



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΙΤΛΟΣ

Διδακτορική Διατριβή

του

Αλεξάνδρου Φιλοθέου του Χρήστου και της Μαρίνας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΚΑΙ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

ΒΑΣΙΛΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΟΚΧΟΛΜΗΣ

που εκπονήθηκε ως μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων για την απονομή του τίτλου του

Διδάκτορα Μηχανικού

Επιβλέπων

Γεώργιος Δ. Σεργιάδης

Καθηγητής

Συμβουλευτική Επιτροπή

Τραϊανός Β. Γιούλτσης

Καθηγητής

Ανδρέας Λ. Συμεωνίδης

Αναπληρωτής Καθηγητής



*Η κύρια αιτία των προβλημάτων είναι οι λύσεις.*

—Έρικ Σέβαράιντ



Περίληψη

Abstract



# Περιεχόμενα

I	Εισαγωγή	1
II	Προβλήματα—Λύσεις—Συμβολές	3
1	Αξιολόγηση αλγορίθμων αυτόνομης πλοήγησης	5
2	Μέθοδοι ελάττωσης σφάλματος εκτίμησης στάσης φίλτρου σωματιδίων	7
3	Εκτίμηση στάσης βάσει καθολικής αβεβαιότητας χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων	9
4	Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων	11
4.1	Στόχοι του κεφαλαίου και δομή	11
4.2	Μεθοδολογία ευθυγράμμισης προσανατολισμού	11
4.2.1	Η μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση	12
4.2.2	Η μέθοδος Πρώτων Αρχών	14
4.2.3	Η μέθοδος του Προκρούστη	17
4.2.4	Η κλίση της διακριτικής γωνίας του αισθητήρα	22
4.2.5	Η μέθοδος του Πιτυοκάμπτη Σίνι	24
4.2.6	Η μέθοδος του Θησέα	28
4.3	Μεθοδολογία ευθυγράμμισης θέσης	33

4.4	Μεθοδολογία ευθυγράμμισης από κοινού . . . . .	36
4.5	Πειραματική αξιολόγηση . . . . .	36
4.6	Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα . . . . .	36
<b>III</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>39</b>
<b>IV</b>	<b>Παραπομπές</b>	<b>41</b>
<b>V</b>	<b>Παραρτήματα</b>	<b>45</b>



# Μέρος Ι

## Εισαγωγή



## Μέρος II

# Προβλήματα—Λύσεις— Συμβολές



## Κεφάλαιο 1

# Αξιολόγηση αλγορίθμων αυτόνομης πλοήγησης



## Κεφάλαιο 2

# Μέθοδοι ελάττωσης σφάλματος εκτίμησης στάσης φίλτρου σωματιδίων





## Κεφάλαιο 3

Εκτίμηση στάσης βάσει  
καθολικής αβεβαιότητας χωρίς  
τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων



## Κεφάλαιο 4

# Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων

Η έρευνα που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο αντλεί τις πηγές της από τις αιτίες περαιτέρω έρευνας του προηγούμενου κεφαλαίου, όπως αυτές διατυπώθηκαν στην τελευταία του ενότητα. Στο παρόν κεφάλαιο επιζητούμε το σχεδιασμό και την ανάπτυξη μεθόδων ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις η οποία λειτουργεί ... και κανε μια ανακεφαλαιωση εδω γιατι αλλαζουμε ταχυτητα και ροτα

### 4.1 Στόχοι του κεφαλαίου και δομή

### 4.2 Μεθοδολογία ευθυγράμμισης προσανατολισμού

Έστω οι παραδοχές του προβλήματος ???. Έστω επιπλέον ότι  $\hat{l} = l$ , δηλαδή μόνο ο προσανατολισμός του αισθητήρα πρέπει να εκτιμηθεί. Τότε ας υπολογιστεί η εικονική σάρωση  $S_V$  μέσω δεσμοβολής (raycasting) από την εκτίμηση  $\hat{p}$  στον χάρτη  $M$ . Η εκτίμηση της περιστροφής της εικονικής σάρωσης  $S_V$  σε σχέση με την πραγματική σάρωση  $S_R$  μπορεί να βρεθεί μέσω των μεθόδων που παρουσιάζονται στις ενότητες 4.2.1, 4.2.2, και 4.2.3. Το

σφάλμα της εκτίμησης προσανατολισμού μπορεί να μειωθεί περαιτέρω μέσω της μεθόδου που παρουσιάζεται στην ενότητα 4.2.6.

Στα συμφοραζόμενα του παρόντος κεφαλαίου, έστω  $\mathcal{F}\{\mathcal{S}\}$  ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{S}\}$  ο αντίστροφός του,  $e^*$  ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού  $e$ ,  $|e|$  το μέτρο του, και  $i$  η φανταστική μονάδα.

#### 4.2.1 Η μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση

Έστω ότι ο χώρος δειγματοληπτείται αρκετά πυκνά γωνιακά, τότε για  $k, \xi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ :  $k, \xi \in [0, N_s - 1]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_V[k] &\simeq \mathcal{S}_R[(k - \xi) \bmod N_s] \Rightarrow \\ \mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}(u) &\simeq e^{-i2\pi\xi u/N_s} \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}(u) \end{aligned}$$

και, επομένως, αφού  $2\pi \frac{\xi}{N_s} = \xi \frac{2\pi}{N_s} = \xi\gamma$ , όπου  $\gamma$  είναι η διακριτική γωνία του αισθητήρα:

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}(u) &\triangleq \frac{\mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}^* \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}}{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}| \cdot |\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}|} \\ &\simeq \frac{e^{-i\xi\gamma u} \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}^* \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}}{|e^{-i\xi\gamma u} \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}^*| \cdot |\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}|} \\ &= e^{-i\xi\gamma u} \cdot \frac{\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}^* \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}}{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}| \cdot |\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}|} \\ &= e^{-i\xi\gamma u} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier του  $Q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}$  είναι μία Kronecker  $\delta$ -συνάρτηση  $q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R} = \mathcal{F}^{-1}\{Q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}\}$  με κέντρο  $\xi$ :

$$\xi = \arg \max_u q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}(u) \tag{4.2}$$

Εάν η διαφορά του προσανατολισμού μεταξύ των στάσεων από τις οποίες ελήφθησαν οι σκρώσεις  $\mathcal{S}_R$  και  $\mathcal{S}_V$  είναι  $\Delta\theta = \theta - \hat{\theta}$ , τότε  $\Delta\theta = \xi\gamma + \phi$ , όπου  $\bmod(\Delta\theta, \gamma) = \phi \in [-\frac{\gamma}{2}, +\frac{\gamma}{2}]$ .

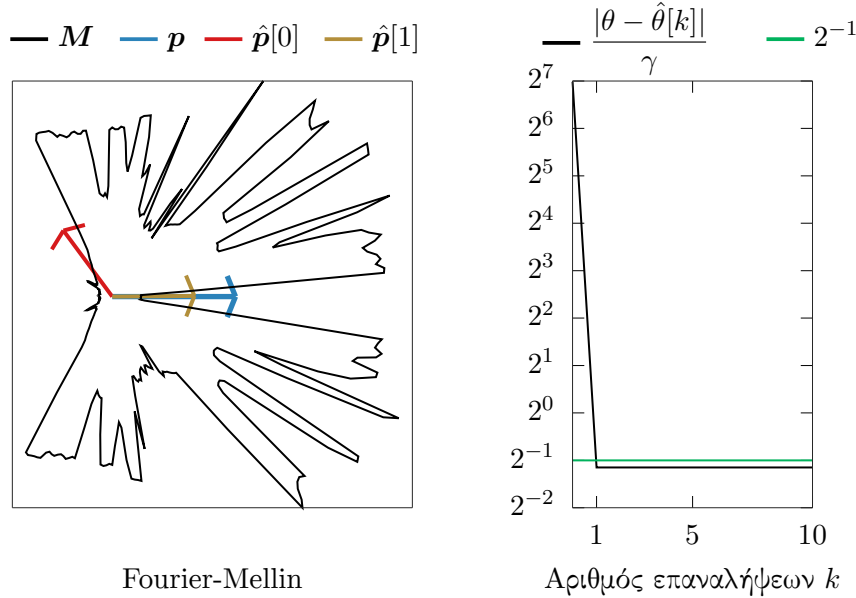
**Παρατήρηση I.** Για δεδομένο αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων  $N_s$  (ισοδύναμα, για δεδομένη διακριτική γωνία  $\gamma$ ), ενημερώνοντας την εκτίμηση προσανατολισμού  $\hat{\theta}$  σε  $\hat{\theta}'$ :

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + \xi\gamma \quad (4.3)$$

οδηγεί σε ένα επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού  $\phi$ :

$$|\phi| \leq \frac{\gamma}{2} \quad (4.4)$$

Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$  ονομάζεται στο εξής μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση. Στο σχήμα 4.1 απεικονίζεται η αρχική και τελική συνθήκη ευθυγράμμισης προσανατολισμού με εφαρμογή της μεθόδου Fourier-Mellin μίας διάστασης για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων σε ένα μη δομημένο περιβάλλον, του οποίου ο χάρτης το αναπαριστά τέλεια, ενώ οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο. Ο αλγόριθμος I παρουσιάζει σε ψευδοκώδικα τη διαδικασία διόρθωσης προσανατολισμού με βάση την εν λόγω μέθοδο.



Σχήμα 4.1: Αριστερά: η αρχική  $\hat{p}[0] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[0])$  και τελική  $\hat{p}[1] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[1])$  εκτίμηση στάσης του αισθητήρα σε ένα περιβάλλον με χάρτη  $M$ , για πραγματική στάση  $\mathbf{p}(\mathbf{l}, \theta)$ , ως συνέπεια της εφαρμογής της μεθόδου γωνιακής ευθυγράμμισης Fourier-Mellin μίας διάστασης. Δεξιά: το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού ως συνάρτηση της διακριτικής γωνίας  $\gamma$  του αισθητήρα

---

**Αλγόριθμος I rc\_fm**


---

**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma$ 
**Output:**  $\hat{\theta}', q_{\max}$ 

- 1:  $q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{Q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}\}$  (εξ. 4.1)
  - 2:  $\xi = \arg \max q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}$
  - 3:  $q_{\max} \leftarrow q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}[\xi] = \max q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}$
  - 4:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\theta} + \xi\gamma$
  - 5: **return**  $(\hat{\theta}', q_{\max})$
- 

#### 4.2.2 Η μέθοδος Πρώτων Αρχών

Έστω μία δισδιάστατη σάρωση  $\mathcal{S}$  που έχει ληφθεί από τη στάση  $(x, y, \theta)$  σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων (ορισμός ??). Έστω ότι το γωνιακό εύρος της  $\mathcal{S}$  είναι  $\lambda = 2\pi$ . Οι συντεταγμένες του τελικού σημείου της  $n$ -οστής ακτίνας της  $\mathcal{S}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_s - 1$ , στο σύστημα συντεταγμένων είναι  $(x_n, y_n)$ :

$$x_n = x + d_n \cos(\theta + \frac{2\pi n}{N_s} - \pi) = -d_n \cos(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) \quad (4.5)$$

$$y_n = y + d_n \sin(\theta + \frac{2\pi n}{N_s} - \pi) = -d_n \sin(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) \quad (4.6)$$

Εδώ παρατηρούμε ότι  $-(x_n - x)$  και  $(y_n - y)$  είναι αντίστοιχα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής ποσότητας

$$\begin{aligned} d_n e^{-i(\theta + \frac{2\pi n}{N_s})} &= d_n \cos(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) - i \cdot d_n \sin(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) \\ &\stackrel{(4.5), (4.6)}{=} -(x_n - x) + i \cdot (y_n - y) \end{aligned} \quad (4.7)$$

και, επομένως

$$d_n e^{-i2\pi n/N_s} = e^{i\theta} (-(x_n - x) + i \cdot (y_n - y)) \quad (4.8)$$

Αθροίζοντας την εξίσωση (4.8) επί του συνόλου των  $N_s$  ακτίνων λαμβάνουμε τον πρώτο όρο του διακριτού μετασχηματισμού Fourier του σήματος  $\{d_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_s - 1$ :

$$\mathcal{F}\{\mathcal{S}\} = \sum_{n=0}^{N_s-1} d_n \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \stackrel{(4.8)}{=} \sum_{n=0}^{N_s-1} e^{i\theta} (-(x_n - x) + i \cdot (y_n - y))$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i\theta} \sum_{n=0}^{N_s-1} [(x - i \cdot y) + (-x_n + i \cdot y_n)] \\
&= e^{i\theta} N_s(x - i \cdot y) - e^{i\theta} \Delta
\end{aligned} \tag{4.9}$$

όπου  $\Delta \triangleq \sum_{n=0}^{N_s-1} (x_n - i \cdot y_n)$ .

