] ως προς  $\mu_{\max} = 2^{\nu_{\max}}$



Σφάλμα εκτίμησης θέσης [m] ως προς  $\mu_{\max} = 2^{\nu_{\max}}$

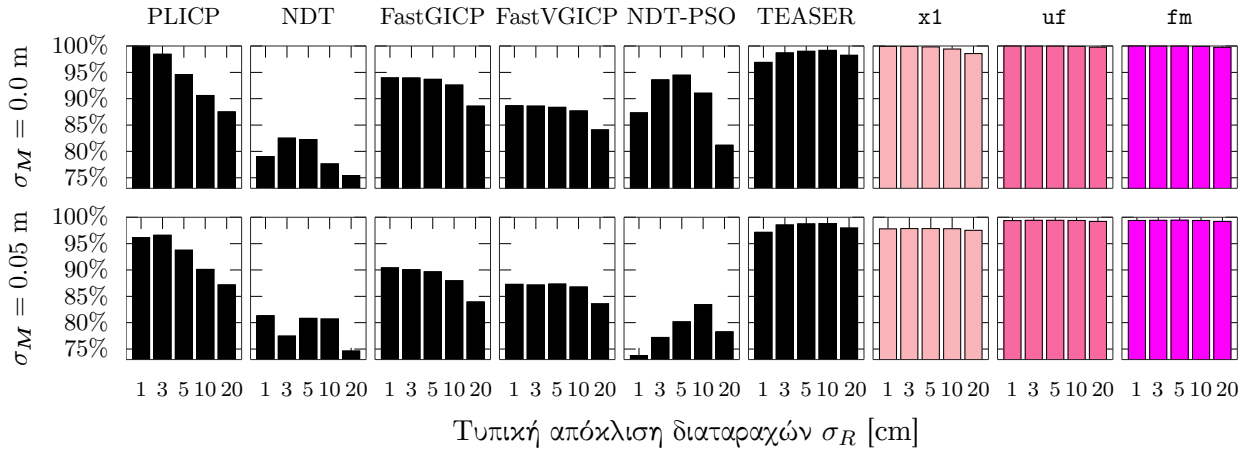


Χρόνος εκτέλεσης [ms] ως προς  $\mu_{\max} = 2^{\nu_{\max}}$

