



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΙΤΛΟΣ

Διδακτορική Διατριβή

του

Αλεξάνδρου Φιλοθέου του Χρήστου και της Μαρίνας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΚΑΙ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ  
ΒΑΣΙΛΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΟΚΧΟΛΜΗΣ

που εκπονήθηκε ως μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων για την απονομή του τίτλου του

Διδάκτορα Μηχανικού

Επιβλέπων  
Γεώργιος Δ. Σεργιάδης  
Καθηγητής

Συμβουλευτική Επιτροπή

Τραϊανός Β. Γιούλτσης  
Καθηγητής

Ανδρέας Λ. Συμεωνίδης  
Αναπληρωτής Καθηγητής



*Η κόνια αιτία των προβλημάτων είναι οι λύσεις.*

—Ἐριχ Σέβαραϊντ



Περιληψη

**Abstract**



# Περιεχόμενα

I	Εισαγωγή	1
II	Προβλήματα—Λύσεις—Συμβολές	3
1	Αξιολόγηση αλγορίθμων αυτόνομης πλοιήγησης	5
2	Μέθοδοι ελάττιωσης σφάλματος εκτίμησης στάσης φίλτρου σωματιδίων	7
3	Εκτίμηση στάσης βάσει καθολικής αβεβαιότητος χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων	9
4	Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων	11
4.1	Στόχοι του κεφαλαίου και δομή . . . . .	11
4.2	Μεθοδολογία ευθυγράμμισης προσανατολισμού . . . . .	14
4.2.1	Η μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση . . . . .	14
4.2.2	Η μέθοδος Πρώτων Αρχών . . . . .	15
4.2.3	Η μέθοδος του Προκρούστη . . . . .	20
4.2.4	Η κλίνη της διαχριτικής γωνίας του αισθητήρα . . . . .	27
4.2.5	Η μέθοδος του Πιτουοκάμπτη Σίνι . . . . .	28
4.2.6	Η μέθοδος του Θησέα . . . . .	30
4.2.7	Περιορισμοί και ιδιότητες υπό γενικές συνθήκες . . . . .	34

4.3	Μεθοδολογία ευθυγράμμισης θέσης . . . . .	41
4.3.1	Η μέθοδος Πρώτων Αρχών . . . . .	41
4.3.2	Ιδιότητες υπό γενικές συνθήκες . . . . .	43
4.4	Μεθοδολογία ευθυγράμμισης από κοινού . . . . .	47
4.4.1	Αντιμετώπιση των υπό γενικές συνθήκες γωνιακών περιορισμών . . . . .	47
4.4.2	Το σύστημα από κοινού ευθυγράμμισης . . . . .	53
4.5	Πειραματική αξιολόγηση . . . . .	56
4.5.1	Πειραματική διάταξη . . . . .	58
4.5.2	Αποτελέσματα . . . . .	61
4.5.3	Εξέταση και αξιολόγηση αποτελεσμάτων . . . . .	73
4.6	Χαρακτήρας και περιορισμοί . . . . .	82
4.7	Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα . . . . .	90
4.7.1	Συμπεράσματα κεφαλαίου . . . . .	90
4.7.2	Αιτίες περαιτέρω έρευνας . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών σαρώσεων χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων</b>	<b>95</b>
5.1	Στόχοι του κεφαλαίου και δομή . . . . .	95
5.2	Μεθοδολογία . . . . .	96
5.3	Πειραματική αξιολόγηση . . . . .	97
5.3.1	Πειραματική διάταξη . . . . .	97
5.3.2	Αποτελέσματα . . . . .	97
5.3.3	Εξέταση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων . . . . .	97
5.4	Χαρακτήρας και περιορισμοί . . . . .	97
5.5	Συμπεράσματα . . . . .	97

<i>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</i>	iii
<b>III Συμπεράσματα</b>	<b>111</b>
<b>IV Παραπομπές</b>	<b>113</b>
<b>V Παραρτήματα</b>	<b>115</b>

Μέρος Ι

Εισαγωγή



**Μέρος ΙΙ**

**Προβλήματα—Λύσεις—**

**Συμβολές**



## Κεφάλαιο 1

Αξιολόγηση αλγορίθμων  
αυτόνομης πλοήγησης



## **Κεφάλαιο 2**

**Μέθοδοι ελάττωσης σφάλματος  
εκτίμησης στάσης φίλτρου  
σωματιδίων**



## Κεφάλαιο 3

Εκτίμηση στάσης βάσει  
καθολικής αβεβαιότητος χωρίς  
τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων



## **Κεφάλαιο 4**

# **Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων**

Η έρευνα που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο αντλεί τις πηγές της από τις αιτίες περαιτέρω έρευνας του προηγούμενου κεφαλαίου, όπως αυτές διατυπώθηκαν στην τελευταία του ενότητα. Στο παρόν κεφάλαιο επιζητούμε το σχεδιασμό και την κατασκευή μεθόδων ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις οι οποίες, σε αντίθεση με τη μέθοδο που παρουσιάσθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, εκτελούνται σε χρόνο τέτοιο ώστε να μπορούν να εφαρμοσθούν και στα συμφραζόμενα της παραχολούθησης της τροχιάς ενός ρομπότ του πεδίου εφαρμογής ??, δηλαδή στα συμφραζόμενα της προσθετικής μεθόδου που παρουσιάσθηκε στο κεφάλαιο 2.

### **4.1 Στόχοι του κεφαλαίου και δομή**

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι η επίλυση του προβλήματος ΙΙ3:

**Πρόβλημα Π3.** Έστω ένα ρομπότ κινητής βάσης του πεδίου εφαρμογής ??, ικανό να κινείται στο επίπεδο  $x-y$ , εξοπλισμένο με έναν οριζόντια τοποθετημένο αισθητήρα lidar μετρήσεων δύο διαστάσεων που εκπέμπει  $N_s$  ακτίνες. Έστω επίσης ότι τα ακόλουθα είναι διαθέσιμα ή ευσταθούν:

- Ο χάρτης  $M$  του περιβάλλοντος στο οποίο κινείται το ρομπότ
- Μια δισδιάστατη μέτρηση  $S_R$  μεγέθους  $N_s$ , που λαμβάνεται από την—άγνωστη και αναζητούμενη—στάση  $p(l, \theta)$ ,  $l = (x, y)$
- Μια εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα  $\hat{p}(\hat{l}, \hat{\theta})$  στο σύστημα αναφοράς του χάρτη, όπου  $\hat{l} = (\hat{x}, \hat{y})$  είναι σε μία γειτονιά του  $l$

Τότε ο στόχος είναι να μειωθεί το μέτρο του σφάλματος στάσης του αισθητήρα  $e(p, \hat{p}) \triangleq p - \hat{p}$  από την αρχική του τιμή  $\|e(p, \hat{p})\|_2$  βελτιώνοντας την εκτίμηση της στάσης του αισθητήρα σε  $\hat{p}'(\hat{x}', \hat{y}', \hat{\theta}')$  έτσι ώστε

$$\|e(p, \hat{p}')\|_2 < \|e(p, \hat{p})\|_2 \quad (*)$$

δεδομένων των κάτωθι παραδοχών και περιορισμών:

- Το γωνιακό εύρος του αισθητήρα lidar ισούται με  $\lambda = 2\pi$  (Παραδοχή ??)
- Η λύση του προβλήματος δίνεται μέσω ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σφρώσεις (Παραδοχή ??)
- Η επίλυση του προβλήματος γίνεται χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων ανάμεσα στις εισόδους της μεθόδου επίλυσης (Παραδοχή ??)
- Η εκτέλεση της επίλυσης του προβλήματος πρέπει γίνεται σε χρόνο που να συμβαδίζει με το ρυθμό ανανέωσης εκτιμήσεων στάσης που παρέχει η βασική μέθοδος εκτίμησης στάσης (Επακόλουθο ??)

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσεγγίσουμε τη λύση του παραπάνω προβλήματος αποσυνθέτοντάς το σε τρία διακριτά προβλήματα.

Το πρώτο είναι η εκτίμηση του προσανατολισμού της πραγματικής στάσης του αισθη-

τήρα δεδομένου ότι η πραγματική θέση και η εκτιμώμενη θέση συμπίπτουν. Προς αυτήν την κατεύθυνση αναπτύσσουμε τρεις κύριες μεθόδους εκτίμησης, οι οποίες παρουσιάζονται στην ενότητα 4.2. Οι δύο πρώτες μέθοδοι προκύπτουν μέσω του διαχριτού μετασχηματισμού Fourier: η πρώτη αποτελεί την προσαρμογή της δισδιάστατης μεθόδου SPOMF σε μία διάσταση, ενώ η δεύτερη εφορμάται από πρώτες αρχές και είναι καινοφανής. Η τρίτη μέθοδος έχει την απαρχή της στο πεδίο της χρυσταλλογραφίας και, όπως ακριβώς και η πρώτη, και σε αντίθεση με τη δεύτερη, λειτουργεί στον διαχριτό γωνιακό χώρο. Λόγω αυτού του τελευταίου γεγονότος το τελικό σφάλμα των δύο αυτών μεθόδων είναι, εν γένει, μη μηδενικό, και εξαρτάται από την κατά γωνία διαχριτική ικανότητα του φυσικού αισθητήρα lidar. Για την ελάττωση αυτού του σφάλματος σχεδιάζουμε μία διαδικασία η οποία εγγυάται την φραγή του εντός ανωφλίου το οποίο ορίζεται εκ των προτέρων.

Το δεύτερο πρόβλημα είναι η εκτίμηση της θέσης της πραγματικής στάσης του αισθητήρα δεδομένου ότι ο πραγματικός προσανατολισμός και ο εκτιμώμενος προσανατολισμός συμπίπτουν. Προς αυτή την κατεύθυνση υιοθετούμε μία μέθοδο εκτίμησης θέσης η οποία βασίζεται στο διαχριτό μετασχηματισμό Fourier, λειτουργεί στον συνεχή δισδιάστατο χώρο, και εφορμάται από πρώτες αρχές. Η εν λόγω μέθοδος παρουσιάζεται στην ενότητα 4.3.

Το τρίτο πρόβλημα προκύπτει από την ασυμβατότητα των δύο παραπάνω συνθηκών, των οποίων το χάσμα?? γεφυρώνουμε προσεγγίζοντας το πρόβλημα κατ' αναλογία με τη φύση του προβλήματος της ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις (Παρατήρηση ??), δηλαδή με τρόπο επαναληπτικό: σε κάθε επανάληψη διενεργείται πρώτα εκτίμηση του προσανατολισμού, και στη συνέχεια εκτίμηση της θέσης, με αποτέλεσμα τη σταδιακή μείωση και των δύο. Η σχετική λύση αναλύεται και αιτιολογείται στην ενότητα 4.4.

Ταυτόχρονα σε αυτό το κεφάλαιο κατασκευάζουμε μεθόδους που απευθύνονται σε αισθητήρες που διαθέτουν “μικρό” αριθμό ακτίνων, δηλαδή αισθητήρες που δειγματοληπτούν αραιά το χώρο, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα τη δυσχέρεια εκτίμησης του προσανατολισμού και συνεπώς της θέσης του αισθητήρα και του ρομπότ.

Στην ενότητα 4.5 δοκιμάζουμε εκ νέου την υπόθεση ?? για τις τρεις εκδόσεις της κατασκευασθείσας μεθόδου, και συγκρίνουμε τις επιδόσεις τους με καθιερωμένους και τρέχοντες αλγορίθμους της βιβλιογραφίας. Στην ενότητα 4.6 παρέχουμε κύρια χαρακτηριστικά γνωρίσματα και βασικούς περιορισμούς της κατασκευασθείσας μεθόδους. Η τελευταία ενότητα (4.7) ανακεφαλαιώνει και παρέχει αιτίες για περαιτέρω έρευνα.

## 4.2 Μεθοδολογία ευθυγράμμισης προσανατολισμού

Έστω οι παραδοχές του προβλήματος Η3. Έστω επιπλέον ότι  $\hat{l} = l$ , δηλαδή μόνο ο προσανατολισμός του αισθητήρα πρέπει να εκτιμηθεί. Τότε ας υπολογιστεί η εικονική σάρωση  $S_V$  μέσω δεσμοβολής (raycasting) από την εκτίμηση  $\hat{r}$  στον χάρτη  $M$ . Η εκτίμηση της περιστροφής της εικονικής σάρωσης  $S_V$  σε σχέση με την πραγματική σάρωση  $S_R$  μπορεί να βρεθεί μέσω των μεθόδων που παρουσιάζονται στις ενότητες 4.2.1, 4.2.2, και 4.2.3. Το σφάλμα της εκτίμησης προσανατολισμού μπορεί να μειωθεί περαιτέρω μέσω της μεθόδου που παρουσιάζεται στην ενότητα 4.2.6.

Στα συμφραζόμενα του παρόντος κεφαλαίου, έστω  $\mathcal{F}\{\mathcal{S}\}$  ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{S}\}$  ο αντίστροφός του,  $\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}\}$  ο πρώτος όρος του (υποθέτοντας αριθμηση από το μηδέν),  $c^*$  ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού  $c$ ,  $|c|$  το μέτρο του, και  $i$  η φανταστική μονάδα.

### 4.2.1 Η μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση

Έστω ότι ο χώρος δειγματοληπτείται επαρκώς πυκνά γωνιακά, τότε για  $k, \xi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ :  $k, \xi \in [0, N_s - 1]$ :

$$\begin{aligned} S_V[k] &\simeq S_R[(k - \xi) \mod N_s] \Rightarrow \\ \mathcal{F}\{S_V\}(u) &\simeq e^{-i2\pi\xi u/N_s} \cdot \mathcal{F}\{S_R\}(u) \end{aligned}$$

και, επομένως, αφού  $2\pi \frac{\xi}{N_s} = \xi \frac{2\pi}{N_s} = \xi\gamma$ , όπου  $\gamma$  είναι η διακριτική γωνία του αισθητήρα:

$$\begin{aligned} Q_{S_V, S_R}(u) &\triangleq \frac{\mathcal{F}\{S_V\}^* \cdot \mathcal{F}\{S_R\}}{|\mathcal{F}\{S_V\}| \cdot |\mathcal{F}\{S_R\}|} \\ &\simeq \frac{e^{-i\xi\gamma u} \cdot \mathcal{F}\{S_R\}^* \cdot \mathcal{F}\{S_R\}}{|e^{-i\xi\gamma u} \cdot \mathcal{F}\{S_R\}^*| \cdot |\mathcal{F}\{S_R\}|} \\ &= e^{-i\xi\gamma u} \cdot \frac{\mathcal{F}\{S_R\}^* \cdot \mathcal{F}\{S_R\}}{|\mathcal{F}\{S_R\}| \cdot |\mathcal{F}\{S_R\}|} \\ &= e^{-i\xi\gamma u} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier του  $Q_{S_V, S_R}$  είναι μία Kronecker δ-

συνάρτηση  $q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R} = \mathcal{F}^{-1}\{Q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}\}$  με κέντρο  $\xi$ :

$$\xi = \arg \max_u q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}(u) \quad (4.2)$$

Εάν η διαφορά του προσανατολισμού μεταξύ των στάσεων από τις οποίες ελήφθησαν οι σαρώσεις  $\mathcal{S}_R$  και  $\mathcal{S}_V$  είναι  $\Delta\theta = \theta - \hat{\theta}$ , τότε  $\Delta\theta = \xi\gamma + \phi$ , όπου  $\mod(\Delta\theta, \gamma) = \phi \in [-\frac{\gamma}{2}, +\frac{\gamma}{2}]$ . Τα παραπάνω μάς οδηγούν στη διατύπωση του Λήμματος I:

**Λήμμα I.** Έστω οι παραδοχές του προβλήματος Π3 και  $\hat{l} = l$ . Έστω επίσης ότι (α) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν φέρουν διαταραχές, και (β) ο χάρτης  $M$  αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια. Τότε ενημερώνοντας την εκτίμηση προσανατολισμού  $\hat{\theta}$  σε  $\hat{\theta}'$ :

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + \xi\gamma \quad (4.3)$$

όπου  $\xi$  δίνεται από την εξίσωση (4.2), οδηγεί σε ένα επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού  $\phi$ :

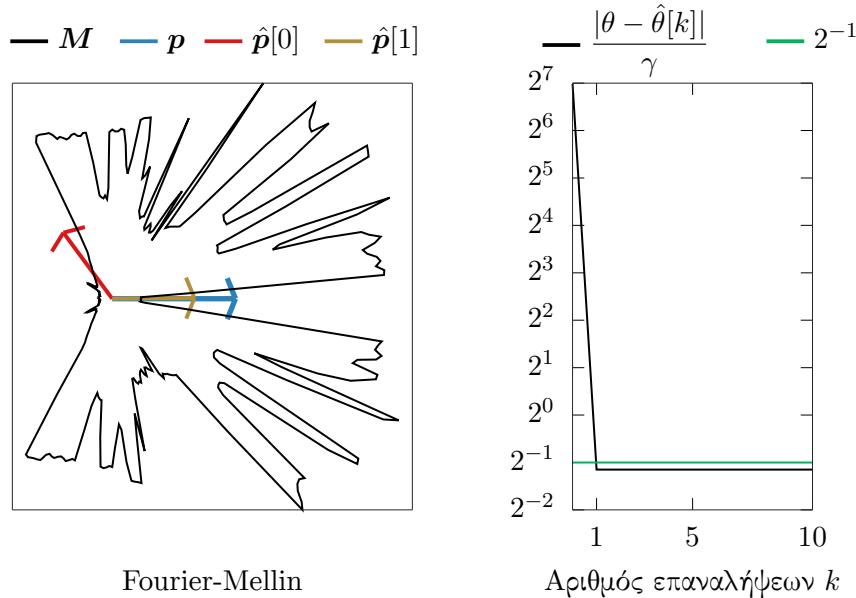
$$|\phi| \leq \frac{\gamma}{2} \quad (4.4)$$

**Επακόλουθο I.** Ο στόχος (‡) επιτυγχάνεται υπό την προϋπόθεση ότι  $|\theta - \hat{\theta}| > \frac{\gamma}{2}$ .

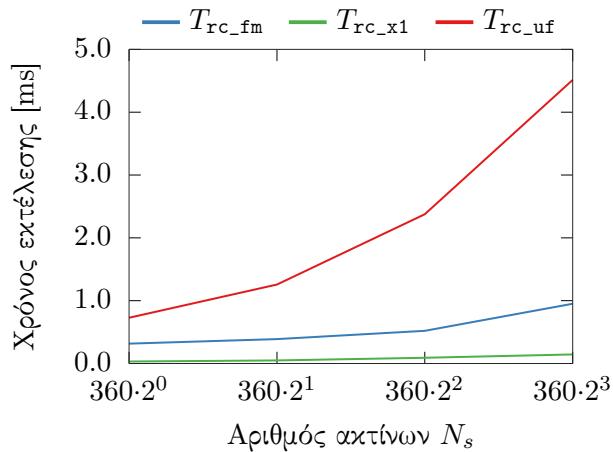
Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $p(x, y, \theta)$  ονομάζεται στο εξής μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση. Στο σχήμα 4.1 απεικονίζεται η αρχική και τελική συνθήκη ευθυγράμμισης προσανατολισμού με εφαρμογή της μεθόδου Fourier-Mellin μίας διάστασης για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων με  $\gamma = 2\pi/360$ , σε ένα μη δομημένο περιβάλλον, του οποίου ο χάρτης το αναπαριστά τέλεια, ενώ οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο. Το σχήμα 4.2 απεικονίζει το μέσο χρόνο εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου σε δέκα εκτελέσεις για αυξανόμενο μέγεθος σαρώσεων  $N_s$ . Ο Αλγόριθμος I παρουσιάζει σε ψευδοχώδικα τη διαδικασία διόρθωσης προσανατολισμού με βάση την εν λόγω μέθοδο.

#### 4.2.2 Η μέθοδος Πρώτων Αρχών

Έστω μία δισδιάστατη σάρωση  $\mathcal{S}$  που έχει ληφθεί από τη στάση  $(x, y, \theta)$  σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων (Ορισμός ??). Έστω ότι το γωνιακό εύρος της  $\mathcal{S}$  είναι  $\lambda = 2\pi$ . Οι



Σχήμα 4.1: Αριστερά: η αρχική  $\hat{p}[0] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[0])$  και τελική  $\hat{p}[1] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[1])$  εκτίμηση στάσης του αισθητήρα σε ένα περιβάλλον με χάρτη  $M$ , για πραγματική στάση  $p(\mathbf{l}, \theta)$ , ως συνέπεια της εφαρμογής της μεθόδου γωνιακής ευθυγράμμισης Fourier-Mellin μίας διάστασης. Δεξιά: το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού ως συνάρτηση της διαχριτικής γωνίας γ του αισθητήρα



Σχήμα 4.2: Ο μέσος χρόνος εκτέλεσης μίας επανάληψης των μεθόδων Fourier-Mellin μίας διάστασης (μπλε), Πρώτων Αρχών (πράσινο), και Προχρούστη (κόκκινο), για δέκα εκτελέσεις, ανά μέγεθος σαρώσεων εισόδου  $N_s$

συντεταγμένες του τελικού σημείου της  $n$ -οστής ακτίνας της  $\mathcal{S}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_s - 1$ , στο σύστημα συντεταγμένων είναι  $(x_n, y_n)$ :

$$x_n - x = d_n \cos\left(\theta + \frac{2\pi n}{N_s} - \pi\right) = -d_n \cos\left(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}\right) \quad (4.5)$$

$$y_n - y = d_n \sin\left(\theta + \frac{2\pi n}{N_s} - \pi\right) = -d_n \sin\left(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}\right) \quad (4.6)$$

---

**Αλγόριθμος I rc\_fm**

---

**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{\mathbf{p}}(x, y, \hat{\theta}), \gamma$ **Output:**  $\hat{\theta}', q_{\max}$ 

- 1:  $q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{Q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}\}$  (εξ. 4.1)
  - 2:  $\xi = \arg \max q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}$
  - 3:  $q_{\max} \leftarrow q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}[\xi] = \max q_{\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_R}$
  - 4:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\theta} + \xi \gamma$
  - 5: **return**  $(\hat{\theta}', q_{\max})$
- 

Εδώ παρατηρούμε ότι  $-(x_n - x)$  και  $(y_n - y)$  είναι αντίστοιχα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής ποσότητας

$$d_n e^{-i(\theta + \frac{2\pi n}{N_s})} = d_n \cos(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) - i \cdot d_n \sin(\theta + \frac{2\pi n}{N_s}) \stackrel{(4.5),(4.6)}{=} -(x_n - x) + i \cdot (y_n - y) \quad (4.7)$$

και, επομένως

$$d_n e^{-i2\pi n/N_s} = e^{i\theta}(-(x_n - x) + i \cdot (y_n - y)) \quad (4.8)$$

Ανθροίζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.8) επί του συνόλου των  $N_s$  ακτίνων λαμβάνουμε τον πρώτο όρο του διακριτού μετασχηματισμού Fourier του σήματος  $\{d_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_s - 1$ ,  $\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}\} = \mathcal{F}\{\mathcal{S}\}[1]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}\} &= \sum_{n=0}^{N_s-1} d_n \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \stackrel{(4.8)}{=} \sum_{n=0}^{N_s-1} e^{i\theta}(-(x_n - x) + i \cdot (y_n - y)) \\ &= e^{i\theta} \sum_{n=0}^{N_s-1} [(x - i \cdot y) + (-x_n + i \cdot y_n)] \\ &= e^{i\theta} N_s (x - i \cdot y) - e^{i\theta} \Delta \end{aligned} \quad (4.9)$$

όπου  $\Delta \triangleq \sum_{n=0}^{N_s-1} (x_n - i \cdot y_n)$ .

Συμβολίζοντας με το γράμμα  $R$  τις ποσότητες που αντιστοιχούν στην πραγματική σάρωση  $\mathcal{S}_R$ , η οποία έχει ληφθεί από την πραγματική στάση του φυσικού αισθητήρα  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$ , και με  $V$  εκείνες που αντιστοιχούν στην εικονική σάρωση  $\mathcal{S}_V$ , η οποία έχει ληφθεί από την εκτίμηση

της στάσης του  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta})$ :

$$\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} = \sum_{n=0}^{N_s-1} d_n^R \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \stackrel{(4.9)}{=} N_s e^{i\theta}(x - i \cdot y) - e^{i\theta} \Delta_R \quad (4.10)$$

$$\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} = \sum_{n=0}^{N_s-1} d_n^V \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \stackrel{(4.9)}{=} N_s e^{i\hat{\theta}}(x - i \cdot y) - e^{i\hat{\theta}} \Delta_V \quad (4.11)$$

Έστω τώρα ότι

$$\begin{aligned} \Delta_R - \Delta_V &= \sum_{n=0}^{N_s-1} (x_n^R - x_n^V) - i \cdot \sum_{n=0}^{N_s-1} (y_n^R - y_n^V) \\ &= N_s(\delta_x - i \cdot \delta_y) \end{aligned} \quad (4.12)$$

όπου

$$\delta_x \triangleq \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} (x_n^R - x_n^V) \quad (4.13)$$

$$\delta_y \triangleq \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} (y_n^R - y_n^V) \quad (4.14)$$

τότε

$$\Delta_V = \Delta_R - N_s(\delta_x - i \cdot \delta_y) \quad (4.15)$$

Ο πρώτος όρος του διαχριτού μετασχηματισμού Fourier του σήματος που αποτελείται από τη διαφορά των δύο σημάτων (4.10) και (4.11) είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} &= \sum_{n=0}^{N_s-1} (d_n^R - d_n^V) \cdot e^{-i2\pi n/N_s} \\ &\stackrel{(4.10),(4.11)}{=} N_s(x - i \cdot y)(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - e^{i\theta} \Delta_R + e^{i\hat{\theta}} \Delta_V \\ &\stackrel{(4.15)}{=} N_s(x - i \cdot y)(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - e^{i\theta} \Delta_R + e^{i\hat{\theta}}(\Delta_R - N_s(\delta_x - i \cdot \delta_y)) \\ &= N_s(x - i \cdot y)(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - \Delta_R(e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \\ &= (e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}})[N_s(x - i \cdot y) - \Delta_R] - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \\ &\stackrel{(4.10)}{=} (e^{i\theta} - e^{i\hat{\theta}}) \frac{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}}{e^{i\theta}} - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \\ &= (1 - e^{-i(\theta - \hat{\theta})}) \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} &= -e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - N_s e^{i\hat{\theta}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \\ e^{-i(\theta-\hat{\theta})} &= \frac{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}}{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}} - \frac{N_s e^{i\hat{\theta}}}{\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}}(\delta_x - i \cdot \delta_y) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Χρησιμοποιώντας την πολική αναπαράσταση  $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|e^{i\angle \mathbf{A}}$ :

$$e^{-i(\theta-\hat{\theta})} = \frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}|}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}|} e^{-i(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\})} - \frac{e^{-i(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \hat{\theta})}}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}|}(N_s \delta_x - i \cdot N_s \delta_y) \quad (4.17)$$

Λόγω του γεγονότος ότι ο προσανατολισμός  $\theta$  του αισθητήρα είναι άγνωστος, τα τελικά σημεία  $\{(x_n^R, y_n^R)\}$  καθίστανται ομοίως άγνωστα, και το ίδιο ισχύει συνεπώς και για τις ποσότητες  $\delta_x, \delta_y$ . Προκειμένου να αποκτήσουμε μια αρχική διαίσθηση ως προς τα μέτρα των τελευταίων κάνουμε την παρατήρηση ότι, εξ ορισμού, οι ποσότητες  $N_s \delta_x$  και  $N_s \delta_y$  ποσοτικοποιούν τη διαφορά της προσέγγισης των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων επί των καμπύλων που ορίζονται από τα τελικά σημεία των δύο σαρώσεων στους δύο κύριους άξονες  $x$  και  $y$ . Η προσέγγιση αυτή οφείλεται στο πεπερασμένο μέγεθος των εκπεμπόμενων ακτίνων  $N_s$ . Επομένως υπό τις υποθέσεις ότι (α) ο χάρτης του περιβάλλοντος είναι τέλεια αναπαράστασή του και (β) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν επηρεάζονται από διαταραχές: καθώς  $N_s \rightarrow \infty$ ,  $N_s \delta_x, N_s \delta_y \rightarrow 0$ , τα οποία με τη σειρά τους σημαίνουν λόγω της εξίσωσης (4.17) ότι  $\frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}|}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\}|} \rightarrow 1$  και  $\theta - \hat{\theta} \rightarrow \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}$ . Η παραπάνω ανάλυση μάς οδηγεί στη διατύπωση του Λήμματος II:

**Λήμμα II.** Έστω οι παραδοχές του προβλήματος Π3 και  $\hat{l} = l$ . Έστω επίσης ότι (α) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν φέρουν διαταραχές, και (β) ο χάρτης  $M$  αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια. Τότε ενημερώνοντας την εκτίμηση προσανατολισμού σε  $\hat{\theta}'$ :

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_R\} - \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} \quad (4.18)$$

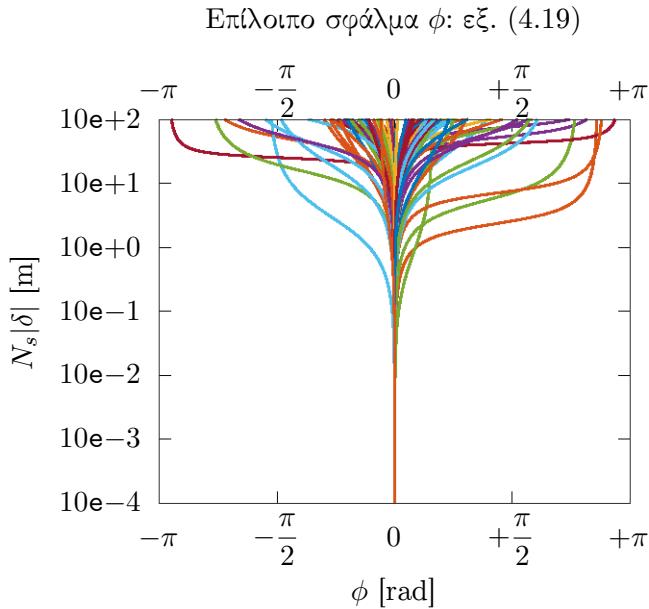
όπου  $\mathcal{F}_1\{\cdot\} = \mathcal{F}\{\cdot\}[1]$ , οδηγεί σε ένα επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού  $\phi$ :

$$\phi = \angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\} - \tan^{-1} \frac{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \sin(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \sin(\hat{\theta} + \angle \delta)}{|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}| \cos(\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}) - N_s |\delta| \cos(\hat{\theta} + \angle \delta)} \quad (4.19)$$

όπου  $\delta = \delta_x - i \cdot \delta_y$ .

Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα ??.

**Επακόλουθο II.** Το μέτρο του σφάλματος  $|\phi|$  είναι αντιστρόφως ανάλογο του αριθμού των ακτίνων  $N_s$  που εκπέμπει ο αισθητήρας στην περίπτωση που τόσο η πραγματική μέτρηση  $S_R$  όσο και η εικονική σάφωση  $S_V$  δεν διαταράσσονται από θόρυβο (σχήμα 4.3).

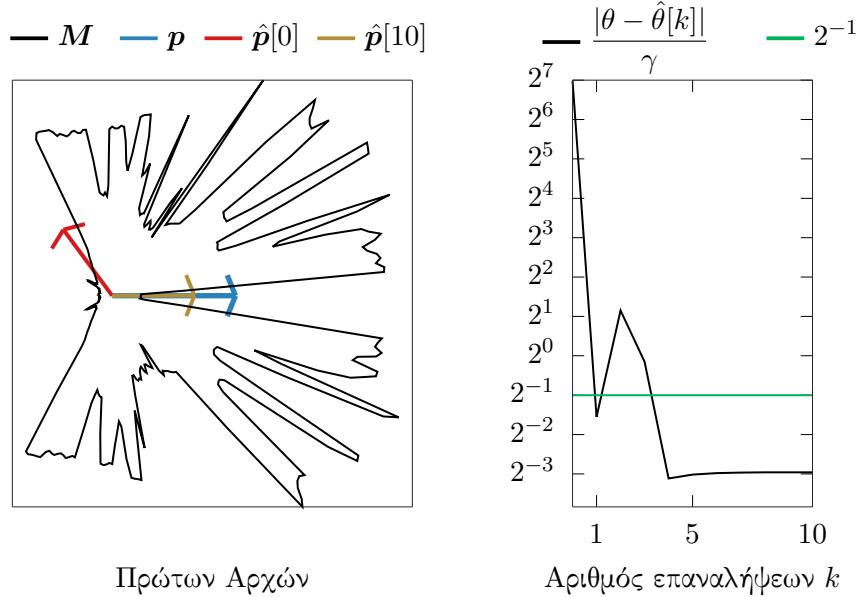


Σχήμα 4.3: Θεωρητικές τιμές του επίλοιπου σφάλματος  $\phi$  (εξ. 4.19) σε εκατό προσομοιώσεις για μεταβλητές τιμές  $N_s |\delta|$ . Το μέτρο  $|\mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}|$  είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα  $[0.0, 200.0]$ , το μέγεθος  $N_s |\delta|$  στο διάστημα  $[10^{-4}, 10^{+2}]$ , και τα ορίσματα  $\angle \mathcal{F}_1\{\mathcal{S}_V\}$ ,  $\angle \delta$  στο  $[-\pi, \pi)$ . Το επίλοιπο σφάλμα  $\phi \rightarrow 0$  καθώς  $N_s \rightarrow \infty \Rightarrow N_s |\delta| \rightarrow 0$

Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $p(x, y, \theta)$  ονομάζεται στο εξής μέθοδος Πρώτων Αρχών. Στο σχήμα 4.4 απεικονίζεται η αρχική και τελική συνθήκη ευθυγράμμισης προσανατολισμού με εφαρμογή της μεθόδου Πρώτων αρχών για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων με  $\gamma = 2\pi/360$ , υπό τις ίδιες συνθήκες διεξαγωγής μείωσης του σφάλματος προσανατολισμού με αυτές που παρουσιάζονται στο σχήμα 4.1. Το σχήμα 4.2 απεικονίζει το μέσο χρόνο εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου σε δέκα εκτελέσεις για αυξανόμενο μέγεθος σαρώσεων  $N_s$ . Ο Αλγόριθμος II παρουσιάζει σε ψευδοχώδικα τη διαδικασία διόρθωσης προσανατολισμού με βάση την εν λόγω μέθοδο.

#### 4.2.3 Η μέθοδος του Προκρούστη

Έστω ότι η προβολή των τελικών σημείων των ακτίνων της σάφωσης  $S_V$  γύρω από τη στάση  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta})$  παράγει το σύνολο σημείων  $P_V$  στο οριζόντιο επίπεδο. Έστω ότι η ίδια



Σχήμα 4.4: Αριστερά: η αρχική  $\hat{\mathbf{p}}[0] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[0])$  και τελική  $\hat{\mathbf{p}}[1] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[1])$  εκτίμηση στάσης του αισθητήρα σε ένα περιβάλλον με χάρτη  $\mathbf{M}$ , για πραγματική στάση  $\mathbf{p}(\mathbf{l}, \theta)$ , ως συνέπεια της εφαρμογής της μεθόδου γωνιακής ευθυγράμμισης Πρώτων Αρχών. Δεξιά: το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού ως συνάρτηση της διακριτικής γωνίας γ του αισθητήρα

---

### Αλγόριθμος II rc\_x1

---

**Input:**  $\mathcal{S}_R$ ,  $\mathcal{S}_V$ ,  $\hat{\mathbf{p}}(x, y, \hat{\theta})$

**Output:**  $\hat{\theta}'$

- 1:  $\mathbf{R} = \mathcal{F}\{\mathcal{S}_R\}[1]$
  - 2:  $\mathbf{V} = \mathcal{F}\{\mathcal{S}_V\}[1]$
  - 3:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\theta} + \arg(\mathbf{R}) - \arg(\mathbf{V})$
  - 4: **return**  $\hat{\theta}'$
- 

προβολή για τη σάρωση  $\mathcal{S}_R$  ως προς τη στάση  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$  παράγει το σύνολο  $\mathbf{P}_R$ . Η περιστροφή της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  που ευθυγραμμίζει βέλτιστα το σύνολο σημείων  $\mathbf{P}_V$  σε σχέση με το  $\mathbf{P}_R$  μπορεί να βρεθεί από τη λύση του Ορθογώνιου Προσκρούστειου προβλήματος [Sch66] για πίνακες εισόδου  $\mathbf{P}_V$  και  $\mathbf{P}_R$ . Στην περίπτωση που ο πίνακας μετασχηματισμού περιορίζεται στο να έχει τη δομή πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}$ :  $\det(\mathbf{R}) = 1$ , το πρόβλημα ευθυγράμμισης ονομάζεται Περιορισμένο Ορθογώνιο Προσκρούστειο πρόβλημα.

Σε αυτή την ενότητα αναζητούμε την λύση αυτού του τελευταίου προβλήματος ως μέσο επίλυσης του προβλήματος Π3 δεδομένου ότι  $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l}$ , διότι ο περιορισμός του πίνακα μετασχηματισμού σε πίνακα περιστροφής δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού της γωνίας περιστροφής της εκτίμησης στάσης από την οποία το εικονικό διάνυσμα σαρώσεων εμφανίζει τη βέλτιστη

ευθυγράμμιση με το πραγματικό διάνυσμα  $S_R$ . Η λύση του Περιορισμένου Ορθογώνιου Προσκρούστειου προβλήματος δίνεται στο [Ume91] και περιγράφεται παρακάτω.

Δεδομένου ότι στα συμφραζόμενα του προβλήματος ΙΙ3 η θέση  $\mathbf{l}$  είναι άγνωστη, τα τελικά σημεία  $\mathbf{P}_R$  και  $\mathbf{P}_V$  των σαρώσεων  $S_R$  και  $S_V$  λαμβάνονται με την προβολή των μετρήσεών τους στο επίπεδο  $x - y$  σύμφωνα με το τοπικό σύστημα αναφοράς της κάθεμίας, δηλαδή σαν να είχε ληφθεί η κάθε μιά από το  $O(0, 0, 0)$ . Ο πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  που ευθυγραμμίζει βέλτιστα το σύνολο  $\mathbf{P}_V$  με το  $\mathbf{P}_R$  είναι ο πίνακας που ελαχιστοποιεί την απόκλιση των περιεστραμμένων σημείων  $\mathbf{R}\mathbf{P}_V$  από το  $\mathbf{P}_R$ :

$$\arg \min_{\mathbf{R}} \|\mathbf{P}_R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_V\|_F^2$$

όπου  $\|\mathbf{A}\|_F = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{1/2}$  δηλώνει το μέτρο Frobenius του πίνακα πραγματικών τιμών  $\mathbf{A}$ . Έστω ότι ο τελεστής  $\text{tr}(\mathbf{A})$  δηλώνει το ίχνος του πίνακα  $\mathbf{A}$ . Τότε

$$\|\mathbf{P}_R - \mathbf{R}\mathbf{P}_V\|_F^2 = \text{tr}(\mathbf{P}_R^\top \mathbf{P}_R + \mathbf{P}_V^\top \mathbf{P}_V) - 2 \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R \mathbf{P}_V^\top) \quad (4.20)$$

Δεδομένου ότι μόνο ο δεύτερος όρος της δεξιάς πλευράς εξαρτάται από τον πίνακα  $\mathbf{R}$ , για την ελαχιστοποίηση της (4.20) ως προς  $\mathbf{R}$  αρκεί να βρεθεί ο πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  που μεγιστοποιεί το ίχνος  $\text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_V \mathbf{P}_R^\top)$ . Ο βέλτιστος πίνακας  $\mathbf{R}$  δίνεται από το Λήμμα III:

**Λήμμα III.** Έστω  $\mathbf{P}_R$  και  $\mathbf{P}_V$  πίνακες διαστάσεων  $2 \times N_s$ ,  $\mathbf{R}$  πίνακας διαστάσεων  $2 \times 2$ , και  $\mathbf{UDV}^\top$  η αποσύνθεση του  $\mathbf{P}_R \mathbf{P}_V^\top$  σε ιδιάζουσες τιμές (Singular Value Decomposition—SVD). Τότε ο πίνακας  $\mathbf{R}$  που ελαχιστοποιεί το μέτρο  $\|\mathbf{P}_R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_V\|_F^2$  δίνεται από τη σχέση  $\mathbf{R} = \mathbf{USV}^\top$ , όπου  $\mathbf{S} = \text{diag}(1, \det(\mathbf{UV}))$ .

**Επακόλουθο III.** Η τιμή του μέγιστου ίχνους  $T(\mathbf{P}_R, \mathbf{P}_V) \triangleq \max \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R \mathbf{P}_V^\top)$  είναι

$$\max \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R \mathbf{P}_V^\top) = \text{tr}(\mathbf{DS}) \quad (4.21)$$

Το Λήμμα III παρέχει τον βέλτιστο πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}$  υπό την προϋπόθεση ότι τόσο το σύνολο  $\mathbf{P}_R$  όσο και το  $\mathbf{P}_V$  είναι γνωστά. Ωστόσο, στα συμφραζόμενα του προβλήματος ΙΙ3 τα τελικά σημεία  $\mathbf{P}_R$  υπολογίζονται από έναν αυθαίρετο προσανατολισμό επειδή ο επιθυμητός προσανατολισμός είναι θεμελιωδώς άγνωστος. Επομένως ο υπολογισμός του πίνακα  $\mathbf{R}$  και

η εξαγωγή του σχετικού προσανατολισμού του  $\mathbf{P}_V$  σε σχέση με το  $\mathbf{P}_R$  από τον πίνακα  $\mathbf{R}$  σε ένα βήμα είναι αδύνατη. Αυτό που μπορεί να γίνει για την εκτίμηση του προσανατολισμού της στάσης  $\mathbf{p}$  ως προς τον προσανατολισμό της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  είναι το εξής. Υπολογίζεται το γινόμενο  $\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top$  σε  $O(N_s^2)$ , η αποσύνθεσή του σε ιδιάζουσες τιμές σε  $O(1)$ , καταγράφεται η τιμή του ίχνους  $\text{tr}(\mathbf{DS})$  σε  $O(1)$ , μετατοπίζεται ο πίνακας  $\mathbf{P}_V$  κατά στήλες προς τα αριστερά μία φορά, και επαναλαμβάνεται η διαδικασία  $N_s - 1$  φορές. Έστω ότι η επανάληψη  $\psi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  καταγράφει το μέγιστο ίχνος: τότε η περιστροφή της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  κατά  $\psi$  μεγιστοποιεί το ίχνος  $\text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{P}_R\mathbf{P}_V^\top)$  και ελαχιστοποιεί το μέτρο του σφάλματος ευθυγράμμισης (4.20) για μία δεδομένη διακριτική γωνία  $\gamma$ . Η παραπάνω διαδικασία αποδίδει τη βέλτιστη περιστροφή επειδή το ίχνος  $\text{tr}(\mathbf{DS})$  ουσιαστικά αναλαμβάνει το ρόλο ενός μέτρου ευθυγράμμισης μεταξύ των συνόλων σημείων  $\mathbf{P}_V$  και  $\mathbf{P}_R$ .

Η παραπάνω διαδικασία καταγραφής  $N_s$  ιχνών μπορεί να υπολογιστεί είτε με ευθύ τρόπο, πολυπλοκότητας  $O(N_s^3)$ , είτε μέσω με της μεθόδου που παρουσιάζεται στο [DBH15] με σημαντικά μειωμένη πολυπλοκότητα  $O(N_s \log N_s)$ . Η μέθοδος αυτή θα αναφέρεται στο εξής ως μέθοδος DBH και περιγράφεται παρακάτω.

Έστω  $\tilde{\mathbf{A}}$  ο πίνακας  $\mathbf{A}$  με αντίστροφη σειρά στηλών,  $\mathbf{P}_R = [\mathbf{p}_R^x; \mathbf{p}_R^y]$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_V = [\mathbf{p}_V^x; \mathbf{p}_V^y]$ . Έστω επίσης ότι ο τελεστής  $\odot$  υποδηλώνει τον πολλαπλασιασμό κατά στοιχείο. Τότε υπολογίζονται τέσσερα διανύσματα μεγέθους  $N_s$ :

$$\mathbf{m}_{11} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^x\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^x\}\}$$

$$\mathbf{m}_{12} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^y\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^x\}\}$$

$$\mathbf{m}_{21} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^x\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^y\}\}$$

$$\mathbf{m}_{22} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^y\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^y\}\}$$

Μετά τον υπολογισμό των διανυσμάτων  $\mathbf{m}_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2$ , υπολογίζονται  $N_s$  πίνακες  $\mathbf{M}_j$ , μεγέθους  $2 \times 2$ , σύμφωνα με:

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11}^j & \mathbf{m}_{12}^j \\ \mathbf{m}_{21}^j & \mathbf{m}_{22}^j \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

όπου  $j = 0, \dots, N - 1$ , και  $\mathbf{m}_{kl}^j$  είναι το  $j$ -οστό στοιχείο του διανύσματος  $\mathbf{m}_{kl}$ . Ο πίνακας

$\mathbf{M}_j$  είναι ίσος με τον πίνακα  $\mathbf{P}_R(\mathbf{P}_V^{N_s-1-j})^\top$ , όπου ο συμβολισμός  $\mathbf{A}^k$  δηλώνει τον πίνακα  $\mathbf{A}$  του οποίου οι στήλες έχουν μετατοπιστεί  $k$  φορές προς τα αριστερά. Η απόδειξη χρησιμοποιεί το Θεώρημα Κυκλικής Συνέλιξης του DFT και παραλείπεται.