Συμβολίζοντας με το γράμμα  $R$  τις ποσότητες που αντιστοιχούν στην πραγματική σάρωση  $\mathcal{S}_R$ , η οποία έχει ληφθεί από τη στάση του φυσικού αισθητήρα  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$ , και με  $V$  εκείνες που αντιστοιχούν στην εικονική σάρωση  $\mathcal{S}_V$ , η οποία έχει ληφθεί από τη στάση  $\hat{\mathbf{p}}(x, y, \hat{\theta})$ :

$$\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\} = \sum_{n=0}^{N_s-1} d_n^R \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \stackrel{(4.9)}{=} N_s e^{i\theta} (x - i \cdot y) - e^{i\theta} \Delta_R \tag{4.10}$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\} = \sum_{n=0}^{N_s-1} d_n^V \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \stackrel{(4.9)}{=} N_s e^{i\hat{\theta}} (x - i \cdot y) - e^{i\hat{\theta}} \Delta_V \tag{4.11}$$

Έστω τώρα ότι

$$\begin{aligned}
\Delta_R - \Delta_V &= \sum_{n=0}^{N_s-1} (x_n^R - x_n^V) - i \cdot \sum_{n=0}^{N_s-1} (y_n^R - y_n^V) \\
&= N_s(\delta_x - i \cdot \delta_y)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

όπου

$$\delta_x \triangleq \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} (x_n^R - x_n^V) \tag{4.13}$$

$$\delta_y \triangleq \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} (y_n^R - y_n^V) \tag{4.14}$$

τότε

$$\Delta_V = \Delta_R - N_s(\delta_x - i \cdot \delta_y) \tag{4.15}$$

Ο πρώτος όρος του διακριτού μετασχηματισμού Fourier του σήματος που αποτελείται από τη διαφορά των δύο σημάτων (4.10) και (4.11) είναι:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\} - \mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\} = \sum_{n=0}^{N_s-1} (d_n^R - d_n^V) \cdot e^{-i2\pi n/N_s}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(4.10),(4.11)}{=} N_s(x - i \cdot y)(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - e^{i\theta} \Delta_R + e^{i\hat{\theta}} \Delta_V \\
& \stackrel{(4.15)}{=} N_s(x - i \cdot y)(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - e^{i\theta} \Delta_R + e^{i\hat{\theta}} (\Delta_R - N_s(\delta_x - i \cdot \delta_y)) \\
& = N_s(x - i \cdot y)(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - \Delta_R(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - N_s e^{i\hat{\theta}} (\delta_x - i \cdot \delta_y) \\
& = (e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) [N_s(x - i \cdot y) - \Delta_R] - N_s e^{i\hat{\theta}} (\delta_x - i \cdot \delta_y) \\
& \stackrel{(4.10)}{=} (e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) \frac{\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}}{e^{i\theta}} - N_s e^{i\hat{\theta}} (\delta_x - i \cdot \delta_y) \\
& = (1 - e^{-i(\theta - \hat{\theta})}) \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\} - N_s e^{i\hat{\theta}} (\delta_x - i \cdot \delta_y)
\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}
-\mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\} &= -e^{-i(\theta - \hat{\theta})} \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\} - N_s e^{i\hat{\theta}} (\delta_x - i \cdot \delta_y) \\
e^{-i(\theta - \hat{\theta})} &= \frac{\mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}}{\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}} - \frac{N_s e^{i\hat{\theta}}}{\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}} (\delta_x - i \cdot \delta_y)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την πολική αναπαράσταση  $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|e^{i\angle \mathbf{A}}$ :

$$e^{-i(\theta - \hat{\theta})} = \frac{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}|}{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}|} e^{i(\angle \mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\} - \angle \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\})} - \frac{e^{i(\hat{\theta} - \angle \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\})}}{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}|} (N_s \delta_x - i \cdot N_s \delta_y) \quad (4.16)$$

Λόγω του γεγονότος ότι ο προσανατολισμός  $\theta$  του αισθητήρα είναι άγνωστος, τα τελικά σημεία  $\{(x_n^R, y_n^R)\}$  καθίστανται ομοίως άγνωστα, και συνεπώς και οι ποσότητες  $\delta_x, \delta_y$ . Προκειμένου να αποκτήσουμε μια αρχική διαίσθηση ως προς τα μέτρα των τελευταίων κάνουμε την παρατήρηση ότι, εξ ορισμού, οι ποσότητες  $N_s \delta_x$  και  $N_s \delta_y$  ποσοτικοποιούν τη διαφορά της προσέγγισης των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων επί των καμπύλων που ορίζονται από τα τελικά σημεία των δύο σαρώσεων στους δύο κύριους άξονες  $x$  και  $y$ . Η προσέγγιση αυτή οφείλεται στο πεπερασμένο μέγεθος των εκπεμπόμενων ακτίνων  $N_s$ . Επομένως υπό τις υποθέσεις ότι (α) ο χάρτης του περιβάλλοντος είναι τέλεια αναπαράστασή του και (β) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν επηρεάζονται από διαταραχές: καθώς  $N_s \rightarrow \infty$ ,  $N_s \delta_x$ ,  $N_s \delta_y \rightarrow 0$ , τα οποία με τη σειρά τους σημαίνουν λόγω της εξίσωσης (4.16) ότι  $\frac{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}|}{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}|} \rightarrow 1$  και  $\theta - \hat{\theta} \rightarrow \angle \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\} - \angle \mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}$ .



**Παρατήρηση II.** Ενημερώνοντας την εκτίμηση προσανατολισμού σε  $\hat{\theta}'$ :

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + \angle \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\} - \angle \mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\} \quad (4.17)$$

οδηγεί σε ένα επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού  $\phi$ :

$$\phi = \tan^{-1} \frac{N_s \delta_x \tan(\theta - \angle \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}) - N_s \delta_y}{|\mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}| + N_s \delta_x + N_s \delta_y \tan(\theta - \angle \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\})} \quad (4.18)$$

του οποίου το μέτρο είναι αντιστρόφως ανάλογο του αριθμού των ακτίνων  $N_s$  που εκπέμπει ο αισθητήρας στην περίπτωση που τόσο η πραγματική μέτρηση  $\mathcal{S}_R$  όσο και η εικονική σάρωση  $\mathcal{S}_V$  δεν διαταράσσονται από θόρυβο.

Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$  ονομάζεται στο εξής μέθοδος Πρώτων Αρχών. Στο σχήμα 4.2 απεικονίζεται η αρχική και τελική συνθήκη ευθυγράμμισης προσανατολισμού με εφαρμογή της μεθόδου Πρώτων αρχών για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων, υπό τις ίδιες συνθήκες διεξαγωγής μείωσης του σφάλματος προσανατολισμού με αυτές που παρουσιάζονται στο σχήμα 4.1. Ο αλγόριθμος II παρουσιάζει σε ψευδοκώδικα τη διαδικασία διόρθωσης προσανατολισμού με βάση την εν λόγω μέθοδο.

---

#### Αλγόριθμος II rc\_x1

---

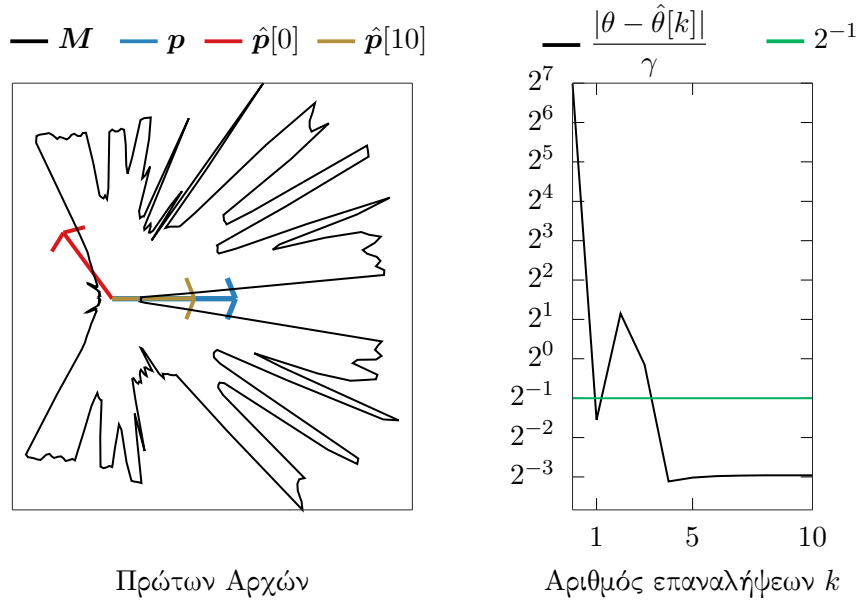
**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{\mathbf{p}}(x, y, \hat{\theta})$

**Output:**  $\hat{\theta}'$

- 1:  $\mathbf{R} = \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}$
  - 2:  $\mathbf{V} = \mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}$
  - 3:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\theta} + \arg(\mathbf{R}) - \arg(\mathbf{V})$
  - 4: **return**  $\hat{\theta}'$
- 

### 4.2.3 Η μέθοδος του Προεκρούστη

Έστω ότι η προβολή των τελικών σημείων των ακτίνων της σάρωσης  $\mathcal{S}_V$  γύρω από τη στάση  $\hat{\mathbf{p}}(x, y, \hat{\theta})$  παράγει το σύνολο σημείων  $\mathbf{P}_V$  στο οριζόντιο επίπεδο. Έστω ότι η ίδια προβολή για τη σάρωση  $\mathcal{S}_R$  ως προς τη στάση  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$  παράγει το σύνολο  $\mathbf{P}_R$ . Η περιστροφή της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  που ευθυγραμμίζει βέλτιστα το σύνολο σημείων  $\mathbf{P}_V$  σε σχέση με το  $\mathbf{P}_R$  μπορεί



Σχήμα 4.2: Αριστερά: η αρχική  $\hat{p}[0] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[0])$  και τελική  $\hat{p}[1] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[1])$  εκτίμηση στάσης του αισθητήρα σε ένα περιβάλλον με χάρτη  $\mathbf{M}$ , για πραγματική στάση  $\mathbf{p}(\mathbf{l}, \theta)$ , ως συνέπεια της εφαρμογής της μεθόδου γωνιακής ευθυγράμμισης Πρώτων Αρχών. Δεξιά: το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού ως συνάρτηση της διακριτικής γωνίας  $\gamma$  του αισθητήρα

να βρεθεί από τη λύση του Ορθογώνιου Προσchrούστειου προβλήματος [Sch66] για πίνακες εισόδου  $\mathbf{P}_V$  και  $\mathbf{P}_R$ . Στην περίπτωση που ο πίνακας μετασχηματισμού περιορίζεται στο να έχει τη δομή πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}$ :  $\det(\mathbf{R}) = 1$ , το πρόβλημα ευθυγράμμισης ονομάζεται Περιορισμένο Ορθογώνιο Προσchrούσκειο πρόβλημα.

Σε αυτή την ενότητα αναζητούμε την λύση αυτού του τελευταίου προβλήματος ως μέσο επίλυσης του προβλήματος ??, διότι ο περιορισμός του πίνακα μετασχηματισμού σε πίνακα περιστροφής δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού της γωνίας περιστροφής της εκτίμησης στάσης από την οποία το εικονικό διάνυσμα σάρωσης εμφανίζει τη βέλτιστη ευθυγράμμιση με το πραγματικό διάνυσμα  $\mathcal{S}_R$ . Η λύση του Περιορισμένου Ορθογώνιου Προσchrούστειου προβλήματος δίνεται στο [Ume91] και περιγράφεται παρακάτω.