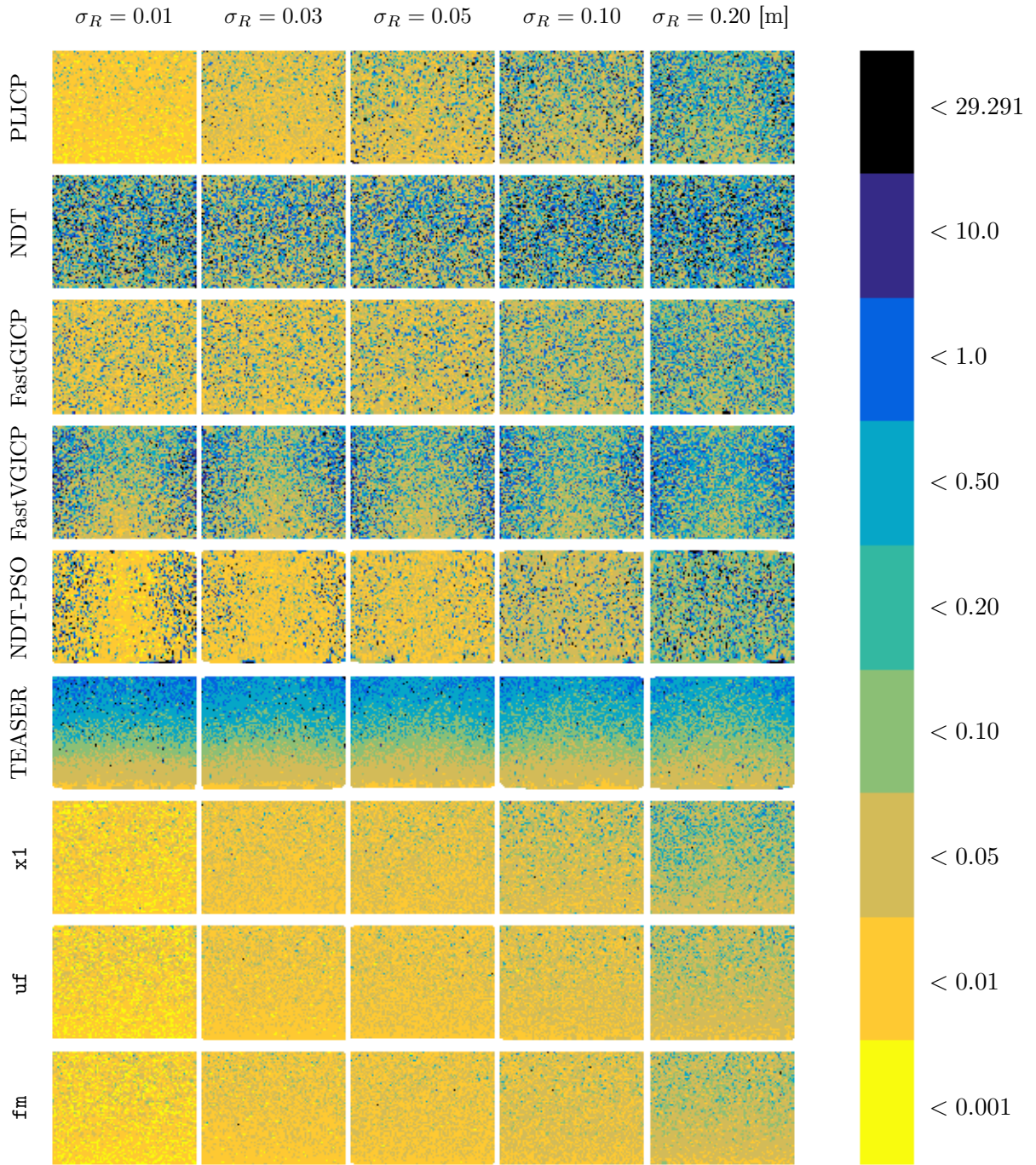


$\mu_{\max} : (\mu_{\min}, \mu_{\max}) = (2^0, 2^{\nu_{\max}})$

Σχήμα 1.26

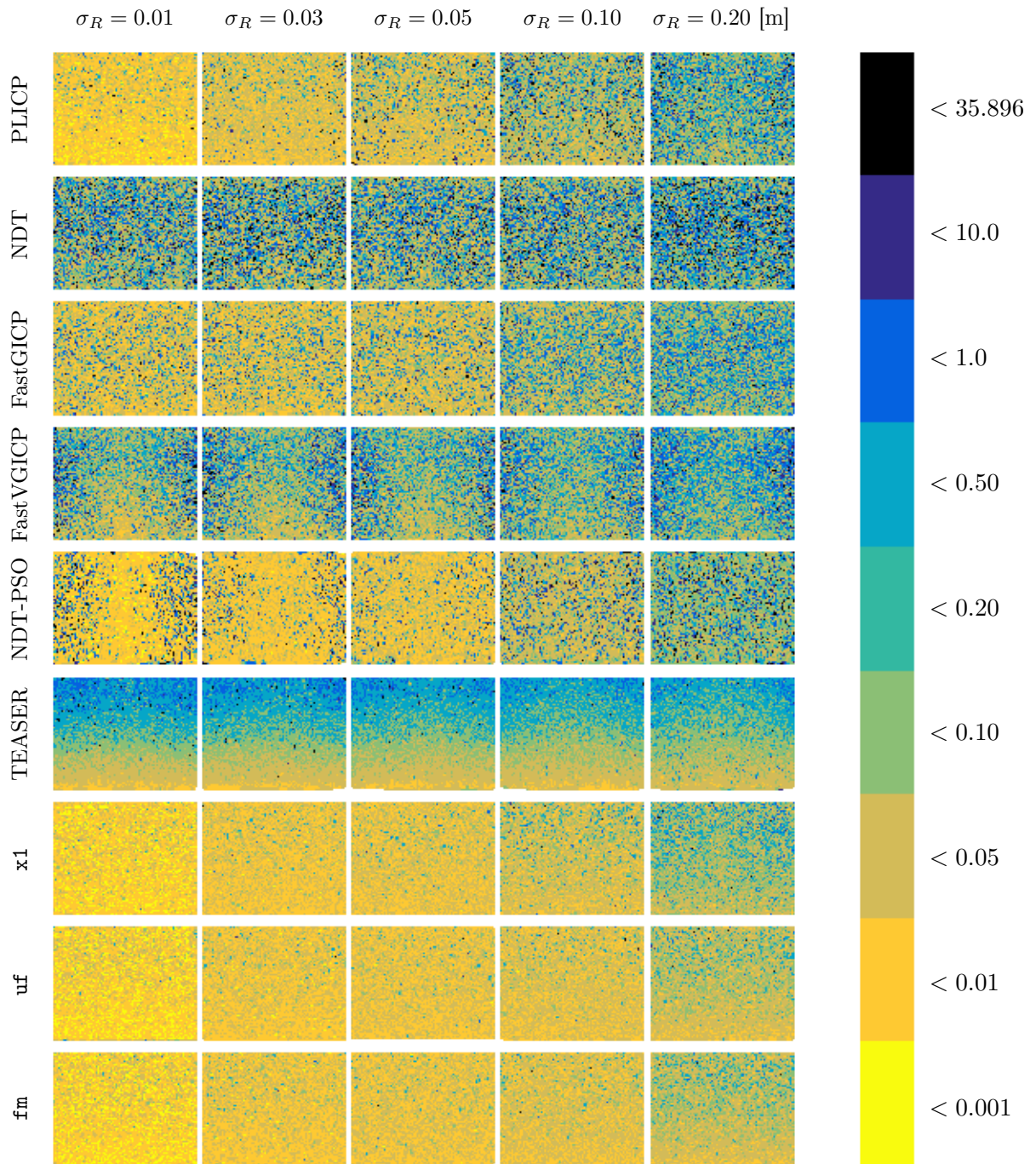


Σχήμα 1.27