Αφού υπολογιστούν και σχηματιστούν όλοι οι  $N_s \mathbf{M}_j$  πίνακες, κάθε ένας αποσυντίθεται σε ιδιάζουσες τιμές. Το ίχνος κάθε πίνακα  $\mathbf{R}_j \mathbf{M}_j$  καταγράφεται με την εφαρμογή του Λήμματος III και του Επακόλουθου III. Έστω ότι το μέγιστο ίχνος καταγράφεται για τον δείκτη  $J$ , τότε η περιστροφή της στάσης  $\hat{\mathbf{p}}$  κατά  $(N_s - 1 - J)\gamma = \psi\gamma$  επιτυγχάνει το ίδιο αποτέλεσμα με την ευθεία μέθοδο υψηλότερης πολυπλοκότητας για μία δεδομένη διαχριτική γωνία  $\gamma$ . Εάν η διαφορά του προσανατολισμού μεταξύ των στάσεων από τις οποίες ελήφθησαν οι σφρώσεις  $\mathcal{S}_R$  και  $\mathcal{S}_V$  είναι  $\Delta\theta = \theta - \hat{\theta}$ , τότε  $\Delta\theta = (N_s - 1 - J)\gamma + \phi$ , όπου  $\mod(\Delta\theta, \gamma) = \phi \in [-\frac{\gamma}{2}, +\frac{\gamma}{2}]$ . Τα παραπάνω μας οδηγούν στη διατύπωση του Λήμματος IV:

**Λήμμα IV.** Έστω οι παραδοχές του προβλήματος ΙΙΙ και  $\hat{l} = l$ . Έστω επίσης ότι (α) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν φέρουν διαταραχές, και (β) ο χάρτης  $\mathbf{M}$  αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια. Τότε ενημερώνοντας την εκτίμηση προσανατολισμού σε  $\hat{\theta}'$ :

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + \psi\gamma \quad (4.23)$$

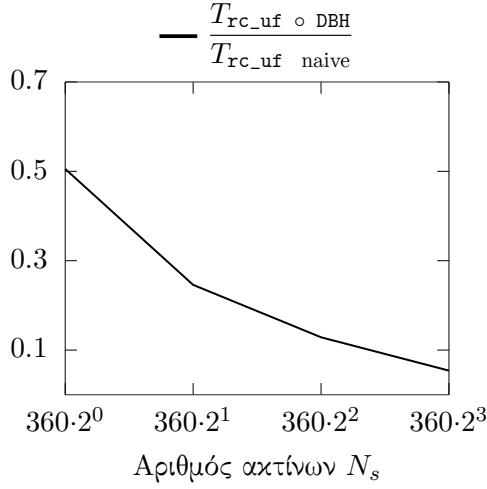
όπου  $\psi$  δίνεται από τη γραμμή 5 του Αλγορίθμου III, οδηγεί σε ένα επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού  $\phi$ :

$$|\phi| \leq \frac{\gamma}{2} \quad (4.24)$$

**Επακόλουθο IV.** Ο στόχος (\*) επιτυγχάνεται υπό την προϋπόθεση ότι  $|\theta - \hat{\theta}| > \frac{\gamma}{2}$ .

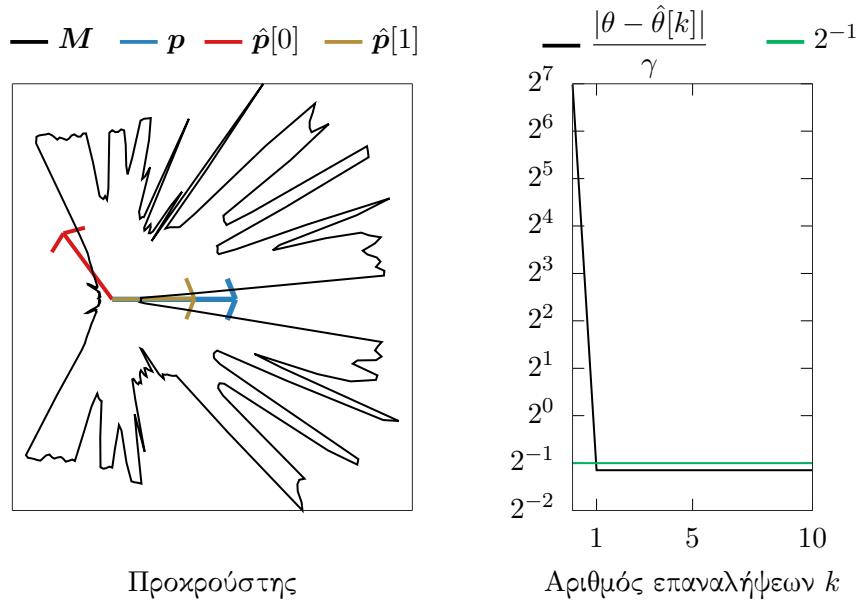
Η παραπάνω μέθοδος εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $\mathbf{p}(x, y, \theta)$  ονομάζεται στο εξής μέθοδος του Προκρούστη. Στο σχήμα 4.5 απεικονίζεται το κλάσμα του χρόνου εκτέλεσης της εφαρμογής της μεθόδου DBH έναντι της αφελούς μεθόδου για αύξοντες αριθμούς εκπεμπών από τον αισθητήρα σάρωσης ακτίνων  $N_s$ .

Στο σχήμα 4.6 απεικονίζεται η αρχική και τελική συνυθήκη ευθυγράμμισης προσανατολισμού με εφαρμογή της μεθόδου Προκρούστη για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σφρώσεων με  $\gamma = 2\pi/360$ , στο ίδιο μη δομημένο περιβάλλον με αυτό των σχημάτων 4.1 και 4.4, του οποίου ο χάρτης το αναπαριστά τέλεια. Οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν διαταράσ-



Σχήμα 4.5: Το χλάσμα του χρόνου εκτέλεσης της μεθόδου ευθυγράμμισης Προκρούστη με την εφαρμογή της μεθόδου DBH προς το χρόνο εκτέλεσης χωρίς την εφαρμογή της, για αυξανόμενο αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων του αισθητήρα σάρωσης

σονται από θόρυβο. Το σχήμα 4.2 απεικονίζει το μέσο χρόνο εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου σε δέκα εκτελέσεις για αυξανόμενο μέγεθος σαρώσεων  $N_s$ . Ο Αλγόριθμος III παρουσιάζει σε ψευδοχώδικα τη διαδικασία διόρθωσης προσανατολισμού με βάση την εν λόγω μέθοδο. Ο Αλγόριθμος IV παρουσιάζει σε ψευδοχώδικα τη μέθοδο DBH.



Σχήμα 4.6: Αριστερά: η αρχική  $\hat{p}[0] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[0])$  και τελική  $\hat{p}[1] \equiv (\mathbf{l}, \hat{\theta}[1])$  εκτίμηση στάσης του αισθητήρα σε ένα περιβάλλον με χάρτη  $M$ , για πραγματική στάση  $p(\mathbf{l}, \theta)$ , ως συνέπεια της εφαρμογής της μεθόδου γωνιακής ευθυγράμμισης Προκρούστη. Δεξιά: το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού ως συνάρτηση της διαχριτικής γωνίας γ του αισθητήρα

---

**Αλγόριθμος III rc\_uf**

---

**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{\mathbf{p}}(x, y, \hat{\theta}), \gamma$ **Output:**  $\hat{\theta}', T$ 

- 1:  $\mathbf{P}_R \leftarrow \text{project}(\mathcal{S}_R, (0, 0, 0))$
  - 2:  $\mathbf{P}_V \leftarrow \text{project}(\mathcal{S}_V, (0, 0, 0))$
  - 3:  $(J, T) \leftarrow \text{rc_uf_core}(\mathbf{P}_R, \mathbf{P}_V)$  (Αλγόριθμος IV)
  - 4:  $N_s = 2\pi/\gamma$
  - 5:  $\psi = N_s - 1 - J$
  - 6:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\theta} + \psi\gamma$
  - 7: **return**  $(\hat{\theta}', T)$
- 

---

**Αλγόριθμος IV rc\_uf\_core**

---

**Input:**  $\mathbf{P}_R, \mathbf{P}_V$ **Output:**  $J, T(\mathbf{P}_R, \mathbf{P}_V)$ 

- 1: **reverse**( $\mathbf{P}_V$ )
  - 2:  $\mathbf{p}_R^x \leftarrow \text{first row of } \mathbf{P}_R$
  - 3:  $\mathbf{p}_R^y \leftarrow \text{second row of } \mathbf{P}_R$
  - 4:  $\mathbf{p}_V^x \leftarrow \text{first row of } \mathbf{P}_V$
  - 5:  $\mathbf{p}_V^y \leftarrow \text{second row of } \mathbf{P}_V$
  - 6:  $\mathbf{m}_{11} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^x\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^x\}\}$
  - 7:  $\mathbf{m}_{12} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^y\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^x\}\}$
  - 8:  $\mathbf{m}_{21} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^x\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^y\}\}$
  - 9:  $\mathbf{m}_{22} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{p}_R^y\} \odot \mathcal{F}\{\mathbf{p}_V^y\}\}$
  - 10:  $\mathbf{T} \leftarrow \{\emptyset\}$
  - 11: **for**  $j = 0 : N_s - 1$  **do**
  - 12:      $\mathbf{M}_j \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11}(j) & \mathbf{m}_{12}(j) \\ \mathbf{m}_{21}(j) & \mathbf{m}_{22}(j) \end{bmatrix}$
  - 13:      $(\mathbf{U}, \mathbf{D}, \mathbf{V}) \leftarrow \text{SVD}(\mathbf{M}_j)$
  - 14:     append  $\text{trace}(\mathbf{D} \cdot \text{diag}(1, \det(\mathbf{U}\mathbf{V})))$  to  $\mathbf{T}$
  - 15: **end for**
  - 16: **reverse**( $\mathbf{T}$ )
  - 17:  $J \leftarrow \arg \max \mathbf{T}$
  - 18:  $T_{\max} \leftarrow \max\{\mathbf{T}\} = \mathbf{T}[J]$
  - 19: **return**  $(J, T_{\max})$
-

#### 4.2.4 Η κλίνη της διακριτικής γωνίας του αισθητήρα

Η μέθοδος Fourier-Mellin σε μία διάσταση (ενότητα 4.2.1) και η μέθοδος του Προκρούστη (ενότητα 4.2.3), σε αντίθεση με την μέθοδο Πρώτων Αρχών (ενότητα 4.2.2), είναι διακριτές μέθοδοι εκτίμησης υπό την έννοια ότι λειτουργούν μειώνοντας την αρχική εκτίμηση προσανατολισμού κατά ακέραια πολλαπλάσια της αμετάβλητης διακριτικής γωνίας γ, με αποτέλεσμα αυθαίρετα επίλοιπα σφάλματα προσανατολισμού φ όπως ορίζονται από τα Λήμματα I και IV. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να ιδωθεί ως μία έτερη Προκρούστεια ιδιότητα,<sup>1</sup> που αφορά σε δύο μεθόδους αυτή τη φορά, υπό την έννοια ότι το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού  $|\theta - \hat{\theta}| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  τεμαχίζεται στην κλίνη  $K\gamma, K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , στη βάση διακριτής και εξωτερικής λογικής:—το αρχικό σφάλμα προσαρμόζεται στη μέθοδο, αντί η μέθοδος να είναι προσαρμόσιμη στο αρχικό σφάλμα.

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τα Λήμματα I, II, και IV τα τελικά σφάλματα προσανατολισμού των τριών ως άνω μεθόδων εξαρτώνται από τον αμετάβλητο αριθμό των εκπεμπόμενων από τον φυσικό αισθητήρα απόστασης ακτίνων, ή, ισοδύναμα, από την αμετάβλητη διακριτική του γωνία γ. Το πεπερασμένο και αμετάβλητο των εκπεμπόμενων ακτίνων του φυσικού αισθητήρα, σε συνδυασμό με το αυθαίρετο του ρυθμού των αλλαγών του περιβάλλοντος (σχήμα ??), μπορούν να οδηγήσουν σε υποδειγματοληψία τμημάτων του περιβάλλοντος ή/και του χάρτη του, με συνέπεια τη μη βέλτιστη σύγκλιση της εκτίμησης προσανατολισμού.

Οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις αφορούν στα σφάλματα στάσης της συνολικής μεθόδου ευθυγράμμισης, όχι μόνο λόγω των μη επιλύσιμων σφαλμάτων προσανατολισμού αυτών καθευατά, αλλά και λόγω της διάδοσής τους στην διαδεχόμενη της μεθόδου ευθυγράμμισης προσανατολισμού μέθοδο ευθυγράμμισης της ψέσης (Παρατήρηση ??): λόγω σύζευξης των δύο ειδών ευθυγράμμισης, η μέθοδος εκτίμησης ψέσης απαιτεί επί της αρχής μηδενικά σφάλματα προσανατολισμού. Κατ' ελάχιστον, όμως, στην περίπτωση των δύο ως άνω Προκρούστειων μεθόδων, το τελικό σφάλμα προσανατολισμού τους μπορεί να έχει τιμή έως και  $\gamma/2$ . Για την επίλυση αυτού του προβλήματος εξετάζουμε δύο υποψήφιες μεθόδους, οι οποίες παρουσιάζονται στις επόμενες δύο ενότητες.

<sup>1</sup>Στη μυθολογία ο Πολυπήμων, γνωστότερος ως Προκρούστης, ήταν ένας απαγωγέας ξένων, και μάστιγα της Ιεράς Οδού της Αττικής. Αφού φιλοξενούσε τα θύματά του προστέροντάς τούς ένα πλούσιοπάροχο δείπνο, τα προσκαλούσε να ξαπλώσουν σε ένα κρεβάτι διαστάσεων τέτοιων που το ύψος του θύματος καλείτο να προσαρμοστεί στο μήκος του κρεβατιού, είτε μέσω τεμαχισμού του σώματός του, είτε μέσω τάνυσής του. Ο Πολυπήμων είχε την ατυχία να απαγάγει τον Θησέα, ο οποίος, άρτι αφιχθείς από τη δολοφονία του Μινώταυρου, τον τιμώρησε χρησιμοποιώντας την τεχνική του εναντίον τού.

#### 4.2.5 Η μέθοδος του Πιτυοκάμπη Σίνι

Προτού εισάγουμε τη μέθοδο που ελαττώνει τα σφάλματα εκτίμησης προσανατολισμού που προτείνουμε, πρέπει να εξετάσουμε το λόγο για την πολυπλοκότητά και την επιτυχία της σε σχέση με την αφελή μέθοδο επιχείρησης ελάττωσης του σφάλματος εκτίμησης του προσανατολισμού, η οποία παρουσιάζεται στην παρούσα ενότητα.

Δεδομένων ότι

- το τελικό σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού των τριών ως άνω μεθόδων είναι αντιστρόφως ανάλογο του αριθμού εκπεμπομένων ακτίνων  $N_s$
- ο τελευταίος είναι αμετάβλητος όσο αφορά στον φυσικό αισθητήρα αποστάσεων (με την έννοια ότι δεν μπορεί να προσδώσει περισσότερες μετρήσεις από  $N_s = 2\pi/\gamma$ )
- ο τελευταίος είναι μεταβλητός όσο αφορά στον εικονικό αισθητήρα αποστάσεων (με την έννοια ότι, εφόσον οι εικονικές σαρώσεις είναι υπολογιστέες μέσω του χάρτη, μπορεί να υπολογιστεί ένας αυθαίρετος αριθμός εικονικών ακτίνων εντός του)

ένας αφελής τρόπος επίλυσης του προβλήματος ελάττωσης του σφάλματος προσανατολισμού συνίσταται στην αύξηση των εκπεμπόμενων ακτίνων

- του φυσικού αισθητήρα με την παρεμβολή των τιμών των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης
- του εικονικού αισθητήρα με την δεσμοβολή ισάριθμων ακτίνων της πραγματικής σάρωσης εντός του χάρτη  $M$

Σε αυτή την περίπτωση η αύξηση του αριθμού των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης μέσω παρεμβολής γίνεται με διχοτόμηση όλων των  $N_s$  γωνιών μεταξύ γειτονικών ακτίνων, και εισαγωγή ακτίνων σε γωνίες  $n\gamma + \gamma/2$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_s - 1$ , των οποίων η αναφερόμενη απόσταση τίθεται σε  $\mathcal{S}_R'^{\text{interp}}[n] = \frac{1}{2}(\mathcal{S}_R[n] + \mathcal{S}_R[n + 1])$ , όπου  $\mathcal{S}_R[N_s] = \mathcal{S}_R[0]$ . Με αυτόν τον τρόπο η προκύπτουσα διακριτική γωνία καθίσταται  $\gamma' = \gamma/2$ . Αυτή διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί περαιτέρω, έως ότου η τελική διακριτική γωνία φτάσει σε ένα αποδεκτά χαμηλό επίπεδο  $\gamma^{(\nu)} = \gamma/2^\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Όσο αφορά στην εικονική σάρωση, δεδομένου ότι παράγεται από το χάρτη, δεν απαιτεί τη χρήση παρεμβολής—ο αριθμός των απαιτούμενων εικονικών ακτίνων  $N'_s$  καθορίζεται από το μέγεθος της πραγματικής σάρωσης:  $N'_s = 2^\nu N_s$ . Λόγω

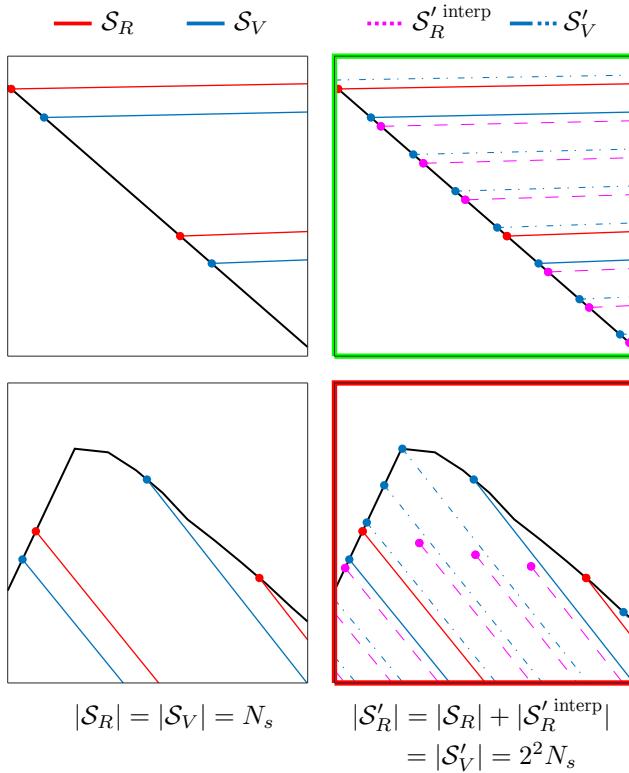
της χρήσης της τεχνικής διχοτόμησης ακτίνων ονομάζουμε αυτή τη μέθοδο ως μέθοδο του Πιτυοκάμπτη Σίνι.<sup>2</sup>

**Παρατήρηση I.** Κατά τη διάρκεια αυτής της μεθόδου ελάττωσης του σφάλματος προσανατολισμού η πραγματική σάρωση και ο χάρτης δειγματοληπτούνται με ρυθμό δειγματοληψίας  $2^N$ , με αποτέλεσμα μία πραγματική σάρωση και μία εικονική σάρωση, αποτελούμενες από  $2^N N_s$  ακτίνες. Η διόρθωση προσανατολισμού εκτελείται μία φορά, και έχει ως αποτέλεσμα μία εκτίμηση προσανατολισμού.

Στο σχήμα 4.7 απεικονίζεται μία μεγέθυνση των δύο περιοχών του σχήματος ?? που περικλείονται σε κόκκινα και πράσινα πλαίσια. Η παραπάνω μεθοδολογία υπερδειγματοληψίας προσομοιώνει τέλεια τις επιπρόσθετες αποστάσεις που θα λάμβανε ένας αισθητήρας με  $2^N N_s$  ακτίνες σε σχέση με έναν αισθητήρα  $N_s$  ακτίνων σε γραμμικά τμήματα του περιβάλλοντος (επάνω σειρά). Όμως, σε μη γραμμικά ή απότομα μεταβαλλόμενα τμήματα του περιβάλλοντος (κάτω σειρά), η μέθοδος παρεμβολής αστοχεί στην προσομοίωση των επιπρόσθετων αποστάσεων λόγω εισαγωγής σφαλμάτων απόστασης που οφείλονται στην επινόηση τεχνητών μετρήσεων. Το μέγεθος αυτών των σφαλμάτων εξαρτάται από το μέγεθος της διακριτικής γωνίας του αισθητήρα, τον ρυθμό υπερδειγματοληψίας, και το περιβάλλον ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

Αυτό σημαίνει ότι η εισαγωγή παρεμβαλλόμενων ακτίνων έχει το αμετάβλητο και ακούσιο αποτέλεσμα η λύση να εισάγει τα δικά της σφάλματα στην επιζητούμενη εκτίμηση. Επιπλέον, αυτό το σφάλμα δεν μπορεί να ελεγχθεί, και, κατά συνέπεια, είναι αναγκαία εναλλακτική προσέγγιση λύσης του προβλήματος. Για του λόγου το αληθές, στο σχήμα 4.8 εκτίθεται το μέγεθος, η τυχαιότητα, και η αστάθεια αυτών των σφαλμάτων. Όπως και πριν απεικονίζονται οι αρχικές και τελικές συνθήκες ευθυγράμμισης προσανατολισμού για έναν αισθητήρα δισδιάστατων πανοραμικών σαρώσεων με  $\gamma = 2\pi/360$ , σε ένα μη δομημένο περιβάλλον του οποίου ο χάρτης το αναπαριστά τέλεια, ενώ οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο. Η μέθοδος του Πιτυοκάμπτη Σίνι εφαρμόζεται επί των μεθόδων Fourier-Mellin μίας διάστασης (άνω) και Προκρούστη (κάτω). Εδώ ο βαθμός υπερδειγματοληψίας  $\nu$  έχει αρχική τιμή  $\nu = \nu_{min} = 0$  και αυξάνει διαδοχικά κάθε φορά που η εκτίμηση προσανατολισμού

<sup>2</sup>Ο Σίνις, επονομαζόμενος Πιτυοκάμπτης, ήταν γιος του Προκρούστη Πολυπήμωνος. Σε συνέχεια της γενεαλογίας του ο Σίνις απήγαγε ξένους, των οποίων τα όγκρα έδενε σε δύο λυγισμένα πεύκα (κεκαμμένες πιτύες) προτού αφήσει τα τελευταία να πάρουν τη φυσική τους κλίση, διχοτομώντας έτσι τα σώματά των θυμάτων του. Για κακή του τύχη εξοντώθηκε επίσης από τον Θησέα.



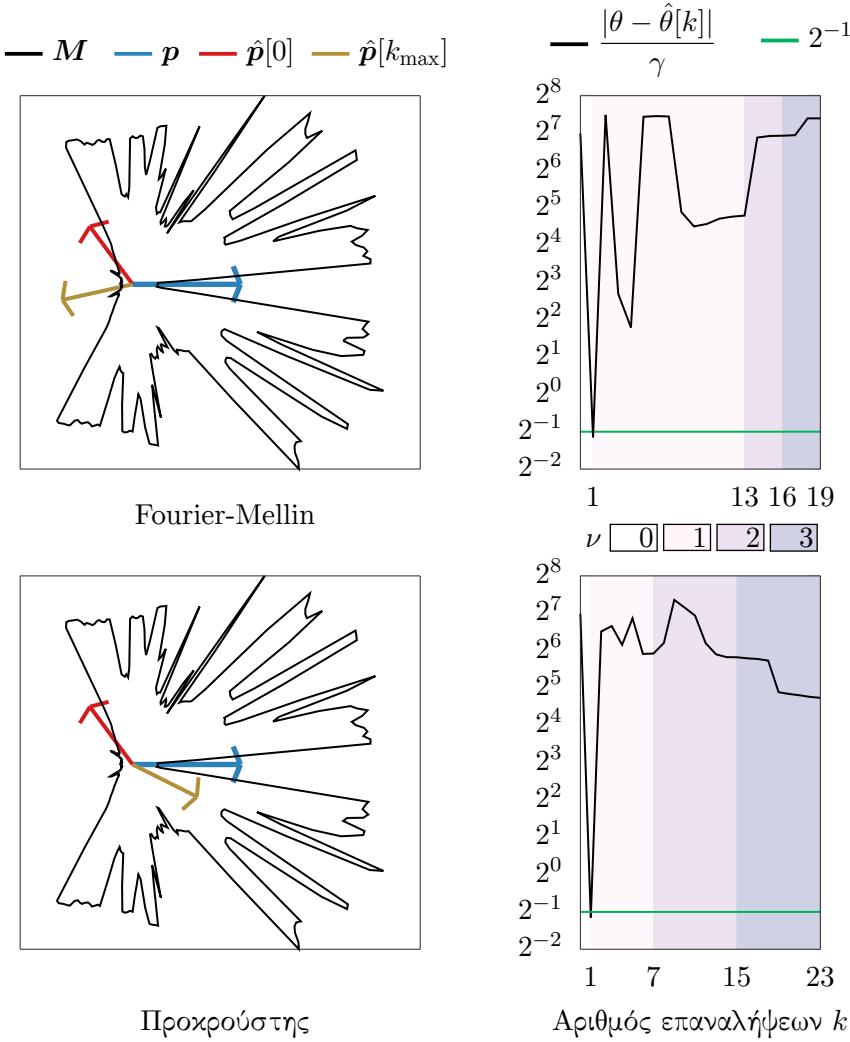
Σχήμα 4.7: Μεγέθυνση των δύο περιοχών που περικλείονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα στο σχήμα ???. Οι κόκκινες γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες της πραγματικής μέτρησης  $\mathcal{S}_R$ . Οι μπλε γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες της εικονικής μέτρησης  $\mathcal{S}_V$ . Οι διακεκομένες φούξια γραμμές απεικονίζουν τις παρεμβαλλόμενες ακτίνες του πραγματικού αισθητήρα. Οι διακεκομένες μπλε γραμμές απεικονίζουν τις πρόσθετες ακτίνες του εικονικού αισθητήρα. Εδώ ο ρυθμός υπερδειγματοληψίας είναι  $\mu = 2^\nu$ ,  $\nu = 2$ . Τα σχήματα στην αριστερή πλευρά δείχνουν τις αρχικές σαρώσεις μεγέθους  $N_s$ . Τα δεξιά σχήματα δείχνουν την παρεμβαλλόμενη πραγματική σάρωση και την εικονική σάρωση ίσου μεγέθους  $N'_s = 2^\nu N_s$ . Η παρεμβολή των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης είναι ακριβής σε γραμμικά τμήματα. Σε μη γραμμικά τμήματα, όμως, οι αποστάσεις των παρεμβαλλόμενων ακτίνων είναι αυθαίρετα λανθασμένες, και δεν μπορεί να διασφαλιστεί ότι το σφάλμα προσανατολισμού φράσσεται άνωθεν από την τιμή  $\gamma/2^{\nu+1}$ .

δεν εμφανίζει μεταβολή ως προς την προηγούμενη τιμή της πάνω από  $\gamma/2$  rad, έως ότου  $\nu = \nu_{\max} = 3$ .

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζουμε τη μέθοδο που, σε αντίθεση με τη μέθοδο του Πιτυοκάμπη Σίνι, ελαττώνει το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού με τρόπο ευσταθή, προβλεπόμενο, και αναλογικό ως προς το ρυθμό δειγματοληψίας  $\mu = 2^\nu$  του χάρτη  $M$ .

#### 4.2.6 Η μέθοδος του Θησέα

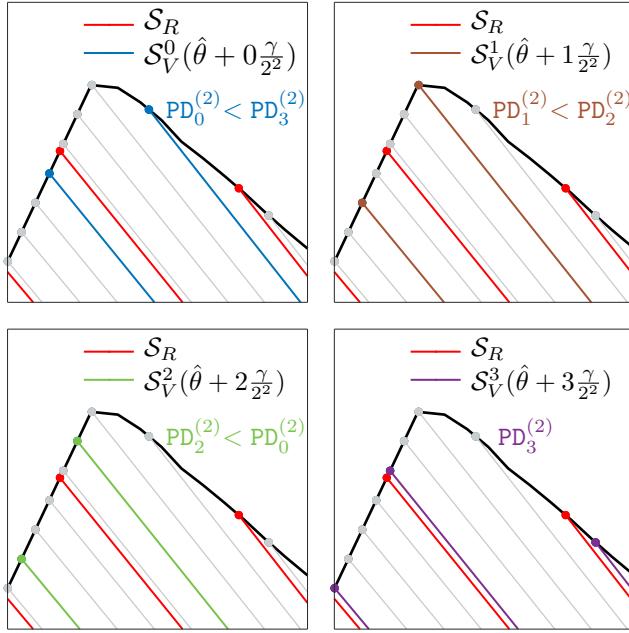
Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται κατανοητό ότι οποιαδήποτε προσπάθεια μείωσης του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού θα πρέπει να περιοριστεί από την απαγόρευση εφεύρεσης πραγματικών μετρήσεων. Στο σχήμα 4.9 απεικονίζεται η μεθοδολογία που εισάγουμε, η



Σχήμα 4.8: Η λανθασμένη προσέγγιση ελάττωσης του γωνιακού σφάλματος εκτίμησης της μεθόδου Πιτυοκάμπη. Σίνι για διαδοχική υπερδειγματοληψία βαθμών  $(\nu_{\min}, \nu_{\max}) = (0, 3)$ . Το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi^{(\nu)}$  φράσσεται από την ποσότητα  $\gamma/2^{1+\nu}$  μόνο στο τέλος του βήματος δειγματοληψίας  $\nu = 0$ .

οποία εγγυάται ότι το τελικό σφάλμα προσανατολισμού  $|\phi| \in [0, \gamma/2^{1+\nu}]$  στην περίπτωση που οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο και ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια, για  $\nu = 2$  και  $\gamma = 2\pi/360$ .

Αντί της κατασκευής μίας εικονικής σάρωσης  $2^\nu N_s$  ακτίνων, και της εκτέλεσης διόρθωσης του προσανατολισμού μία φορά (Παρατήρηση I), το βέλτιστο σφάλμα προσανατολισμού  $|\phi| \in [0, \gamma/2^{1+\nu}]$  για έναν δεδομένο ρυθμό δειγματοληψίας  $\mu = 2^\nu$  και διακριτική γωνία  $\gamma$  μπορεί να επιτευχθεί με τον υπολογισμό  $2^\nu$  εικονικών σαρώσεων μεγέθους  $N_s$ , εκτελώντας διόρθωση προσανατολισμού  $2^\nu$  φορές. Η διόρθωση προσανατολισμού πραγματοποιείται μία φορά μεταξύ της ανόθευτης πραγματικής σάρωσης και της εικονικής σάρωσης  $S_V^k$ , η οποία λαμβάνεται από



Σχήμα 4.9: Μεγέθυνση της μη γραμμικής περιοχής που περικλείεται με κόκκινο χρώμα στο σχήμα ???. Οι κόκκινες γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες της πραγματικής σάρωσης  $S_R$ . Οι μπλε, καφέ, πράσινες, και μωβ γραμμές υποδηλώνουν ακτίνες  $2^\nu = 2^2$  διαχριτών εικονικών σαρώσεων που λαμβάνονται από την εκτίμηση στάσης  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta})$  σε  $\gamma/2^\nu$ ,  $\nu = 2$  γωνιακά βήματα, ξεκινώντας από τον εκτιμώμενο προσανατολισμό του αισθητήρα  $\hat{\theta}$ . Η εικονική σάρωση που συμβολίζεται με μωβ χρώμα σημειώνει την υψηλότερη τιμή της μετρικής Ποσοστού Διάχρισης (PD) μεταξύ όλων των  $2^\nu$  εικονικών σαρώσεων. Χρησιμοποιώντας τη μετρική PD και επιλέγοντας την εκτίμηση προσανατολισμού που αντιστοιχεί στην εικονική σάρωση με τη μέγιστη τιμή PD, το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού φράσσεται εγγυημένα άνωθεν από την τιμή  $\gamma/2^{\nu+1}$  στην περίπτωση όπου οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο και ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια

τη στάση  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta}_k)$ :

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta} + k \cdot \gamma/2^\nu, \quad k = 0, \dots, 2^\nu - 1 \quad (4.25)$$

για συνολικά  $2^\nu$  φορές, με αποτέλεσμα  $2^\nu$  εκτιμήσεις προσανατολισμού.

Όσο αφορά στις μεθόδους Fourier-Mellin μίας διάστασης και τη μέθοδο του Προκρούστη, η μετρική ευθυγράμμισης μεταξύ της  $k$ -οστής εικονικής σάρωσης και της πραγματικής σάρωσης υπολογίζεται σύμφωνα το Ποσοστό Διάχρισης (Percent Discrimination—PD). Η μετρική του Ποσοστού Διάχρισης για την  $k$ -οστή εικονική σάρωση  $PD_k \in [0, 1]$ , και είναι ανάλογη του βαθμού ευθυγράμμισης μεταξύ των σαρώσεων  $S_R$  και  $S_V^k$  για όλες τις  $2^\nu$  σαρώσεις  $S_V^k$ . Το Ποσοστό Διάχρισης ανάμεσα στην πραγματική μέτρηση  $S_R$  και την εικονική

σάρωση  $\mathcal{S}_V^k$  ορίζεται ως:

$$\text{PD}_k = \frac{2 \Phi(\Psi, \Omega_k)}{\Phi(\Psi, \Psi) + \Phi(\Omega_k, \Omega_k)} \quad (4.26)$$

Για τη μεν περίπτωση της μεθόδου Fourier-Mellin:  $\Phi = \max q$ , όπου  $q = \mathcal{F}^{-1}\{Q\}$ , με τον όρο  $Q$  να ορίζεται από την εξίσωση (4.1) με ορίσματα τα διανύσματα σαρώσεων εισόδου  $\Psi = \mathcal{S}_R$  και  $\Omega_k = \mathcal{S}_V^k$ .

Για τη δε περίπτωση της μεθόδου του Προκρούστη:  $\Phi = T$ , όπου  $T$  είναι το μέγιστο ίχνος με ορίσματα τους πίνακες  $\Psi = \mathbf{P}_R$  και  $\Omega_k = \mathbf{P}_{V_k}$  (Επακόλουθο III). Εδώ το σύνολο σημείων  $\mathbf{P}_R$  κατέχει τις συντεταγμένες των τελικών σημείων των ακτίνων της πραγματικής σάρωσης  $\mathcal{S}_R$  προβεβλημένες στο επίπεδο  $x - y$  από την αρχή  $\mathbf{O}(0, 0, 0)$  όπως προηγουμένως, και το σύνολο  $\mathbf{P}_{V_k}$  κατέχει τις συντεταγμένες των τελικών σημείων της  $k$ -οστής εικονικής σάρωσης, επίσης προβεβλημένες στο επίπεδο  $x - y$  από το  $\mathbf{O}$ .

Όσο αφορά στη μέθοδο Πρώτων Αρχών η σύγκριση ανάμεσα στις σαρώσεις  $\mathcal{S}_R$  και  $\mathcal{S}_V^k$  δεν είναι δόκιμη, καθώς αυτή αποτελεί μέθοδο συνεχούς χώρου, και συνεπώς δεν ορίζεται μετρική ευθυγράμμισης.

Έστω τώρα ότι  $k_{\max} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ :  $k_{\max} \in [0, 2^{\nu-1}]$  συμβολίζει το δείκτη της  $k$ -οστής εικονικής σάρωσης  $\mathcal{S}_V^{k_{\max}}$  που σημειώνει τον υψηλότερο δείκτη ευθυγράμμισης  $\text{PD}_k$ :  $\text{PD}_{k_{\max}} = \max\{\text{PD}_k\}$ . Έστω επίσης  $I \in \mathbb{Z}$  το ακέραιο πολλαπλάσιο κατά το οποίο εάν πολλαπλασιαστεί η διακριτική γωνία  $\gamma$  τότε η σάρωση  $\mathcal{S}_V^{k_{\max}}$  ευθυγραμμίζεται με την  $\mathcal{S}_R$  με τρόπο τέτοιο που παράγεται η μετρική ευθυγράμμισης  $\text{PD}_{k_{\max}}$ . Τότε εάν η εκτίμηση προσανατολισμού του αισθητήρα ενημερωθεί σε  $\hat{\theta}'$

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta} + I \cdot \gamma + k_{\max} \cdot \frac{\gamma}{2^\nu} \quad (4.27)$$

το επίλοιπο σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi$  φράσσεται από:

$$|\phi| = \mod(|\theta - \hat{\theta}'|, \gamma) \leq \frac{\gamma}{2^{1+\nu}} < \frac{\gamma}{2} \quad (4.28)$$

για  $\nu \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

Ο στόχος (\*) επιτυγχάνεται με τη μέθοδο που εισαγάγαμε σε αυτή την ενότητα για

τη μέθοδο Fourier-Mellin μίας διάστασης (ενότητα 4.2.1) και τη μέθοδο του Προκρούστη (ενότητα 4.2.3) υπό τις προϋποθέσεις ότι (α)  $\mathbf{l} = \hat{\mathbf{l}}$ , (β) το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού είναι  $|\theta - \hat{\theta}| > \gamma/2^{1+\nu}$  για δεδομένο βαθμό δειγματοληψίας  $\nu$ , (γ) οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν διαταράσσονται από θόρυβο, και (δ) ο χάρτης του περιβάλλοντος το αναπαριστά τέλεια.

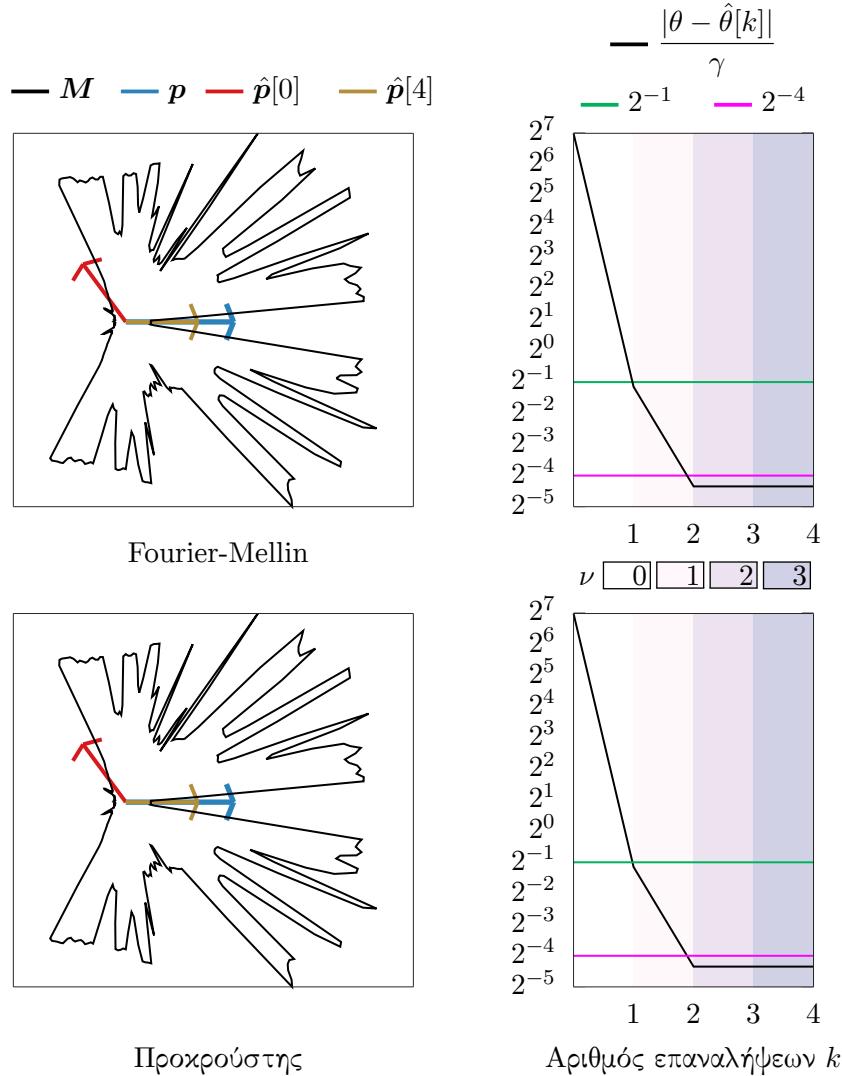
Στο σχήμα 4.10 απεικονίζονται οι ίδιες αρχικές συνθήκες με αυτές της διαμόρφωσης του σχήματος 4.8. Η ευθυγράμμιση προσανατολισμού εκτελείται και πάλι διαδοχικά για βαθμούς δειγματοληψίας του χάρτη  $M$  ( $\nu_{\min}, \nu_{\max}$ ) = (0, 3), αλλά αυτή τη φορά το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi^{(\nu)}$  φράσσεται στο τέλος κάθε βήματος δειγματοληψίας  $\nu$  από την ποσότητα  $\frac{\gamma}{2^{1+\nu}}$ . Στο σχήμα 4.11 απεικονίζεται ο μέσος χρόνος εκτέλεσης της μεθόδου Fourier-Mellin μίας διάστασης με χρήση της επιπρόσθετης μεθόδου του Θησέα για αυξανόμενο αριθμό ακτίνων  $N_s$  με βάση την ίδια διαμόρφωση.

Στο σχήμα 4.12 η άνω σειρά απεικονίζει τα πραγματικά δεδομένα Ποσοστών Διάκρισης και επίλοιπων σφαλμάτων των υποψήφιων προσανατολισμών ανά βαθμό δειγματοληψίας, τα οποία παρήχθησαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου Θησέα επί των μεθόδων γωνιακής ευθυγράμμισης Fourier-Mellin και Προκρούστη που παρουσιάζονται στην εικόνα 4.10. Στην αριστερή πλευρά της κάτω σειράς απεικονίζεται σχηματικά η εξέλιξη της ημίσειας κατάτμησης του επίλοιπου σφαλματος προσανατολισμού ανά βαθμό δειγματοληψίας, και στη δεξιά το Ποσοστό Διάκρισης που αντιστοιχεί σε κάθε σφάλμα. Συγκεκριμένα, με γκρι χρώμα σημειώνεται η μετρική που εμφανίζει τη μέγιστη τιμή ανάμεσα σε όλες εκείνες του ίδιου βαθμού δειγματοληψίας. Αντιπαραβάλλοντας αυτές με τα δεδομένα της δεξιάς στήλης της άνω σειράς και στη συνέχεια αυτά με εκείνα της αριστερής στήλης της ίδιας σειράς παρατηρούμε ότι τα ελάχιστα επίλοιπα σφαλματα εμφανίζουν τα μέγιστα ποσοστά διάκρισης, σε συνέπεια με την εξίσωση (4.28) και την ανάλυση της παρούσας ενότητας.

Ο Αλγόριθμος V παρουσιάζει τη μέθοδο διόρθωσης προσανατολισμού που προτείνουμε σε μορφή ψευδοκώδικα, για ορίσματα  $rc = \{rc\_fm, rc\_uf\}$  (Αλγόριθμοι I και III).

#### 4.2.7 Περιορισμοί και ιδιότητες υπό γενικές συνθήκες

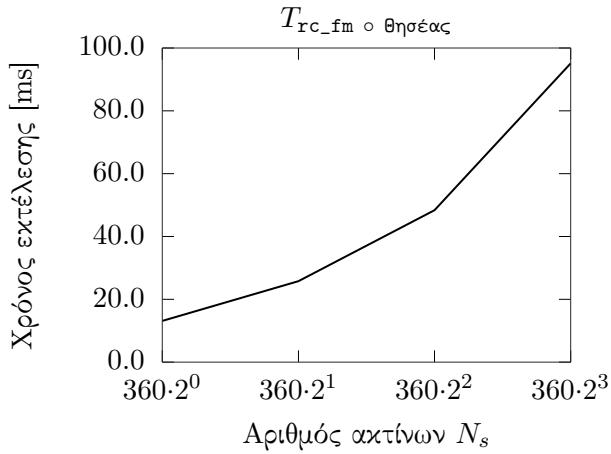
Οι μέθοδοι εκτίμησης του προσανατολισμού της στάσης  $\hat{\mathbf{r}}$  που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες εμφανίζουν σε πραγματικές συνθήκες—δηλαδή σε συνθήκες μη σύμπτωσης της πραγματικής με την εκτιμώμενη θέση, διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού



**Σχήμα 4.10:** Η ορθή προσέγγιση ελάττωσης του γωνιακού σφάλματος εκτίμησης της μεθόδου Θησέα για διαδοχική υπερδειγματοληψία βαθμών  $(\nu_{\min}, \nu_{\max}) = (0, 3)$ . Το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\phi^{(\nu)}$  των δύο μεθόδων φράσσεται στο τέλος κάθε βήματος δειγματοληψίας  $\nu$  από την ποσότητα  $\gamma/2^{1+\nu}$ .