Δεδομένου ότι στα συμφραζόμενα του προβλήματός ?? μας η θέση  $\mathbf{l}$  είναι άγνωστη, τα τελικά σημεία κάθε σάρωσης λαμβάνονται με την προβολή κάθε σάρωσης στο επίπεδο  $x - y$  σύμφωνα με το τοπικό σύστημα αναφοράς της κάθεμίας, δηλαδή σαν να είχε ληφθεί η κάθε μία από το  $O(0, 0, 0)$ . Ο πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  που ευθυγραμμίζει βέλτιστα το σύνολο  $\mathbf{P}_V$  με το  $\mathbf{P}_R$  είναι ο πίνακας που ελαχιστοποιεί την απόκλιση των περιστραμμένων σημείων

$\mathbf{R}\mathbf{P}_V$  από το  $\mathbf{P}_R$ :

$$\arg \min_{\mathbf{R}} \|\mathbf{P}_R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_V\|_F^2$$

όπου  $\|\mathbf{A}\|_F = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{1/2}$  δηλώνει το μέτρο Frobenius του πίνακα πραγματικών τιμών  $\mathbf{A}$ . Έστω ο τελεστής  $\text{tr}(\mathbf{A})$  ότι δηλώνει το ίχνος του πίνακα  $\mathbf{A}$ . Τότε

$$\|\mathbf{P}_R - \mathbf{R}\mathbf{P}_V\|_F^2 = \text{tr}(\mathbf{P}_R^\top \mathbf{P}_R + \mathbf{P}_V^\top \mathbf{P}_V) - 2 \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top) \quad (4.19)$$

Δεδομένου ότι μόνο ο δεύτερος όρος της δεξιάς πλευράς εξαρτάται από τον πίνακα  $\mathbf{R}$ , για την ελαχιστοποίηση της (4.19) ως προς  $\mathbf{R}$  αρκεί να βρεθεί ο πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  που μεγιστοποιεί το ίχνος  $\text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_V\mathbf{P}_R^\top)$ . Ο βέλτιστος πίνακας  $\mathbf{R}$  δίνεται από το λήμμα I:

**Λήμμα I.** Έστω  $\mathbf{P}_R$  και  $\mathbf{P}_V$  πίνακες διαστάσεων  $2 \times N_s$ ,  $\mathbf{R}$  πίνακας διαστάσεων  $2 \times 2$ , και  $\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$  η αποσύνθεση του  $\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top$  σε ιδιάζουσες τιμές (Singular Value Decomposition—SVD). Τότε ο πίνακας  $\mathbf{R}$  που ελαχιστοποιεί το μέτρο  $\|\mathbf{P}_R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_V\|_F^2$  δίνεται από τη σχέση  $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\top$ , όπου  $\mathbf{S} = \text{diag}(1, \det(\mathbf{U}\mathbf{V}))$ .

**Επακόλουθο I.** Η τιμή του μέγιστου ίχνους  $T(\mathbf{P}_R, \mathbf{P}_V) \triangleq \max \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top)$  είναι

$$\max \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top) = \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{S}) \quad (4.20)$$

Το λήμμα I παρέχει τον βέλτιστο πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}$  υπό την προϋπόθεση ότι τόσο το σύνολο  $\mathbf{P}_R$  όσο και το  $\mathbf{P}_V$  είναι γνωστά. Ωστόσο, στα συμφραζόμενα του προβλήματος ?? τα τελικά σημεία  $\mathbf{P}_R$  υπολογίζονται από έναν αυθαίρετο προσανατολισμό επειδή ο επιθυμητός προσανατολισμός είναι θεμελιωδώς άγνωστος. Επομένως ο υπολογισμός του πίνακα  $\mathbf{R}$  και η εξαγωγή του σχετικού προσανατολισμού του  $\mathbf{P}_V$  σε σχέση με το  $\mathbf{P}_R$  από τον πίνακα  $\mathbf{R}$  σε ένα βήμα είναι αδύνατη. Αυτό που μπορεί να γίνει για την εκτίμηση του προσανατολισμού της στάσης  $\mathbf{p}$  ως προς τον προσανατολισμό της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  είναι το εξής. Υπολογίζεται το γινόμενο  $\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top$  σε  $O(N_s^2)$ , η αποσύνθεσή του σε ιδιάζουσες τιμές σε  $O(1)$ , καταγράφεται η τιμή του ίχνους  $\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{S})$  σε  $O(1)$ , μετατοπίζεται ο πίνακας  $\mathbf{P}_V$  κατά στήλες προς τα αριστερά μία φορά, και επαναλαμβάνεται η διαδικασία  $N_s - 1$  φορές. Έστω ότι η επανάληψη  $\psi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  καταγράφει το μέγιστο ίχνος: τότε η περιστροφή της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  κατά  $\psi\gamma$  μεγιστοποιεί το

ίχνος  $\text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top)$  και ελαχιστοποιεί το μέτρο του σφάλματος ευθυγράμμισης (4.19) για μία δεδομένη διακριτική γωνία  $\gamma$ . Η παραπάνω διαδικασία αποδίδει τη βέλτιστη περιστροφή επειδή το ίχνος  $\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{S})$  ουσιαστικά αναλαμβάνει το ρόλο ενός μέτρου ευθυγράμμισης μεταξύ των συνόλων σημείων  $\mathbf{P}_V$  και  $\mathbf{P}_R$ .

Η παραπάνω διαδικασία καταγραφής  $N_s$  ιχνών μπορεί να υπολογιστεί είτε με ευθύ τρόπο, πολυπλοκότητας  $O(N_s^3)$ , είτε μέσω με της μεθόδου που παρουσιάζεται στο [DBH15] με σημαντικά μειωμένη πολυπλοκότητα  $O(N_s \log N_s)$ . Η μέθοδος αυτή θα αναφέρεται στο εξής ως μέθοδος DBH και περιγράφεται παρακάτω.

Έστω  $\tilde{\mathbf{A}}$  ο πίνακας  $\mathbf{A}$  με αντίστροφη σειρά στηλών,  $\mathbf{P}_R = [\mathbf{p}_R^x; \mathbf{p}_R^y]$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_V = [\mathbf{p}_V^x; \mathbf{p}_V^y]$ . Έστω επίσης ότι ο τελεστής  $\odot$  υποδηλώνει τον πολλαπλασιασμό κατά στοιχείο. Τότε υπολογίζονται τέσσερα διανύσματα μεγέθους  $N_s$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{11} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^x\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^x\}\} \\ \mathbf{m}_{12} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^y\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^x\}\} \\ \mathbf{m}_{21} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^x\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^y\}\} \\ \mathbf{m}_{22} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^y\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^y\}\} \end{aligned}$$

Μετά τον υπολογισμό των διανυσμάτων  $\mathbf{m}_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2$ , υπολογίζονται  $N_s$  πίνακες  $\mathbf{M}_j$ , μεγέθους  $2 \times 2$ , σύμφωνα με:

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11}^j & \mathbf{m}_{12}^j \\ \mathbf{m}_{21}^j & \mathbf{m}_{22}^j \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

όπου  $j = 0, \dots, N-1$ , και  $\mathbf{m}_{kl}^j$  είναι το  $j$ -οστό στοιχείο του διανύσματος  $\mathbf{m}_{kl}$ . Ο πίνακας  $\mathbf{M}_j$  είναι ίσος με τον πίνακα  $\mathbf{P}_R(\mathbf{P}_V^{N_s-1-j})^\top$ , όπου ο συμβολισμός  $\mathbf{A}^k$  δηλώνει τον πίνακα  $\mathbf{A}$  του οποίου οι στήλες έχουν μετατοπιστεί  $k$  φορές προς τα αριστερά. Η απόδειξη χρησιμοποιεί το θεώρημα κυκλικής συνέλιξης του DFT και παραλείπεται.

Αφού υπολογιστούν και σχηματιστούν όλοι οι  $N_s$   $\mathbf{M}_j$  πίνακες, κάθε ένας αποσυντίθεται σε ιδιάζουσες τιμές. Το ίχνος κάθε πίνακα  $\mathbf{R}_j\mathbf{M}_j$  καταγράφεται με την εφαρμογή του λήμματος I και του επακόλουθου I. Έστω ότι το μέγιστο ίχνος καταγράφεται για τον δείκτη  $J$ , τότε η περιστροφή της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  κατά  $(N_s - 1 - J)\gamma = \psi\gamma$  επιτυγχάνει το ίδιο αποτέλεσμα με την

ευθεία μέθοδο υψηλότερης πολυπλοκότητας για μία δεδομένη διακριτική γωνία  $\gamma$ . Εάν η διαφορά του προσανατολισμού μεταξύ των στάσεων από τις οποίες ελήφθησαν οι σαρώσεις  $\mathcal{S}_R$  και  $\mathcal{S}_V$  είναι  $\Delta\theta = \theta - \hat{\theta}$ , τότε  $\Delta\theta = (N_s - 1 - J)\gamma + \phi$ , όπου  $\text{mod}(\Delta\theta, \gamma) = \phi \in [-\frac{\gamma}{2}, +\frac{\gamma}{2}]$ .

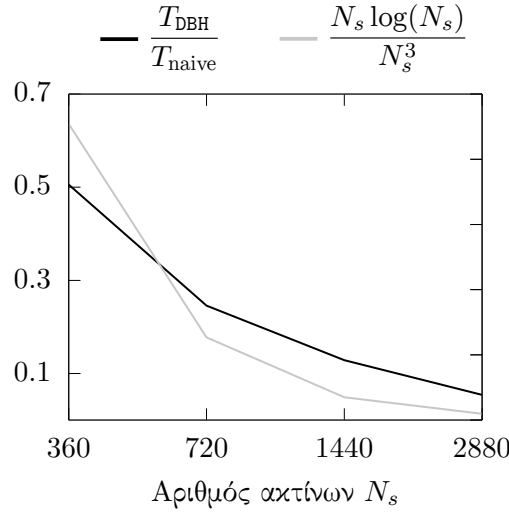
**Παρατήρηση III.** Για δεδομένο αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων  $N_s$  (ισοδύναμα, για δεδομένη διακριτική γωνία  $\gamma$ ), ενημερώνοντας την εκτίμηση προσανατολισμού σε  $\hat{\theta}'$ :

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + (N_s - 1 - J)\gamma \quad (4.22)$$

οδηγεί σε ένα επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού  $\phi$ :

$$|\phi| \leq \frac{\gamma}{2} \quad (4.23)$$

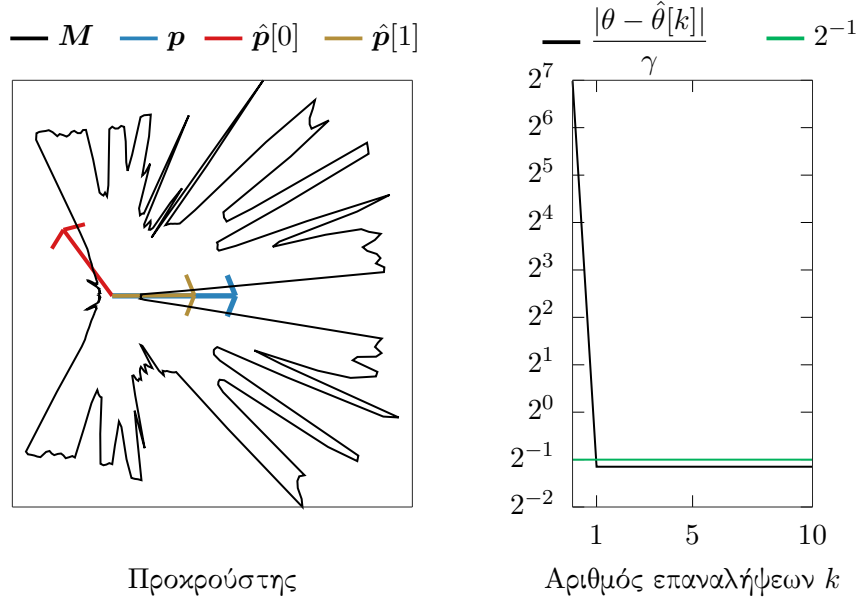
Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$  ονομάζεται στο εξής μέθοδος του Προκρούστη. Στο σχήμα 4.3 απεικονίζεται το κέρδος της εφαρμογής της μεθόδου DBH έναντι της αφελούς μεθόδου σε χρόνο εκτέλεσης για αύξοντες αριθμούς εκπεμπόμενων από τον αισθητήρα σάρωσης ακτίνων  $N_s$ .