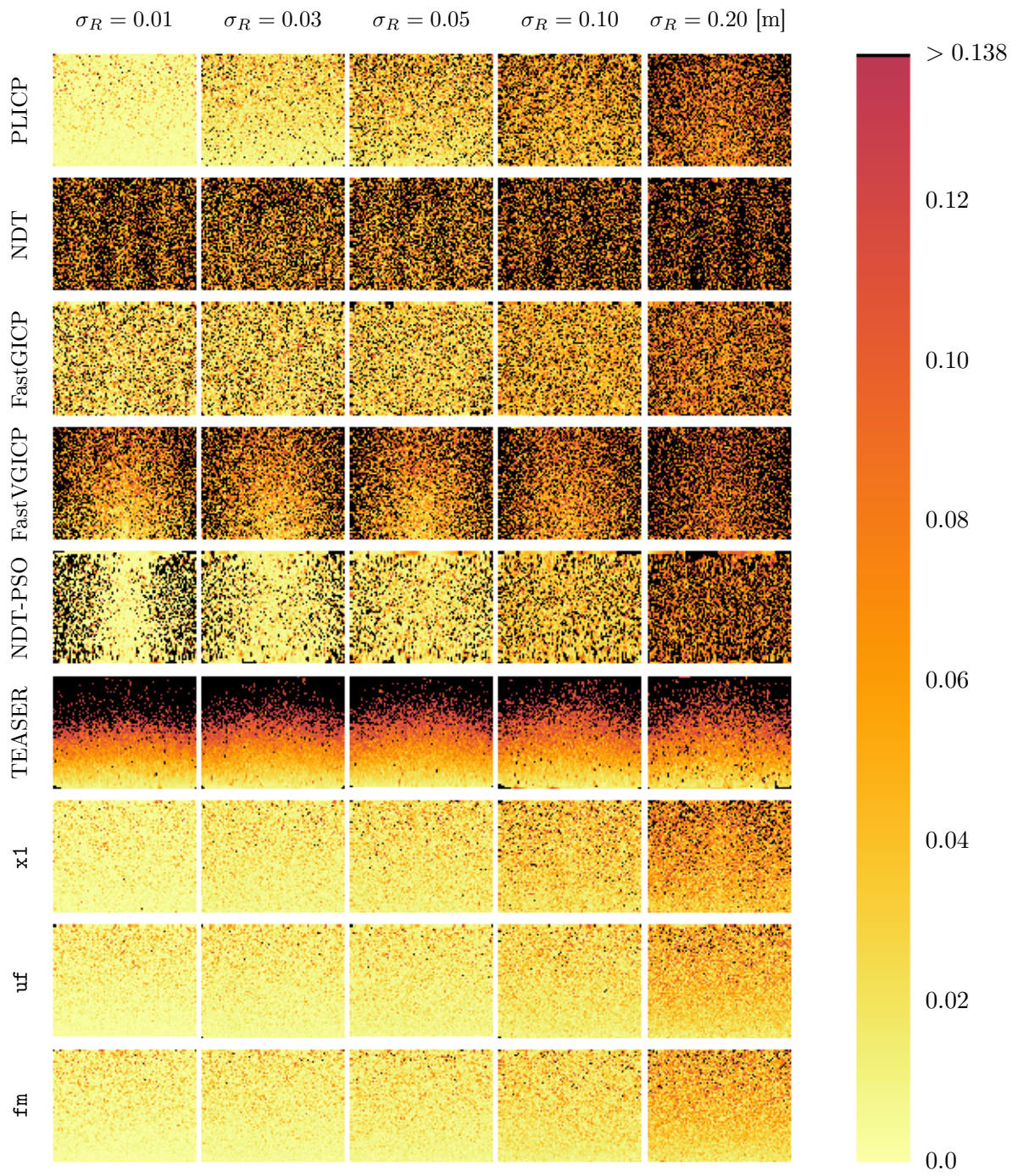
Σχήμα 1.28





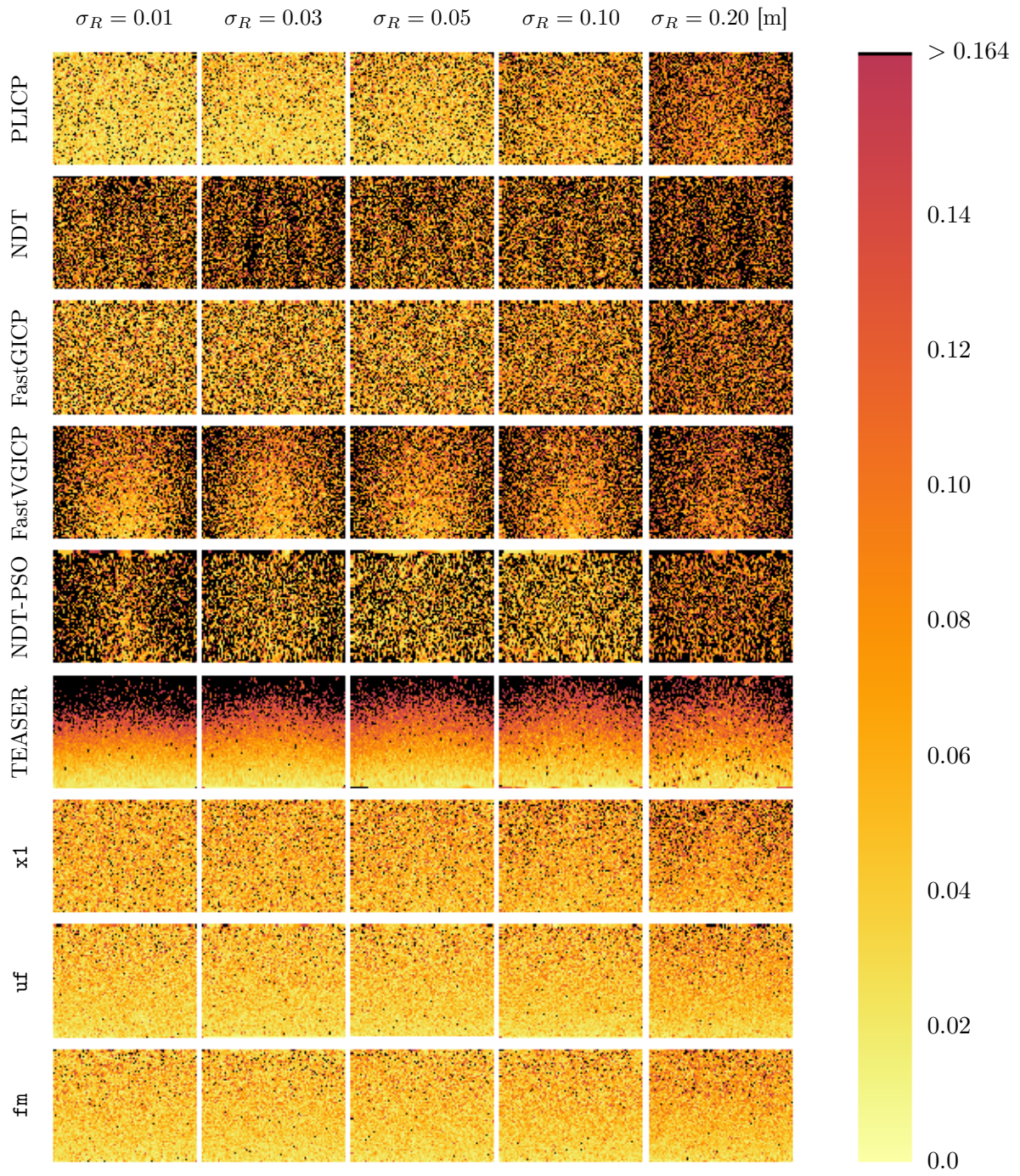
Σχήμα 1.29



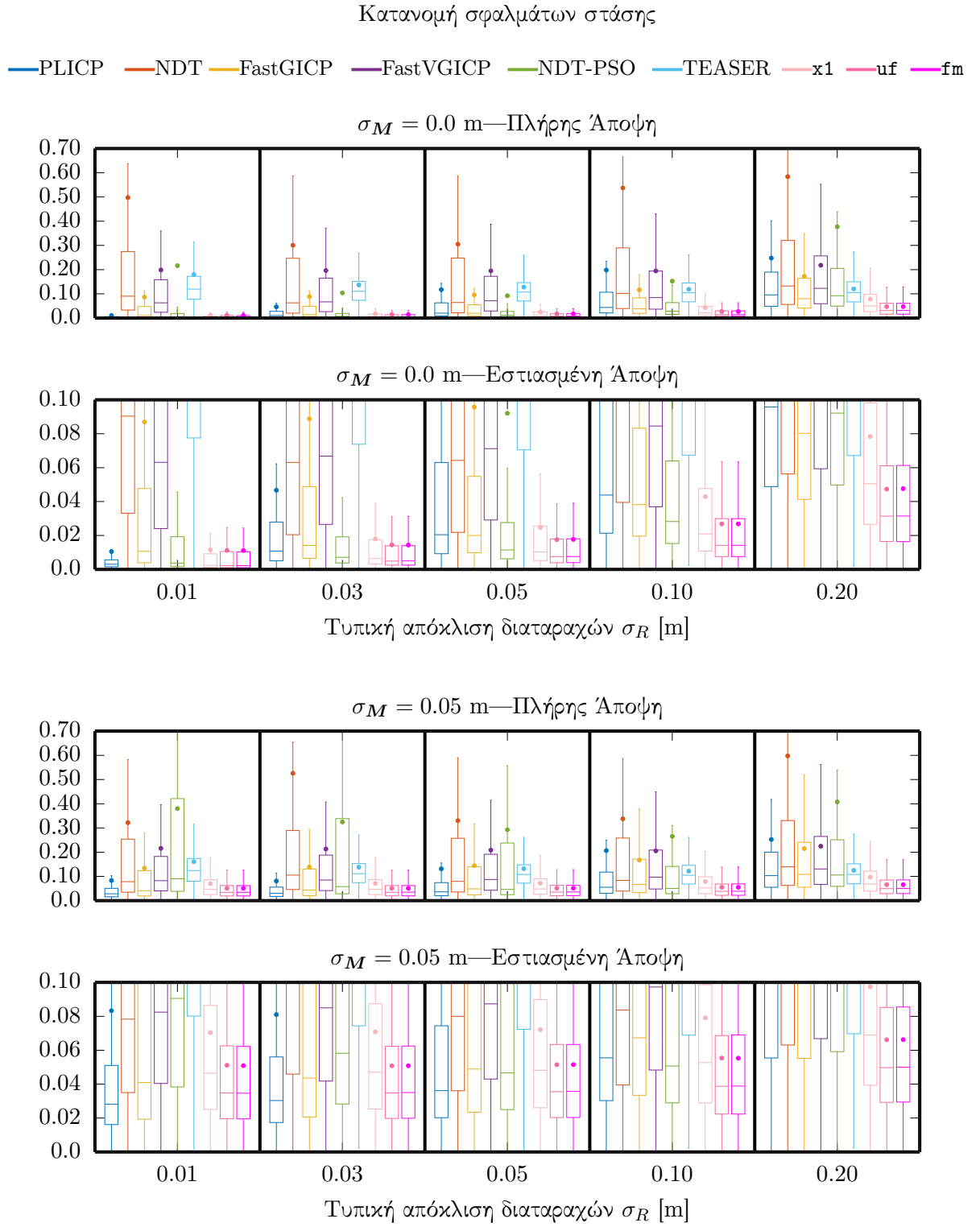


Σχήμα 1.30

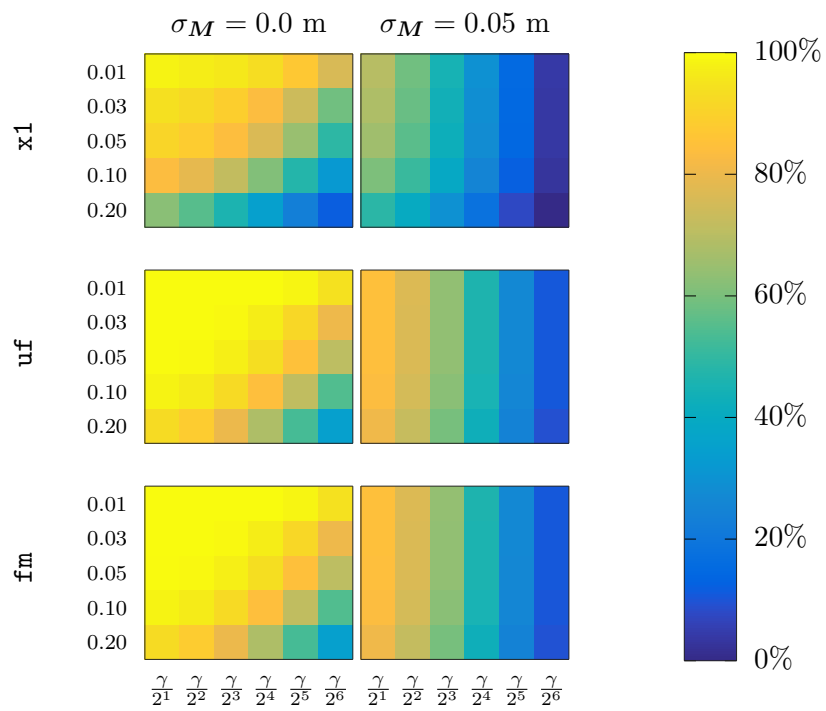




Σχήμα 1.31