αισθητήρα, και διαφυγάς του χάρτη ως προς το περιβάλλον που αναπαριστά—διαφορετική συμπεριφορά ως προς τις ιδεατές συνθήκες που παρουσιάσθηκαν μέχρι σε αυτό το σημείο, και λόγω αυτής της διαφοράς επιφέρονται περιορισμοί ως προς το σφάλμα της τελικής τους εκτίμησης.

Η μέθοδος Πρώτων Αρχών (ενότητα 4.2.2) πάσχει σε γενικές συνθήκες από δύο αιτίες. Η πρώτη αφορά στο σφάλμα εκτίμησής της σε συνθήκες μη σύμπτωσης της εκτίμησης θέσης με την πραγματική θέση. Το αριστερό γράφημα του σχήματος 4.13 απεικονίζει το σφάλμα



Σχήμα 4.11: Μέσος χρόνος εκτέλεσης της μεθόδου Fourier-Mellin μίας διάστασης με χρήση της μεθόδου του Θησέα για  $(\nu_{\min}, \nu_{\max}) = (0, 3)$ , για αυξανόμενο αριθμό ακτίνων  $N_s$

---

#### Αλγόριθμος V rc\_theseus

---

**Input:**  $\text{rc}$ ,  $M$ ,  $S_R$ ,  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta})$ ,  $\gamma$ ,  $N_s$ ,  $\nu$

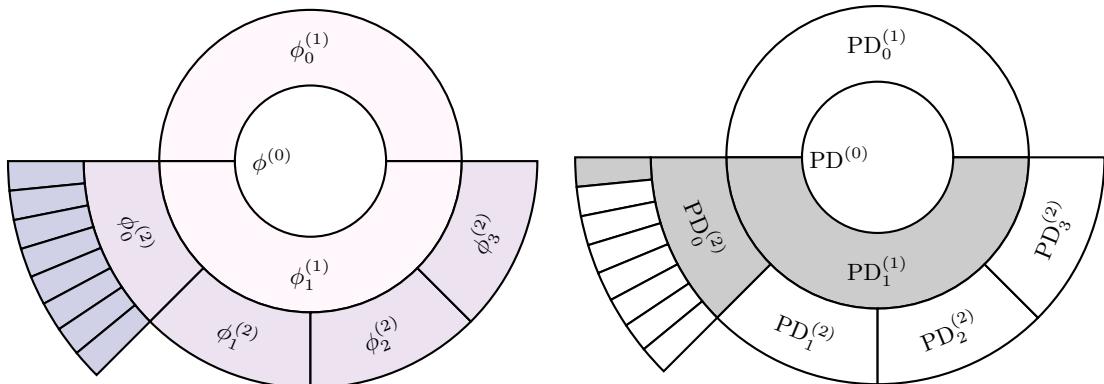
**Output:**  $\hat{\theta}'$

- 1:  $(\hat{\Theta}, \text{PD}) \leftarrow \text{rc_theseus_core}(\text{rc}, M, S_R, \hat{p}(x, y, \hat{\theta}), \gamma, N_s, \nu)$  (Αλγόριθμος VI)
  - 2:  $k_{\max} \leftarrow \arg \max \text{PD}$
  - 3:  $\hat{\theta}' \leftarrow \hat{\Theta}[k_{\max}]$
  - 4: **return**  $\hat{\theta}'$
- 

εκτίμησης προσανατολισμού για αυτή την περίπτωση με κίτρινο και μαύρο χρώμα, και με γκρι την περίπτωση όπου η εκτίμηση θέσης και η πραγματική θέση είναι ίσες.

Επιπρόσθετα, η μέθοδος Πρώτων Αρχών εμφανίζει μη προβλέψιμη και ασταθή συμπεριφορά όταν ο χάρτης του περιβάλλοντος δεν το αναπαριστά τέλεια. Στο σχήμα 4.14 απεικονίζεται το μέσο σφάλμα προσανατολισμού της μεθόδου Πρώτων Αρχών και η τυπική του απόκλιση σε εκατό επαναλήψεις πειραμάτων με ένα σύνολο δεδομένων 778 περιβαλλόντων και χαρτών. Στο αριστερό σχήμα ο χάρτης αναπαριστά στην εντέλεια το περιβάλλον, σε αντίθεση με το δεξιό σχήμα, στο οποίο ο χάρτης είναι διεφυλαρμένος. Εδώ παρατηρούμε ότι ενώ στην πρώτη περίπτωση το σφάλμα προσανατολισμού αυξάνεται με συνέπεια για αυξανόμενο επίπεδο διαταραχών και μειώνεται με συνέπεια για αυξανόμενο αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων, στη δεύτερη δεν εμφανίζει καμία συνέπεια. Ταυτόχρονα παρατηρούμε τον μεγαλύτερο περιορισμό της μεθόδου, ήτοι την αδιαφορία του σφάλματος ως προς τον αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων όταν ο χάρτης δεν αναπαριστά τέλεια το περιβάλλον, η οποία είναι η γενική περίπτωση.

$$\begin{array}{l}
 |\phi^{(0)}|/\frac{\gamma}{2^0} = 0.45 < 2^{-1} \\
 \leftarrow |\phi_0^{(1)}|/\frac{\gamma}{2^1} = 0.45 \\
 \leftarrow |\phi_1^{(1)}|/\frac{\gamma}{2^1} = 0.22 < 2^{-1} \\
 \leftarrow |\phi_0^{(2)}|/\frac{\gamma}{2^2} = 0.19 < 2^{-1} \\
 \leftarrow |\phi_0^{(3)}|/\frac{\gamma}{2^3} = 0.39 < 2^{-1} \\
 \leftarrow |\phi_1^{(3)}|/\frac{\gamma}{2^3} = 1.39 \\
 \leftarrow |\phi_2^{(3)}|/\frac{\gamma}{2^3} = 2.39 \\
 \leftarrow |\phi_3^{(3)}|/\frac{\gamma}{2^3} = 3.39 \\
 \leftarrow |\phi_4^{(3)}|/\frac{\gamma}{2^3} = 3.60 \\
 \leftarrow |\phi_5^{(3)}|/\frac{\gamma}{2^3} = 2.60 \\
 \leftarrow |\phi_6^{(3)}|/\frac{\gamma}{2^3} = 1.60 \\
 \leftarrow |\phi_7^{(3)}|/\frac{\gamma}{2^3} = 0.60 \\
 \leftarrow |\phi_1^{(2)}|/\frac{\gamma}{2^2} = 1.195 \\
 \leftarrow |\phi_2^{(2)}|/\frac{\gamma}{2^2} = 1.80 \\
 \leftarrow |\phi_3^{(2)}|/\frac{\gamma}{2^2} = 0.80
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{PD}^{(0)} = 0.99101 \\
 \leftarrow \text{PD}_0^{(1)} = 0.99101 \\
 \leftarrow \text{PD}_1^{(1)} = 0.99986 \geq \text{PD}_*^{(1)} \\
 \leftarrow \text{PD}_0^{(2)} = 0.99986 \geq \text{PD}_*^{(2)} \\
 \leftarrow \text{PD}_0^{(3)} = 0.99986 \geq \text{PD}_*^{(3)} \\
 \leftarrow \text{PD}_1^{(3)} = 0.99721 \\
 \leftarrow \text{PD}_2^{(3)} = 0.98130 \\
 \leftarrow \text{PD}_3^{(3)} = 0.98516 \\
 \leftarrow \text{PD}_4^{(3)} = 0.99101 \\
 \leftarrow \text{PD}_5^{(3)} = 0.99575 \\
 \leftarrow \text{PD}_6^{(3)} = 0.99835 \\
 \leftarrow \text{PD}_7^{(3)} = 0.99973 \\
 \leftarrow \text{PD}_1^{(2)} = 0.98130 \\
 \leftarrow \text{PD}_2^{(2)} = 0.99101 \\
 \leftarrow \text{PD}_3^{(2)} = 0.99835
 \end{array}$$



**Σχήμα 4.12:** Τα πραγματικά δεδομένα Ποσοστών Διάκρισης  $\text{PD}_{0:2^\nu-1}^{(\nu)}$  και επίλοιπων σφαλμάτων  $\phi_{0:2^\nu-1}^{(\nu)}$  των υποψήφιων προσανατολισμών που αφορούν στα επίπεδα δειγματοληψίας  $\nu$ , τα οποία προέκυψαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου Θησέα επί των μεθόδων γωνιακής ευθυγράμμισης Fourier-Mellin και Προχρούστη που παρουσιάζονται στην εικόνα 4.10. Η κάτω σειρά απεικονίζει σχηματικά: στα αριστερά την αναδρομική εξέλιξη της κατάτμησης του αρχικού επίλοιπου σφάλματος  $\phi^{(0)}$  σε ημίσεια σφάλματα, και στα δεξιά τα αντιστοιχούντα μέγιστα ποσοστά διάκρισης ανά βαθμό δειγματοληψίας. Παρατηρήστε πως υπάρχει ευθεία αντιστοιχία του μέγιστου ποσοστού ποσοστού διάκρισης (γκρι) με το ελάχιστο επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού

---

**Αλγόριθμος VI rc\_theseus\_core**

---

**Input:**  $\text{rc}$ ,  $M$ ,  $\mathcal{S}_R$ ,  $\hat{p}(x, y, \hat{\theta})$ ,  $\gamma$ ,  $N_s$ ,  $\nu$ **Output:**  $\hat{\Theta}$ , PD

```

1:  $\hat{\Theta}, \text{PD} \leftarrow \{\emptyset\}$ 
2: for  $k = 0 : 2^\nu - 1$  do
3:    $\hat{p}_k \leftarrow (x, y, \hat{\theta} + k \cdot \gamma / 2^\nu)$ 
4:    $\mathcal{S}_V^k \leftarrow \text{scan\_map}(M, \hat{p}_k, N_s)$  (Αλγόριθμος VII)
5:    $(\hat{\theta}', w_k) \leftarrow \text{rc}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V^k, \hat{p}_k, \gamma)$ 
6:   append  $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}' + k \cdot \gamma / 2^\nu$  to  $\hat{\Theta}$ 
7:    $(\cdot, w_k^R) \leftarrow \text{rc}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_R, \hat{p}_k, \gamma)$ 
8:    $(\cdot, w_k^V) \leftarrow \text{rc}(\mathcal{S}_V^k, \mathcal{S}_V^k, \hat{p}_k, \gamma)$ 
9:   append  $\frac{2w_k}{w_k^R + w_k^V}$  to  $\text{PD}$ 
10:   $k \leftarrow k + 1$ 
11: end for
12: return  $(\hat{\Theta}, \text{PD})$ 

```

---

**Αλγόριθμος VII scan\_map**

---

**Input:**  $M, p(x, y, \theta), N_s$ **Output:**  $\mathcal{S}_V$ 

```

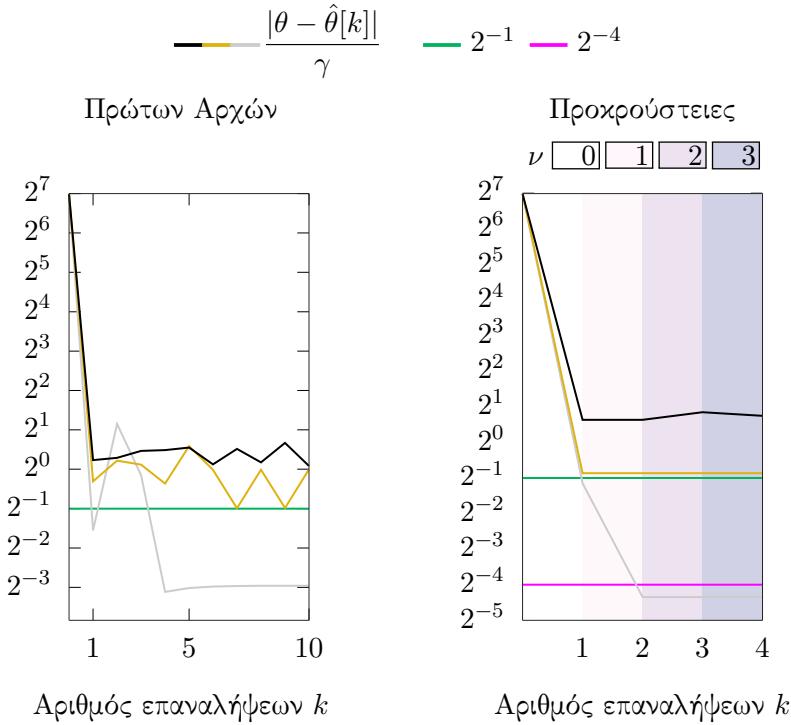
1:  $\mathcal{S}_V \leftarrow \{\emptyset\}$ 
2: for  $n = 0 : N_s - 1$  do
3:    $\lambda_n \leftarrow -\pi + \frac{2\pi}{N_s}n$ 
4:    $\theta_n \leftarrow \lambda_n + \hat{\theta}$ 
5:    $(x_n, y_n) \leftarrow \text{intersect}(M, (x, y, \theta_n))$ 
6:    $d_n \leftarrow \|(x - x_n, y - y_n)\|_2$ 
7:   append  $(d_n, \lambda_n)$  to  $\mathcal{S}_V$ 
8: end for
9: return  $\mathcal{S}_V$ 

```

---

Αυτή η ιδιότητα είναι κρίσιμη γιατί η μέθοδος λειτουργεί στον συνεχή γωνιακό χώρο και, σε αντίθεση με τις Προκρούστειες μεθόδους των ενοτήτων 4.2.1 και 4.2.3, δεν είναι δυνατή η εφαρμογή εσωτερικής μεθόδου επιπρόσθετης μείωσης των σφαλμάτων της, όπως η μέθοδος του Θησέα.

Οι μέθοδοι διακριτού χώρου Fourier-Mellin και Προκρούστη, με και δίχως τη χρήση της

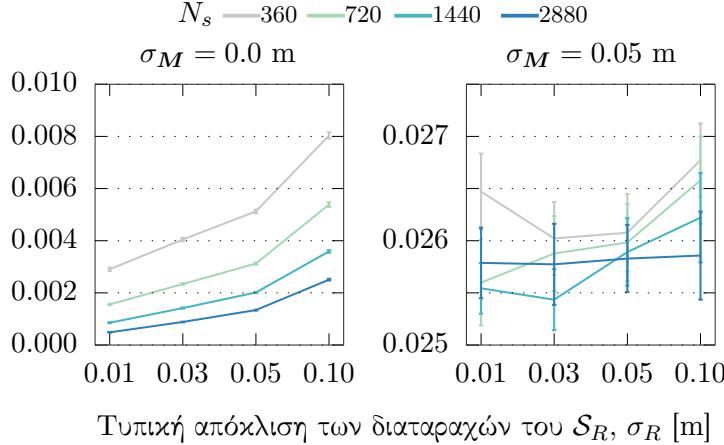


**Σχήμα 4.13:** Τα αποτελέσματα των ίδιων πειραμάτων με αυτά που εκτίθενται στα σχήματα 4.4 (στα αριστερά στο παρόν σχήμα) και 4.10 (δεξιά), για την ίδια εκτίμηση στάσης, μετατοπισμένη όμως κατά  $-0.06$  m (χίτρινο χρώμα) και  $-0.12$  m (μαύρο) στον οριζόντιο άξονα. Στο αριστερό γράφημα παρατηρούμε πως σε περίπτωση μη σύμπτωσης της εκτίμησης θέσης με την πραγματική θέση το μέτρο του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού της μεθόδου Πρώτων Αρχών είναι σημαντικά αυξημένο σε σχέση με αυτό της ειδικής περίπτωσης του αρχικού πειράματος (γκρι). Στο δεξιό γράφημα παρατηρούμε πως στην ίδια περίπτωση το μέτρο του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού των Προκρούστειων μεθόδων δεν ήταν δυνατό να μειωθεί λιγότερο από  $\gamma/2$  για κανένα βαθμό δειγματοληψίας, σε αντίθεση με την περίπτωση σύμπτωσης θέσεων (γκρι)

μεθόδου του Θησέα, επηρεάζονται από διαφορετικά προβλήματα που αναδύονται στη γενική περίπτωση, η οποία αφορά εδώ συγκεκριμένα στη γενική συνυθήκη όπου η εκτίμηση θέσης δεν συμπίπτει με την πραγματική θέση. Όσο αφορά στην πρώτη περίπτωση (δίχως τη χρήση της μεθόδου του Θησέα), το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού δεν είναι δυνατό να μειωθεί κάτω από  $\gamma/2$  σε ένα βήμα λόγω του γεγονότος ότι από διαφορετικές θέσεις είναι ορατά διαφορετικά σημεία του περιβάλλοντος και του χάρτη, με συνέπεια μεγαλύτερη αναντιστοιχία μεταξύ των σαρώσεων εισόδου, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της μεθόδου Πρώτων Αρχών. Αυτός ο περιορισμός εκτίθεται στο δεξιό γράφημα του σχήματος 4.13.

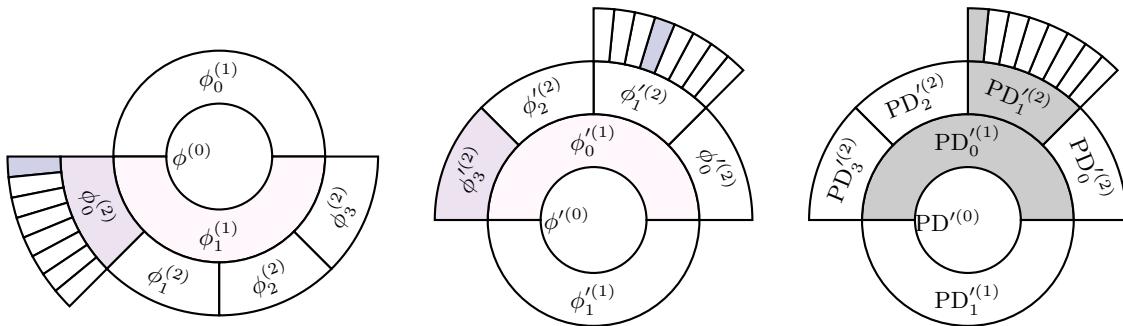
Στη δεύτερη περίπτωση, όταν δηλαδή χρησιμοποιείται η μέθοδος του Θησέα για την περαιτέρω μείωση του σφάλματος προσανατολισμού, το αναδυόμενο πρόβλημα είναι μεγαλύτερης βαρύτητας διότι η μη σύμπτωση των δύο θέσεων διαταράσσει την ευθεία αντιστοιχία ανάμεσα

Μέσο σφάλμα προσανατολισμού [rad],  $\bar{\delta}_\theta = \pi$  rad



Σχήμα 4.14: Μέσο σφάλμα προσανατολισμού της μεθόδου Πρώτων Αρχών και η τυπική του απόκλιση σε εκατό πειράματα, όπου το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού  $\Delta\theta = \theta - \hat{\theta}$  εξήχθη από ομοιόμορφη κατανομή  $\Delta\theta \in U(-\bar{\delta}_\theta, +\bar{\delta}_\theta)$ , όπου  $\bar{\delta}_\theta = \pi$ . Τα δύο σχήματα απεικονίζουν τα σφάλματα προσανατολισμού για αυξανόμενη τυπική απόκλιση  $\sigma_R$  των κανονικά κατανεμημένων και μηδενικής μέσης τιμής διαταραχών της πραγματικής σάφωσης  $S_R$ ,  $\sigma_R \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.10\}$  m, και αυξανόμενο αριθμό εκπεμπόμενων ακτίνων  $N_s$ . Στο αριστερό σχήμα ο χάρτης αναπαριστά στην εντέλεια το περιβάλλον, σε αντίθεση με το δεξιό σχήμα, στο οποίο ο χάρτης είναι διεφθαρμένος

στις αύξουσες τιμές του Ποσοστού Διάκρισης των σφαλμάτων προσανατολισμού και τα φύτνοντα μέτρα των τελευταίων. Με άλλα λόγια, στη γενική περίπτωση, όπου η εκτίμηση θέσης δεν ισούται με την πραγματική θέση, το υψηλότερο Ποσοστό Διάκρισης δεν αντιστοιχεί στο ελάχιστο σφάλμα προσανατολισμού. Αυτό το πρόβλημα εκτίθεται στο σχήμα 4.15.



Σχήμα 4.15: Στα αριστερά παρατίθεται η βέλτιστη πορεία κατάτμησης του αρχικού επίλοιπου σφάλματος (σχήμα 4.12). Στη μέση παρατίθεται η κατάτμηση των επίλοιπων σφαλμάτων προσανατολισμού ανά βαθμό δειγματοληψίας  $\nu$  με βάση τη μέθοδο του Θησέα στο πείραμα που αφορά στο δεξί γράφημα του σχήματος 4.13, και με χρώμα τα πραγματικά ελάχιστα σφάλματα. Στα δεξιά παρατίθενται με γκρι τα αντιστοιχούντα μέγιστα ποσοστά διάκρισης ανά βαθμό δειγματοληψίας. Παρατηρήστε πως πλέον, όχι μόνο δεν υφίσταται ευθεία αντιστοιχία του μέγιστου ποσοστού διάκρισης με το ελάχιστο επίλοιπο σφάλμα προσανατολισμού, αλλά και τα τελευταία δεν αντιστοιχούν στα βέλτιστα σφάλματα προσανατολισμού του αριστερού γραφήματος

Κατά συνέπεια ανακεφαλαιώνουμε τους περιορισμούς των μεθόδων εκτίμησης προσανατολισμού στις εξής παρατηρήσεις:

**Παρατήρηση II.** Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μετά την εφαρμογή των μεθόδων εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών, Fourier-Mellin, και Προκρούστη, το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού είναι ανάλογο του σφάλματος θέσης.

**Παρατήρηση III.** Στη μέθοδο Πρώτων Αρχών είναι αδόκιμη η εφαρμογή μεθόδου υπερδειγματοληψίας του χάρτη και εσωτερικής ιεράρχησης των σφαλμάτων προσανατολισμού—σε αντιστοιχία με τη μέθοδο του Θησέα—για την περαιτέρω μείωση του σφάλματος προσανατολισμού, λόγω της συνεχούς φύσεώς της.

**Παρατήρηση IV.** Επιπρόσθετα, ακόμα και να ήταν δυνατή η εφαρμογή τέτοιας μεθόδου, η μη φθίνουσα σχέση του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού με τον αύξοντα βαθμό δειγματοληψίας στη γενική συνθήκη όπου ο χάρτης του περιβάλλοντος δεν το αναπαριστά τέλεια θα καθιστούσε οποιαδήποτε εσωτερική σύγκριση πρακτικά αδιάφορη.

**Παρατήρηση V.** Υπό γενικές συνθήκες, στις Προκρούστεις μεθόδους με εφαρμογή της μεθόδου του Θησέα η εσωτερική σύγκριση μεταξύ των τιμών της μετρικής του Ποσοστού Διάκρισης οδηγεί σε μη βέλτιστα σφάλματα προσανατολισμού, ακόμα και όταν ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια και ο αισθητήρας σαρώσεων δεν επηρεάζεται από διαταραχές.

Κατά συνέπεια, υπό γενικές συνθήκες, λόγω των παραπάνω διαπιστώσεων είναι αναγκαία η εφεύρεση επιπρόσθετων μεθόδων, και εξωτερικών ως προς τις παραπάνω προσεγγίσεις για τη σύγκλιση στο βέλτιστο κατά περίπτωση σφάλμα προσανατολισμού.

## 4.3 Μεθοδολογία ευθυγράμμισης θέσης

Έστω τώρα το αντίστροφο ως προς την προηγούμενη ενότητα πρόβλημα: έστω ότι η πραγματική και η εκτιμώμενη στάση είναι ίσες ως προς τον προσανατολισμό  $\hat{\theta} = \theta$ , αλλά άνισες ως προς τη θέση  $\hat{l} \neq l$ .

### 4.3.1 Η μέθοδος Πρώτων Αρχών

Εάν ο χάρτης αναπαριστά το περιβάλλον τέλεια και ο φυσικός αισθητήρας αναφέρει μετρήσεις χωρίς διαταραχές, τότε η εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα μπορεί να οδηγηθεί

αυθαίρετα κοντά στην πραγματική θέση. Σε πραγματικές συνθήκες, όταν οι ακτίνες των πραγματικών σαρώσεων ή/και των εικονικών σαρώσεων αλλοιώνονται από προσθετικό θόρυβο πεπερασμένου μέγιστου μέτρου, η εκτίμηση θέσης μπορεί να φραχθεί σε μια γειτονιά της πραγματικής θέσης του αισθητήρα. Το Θεώρημα I τυποποιεί αυτή τη δήλωση [Fil22].

**Θεώρημα I.** Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Προβλήματος ΙΙ3, και ότι  $\hat{\theta} = \theta$ .

Έστω επίσης ότι η εικονική σάρωση  $\mathcal{S}_V$  που συλλαμβάνεται από τη στάση  $\hat{\mathbf{p}}$  εντός του χάρτη  $M$  συμβολίζεται με  $\mathcal{S}_V|_{\hat{\mathbf{p}}}$ . Έστω ακόμα ότι οι δισδιάστατες σαρώσεις  $\mathcal{S}_R$  και  $\mathcal{S}_V$  είναι απαλλαγμένες από διαταραχές, δηλαδή ότι οι αποστάσεις που καταγράφουν οι ακτίνες της πραγματικής σάρωσης προς τα γύρω του εμπόδια αντιστοιχούν στις πραγματικές αποστάσεις του αισθητήρα από τα εν λόγω εμπόδια, και ότι ο χάρτης του περιβάλλοντος το αναπαριστά τέλεια. Αντιμετωπίζοντας την εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα ως μεταβλητή κατάστασης  $\hat{\mathbf{l}}[k] = [\hat{x}[k], \hat{y}[k]]^\top$  και ενημερώνοντάς την σύμφωνα με την εξίσωση διαφορών

$$\hat{\mathbf{l}}[k+1] = \hat{\mathbf{l}}[k] + \mathbf{u}[k] \quad (4.29)$$

όπου  $\hat{\mathbf{l}}[0] = \hat{\mathbf{l}} = [\hat{x}, \hat{y}]^\top$ , (δηλαδή η παρεχόμενη αρχική εκτίμηση της θέσης),  $\mathbf{u}$  είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $2 \times 1$  που στο εξής θα αναφέρεται ως διάνυσμα ελέγχου:

$$\mathbf{u}[k] = \frac{1}{N_s} \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,r}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}) \\ X_{1,i}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

όπου  $X_{1,r}(\cdot)$  και  $X_{1,i}(\cdot)$  είναι, αντίστοιχα, το πραγματικό και φανταστικό μέρος της μιγαδικής ποσότητας  $X_1$ :

$$\begin{aligned} X_1(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}) &= X_{1,r}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}) + i \cdot X_{1,i}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}) \\ &= \sum_{n=0}^{N_s-1} (\mathcal{S}_R[n] - \mathcal{S}_V[n]|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}) \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{N_s}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

όπου  $\mathcal{S}_R[n]$  και  $\mathcal{S}_V[n]|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}$  είναι, αντίστοιχα, οι αναφερόμενες αποστάσεις της  $n$ -οστής ακτίνας της πραγματικής  $\mathcal{S}_R$  και εικονικής σάρωσης  $\mathcal{S}_V|_{\hat{\mathbf{p}}[k]}$ , και  $\hat{\mathbf{p}}[k] = (\hat{\mathbf{l}}[k], \hat{\theta})$ —τότε

η εκτίμηση θέσης  $\hat{\mathbf{l}}[k]$  συγκλίνει ομοιόμορφα ασυμπτωτικά στην πραγματική θέση  $\mathbf{l}$  καθώς  $k \rightarrow \infty$ .

**Επακόλουθο V.** Μια λύση που ικανοποιεί το στόχο (\*) είναι αυστηρά εγγυημένη για κάθε αρχική θέση  $\hat{\mathbf{l}}[0]$  στην περίπτωση που οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα δεν φέρουν διαταραχές και ο χάρτης  $M$  δεν είναι διεφθαρμένος ως προς το περιβάλλον που αναπαριστά.

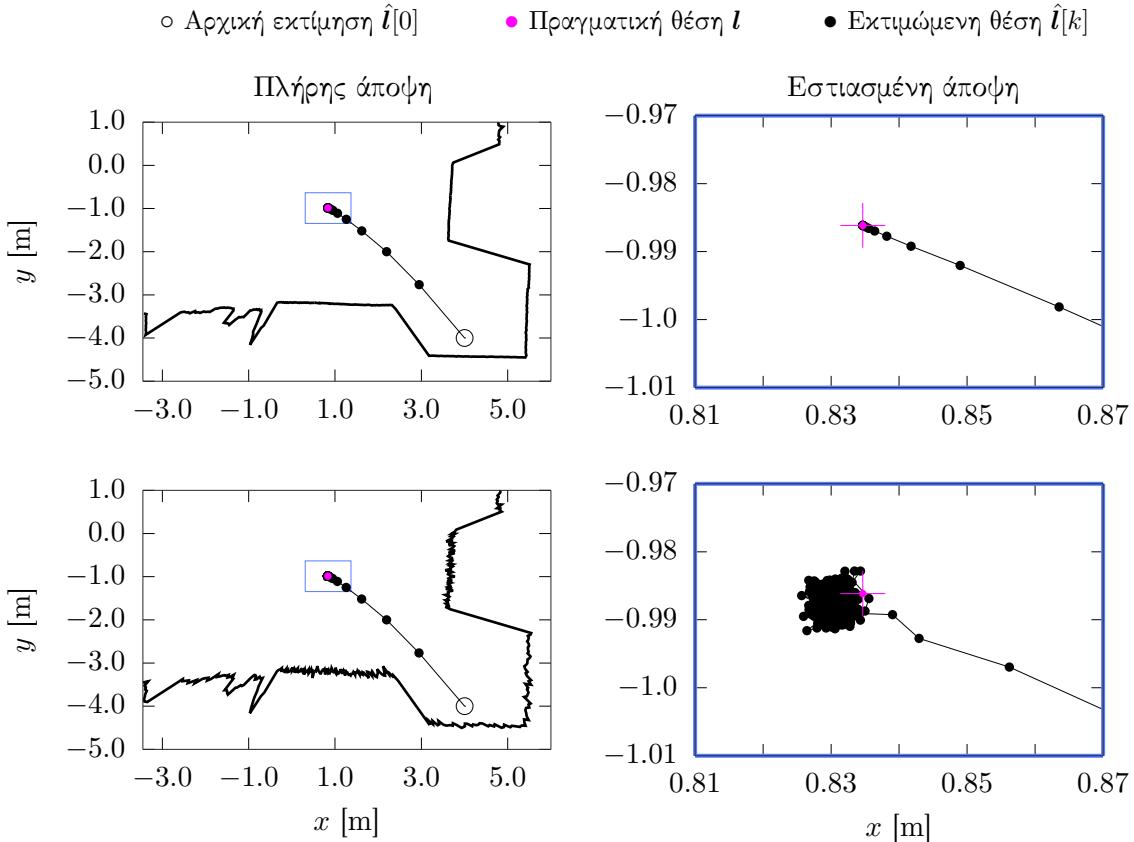
Στην πράξη το σύστημα ελέγχου (4.29, 4.30) αφήνεται να επαναληφθεί είτε έως ότου το μέτρο του διανύσματος ελέγχου  $u[k]$  φτάσει σε ένα επαρκώς μικρό μέγεθος  $\|u[k]\|_2 < \varepsilon_u$ , όπου  $\varepsilon_u$  είναι επαρκώς μικρό—π.χ.  $\varepsilon_u < 10^{-3}$ —ή για  $I_T > 0$  επαναλήψεις (ένα αρκετά μεγάλο, εξωτερικά παρεχόμενο όριο μέγιστων επαναλήψεων—π.χ.  $I_T \geq 20$ ). Επομένως, συμβολίζοντας με  $k_{stop} \in (0, I_T]$  τον δείκτη της τελευταίας επανάληψης, και με  $\hat{\mathbf{l}}' = \hat{\mathbf{l}}[k_{stop}]$  τότε  $\|\mathbf{e}(\mathbf{l}, \hat{\mathbf{l}}')\|_2 < \|\mathbf{e}(\mathbf{l}, \hat{\mathbf{l}}[0])\|_2$ , και επομένως ο στόχος (\*) ικανοποιείται.

Στο σχήμα 4.16 απεικονίζονται οι τροχιές της εκτίμησης θέσης βάσει εφαρμογής του Θεωρήματος I για έναν αισθητήρα  $N_s = 360$  ακτίνων, με θέση  $\mathbf{l} = (0.83, -0.98)$  [m] και αρχική εκτίμηση θέσης  $\hat{\mathbf{l}} = (4.0, -4.0)$  [m]. Οι ακτίνες της πραγματικής σάρωσης  $S_R$  και των εικονικών σαρώσεων  $S_V$  διαταράσσονται από ύφρυβο κανονικά κατανεμημένο με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση  $\sigma_R$  και  $\sigma_V$  αντίστοιχα. Η άνω σειρά απεικονίζει τις τροχιές εκτίμησης για τυπικές αποκλίσεις  $\sigma_R = \sigma_V = 0.0$  m, και η κάτω σειρά για  $\sigma_R = \sigma_V = 0.05$  m.

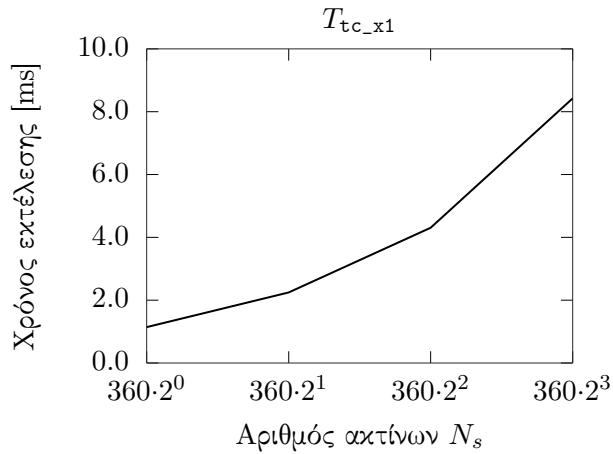
Το σχήμα 4.17 απεικονίζει το μέσο χρόνο εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου διόρθωσης της εκτίμησης θέσης σε δέκα εκτελέσεις για μέγιστο αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων  $I_T = 20$ , για αυξανόμενο μέγεθος σαρώσεων  $N_s$ . Ο αλγόριθμος VIII παραθέτει σε ψευδοκώδικα τη μέθοδο εκτίμησης της θέσης για δεδομένη και γνωστή εκτίμηση προσανατολισμού.

### 4.3.2 Ιδιότητες υπό γενικές συνθήκες

Σε αντιστοιχία με τις μεθόδους ευθυγράμμισης προσανατολισμού, το σφάλμα θέσης της μεθόδου ευθυγράμμισης θέσης Πρώτων Αρχών αυξάνει σε γενικές συνθήκες μη σύμπτωσης της εκτίμησης προσανατολισμού με τον πραγματικό προσανατολισμό του αισθητήρα, και σε συνθήκες διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα και μη απολύτου σύμπτωσης του χάρτη με το περιβάλλον που αναπαριστά.



Σχήμα 4.16: Οι τροχιές της εκτίμησης θέσης βάσει εφαρμογής του Θεωρήματος I για επίπεδο διαταραχών αποστάσεων  $\sigma_R = \sigma_V = 0.0$  m (άνω σειρά) και  $\sigma_R = \sigma_V = 0.05$  m (κάτω σειρά). Τα τελικά σφάλματα εκτίμησης θέσης είναι  $2.04\text{e-}07$  m και  $5.72\text{e-}03$  m αντίστοιχα. Η εκτίμηση θέσης συγκλίνει ομοιόμορφα ασυμπτωτικά στην πρώτη περίπτωση (Θεώρημα I), ενώ στη δεύτερη είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε μία γειτονιά της πραγματικής θέσης (Θεώρημα II)



Σχήμα 4.17: Ο μέσος χρόνος εκτέλεσης μίας επανάληψης της μεθόδου διόρθωσης της εκτίμησης θέσης για δέκα εκτελέσεις, ανά μέγεθος σαρώσεων εισόδου  $N_s$

---

**Αλγόριθμος VIII tc\_x1**

---

**Input:**  $M, \mathcal{S}_R, \hat{\mathbf{p}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}), k_{max}, \varepsilon_u, N_s$ **Output:**  $\hat{\mathbf{p}}'(\hat{x}', \hat{y}', \hat{\theta})$ 

```

1:  $k \leftarrow 0$ 
2: while  $k < k_{max}$  do
3:    $\mathcal{S}_V \leftarrow \text{scan\_map}(M, \hat{\mathbf{p}}, N_s)$  (Αλγόριθμος VII)
4:    $X_1 \leftarrow \text{diff\_dft}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V)$  (Αλγόριθμος IX)
5:    $(X_{1,r}, X_{1,i}) \leftarrow (\text{re}(X_1), \text{im}(X_1))$ 
6:    $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{1}{N_s} \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,r} \\ X_{1,i} \end{bmatrix}$ 
7:    $\hat{\mathbf{p}} \leftarrow \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{u}_k$ 
8:   if  $\|\mathbf{u}_k\|_2 < \varepsilon_u$  then
9:     break
10:  end if
11:   $k \leftarrow k + 1$ 
12: end while
13:  $\hat{\mathbf{p}}' \leftarrow \hat{\mathbf{p}}$ 
14: return  $\hat{\mathbf{p}}'$ 

```

---

**Αλγόριθμος IX diff\_dft**

---

**Input:**  $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V$ **Output:**  $X_1$ 

```

1: assert  $|\mathcal{S}_R| = |\mathcal{S}_V|$ 
2:  $N_s \leftarrow |\mathcal{S}_R|$ 
3:  $\Delta \leftarrow \{\emptyset\}$ 
4: for  $n = 0 : N_s - 1$  do
5:    $d_n \leftarrow \mathcal{S}_R[n] - \mathcal{S}_V[n]$ 
6:   append  $d$  to  $\Delta$ 
7: end for
8:  $\mathbf{X} \leftarrow \mathcal{F}\{\Delta\}$ 
9:  $X_1 \leftarrow \mathbf{X}[1]$ 
10: return  $X_1$ 

```

---

Σε πραγματικές συνθήκες, όταν οι ακτίνες των πραγματικών σαρώσεων ή/και των εικονικών σαρώσεων αλλοιώνονται από προσθετικό θόρυβο πεπερασμένου μέγιστου μέτρου, η εκτίμηση θέσης δεν είναι ικανή να προσεγγίσει ασυμπτωτικά την πραγματική θέση με την

εφαρμογή του Θεωρήματος I. Παρ' όλα αυτά, η εκτίμηση θέσης μπορεί να φραχθεί σε μια γειτονιά της πραγματικής θέσης του αισθητήρα. Το Θεώρημα II τυποποιεί αυτή τη δήλωση [Fil22].

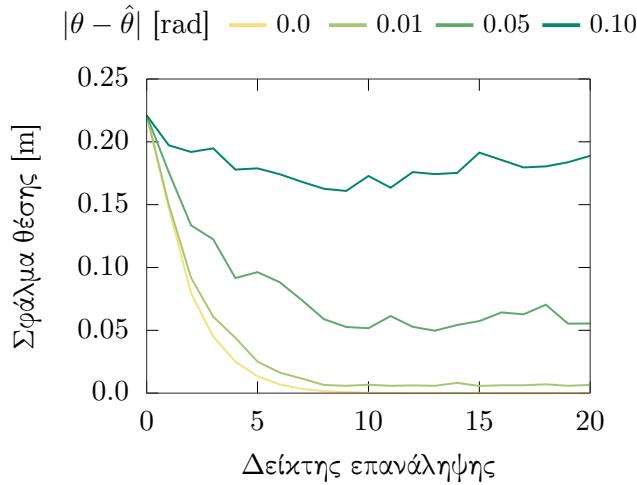
**Θεώρημα II.** Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος I. Έστω επιπλέον ότι η αποστάσεις που αναφέρονται από την πραγματική  $S_R$  και εικονική  $S_V$  σάρωση επηρεάζονται από προσθετικές διαταραχές με πεπερασμένο μέγιστο μέτρο. Τότε η εκτίμηση θέσης  $\hat{l}[k]$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη για  $k \geq k_0$  και ομοιόμορφα τελικά φραγμένη σε μια γειτονιά της πραγματικής θέσης  $l$ . Το μέγεθος της γειτονιάς εξαρτάται από τα δύο μέγιστα μέτρα (με την έννοια της infinity norm) των διαταραχών που αλλοιώνουν τις πραγματικές τιμές των δύο σαρώσεων.

**Επακόλουθο VI.** Σε σύγκριση με την περίπτωση που δεν υπάρχουν διαταραχές, μια λύση που ικανοποιεί το στόχο (\*) δεν είναι αυστηρά εγγυημένη για κάθε αρχική θέση  $\hat{l}[0]$  στην περίπτωση που οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα φέρουν διαταραχές ή/και ο χάρτης  $M$  είναι διεφθαρμένος ως προς το περιβάλλον που αναπαριστά.

Ας συμβολίσουμε και πάλι με  $k_{stop} \in (0, I_T]$  τον δείκτη της τελευταίας επανάληψης, με  $\hat{l}' = \hat{l}[k_{stop}]$  την τελική εκτίμηση της θέσης του αισθητήρα, και με  $B$  το τελικό φράγμα (ultimate bound) του σφάλματος θέσης. Εάν  $\|e(l, \hat{l}[0])\|_2 > B$ , το Θεώρημα II εγγυάται την ικανοποίηση του στόχου (\*) εάν  $k_{stop} \geq k_0$ . Εάν, από την άλλη πλευρά, εάν  $\|e(l, \hat{l}[0])\|_2 \leq B$ , δεν είναι βέβαιο ότι  $\|e(l, \hat{l}')\|_2 < \|e(l, \hat{l}[0])\|_2$ —αυτό που είναι βέβαιο σε αυτή την περίπτωση, όμως, είναι ότι  $\|e(l, \hat{l}[k])\|_2 \not> B$  για όλα κάθε  $k \geq 0$ .

Επιπρόσθετα, σε γενικές συνθήκες δεν υφίσταται σύμπτωση της εκτίμησης προσανατολισμού και του πραγματικού προσανατολισμού. Το σχήμα 4.18 απεικονίζει την εξέλιξη του μέτρου του σφάλματος εκτίμησης θέσης για αυξανόμενες τιμές του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού  $|\theta - \hat{\theta}|$  σε ένα πείραμα όπου το αρχικό σφάλμα θέσης είναι  $[-0.1165, 0.188]$  m.

**Παρατήρηση VI.** Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μετά την εφαρμογή του Θεωρήματος I το σφάλμα θέσης είναι ανάλογο με το σφάλμα προσανατολισμού.



Σχήμα 4.18: Η εξέλιξη του μέτρου σφάλματος εκτίμησης θέσης για αυξανόμενες τιμές του μέτρου του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού. Το τελικό σφάλμα θέσης είναι ανάλογο του αρχικού σφάλματος προσανατολισμού

## 4.4 Μεθοδολογία ευθυγράμμισης από κοινού

Οι δύο προηγούμενες ενότητες περιγράφουν μεθόδους ελάττωσης (α) του σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού όταν η εκτίμηση θέσης συμπίπτει με τη θέση του αισθητήρα, και (β) του σφάλματος εκτίμησης θέσης όταν η εκτίμηση προσανατολισμού ισούται με τον προσανατολισμό του αισθητήρα. Ωστόσο στη γενική περίπτωση καμία ισότητα δεν ισχύει. Επιπρόσθετα, στη γενική περίπτωση διαταραχές επηρεάζουν τις μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα αποστάσεων και το βαθμό ταύτισης του χάρτη  $M$  ως προς το περιβάλλον που αναπαριστά.

Οι τελευταίες δύο προτάσεις είναι κρίσιμης σημασίας για την από κοινού επίδοση των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες δύο ενότητες, λόγω των περιορισμών των ενοτήτων 4.2.7 και 4.3.2, και της Παρατήρησης ??.

### 4.4.1 Αντιμετώπιση των υπό γενικές συνθήκες γωνιακών περιορισμών

Η παράκαμψη ή ο μετριασμός των επιδράσεων των περιορισμών που εμφανίζουν οι μέθοδοι ευθυγράμμισης σε γενικές συνθήκες ανισότητας στάσεων και διαταραχών στοχεύει στη λύση δύο ειδών προβλημάτων, δεδομένων των ιδιοτήτων των Παρατηρήσεων II και VI:

- Το πρώτο αφορά αποκλειστικά στη μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών, και περιγράφεται στην Παρατήρηση III

- Το δεύτερο πρόβλημα αφορά στις συγγενείς Παρατηρήσεις IV και V

Δεδομένου ότι όλες οι μέθοδοι εκτίμησης προσανατολισμού επηρεάζονται από την έλλειψη μηχανισμού σύγκρισης εκτιμήσεων ως προς το σφάλμα τους, προσεγγίζουμε τη λύση των τριών πρώτων προβλημάτων με τον ακόλουθο κοινό τρόπο.