Σχήμα 4.3: Με μαύρο χρώμα το ποσοστό του χρόνου εκτέλεσης της μεθόδου ευθυγράμμισης Προκρούστη με την εφαρμογή της μεθόδου DBH προς το χρόνο εκτέλεσης χωρίς την εφαρμογή της, για αυξανόμενο αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων του αισθητήρα σάρωσης. Με γκρι σημειώνεται η καμπύλη του θεωρητικού κέρδους σε χρόνο εκτέλεσης

Στο σχήμα 4.4 απεικονίζεται η αρχική και τελική συνθήκη ευθυγράμμισης προσανατολισμού με εφαρμογή της μεθόδου Προκρούστη για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων σε ένα μη δομημένο περιβάλλον, του οποίου ο χάρτης το αναπαριστά τέλεια, ενώ

οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο. Ο αλγόριθμος II παρουσιάζει σε ψευδοκώδικα τη διαδικασία διόρθωσης προσανατολισμού με βάση την εν λόγω μέθοδο. Ο αλγόριθμος IV παρουσιάζει σε ψευδοκώδικα τη μέθοδο DBH.



Σχήμα 4.4: Αριστερά: η αρχική  $\hat{p}[0] \equiv (l, \hat{\theta}[0])$  και τελική  $\hat{p}[1] \equiv (l, \hat{\theta}[1])$  εκτίμηση στάσης του αισθητήρα σε ένα περιβάλλον με χάρτη  $M$ , για πραγματική στάση  $p(l, \theta)$ , ως συνέπεια της εφαρμογής της μεθόδου γωνιακής ευθυγράμμισης Προχρούστη. Δεξιά: το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού ως συνάρτηση της διακριτικής γωνίας  $\gamma$  του αισθητήρα

---

#### Αλγόριθμος III rc\_uf

---

**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma$

**Output:**  $\hat{\theta}', T$

- 1:  $P_R \leftarrow \text{project}(\mathcal{S}_R, (0, 0, 0))$
  - 2:  $P_V \leftarrow \text{project}(\mathcal{S}_V, (0, 0, 0))$
  - 3:  $(J, T) \leftarrow \text{rc\_uf\_core}(P_R, P_V)$  (Αλγόριθμος IV)
  - 4:  $N_s = 2\pi/\gamma$
  - 5:  $\psi = N_s - 1 - J$
  - 6:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\theta} + \psi\gamma$
  - 7: **return**  $(\hat{\theta}', T)$
- 

#### 4.2.4 Η κλίση της διακριτικής γωνίας του αισθητήρα

Η μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση (ενότητα 4.2.1) και η μέθοδος του Προχρούστη (ενότητα 4.2.3), σε αντίθεση με την μέθοδο Πρώτων Αρχών (ενότητα 4.2.2), είναι

---

**Αλγόριθμος IV** rc\_uf\_core

---

**Input:**  $P_R, P_V$ **Output:**  $J, T(P_R, P_V)$ 

```

1: reverse( $P_V$ )
2:  $p_R^x \leftarrow$  first row of  $P_R$ 
3:  $p_R^y \leftarrow$  second row of  $P_R$ 
4:  $p_V^x \leftarrow$  first row of  $P_V$ 
5:  $p_V^y \leftarrow$  second row of  $P_V$ 
6:  $m_{11} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p_R^x\} \odot \mathcal{F}\{p_V^x\}\}$ 
7:  $m_{12} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p_R^y\} \odot \mathcal{F}\{p_V^x\}\}$ 
8:  $m_{21} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p_R^x\} \odot \mathcal{F}\{p_V^y\}\}$ 
9:  $m_{22} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p_R^y\} \odot \mathcal{F}\{p_V^y\}\}$ 
10:  $T \leftarrow \{\emptyset\}$ 
11: for  $j = 0 : N_s - 1$  do
12:    $M_j \leftarrow \begin{bmatrix} m_{11}(j) & m_{12}(j) \\ m_{21}(j) & m_{22}(j) \end{bmatrix}$ 
13:    $(U, D, V) \leftarrow \text{SVD}(M_j)$ 
14:   append trace( $D \cdot \text{diag}(1, \det(UV))$ ) to  $T$ 
15: end for
16: reverse( $T$ )
17:  $J \leftarrow \arg \max T$ 
18:  $T_{\max} \leftarrow \max\{T\} = T[J]$ 
19: return ( $J, T_{\max}$ )

```

---

διακριτές μέθοδοι εκτίμησης υπό την έννοια ότι λειτουργούν μειώνοντας την αρχική εκτίμηση προσανατολισμού κατά ακέραια πολλαπλάσια της σταθεράς διακριτικής γωνίας  $\gamma$ , με αποτέλεσμα αυθαίρετα επίλοιπα σφάλματα προσανατολισμού  $\phi$  όπως ορίζονται από τις παρατηρήσεις I και III. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να ιδωθεί ως μία έτερη Προκρούστεια ιδιότητα,<sup>1</sup> που αφορά σε δύο μεθόδους αυτή τη φορά, υπό την έννοια ότι το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού  $|\theta - \hat{\theta}| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  τεμαχίζεται στην κλίνη  $K\gamma$ ,  $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , στη βάση διακριτής και εξωτερικής λογικής:—το αρχικό σφάλμα προσαρμόζεται στη μέθοδο, αντί η μέθοδος να είναι προσαρμοσμένη στο αρχικό σφάλμα.

---

<sup>1</sup>Στη μυθολογία ο Πολυτήμων, γνωστότερος ως Προκρούστης, ήταν ένας απαγωγέας ξένων, και μάστιγα της Ιεράς Οδού της Αττικής. Αφού φιλοξενούσε τα θύματά του προσφέροντάς τους ένα πλουσιοπάροχο δείπνο, τα προσκαλούσε να ξαπλώσουν σε ένα κρεβάτι διαστάσεων τέτοιων που το ύψος του θύματος καλείτο να προσαρμοστεί στο μήκος του κρεβατιού, είτε μέσω τεμαχισμού του σώματός του, είτε μέσω τάνυσής του. Ο Πολυτήμων είχε την ατυχία να απαγάγει τον Θησέα, ο οποίος, άρτι αφιχθείς από τη δολοφονία του Μινώταυρου, τον τιμώρησε χρησιμοποιώντας την τεχνική του εναντίον τού.

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις I, ??, και III τα τελικά σφάλματα προσανατολισμού των τριών ως άνω μεθόδων εξαρτώνται από τον αμετάβλητο αριθμό των εκπεμπόμενων από τον φυσικό αισθητήρα απόστασης ακτίνων, ή, ισοδύναμα, από την αμετάβλητη διακριτική του γωνία  $\gamma$ . Το πεπερασμένο και αμετάβλητο των εκπεμπόμενων ακτίνων του φυσικού αισθητήρα, σε συνδυασμό με το αυθαίρετο του ρυθμού των αλλαγών του περιβάλλοντος (σχήμα ??), μπορούν να οδηγήσουν σε υποδειγματοληψία τμημάτων του περιβάλλοντος ή/και του χάρτη του, με συνέπεια τη μη βέλτιστη σύγκλιση της εκτίμησης προσανατολισμού.

Οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις αφορούν στα σφάλματα στάσης της συνολικής μεθόδου ευθυγράμμισης, όχι μόνο λόγω των μη επιλύσιμων σφαλμάτων προσανατολισμού αυτών καθεαυτά, αλλά και λόγω της διάδοσής τους στην διαδεχόμενη της μεθόδου ευθυγράμμισης προσανατολισμού μέθοδο ευθυγράμμισης της θέσης (παρατήρηση ??): λόγω σύζευξης των δύο ειδών ευθυγράμμισης, η μέθοδος εκτίμησης θέσης απαιτεί επί της αρχής μηδενικά σφάλματα προσανατολισμού. Κατ' ελάχιστον, όμως, στην περίπτωση των δύο ως άνω Προχρούστεων μεθόδων, το τελικό σφάλμα προσανατολισμού τους μπορεί να έχει τιμή έως και  $\gamma/2$ . Για την επίλυση αυτού του προβλήματος εξετάζουμε δύο υποψήφιες μεθόδους, οι οποίες παρουσιάζονται στις επόμενες δύο ενότητες.

#### 4.2.5 Η μέθοδος του Πιτυοκάμπτη Σίνι

Προτού εισάγουμε τη μέθοδο που ελαττώνει τα σφάλματα εκτίμησης προσανατολισμού που προτείνουμε, πρέπει να εξετάσουμε το λόγο για την πολυπλοκότητά και την επιτυχία της σε σχέση με την αφελή μέθοδο επιχείρησης ελάττωσης του σφάλματος εκτίμησης του προσανατολισμού, η οποία παρουσιάζεται στην παρούσα ενότητα.

Δεδομένων ότι

- το τελικό σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού των τριών ως άνω μεθόδων είναι αντιστρόφως ανάλογο του αριθμού εκπεμπομένων ακτίνων  $N_s$
- ο τελευταίος είναι αμετάβλητος όσο αφορά στον φυσικό αισθητήρα αποστάσεων (με την έννοια ότι δεν μπορεί να προσδώσει περισσότερες μετρήσεις από  $N_s = 2\pi/\gamma$ )
- ο τελευταίος είναι μεταβλητός όσο αφορά στον εικονικό αισθητήρα αποστάσεων (με την έννοια ότι, εφόσον οι εικονικές σαρώσεις είναι υπολογιστέες μέσω του χάρτη, μπορεί να υπολογιστεί ένας αυθαίρετος αριθμός εικονικών ακτίνων εντός του)



ένας αφελής τρόπος επίλυσης του προβλήματος ελάττωσης του σφάλματος προσανατολισμού συνίσταται στην αύξηση των εκπεμπόμενων ακτίνων

- του φυσικού αισθητήρα με την παρεμβολή των τιμών των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης
- του εικονικού αισθητήρα με την δεσμοβολή ισάριθμων ακτίνων της πραγματικής σάρωσης εντός του χάρτη  $M$

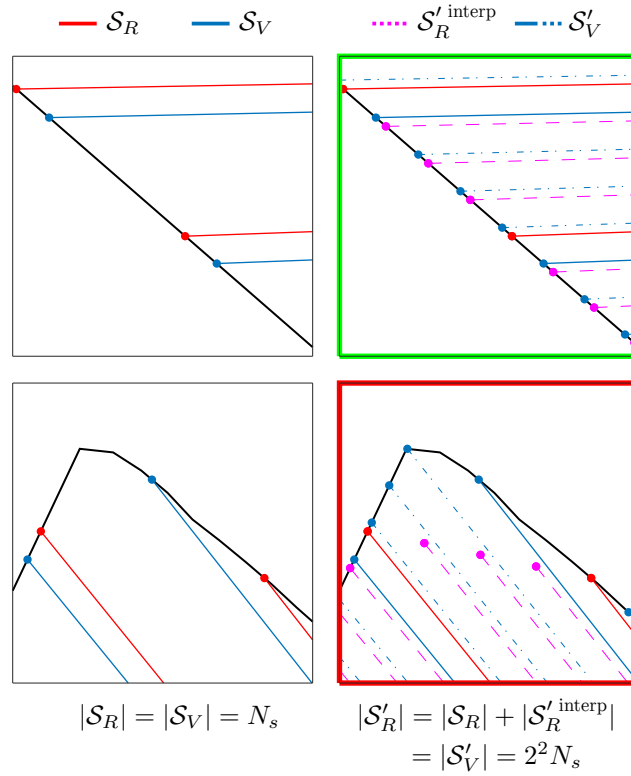
Σε αυτή την περίπτωση η αύξηση του αριθμού των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης μέσω παρεμβολής γίνεται με διχοτόμηση όλων των  $N_s$  γωνιών μεταξύ γειτονικών ακτίνων, και εισαγωγή ακτίνων σε γωνίες  $n\gamma + \gamma/2$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_s - 1$ , των οποίων η αναφερόμενη απόσταση τίθεται σε  $S'_R{}^{\text{interp}}[n] = \frac{1}{2}(S_R[n] + S_R[n+1])$ , όπου  $S_R[N_s] = S_R[0]$ . Με αυτόν τον τρόπο η προκύπτουσα διακριτική γωνία είναι  $\gamma' = \gamma/2$ . Αυτή διαδικασία θα μπορούσε να επαναληφθεί περαιτέρω, έως ότου η τελική διακριτική γωνία φτάσει σε ένα αποδεκτά χαμηλό επίπεδο  $\gamma^{(\nu)} = \gamma/2^\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Όσο αφορά στην εικονική σάρωση, δεδομένου ότι παράγεται από το χάρτη, δεν απαιτεί τη χρήση παρεμβολής—ο αριθμός των απαιτούμενων εικονικών ακτίνων  $N'_s$  καθορίζεται από το μέγεθος της πραγματικής σάρωσης:  $N'_s = 2^\nu N_s$ . Λόγω της χρήσης της τεχνικής διχοτόμησης ακτίνων ονομάζουμε αυτή τη μέθοδο ως μέθοδο του Πιτυοκάμπτη Σίνι.<sup>2</sup>

**Παρατήρηση IV.** Κατά τη διάρκεια αυτής της μεθόδου ελάττωσης του σφάλματος προσανατολισμού η πραγματική σάρωση και ο χάρτης δειγματοληπτούνται με ρυθμό δειγματοληψίας  $2^\nu$ , με αποτέλεσμα μία πραγματική σάρωση και μία εικονική σάρωση, αποτελούμενες από  $2^\nu N_s$  ακτίνες. Η διόρθωση προσανατολισμού εκτελείται μία φορά, και έχει ως αποτέλεσμα μία εκτίμηση προσανατολισμού.