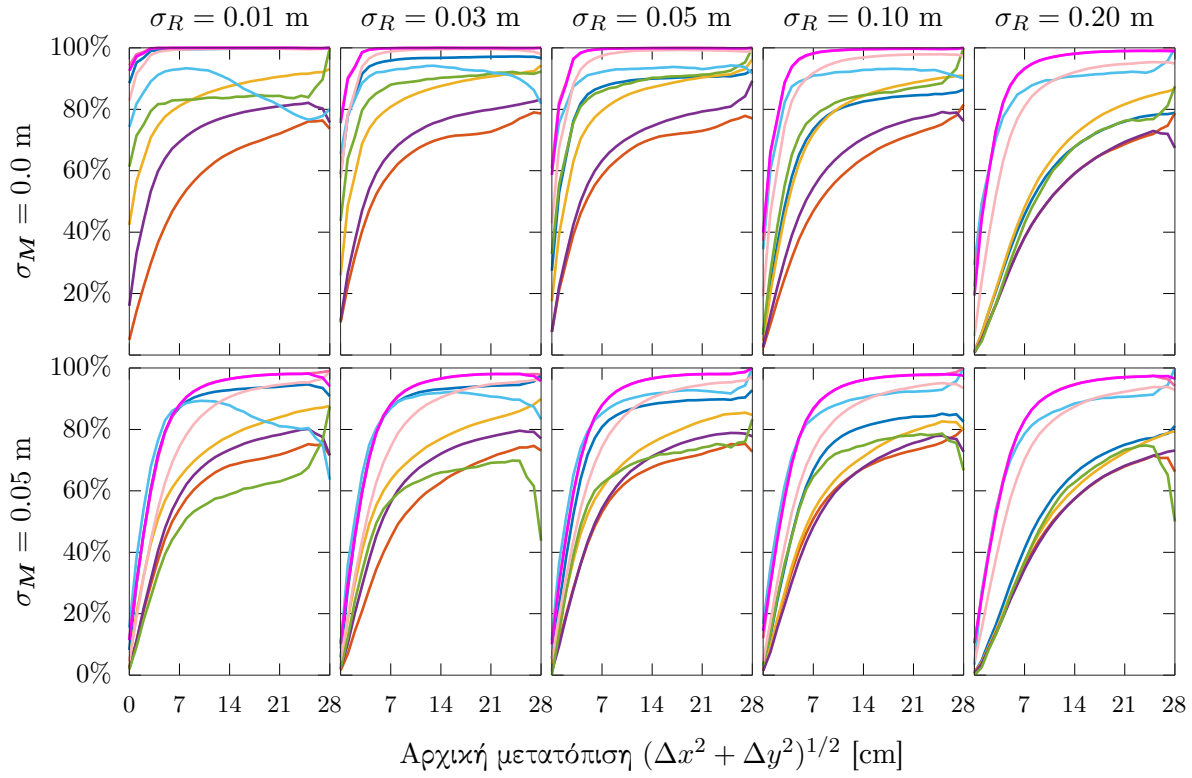
Σχήμα 1.32



Σχήμα 1.33

Ποσοστό επιτυχίας στόχου (§) ως προς θέση ανά μονάδα αρχικής μετατόπισης  $(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$