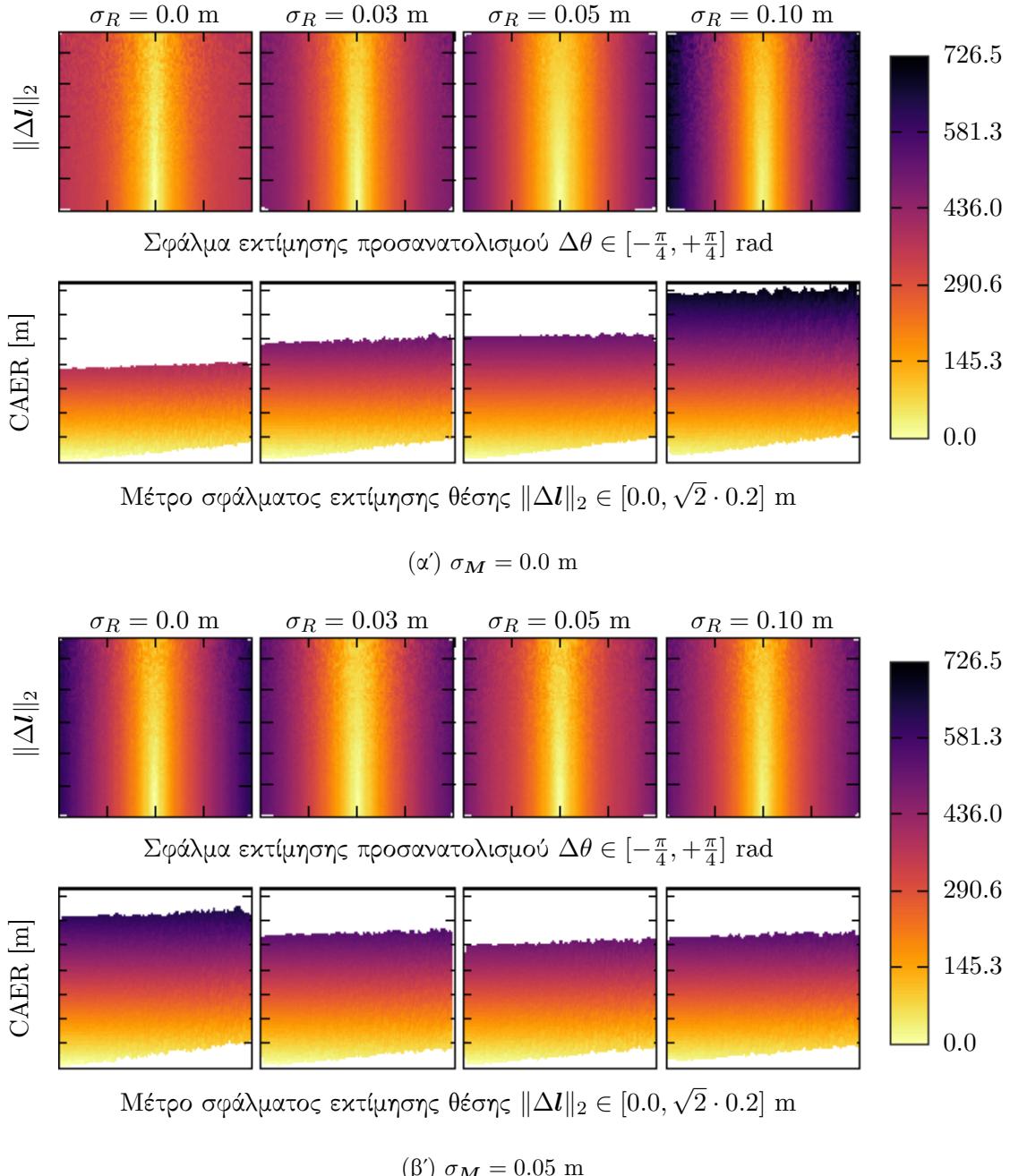
Έστω ότι προσθέτουμε στη μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών την λειτουργία δειγματοληψίας του χάρτη που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.2.6. Έστω επίσης ότι αφαιρούμε από τη μέθοδο του Θησέα τη λειτουργία υπολογισμού και σύγκρισης των τιμών της μετρικής Ποσοστού Διάκρισης για κάθε εκτιμώμενη εκτίμηση προσανατολισμού (λόγω της σε γενικές συνθήκες μη αύξουσας αντιστοιχίας του μέγιστου ποσοστού διάκρισης στο ελάχιστο σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού—Παρατήρηση V). Τότε οι τρεις μέθοδοι γίνονται εναλλάξιμες υπό την έννοια ότι, για μία δεδομένη εκτίμησης στάσης και ένα δεδομένο βαθμό δειγματοληψίας  $\nu$ , καθεμία παράγει ένα σύνολο εκτιμήσεων στάσης μεγέθους  $2^\nu$ .

Αυτό που επιζητούμε σε αυτό το στάδιο είναι η εφεύρεση ενός μέτρου σύγκρισης των  $2^\nu$  εκτιμήσεων προσανατολισμού ως προς το (άγνωστο) σφάλμα τους. Το μέτρο σύγκρισης θα πρέπει να αντικατοπτρίζει τις ιδιότητες που περιγράφονται από τις παρατηρήσεις II και VI, και συνεπώς τα κριτήρια που πρέπει να ικανοποιεί αυτή η μετρική θα είναι, με βάση τα παραπάνω, τα ακόλουθα δύο:

- (K1) Δεδομένης της παρατήρησης VI, η μετρική θα πρέπει για δεδομένο σφάλμα θέσης να αυξάνει για αυξανόμενο μέτρο σφάλματος προσανατολισμού
- (K2) Δεδομένης της παρατήρησης II, η μετρική θα πρέπει για δεδομένο σφάλμα προσανατολισμού να αυξάνει για αυξανόμενο μέτρο σφάλματος θέσης

Για την ικανοποίηση των K1 και K2 εισάγουμε τη μετρική Cummulative Absolute Error per Ray (CAER), η οποία δίνεται από την εξίσωση (4.32), και παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 4.19 για μεταβλητές τιμές διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα και επίπεδα διαφύοράς του χάρτη ως προς το περιβάλλον που αναπαριστά, σε αντιστοιχία με το σχήμα 4.14.

$$\text{CAER}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V) \triangleq \sum_{n=0}^{N_s-1} \left| \mathcal{S}_R[n] \Big|_{(x,y,\theta)} - \mathcal{S}_V[n] \Big|_{(\hat{x},\hat{y},\hat{\theta})} \right| \quad (4.32)$$



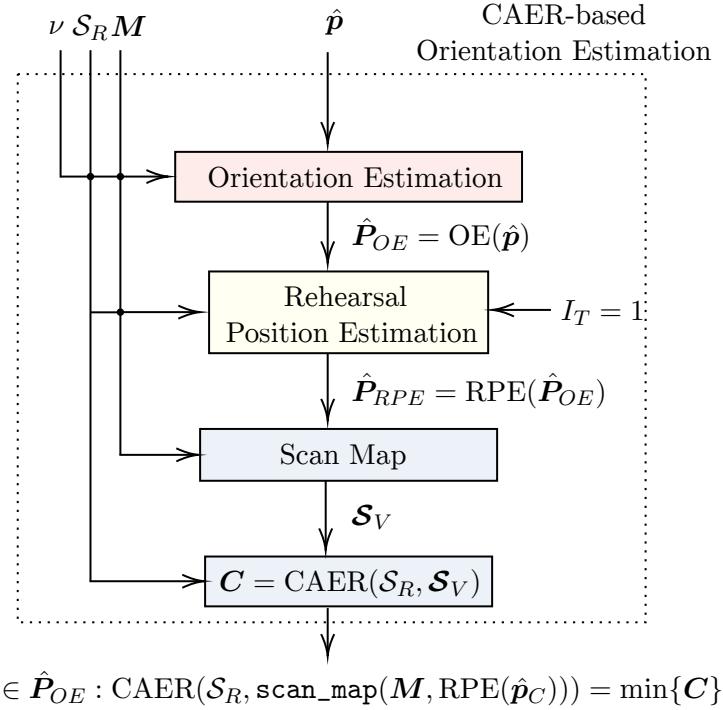
Σχήμα 4.19: Κατόφεις (πρώτη και τρίτη σειρά) και πλάγιες όψεις (δεύτερη και τέταρτη) της μετρικής CAER (εξίσωση 4.32) από  $10^5$  ζεύγη μίας σάρωσης σταθερής στάσης και εικονικών σαρώσεων που συνελήφθησαν από τυχαίες στάσεις, ανάλογα με την απόσταση  $\| \Delta l \|_2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$ ,  $\Delta x, \Delta y \in [-0.2, +0.2] \text{ m}$ , και το σχετικό προσανατολισμό  $\Delta\theta \in [-\pi/4, +\pi/4] \text{ rad}$  των στάσεων από όπου αυτές καταγράφηκαν, για αυξανόμενες τιμές της τυπικής απόκλισης των διαταραχών των πραγματικών μετρήσεων  $\sigma_R$ , και διαφθοράς του χαρτη  $\sigma_M$ . Οι εκτιμήσεις στάσεις που είναι πιο κοντά στην πραγματική στάση από άποψη (α) προσανατολισμού και (β) θέσης παρουσιάζουν χαμηλότερες τιμές CAER από εκείνες που απέχουν περισσότερο από αυτήν

Με την εισαγωγή της λειτουργίας δειγματοληψίας κατά Θησέα στη μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών, την αφαίρεση του υπολογισμού και σύγκρισης των τιμών του Ποσοστού Διάκρισης, και την εισαγωγή της μετρικής CAER, καταφέρνουμε να χτυπήσουμε με ένα σμπάρο δύο τριγώνια για όλες τις μεθόδους εκτίμησης προσανατολισμού, διότι με αυτόν τον τρόπο:

- Ιδρύουμε έναν ορθολογικό μηχανισμό σύγκρισης των εκτιμήσεων προσανατολισμού της μεθόδου εκτίμησης προσανατολισμού Πρώτων Αρχών (Παρατηρήσεις III και IV)
- παραχάμπτουμε τον ύφαλο που δημιουργεί η σύγκριση τους μέσω της μετρικής Ποσοστού Διάκρισης για τις Προκρούστειες μεθόδους σε συνθήκες μη σύμπτωσης θέσεων (Παρατήρηση V )

Καθώς κάθε μέθοδος εξάγει πλέον 2<sup>ν</sup> εκτιμήσεις προσανατολισμού, όλες με την ίδια εκτίμηση θέσης, συλλαμβάνοντας από την κάθε μία μία εικονική σάρωση εντός του *M*, και εισάγοντας την στη μετρική CAER, παράγεται μία τιμή που αυξάνει για αυξανόμενο σφάλμα προσανατολισμού (σχήμα 4.19, πρώτη και τρίτη σειρά) — και αυτή η ιδιότητα διατηρείται στη γενική συνθήκη όπου οι μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα και η ταύτιση του χάρτη με το περιβάλλον που αναπαριστά διαφθείρονται από θόρυβο.

Σε αυτό το σημείο έχουμε εκμεταλλευτεί μόνο την ιδιότητα της παρατήρησης II. Για τον επιπρόσθετο διαχωρισμό ανάμεσα στις εκτιμήσεις προσανατολισμού εκμεταλλευόμαστε την καμπυλότητα της CAER και την ιδιότητα της παρατήρησης VI με τον εξής τρόπο: δεδομένου ότι εκτιμήσεις στάσης μεγαλύτερου σφάλματος προσανατολισμού οδηγούν σε (α) υψηλότερα σφάλματα θέσης όταν εισαχθούν στη μέθοδο εκτίμησης θέσης Πρώτων Αρχών (Παρατήρηση VI), και (β) υψηλότερες τιμές CAER, αν εισάγουμε τις 2<sup>ν</sup> εκτιμήσεις στάσης που έχουν προέλθει από τις τρεις μεθόδους εκτίμησης προσανατολισμού στη μέθοδο εκτίμησης θέσης για έναν περιορισμένο αριθμό επαναλήψεων, τότε οι περισσότερο ανακριβείς ως προς τον προσανατολισμό στάσεις θα οδηγηθούν σε περισσότερο ανακριβείς θέσεις, και, κατά συνέπεια, οι εικονικές σαρώσεις που συλλαμβάνονται από αυτές θα οδηγήσουν σε μεγαλύτερες τιμές CAER σε σχέση με τις λιγότερο ανακριβείς κατά προσανατολισμό στάσεις. Αυτό το στάδιο δεν διενεργείται ώστε να υπολογισθεί η τελική εκτίμηση θέσης, αλλά ως πρόβα αυτής, με τον αποκλειστικό σκοπό της διάκρισης της εκτίμησης στάσης της οποίας το σφάλμα προσανατολισμού είναι το μικρότερο ανάμεσα σε όλες τις 2<sup>ν</sup> εκτιμήσεις προσανατολισμού. Με αυτόν τον



Σχήμα 4.20: Το μπλοκ διάγραμμα του τελικού συστήματος εκτίμησης προσανατολισμού του συστήματος ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σφράωσεις FSMSM

τρόπο γίνεται εφικτό να εισαχθεί μόνο μία εκτίμηση στάσης από τις  $2^\nu$  στη μέθοδο εκτίμησης θέσης (αυτή με τη χαμηλότερη τιμή CAER), με αποτέλεσμα χαμηλότερο χρόνο εκτέλεσης της από κοινού μεθόδου ευθυγράμμισης από ότι εάν εισάγονταν όλες οι εκτιμήσεις στάσης στη μέθοδο εκτίμησης θέσης Πρώτων Αρχών.

Πιο συγκεκριμένα: έστω τα δεδομένα του Προβλήματος Π3. Έστω επίσης ένας βαθμός δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Τότε το τελικό σύστημα εκτίμησης προσανατολισμού CAER-based Orientation Estimation, το οποίο απεικονίζεται σε μπλοκ διάγραμμα στο σχήμα 4.20 και σε ψευδοκώδικα στον Αλγόριθμο X, υπολογίζει πρώτα  $2^\nu$  εκτιμήσεις στάσης, οι οποίες αποτελούν διατεταγμένα στοιχεία του συνόλου  $\hat{\mathbf{P}}_{OE} = \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}_k)\}, k = 0, \dots, 2^\nu - 1$ . Όλες οι στάσεις του  $\hat{\mathbf{P}}_{OE}$  έχουν ίσες εκτιμήσεις θέσης, αλλά διαφορετικές εκτιμήσεις προσανατολισμού. Η τελική εκτίμηση προσανατολισμού για κάθε υποψήφια αρχική εκτίμηση προσανατολισμού  $\hat{\theta}_k = \hat{\theta} + k \cdot \gamma / 2^\nu$  μεσολαβείται χρησιμοποιώντας έναν από τους βασικούς αλγορίθμους των ενοτήτων 4.2.1, 4.2.2, και 4.2.3, και ο δείκτης  $k$  είναι ο δείκτης που καθορίζει τη διάταξη τους στο σύνολο  $\hat{\mathbf{P}}_{OE}$ .

Προκειμένου να δημιουργηθεί μία ευχρινώς διαχωρισμένη ιεραρχία τιμών μετρικών αξιολόγησης του σφράλματος των εκτιμήσεων προσανατολισμού, κάθε εκτίμηση στάσης του  $\hat{\mathbf{P}}_{OE}$

---

**Αλγόριθμος X caer-based\_orientation\_estimation**


---

**Input:**  $\text{rc}$ ,  $M$ ,  $\mathcal{S}_R$ ,  $\hat{\mathbf{p}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ ,  $\gamma$ ,  $N_s$ ,  $\nu$

**Output:**  $\hat{\mathbf{p}}_C(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}_C)$

```

1:  $\hat{\mathbf{P}}_{OE} \leftarrow \{\emptyset\}$ 
2: for  $k = 0 : 2^\nu - 1$  do
3:    $\hat{\mathbf{p}}_k \leftarrow (\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta} + k \cdot \gamma / 2^\nu)$  (εξ. 4.25)
4:    $\mathcal{S}_V^k \leftarrow \text{scan\_map}(M, \hat{\mathbf{p}}_k, N_s)$  (Αλγόριθμος VII)
5:    $\hat{\theta}' \leftarrow \text{rcm}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{\mathbf{p}}_k, \gamma)$  (Αλγόριθμος XI)
6:    $\hat{\theta}_k \leftarrow \hat{\theta}' + k \cdot \gamma / 2^\nu$ 
7:   append  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}_k)$  to  $\hat{\mathbf{P}}_{OE}$ 
8:    $k \leftarrow k + 1$ 
9: end for

10:  $\hat{\mathbf{P}}_{RPE} \leftarrow \{\emptyset\}$ 
11: for  $k = 0 : 2^\nu - 1$  do
12:    $\hat{\mathbf{p}}'_k \leftarrow \text{tc_x1}(M, \mathcal{S}_R, \hat{\mathbf{P}}_{OE}[k], 1, \infty, N_s)$  (Αλγόριθμος VIII)
13:   append  $\hat{\mathbf{p}}'_k$  to  $\hat{\mathbf{P}}_{RPE}$ 
14: end for

15:  $C \leftarrow \{\emptyset\}$ 
16: for  $k = 0 : 2^\nu - 1$  do
17:    $\mathcal{S}_V^{k'} \leftarrow \text{scan_map}(M, \hat{\mathbf{P}}_{RPE}[k], N_s)$ 
18:   append CAER( $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V^{k'}$ ) to  $C$  (εξ. 4.32)
19: end for

20:  $k_{\min} \leftarrow \arg \min\{C\}$ 
21:  $\hat{\mathbf{p}}_C(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}_C) \leftarrow \hat{\mathbf{P}}_{OE}[k_{\min}]$ 
22: return  $\hat{\mathbf{p}}_C$ 

```

---

## Αλγόριθμος XI rcm

**Input:**  $\text{rc}$ ,  $\mathcal{S}_R$ ,  $\mathcal{S}_V$ ,  $\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ ,  $\gamma$

**Output:**  $\hat{\theta}'$

1: if  $rc = rc\_fm$  then

$$2: \quad (\hat{\theta}', \cdot) \leftarrow \texttt{rc\_fm}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{\mathbf{p}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}), \gamma)$$

(Αλγόριθμος Ι)

3: else if  $rc = rc\_x1$  then

$$4: \quad \hat{\theta}' \leftarrow \text{rc\_x1}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{\mathbf{p}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}))$$

(Αλγόριθμος II)

5: else if  $rc = rc_{uf}$  then

$$6: \quad (\hat{\theta}', \cdot) \leftarrow \text{rc\_uf}(\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_V, \hat{\mathbf{p}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}), \gamma)$$

(Αλγόριθμος III)

7: end if

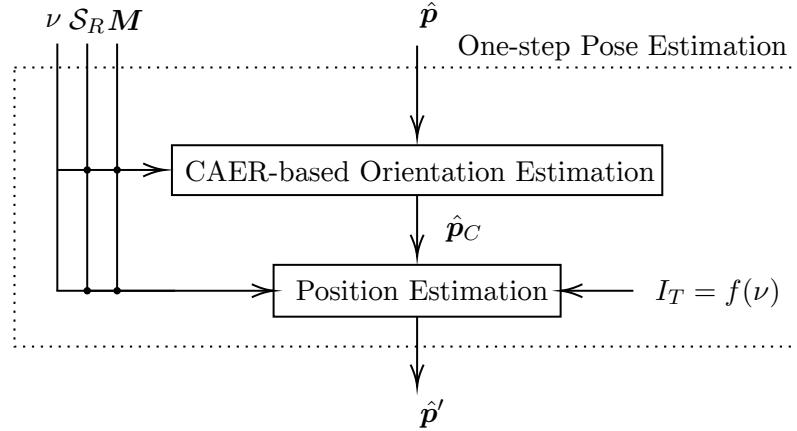
8: **return**  $\hat{\theta}'$

μεταφέρεται στο σύστημα εκτίμησης θέσης, όπου η θέση κάθε εκτίμησης στάσης μετατοπίζεται μία φορά ( $I_T = 1$ ), σύμφωνα με τον Αλγόριθμο VIII. Αυτή η λειτουργία, η οποία συμβολίζεται με τον τελεστή  $RPE(\cdot)$  στο σχήμα 4.20, παράγει το σύνολο  $\hat{P}_{RPE} = \{(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{\theta}_k)\}$ ,  $|\hat{P}_{RPE}| = 2^v$ . Με την πρόβα εκτίμησης θέσης κάθε εκτίμησης στάσης του  $\hat{P}_{OE}$  και την καταγραφή της τιμής CAER για κάθε μια από τις μετατοπισμένες εκτιμήσεις στάσης του  $\hat{P}_{RPE}$ , είναι δυνατόν να καθοριστεί μια κατάταξη σφάλματος στάσης μεταξύ όλων των εκτιμήσεων του συνόλου  $\hat{P}_{OE}$ , και ταυτόχρονα να διατηρείται μόνο μία εκτίμηση στάσης για την επόμενη επανάληψη της συνολικής μεθόδου εκτίμησης.<sup>3</sup> Η εκτίμηση στάσης  $\hat{p}_C \in \hat{P}_{OE}$  η οποία όταν μετατοπιστεί μία φορά καταγράφει την ελάχιστη τιμή CAER μεταξύ όλων των παρομοίως μεταχειρισθέντων εκτιμήσεων στάσης του  $\hat{P}_{OE}$  είναι αυτή που εξάγεται από το τελικό σύστημα εκτίμησης προσανατολισμού.

#### 4.4.2 Το σύστημα από κοινού ευθυγράμμισης

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε το τελικό γενικό σύστημα που στοχεύει στην επίλυση του προβλήματος Π3 και το οποίο είναι ικανό να ενσωματώσει τη μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού της προηγούμενης ενότητας και τη μέθοδο εκτίμησης θέσης (ενότητα 4.3). Το προτεινόμενο σύστημα εκτιμά αρχικά τον προσανατολισμό του αισθητήρα (ισοδύναμα του ρομπότ στον οποίο είναι προσαρτημένος—Παρατήρηση ??), και στη συνέχεια τη θέση του,

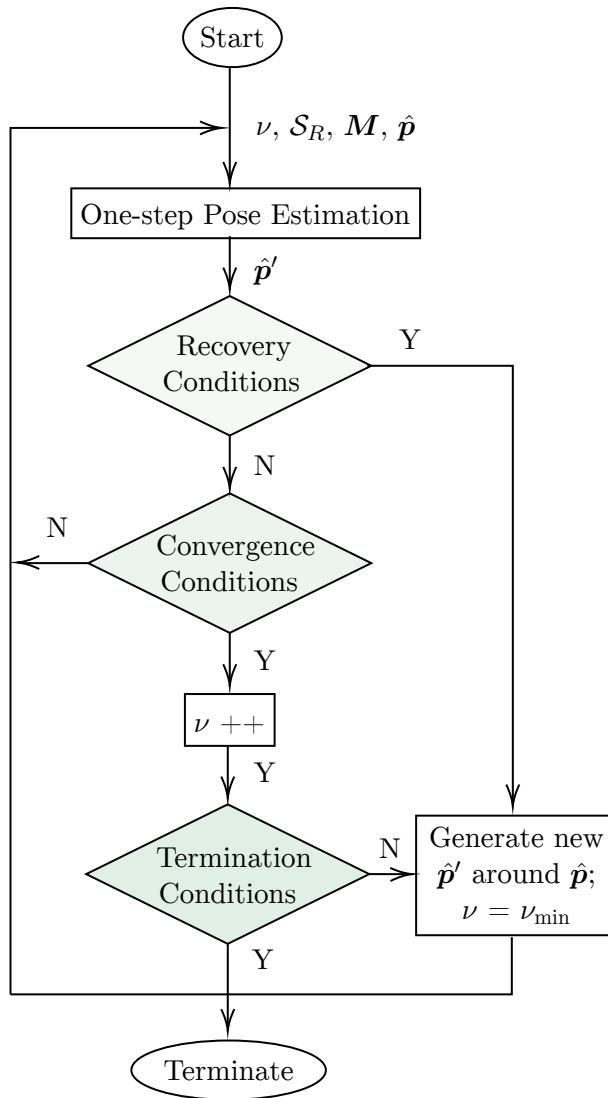
<sup>3</sup>Σε αντίθετη περίπτωση η διόρθωση της θέσης των 2<sup>ν</sup> εκτιμήσεων στάσης και η επανατροφοδότησή τους στο σύστημα θα προκαλούσε εκθετικό κόστος σε χρόνο εκτέλεσης.



Σχήμα 4.21: Η κεντρική μέθοδος εκτίμησης στάσης του FSMSM, One-step Pose Estimation

ως προς το σύστημα συντεταγμένων του χάρτη  $M$ . Ως συνέπεια της παρατήρησης ?? η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι την ικανοποίηση συνθήκης τερματισμού. Η μέθοδος αυτή περιγράφεται στα ακόλουθα.

Έστω οι προϋποθέσεις του προβλήματος ΙΙ3, δηλαδή η αρχική εκτίμηση εισόδου  $\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ , η πραγματική σάρωση  $S_R$ , και ο χάρτης  $M$ . Τότε η μέθοδος ελάττωσης του συνολικού σφάλματος εκτίμησης στάσης που προτείνουμε, την οποία ονομάζουμε Fourier Scan-to-Map-Scan Matching (FSMSM) και η οποία παρουσιάζεται στο σχήμα 4.22—η μέθοδος μειώνει το σφάλμα εκτίμησης με την επαναληπτική εκτέλεση της διαδικασίας εκτίμησης στάσης ενός βήματος (One-step Pose Estimation, OPE—σχήμα 4.21), μέχρι να ικανοποιηθεί ένα σύνολο συνθηκών τερματισμού. Η FSMSM ξεκινά με ένα αρχικό βαθμό δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu = \nu_{\min}$ . Η εκτίμηση της στάσης εισόδου επεξεργάζεται από την OPE, και η έξοδός της  $\hat{p}'$  εξετάζεται ως προς συνθήκες απόκλισης και σύγκλισης. Εάν η προκύπτουσα εκτίμηση στάσης βρεθεί εκτός του χάρτη  $M$  τότε δημιουργείται με τυχαίο τρόπο μια νέα εκτίμηση από την αρχική εκτίμηση  $\hat{p}$ , και η διαδικασία επανεκκινεί, με αρχική εκτίμηση τη νέα. Εάν δεν παρατηρείται σημαντική διόρθωση της εκτίμησης  $\|\hat{p}' - \hat{p}\|_2 < \varepsilon_{\delta_p}$ , τότε ο βαθμός δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu$  αυξάνεται και η τελευταία εκτίμηση της OPE της τροφοδοτείται ως νέα αρχική συνθήκη. Η αύξησή του βαθμού δειγματοληψίας χρησιμεύει ως μέσο μείωσης του σφάλματος προσανατολισμού και συνεπώς του σφάλματος εκτίμησης θέσης (Παρατηρήσεις ΙΙ και VI). Διαφορετικά η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται με νέα αρχική εκτίμηση την τελευταία της OPE έως ότου δεν παρατηρηθεί σημαντική διόρθωση. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου επιτευχθεί μέγιστος βαθμός δειγματοληψίας χάρτη  $\nu = \nu_{\max}$ , οπότε η FSMSM τερμα-



Σχήμα 4.22: Το διάγραμμα ροής του FSMSM. Η εκτέλεση αρχίζει με έναν αρχικό ελάχιστο βαθμό δειγματοληφίας του χάρτη  $\nu_{\min}$ , τη σάρωση  $S_R$  που καταγράφεται από τον φυσικό αισθητήρα, και το χάρτη  $M$  του περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκεται το ρομπότ. Η αρχική εκτίμηση της στάσης παρέχεται από έναν παρατηρητή κατά τη διάρκεια εκτίμησης στάσης βάσει περιορισμένης αβεβαιότητος, ή με τη μορφή μιας υπόθεσης κατά τη διάρκεια εκτίμησης στάσης βάσει καθολικής αβεβαιότητος. Η εσωτερική μέθοδος One-step Pose Estimation (σχήμα 4.21) καλείται επαναληπτικά, ενημερώνοντας την εκτίμηση στάσης μέχρι να επιτευχθεί ένας μέγιστος βαθμός δειγματοληφίας, σύγκλιση της εκτίμησης, και ικανοποίηση κριτηρίων σύγκλισης. Σε περίπτωση απόκλισης, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που η εκτίμηση στάσης έχει μετατοπισθεί εκτός των ορίων του χάρτη, και σε περίπτωση που η τελική εκτίμηση δεν ικανοποιεί συνθήκες τερματισμού, τότε δημιουργείται με τυχαίο τρόπο μία νέα εκτίμηση στάσης και η διαδικασία εκτίμησης επανεκκινεί ως μη γενόμενη.

τίζει εάν πληρούται μια τελική συνθήκη. Αυτή η τελική συνθήκη διευκολύνει την αποφυγή τοπικών μεγίστων. Στην περίπτωση που αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται, δημιουργείται και πάλι με τυχαίο τρόπο μία νέα στάση και η διαδικασία επανεκκινεί.

Η κεντρική μέθοδος One-step Pose Estimation χρησιμοποιεί τη μέθοδο εκτίμησης προσανατολισμού της ενότητας 4.4.1 και τη μέθοδο εκτίμησης θέσης της ενότητας 4.3. Στην τελευταία ο αριθμός των επαναλήψεων  $I_T$  είναι αύξουσα συνάρτηση του βαθμού δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu$  ( $I_T = f(\nu)$  στο σχήμα 4.21).<sup>4</sup> Το σύστημα εκτίμησης θέσης παράγει την εκτίμηση στάσης  $\hat{p}'$ , η οποία στη συνέχεια τροφοδοτείται πίσω στο σύστημα εκτίμησης προσανατολισμού με τη μορφή της νέας του εκτίμησης στάσης:  $\hat{p} \leftarrow \hat{p}'$ . Στην πράξη το σύνολο στάσεων  $\hat{P}_{OE}$  συμπληρώνεται με μία στάση της οποίας η θέση είναι ίση με  $\hat{p}$ , και της οποίας ο προσανατολισμός είναι ίσος με τον προσανατολισμό της  $\hat{p}_C$  που παράγει την ελάχιστη τιμή CAER με την πάροδο του χρόνου. Αυτή η προσθήκη εισάγει μια μορφή μνήμης στο σύστημα, η οποία το βοηθά στην αποφυγή αποκλίσεων και η οποία, ως εκ τούτου, ωφελεί την ταχύτητα εκτέλεσης. Ο αλγόριθμος XII παρουσιάζει σε ψευδοκώδικα τα βήματα εκτέλεσης του FSMSM.

## 4.5 Πειραματική αξιολόγηση

Στην παρούσα ενότητα δοκιμάζεται εκ νέου η Υπόθεση ??, αυτή τη φορά στα συμφραζόμενα της εύρεσης της στάσης του ρομπότ υπό περιορισμένη αβεβαιότητα, και πιο συγκεκριμένα με στόχο την επίλυση του Προβλήματος ΙΙ3, δεδομένων των παραδοχών και περιορισμών του. Προς αυτόν τον στόχο δοκιμάζεται η επίδοση της μεθόδου FSMSM στο έργο της ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις. Ταυτόχρονα η επίδοσή της δοκιμάζεται έναντι αυτής των πιο διαδεδομένων αλγορίθμων ευθυγράμμισης σαρώσεων της βιβλιογραφίας, οι οποίοι δύνανται να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του ίδιου προβλήματος. Σημειώνουμε ότι στο σύνολό τους οι τελευταίες λειτουργούν υπολογίζοντας αντιστοιχίσεις ανάμεσα στις

<sup>4</sup>Η λογική της αλυσιδωτής σύνδεσης του αριθμού των επαναλήψεων της με το βαθμό δειγματοληψίας του χάρτη  $\nu$  είναι η ακόλουθη. Δεδομένου ότι το σφάλμα προσανατολισμού είναι αντιστρόφως ανάλογο του  $\nu$ , σε χαμηλούς βαθμούς δειγματοληψίας χάρτη, όταν το σφάλμα εκτίμησης θέσης είναι στα υψηλότερά του επίπεδα, εάν ο αριθμός των επαναλήψεων ήταν υψηλός τότε η εκτίμηση της θέσης θα ήταν ευάλωτη σε απόκλιση. Επομένως ο αριθμός των επαναλήψεων διατηρείται χαμηλός στα αρχικά στάδια έτσι ώστε να υπάρχει ισορροπία μεταξύ της μείωσης του σφάλματος θέσης και της απόκλισης της εκτίμησης θέσης. Σε υψηλότερες τιμές του  $\nu$  το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού έχει μειωθεί, και στη συνέχεια η απόκλιση περιορίζεται ή/και επιτυγχάνεται σε υψηλότερες τιμές επανάληψης  $I_T$ . Καθώς η εκτίμηση προσανατολισμού γίνεται όλο και πιο ακριβής, το σύστημα εκτίμησης θέσης αφήνεται να επαναλάβει τη διαδικασία του περισσότερες φορές ώστε να είναι εφικτή η περαιτέρω μείωση του σφάλματος θέσης.

---

**Αλγόριθμος XII FSMSM**

---

**Input:**  $\mathcal{S}_R$ ,  $\mathbb{M}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $\text{rc}$ ,  $\gamma$ ,  $N_s$ ,  $\nu_{\min}$ ,  $\nu_{\max}$ ,  $I_T$ ,  $\varepsilon_{\delta p}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ **Output:**  $\hat{\mathbf{p}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ 

```

1:  $\nu \leftarrow \nu_{\min}$ 
2: while  $\nu \leq \nu_{\max}$  do
3:    $\hat{\mathbf{p}}_C \leftarrow \text{caer-based\_orientation\_estimation}(\text{rc}, M, \mathcal{S}_R, \hat{\mathbf{p}}, \gamma, N_s, \nu)$       (Αλγ. X)
4:    $\hat{\mathbf{p}}' \leftarrow \text{tc\_x1}(M, \mathcal{S}_R, \hat{\mathbf{p}}_C, I_T, \infty, N_s)$                       (Αλγόριθμος VIII)
5:   if  $\hat{\mathbf{p}}'$  not in  $M$  then
6:     generate new  $\hat{\mathbf{p}}$ ;  $\nu \leftarrow \nu_{\min}$ ; continue
7:   end if
8:   if  $\|\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{p}}\| < \varepsilon_{\delta p}$  then
9:      $\nu \leftarrow \nu + 1$ 
10:  end if
11:  if  $\nu = \nu_{\max}$  then
12:    if  $\text{CAER}(\mathcal{S}_R, \text{scan\_map}(M, \hat{\mathbf{p}}')) \not\leq (\sigma_1 + \sigma_2)^{1/2}$  then
13:      generate new  $\hat{\mathbf{p}}$ ;  $\nu \leftarrow \nu_{\min}$ ; continue
14:    else
15:       $\hat{\mathbf{p}} \leftarrow \hat{\mathbf{p}}'$ ; break
16:    end if
17:  end if
18:   $\hat{\mathbf{p}} \leftarrow \hat{\mathbf{p}}'$ 
19: end while
20: return  $\hat{\mathbf{p}}$ 

```

---

Σύνολο δεδομένων	Πληθυκότητα
aces	7373
fr079	4933
intel	13630
mit_csaill	1987
mit_killian	17479

Πίνακας 4.1: Η ονομασία και το μέγεθος κάθε συνόλου δεδομένων που χρησιμοποιήθηκε για την αξιολόγηση των επιδόσεων αλγορίθμων της βιβλιογραφίας και της παρούσας διατριβής στην επίλυση του προβλήματος της ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις χάρτη ΙΙ3

ακτίνες των σαρώσεων εισόδου, ενώ η FSMSM δεν υπολογίζει σε κανένα στάδιο της επεξεργασίας της αντιστοιχίσεις.

#### 4.5.1 Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διαδικασία διεξάγεται με τη χρήση πέντε καθιερωμένων και διαθέσιμων συνόλων δεδομένων αναφοράς που παραχωρούνται από το Τμήμα Επιστήμης της Πληροφορικής του πανεπιστημίου του Freiburg.<sup>5</sup> Κάθε σύνολο δεδομένων αποτελείται από μία συλλογή δισδιάστατων μετρήσεων αποστάσεων από έναν αισθητήρα αποστάσεων lidar και τη στάση  $r(x, y, \theta)$  από την οποία πραγματοποιήθηκε η κάθε μία. Οι μετρήσεις του κάθε συνόλου δεδομένων παρήχθησαν από αισθητήρες διαφορετικού μέγιστου εύρους και αριθμού ακτίνων. Η ονομασία και το μέγεθος κάθε συνόλου δεδομένων που χρησιμοποιείται για την πειραματική διαδικασία παρουσιάζεται στον πίνακα 4.1.

Η πειραματική διάταξη είναι η ακόλουθη. Οι ακτίνες κάθε δείγματος του συνόλου δεδομένων  $D_k^d$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 4\}$ ,  $d \in \{0, 1, \dots, |D_k|\}$  πρώτα προβάλλονται στο επίπεδο  $x - y$  γύρω από τη στάση  $r_k^d$ . Οι σαρώσεις των συνόλων δεδομένων δεν είναι πανοραμικές, επομένως ο υπόλοιπος γωνιακός χώρος συμπληρώνεται με ένα ημικυκλικό τόξο που ενώνει τις δύο ακραίες ακτίνες της κάθε σάρωσης. Η ακτίνα του ημικυκλίου ορίζεται ως η ελάχιστη των δύο ακραίων ακτίνων του  $D_k^d$ . Διαφορετικοί τρόποι για το κλείσιμο του περιβάλλοντος (π.χ. μέσω καθρεφτισμού των μετρήσεων κατά  $x$  ή  $y$ , ή ένωσης των δύο ακραίων ακτίνων μέσω ευθύγραμμου τμήματος) έχουν βρεθεί ισοδύναμοι όσον αφορά στην επίδοση των υπό δοκιμής μεθόδων. Το σύνολο σημείων που προκύπτει θεωρείται ως ο περιβάλλον χώρος  $W_k^d$  του αισθητήρα αποστάσεων (π.χ. το περιβάλλον του σχήματος ??). Τότε ο χάρτης  $M_k^d$  του περιβάλλοντος

<sup>5</sup>Τα σύνολα δεδομένων είναι διαθέσιμα στη διεύθυνση <http://ais.informatik.uni-freiburg.de/slamevaluation/datasets.php>

$\mathbf{W}_k^d$  τίθεται ως  $\mathbf{M}_k^d \equiv \mathbf{W}_k^d$ . Προκειμένου να προκληθούν παραμορφώσεις στο χάρτη κάθε συντεταγμένη όλων των σημείων του  $\mathbf{M}_k^d$  διαταράσσεται από σφάλματα που εξάγονται από την κανονική κατανομή  $\mathcal{N}_M \sim (0, \sigma_M^2)$ . Η πραγματική στάση του αισθητήρα  $\mathbf{p}_k^d$  παράγεται τυχαία εντός του πολυγώνου που σχηματίζεται από το σύνολο σημείων  $\mathbf{W}_k^d$ . Η σάρωση που θεωρείται στο εξής και αναφέρεται ως πραγματική,  $S_{R,k}^d$ , η οποία θεωρείται ότι αναφέρεται από τον φυσικό αισθητήρα, υπολογίζεται μέσω δεσμοβολής  $N_s$  ακτίνων από τη στάση  $\mathbf{p}_k^d$  προς τις ακμές του πολυγώνου που σχηματίζεται από τα σημεία του συνόλου  $\mathbf{W}_k^d$ , σε ένα γωνιακό πεδίο όρασης  $\lambda = 2\pi$ . Η αρχική εκτίμηση της στάσης του αισθητήρα  $\hat{\mathbf{p}}_k^d$  λαμβάνεται μέσω διαταραχής των συνιστωσών της πραγματικής στάσης  $\mathbf{p}_k^d$  με ποσότητες που εξάγονται από ομοιόμορφα κατανεμημένες κατανομές σφαλμάτων  $U_{xy}(-\bar{\delta}_{xy}, \bar{\delta}_{xy})$ ,  $U_\theta(-\bar{\delta}_\theta, \bar{\delta}_\theta)$ :  $\bar{\delta}_{xy}, \bar{\delta}_\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Προκειμένου να ελεγχθεί η επίδοση των αλγορίθμων σε πραγματικές συνθήκες δοκιμάζονται πέντε επίπεδα θορύβου με επίδραση στις μετρήσεις της πραγματικής σάρωσης  $S_{R,k}^d$ : κάθε μέτρηση διαταράσσεται από θόρυβο  $\mathcal{N}_R \sim (0, \sigma_R^2)$ :  $\sigma_R \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.10, 0.20\}$  m. Οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων υπολογίστηκαν από εμπορικά διαθέσιμους πανοραμικούς αισθητήρες lidar, προσδιορίζοντας το μέγεθος της μέγιστης αναφερόμενης τιμής των σφαλμάτων απόστασης τους και διαιρώντας το με τον συντελεστή τρία. Το σκεπτικό είναι ότι 99.73% των σφαλμάτων εντοπίζονται εντός 3σ γύρω από την πραγματική απόσταση μεταξύ μιας ακτίνας και ενός εμποδίου, υποθέτοντας ότι τα σφάλματα κατανέμονται κανονικά. Η ελάχιστη τιμή  $\sigma_R = 0.01$  m αναφέρεται για ακριβείς πανοραμικούς αισθητήρες μεγάλου κόστους VELODYNE [Vel], και οι υπόλοιπες για πανοραμικούς αισθητήρες με ελκυστική τιμή, αλλά αυξημένα επίπεδα διαταραχών, π.χ. RPLIDAR A2M8, YDLIDAR G4, G6, TG30 και X4 [RPL; YDL]. Επιπλέον, δοκιμάζονται δύο επίπεδα διαφοράς χάρτη:  $\sigma_M \in \{0.0, 0.05\}$  m. Οι μέγιστες κατά θέση και προσανατολισμό μετατοπίσεις  $\bar{\delta}_{xy}$  και  $\bar{\delta}_\theta$  ορίζονται σε  $\bar{\delta}_{xy} = 0.20$  m και  $\bar{\delta}_\theta = \pi/4$  rad. Η τιμή της μεταβλητής  $\bar{\delta}_{xy}$  επιλέχθηκε ως τέτοια από αναφορές σφαλμάτων θέσης σε πραγματικές συνθήκες [Pen+18]. Η τιμή της μεταβλητής  $\bar{\delta}_\theta$  επιλέχθηκε ως τέτοια προκειμένου να συμπεριληφθούν σφάλματα προσανατολισμού στο στάδιο αρχικοποίησης της παρακολούθησης στάσης, και σφάλματα που προκαλούνται λόγω αποκλινουσών ενδείξεων οδομετρίας. Το μέγεθος της πραγματικής σάρωσης εισόδου ορίστηκε σε  $N_s = 360$  ακτίνες.

Διακρίνουμε τον FSMSM σε τρεις υλοποιήσεις, ανάλογα με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του προσανατολισμού της στάσης του φυσικού αισθητήρα. Σε ό,τι

ακολουθεί σημειώνουμε τον FSMSM με τη χρήση της μεθόδου (α) Πρώτων Αρχών ως  $x1$ , (β) Προκρούστη ως  $uf$ , και (γ) Fourier-Mellin μίας διάστασης ως  $fm$ . Ο ελάχιστος και ο μέγιστος ρυθμός υπερδειγματοληψίας του χάρτη για τις μεθόδους  $fm$  και  $uf$  ορίστηκαν σε  $(\mu_{min}, \mu_{max}) \equiv (2^{\nu_{min}}, 2^{\nu_{max}}) \equiv (2^2, 2^5)$ , ενώ για τη μέθοδο  $x1$ :  $(\mu_{min}, \mu_{max}) \equiv (2^{\nu_{min}}, 2^{\nu_{max}}) \equiv (2^2, 2^4)$ . Για τις δύο πρώτες ο αριθμός των επαναλήψεων της συνιστώσας εκτίμησης θέσης ορίστηκε σε  $I_T = \nu$ , ενώ για την τελευταία σε  $I_T = 2$ . Το κριτήριο σύγκλισης για όλες τις μεθόδους εφαρμόσθηκε μόνο ως προς την διαφορά εκτίμησης του προσανατολισμού:  $\varepsilon_{\delta p} = 10^{-5}$ . Η συνθήκη τερματισμού ορίστηκε σε  $CAER(\mathcal{S}_R, \text{scan\_map}(M, \hat{p}')) \leq (\hat{\sigma}_R + \hat{\sigma}_V)^{1/2}$ , όπου  $\hat{\sigma}_R$  και  $\hat{\sigma}_V$  είναι εκτιμήσεις της τυπικής απόκλισης του θορύβου που επιδρά στις ακτίνες των πραγματικών μετρήσεων  $\mathcal{S}_R$  και εικονικών σαρώσεων  $\mathcal{S}_V$  αντίστοιχα. Για λόγους περιορισμού του χρόνου εκτέλεσης του FSMSM τέθηκε ώριο στον αριθμό επανεκκινήσεων, με τιμή  $R_{max} = 100$  επανεκκινήσεις.

Για σκοπούς σύγκρισης με τις μεθόδους ευθυγράμμισης σαρώσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ευθυγράμμιση πραγματικών με εικονικές σαρώσεις η πειραματική διαδικασία διενεργείται έναντι των μεθόδων ευθυγράμμισης Μετασχηματισμού Κανονικών Κατανομών (Normal Distributions Transform—NDT) [BS03; Devc], FastGICP [SHT09; Deva], και PLICP [Cen08; Devd]. Οι NDT, FastGICP και PLICP ανήκουν στις καθιερωμένες μεθόδους ευθυγράμμισης σαρώσεων [Koi+21; Xu+18; Sob+19; Pis+19; QJ19b; Pha+21]. Επιπλέον, για λόγους σύγκρισης έναντι σύγχρονων αλγορίθμων, οι πειραματική διαδικασία επεκτείνεται στους αλγορίθμους FastVGICP [Koi+21; Deva], NDT-PSO [BBA21; Devb], και TEASER [YSC21; Deve].