Στο σχήμα 4.5 απεικονίζεται μία μεγέθυνση των δύο περιοχών του σχήματος ?? που περικλείονται σε κόκκινα και πράσινα πλαίσια. Η παραπάνω μεθοδολογία υπερδειγματοληψίας προσομοιώνει τέλεια τις επιπρόσθετες αποστάσεις που θα λάμβανε ένας αισθητήρας με  $2^2 N_s$  ακτίνες σε σχέση με έναν αισθητήρα  $N_s$  ακτίνων σε γραμμικά τμήματα του περιβάλλοντος (επάνω σειρά). Όμως, σε μη γραμμικά ή απότομα μεταβαλλόμενα τμήματα του περιβάλλοντος

<sup>2</sup>Ο Σίνις, επονομαζόμενος Πιτυοκάμπτης, ήταν γιός του Προκρούστη Πολυμήμονος. Σε συνέχεια της γενεαλογίας του ο Σίνις απήγαγε ξένους, των οποίων τα άκρα έδενε σε δύο λυγισμένα πεύκα (κεκαμμένες πιτύες) προτού αφήσει τα τελευταία να πάρουν τη φυσική τους κλίση, διχοτομώντας έτσι τα σώματά των θυμάτων του. Για κακή του τύχη εξοντώθηκε επίσης από τον Θησέα.

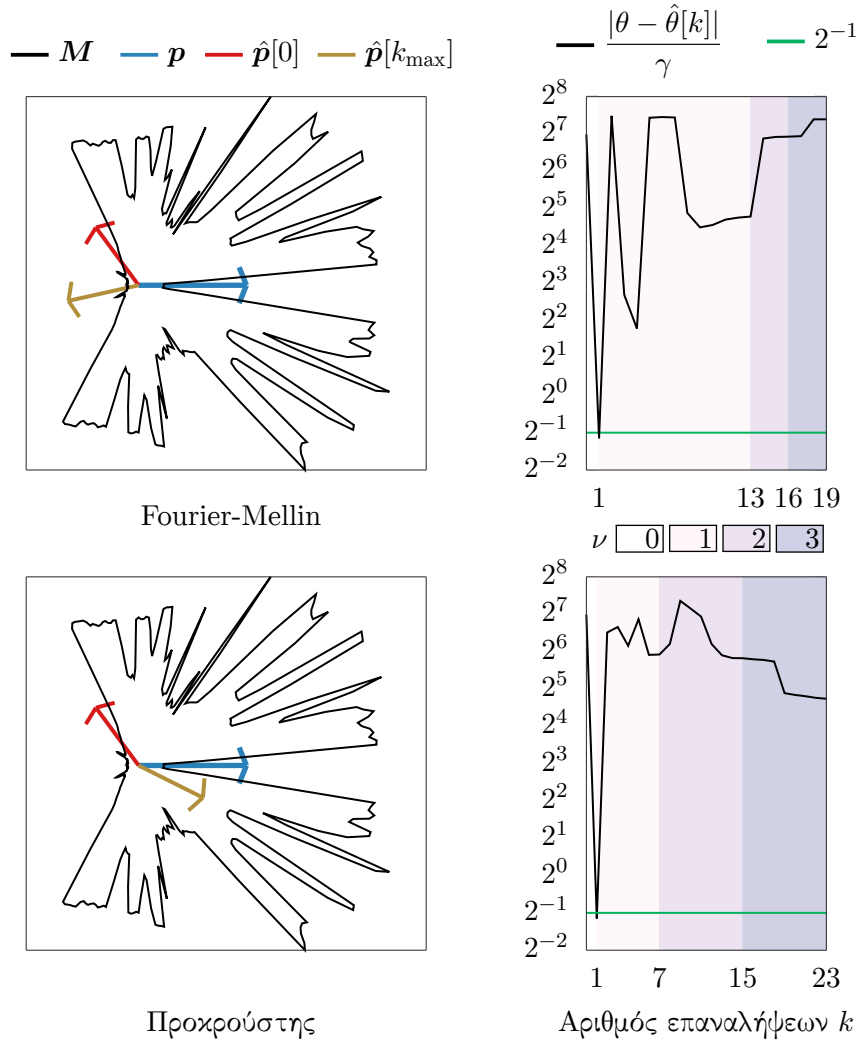
(κάτω σειρά), η μέθοδος παρεμβολής αστοχεί στην προσομοίωση των επιπρόσθετων αποστάσεων λόγω εισαγωγής σφαλμάτων απόστασης που οφείλονται στην επινόηση τεχνητών μετρήσεων. Το μέγεθος αυτών των σφαλμάτων εξαρτάται από το μέγεθος της διακριτικής γωνίας του αισθητήρα, τον ρυθμό υπερδειγματοληψίας, και τον χάρτη ως ανεξάρτητη μεταβλητή.



Σχήμα 4.5: Μεγέθυνση των δύο περιοχών που περιλαμβάνονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα στο σχήμα ???. Οι κόκκινες γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες της πραγματικής μέτρησης  $S_R$ . Οι μπλε γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες της εικονικής μέτρησης  $S_V$ . Οι διακεκομμένες φούξια γραμμές απεικονίζουν τις παρεμβαλλόμενες ακτίνες του πραγματικού αισθητήρα. Οι διακεκομμένες μπλε γραμμές απεικονίζουν τις πρόσθετες ακτίνες του εικονικού αισθητήρα. Εδώ ο ρυθμός υπερδειγματοληψίας είναι  $\mu = 2^\nu$ ,  $\nu = 2$ . Τα σχήματα στην αριστερή πλευρά δείχνουν τις αρχικές σάρωσεις μεγέθους  $N_s$ . Τα δεξιά σχήματα δείχνουν την παρεμβαλλόμενη πραγματική σάρωση και την εικονική σάρωση ίσου μεγέθους  $N_s' = 2^\nu N_s$ . Η παρεμβολή των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης είναι ακριβής σε γραμμικά τμήματα. Σε μη γραμμικά τμήματα, όμως, οι αποστάσεις των παρεμβαλλόμενων ακτίνων είναι αυθαίρετα λανθασμένες, και δεν μπορεί να διασφαλιστεί ότι το σφάλμα προσανατολισμού φράσσεται άνωθεν από την τιμή  $\gamma/2^{\nu+1}$ .

Αυτό σημαίνει ότι η εισαγωγή παρεμβαλλόμενων ακτίνων έχει το αμετάβλητο και ακούσιο αποτέλεσμα η λύση να εισάγει τα δικά της σφάλματα στην επιζητούμενη εκτίμηση. Επιπλέον, αυτό το σφάλμα δεν μπορεί να ελεγχθεί, και, κατά συνέπεια, είναι αναγκαία εναλλακτική προσέγγιση λύσης του προβλήματος. Για του λόγου το αληθές, στο σχήμα 4.6 εκτίθεται το μέγεθος, η τυχαιότητα, και η αστάθεια αυτών των σφαλμάτων. Όπως και πριν απεικονίζονται

οι αρχικές και τελικές συνθήκες ευθυγράμμισης προσανατολισμού για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων σε ένα μη δομημένο περιβάλλον, του οποίου ο χάρτης το αναπαριστά τέλεια, ενώ οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο. Η μέθοδος του Πιτυοκάμπτη Σίνι εφαρμόζεται επί των μεθόδων Fourier-Mellin μίας διάστασης (άνω) και Προκρούστη (κάτω). Εδώ ο βαθμός υπερδειγματοληψίας  $\nu$  έχει αρχική τιμή  $\nu = \nu_{\min} = 0$  και αυξάνει διαδοχικά κάθε φορά που η εκτίμηση προσανατολισμού δεν εμφανίζει μεταβολή ως προς την προηγούμενη τιμή της πάνω από  $\gamma/2$  rad, έως ότου  $\nu = \nu_{\max} = 3$ .



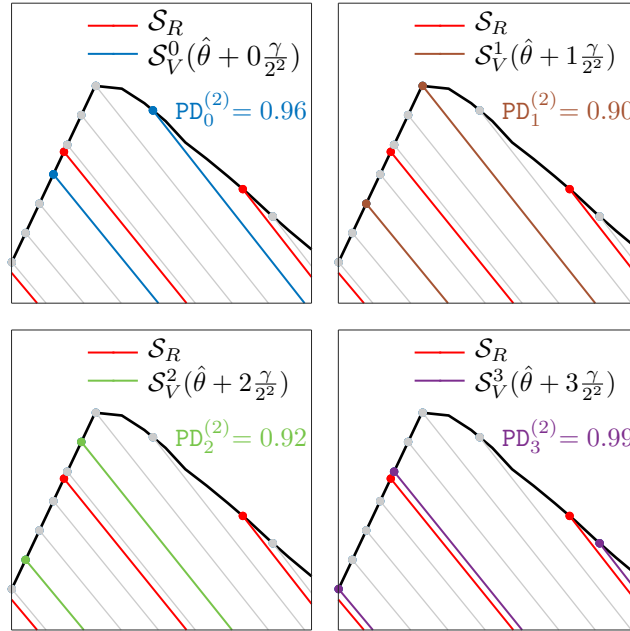
Σχήμα 4.6: Η λανθασμένη προσέγγιση ελάττωσης του γωνιακού σφάλματος εκτίμησης της μεθόδου Πιτυοκάμπτη Σίνι για διαδοχική υπερδειγματοληψία βαθμών  $(\nu_{\min}, \nu_{\max}) = (0, 3)$ . Το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi^{(\nu)}$  φράσσεται από την ποσότητα  $\gamma/2^{1+\nu}$  μόνο στο τέλος του βήματος δειγματοληψίας  $\nu = 0$

Στην ενότητα 4.2.4 παρουσιάζουμε τη μέθοδο που, σε αντίθεση με τη μέθοδο του Πιτυοκάμπτη Σίνι, ελαττώνει το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού με τρόπο ευσταθή, προβλε-

πόμμενο, και αναλογικό ως προς το ρυθμό δειγματοληψίας  $\mu = 2''$  του χάρτη  $M$ .

#### 4.2.6 Η μέθοδος του Θησέα

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται κατανοητό ότι οποιαδήποτε προσπάθεια μείωσης του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού θα πρέπει να περιοριστεί από την απαγόρευση εφεύρεσης πραγματικών μετρήσεων. Στο σχήμα 4.7 απεικονίζεται η μεθοδολογία που εισάγουμε, η οποία εγγυάται ότι το τελικό σφάλμα προσανατολισμού  $|\phi| \in [0, \gamma/2^{1+\nu}]$  στην περίπτωση που οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο και ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια, για  $\nu = 2$ .