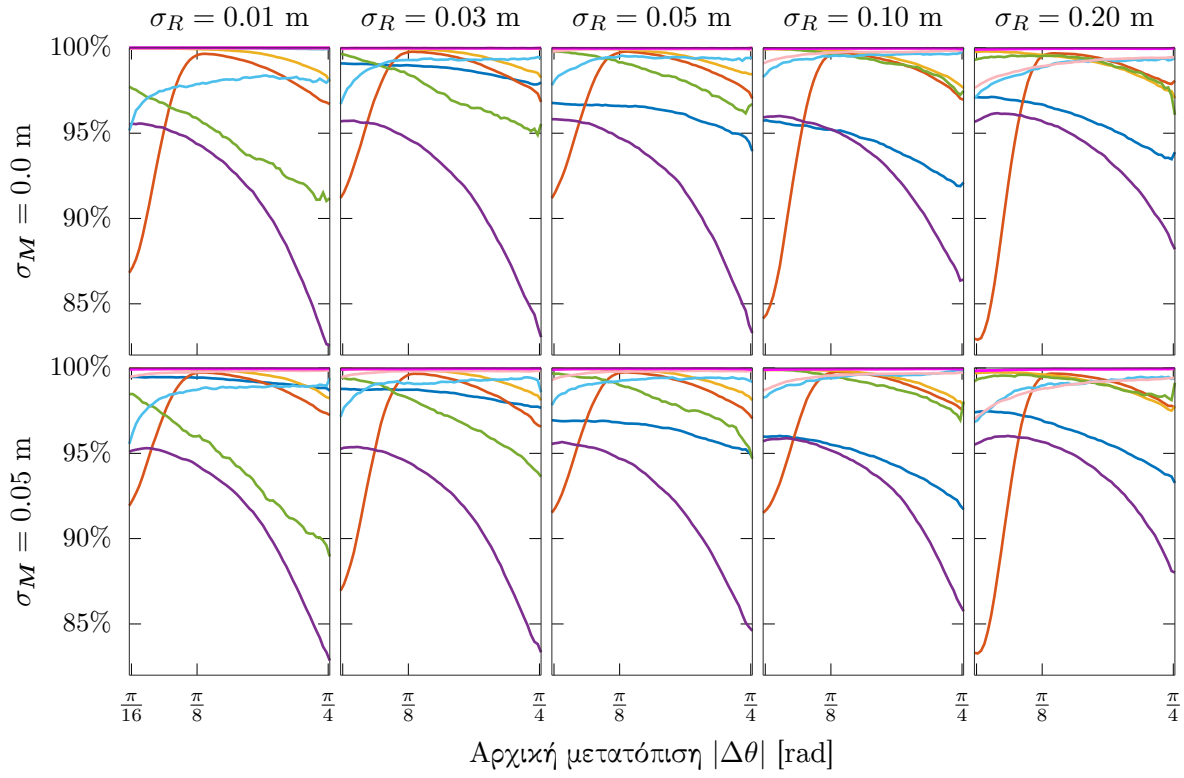
— PLICP — NDT — FastGICP — FastVGICP — NDT-PSO — TEASER — x1 — uf — fm



Σχήμα 1.34

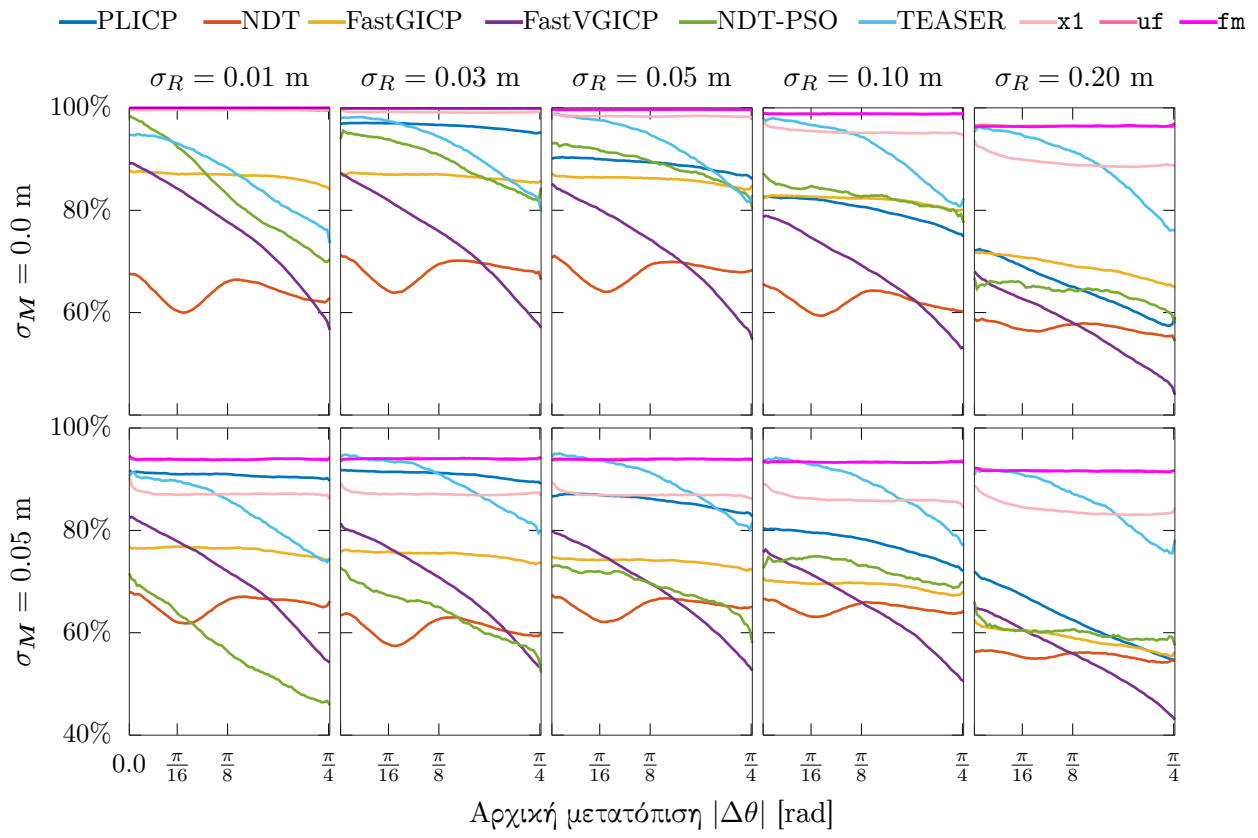
Ποσοστό επιτυχίας στόχου (\*) ως προς προσανατολισμό ανά μονάδα αρχικής μετατόπισης  $|\Delta\theta|$