Για κάθε πείραμα οι μέθοδοι PLICP, NDT, FastGICP, FastVGICP,  $x1$ ,  $uf$ , και  $fm$  εκτελέσθηκαν για  $E = 10$  φορές για όλα τα δείγματα των  $D_k \in D \equiv \{\text{aces, fr079, intel, mit\_csail, mit\_killian}\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 4\}$ . Επομένως κάθε μέθοδος δοκιμάστηκε συνολικά  $N_{tot} = 10 \times 2 \times 5 \times \sum |D_k| \approx 4.5 \cdot 10e+6$  φορές. Λόγω της παρατήρησης ?? κάθε ένας από αυτούς του αλγορίθμους επανέλαβε τη διαδικασία ευθυγράμμισης με βάση την ανανεωμένη εκτίμηση στάσης του προηγούμενου βήματος για  $I = 10$  φορές καθώς (α) η εσωτερική μετρική ευθυγράμμισης του καθενός, η οποία βασίζεται στην απόσταση ανάμεσα σε αντιστοιχισμένες ακτίνες, βρέθηκε ότι δεν αποτελεί φιλίουσα συνάρτηση ως προς το σφάλμα εκτίμησης (ώστε η μετρική να τεθεί ως αξιόπιστο κριτήριο τερματισμού) και (β) βρέθηκε ότι για  $I > 10$  δεν επιφέρεται περαιτέρω μείωση του σφάλματος εκτίμησης σε σχέση με την

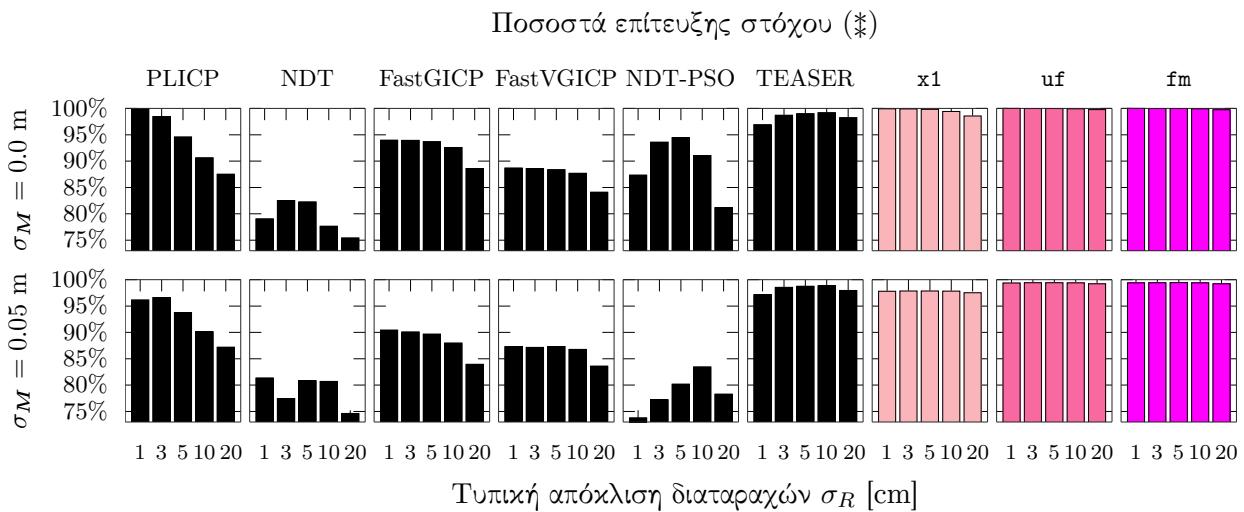
κατάσταση όπου  $I = 10$ . Ως προς τους NDT-PSO και TEASER, οι χρόνοι εκτέλεσής τους μετρήθηκαν στην τάξη των δευτερολέπτων ανά στάση εισόδου—περίπου μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από το χρόνο εκτέλεσης του FSMSM: η πειραματική διαδικασία επί των NDT-PSO και TEASER εκτελέστηκε  $E = 1$  φορά για κάθε δείγμα του  $D$ , για  $I = 10$  και  $I = 1$  αντίστοιχα.

Για κάθε τελική εκτίμηση στάσης  $\hat{\mathbf{p}}_{k,e}^{d'}$  που εξάγεται από κάθε αλγόριθμο,  $d = 1, 2, \dots, |D_k|$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 4\}$ ,  $e = 1, 2, \dots, E$ , καταγράφεται η απόκλισή της από την πραγματική στάση  $\mathbf{p}_k^d$  με τη μορφή του ολικού μέτρου σφάλματος στάσης. Το κριτήριο στο οποίο στηρίζεται η αξιολόγηση όλων των δοκιμών είναι το μέτρο του τελικού συνολικού σφάλματος στάσης—εξ. (??), για  $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_k^d$  και  $\hat{\mathbf{p}} \leftarrow \hat{\mathbf{p}}_{k,e}^{d'}$  όπου  $\hat{\mathbf{p}}$  είναι η αρχική εκτίμηση στάσης, και  $\hat{\mathbf{p}}'$  είναι η έξοδος κάθε υπό δοκιμή αλγορίθμου. Η μονάδα μέτρησης του είναι  $(m^2 + rad^2)^{1/2}$  και, όπου παραλείπεται στα σχήματα, αυτό έχει γίνει για λόγους οικονομίας χώρου και αναγνωσιμότητας.

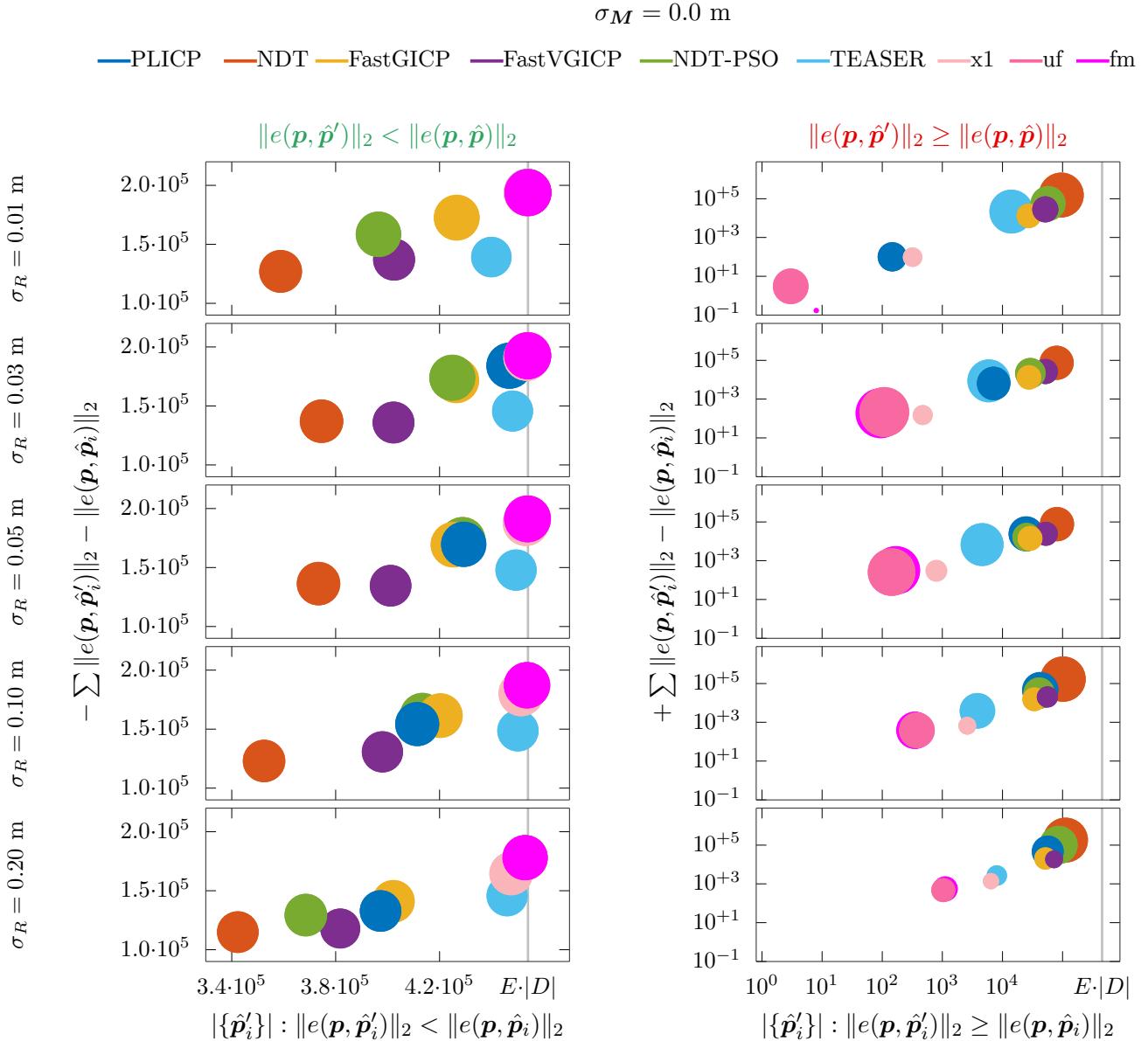
Τα πειράματα επί των FSMSM, FastGICP, FastVGICP, PLICP, και NDT πραγματοποιήθηκαν σε ένα μόνο νήμα, σε υπολογιστή με συχνότητα CPU 4.0 GHz. Οι NDT-PSO και TEASER είναι παράλληλες υλοποιήσεις: τα πειράματά τους διεξήχθησαν σε τέσσερα νήματα, σε υπολογιστή με συχνότητα CPU 2.2 GHz.

#### 4.5.2 Αποτελέσματα

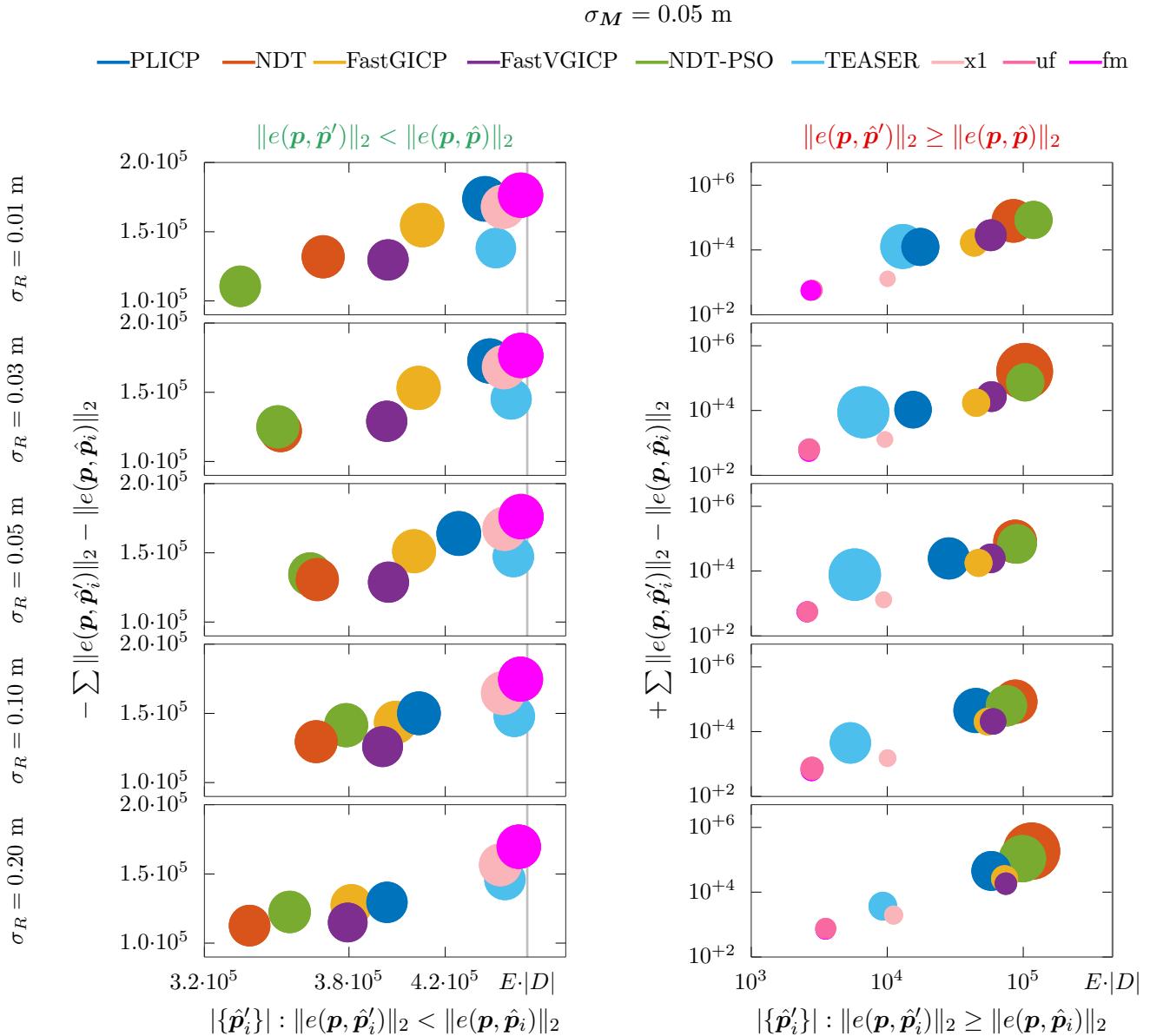
Το σχήμα 4.23 απεικονίζει το ποσοστό των εκτιμήσεων στάσης εισόδου για τις οποίες επετεύχθη ο στόχος (\*) ανά υπό εξέταση αλγόριθμο, επίπεδο διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα, και διαφυλοράς του χάρτη—ήτοι το κλάσμα του αριθμού των εκτιμήσεων στάσης των οποίων το σφάλμα μειώθηκε έπειτα από την εφαρμογή της κάθε μεθόδου προς τον ολικό αριθμό τροφοδοτηθέντων εκτιμήσεων στάσης. Στα αριστερά διαγράμματα των σχημάτων 4.24 και 4.25 απεικονίζεται η συνολική μείωση του σφάλματος εκτίμησης στάσης, ο συνολικός αριθμός εισόδων για τις οποίες το σφάλμα εκτίμησης μειώθηκε ως συνέπεια της εφαρμογής κάθε μεθόδου, και η μέση μείωση του σφάλματος ανά είσοδο για την οποία το σφάλμα εκτίμησης μειώθηκε. Στα δεξιά διαγράμματα απεικονίζεται η συνολική αύξηση του σφάλματος εκτίμησης στάσης, ο συνολικός αριθμός εισόδων για τις οποίες το σφάλμα εκτίμησης αυξήθηκε ως συνέπεια της εφαρμογής κάθε μεθόδου, και η μέση αύξηση του σφάλματος ανά είσοδο για την οποία το σφάλμα εκτίμησης αυξήθηκε.



**Σχήμα 4.23:** Τα ποσοστά επίτευξης του στόχου (\*) ανά αλγόριθμο υπό δοκιμή, τυπική απόκλιση διαταραχών που επιδρούν στις πραγματικές μετρήσεις  $\sigma_R$ , και τυπική απόκλιση διαταραχών των συντεταγμένων του χάρτη  $\sigma_M$ . Το διάγραμμα αυτό απαντάει στην ερώτηση: “Από τον συνολικό αριθμό εκτιμήσεων στάσης που εισήχθησαν σε κάθε μέθοδο, ποιό είναι το ποσοστό των εκτιμήσεων των οποίων το σφάλμα μειώθηκε ως αποτέλεσμα της εφαρμογής της κάθε μίας;”. Κάθε ράβδος αντιστοιχεί σε  $\approx 4.5 \cdot 10^{e+5}$  πειράματα ευθυγράμμισης, για όλες τις μεθόδους εκτός των NDT-PSO και TEASER, οι οποίες δοκιμάσθηκαν στο ένα δέκατο αυτής της τιμής λόγω του υπέρογκου χρόνου εκτέλεσής τους. Σ.τ.Σ.: Αυτό το διάγραμμα είναι το σημαντικότερο του κεφαλαίου και ίσως το σημαντικότερο της διατριβής: οι σχεδιασθέντες σε αυτήν μέθοδοι διατηρούν την ευρωστία των αριθμού εκτιμήσεων στάσης των οποίων το σφάλμα ελάττωσαν κατά μήκος των διαταραχών που επιδρούν στις μετρήσεις των φυσικού αισθητήρα δεδομένον ενός επιπέδου διαφορούς χαρτη και εκτελούνται σε πραγματικό χρόνο, σε αντίθεση με όλους τους υπό δοκιμή αλγορίθμους της βιβλιογραφίας



Σχήμα 4.24: Η συνολική μείωση (αριστερά, στον κάθετο άξονα) και αύξηση (δεξιά) του σφάλματος εκτίμησης στάσης συναρτήσει του αριθμού των δειγμάτων των οποίων το μέτρο σφάλματος εκτίμησης στάσης μειώθηκε (αριστερά, στον οριζόντιο άξονα) και αυξήθηκε (δεξιά), για  $\sigma_M = 0.0$  m. Η ακτίνα των κύκλων είναι ανάλογη της μέσης μείωσης (αύξησης) ανά στάση για την οποία το σφάλμα μειώθηκε (αυξήθηκε) ως αποτέλεσμα της εφαρμογής κάθε μεθόδου. Στο αριστερό διάγραμμα τιμές σε υψηλότερα επίπεδα είναι καλύτερες από τιμές σε χαμηλότερα, ενώ στο δεξιό ισχύει το αντίθετο. Αυτό το διάγραμμα απαντάει στις εξής ερωτήσεις: (α) “Όταν ο χάρτης αντιστοιχεί τέλεια στο περιβάλλον, από τον συνολικό αριθμό εκτιμήσεων στάσης που εισήχθησαν σε κάθε μέθοδο, πόσων το σφάλμα κατάφερε η κάθε μέθοδος να μειώσει, και σε πόσες απέτυχε;”, (β) “Από τον συνολικό αριθμό εκτιμήσεων στάσης που εισήχθησαν σε κάθε μέθοδο, πόσο είναι το συνολικό σφάλμα που κατάφερε να μειώσει η καθεμία;”, (γ) “Από τον συνολικό αριθμό εκτιμήσεων στάσης που εισήχθησαν σε κάθε μέθοδο, πόσο είναι το συνολικό σφάλμα που επέφερε η καθεμία όταν δεν κατάφερε να μειώσει το σφάλμα της αρχικής εκτίμησης;”, και (δ) “Ποιοί είναι το μέσο σφάλμα κατά το οποίο μειώθηκε (αυξήθηκε) μία αρχική εκτίμηση για αυτές τις οποίων το σφάλμα μειώθηκε (αυξήθηκε);”



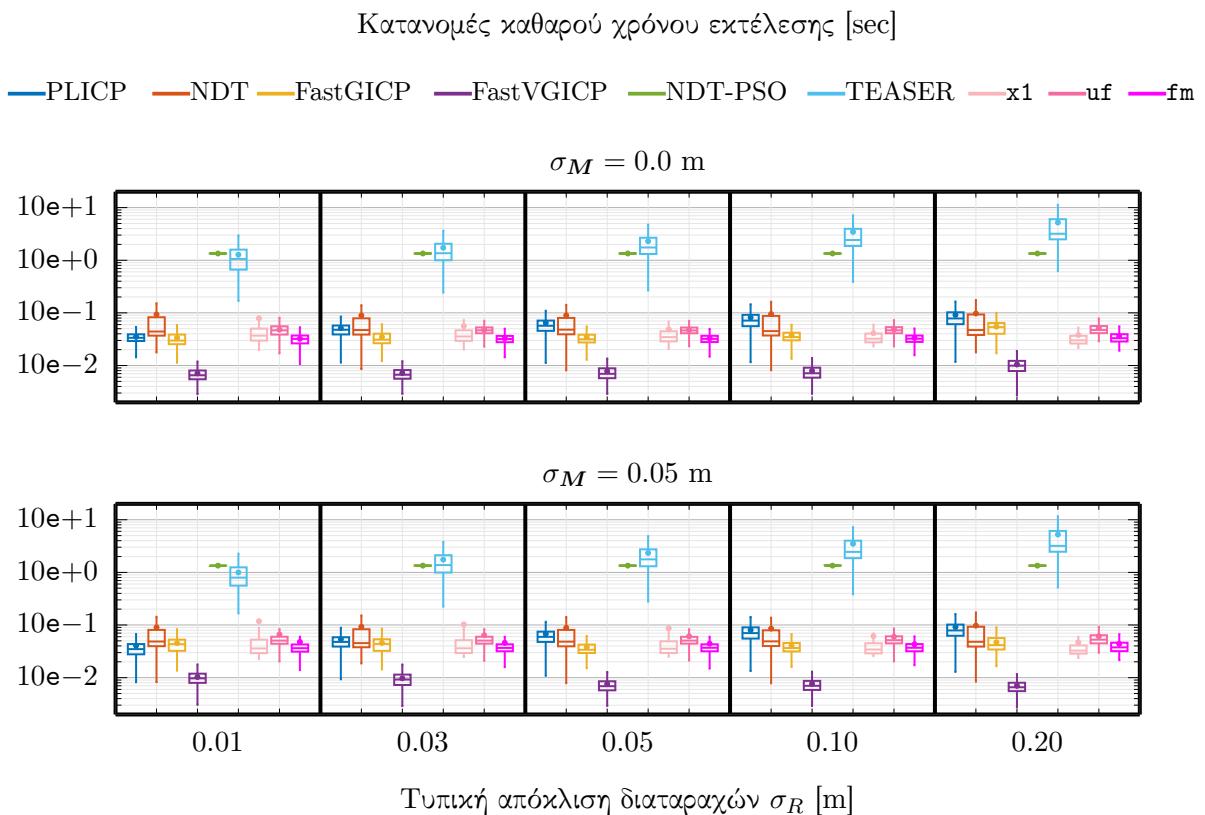
Σχήμα 4.25: Η συνολική μείωση (αριστερά, στον κάθετο άξονα) και αύξηση (δεξιά) του σφάλματος εκτίμησης στάσης συναρτήσει του αριθμού των δειγμάτων των οποίων το μέτρο σφάλματος εκτίμησης στάσης μειώθηκε (αριστερά, στον οριζόντιο άξονα) και αυξήθηκε (δεξιά), για  $\sigma_M = 0.05 \text{ m}$ . Η ακτίνα των κύκλων είναι ανάλογη της μέσης μείωσης (αύξησης) ανά στάση για την οποία το σφάλμα μειώθηκε (αυξήθηκε) ως αποτέλεσμα της εφαρμογής κάθε μεθόδου. Στο αριστερό διάγραμμα τιμές σε υψηλότερα επίπεδα είναι καλύτερες από τιμές σε χαμηλότερα, ενώ στο δεξιό ισχύει το αντίθετο. Αυτό το διάγραμμα απαντάει στις εξής ερωτήσεις: (α) “Όταν ο χάρτης δεν αντιστοιχεί τέλεια στο περιβάλλον, από τον συνολικό αριθμό εκτιμήσεων στάσης που εισήχθησαν σε κάθε μέθοδο, πόσων το σφάλμα κατάφερε η κάθε μέθοδος να μειώσει, και σε πόσες απέτυχε;”, (β) “Από τον συνολικό αριθμό εκτιμήσεων στάσης που εισήχθησαν σε κάθε μέθοδο, πόσο είναι το συνολικό σφάλμα που κατάφερε να μειώσει η καθεμία;”, (γ) “Από τον συνολικό αριθμό εκτιμήσεων στάσης που εισήχθησαν σε κάθε μέθοδο, πόσο είναι το συνολικό σφάλμα που επέφερε η καθεμία όταν δεν κατάφερε να μειώσει το σφάλμα της αρχικής εκτίμησης;”, και (δ) “Ποιό είναι το μέσο σφάλμα κατά το οποίο μειώθηκε (αυξήθηκε) μία αρχική εκτίμηση για αυτές τις οποίων το σφάλμα μειώθηκε (αυξήθηκε);”

Στο σχήμα 4.26 απεικονίζονται οι κατανομές των καθαρών χρόνων εκτέλεσης του κάθε αλγορίθμου, δηλαδή ο ολικός χρόνος εκτέλεσης των άνευ του χρόνου εκτέλεσης υπολογισμού εικονικών σαρώσεων. Στην άνω σειρά του σχήματος 4.27 απεικονίζεται η κατανομή του αριθμού των εικονικών σαρώσεων που συνέλαβαν οι τρεις όψεις του FSMSM, και στη μεσαία ο ολικός χρόνος εκτέλεσής τους για τη διαμόρφωση που περιγράφηκε στην ενότητα 4.5.1. Στην τελευταία σειρά απεικονίζονται οι χρόνοι εκτέλεσης των τριών μεθόδων για την ίδια διαμόρφωση, εάν όμως η αναπαράσταση του χάρτη γινόταν μέσω χάρτη πλέγματος. Η διαφορά ανάμεσα στους δύο χρόνους εκτέλεσης έγκειται στο γεγονός ότι ο υπολογισμός εικονικών σαρώσεων σε χάρτες πλέγματος γίνεται σε πολύ μικρότερο χρόνο ( $\approx 30\%$ ) σε σχέση με την υλοποίηση που ακολουθήσαμε [WK18]. Με βάση τα στοιχεία του σχήματος 4.28, ο λόγος για τις αυξημένες τιμές χρόνου εκτέλεσης της μεθόδου  $x1$  σε σχέση με αυτές των  $uf$  και  $fmp$  οφείλεται στον αυξημένο αριθμό επανεκκινήσεων της πρώτης. Στο τελευταίο διάγραμμα απεικονίζεται ο αριθμός επανεκκινήσεων των τριών όψεων της μεθόδου FSMSM συναρτήσει των αρχικών μετατοπίσεων κατά προσανατολισμό και απόσταση από την πραγματική στάση του αισθητήρα, ανά επίπεδο διαταραχών των μετρήσεων του και επίπεδο διαφυγού του χάρτη.

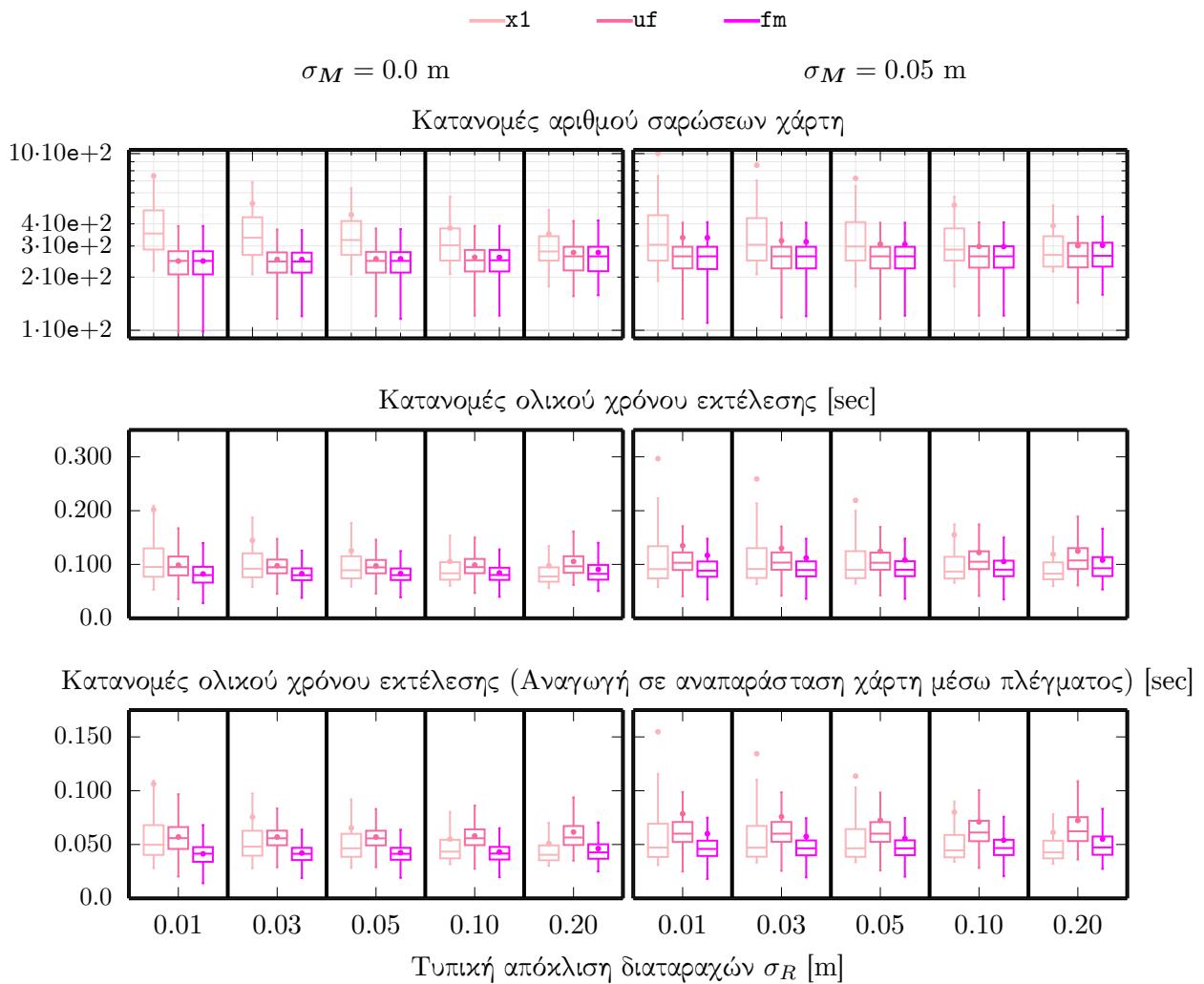
Τα σχήματα 4.29, 4.30, και 4.31 απεικονίζουν αντίστοιχα τα ποσοστά επίτευξης του στόχου (\*) ως προς (α) τη συνιστώσα του προσανατολισμού ανά μονάδα αρχικού σφάλματος προσανατολισμού και (β) τη συνιστώσα της θέσης, ανά μονάδα αρχικού σφάλματος εκτίμησης (i) θέσης και (ii) προσανατολισμού.

Στο σχήμα 4.32 απεικονίζονται οι κατανομές των μέτρων των σφαλμάτων στάσης όλων των αλγορίθμων για τις διάφορές τιμές των διαταραχών μετρήσεων και διαφυγού του χάρτη. Στην πρώτη και τρίτη σειρά εμφανίζονται σε πλήρη άποψη οι κατανομές για  $\sigma_M = 0.0$  m και  $\sigma_M = 0.05$  m αντίστοιχα, ενώ στην δεύτερη και τέταρτη εμφανίζονται οι ίδιες κατανομές αλλά εστιασμένες προς τις ελάχιστες παρατηρούμενες τιμές. Στα σχήματα ?? και ?? του παραρτήματος ?? απεικονίζονται οι κατανομές των συνιστώντων σφαλμάτων θέσης και προσανατολισμού.

Τα σχήματα 4.33, 4.34, 4.35, και 4.36 αναπαριστούν τα μέτρα των τελικών σφαλμάτων εκτίμησης στάσης ως προς τα αρχικά σφάλματα εκτίμησης προσανατολισμού (οριζόντιος άξονας) και θέσης (κάθετος). Συγκεκριμένα, στα πρώτα δύο σχήματα απεικονίζονται τα τελικά σφάλματα για  $\sigma_M = 0.0$  m  $\sigma_M = 0.05$  αντίστοιχα, κατακερματισμένα σε ομάδες μέτρων σφαλμάτος εκτίμησης. Στα δύο τελευταία σχήματα απεικονίζονται τα ίδια σφάλματα αλλά

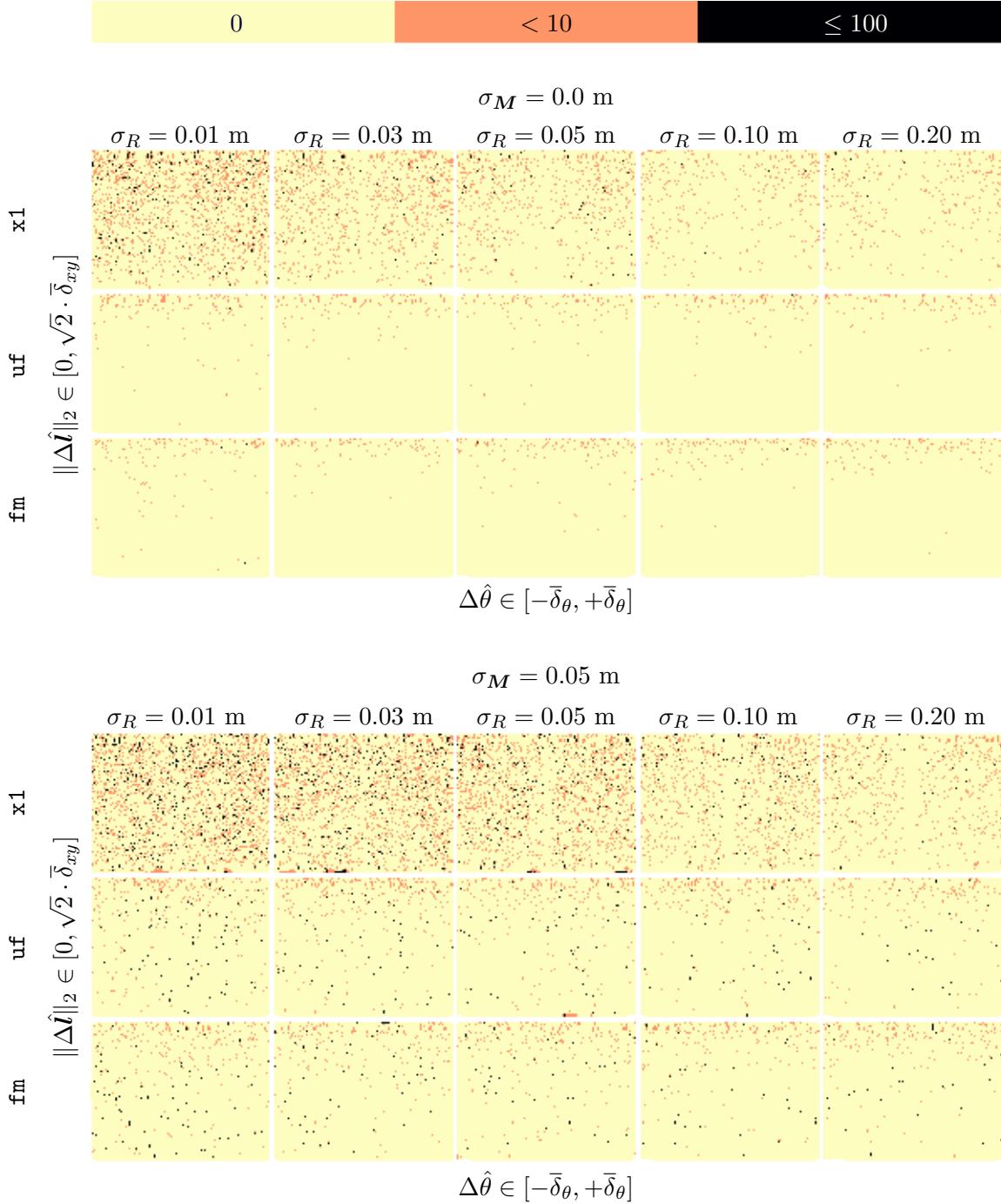


**Σχήμα 4.26:** Οι κατανομές των χρόνων εκτέλεσης όλων των αλγορίθμων χωρίς να συνυπολογίζεται ο χρόνος υπολογισμού σαρώσεων χάρτη. Για τους  $x1$ ,  $uf$ , και  $fm$ , ο ολικός χρόνος εκτέλεσης με βάση τη διαμόρφωση της ενότητας 4.5.1 απεικονίζεται στο σχήμα 4.27. Παρατηρήστε πως η εκτέλεση των μεθόδων NDT-PSO και TEASER σε τέσσερα επεξεργαστικά νήματα έχει ως αποτέλεσμα χρόνους εκτέλεσης άνω του ενός δευτερολέπτου, δηλαδή η εκτέλεσή τους γίνεται σε μη πραγματικό χρόνο

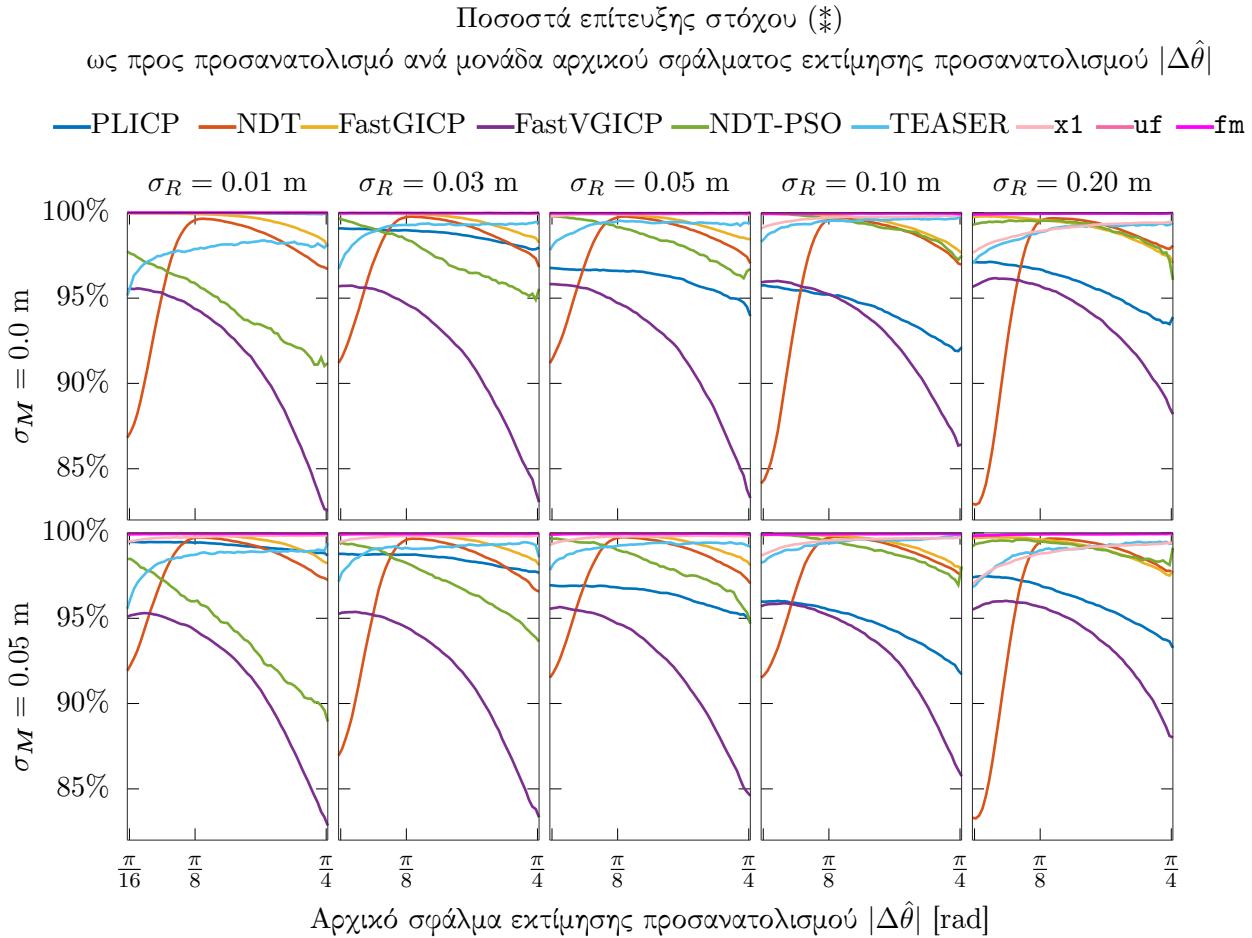


Σχήμα 4.27: Οι κατανομές του αριθμού των συλληφθέντων σαρώσεων χάρτη (άνω σειρά), των ολικών χρόνων εκτέλεσης με βάση τη διαμόρφωση της ενότητας 4.5.1 (μεσαία), και του ανηγμένου χρόνου εκτέλεσης εάν ο χάρτης του κάθε περιβάλλοντος αναπαρίστατο μέσω πλέγματος

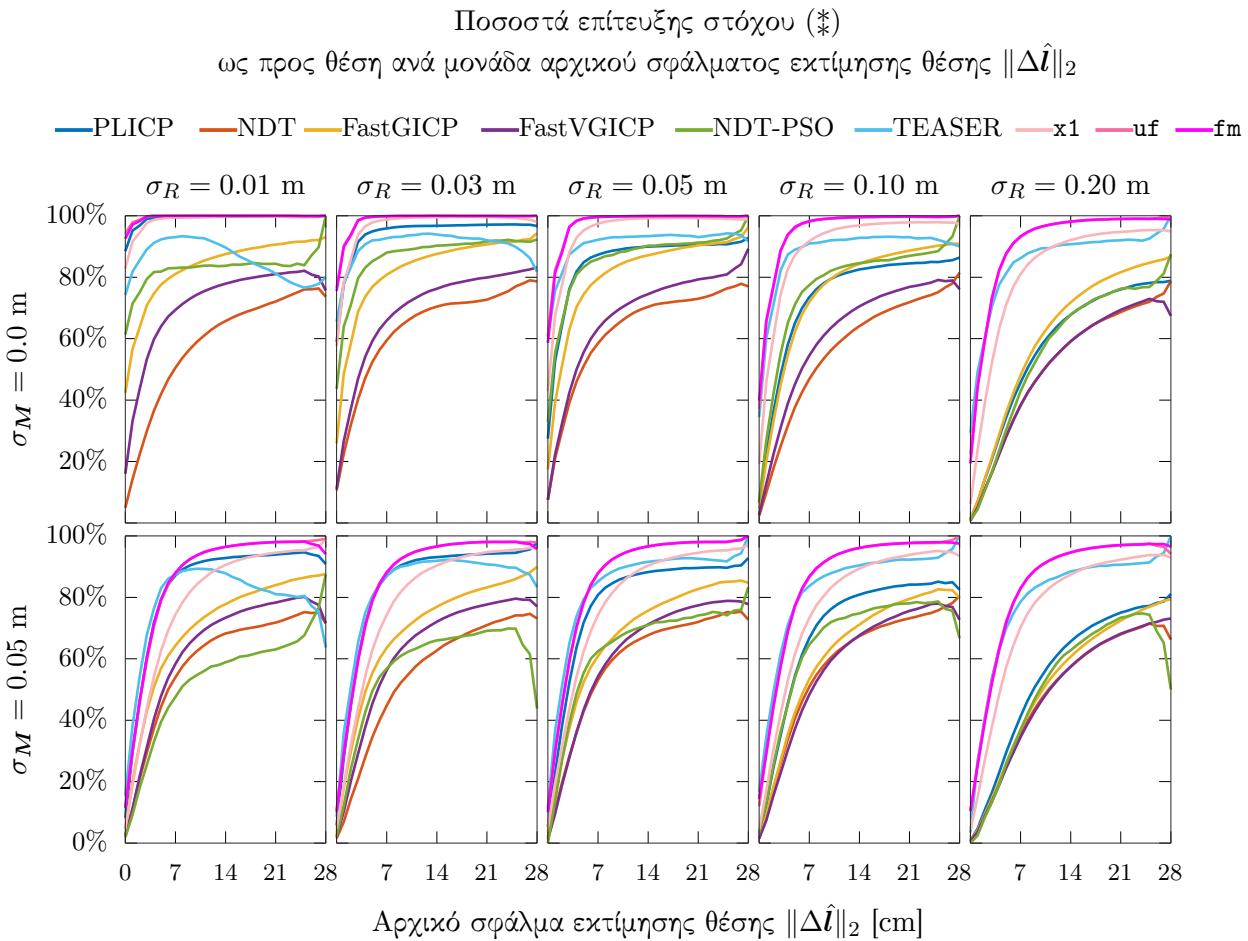
Αριθμός επανεκκινήσεων ως προς αρχικές συνθήκες