Σχήμα 4.7: Μεγέθυνση της μη γραμμικής περιοχής που περικλείεται με κόκκινο χρώμα στο σχήμα ?? . Οι κόκκινες γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες της πραγματικής σάρωσης  $S_R$ . Οι μπλε, καφέ, πράσινες, και μωβ γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες  $2'' = 2^2$  διακριτών εικονικών σάρωσεων που λαμβάνονται από την εκτίμηση στάσης  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta})$  σε  $\gamma/2''$ ,  $\nu = 2$  γωνιακά βήματα, ξεκινώντας από τον εκτιμώμενο προσανατολισμό του αισθητήρα  $\hat{\theta}$ . Η εικονική σάρωση που συμβολίζεται με μωβ χρώμα σημειώνει την υψηλότερη τιμή της μετρικής Ποσοστού Διάκρισης (PD) μεταξύ όλων των  $2''$  εικονικών σάρωσεων. Χρησιμοποιώντας τη μετρική PD και επιλέγοντας την εκτίμηση προσανατολισμού που αντιστοιχεί στην εικονική σάρωση με τη μέγιστη τιμή PD, το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού φράσσεται εγγυημένα άνωθεν από την τιμή  $\gamma/2^{\nu+1}$  στην περίπτωση όπου οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο και ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια

Αντί της κατασκευής μίας εικονικής σάρωσης  $2'' N_s$  ακτίνων, και της εκτέλεσης διόρθωσης του προσανατολισμού μία φορά (παρατήρηση IV), το βέλτιστο σφάλμα προσανατολισμού  $|\phi| \in [0, \gamma/2^{1+\nu}]$  για έναν δεδομένο ρυθμό δειγματοληψίας  $\mu = 2''$  και διακριτική γωνία  $\gamma$  μπορεί να

επιτευχθεί με τον υπολογισμό  $2''$  εικονικών σαρώσεων μεγέθους  $N_s$ , εκτελώντας διόρθωση προσανατολισμού  $2''$  φορές. Η διόρθωση προσανατολισμού πραγματοποιείται μία φορά μετάξυ της ανόθευτης πραγματικής σάρωσης και της εικονικής σάρωσης  $S_V^k$ , η οποία λαμβάνεται από τη στάση  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta}_k)$ :

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta} + k \cdot \gamma / 2'', \quad k = 0, \dots, 2'' - 1 \quad (4.24)$$

για συνολικά  $2''$  φορές, με αποτέλεσμα  $2''$  εκτιμήσεις προσανατολισμού.

Όσο αφορά στις μεθόδους Fourier-Mellin μίας διάστασης και τη μέθοδο του Προκρούστη, η μετρική ευθυγράμμισης μεταξύ της  $k$ -οστής εικονικής σάρωσης και της πραγματικής σάρωσης υπολογίζεται σύμφωνα το Ποσοστό Διάκρισης (Percent Discrimination—PD). Η μετρική του Ποσοστού Διάκρισης για την  $k$ -οστή εικονική σάρωση  $PD_k \in [0, 1]$ , και είναι ανάλογη του βαθμού ευθυγράμμισης μεταξύ των σαρώσεων  $S_R$  και  $S_V^k$  για όλες τις  $2''$  σαρώσεις  $S_V^k$ . Το Ποσοστό Διάκρισης ανάμεσα στην πραγματική μέτρηση  $S_R$  και την εικονική σάρωση  $S_V^k$  ορίζεται ως:

$$PD_k = \frac{2 F(G, H_k)}{F(G, G) + F(H_k, H_k)} \quad (4.25)$$

Για τη μεν περίπτωση της μεθόδου Fourier-Mellin:  $F = \max q$ , όπου  $q = \mathcal{F}^{-1}\{Q\}$ , με τον όρο  $Q$  να ορίζεται από την εξίσωση (4.1) με ορίσματα τα διανύσματα σαρώσεων εισόδου  $G = S_R$  και  $H_k = S_V^k$ .

Για τη δε περίπτωση της μεθόδου του Προκρούστη:  $F = T$ , όπου  $T$  είναι το μέγιστο ίχνος με ορίσματα τους πίνακες  $G = P_R$  και  $H_k = P_{V_k}$  (επακόλουθο I). Εδώ το σύνολο σημείων  $P_R$  κατέχει τις συντεταγμένες των τελικών σημείων των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης  $S_R$  προβεβλημένες στο επίπεδο  $x-y$  από την αρχή  $O(0, 0, 0)$  όπως προηγουμένως, και το σύνολο  $P_{V_k}$  κατέχει τις συντεταγμένες των τελικών σημείων της  $k$ -οστής εικονικής σάρωσης, επίσης προβεβλημένες στο επίπεδο  $x-y$  από το  $O$ .

Όσο αφορά στη μέθοδο Πρώτων Αρχών η σύγκριση ανάμεσα στις σαρώσεις  $S_R$  και  $S_V^k$  δεν είναι δόκιμη, καθώς αυτή αποτελεί μέθοδο συνεχούς χώρου, και συνεπώς δεν ορίζεται μετρική ευθυγράμμισης.

Έστω τώρα ότι  $k_{\max} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : k_{\max} \in [0, 2^{\nu-1}]$  συμβολίζει το δείκτη της  $k$ -οστής εικονικής σάρωσης  $\mathcal{S}_V^{k_{\max}}$  που σημειώνει τον υψηλότερο δείκτη ευθυγράμμισης  $\text{PD}_k$ :  $\text{PD}_{k_{\max}} = \max\{\text{PD}_k\}$ . Έστω επίσης  $I \in \mathbb{Z}$  το ακέραιο πολλαπλάσιο κατά το οποίο εάν πολλαπλασιαστεί η διακριτική γωνία  $\gamma$  τότε η σάρωση  $\mathcal{S}_V^{k_{\max}}$  ευθυγραμμίζεται με την  $\mathcal{S}_R$  με τρόπο τέτοιο που παράγεται η μετρική ευθυγράμμισης  $\text{PD}_{k_{\max}}$ . Τότε εάν η εκτίμηση προσανατολισμού του αισθητήρα ενημερωθεί σε

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + I \cdot \gamma + k_{\max} \cdot \frac{\gamma}{2^{\nu}} \quad (4.26)$$

το επίλοιπο σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi$  φράσσεται από:

$$|\phi| = \text{mod}(|\theta - \hat{\theta}'|, \gamma) \leq \frac{\gamma}{2^{1+\nu}} < \frac{\gamma}{2} \quad (4.27)$$

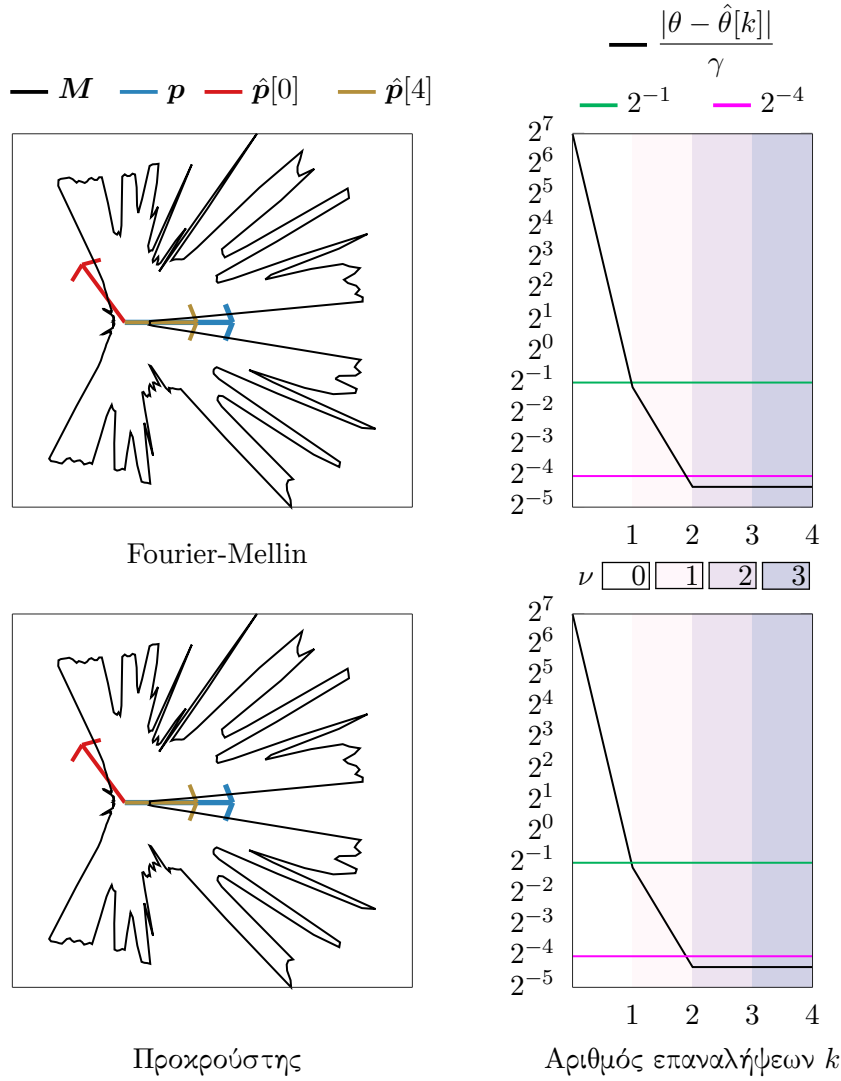
για  $\nu \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

Ο στόχος (??) ?? επιτυγχάνεται με τη μέθοδο που εισαγάγαμε σε αυτή την ενότητα για τη μέθοδο Fourier-Mellin μίας διάστασης (ενότητα 4.2.1) και τη μέθοδο του Προκρούστη (ενότητα 4.2.3) υπό τις προϋποθέσεις ότι (α)  $\mathbf{l} = \hat{\mathbf{l}}$ , (β) το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού είναι  $|\theta - \hat{\theta}| > \gamma/2^{1+\nu}$  για δεδομένο βαθμό δειγματοληψίας  $\nu$ , (γ) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο, και (δ) ο χάρτης του περιβάλλοντος το αναπαριστά τέλεια.

Στο σχήμα 4.8 απεικονίζονται οι ίδιες αρχικές συνθήκες με αυτές της διαμόρφωσης του σχήματος 4.6. Η ευθυγράμμιση προσανατολισμού εκτελείται και πάλι διαδοχικά για βαθμούς δειγματοληψίας του χάρτη  $\mathbf{M}$  ( $\nu_{\min}, \nu_{\max}$ ) = (0, 3), αλλά αυτή τη φορά το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi^{(\nu)}$  φράσσεται στο τέλος κάθε βήματος δειγματοληψίας  $\nu$  από την ποσότητα  $\frac{\gamma}{2^{1+\nu}}$ .

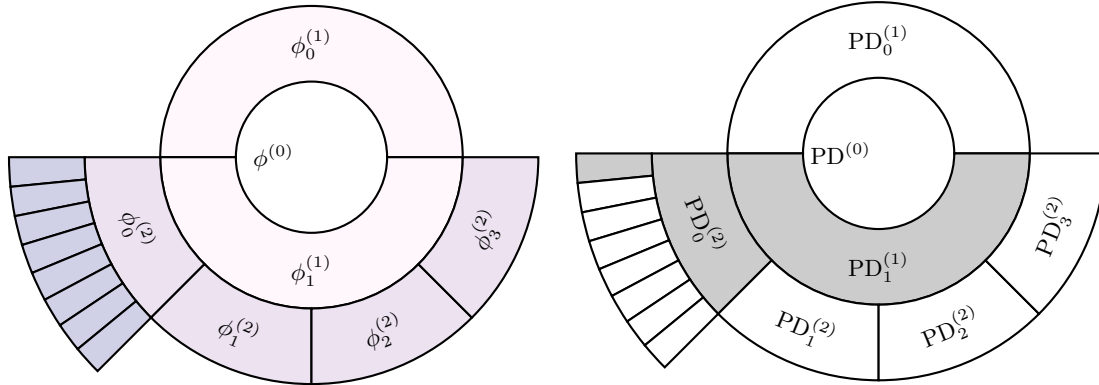
Στο σχήμα 4.9 η άνω σειρά απεικονίζει τα πραγματικά δεδομένα Ποσοστών Διάκρισης και επίλοιπων σφαλμάτων των υποψήφιων προσανατολισμών ανά βαθμό δειγματοληψίας, τα οποία παρήχθησαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου Θησέα επί των μεθόδων γωνιακής ευθυγράμμισης Fourier-Mellin και Προκρούστη που παρουσιάζονται στην εικόνα 4.8. Στην αριστερή πλευρά της κάτω σειράς απεικονίζεται σχηματικά η εξέλιξη της ημίσειας κατάτμησης του επίλοιπου σφάλματος προσανατολισμού ανά βαθμό δειγματοληψίας, και στη δεξιά το Ποσοστό

Διάκρισης που αντιστοιχεί σε κάθε σφάλμα. Συγκεκριμένα, με γκρι χρώμα σημειώνεται η μετρική που εμφανίζει τη μέγιστη τιμή ανάμεσα σε όλες εκείνες του ίδιου βαθμού δειγματοληψίας. Αντιπαραβάλλοντας αυτές με τα δεδομένα της δεξιάς στήλης της άνω σειράς και στη συνέχεια αυτά με εκείνα της αριστερής στήλης της ίδιας σειράς παρατηρούμε ότι τα ελάχιστα επίλοιπα σφάλματα εμφανίζουν τα μέγιστα ποσοστά διάκρισης, σε συνέπεια με την εξίσωση (4.27) και την ανάλυση της παρούσας ενότητας.