— PLICP — NDT — FastGICP — FastVGICP — NDT-PSO — TEASER — x1 — uf — fm

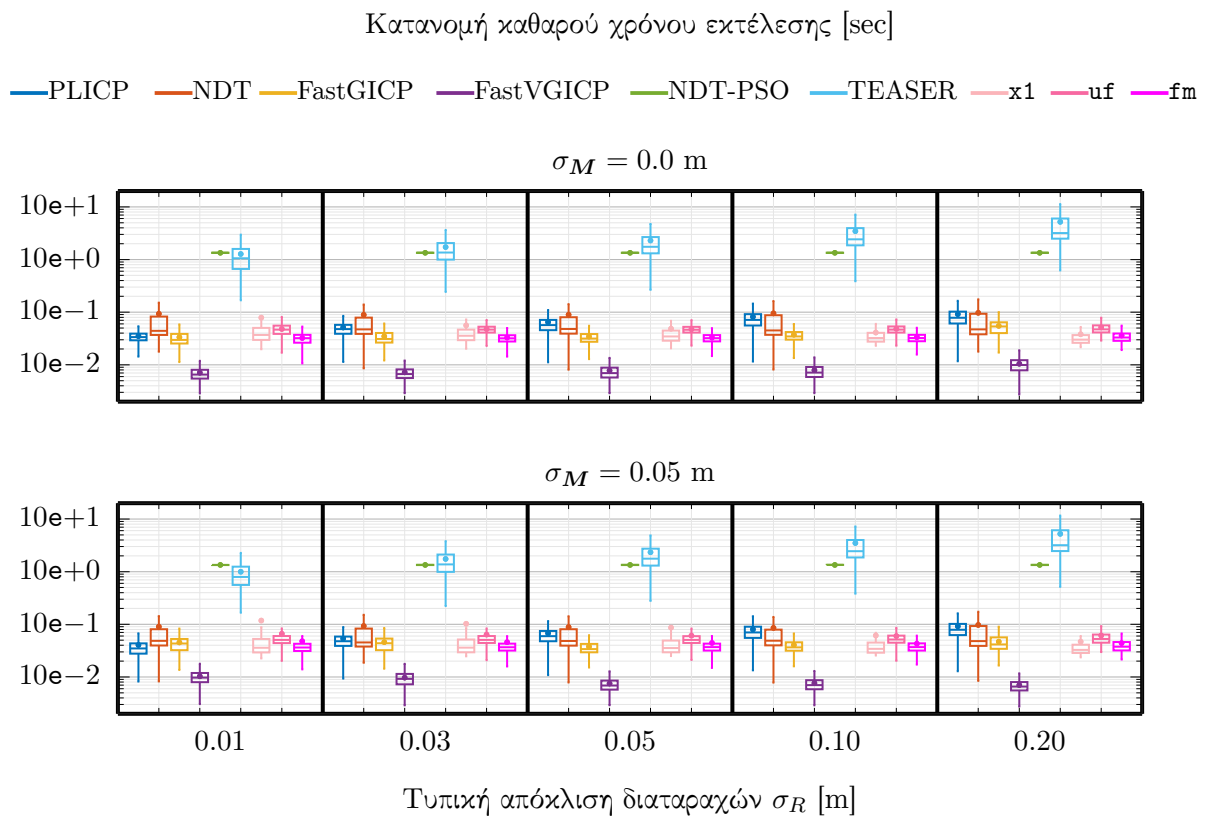


Σχήμα 1.35

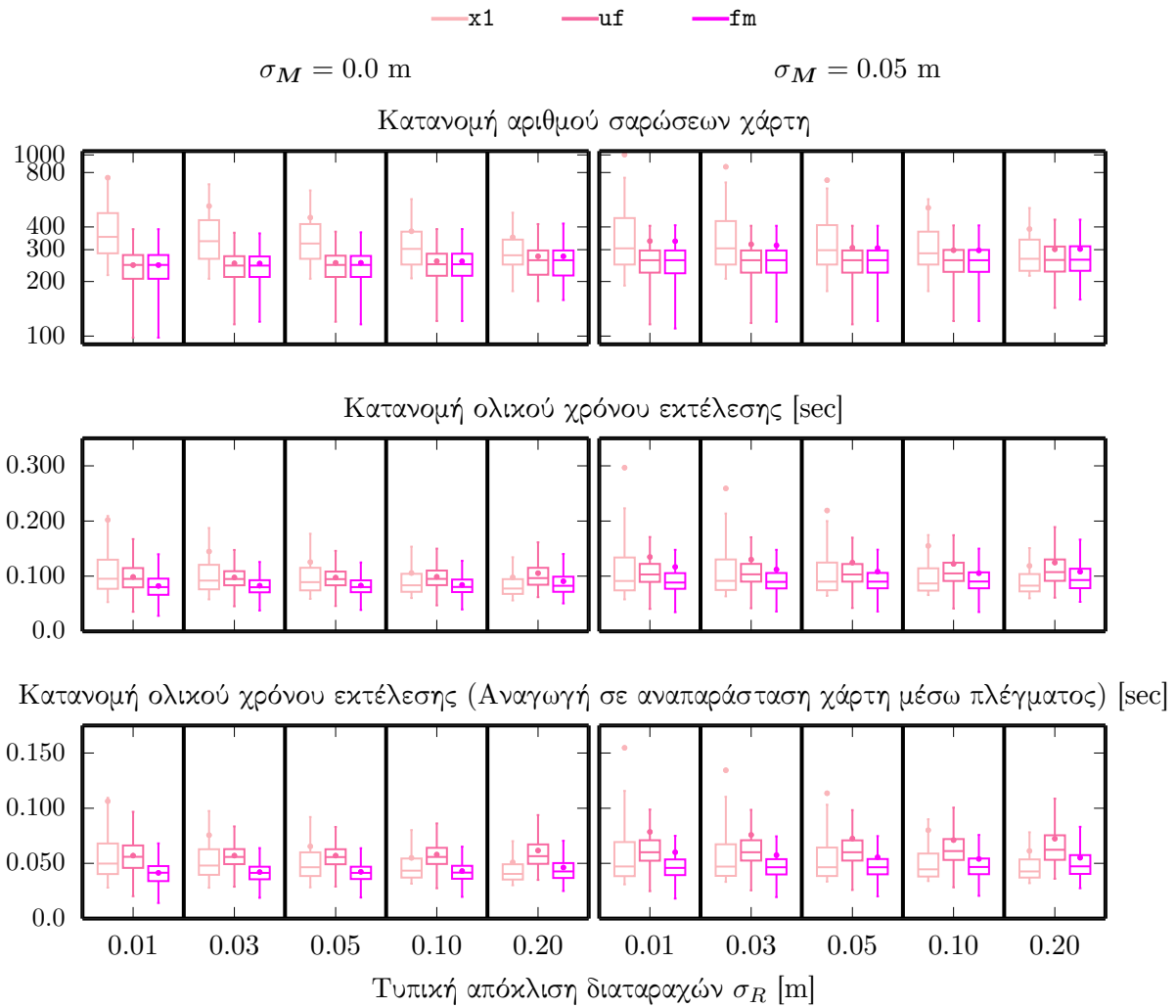
Ποσοστό επιτυχίας στόχου (\*) ως προς θέση ανά μονάδα αρχικής μετατόπισης  $\delta\theta$