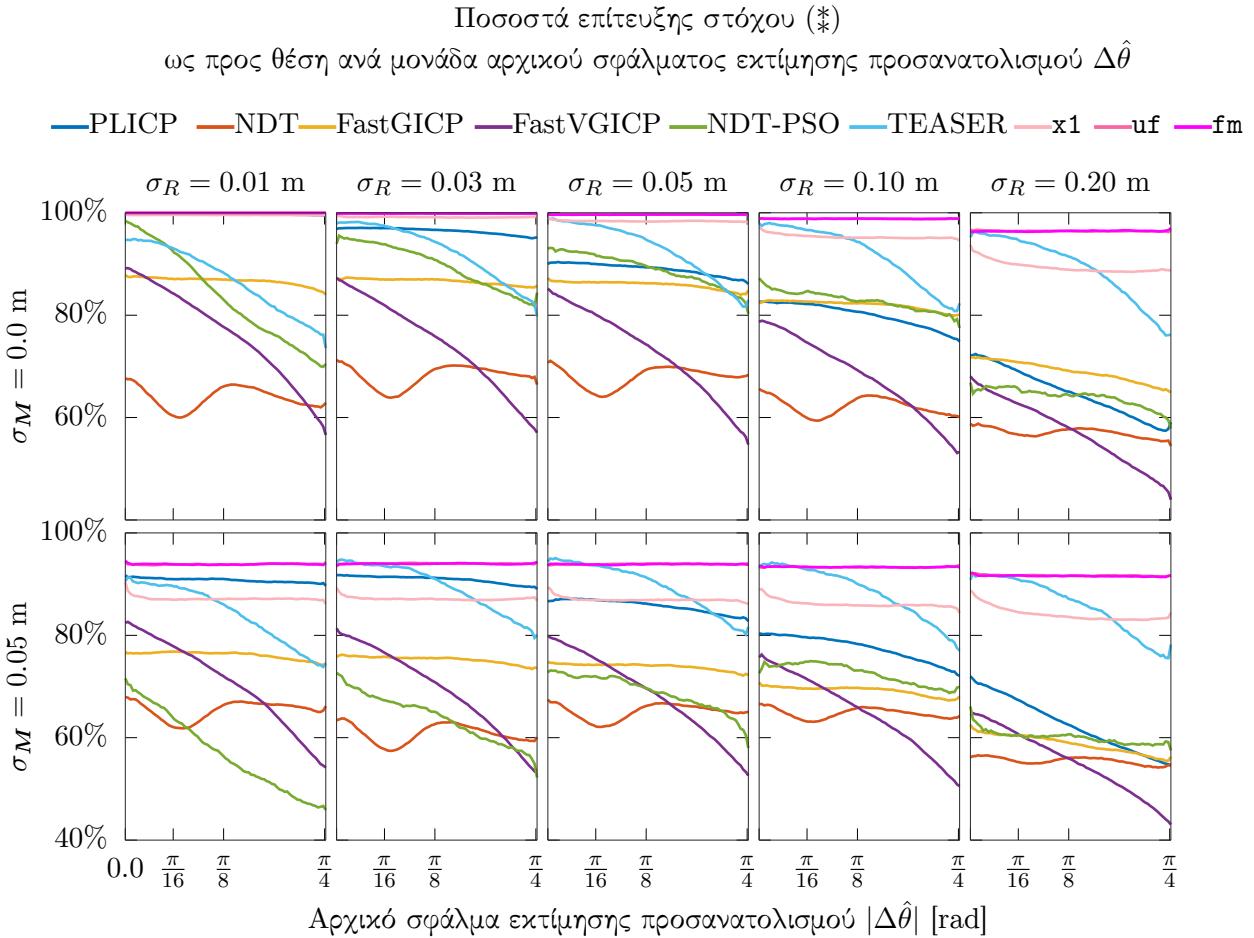
Σχήμα 4.28: Χάρτες θερμότητας του αριθμού των επανεκκινήσεων των μεθόδων x1, uf, και fm ανά επίπεδο διαταραχών των μετρήσεων της πραγματικής σάρωσης  $\sigma_R$  και διαφθοράς του χάρτη  $\sigma_M$ . Ο οριζόντιος άξονας κάθε χάρτη θερμότητας αναφέρεται στο σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $\Delta\hat{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  της αρχικής εκτίμησης  $\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ , ενώ ο κάθετος άξονας στο μέτρο του αρχικού σφάλματος εκτίμησης θέσης  $\|\Delta\hat{l}\|_2$ ,  $\Delta\hat{l} = (x - \hat{x}, y - \hat{y})$



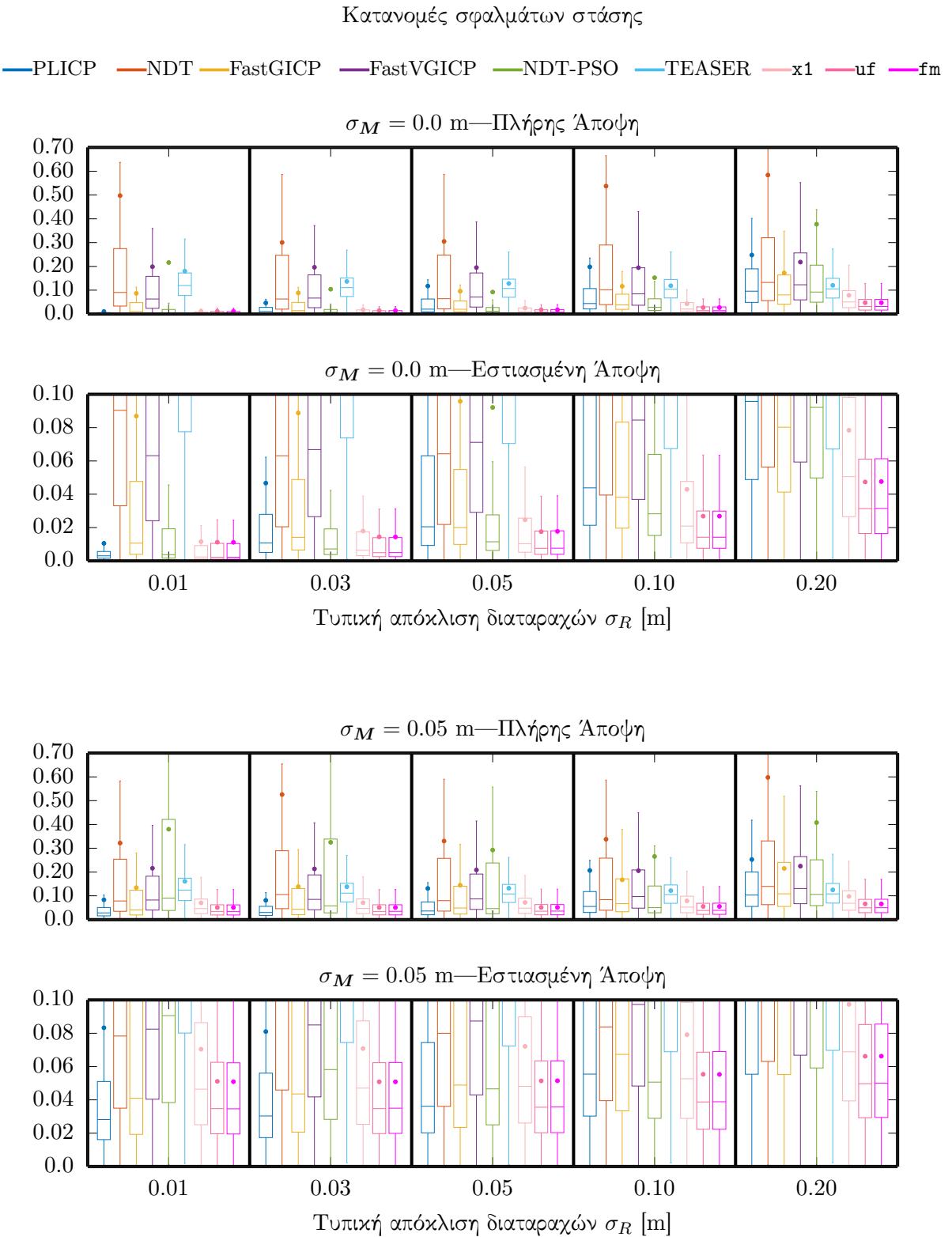
Σχήμα 4.29: Οι καμπύλες εξέλιξης των ποσοστών επίτευξης του στόχου (\*) ως προς τη συνιστώσα του προσανατολισμού συναρτήσει του μέτρου του αρχικού σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού για όλες τις διαμορφώσεις της πειραματικής διαδικασίας. Το διάγραμμα απαντάει στην ερώτηση: “Πώς μεταβάλλεται το ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (\*) ως προς τη συνιστώσα του προσανατολισμού καθώς αυξάνει το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού;”



**Σχήμα 4.30:** Οι καμπύλες εξέλιξης των ποσοστών επίτευξης του στόχου (\*) ως προς τη συνιστώσα της θέσης συναρτήσει του μέτρου του αρχικού σφάλματος εκτίμησης για όλες τις διαμορφώσεις της πειραματικής διαδικασίας. Το διάγραμμα απαντάει στην ερώτηση: “Πώς μεταβάλλεται το ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (\*) ως προς τη συνιστώσα της θέσης καθώς αυξάνει το αρχικό σφάλμα θέσης;”



Σχήμα 4.31: Οι καμπύλες εξέλιξης των ποσοστών επίτευξης του στόχου (\*) ως προς τη συνιστώσα της θέσης συναρτήσει του μέτρου του αρχικού σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού για όλες τις διαφορφώσεις της πειραματικής διαδικασίας. Το διάγραμμα απαντάει στην ερώτηση: “Πώς μεταβάλλεται το ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (\*) ως προς τη συνιστώσα της θέσης καθώς αυξάνει το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού;”



**Σχήμα 4.32:** Οι κατανομές των σφαλμάτων εκτίμησης στάσης για κάθε αλγόριθμο με βάση την πειραματική διάταξη της ενότητας 4.5.1. Κάθε ορθογώνιο αντιπροσωπεύει τα στατιστικά  $\approx 4.5 \cdot 10^5$  ευθυγραμμίσεων, με την εξαίρεση των μεθόδων NDT-PSO και TEASER οι οποίες δοκιμάστηκαν  $\approx 4.5 \cdot 10^4$  φορές. Οι κουκκίδες αντιπροσωπεύουν ολικά μέσα σφάλματα εκτίμησης

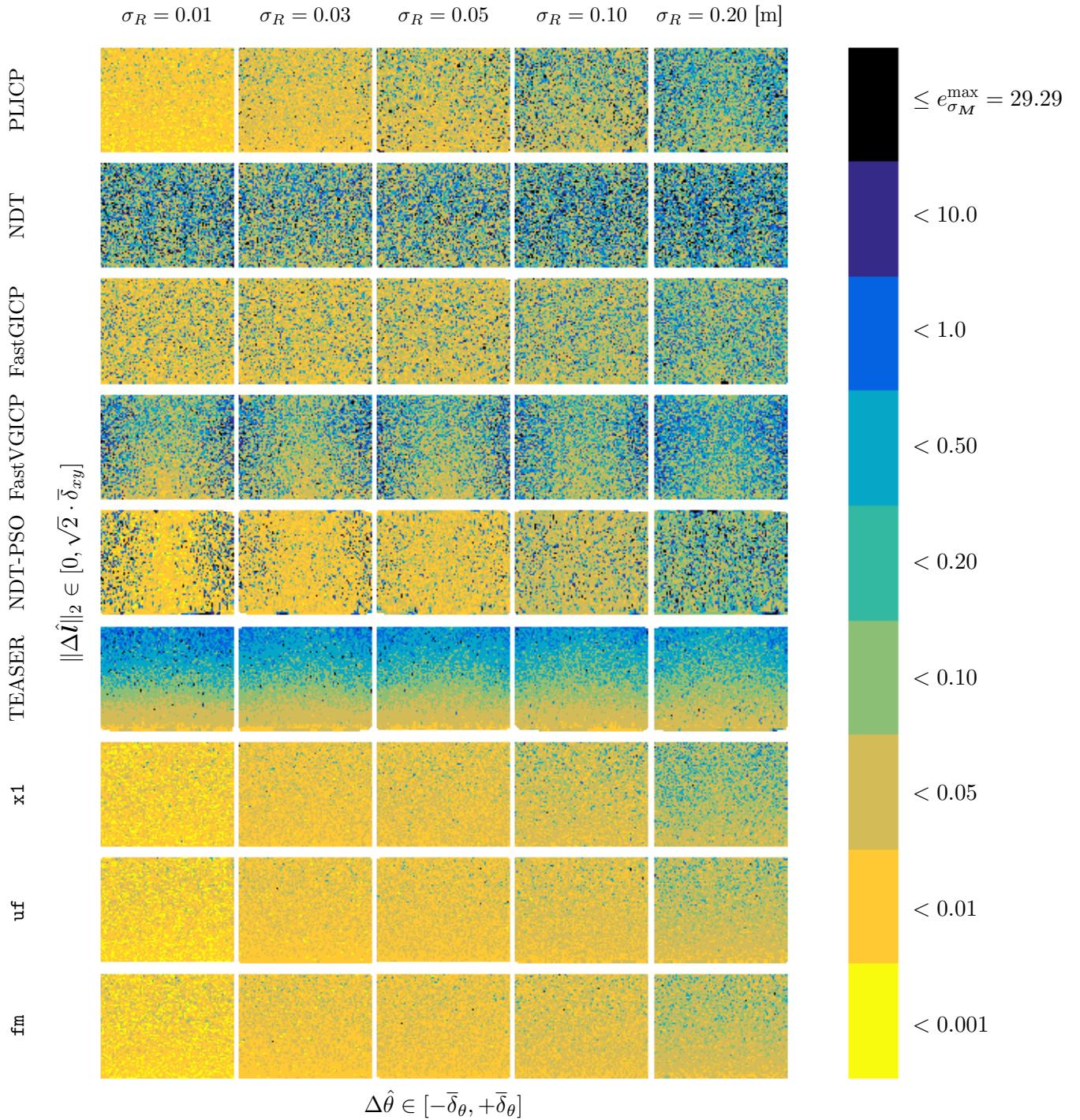
εστιασμένα ως προς τις ελάχιστες τιμές τελικού σφάλματος εκτίμησης, με άνω όριο τον μέσο όρο σφαλμάτων εκτίμησης στάσης όλων των αλγορίθμων, ανά επίπεδο διαφυλοράς χάρτη.

Το σχήμα ?? απεικονίζει για τις τρεις διαμορφώσεις του FSMSM και κάθε πειραματική διαμόρφωση τα ποσοστά των τελικών σφαλμάτων εκτίμησης προσανατολισμού τα οποία έχουν μέτρο μικρότερο από  $\gamma/2^{\nu+1}$ , για  $\nu = 0, 1, \dots, \nu_{\max} = 5$ .

#### 4.5.3 Εξέταση και αξιολόγηση αποτελεσμάτων

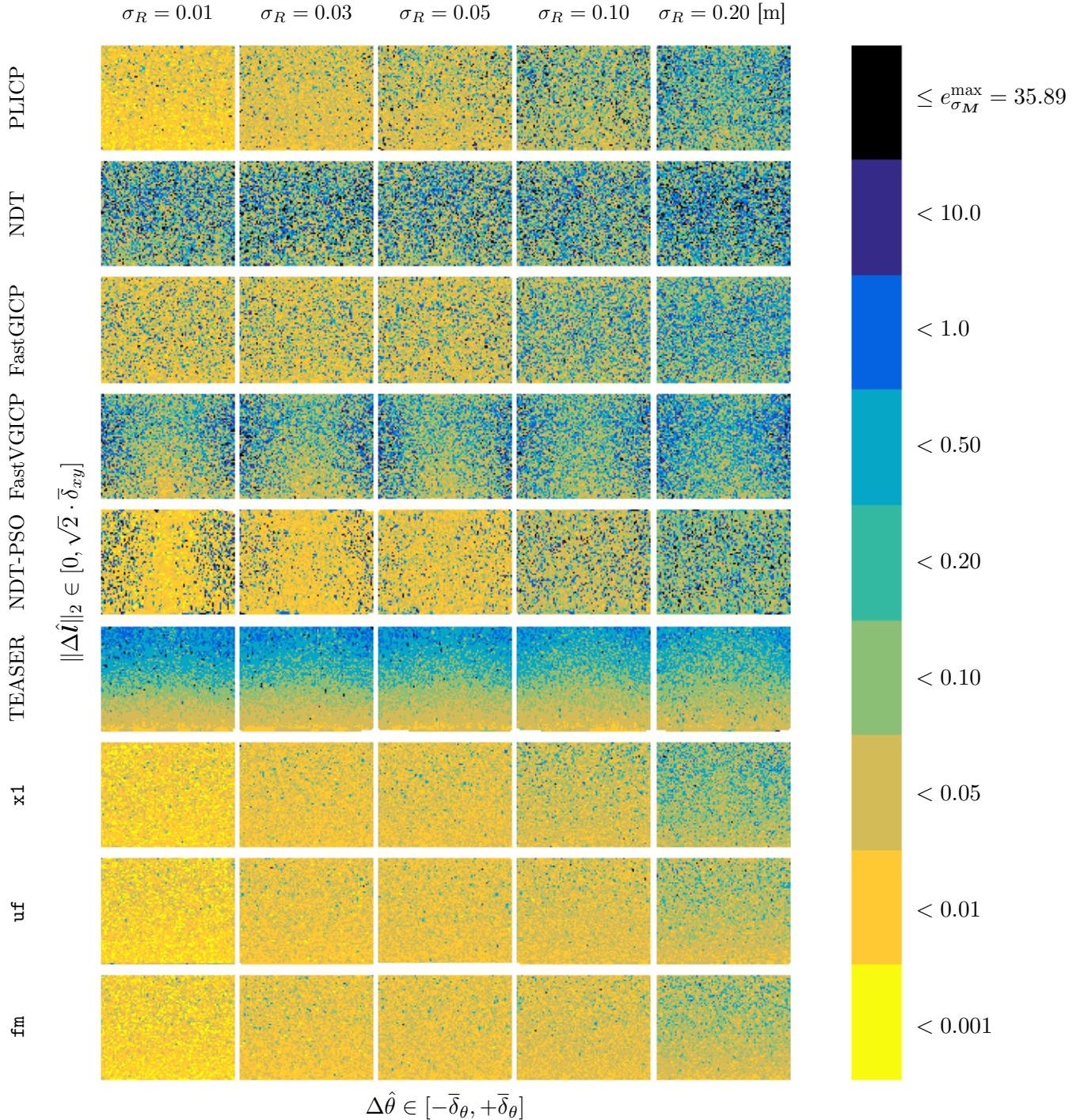
Με βάση τα πειραματικά αποτελέσματα, ξεκινώντας από το σχήμα 4.23 παρατηρούμε πως τα ποσοστά επίτευξης του στόχου (\*) φύνουν για τις εκδόσεις του ICP, με διαφορετικούς βαθμούς καθώς αυξάνει το επίπεδο των διαταραχών που επιδρούν στις μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα. Ο PLICP είναι ο καλύτερος εκ των τριών εκδόσεων του ICP, ενώ ο FastVGICP, ο οποίος, θεωρητικά, αποτελεί βελτίωση του FastGICP, εμφανίζει τα χαμηλότερα ποσοστά επίτευξης του στόχου. Σε αντίθεση ο NDT-PSO βελτιώνει πράγματι τον NDT όταν ο χάρτης του περιβάλλοντος το αναπαριστά στην εντέλεια, αλλά η διαφορά τους δεν εμφανίζει το ίδιο πρότυπο στην αντίθετη περίπτωση. Σε σχέση με αυτές τις μεθόδους ο TEASER εμφανίζει τα

Τελικά σφάλματα εκτίμησης στάσης ως προς αρχικά σφάλματα εκτίμησης όταν  $\sigma_M = 0.0$  m



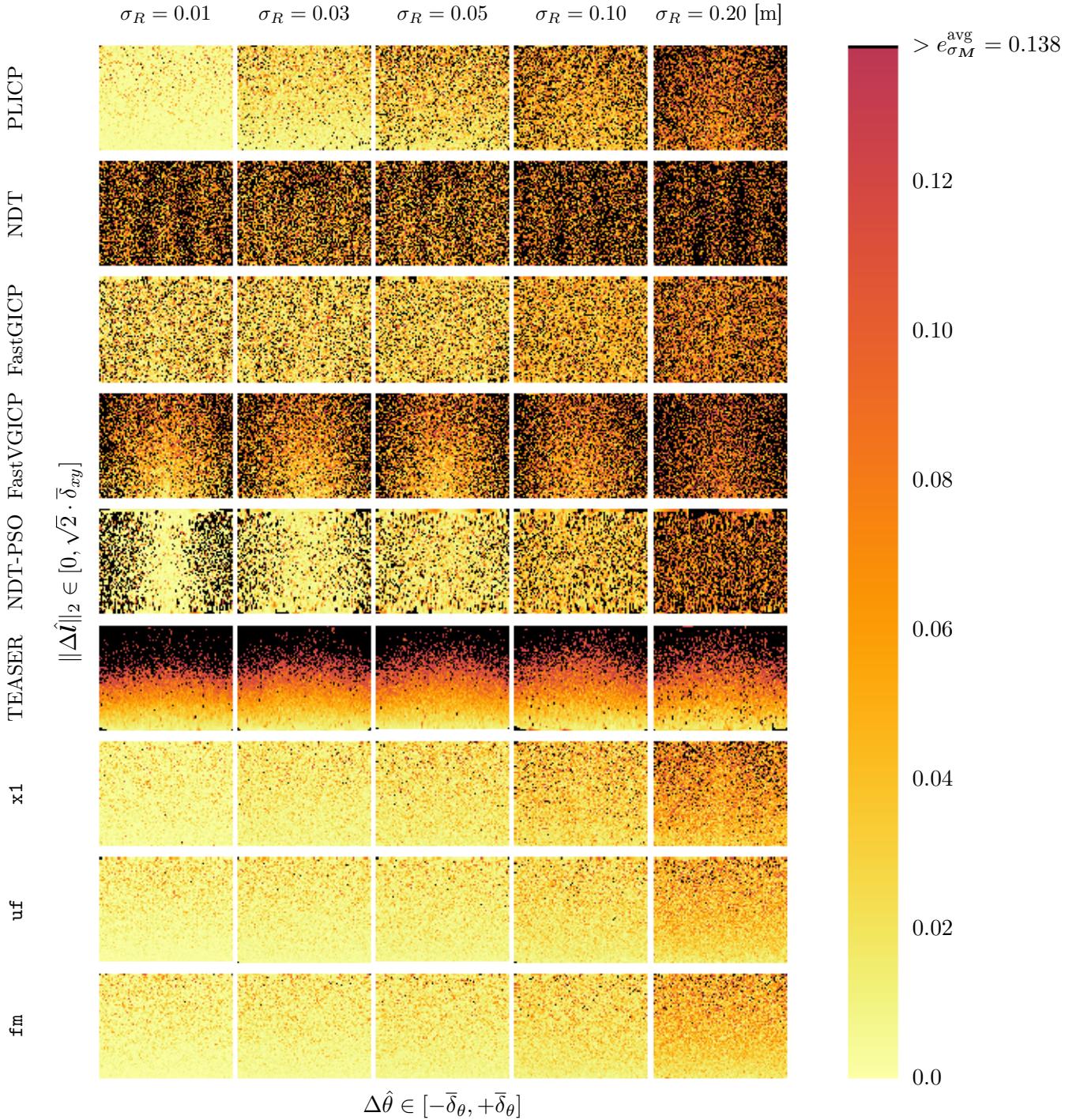
Σχήμα 4.33: Χάρτες θερμότητας των μέτρων των τελικών σφαλμάτων εκτίμησης στάσης συναρτήσει των αρχικών σφαλμάτων εκτίμησης προσανατολισμού  $\hat{\Delta\theta}$  (στον οριζόντιο άξονα) και των μέτρων των αρχικών σφαλμάτων εκτίμησης θέσης  $\|\hat{\Delta\theta}\|_2$  (στον κάθετο άξονα) για όλα τα διενεργηθέντα πειράματα, ανά αλγόριθμο και ανά τυπική απόκλιση διαταραχών του φυσικού αισθητήρα, για  $\sigma_M = 0.0$  m

Τελικά σφάλματα εκτίμησης στάσης ως προς αρχικά σφάλματα εκτίμησης όταν  $\sigma_M = 0.05$  m



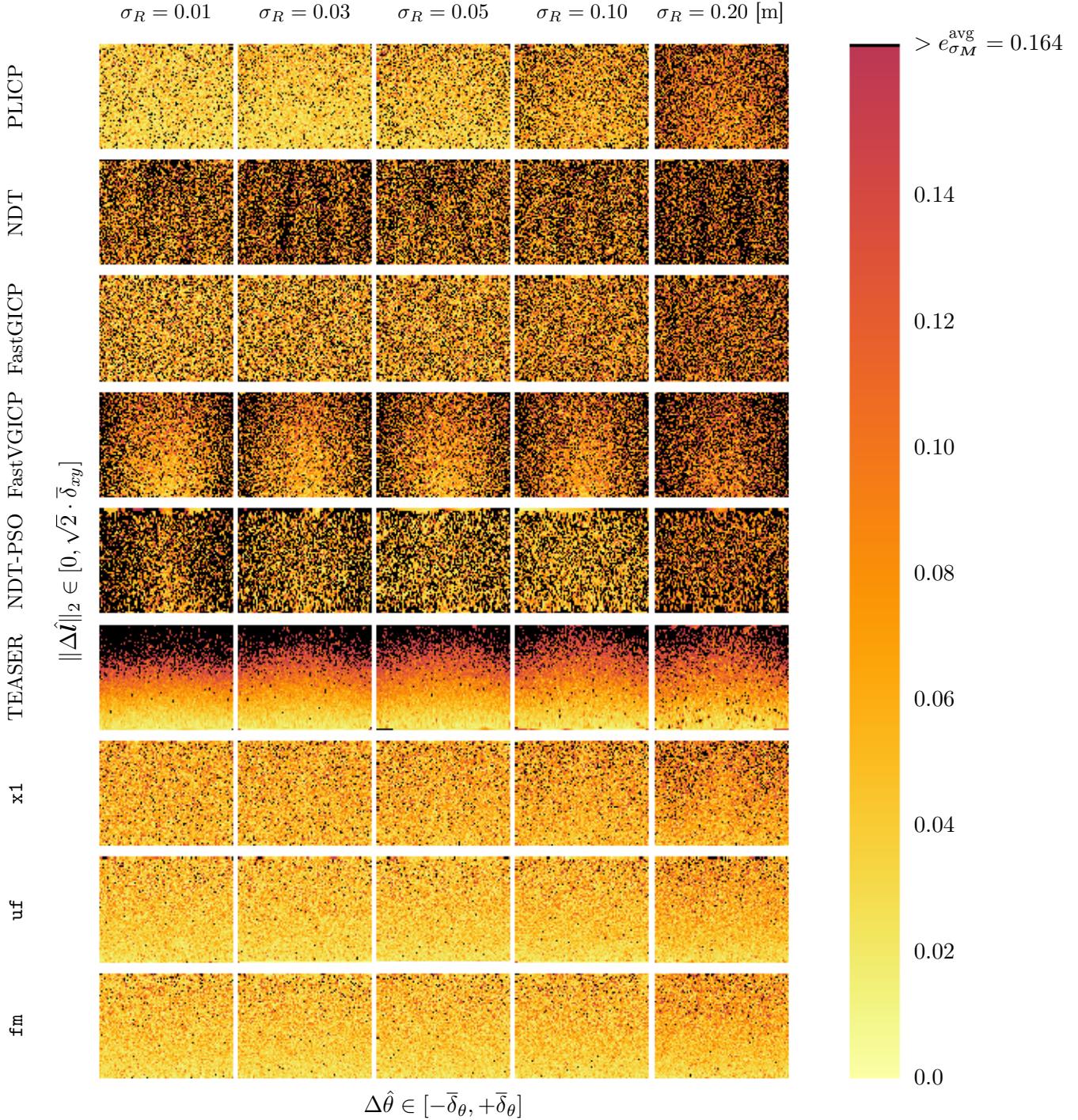
Σχήμα 4.34: Χάρτες θερμότητας των μέτρων των τελικών σφαλμάτων εκτίμησης στάσης συναρτήσει των αρχικών σφαλμάτων εκτίμησης προσανατολισμού  $\Delta\hat{t}$  (στον οριζόντιο άξονα) και των μέτρων των αρχικών σφαλμάτων εκτίμησης θέσης  $\|\Delta\hat{t}\|_2$  (στον κάθετο άξονα) για όλα τα διενεργηθέντα πειράματα, ανά αλγόριθμο και ανά τυπική απόκλιση διαταραχών του φυσικού αισθητήρα, για  $\sigma_M = 0.05$  m

Τελικά σφάλματα εκτίμησης στάσης ως προς αρχικά σφάλματα εκτίμησης όταν  $\sigma_M = 0.0$  m



Σχήμα 4.35: Χάρτες θερμότητας των μέτρων των τελικών σφαλμάτων εκτίμησης στάσης συναρτήσει των αρχικών σφαλμάτων εκτίμησης προσανατολισμού  $\Delta\hat{\theta}$  (στον οριζόντιο άξονα) και των μέτρων των αρχικών σφαλμάτων εκτίμησης θέσης  $\|\Delta\hat{\theta}\|_2$  (στον κάθετο άξονα) για όλα τα διενεργηθέντα πειράματα, ανά αλγόριθμο και ανά τυπική απόκλιση διαταραχών του φυσικού αισθητήρα, εστιασμένοι στο διάστημα  $[0, e_{\sigma_M}^{\text{avg}}]$ , όπου με  $e_{\sigma_M}^{\text{avg}}$  σημειώνεται ο μέσος όρος σφαλμάτων εκτίμησης στάσης όλων των μεθόδων, για κάθε επεξεργασθέν δείγμα, και κάθε τυπικής απόκλισης των διαταραχών που επιδρούν στις μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα, για  $\sigma_M = 0.0$  m. Τιμές μέτρου σφαλμάτων εκτίμησης άνω του μέσου όρου σημειώνονται με μαύρο χρώμα

Τελικά σφάλματα εκτίμησης στάσης ως προς αρχικά σφάλματα εκτίμησης όταν  $\sigma_M = 0.05$  m



Σχήμα 4.36: Χάρτες θερμότητας των μέτρων των τελικών σφαλμάτων εκτίμησης στάσης συναρτήσει των αρχικών σφαλμάτων εκτίμησης προσανατολισμού  $\Delta\hat{\theta}$  (στον οριζόντιο άξονα) και των μέτρων των αρχικών σφαλμάτων εκτίμησης θέσης  $\|\Delta\hat{\theta}\|_2$  (στον κάθετο άξονα) για όλα τα διενεργηθέντα πειράματα, ανά αλγόριθμο και ανά τυπική απόκλιση διαταραχών του φυσικού αισθητήρα, εστιασμένοι στο διάστημα  $[0, e_{\sigma_M}^{\text{avg}}]$ , όπου με  $e_{\sigma_M}^{\text{avg}}$  σημειώνεται ο μέσος όρος σφάλματος εκτίμησης στάσης όλων των μεθόδων, για κάθε επεξεργασθέν δείγμα, και κάθε τυπικής απόκλισης των διαταραχών που επιδρούν στις μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα, για  $\sigma_M = 0.05$  m. Τιμές μέτρου σφάλματος εκτίμησης άνω του μέσου όρου σημειώνονται με μαύρο χρώμα

μεγαλύτερα ποσοστά περιπτώσεων όπου το σφάλμα εκτίμησης μειώθηκε, αλλά, όπως φαίνεται από τα σχήματα 4.26 και 4.32, αυτή η βελτίωση γίνεται σε βάρος του χρόνου εκτέλεσης (ο οποίος ξεκινάει περίπου από το ένα δευτερόλεπτο και καταλήγει σχεδόν στα επτά δευτερόλεπτα), και χωρίς σημαντικές μειώσεις στο τελικό σφάλμα εκτίμησης. Τα ποσοστά επίτευξης του στόχου (\*) που εμφανίζει ο TEASER είναι, παρ' όλα αυτά, υψηλά, καθώς το σχήμα 4.23 είναι ποιοτικό ως προς το τελικό σφάλμα εκτίμησης: η μείωση του σφάλματος μίας εκτίμησης συνεισφέρει το ίδιο στο ποσοστό επίτευξης του στόχου είτε μία μέθοδος το μείωσε κατά  $10^{-4}$  ( $m^2 + rad^2$ ) $^{1/2}$  είτε κατά  $10^{-1}$ . Επιπρόσθετα, τα ποσοστά επίτευξης του στόχου από τον TEASER είναι εύρωστα υπό την έννοια της διατήρησης του υψηλού τους επιπέδου κατά μήκος των επιπέδων διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα. Τούτων λεχθέντων, η μέθοδος x1 εμφανίζει υψηλότερα ποσοστά επίτευξης του στόχου (\*) από τον TEASER όταν  $\sigma_M = 0.0$  m, και συγκρίσιμα όταν  $\sigma_M = 0.05$  m. Οι μέθοδοι u<sub>f</sub> και f<sub>mp</sub> καταφέρουν να μειώσουν το αρχικό σφάλμα εκτίμησης σε περισσότερες περιπτώσεις από τις άλλες μεθόδους, για κάθε επίπεδο διαταραχής των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα και κάθε επίπεδο διαφυλάρας του χάρτη, ενώ τα ποσοστά τους εξαρτώνται από το αρχικό σφάλμα εκτίμησης σε μικρότερο βαθμό από κάθε άλλη μέθοδο (σχήματα 4.29-4.31). Η ισχύς της πρώτης πρότασης (με την εξαίρεση όπου  $\sigma_R = 0.01$  m και  $\sigma_M = 0.0$ , όπου οι μέθοδοι PLICP, x1, u<sub>f</sub>, και f<sub>mp</sub> είναι ισοδύναμες ως προς τον αριθμό στάσεων των οποίων το σφάλμα μειώθηκε και τη συνολική μείωση του σφάλματος εκτίμησης) φαίνεται με μεγαλύτερη ευχρίνεια στα αριστερά διαγράμματα των σχημάτων 4.24 και 4.25, όπου ο οριζόντιος άξονας καταγράφει τον συνολικό αριθμό στάσεων εισόδου των οποίων το σφάλμα μειώθηκε ως συνέπεια της εφαρμογής της κάθε μεθόδου υπό δοκιμή, και ο κάθετος τη συνολική μείωση του σφάλματος εκτίμησης.

Σε αυτά τα σχήματα παρατηρούμε πως οι μέθοδοι u<sub>f</sub> και f<sub>mp</sub> μείωσαν το σφάλμα περισσότερων εκτιμήσεων στάσης από όλες τις υπόλοιπες μεθόδους, και πως επέφεραν τις μεγαλύτερες μειώσεις σφάλματος ως προς αυτές τις εκτιμήσεις, για κάθε επίπεδο διαταραχών μετρήσεων και διαφυλάρας χάρτη. Η μέθοδος x1 τις ακολουθεί από κοντά όντας υποδεέστερη (α) της PLICP ως προς τη συνολική μείωση σφάλματος όταν  $\sigma_R = \{0.01, 0.03\}$  m και  $\sigma_M = 0.0$  m, και (β) της TEASER ως προς τον συνολικό αριθμό εκτιμήσεων των οποίων το σφάλμα μειώθηκε όταν  $\sigma_R \geq 0.03$  m και  $\sigma_M = 0.05$  m. Παρ' όλα αυτά, στο δεξιό γράφημα του σχήματος 4.25 παρατηρούμε πως η x1 εμφάνισε μικρότερη μέση αύξηση του σφάλματος εκτί-

μησης από την TEASER<sup>6</sup> για τις περιπτώσεις όπου το σφάλμα εκτίμησης αυξήθηκε. Σε αυτό το γράφημα οι μέθοδοι *mf* και *fm* φαίνεται ότι εμφάνισαν τη δεύτερη μικρότερη μέση αύξηση σφάλματος μετά την *x1*. Στο ομόλογο διάγραμμα του σχήματος 4.24 παρατηρούμε πως οι δύο αυτές μέθοδοι εμφανίζουν τη μεγαλύτερη μέση αύξηση του σφάλματος εκτίμησης για τις εκτιμήσεις εκείνες των οποίων το σφάλμα δεν κατάφεραν να μειώσουν, με τις τιμές αυτές να φύπνουν καθώς αυξάνει το επίπεδο διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα, αν και ο *fm* εμφανίζει τη μικρότερη μέση αύξηση από όλες τις μεθόδους υπό δοκιμή όταν  $\sigma_R = 0.01$  m. Ένας τρόπος για την εξάλειψη αυτών των αυξήσεων θα ήταν η σύγχριση της τιμής της μετρικής CAER πριν την ευθυγράμμιση μετρήσεων με εικονικές σαρώσεις με αυτήν μετά από την ευθυγράμμιση, ώστε η στάση εξόδου να τεθεί στην τιμή της στάσεως εισόδου στην περίπτωση που η δεύτερη τιμή της CAER βρεθεί μεγαλύτερη από την πρώτη.

Ως προς τους χρόνους εκτέλεσης: οι υλοποιήσεις όλων των μεθόδων εκτελούνται σε πραγματικό χρόνο,<sup>7</sup> εξαιρέσει των NDT-PSO και TEASER, οι οποίες, στην συγκεκριμένη υλοποίηση, χρησιμοποιώντας τέσσερα επεξεργαστικά νήματα (τα οποία σημειώνουμε ότι ίσως δεν είναι διαθέσιμα σε πραγματικές συνθήκες), κατέγραψαν χρόνους άνω του ενός δευτερολέπτου (σχήμα 4.26). Για τη μεν πρώτη μέθοδο, η εκτέλεση εμφανίζει ντετερμινιστικό χρόνο, ενώ για τη δεύτερη μεταβαλλόμενο και ανάλογο της τυπικής απόκλισης των διαταραχών που επιδρούν στις μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα. Ο χρόνος εκτέλεσης των τριών όψεων του FSMSM εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον αριθμό των εικονικών σαρώσεων που συλλαμβάνει η καθεμία (σχήμα 4.27), και συνεπώς από τον χρόνο που απαιτείται για τον υπολογισμό τους. Η *fm* είναι ισοδύναμη με την *mf* ως προς τον αριθμό των υπολογιζόμενων εικονικών σαρώσεων όμως, λόγω του μικρότερου χρόνου εκτέλεσης της αρχής λειτουργίας της (σχήμα 4.2), η πρώτη εμφανίζει χαμηλότερο ολικό χρόνο εκτέλεσης. Η μέθοδος *x1* εμφανίζει γενικά υψηλότερο αριθμό απαιτητέων εικονικών σαρώσεων, κυρίως λόγω του αριθμού των επανεκκινήσεων της μεθόδου (σχήμα 4.28), ο οποίος οφείλεται στη μη ικανοποίηση του κριτηρίου

<sup>6</sup>Λόγω του αριθμού των επαναλήψεων των πειραμάτων των NDT-PSO και TEASER (ο οποίος οφείλεται στον αυξημένο χρόνο εκτέλεσης τους), τα στατιστικά τους στα σχήματα 4.24 και 4.25 είναι ανηγμένα ως προς τον ονομαστικό αριθμό επαναλήψεων  $E = 10$ .

<sup>7</sup>Η έννοια του πραγματικού χρόνου στα συμφραζόμενα των προσθετικών μεθόδων επί κυρίων μεθόδων παρακολούθησης της στάσης ενός κινούμενου οχήματος του πεδίου εφαρμογής ?? αναφέρεται στην απαίτηση η προσθετική μέθοδος να επεξεργάζεται μία προς μία κάθε έξοδο της κυρίας μεθόδου. Συνεπώς εξαρτάται από το ρυθμό με τον οποίο η τελευταία παράγει εξόδους. Στον MCL, για παράδειγμα, αυτός ο ρυθμός είναι ευμετάβλητος, και εξαρτάται από την ταχύτητα του οχήματος, καθώς είναι δυνατόν να τεθούν κατώφλια μεταβολής της εκτίμησης της θέσης και του προσανατολισμού του οχήματος (μέσω οδομετρίας) για την εκαίνηση της επεξεργασίας των εισόδων του. Σε κάθε περίπτωση, στα συμφραζόμενα της παρούσας διατριβής ορίζουμε ως εκτέλεση σε πραγματικό χρόνο την εκτέλεση σε αυστηρά λιγότερο από το μισό του ενός δευτερολέπτου.

τερματισμού της—από την οποία παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι σε χαμηλά επίπεδα διαταραχών η  $x1$  εμφανίζει υψηλότερα σφάλματα εκτίμησης σε σχέση με τις  $uf$  και  $fm$ . Το ίδιο παρατηρείται και μέσω των κατανομών του ολικού σφάλματος εκτίμησης, στο σχήμα 4.32.

Από το σχήμα 4.28 συμπεραίνουμε πως για τις μεθόδους  $uf$  και  $fm$  ο αριθμός επανεκκινήσεων εξαρτάται κυρίως από την απόσταση ανάμεσα στην πραγματική και την εκτιμώμενη θέση του αισθητήρα (το οποίο φαίνεται από τα πειραματικά αποτελέσματα ευκρινέστερα στο άνω σκέλος του σχήματος, όπου ο αριθμός των επανεκκινήσεων όταν  $\|\Delta\hat{t}\|_2 \approx \sqrt{2} \cdot \bar{\delta}_{xy}$  είναι μεγαλύτερος από αυτόν σε κάθε άλλη περίπτωση), ενώ, εν αντιθέσει, για τη μέθοδο  $x1$  εξαρτάται επιπρόσθετα και από το σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού (παρατηρήστε πως σε μία στενή γειτονιά γύρω από τον πραγματικό προσανατολισμό του αισθητήρα υπάρχει έλλειψη επανεκκινήσεων).

Στο σχήμα 4.29 παρατηρείται πως το ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (⌘) ως προς τη συνιστώσα του προσανατολισμού

- μειώνεται για τις μεθόδους PLICP, NDT, NDT-PSO, FastGICP, και FastVGICP
- αυξάνει για τις μεθόδους TEASER και  $x1$
- παραμένει αμετάβλητο για τις μεθόδους  $uf$  και  $fm$

καθώς αυξάνει το αρχικό σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού. Ταυτόχρονα οι τελευταίες δύο μέθοδοι καταγράφουν τα υψηλότερα ποσοστά ικανοποίησης του στόχου ως προς τη συνιστώσα του προσανατολισμού ανάμεσα σε όλες τις υπό δοκιμή μεθόδους, για όλα τα επίπεδα διαταραχής των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα και διαφυλοράς χάρτη.

Στο σχήμα 4.30 παρατηρείται πως το ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (⌘) ως προς τη συνιστώσα της θέσης αυξάνει για όλες τις υπό δοκιμή μεθόδους καθώς αυξάνει το αρχικό σφάλμα εκτίμησης θέσης. Αυτό είναι βεβαίως αναμενόμενο: όσο αυξάνει το αρχικό σφάλμα εκτίμησης θέσης τόσο είναι ευκολότερη η μείωσή του. Αντιθέτως η μείωσή του είναι τόσο δυσκολότερη όσο πιο μικρό είναι το σφάλμα εκτίμησης θέσης. Σε χαμηλά επίπεδα σφάλματος θέσης οι μέθοδοι TEASER,  $uf$ , και  $fm$  είναι συγκρίσιμες, ενώ όσο αυξάνει το σφάλμα εκτίμησης θέσης οι τελευταίες δύο εμφανίζουν τα υψηλότερα ποσοστά ικανοποίησης του στόχου ανάμεσα σε όλες τις υπό δοκιμή μεθόδους, για όλα τα επίπεδα διαταραχής των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα και διαφυλοράς χάρτη. Η μέθοδος  $x1$  υπερτερεί εν γένει της TEASER για

τιμές αρχικού σφάλματος εκτίμησης θέσης πάνω από ένα κατώφλι σφάλματος θέσης, το οποίο είναι συνάρτηση του επιπέδου διαταραχών των μετρήσεων του αισθητήρα και της διαφύοράς του χάρτη.

Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, όμως, εμφανίζει η επίδραση του αρχικού σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού στο τελικό ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (‡) ως προς τη συνιστώσα της θέσης (σχήμα 4.31). Εδώ παρατηρούμε πως

- οι μέθοδοι  $uf$  και  $fm$  είναι οι πιο εύρωστες και οι πιο ακριβείς για κάθε επίπεδο διαταραχών μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα και διαφύοράς του χάρτη
- η μέθοδος  $x1$  είναι εύρωστη αλλά λιγότερο ακριβής από (α) την TEASER σε χαμηλές τιμές αρχικού σφάλματος εκτίμησης προσανατολισμού και (β) από την PLICP σε χαμηλά επίπεδα διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα όταν ο χάρτης είναι διεφύλαξμένος
- οι μέθοδοι PLICP, NDT, NDT-PSO, FastGICP, FastVGIP, και TEASER δεν είναι εύρωστες ως προς το ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (‡) ως προς τη συνιστώσα της θέσης καθώς αυξάνει το αρχικό σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού

Ως προς τα ολικά τελικά σφάλμα εκτίμησης στάσης (σχήμα 4.32) παρατηρούμε πως οι τρεις όψεις του FSMSM εμφανίζουν χαμηλότερα σφάλματα ως προς το μέσο όρο, τη μέγιστη τιμή τους, τη διάμεση τιμή, και το εύρος της κατανομής τους γύρω από αυτήν σε σχέση με τους PLICP, NDT, NDT-PSO, FastGICP, FastVGICP, και TEASER, για κάθε επίπεδο διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα όταν  $\sigma_M = 0.0$  m. Το ίδιο παρατηρείται και όταν  $\sigma_M = 0.05$  m, με την εξαίρεση της μέγιστης και διάμεσης τιμής, και του εύρους της κατανομής των σφαλμάτων (α) των  $uf$  και  $fm$  όταν  $\sigma_R = 0.01$  m, και (β) της  $x1$  για  $\sigma_R \leq 0.05$  m. Σε αυτές τις περιπτώσεις η μέθοδος PLICP εμφανίζει ελαφρά χαμηλότερες τιμές σφαλμάτων εκτίμησης στάσης, όμως, λόγω της θέσης της μέσης τιμής των σφαλμάτων της εκτός του ενδοτεταρτημοριακού εύρους (interquartile range—IQR), συμπεραίνουμε πως η PLICP εξάγει έναν αρκούντως μεγάλο αριθμό από εξωκείμενες τιμές σφαλμάτων εκτίμησης στάσης (outliers). Οι κατανομές των τελευταίων αναπαριστώνται ευχρινέστερα συναρτήσει των αρχικών συνθηκών σφάλματος ανά συνιστώσα θέσης και προσανατολισμού στα σχήματα 4.33 και 4.34.