Σχήμα 4.8: Η ορθή προσέγγιση ελάττωσης του γωνιακού σφάλματος εκτίμησης της μεθόδου Θησέα για διαδοχική υπερδειγματοληψία βαθμών  $(\nu_{\min}, \nu_{\max}) = (0, 3)$ . Το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi^{(\nu)}$  των δύο μεθόδων φράσσεται στο τέλος κάθε βήματος δειγματοληψίας  $\nu$  από την ποσότητα  $\gamma/2^{1+\nu}$

$ \phi^{(0)} /\frac{\gamma}{2^0} = 0.45 < 2^{-1}$	$PD^{(0)} = 0.99101$
└─ $ \phi_0^{(1)} /\frac{\gamma}{2^1} = 0.45$	└─ $PD_0^{(1)} = 0.99101$
└─ $ \phi_1^{(1)} /\frac{\gamma}{2^1} = 0.22 < 2^{-1}$	└─ $PD_1^{(1)} = 0.99986 \geq PD_*^{(1)}$
└─ $ \phi_0^{(2)} /\frac{\gamma}{2^2} = 0.19 < 2^{-1}$	└─ $PD_0^{(2)} = 0.99986 \geq PD_*^{(2)}$
└─ $ \phi_0^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 0.39 < 2^{-1}$	└─ $PD_0^{(3)} = 0.99986 \geq PD_*^{(3)}$
└─ $ \phi_1^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 1.39$	└─ $PD_1^{(3)} = 0.99721$
└─ $ \phi_2^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 2.39$	└─ $PD_2^{(3)} = 0.98130$
└─ $ \phi_3^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 3.39$	└─ $PD_3^{(3)} = 0.98516$
└─ $ \phi_4^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 3.60$	└─ $PD_4^{(3)} = 0.99101$
└─ $ \phi_5^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 2.60$	└─ $PD_5^{(3)} = 0.99575$
└─ $ \phi_6^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 1.60$	└─ $PD_6^{(3)} = 0.99835$
└─ $ \phi_7^{(3)} /\frac{\gamma}{2^3} = 0.60$	└─ $PD_7^{(3)} = 0.99973$
└─ $ \phi_1^{(2)} /\frac{\gamma}{2^2} = 1.195$	└─ $PD_1^{(2)} = 0.98130$
└─ $ \phi_2^{(2)} /\frac{\gamma}{2^2} = 1.80$	└─ $PD_2^{(2)} = 0.99101$
└─ $ \phi_3^{(2)} /\frac{\gamma}{2^2} = 0.80$	└─ $PD_3^{(2)} = 0.99835$



Σχήμα 4.9: Τα πραγματικά δεδομένα Ποσοτών Διάκρισης  $PD_{0:2^{\nu}-1}^{(\nu)}$  και επίλοιπων σφαλμάτων  $\phi_{0:2^{\nu}-1}^{(\nu)}$  των υποψήφων προσανατολισμών που αφορούν στα επίπεδα δειγματοληψίας  $\nu$ , τα οποία προέκυψαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου Θησέα επί των μεθόδων γωνιακής ευθυγράμμισης Fourier-Mellin και Προκρούστη που παρουσιάζονται στην εικόνα 4.8. Η κάτω σειρά απεικονίζει σχηματικά: στα αριστερά την αναδρομική εξέλιξη της κατάτμησης του αρχικού επίλοιπου σφάλματος  $\phi^{(0)}$  σε ημίσεια σφάλματα, και στα δεξιά τα αντιστοιχούντα μέγιστα ποσοστά διάκρισης ανά βαθμό δειγματοληψίας. Παρατηρήστε πως υπάρχει ευθεία αντιστοιχία του μέγιστου ποσοστού διάκρισης (γκρι) με το ελάχιστο επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού



Ο Αλγόριθμος V παρουσιάζει τη μέθοδο διόρθωσης προσανατολισμού που προτείνουμε σε μορφή ψευδοκώδικα, για ορίσματα  $\text{rc} = \{\text{rc\_fm}, \text{rc\_uf}\}$ .

---

**Αλγόριθμος V**  $\text{rc\_theseus}$ 


---

**Input:**  $\text{rc}, M, \mathcal{S}_R, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma, N_s, \nu$

**Output:**  $\hat{\theta}'$

- 1:  $(\hat{\Theta}, \text{PD}) \leftarrow \text{rc\_theseus\_core}(\text{rc}, M, \mathcal{S}_R, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma, N_s, \nu)$
  - 2:  $k_{\max} \leftarrow \arg \max \text{PD}$
  - 3:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\Theta}[k_{\max}]$
  - 4: **return**  $\hat{\theta}'$
- 

---

**Αλγόριθμος VI**  $\text{rc\_theseus\_core}$ 


---

**Input:**  $\text{rc}, M, \mathcal{S}_R, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma, N_s, \nu$

**Output:**  $\hat{\Theta}, \text{PD}$

- 1:  $\hat{\Theta}, \text{PD} \leftarrow \{\emptyset\}$
  - 2: **for**  $k = 0 : 2^\nu - 1$  **do**
  - 3:    $\hat{p}_k \leftarrow (x, y, \hat{\theta} + k \cdot \gamma / 2^\nu)$
  - 4:    $\mathcal{S}_V^k \leftarrow \text{scan\_map}(M, \hat{p}_k, N_s)$
  - 5:    $(\cdot, m_k) \leftarrow \text{rc}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{p}_k, \gamma)$
  - 6:   **append**  $\hat{\theta}_k = \hat{\theta} + 2\pi m_k / N_s + k \cdot \gamma / 2^\nu$  **to**  $\hat{\Theta}$
  - 7:    $(\cdot, m_k^R) \leftarrow \text{rc}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_R, \hat{p}_k, \gamma)$
  - 8:    $(\cdot, m_k^V) \leftarrow \text{rc}(\mathcal{S}_V^k, \mathcal{S}_V^k, \hat{p}_k, \gamma)$
  - 9:   **append**  $\frac{2m_k}{m_k^R + m_k^V}$  **to**  $\text{PD}$
  - 10:    $k \leftarrow k + 1$
  - 11: **end for**
  - 12: **return**  $(\hat{\Theta}, \text{PD})$
- 

### 4.3 Μέθοδος για ευθυγράμμισης θέσης

Έστω τώρα ότι η πραγματική και η εκτιμώμενη στάση είναι ίσες ως προς τον προσανατολισμό  $\hat{\theta} = \theta$ , αλλά άνισες ως προς τη θέση  $\hat{l} \neq l$ . Εάν ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια και ο φυσικός αισθητήρας αναφέρει μετρήσεις χωρίς διαταραχές, τότε η εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα μπορεί να οδηγηθεί αυθαίρετα κοντά στην πραγματική θέση. Σε πραγματικές

**Αλγόριθμος VII scan\_map****Input:**  $M, p(x, y, \theta), N_s$ **Output:**  $S_V$ 

```

1:  $S_V \leftarrow \{\emptyset\}$ 
2: for  $n = 0 : N_s - 1$  do
3:    $\lambda_n \leftarrow -\pi + \frac{2\pi}{N_s}n$ 
4:    $\theta_n \leftarrow \lambda_n + \hat{\theta}$ 
5:    $(x_n, y_n) \leftarrow \text{intersect}(M, (x, y, \theta_n))$ 
6:    $d_n \leftarrow \|(x - x_n, y - y_n)\|_2$ 
7:   append  $(d_n, \lambda_n)$  to  $S_V$ 
8: end for
9: return  $S_V$ 

```

συνθήκες, όταν οι ακτίνες των πραγματικών σαρώσεων ή/και των εικονικών σαρώσεων αλληλώνονται από προσθετικό θόρυβο πεπερασμένου μέγιστου μέτρου, η εκτίμηση θέσης μπορεί να φραχθεί σε μια γειτονιά της πραγματικής θέσης του αισθητήρα. Τα θεωρήματα I και II τυποποιούν αυτές τις δηλώσεις [Fil22].

**Θεώρημα I.** Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του προβλήματος ????, και ότι  $\hat{\theta} = \theta$ . Έστω επίσης ότι η εικονική σάρωση  $S_V$  που συλλαμβάνεται από τη στάση  $\hat{p}$  εντός του χάρτη  $M$  συμβολίζεται με  $S_V|_{\hat{p}}$ . Έστω ακόμα ότι οι δισδιάστατες σαρώσεις  $S_R$  και  $S_V$  είναι απαλλαγμένες από διαταραχές, δηλαδή ότι οι αποστάσεις που καταγράφουν οι ακτίνες της πραγματικής σάρωσης προς τα γύρω του εμπόδια αντιστοιχούν στις πραγματικές αποστάσεις του αισθητήρα από τα εν λόγω εμπόδια, και ότι ο χάρτης του περιβάλλοντος το αναπαριστά τέλεια. Αντιμετωπίζοντας την εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα ως μεταβλητή κατάστασης  $\hat{l}[k] = [\hat{x}[k], \hat{y}[k]]^\top$  και ενημερώνοντάς την σύμφωνα με την εξίσωση διαφορών

$$\hat{l}[k+1] = \hat{l}[k] + \mathbf{u}[k] \quad (4.28)$$

όπου  $\hat{l}[0] = \hat{l} = [\hat{x}, \hat{y}]^\top$ , (δηλαδή η παρεχόμενη αρχική εκτίμηση της θέσης),  $\mathbf{u}$  είναι

ένα διάνυσμα διαστάσεων  $2 \times 1$  που στο εξής θα αναφέρεται ως *διάνυσμα ελέγχου*:

$$\mathbf{u}[k] = \frac{1}{N_s} \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,r}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V | \hat{\mathbf{p}}[k]) \\ X_{1,i}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V | \hat{\mathbf{p}}[k]) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

όπου  $X_{1,r}(\cdot)$  και  $X_{1,i}(\cdot)$  είναι, αντίστοιχα, το πραγματικό και φανταστικό μέρος της μιγαδικής ποσότητας  $X_1$ :

$$\begin{aligned} X_1(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V | \hat{\mathbf{p}}[k]) &= X_{1,r}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V | \hat{\mathbf{p}}[k]) + i \cdot X_{1,i}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V | \hat{\mathbf{p}}[k]) \\ &= \sum_{n=0}^{N_s-1} (\mathcal{S}_R[n] - \mathcal{S}_V[n] | \hat{\mathbf{p}}[k]) \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{N_s}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

όπου  $\mathcal{S}_R[n]$  και  $\mathcal{S}_V[n] | \hat{\mathbf{p}}[k]$  είναι, αντίστοιχα, οι αναφερόμενες αποστάσεις της  $n$ -οστής ακτίνας της πραγματικής  $\mathcal{S}_R$  και εικονικής σάρωσης  $\mathcal{S}_V | \hat{\mathbf{p}}[k]$ , και  $\hat{\mathbf{p}}[k] = (\hat{\mathbf{l}}[k], \hat{\theta})$ —τότε η εκτίμηση θέσης  $\hat{\mathbf{l}}[k]$  συγκλίνει ομοιόμορφα ασυμπτωτικά στην πραγματική θέση  $\mathbf{l}$  καθώς  $k \rightarrow \infty$ .