Σχήμα 1.36

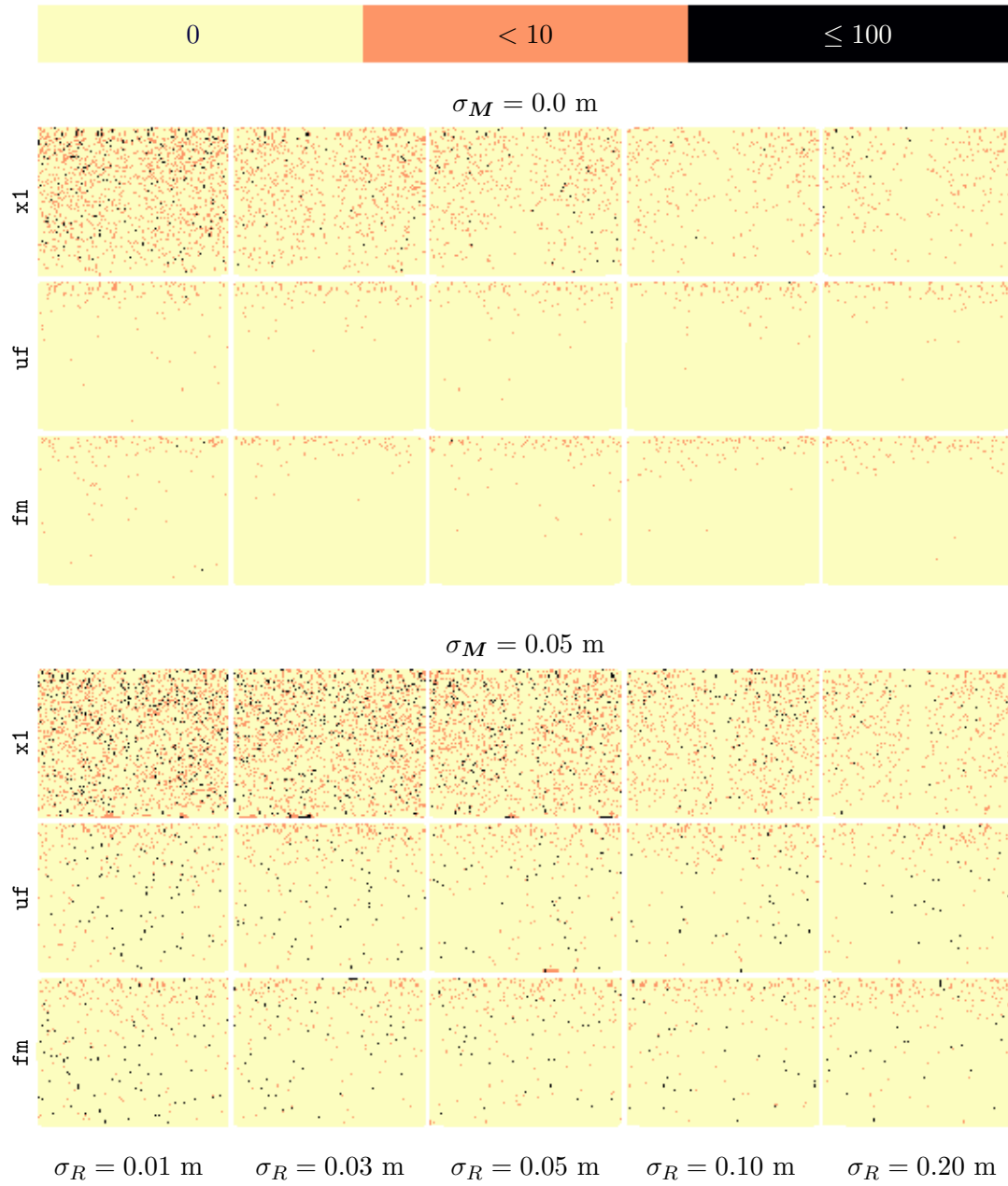


Σχήμα 1.37



Σχήμα 1.38





Σχήμα 1.39



## Μέρος ΙΙΙ

# Συμπεράσματα



Μέρος IV

Παραπομπές



Μέρος V

Παραρτήματα





## Παράρτημα Α΄

# Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων

### Α΄.1 Απόδειξη του Λήμματος II

Έστω  $\theta = \hat{\theta} + \phi_0$ , όπου  $\phi_0$  είναι το αρχικό σφάλμα εκτίμησης. Τότε η εξίσωση (1.16):

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} &= -e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \\ \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} &= e^{-i\phi_0}\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} + N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \end{aligned}$$

Έστω  $\delta = \delta_x - i \cdot \delta_y$ . Τότε

$$e^{i\phi_0} = \frac{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}}{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} - N_s e^{i\hat{\theta}}\delta} \quad (\text{Α΄.1})$$

Έστω  $B = \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} - N_s e^{i\hat{\theta}}\delta$  ο παρονομαστής της εξίσωσης (Α΄.1). Τότε

$$\begin{aligned} B &= |\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| e^{i\angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}} - N_s e^{i\hat{\theta}}|\delta| e^{i\angle\delta} \\ &= [|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \cos(\angle\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \cos(\hat{\theta} + \angle\delta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \cdot [|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \sin(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \sin(\hat{\theta} + \angle \delta)] \\
& = |B| e^{i\angle B}
\end{aligned} \tag{A'.2}$$

όπου

$$|B| = |\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}|^2 + N_s^2 |\delta|^2 - 2|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| N_s |\delta| \cos(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} - \hat{\theta} - \angle \delta)$$

και

$$\angle B = \tan^{-1} \frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \sin(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \sin(\hat{\theta} + \angle \delta)}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \cos(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \cos(\hat{\theta} + \angle \delta)} \tag{A'.3}$$

Τότε η εξίσωση (Α'.1) γίνεται

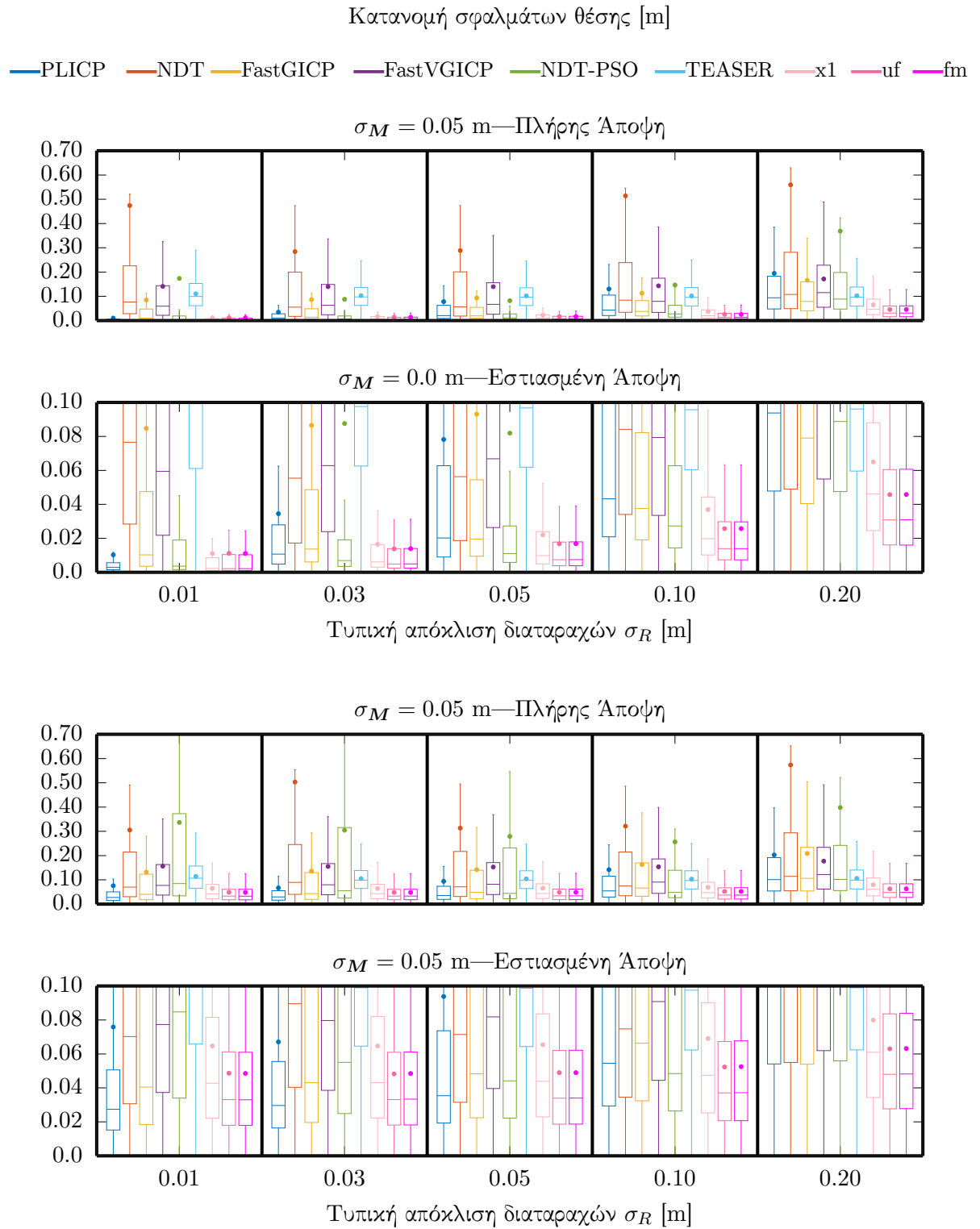
$$\begin{aligned}
e^{i\phi_0} &= \frac{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}}{B} \\
e^{i\phi_0} &= \frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}| e^{i\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}}}{|B| e^{i\angle B}} \\
e^{i\phi_0} &= \frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}|}{|B|} e^{i\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle B} \\
\phi_0 &= \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle B
\end{aligned} \tag{A'.4}$$

Όμως, λόγω των εξισώσεων  $\theta = \hat{\theta} + \phi_0$  και (1.18):

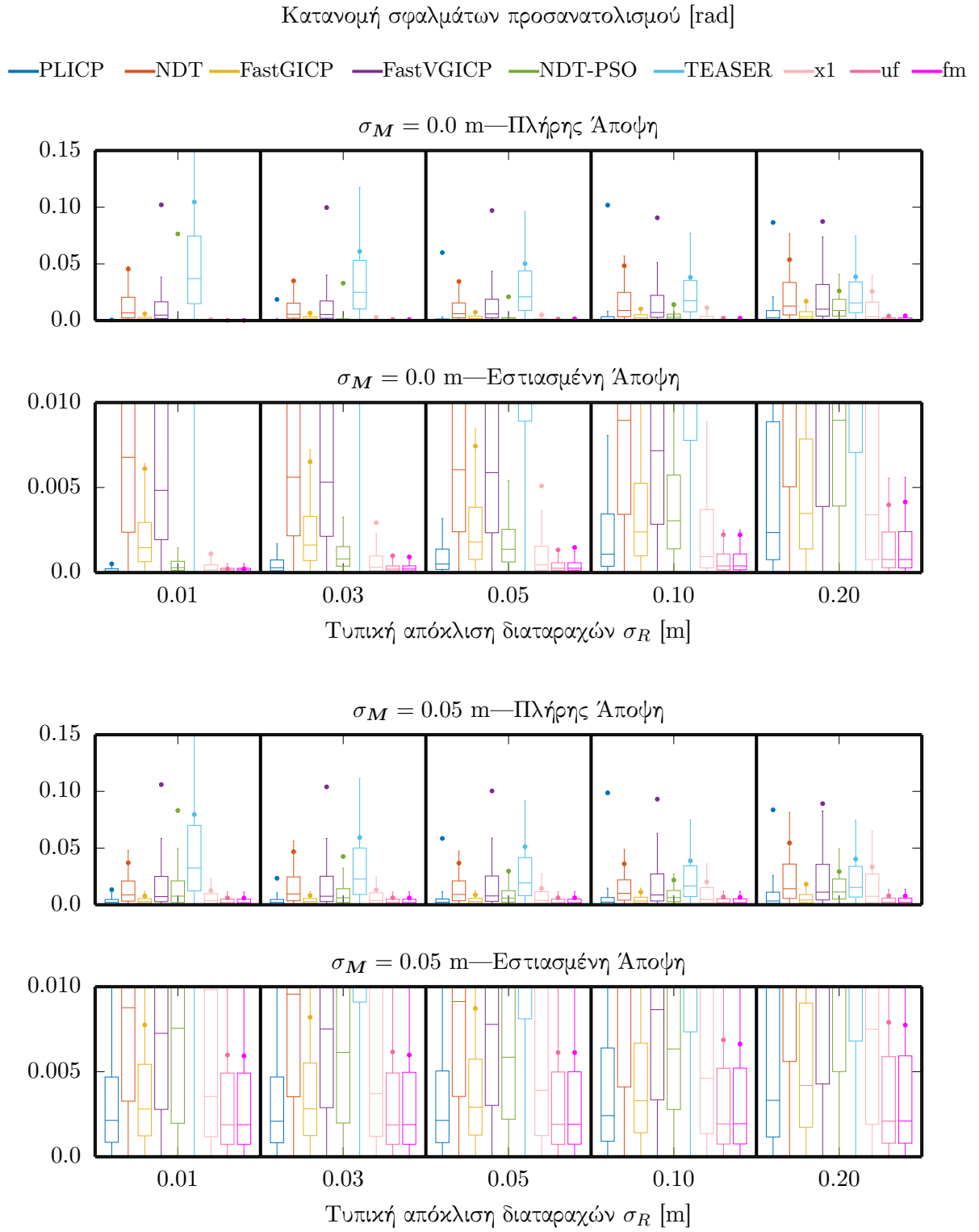
$$\begin{aligned}
\theta &= \hat{\theta}' + \phi \\
\theta &= \hat{\theta} + \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} + \phi \\
\phi_0 &= \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} + \phi \\
\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle B &\stackrel{(.4)}{=} \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} + \phi \\
-\angle B &= -\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} + \phi \\
\phi &= \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} - \angle B \\
\phi &\stackrel{(.3)}{=} \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} - \tan^{-1} \frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \sin(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \sin(\hat{\theta} + \angle \delta)}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \cos(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \cos(\hat{\theta} + \angle \delta)}
\end{aligned} \tag{A'.5}$$

■

## Α'.2 Σφάλματα εκτίμησης θέσης και προσανατολισμού



Σχήμα Α'.1



Σχήμα Α'.2