Οι χάρτες ψευδογραμμών αυτών των σφαλμάτων μάς ενημερώνουν για την αντίθεση ανάμεσα στις εξωκείμενες τιμές της PLICP και των τριών όψεων της FSMSM παρατηρώντας πως η χρωματική αναπαράσταση των σφαλμάτων των τελευταίων είναι λιγότερο σκούρη (οι τιμές εκτίμησης σφαλμάτος εκτείνονται από χαμηλές σε υψηλές τιμές σε αντίστροφη αναλογία με τη φωτεινότητα των χρωμάτων) σε σχέση με αυτήν της PLICP καθώς αυξάνεται η τυπική απόκλιση των διαταραχών που επιδρούν στις μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα. Παράλληλα, σε αυτά τα διαγράμματα διακρίνεται το πώς επιδρά η αύξηση των αρχικών σφαλμάτων θέσης και προσανατολισμού στο τελικό σφάλμα εκτίμησης στάσης. Για τις τρεις όψεις της μεθόδου FSMSM τα σφαλμάτα εκτίμησης στάσης εξαρτώνται αποκλειστικά από τη συνιστώσα θέσης, όπως και για τη μέθοδο TEASER. Άλλες μέθοδοι εξαρτώνται από το αρχικό σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού (NDT-PSO και FastVGICP, με την τελευταία σε μεγαλύτερο βαθμό από την πρώτη), ή από κανένα από τα δύο (PLICP, NDT, FastGICP). Τα ίδια συμπεράσματα συνάγονται και για τη σχέση των τελικών συνιστώντων σφαλμάτων εκτίμησης από τις αρχικές συνθήκες μετατόπισης για τις τιμές σφαλμάτων υπό του συνολικού μέσου όρου σφαλμάτος (σχήματα 4.35 και 4.36).

Στο σχήμα ?? παρατηρείται πως τα ποσοστά των τελικών σφαλμάτων προσανατολισμού των τριών όψεων της μεθόδου FSMSM με μέτρο υπό του ορίου  $\gamma/2^{\nu+1}$  εξαρτώνται από το επίπεδο των διαταραχών που επιδρούν στις πραγματικές μετρήσεις όταν ο χάρτης ανταποκρίνεται πλήρως στο αναπαριστώμενο περιβάλλον, αλλά αυτή η αναλογία παύει να υφίσταται για τις μεθόδους  $mf$  και  $fm$  στην αντίθετη περίπτωση.

## 4.6 Χαρακτήρας και περιορισμοί

Σε αυτή την ενότητα δοκιμάζουμε τον FSMSM με τρόπους τέτοιους ώστε να αποκαλυφθούν κύρια χαρακτηριστικά και περιορισμοί του.

Αρχικά διενεργούμε μία σειρά πειραμάτων με βάση την πειραματική διάταξη της ενότητας 4.5.1 για αυξανόμενο μέγιστο ρυθμό υπερδειγματοληψίας  $\mu_{max} = 2^{\nu_{max}}$  ώστε να ερευνήσουμε την απόκριση της μεθόδου  $mf$  (και συνεπώς, λόγω της πρακτικά ταυτόσημης συμπεριφοράς της με τη μέθοδο  $fm$ , την απόκριση της  $fm$ ) σε ό,τι αφορά τα σφαλμάτα εκτίμησης προσανατολισμού, και κατά συνέπεια τα σφαλμάτα εκτίμησης θέσης, δεδομένων των παρατηρήσεων VI και II. Για αυτόν τον λόγο διενεργούμε εκατό επαναλήψεις της μεθόδου πάνω στο σύνολο

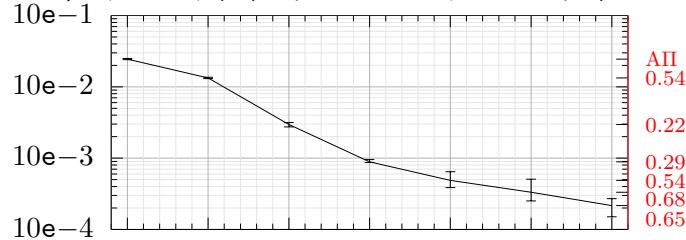
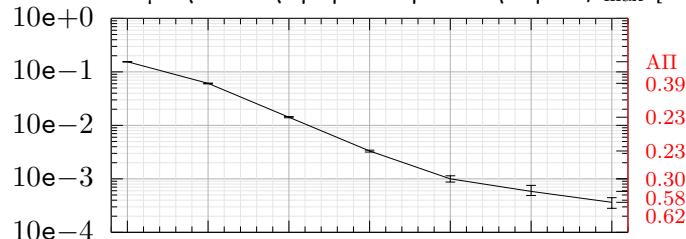
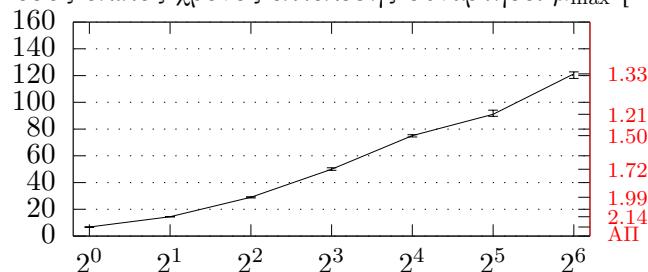
δεδομένων laserazos,<sup>8</sup> το οποίο διαθέτει 778 δείγματα πραγματικών δισδιάστατων σαρώσεων. Η πραγματική διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι η ίδια με αυτήν που περιγράφεται στην ενότητα 4.5.1—σε αντίθεση όμως με αυτήν, εδώ έχουμε θέσει  $\sigma_R = \sigma_M = 0.0$  m, και ο μέγιστος ρυθμός δειγματοληψίας κυμαίνεται από  $\mu_{\min} = 2^0$  έως  $\mu_{\max} = 2^6$ . Κατά συνέπεια για να προκύψει το σχήμα 4.38 διενεργήθηκαν  $100 \times 778 \times |\{0, 1, \dots, 6\}| \approx 5.4 \cdot 10^5$  ευθυγραμμίσεις πραγματικών με εικονικές σαρώσεις. Το σχήμα αυτό απεικονίζει το μέσο όρο σφάλματος εκτίμησης ανά επανάληψη εκτέλεσης πάνω στο σύνολο δεδομένων και την τυπική απόκλιση γύρω από αυτόν, για τα σφάλματα εκτίμησης προσανατολισμού και θέσης (άνω και μεσαία σειρά), και το μέσο χρόνο εκτέλεσης ανά ευθυγράμμιση (χάτω σειρά).

Σε αυτά τα διαγράμματα παρατηρούμε πως ο διπλασιασμός του ρυθμού υπερδειγματοληψίας επιφέρει μεταβλητή μείωση των σφαλμάτων και μεταβλητή αύξηση του χρόνου εκτέλεσης, πάντα όμως γύρω από τον παράγοντα δύο. Τα άνω δύο διαγράμματα επιβεβαιώνουν την παρατήρηση VI, δηλαδή πως χαμηλότερα σφάλματα εκτίμησης προσανατολισμού οδηγούν σε χαμηλότερα σφάλματα εκτίμησης θέσης, και την παρατήρηση II, δηλαδή το αντίστροφο. Ταυτόχρονα παρατηρείται πως, εν γένει, η αύξηση του ρυθμού υπερδειγματοληψίας οδηγεί σε επιβράδυνση της αύξησης του μέσου σφάλματος και του χρόνου εκτέλεσης: όσο αυξάνει ο ρυθμός υπερδειγματοληψίας τόσο αυξάνει το κλάσμα ανάμεσα σε διαδοχικές τιμές των μετρικών μέσου σφάλματος και χρόνου εκτέλεσης.

Στο σχήμα 4.39 παρατίθεται ένα τυπικό παράδειγμα εξέλιξης της ευθυγράμμισης μίας πραγματικής δισδιάστατης πανοραμικής σάρωσης με εικονικές σαρώσεις μέσω της μεθόδου FSMSM, και συγκεκριμένα μέσω της μεθόδου x1. Εδώ η πραγματική σάρωση επιβαρύνεται με διαταραχές τυπικής απόκλισης  $\sigma_R = 0.05$  m, και οι εικονικές σαρώσεις προκύπτουν από χάρτη ο οποίος αναπαριστά στην εντέλεια το περιβάλλον του αισθητήρα lidar ( $\sigma_M = 0.0$  m). Η άνω σειρά του σχήματος παρουσιάζει την αρχική συνθήκη ευθυγράμμισης στο χάρτη που σημειώνεται με μαύρο περίγραμμα στα αριστερά, δηλαδή την πραγματική στάση του αισθητήρα (μαύρο χρώμα) και την αρχική εκτιμώμενή του στάση (ματζέντα). Η πραγματική στάση του αισθητήρα είναι  $p = [0.563, 2.1, 0.47]^T$  και η αρχική εκτίμησή της  $\hat{p} = [0.26, 2.35, 1.738]^T$ . Στα δεξιά παρουσιάζεται η πραγματική σάρωση με μαύρο χρώμα, και η εικονική σάρωση που υπολογίζεται από την αρχική εκτίμηση της στάσης του αισθητήρα με ματζέντα, στο τοπικό σύστημα

---

<sup>8</sup>To σύνολο δεδομένων είναι διαθέσιμο στη διεύθυνση <https://censi.science/pub/research/2007-plicp/laserazosSM3.log.gz>

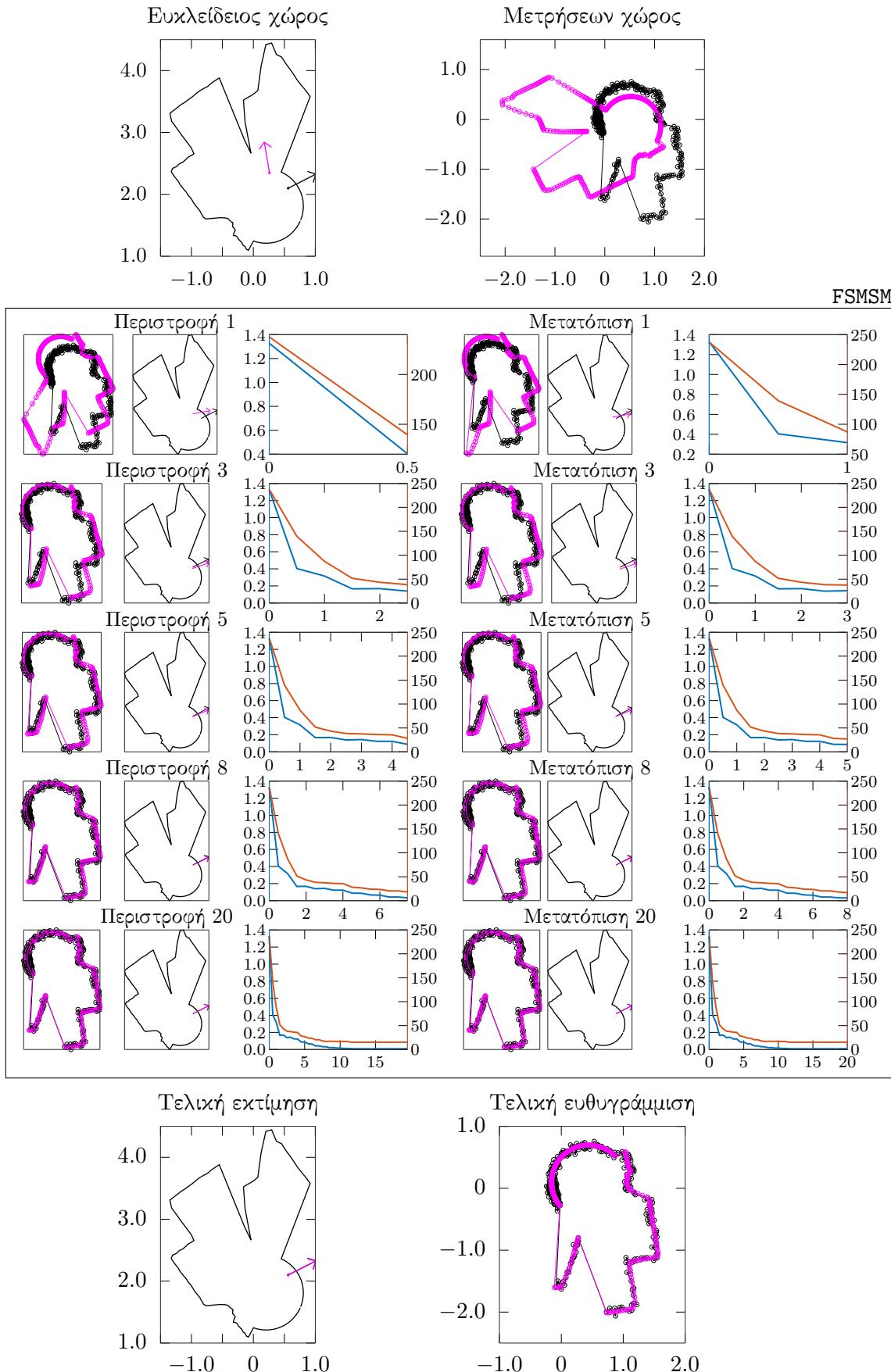
Μέσο σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού συναρτήσει  $\mu_{\max}$  [rad]Μέσο σφάλμα εκτίμησης θέσης συναρτήσει  $\mu_{\max}$  [m]Μέσος ολικός χρόνος εκτέλεσης συναρτήσει  $\mu_{\max}$  [ms]

$$\mu_{\max} : (\mu_{\min}, \mu_{\max}) = (2^0, 2^{\nu_{\max}})$$

Σχήμα 4.38: Κύρια στατιστικά της μεθόδου αf σε εκατό επαναλήψεις πάνω στο σύνολο δεδομένων laserazos. Στον δεξιό κάθετο άξονα σημειώνονται οι τιμές των κλασμάτων μετρικών διαδοχικών ρυθμών υπερδειγματοληψίας—π.χ.  $\frac{e_{\theta}|_{\mu_{\max}=2^1}}{e_{\theta}|_{\mu_{\max}=2^0}} = 0.54$ ,  $\frac{e_{xy}|_{\mu_{\max}=2^1}}{e_{xy}|_{\mu_{\max}=2^0}} = 0.39$ , και  $\frac{T|_{\mu_{\max}=2^1}}{T|_{\mu_{\max}=2^0}} = 2.14$ . Η συντομογραφία AII σημαίνει την απροσδιοριστία

συντεταγμένων της κάθε μίας. Στην πρώτη στήλη του περιγεγραμμένου διαγράμματος παρουσιάζονται το πραγματικό διάνυσμα μετρήσεων (μαύρο) και το εικονικό διάνυσμα μετρήσεων αμέσως μετά την εφαρμογή του βήματος εκτίμησης του προσανατολισμού της πραγματικής στάσης του αισθητήρα (με ματζέντα—Αλγόριθμος X). Στη δεύτερη στήλη παρουσιάζονται η πραγματική στάση του αισθητήρα και οι αντιστοιχούσες εκτιμήσεις της FSMSM για αυτή. Στην τρίτη στήλη παρουσιάζονται τα διαγράμματα εξέλιξης του ολικού σφάλματος εκτίμησης (με μπλε χρώμα) και της τιμής της μετρικής CAER (χόκκινο). Οι υπόλοιπες στήλες παρουσιάζουν τα ίδια περιεχόμενα αμέσως μετά την εφαρμογή του βήματος εκτίμησης της θέσης της πραγματικής στάσης του αισθητήρα (Αλγόριθμος VIII). Η τελευταία σειρά του σχήματος παρουσιάζει το αποτέλεσμα του FSMSM στον Ευκλείδειο χώρο (αριστερά)—δηλαδή την τελική εκτίμηση της στάσης του αισθητήρα—και στο χώρο μετρήσεων—δηλαδή την ευθυγράμμιση της εικονικής σάρωσης από την τελική εκτίμηση στάσης με την πραγματική σάρωση. Η τελική εκτίμηση της FSMSM είναι  $\hat{p} = [0.55854, 2.09692, 0.46509]^\top$ , με σφάλμα εκτίμησης θέσης  $e_{xy} = 0.00542$  m και σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού  $e_\theta = 0.00491$  rad.

Στο σχήμα 4.40 παρουσιάζονται τα ίδια στοιχεία όπως και στο σχήμα 4.39, για μία ανεπιτυχή όμως ευθυγράμμιση. Εδώ η εκτίμηση της στάσης του αισθητήρα ισούται με την πραγματική του στάση, μετατοπισμένη όμως κατά ένα μέτρο στον οριζόντιο άξονα προς τα αριστερά. Ο λόγος για τον οποίον η ευθυγράμμιση αποτυγχάνει είναι γιατί η εκτίμηση του προσανατολισμού αποκλίνει κιόλας από το πρώτο βήμα, το οποίο γεγονός οφείλεται στην αδυναμία της μεθόδου x1 να εκτιμήσει τον προσανατολισμό της πραγματικής στάσης του αισθητήρα, και όχι σε κάποια μη γραμμικότητα της μετρικής CAER. Η αιτία αυτής της αδυναμίας οφείλεται στο “μεγάλο” σφάλμα εκτίμησης θέσης, το οποίο, όπως διακρίνεται και από το σχήμα, αλλοιώνει τη μορφή των δύο σαρώσεων. Αυτή η αλλοιώση οφείλεται στο γεγονός ότι από διαφορετικές θέσεις είναι εν γένει ορατές διαφορετικές περιοχές του περιβάλλοντος. Η επιτυχία ή αποτυχία κάθε μεθόδου εξαρτάται συνεπώς και από την απόσταση μεταξύ της πραγματικής με την εκτιμώμενη θέση, και από το ίδιο το περιβάλλον ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Αυτού του είδους τα σφάλματα ενεργούν ως δυσχέρειες στην ευθυγράμμιση λόγω του γεγονότος ότι οι μέθοδοι εκτίμησης του προσανατολισμού της FSMSM λειτουργούν απευθείας στο χώρο των μετρήσεων χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μεθόδους ευθυγράμμισης που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Ως αναφορά παραθέτουμε πως η μέθοδος PLICP, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, είναι ικανή να εκτιμήσει την πραγ-



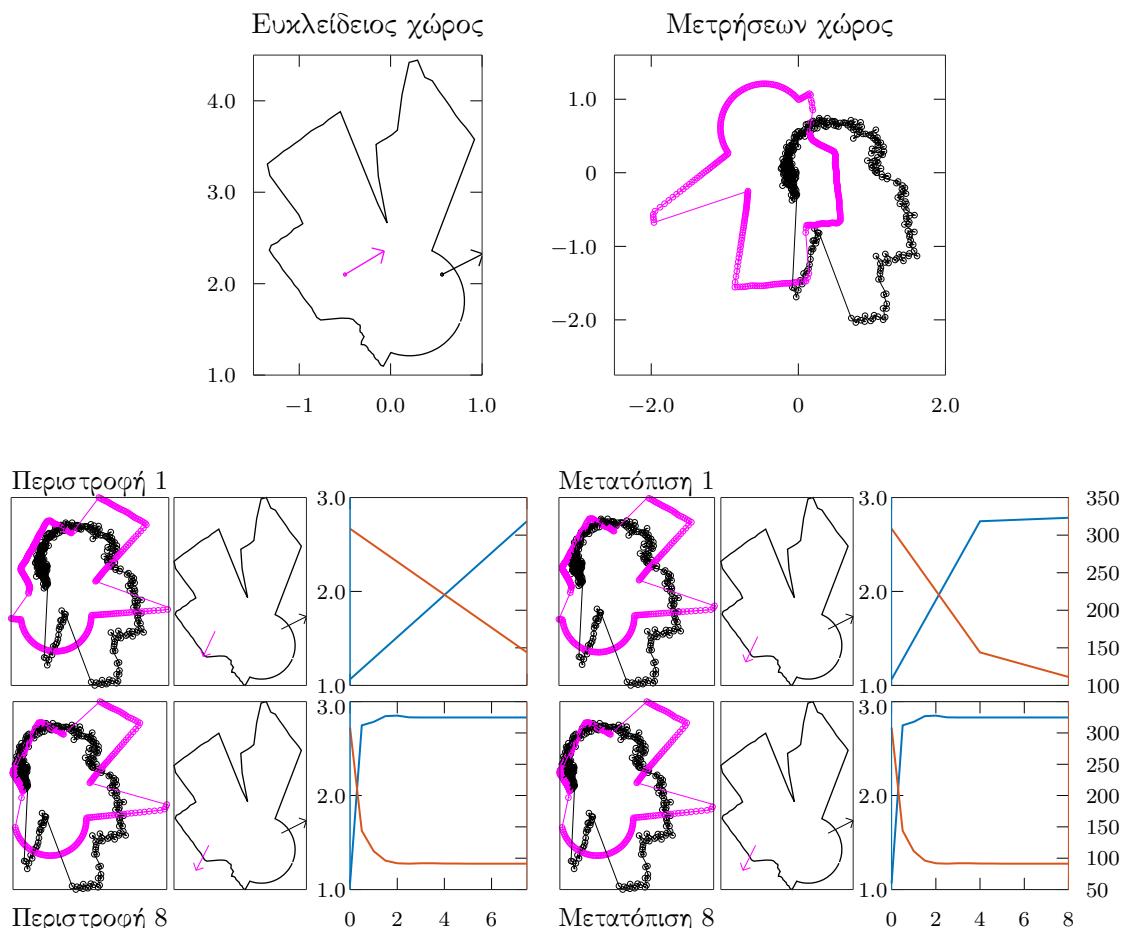
Σχήμα 4.39: Παράδειγμα εξέλιξης επιτυχούς ευθυγράμμισης πραγματικής με εικονικές σαρώσεις μέσω της μεθόδου FSMSM. Η πραγματική στάση του αισθητήρα και η πραγματική σάρωση απεικονίζονται με μαύρο χρώμα, ενώ η εκτίμηση της στάσης και οι εικονικές σαρώσεις με ματζέντα. Τα διαγράμματα της τρίτης και έκτης στήλης απεικονίζουν με μπλε το ολικό σφάλμα εκτίμησης στάσης, και με κόκκινο την τιμή της μετρικής CAER.

ματική στάση με τελικό σφάλμα εκτίμησης περίπου δύο εκατοστών.<sup>9</sup> Τέτοιου μέτρου αρχικά σφάλματα θέσης δεν αναφέρονται στη βιβλιογραφία (—ούτε υπάρχουν στην εμπειρία του συγγραφέα)—παρ' όλα αυτά αναφέρουμε τον περιορισμό της μεθόδου FSMSM όσο αφορά σε τέτοια σφάλματα θέσης ως έναν παράγοντα οριοθέτησης της απόκρισης της μεθόδου ως θεωρητικό κατασκεύασμα. Σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε πως μετά την απόκλιση της εκτίμησης προσανατολισμού το σφάλμα εκτίμησης της θέσης αυξάνει, με αποτέλεσμα την επιπρόσθετη επιβάρυνση του συστήματος εκτίμησης προσανατολισμού στην επόμενη επανάληψη. Σε αυτό το σημείο η εκτίμηση στάσης έχει αποκλίνει περαιτέρω, και έχει παγιδευτεί ες αεί σε όλως διόλου εσφαλμένη εκτίμηση. Και σε αυτήν την περίπτωση, εάν καταγράφετο η τιμή της μετρικής CAER πριν και μετά τη διενέργεια της ευθυγράμμισης, θα ήταν δυνατή η σύγκριση των δύο τιμών, και κατά συνέπεια η αποφυγή, κατ' ελάχιστον, της απόκλισης της εκτίμησης.

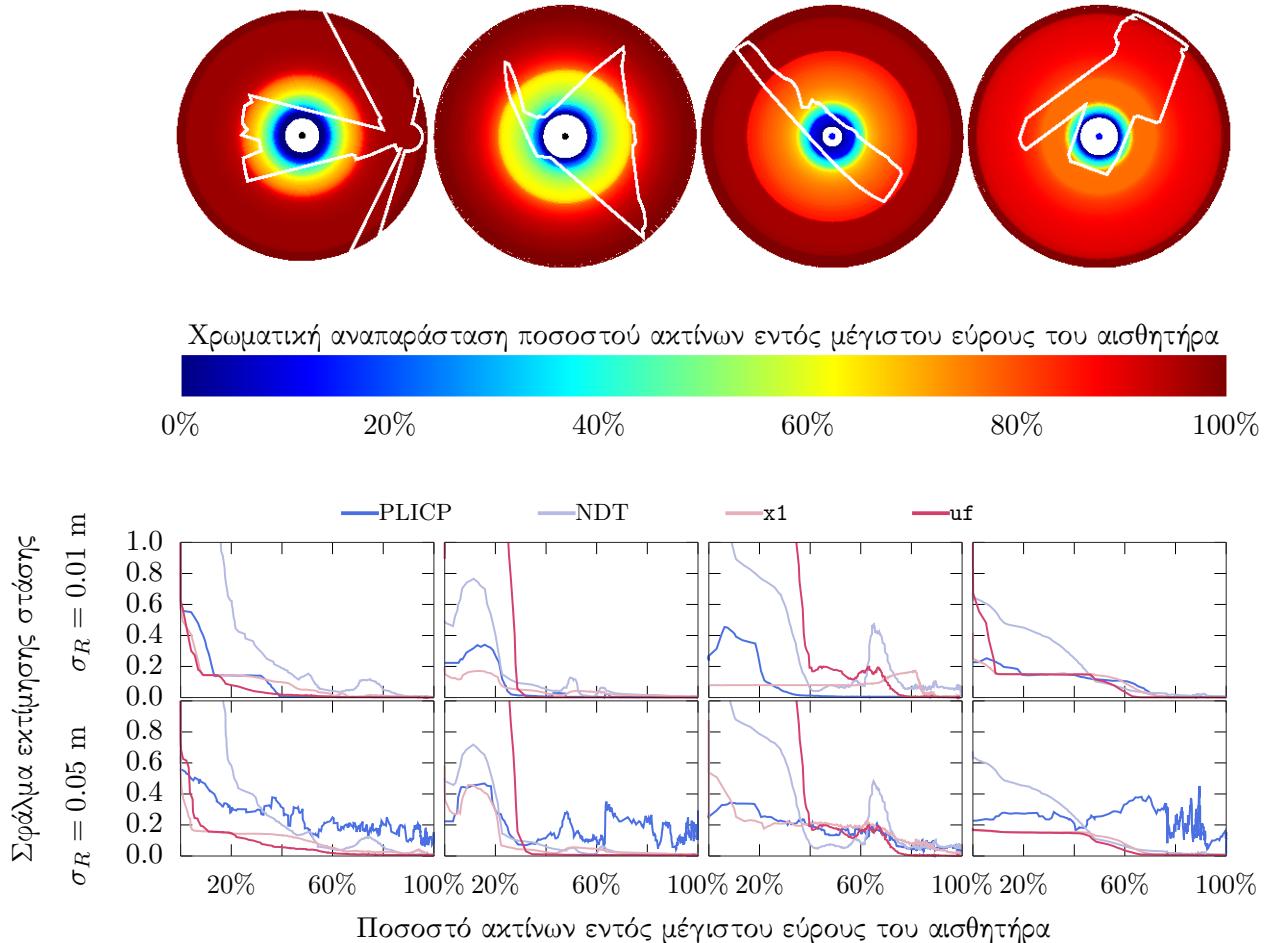
Οι κύριοι περιορισμοί της απόκρισης των προσθετικών μεθόδων ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις αφορούν στα αμετάβλητα χαρακτηριστικά μεγέθη του ίδιου του φυσικού αισθητήρα σαρώσεων, τα οποία είναι δυο. Το πρώτο είναι το μέγεθος των διαταραχών που επιδρούν στις μετρήσεις του, την απόκριση επί του οποίου εξετάσαμε για διάφορες τιμές στην ενότητα 4.5. Το δεύτερο είναι το βεληνεκές του αισθητήρα, δηλαδή η μέγιστη απόσταση μέχρι την οποία μπορεί να ανιχνεύσει την παρουσία αντικειμένων.

Στην άνω σειρά του σχήματος 4.41 εμφανίζονται με λευκό χρώμα τέσσερα διαφορετικά περιβάλλοντα, μέσα στα οποία τοποθετείται ένας αισθητήρας στις θέσεις που σημειώνονται με κουκκίδες βαθύ μπλε χρώματος. Οι θέσεις αυτές είναι τα κέντρα των ομόκεντρων κύκλων που εμφανίζονται στην ίδια σειρά. Η πειραματική διάταξη που ακολουθεί στοχεύει στην καταγραφή της απόκρισης τεσσάρων κυρίων μεθόδων, ήτοι των PLICP, NDT, x1, και uF, σε πειράματα όπου το βεληνεκές του αισθητήρα μεταβάλλεται έτσι ώστε οι μετρήσεις του να περιλαμβάνουν όλα τα εμπόδια του περιβάλλοντος, μειούμενο μέχρι που να μην περιλαμβάνουν κανένα. Το βεληνεκές του αισθητήρα είναι η ακτίνα των κύκλων της πρώτης σειράς του σχήματος, και το χρώμα αυτών αναπαριστά το ποσοστό των ακτίνων που φέρουν χωρική πληροφορία, βάσει της χρωματικής λωρίδας που παρουσιάζεται στη δεύτερη σειρά. Στις δύο τελευταίες σειρές

<sup>9</sup> Εδώ πρέπει να επισημάνουμε πως η σύγκλιση σε καταστάσεις “μεγάλων” σφαλμάτων θέσης δεν είναι κάποιο αποκλειστικό χαρακτηριστικό των μεθόδων που χρησιμοποιούν αντίστοιχες, όπως ακριβώς και η απόκλιση δεν είναι αποκλειστικό χαρακτηριστικό της FSMSM. Όπως θα δούμε σε αντίστοιχο παράδειγμα στο επόμενο κεφάλαιο ?? δεν υπάρχει κάποιος ευδιάκριτος παράγοντας που διακρίνει εκ-των-προτέρων την απόκριση των δύο οικογενειών μεθόδων.



Σχήμα 4.40: Παράδειγμα εξέλιξης ανεπιτυχούς ευθυγράμμισης πραγματικής με εικονικές σαρώσεις μέσω της μεθόδου FSMSM. Η πραγματική στάση του αισθητήρα και η πραγματική σάρωση απεικονίζονται με μαύρο χρώμα, ενώ η εκτίμηση της στάσης και οι εικονικές σαρώσεις με ματζέντα. Τα διαγράμματα της τρίτης και έκτης στήλης απεικονίζουν με μπλε το ολικό σφάλμα εκτίμησης στάσης, και με κόκκινο την τιμή της μετρικής CAER.



Σχήμα 4.41: Πειράματα απόκρισης του σφάλματος εκτίμησης των PLICP, NDT, x1 και uf σε συνθήκες μειούμενου βεληνεκούς-μέγιστου εύρους για δύο τιμές τυπικής απόκλισης των διαταραχών που επιδρούν στις μετρήσεις του φυσικού αισθητήρα όταν  $\sigma_M = 0.0 \text{ m}$ . Η απόκριση της μεθόδου fm είναι παρόμοια αυτής της μεθόδου uf.

παρατίθενται οι μέσοι όροι των ολικών σφαλμάτων εκτίμησης στάσης σε δέκα επαναλήψεις, για κάθε μέθοδο και περιβάλλον, για  $\sigma_R = \{0.01, 0.05\} \text{ m}$  και  $\sigma_M = 0.0 \text{ m}$ .

Στα διαγράμματα των τελευταίων δύο σειρών παρατηρούμε πως: (α) δεν υφίσταται ομοιόμορφη απόκριση για οποιαδήποτε μέθοδο όσο αφορά σε κάθε περιβάλλον: συνεπώς η απόκριση κάθε μεθόδου εξαρτάται και από τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε περιβάλλοντος, (β) η απόκριση της μεθόδου uf είναι παρόμοια με την ονομαστική για ποσοστό αριθμού ακτίνων εντός του βεληνεκούς έως και 80% για κάθε περιβάλλον και επίπεδο διαταραχών υπό δοκιμή, (γ) η απόκριση της μεθόδου x1 εμφανίζει κατά μέσο όρο τα χαμηλότερα σφάλματα όταν λαμβάνεται υπόψη ολόκληρο το εύρος των ποσοστών ακτίνων ( $[0\%, 100\%]$ ) εντός του βεληνεκούς, (δ) το σφάλμα εκτίμησης της μεθόδου PLICP είναι το μέγιστο ανάμεσα σε όλες τις υπό δοκιμή μεθόδους στο διάστημα  $[50\%, 100\%]$  των ακτίνων όταν  $\sigma_R = 0.05 \text{ m}$  για τρία από τα

τέσσερα περιβάλλοντα, (ε) το σφάλμα εκτίμησης της μεθόδου NDT αυξάνει με συνέπεια σε κάθε περιβάλλον και επίπεδο διαταραχών υπό δοκιμή καθώς μειώνεται το ποσοστό των ακτίνων των οποίων οι μετρήσεις βρίσκονται εντός του μέγιστου εύρους. Τούτων αναφερθέντων, δεν είναι δυνατό να προκύψει κάποιο συμπέρασμα που για δεδομένο ποσοστό ακτίνων εντός μέγιστου εύρους καθορίζει με συνέπεια την περισσότερο ακριβή μέθοδο ευθυγράμμισης. Με βάση τα παραπάνω πειραματικά αποτελέσματα, η πιο συνετή κίνηση όσο αφορά σε όλες τις προσθετικές μεθόδους ευθυγράμμισης είναι ο πρότερος της ευθυγράμμισης υπολογισμός του ποσοστού των ακτίνων εντός του βεληνεκούς του αισθητήρα, και η λήψη απόφασης ευθυγράμμισης ή μη, αναλόγως με το είδος του περιβάλλοντος (δύσκολο έως αδύνατον) ή το είδος της μεθόδου (π.χ. οι μέθοδοι  $x1$  και  $uf$  συμπεριφέρονται κατά προσέγγιση ονομαστικά ως το 70% των ακτίνων να βρίσκονται εντός του βεληνεκούς σε τρία από τα τέσσερα υπό δοκιμή περιβάλλοντα, για κάθε επίπεδο διαταραχών των μετρήσεων).

## 4.7 Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα

### 4.7.1 Συμπεράσματα κεφαλαίου

Στο παρόν κεφάλαιο επιζητήσαμε την κατασκευή μεθόδων ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις, των οποίων η δράση είναι προσθετική ως προς μία κύρια μέθοδο παρακολούθησης της στάσης ενός ρομπότ του πεδίου εφαρμογής ??, με σκοπό τη μείωση του σφάλματος εκτίμησής της (στόχος (\*))—όπως ακριβώς στο κεφάλαιο 2—αλλά χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων ανάμεσα στα διανύσματα εισόδου. Προς αυτήν την κατεύθυνση σκεφθήκαμε ορθολογικά, μελετώντας το πρόβλημα και λύσεις της ευρύτερης επιστημονικής βιβλιογραφίας, και σχεδιάσαμε τη μέθοδο FSMSM, η οποία διαχρίνεται σε τρεις εκδόσεις ανάλογα με την υποκείμενη μέθοδο εκτίμησης περιστροφής. Αυτές ονομάστηκαν  $x1$ ,  $uf$ , και  $fm$ .

Με βάση τα πειραματικά αποτελέσματα που εκτίθενται στην ενότητα 4.5.2 δεδομένης της πειραματικής διάταξης της ενότητας 4.5.1, τα χαρακτηριστικά, και τους περιορισμούς της μεθόδου FSMSM (ενότητα 4.6), συνάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Ο στόχος (\*), ο οποίος τέθηκε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, ικανοποιείται για τη μέθοδο  $x1$  σε ποσοστό άνω του 97.5% για  $\sigma_R \in [0.01, 0.20]$  m και  $\sigma_M \in [0.0, 0.05]$

m, και για τις  $uf$  και  $fm$  σε ποσοστό άνω του 99.2% (σχήμα 4.23)

- Τα ποσοστά των στάσεων των οποίων το σφάλμα εκτίμησης μειώθηκε ως αποτέλεσμα της εφαρμογής των μεθόδων x1,  $uf$ , και  $fm$  είναι εύρωστα ως προς τις διαταραχές που επιδρούν στις μετρήσεις εμπορικά διαθέσιμων πανοραμικών αισθητήρων, και διαφθορές του χάρτη—σε αντίθεση με τις εκδόσεις των μεθόδων ICP και NDT
- Οι τρεις σχεδιασθείσες μέθοδοι εκτελούνται σε πραγματικό χρόνο για αριθμό ακτίνων  $N_s = 360$ , αλλά η x1 υπολείπεται σε χρόνο εκτέλεσης σε χαμηλά επίπεδα διαταραχών των μετρήσεων του φυσικού αισθητήρα lidar (σχήμα 4.27)
- Το μέσο σφάλμα εκτίμησης στάσης των x1,  $uf$ , και  $fm$  έχει για άνω όριο το ελάχιστο μέσο σφάλμα της καλύτερης ανά διαμόρφωση μεθόδου της βιβλιογραφίας (σχήμα 4.32)
- Οι τρεις όψεις της μεθόδου FSMSM εμφανίζουν χαμηλότερα επίπεδα υπέρογκων σφαλμάτων στάσης σε σχέση με τις μεθόδους της βιβλιογραφίας (σχήματα 4.33 και 4.34)
- Οι μέθοδοι  $uf$  και  $fm$  είναι πρακτικά ισοδύναμες ως προς όλες τις μετρικές αξιολόγησης (ποσοστό επιτυχίας, σφάλματα εκτίμησης θέσης και προσανατολισμού, αριθμός επανεκκινήσεων, χρόνο εκτέλεσης)
- Το ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (\*) ως προς το τελικό σφάλμα προσανατολισμού των  $uf$  και  $fm$  είναι ανεξάρτητο από το αρχικό σφάλμα προσανατολισμού για ένα δεδομένο επίπεδο διαταραχών μετρήσεων και διαφθοράς χάρτη, της x1 είναι αντιστρόφως ανάλογο, ενώ των ICP εκδόσεων ανάλογο πέραν ενός κατωφλίου (σχήμα 4.29)
- Το ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (\*) ως προς το τελικό σφάλμα θέσης των  $uf$  και  $fm$  είναι υψηλότερο από αυτό των μεθόδων της βιβλιογραφίας που εκτελούνται σε πραγματικό χρόνο ως προς τα αρχικά σφάλματα θέσης (σχήμα 4.30)
- Το ποσοστό ικανοποίησης του στόχου (\*) ως προς το τελικό σφάλμα θέσης των  $uf$  και  $fm$  είναι ανάλλοιωτο του αρχικού σφάλματος προσανατολισμού, σε αντίθεση με όλες τις μεθόδους της βιβλιογραφίας, των οποίων το ποσοστό φύνει για αυξανόμενα σφάλματα αρχικού σφάλματος προσανατολισμού (σχήμα 4.31)

- Το τελικό σφάλμα εκτίμησης προσανατολισμού και θέσης των μεθόδων  $uf$  και  $fm$  μειώνεται όσο αυξάνει ο βαθμός δειγματοληψίας του χάρτη, αλλά ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται φθίνει όσο αυτός αυξάνει (σχήμα 4.38)
- Για συνθήκες αρχικών σφαλμάτων θέσης  $e_{xy} \leq \sqrt{2} \cdot 0.20$  m η εκτίμηση στάσης της μεθόδου FSMSM εν γένει συγκλίνει, αλλά υπάρχουν συνθήκες αρχικών σφαλμάτων θέσης οι οποίες καθιστούν την εκτίμηση προσανατολισμού της μεθόδου FSMSM αποκλίνουσα (π.χ. όταν  $e_{xy} \gg \sqrt{2} \cdot 0.20$  m—σχήμα 4.40)
- Σε συνθήκες όπου η γεωμετρία του περιβάλλοντος του φυσικού αισθητήρα lidar είναι τέτοια ώστε οι μετρήσεις του αισθητήρα δεν φέρουν όλες χωρική πληροφορία, η συμπεριφορά της μεθόδου x1 εξαρτάται σε μεγαλύτερο βαθμό από το ποσοστό των ακτίνων που φέρουν πληροφορία από ότι αυτή των  $uf$  και  $fm$ . Οι τελευταίες δείχνουν ότι λειτουργούν ονομαστικά εως ότου ο φυσικός αισθητήρας χάσει για πρώτη φορά και ταυτόχρονα χωρική πληροφορία που αφορά σε αντιδιαμετρικά σημεία του περιβάλλοντος (σχήμα 4.41)
- Δεδομένης της απόκλισης της λύσης της FSMSM στο παράδειγμα του σχήματος 4.40 παρατηρούμε πως η υπόθεση<sup>10</sup> που διαμορφώσαμε στην ενότητα ?? είναι εσφαλμένη: η ευρωστία της PGL-FMIC όσο αφορά στα “μεγάλα” αρχικά σφάλματα εκτίμησης οφείλεται στη δισδιάστατη φύση του μεταχηματισμού Fourier-Mellin της μεθόδου της προηγούμενης ενότητος, και όχι στη μεταφορά του προβλήματος στο πεδίο της συχνότητος

#### 4.7.2 Αιτίες περαιτέρω έρευνας

Το πρόβλημα της ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις έχει ως αντικείμενο την εκτίμηση της στάσης ενός αισθητήρα υπό τη συνθήκη ότι ο χάρτης του περιβάλλοντος του χώρου είναι διαθέσιμος. Συνεπώς η ευθυγράμμιση πραγματικών με εικονικές σαρώσεις είναι χρήσιμη στην επίλυση των προβλημάτων της εύρεσης της στάσης ενός ρομπότ βάσει καθολικής (κεφ. 3) και περιορισμένης αβεβαιότητος (κεφ. 2 και 4)—και ακριβώς λόγω αυτής

<sup>10</sup>“[...] η μεταφορά του προβλήματος ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές μετρήσεις στο πεδίο της συχνότητας ίσως αποτελεί την αιτία της ευρωστίας της προτεινόμενης σε αυτό το κεφάλαιο μεθόδου (α) στην απόσταση στάσεων από τις οποίες συλλαμβάνονται οι προς ευθυγράμμιση σαρώσεις [...]”

της απαίτησης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί στα συμφραζόμενα του γενικότερου, σημαντικότερου, και θεμελιώδους προβλήματος της ρομποτικής, δηλαδή της κατασκευής χάρτη από ένα ρομπότ και της ταυτόχρονης εύρεσης της στάσης του σε αυτόν. Σε αυτό το πρόβλημα η εύρεση-εκτίμηση της στάσης του αισθητήρα lidar γίνεται μέσω δύο οδών: (α) βάσει οδομετρικών μετρήσεων μέσω κωδικοποιητών, ή (β) βάσει ευθυγράμμισης σαρώσεων (ενότητα ??).<sup>11</sup>

Δεδομένων (α) της συγγένειας (ενότητα ??) του προβλήματος της ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις (Ορισμός ??) με το πρόβλημα της ευθυγράμμισης καθαρά πραγματικών σαρώσεων (Ορισμός ??), (β) της απουσίας από τη βιβλιογραφία οποιασδήποτε μεθόδου ευθυγράμμισης πραγματικών σαρώσεων που δεν υπολογίζει αντιστοιχίσεις και που να έχει επίδοση τουλάχιστον ισοδύναμη με τις μεθόδους της βιβλιογραφίας, και (γ) των ενθαρρυντικών αποτελεσμάτων επίδοσης των μεθόδων που παρουσιάσθηκαν στο παρόν κεφαλαίο: μία σημαντική κατεύθυνση περαιτέρω έρευνας είναι η προσπάθεια εύρεσης κατάλληλων μετασχηματισμών (των μεθόδων και των εισόδων τους) που να καθιστούν δυνατή την επίλυση του προβλήματος της ευθυγράμμισης σαρώσεων μέσω της επίλυσης του προβλήματος της ευθυγράμμισης πραγματικών με εικονικές σαρώσεις.

<sup>11</sup> Η πρώτη οδός είναι ευκολότερη αλλά επιφερεπέστερη σε σφάλματα λόγω των απρόβλεπτων συνθηκών τριβής ανάμεσα στο οδόστρωμα και τα άκρα του ρομπότ που έρχονται σε επαφή με αυτό για σκοπούς κίνησης. Αυτή η ευμεταβλητότητα (με άλλα λόγια ο τυχαίος θόρυβος αγνώστου μέτρου) της αντίληψης του ρομπότ για το περιβάλλον του έρχεται σε αντιπαραβολή με την προβλεψιμότητα της θέσης των αντικεμένων ενός στατικού περιβάλλοντος και το πεπερασμένο του μέτρου του θορύβου των αισθητήρων απόστασης τύπου lidar. Αυτοί οι λόγοι παρείχαν ιστορικά το κίνητρο για την αντικατάσταση της οδομετρίας μέσω του οριζόντιου επιπέδου με το αποτέλεσμα της ευθυγράμμισης διαδοχικών σαρώσεων επί των μη οριζόντιων δομών του περιβάλλοντός του.