Στην πράξη το σύστημα ελέγχου (4.28, 4.29) αφήνεται να επαναληφθεί είτε έως ότου το μέτρο του διανύσματος ελέγχου  $\mathbf{u}[k]$  φτάσει σε ένα επαρκώς μικρό μέγεθος  $\|\mathbf{u}[k]\|_2 < \varepsilon_u$ , όπου  $\varepsilon_u$  είναι επαρκώς μικρό—π.χ.  $\varepsilon_u < 10^{-3}$ —ή για  $I_T > 0$  επαναλήψεις (ένα αρκετά μεγάλο, εξωτερικά παρεχόμενο όριο μέγιστων επαναλήψεων—π.χ.  $I_T \geq 20$ ). Επομένως, συμβολίζοντας με  $k_{stop} \in (0, I_T]$  τον δείκτη της τελευταίας επανάληψης, και με  $\hat{\mathbf{l}}' = \hat{\mathbf{l}}[k_{stop}]$  τότε  $\|\mathbf{e}(\mathbf{l}, \hat{\mathbf{l}}')\|_2 < \|\mathbf{e}(\mathbf{l}, \hat{\mathbf{l}}[0])\|_2$ , και επομένως ο στόχος (???) ικανοποιείται.

**Παρατήρηση V.** Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μετά την εφαρμογή του θεωρήματος I, το σφάλμα θέσης είναι ανάλογο με το σφάλμα προσανατολισμού.

**Θεώρημα II.** Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος I. Έστω επιπλέον ότι η αποστάσεις που αναφέρονται από την πραγματική  $\mathcal{S}_R$  και εικονική  $\mathcal{S}_V$  σάρωση επηρεάζονται από προσθετικές διαταραχές πεπερασμένου μέγιστου μέτρου. Τότε η εκτίμηση θέσης  $\hat{\mathbf{l}}[k]$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη για  $k \geq k_0$  και ομοιόμορφα τελικά φραγμένη σε μια γειτονιά της πραγματικής θέσης  $\mathbf{l}$ . Το μέγεθος της γειτονιάς εξαρτάται από τα δύο μέγιστα μέτρα (με την έννοια της infinity norm) των διαταραχών που

αλλοιώνουν τις πραγματικές τιμές των δύο σαρώσεων.

Σε σύγκριση με την περίπτωση που δεν υπάρχουν διαταραχές, μια λύση που ικανοποιεί το στόχο (???) δεν είναι αυστηρά εγγυημένη για κάθε αρχική θέση  $\hat{l}[0]$ . Ας συμβολίσουμε και πάλι με  $k_{stop} \in (0, I_T]$  τον δείκτη της τελευταίας επανάληψης, με  $\hat{l}' = \hat{l}[k_{stop}]$  την τελική εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα, και με  $B$  το τελικό φράγμα (ultimate bound) του σφάλματος θέσης. Εάν  $\|e(l, \hat{l}[0])\|_2 > B$ , το θεώρημα II εγγυάται την ικανοποίηση του στόχου (?? ??) εάν  $k_{stop} \geq k_0$ . Εάν, από την άλλη πλευρά, εάν  $\|e(l, \hat{l}[0])\|_2 \leq B$ , δεν είναι βέβαιο ότι  $\|e(l, \hat{l}')\|_2 < \|e(l, \hat{l}[0])\|_2$ —αυτό που είναι βέβαιο σε αυτή την περίπτωση, όμως, είναι ότι  $\|e(l, \hat{l}[k])\|_2 \not\geq B$  για όλα κάθε  $k \geq 0$ .

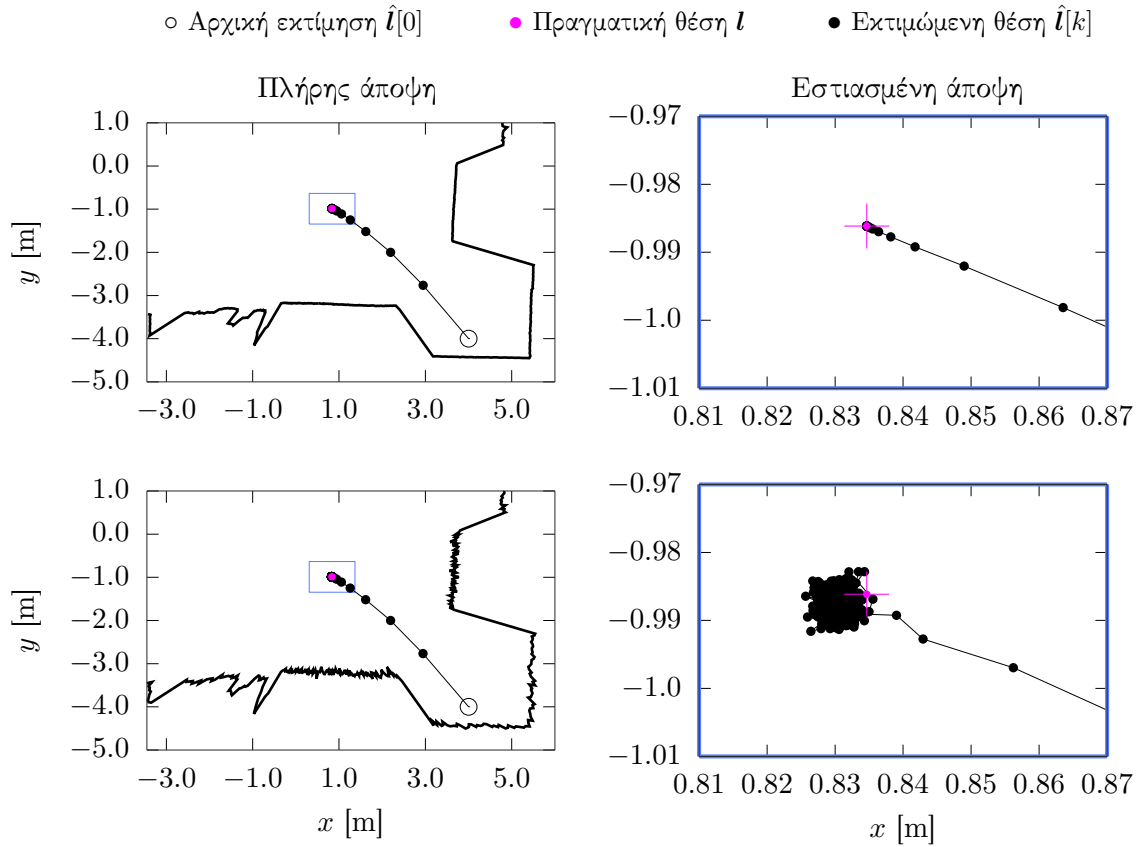
Στο σχήμα 4.10 απεικονίζονται οι τροχιές της εκτίμησης θέσης βάσει εφαρμογής του θεωρήματος I για έναν αισθητήρα με θέση  $l = (0.83, -0.98)$  [m] και αρχική εκτίμηση θέσης  $\hat{l} = (4.0, -4.0)$  [m]. Οι ακτίνες της πραγματικής σάρωσης  $S_R$  και των εικονικών σαρώσεων  $S_V$  διαταράσσονται από θόρυβο κανονικά κατανομημένο με τυπική απόκλιση  $\sigma_R$  και  $\sigma_V$  αντίστοιχα. Η άνω σειρά απεικονίζει τις τροχιές εκτίμησης για τυπικές αποκλίσεις  $\sigma_R = \sigma_V = 0.0$  m, και η κάτω σειρά για  $\sigma_R = \sigma_V = 0.05$  m.

Ο αλγόριθμος VIII παραθέτει σε ψευδοκώδικα τη μέθοδο εκτίμησης της θέσης για δεδομένα και γνωστή εκτίμηση προσανατολισμού.

#### 4.4 Μεθοδολογία ευθυγράμμισης από κοινού

#### 4.5 Πειραματική αξιολόγηση

#### 4.6 Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα



Σχήμα 4.10: Οι τροχιές της εκτίμησης θέσης βάσει εφαρμογής του θεωρήματος I για επίπεδο διαταραχών αποστάσεων  $\sigma_R = \sigma_V = 0.0$  m (άνω σειρά) και  $\sigma_R = \sigma_V = 0.05$  m (κάτω σειρά). Τα τελικά σφάλματα εκτίμησης θέσης είναι  $2.04 \times 10^{-7}$  m και  $5.72 \times 10^{-3}$  m αντίστοιχα. Η εκτίμηση θέσης συγκλίνει ομοιόμορφα ασυμπτωτικά στην πρώτη περίπτωση (θεώρημα I), ενώ στη δεύτερη είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε μία γειτονιά της πραγματικής θέσης (θεώρημα II)

---

**Αλγόριθμος VIII icte**


---

**Input:**  $M, \mathcal{S}_R, \hat{\mathbf{p}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}), k_{max}, \varepsilon_u, N_s$ 
**Output:**  $\hat{\mathbf{p}}'(\hat{x}', \hat{y}', \hat{\theta})$ 

```

1:  $k \leftarrow 0$ 
2: while  $k < k_{max}$  do
3:    $\mathcal{S}_V^{[k]} \leftarrow \text{scan\_map}(M, \hat{\mathbf{p}}, N_s)$ 
4:    $X_1 \leftarrow \text{diff\_dft}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V^{[k]})$ 
5:    $(X_{1,r}, X_{1,i}) \leftarrow (\text{re}(X_1), \text{im}(X_1))$ 
6:    $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{1}{N_s} \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,r} \\ X_{1,i} \end{bmatrix}$ 
7:    $\hat{\mathbf{p}} \leftarrow \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{u}_k$ 
8:   if  $\|\mathbf{u}_k\|_2 < \varepsilon_u$  then
9:     break
10:  end if
11:   $k \leftarrow k + 1$ 
12: end while
13:  $\hat{\mathbf{p}}' \leftarrow \hat{\mathbf{p}}$ 
14: return  $\hat{\mathbf{p}}'$ 

```

---



---

**Αλγόριθμος IX diff\_dft**


---

**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V$ 
**Output:**  $X_1$ 

```

1: assert  $|\mathcal{S}_R| = |\mathcal{S}_V^{[k]}|$ 
2:  $N_s \leftarrow |\mathcal{S}_R|$ 
3:  $\Delta \leftarrow \{\emptyset\}$ 
4: for  $n = 0 : N_s - 1$  do
5:    $d_n \leftarrow \mathcal{S}_R[n] - \mathcal{S}_V^{[k]}[n]$ 
6:   append  $d$  to  $\Delta$ 
7: end for
8:  $\mathbf{X} \leftarrow \text{DFT}(\Delta)$ 
9:  $X_1 \leftarrow \mathbf{X}[1]$ 
10: return  $X_1$ 

```

---

## Μέρος ΙΙΙ

# Συμπεράσματα





Μέρος IV

Παραπομπές



- [Sch66] Peter H. Schönemann. “A generalized solution of the orthogonal procrustes problem”. Στο: *Psychometrika* 31.1 (Μαρ. 1966), σσ. 1–10. ISSN: 0033-3123. DOI: 10.1007/BF02289451. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF02289451>.
- [Ume91] S. Umeyama. “Least-squares estimation of transformation parameters between two point patterns”. Στο: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13.4 (Απρ. 1991), σσ. 376–380. ISSN: 01628828. DOI: 10.1109/34.88573. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/88573/>.
- [DBH15] Günay Doğan, Javier Bernal και Charles Hagwood. “FFT-based Alignment of 2D Closed Curves with Application to Elastic Shape Analysis”. Στο: *Proceedings of the Proceedings of the 1st International Workshop on DIFFerential Geometry in Computer Vision for Analysis of Shapes, Images and Trajectories 2015*. British Machine Vision Association, 2015, σσ. 12.1–12.10. ISBN: 1-901725-56-1. DOI: 10.5244/C.29.DIFFCV.12. URL: <http://www.bmva.org/bmvc/2015/diffcv/papers/paper012/index.html>.
- [Fil22] Alexandros Filotheou. “Correspondenceless scan-to-map-scan matching of homoriented 2D scans for mobile robot localisation”. Στο: *Robotics and Autonomous Systems* 149 (Μαρ. 2022), σ. 103957. ISSN: 09218890. DOI: 10.1016/j.robot.2021.103957. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921889021002323>.



Μέρος V

Παραρτήματα