## Κεφάλαιο 5

# Μέθοδοι ευθυγράμμισης πραγματικών σαρώσεων χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων

Η έρευνα που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο αντλεί τις πηγές της από τις αιτίες περαιτέρω έρευνας του προηγούμενου κεφαλαίου, όπως αυτές διατυπώθηκαν στην τελευταία του ενότητα. Στο παρόν κεφάλαιο επιζητούμε το σχεδιασμό και την κατασκευή μεθόδων ευθυγράμμισης πραγματικών σαρώσεων για το σκοπό της εκτίμησης της στάσης ενός ρομπότ που φέρει δισδιάστατο πανοραμικό αισθητήρα lidar στα συμφραζόμενα της απουσίας εσωτερικής αναπαράστασης του περιβάλλοντός του.

### 5.1 Στόχοι του κεφαλαίου και δομή

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι η επίλυση του προβλήματος Π4:

**Πρόβλημα Π4.** Έστω ένα ρομπότ κινητής βάσης του πεδίου εφαρμογής ??, ικανό να κινείται στο επίπεδο  $x-y$ , εξοπλισμένο με έναν οριζόντια τοποθετημένο αισθητήρα lidar μετρήσεων δύο διαστάσεων που εκπέμπει  $N_s$  ακτίνες. Έστω επίσης ότι τα ακόλουθα είναι διαθέσιμα:

- Μια δισδιάστατη μέτρηση  $S_0$

- Μια δισδιάστατη μέτρηση  $S_1$

Τότε ο στόχος είναι η εκτίμηση της στάσης από την οποία συνελήφθη η μέτρηση  $S_1$  σε σχέση με τη στάση από την οποία συνελήφθη η μέτρηση  $S_1$  δεδομένων των κάτωθι παραδοχών και περιορισμών:

- Το γωνιακό εύρος του αισθητήρα lidar ισούται με  $\lambda = 2\pi$
  - Η επίλυση του προβλήματος γίνεται χωρίς τον υπολογισμό αντιστοιχίσεων ανά-  
μεσα στις εισόδους της μεθόδου επίλυσης
  - Η εκτέλεση της επίλυσης του προβλήματος πρέπει γίνεται σε χρόνο που να  
συμβαδίζει με το ρυθμό ανανέωσης των μετρήσεων που παρέχει ο φυσικός αι-  
σθητήρας lidar

## 5.2 Μεθοδολογία

Αλγόριθμος XIII fsm

**Input:**  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \gamma, N_s, \nu_{\min}, \nu_{\max}, I_T, \varepsilon_{\delta p}$

**Output:**  $\hat{p}_1(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{\theta}_1)$

$$1: \hat{\boldsymbol{p}}_1 \leftarrow (0, 0, 0); \nu \leftarrow \nu_{\min}$$

2:  $M \leftarrow \text{project\_to\_2d}(S_0, \hat{p}_1)$

3: **while**  $\nu \leq \nu_{\max}$  **do**

4:  $\hat{p}_1^C \leftarrow$  caer-based\_oi

$$5: \quad \hat{p}'_1 \leftarrow \text{tc\_x1}(M, \mathcal{S}_1, \hat{p}^C_1, I_T, \infty, N_s) \quad (\text{Αλγόριθμος VIII})$$

6:      if  $\hat{p}'_1$  not in  $M$  then

7: generate new  $\hat{p}_1; \nu$

8:     **end if**

9:      **if**  $\|\hat{p}'_1 - \hat{p}_1\|$

10:        $\nu \leftarrow$

11: end if

$$12: \quad \hat{p}_1 \leftarrow \hat{p}'_1$$

13: end while

14: return  $\hat{p}$

### **5.3 Πειραματική αξιολόγηση**

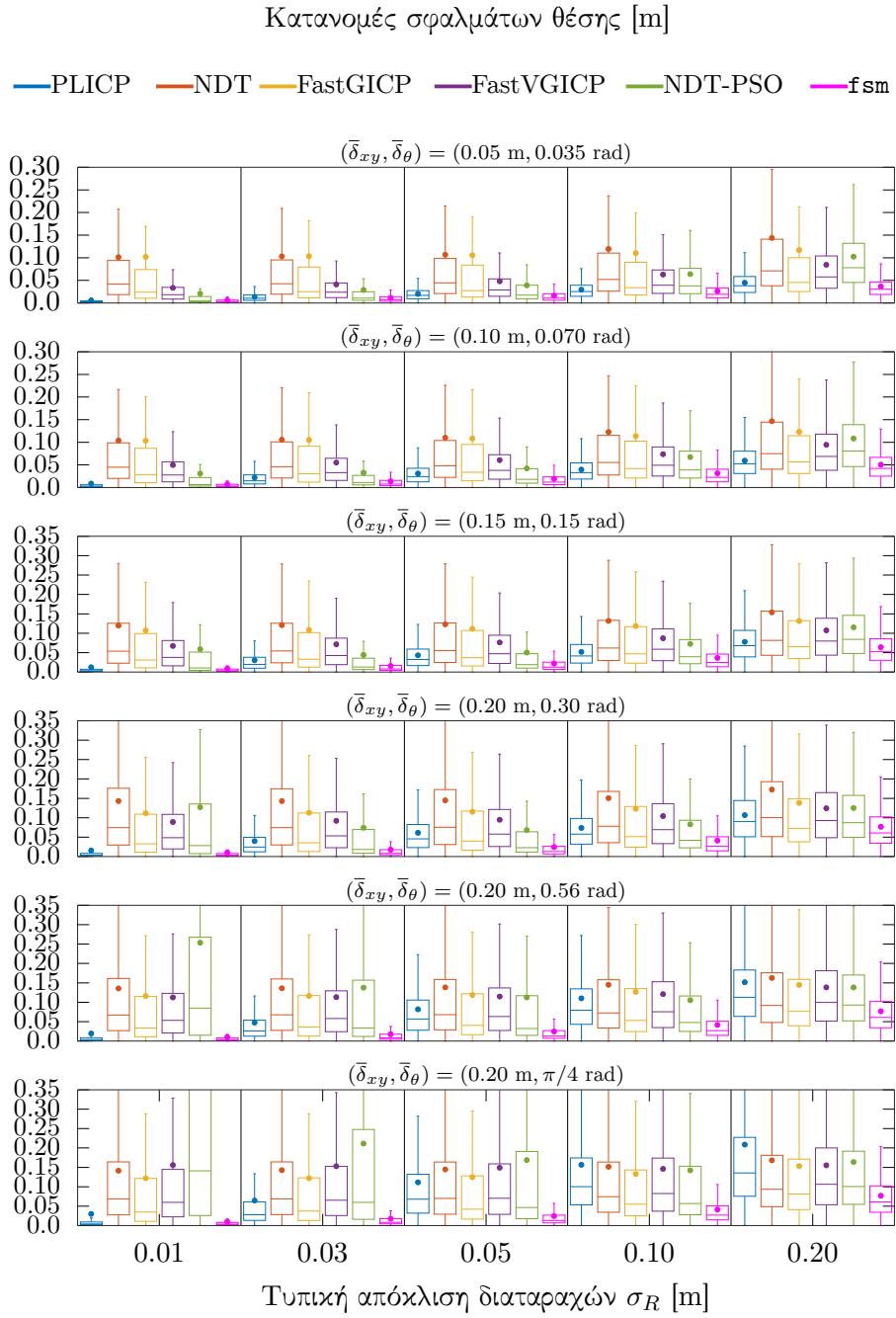
#### **5.3.1 Πειραματική διάταξη**

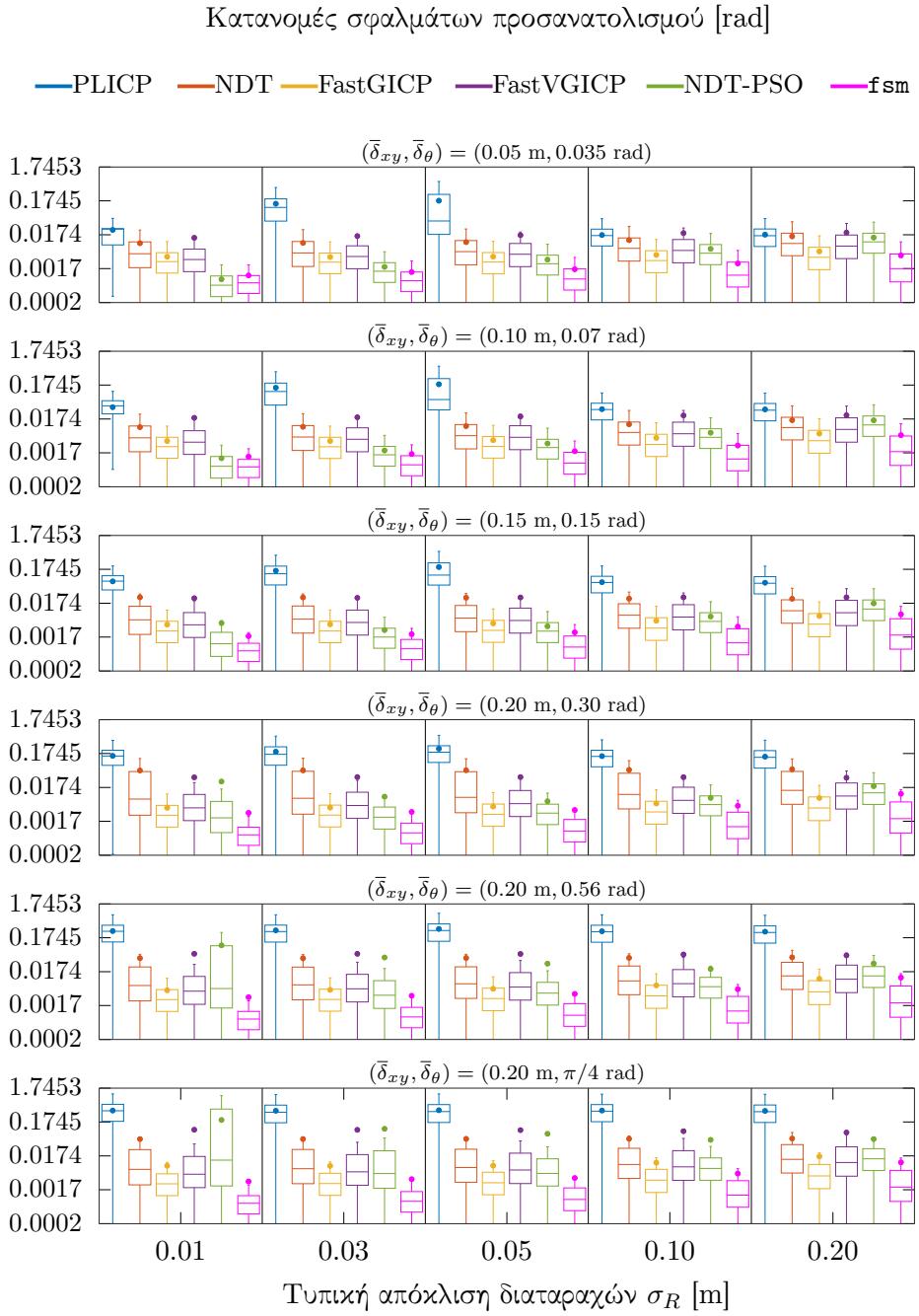
#### **5.3.2 Αποτελέσματα**

#### **5.3.3 Εξέταση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων**

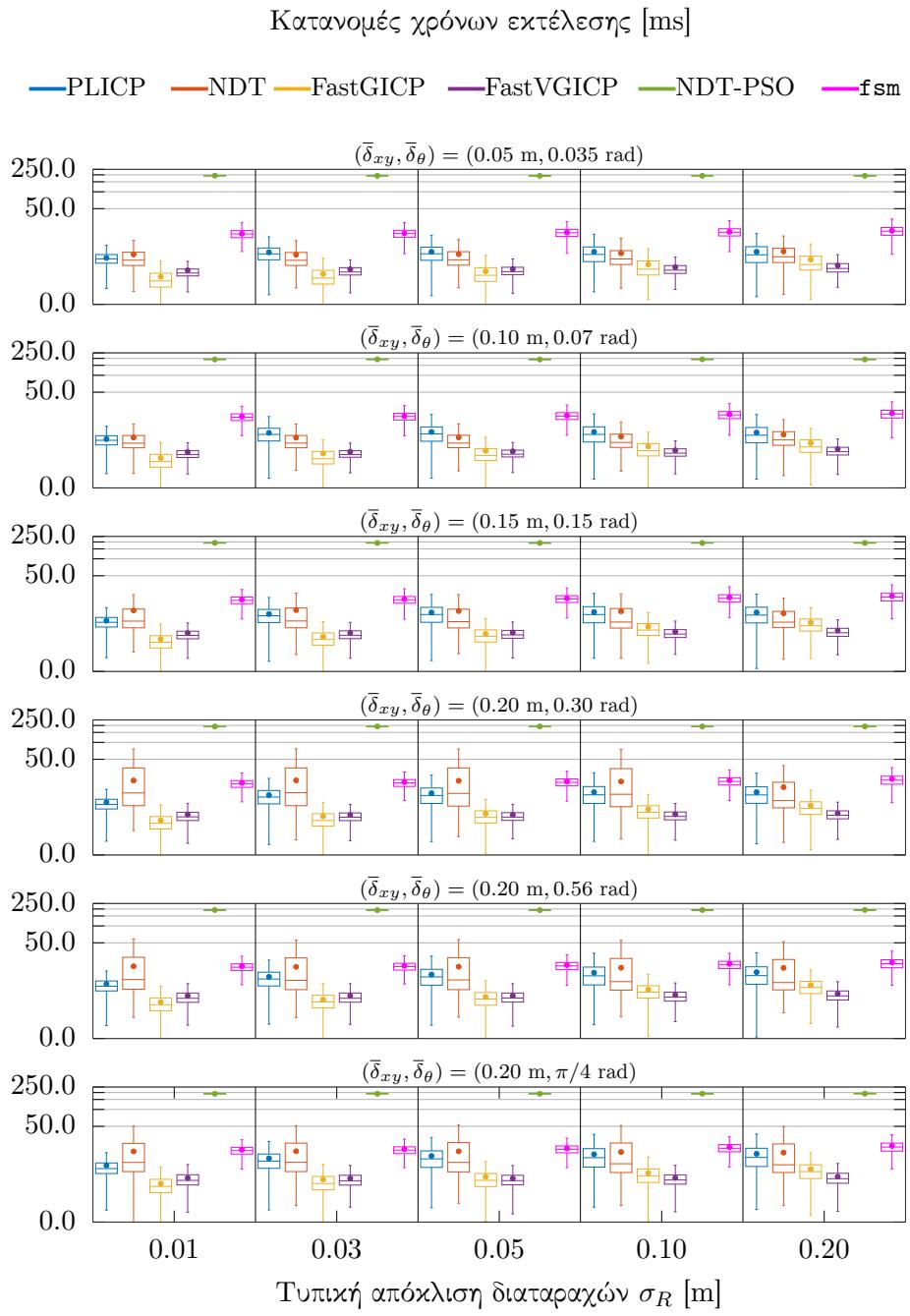
### **5.4 Χαρακτήρας και περιορισμοί**

### **5.5 Συμπεράσματα**

 $\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$  5.1



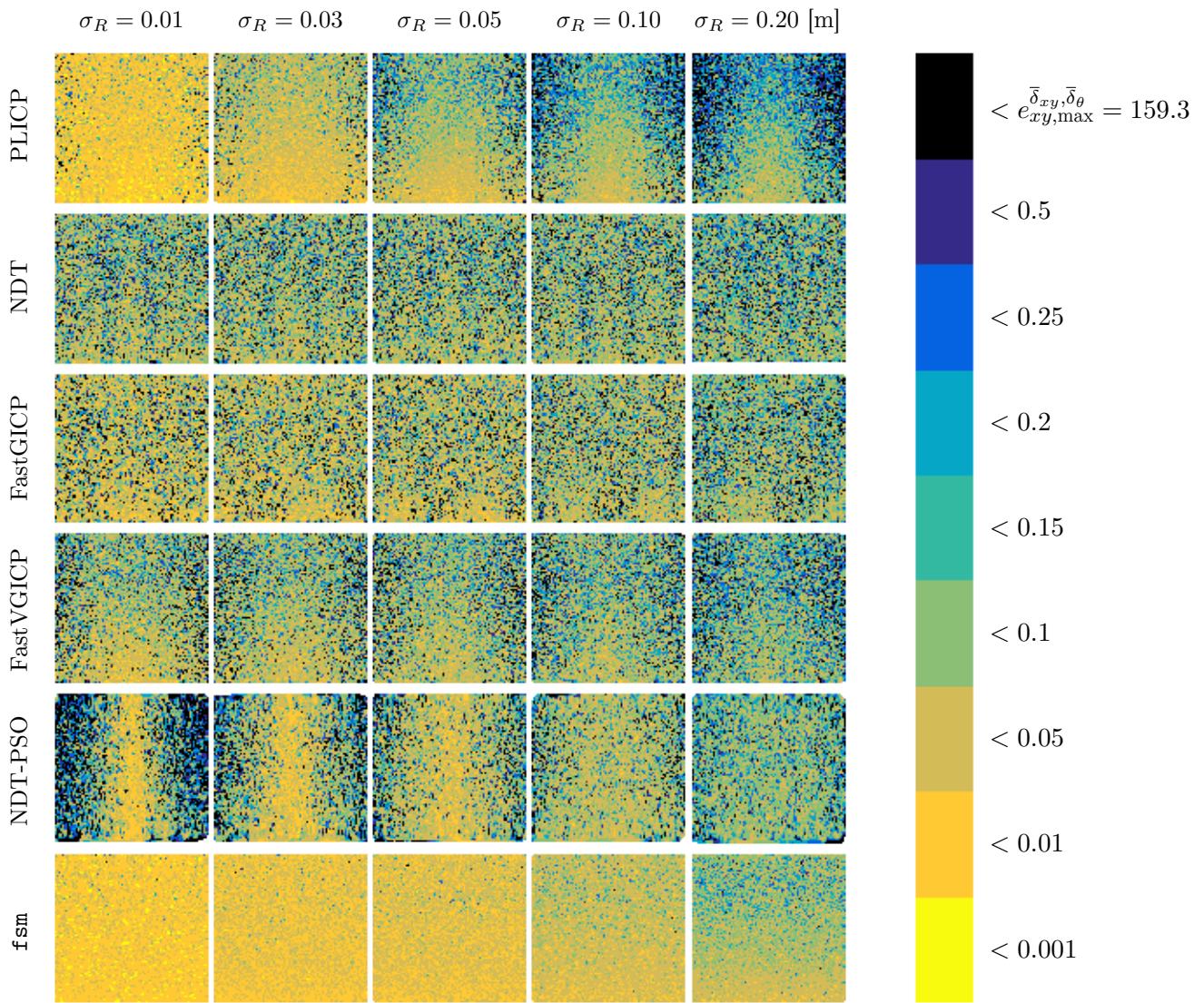
Σχήμα 5.2



Σχήμα 5.3

Τελικά σφάλματα εκτίμησης θέσης ως προς αρχικές συνθήκες μετατόπισης [m]

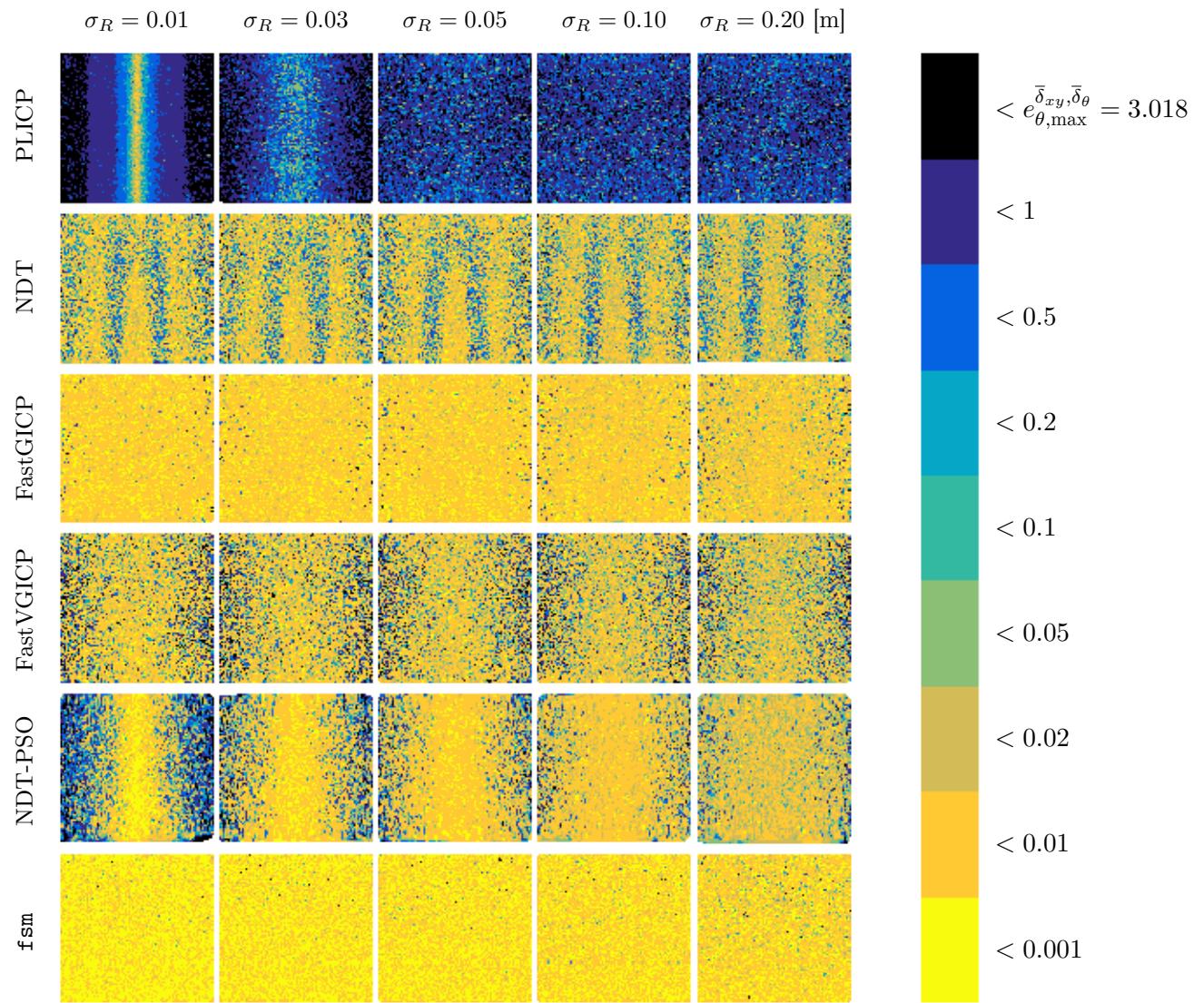
$$(\bar{\delta}_{xy}, \bar{\delta}_\theta) = (0.20 \text{ m}, \pi/4 \text{ rad})$$



Σχήμα 5.4

Τελικά σφάλματα εκτίμησης προσανατολισμού ως προς αρχικές συνθήκες μετατόπισης [rad]

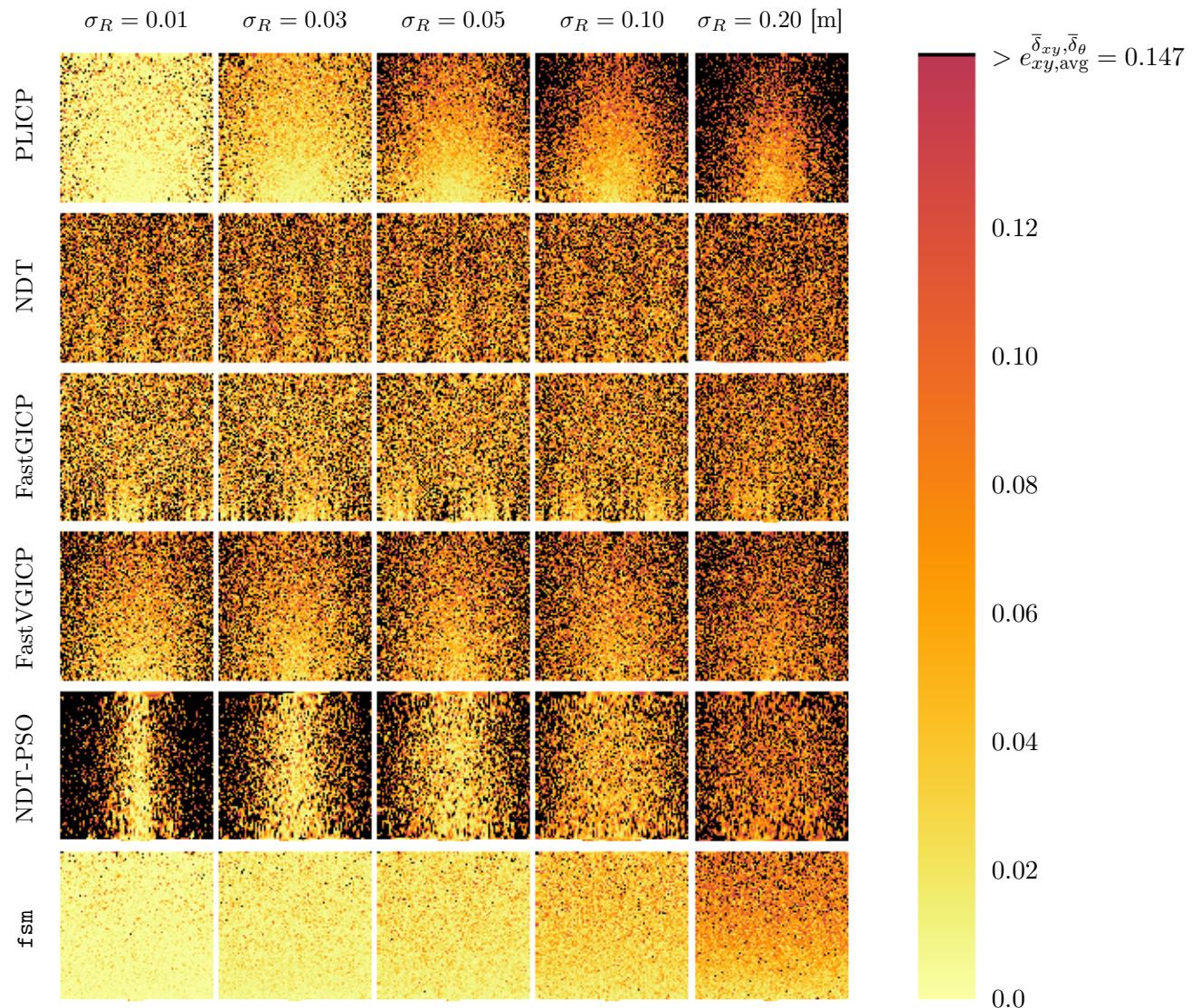
$$(\bar{\delta}_{xy}, \bar{\delta}_\theta) = (0.20 \text{ m}, \pi/4 \text{ rad})$$



Σχήμα 5.5

Τελικά σφάλματα εκτίμησης θέσης ως προς αρχικές συνθήκες μετατόπισης [m]

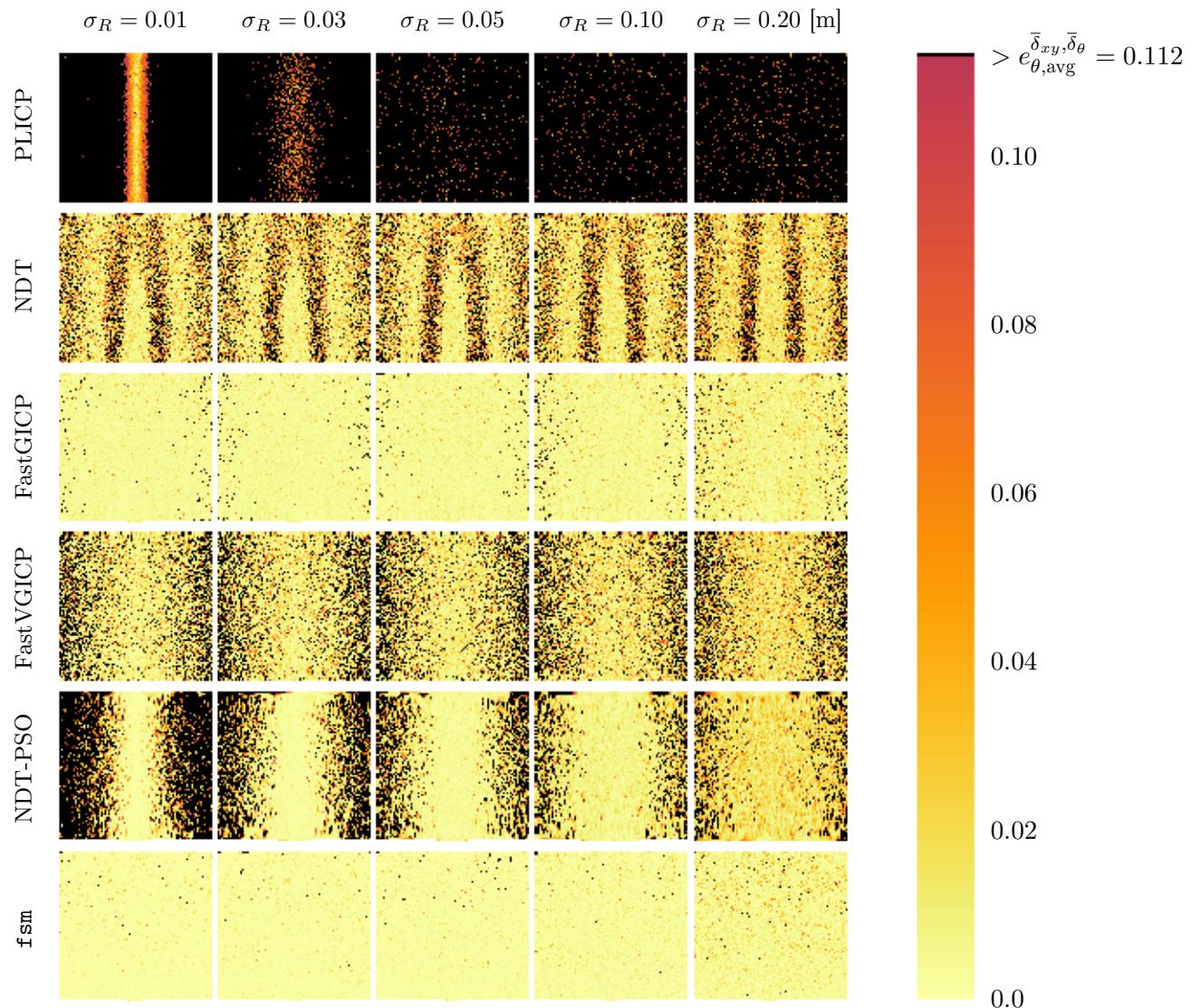
$$(\bar{\delta}_{xy}, \bar{\delta}_\theta) = (0.20 \text{ m}, \pi/4 \text{ rad})$$



Σχήμα 5.6

Τελικά σφάλματα εκτίμησης προσανατολισμού ως προς αρχικές συνθήκες μετατόπισης [rad]

$$(\bar{\delta}_{xy}, \bar{\delta}_\theta) = (0.20 \text{ m}, \pi/4 \text{ rad})$$

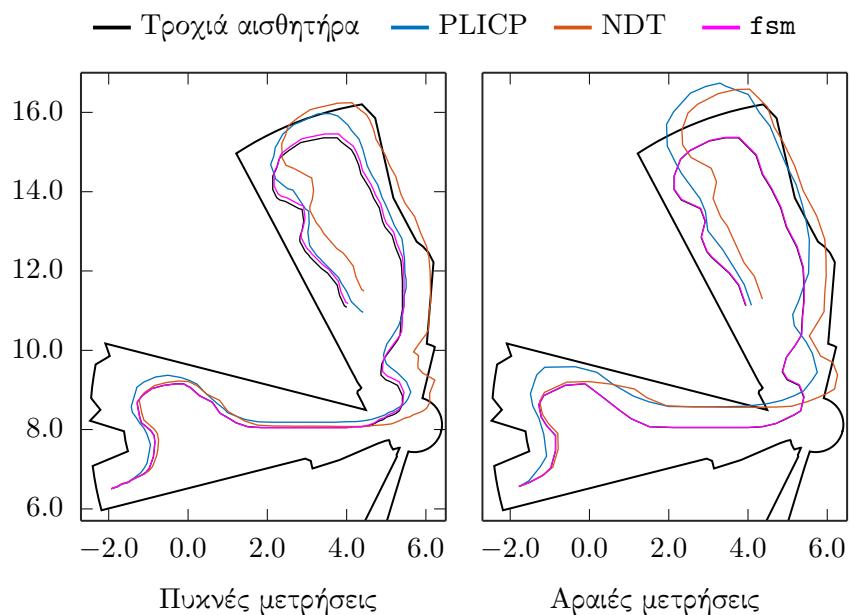


Σχήμα 5.7

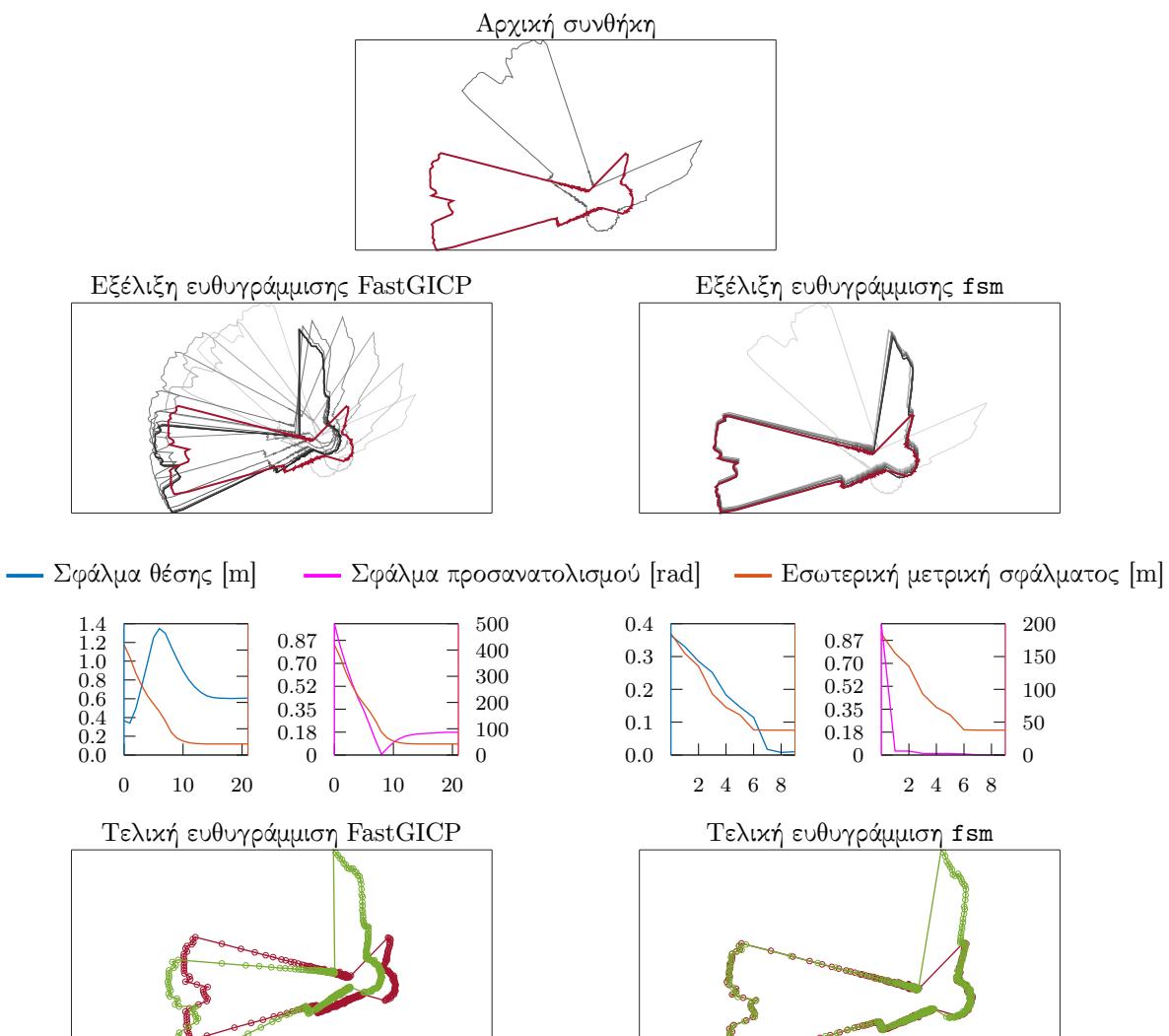
Αριθμός επανεκκινήσεων ως προς αρχικές συνθήκες



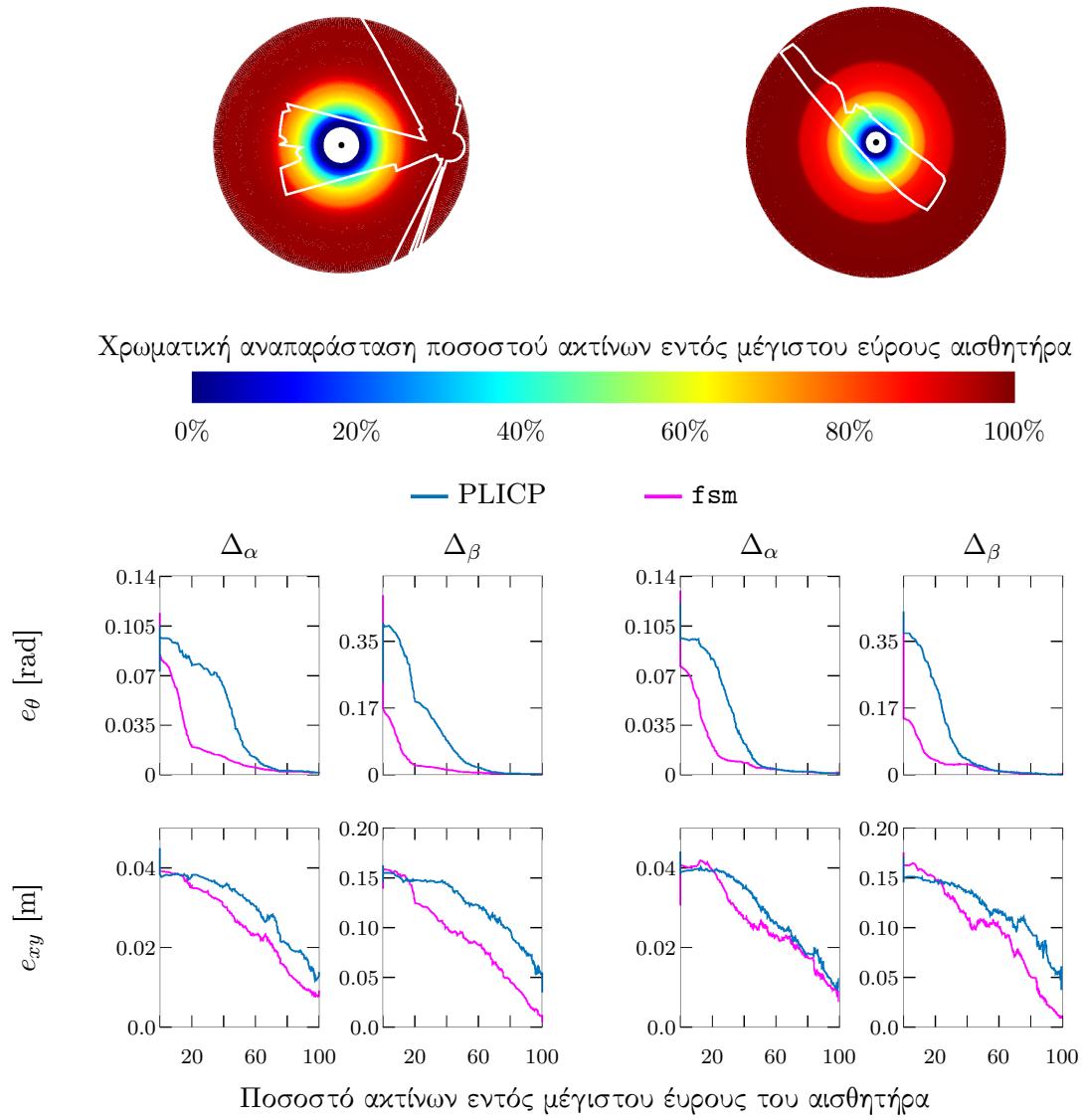
$\Sigma \chi^2 \mu \alpha 5.8$



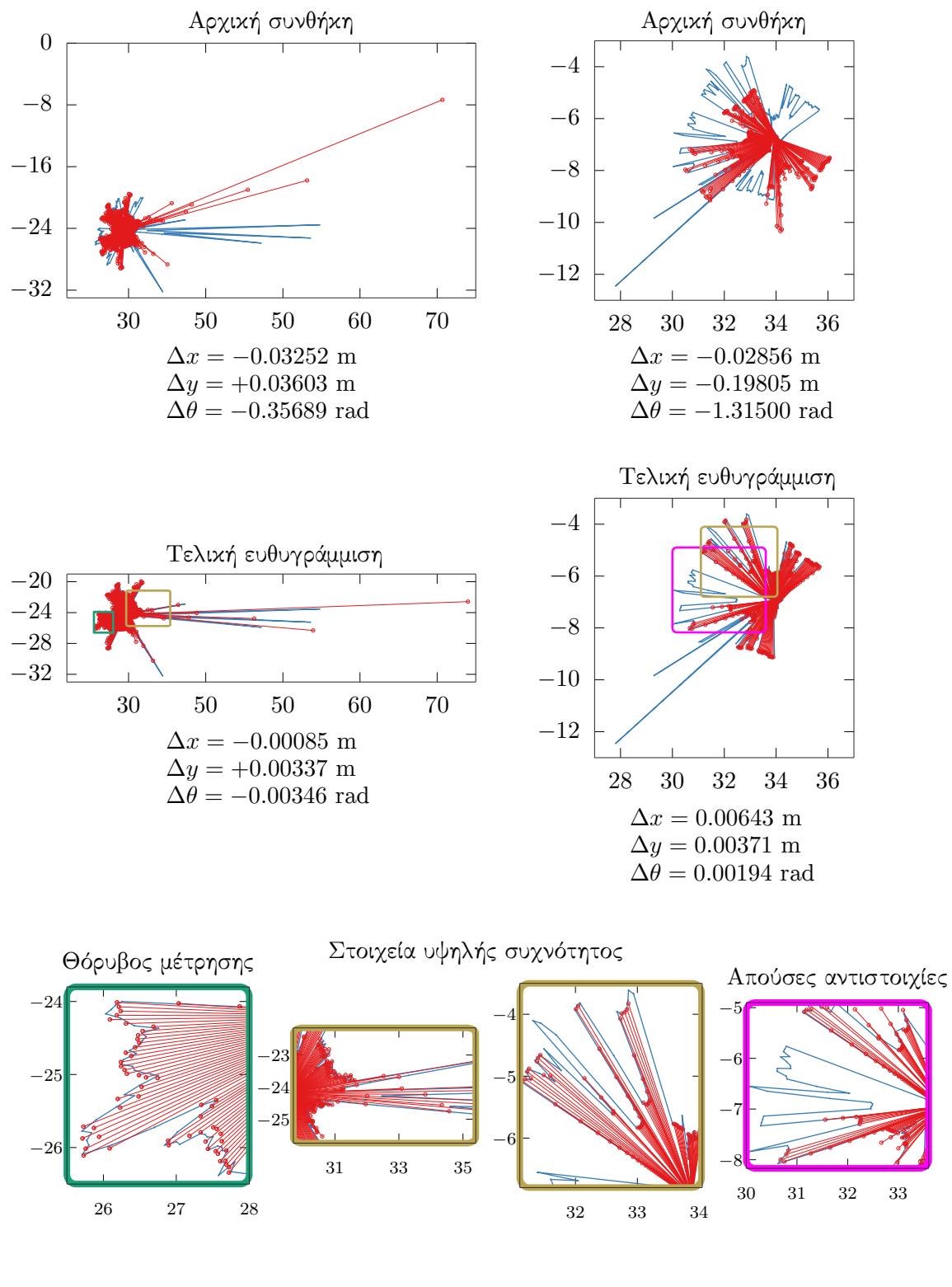
**Σχήμα 5.9:** Scan-matching as “laser odometry”: the robot moves from the lower left portion of the environment to the upper right, capturing 2D range scans along its trajectory. The coloured routes show the estimated path of the robot derived from each method. The proposed method’s error is invariant to angular and locational displacement



Σχήμα 5.10:  $\sigma_R = 0.03$ ,  $\delta = (0.35, 0.1, -\pi/3)$ . fsm: 0.0098 m, 0.08 deg. fgi: 0.61 m, 9.94 deg. up to 7.28 m/s, 720 deg/sec



$\Sigma\chi\mu\alpha$  5.11:  $\sigma_R = 0.05$ ,  $da = 0.05$ ,  $10\text{deg}$ .  $db = 0.2, 0.45\text{deg}$



$\Sigma\chi^2_{\nu} = 5.12$



**Μέρος III**

**Συμπεράσματα**



Μέρος IV

Παραπομπές



## Part V

Παραρτήματα

