



Linguaggi per il global computing

Esercizi B e D + Barbershop

Federico Perin - 2029215 - Ottobre 2021

Indice

1	Esercizi	2
1.1	Esercizio B	2
1.1.1	Sintassi	2
1.1.2	Dimostrazione per somme finite	2
1.1.2.1	Punto 1	2
1.1.2.1.1	Dimostrazione	3
1.1.2.2	Punto 2	4
1.1.2.2.1	Dimostrazione	5
1.1.2.3	Conclusione prima parte	6
1.1.3	Dimostrazione per somme infinite	6
1.1.4	Conclusione	8
1.2	Esercizio D	9
1.2.1	Dimostrazione	9
1.2.1.1	Prefisso $C[] = \alpha$.	9
1.2.1.2	Contesto non deterministico $C[] = (\quad + R)$	10
1.2.1.3	Contesto parallelo $C[] = (\quad R)$	12
1.2.1.4	Contesto restrizione $C[] = \backslash L$	15
1.2.1.5	Contesto relabelling $C[] = [f]$	16
1.2.2	Conclusione	17
2	Barbershop	18
2.1	Una possibile soluzione	18
2.2	Modellazione in CCS	19
2.2.1	Codifica Mutex e contattore clienti	20
2.2.2	Codifica Customer	20
2.2.3	Codifica Barber	21
2.2.4	Codifica del sistema	21
2.3	Verifica della correttezza attraverso CWB	21
2.3.1	Trace Equivalence	21
2.3.2	Verifica tramite HML	22
2.3.2.1	Assenza di deadlock	22
2.3.2.2	Presenza di Livelock	22
2.3.2.3	Mutua esclusione contattore	23
2.3.2.4	Mutua esclusione nell'esecuzione del taglio	23
2.3.2.5	Verifica comportamento del barbiere nell'attesa dell'arrivo di un nuovo cliente	23
2.3.2.6	Verifica comportamento del cliente nell'attesa di essere servito	24
2.3.2.7	Fairness	24

1 Esercizi

1.1 Esercizio B

Dimostrare che ogni processo CCS finito termina in un numero finito di passi.

1.1.1 Sintassi

$$P, Q ::= \alpha.P \mid (P \mid Q) \mid \sum_{i \in I} P_i \mid P \setminus L \mid P[f] \mid \mathbf{0}$$

Note:

Nel CCS finito non sono previste le costanti \mathcal{K} .

Il processo $\mathbf{0}$ ha un solo stato e non ha interazioni con altri processi.

La dimostrazione viene divisa in due casi:

- Nel primo caso si hanno somme finite, cioè l'insieme I contenente le scelte della somma non deterministica, è finito;
- Nel secondo caso l'insieme I sarà infinito.

1.1.2 Dimostrazione per somme finite

La dimostrazione prevede i seguenti punti:

1. Ogni processo del CCS finito termina con un numero finito di passi;
2. Ogni processo del CCS finito ha un numero finito di stati.

1.1.2.1 Punto 1

Dato che non esistono costanti \mathcal{K} , non è possibile rigenerare passi eseguiti in precedenza, perciò dopo un certo numero finito di passi ogni processo P in CCS finito terminerà perché non avrà più passi da eseguire. Si deduce perciò che ogni processo ha un numero di passi limitato da un limite superiore è quindi tale numero è finito.

Per dimostrare quanto scritto si procede attraverso una dimostrazione induttiva sull'altezza di derivazione di un processo P , con ipotesi induttiva: $P \xrightarrow{\alpha} P' \Rightarrow \text{Size}_p(P') < \text{Size}_p(P)$, dove $\text{Size}_p(P')$ si intende il numero di passi del processo P dopo aver fatto l'azione α .

Definiamo $\text{Size}_p(P)$:

$$\text{Size}_p(P) \begin{cases} P = \alpha.R, & 1 + \text{Size}_p R \\ P = \sum_{i \in I} P_i, & \max(\text{Size}_p(P_i)) \\ P = R \mid Q, & \text{Size}_p R + \text{Size}_p Q \\ P = R \setminus L, & \text{Size}_p R \\ P = R[f], & \text{Size}_p R \end{cases}$$

Si dimostrerà che $\text{Size}_p(P)$ indica il limite superiore del numero di passi eseguiti dal processo P per terminare.

1.1.2.1.1 Dimostrazione

Caso Base:

$$\frac{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}{\text{ACT}} \quad \text{Size}_p(\alpha.P) = 1 + \text{Size}_p(P) > \text{Size}_p(P)$$

Si ha che l'azione α concatenata al processo P aggiunge un passo in più, perciò risulta essere corretto il limite superiore $\text{Size}_p(\alpha.P) = 1 + \text{Size}_p(P)$ passi.

Caso Induttivo:

$$* \frac{P_j \xrightarrow{\alpha} P'}{\sum_{i \in I} P_i \xrightarrow{\alpha} P'} \text{SUM } j \in I$$

Si osserva che nell'esecuzione di un passo α , per ipotesi induttiva vale che: $\text{Size}_p(P_j) > \text{Size}_p(P')$.

Perciò $\text{Size}_p(\sum_{i \in I} P_i) > \text{Size}_p(P_j) > \text{Size}_p(P')$ allora $\max(\text{Size}_p(P_i)) > \text{Size}_p(P')$

Il limite superiore $\text{Size}_p(\sum_{i \in I} P_i) = \max(\text{Size}_p(P_i))$ passi, risulta essere corretto.

$$* \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q} \text{PAR-L}$$

Si osserva che nell'esecuzione di un passo α , per ipotesi induttiva vale che: $\text{Size}_p(P) > \text{Size}_p(P')$.

E quindi dato che $\text{Size}_p(P|Q) = \text{Size}_p(P) + \text{Size}_p(Q)$ mentre $\text{Size}_p(P'|Q) = \text{Size}_p(P') + \text{Size}_p(Q)$, per ipotesi induttiva $\text{Size}_p(P|Q) > \text{Size}_p(P'|Q)$

$$* \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P|Q'} \text{PAR-R}$$

Si osserva che nell'esecuzione di un passo α , per ipotesi induttiva vale che: $\text{Size}_p(Q) > \text{Size}_p(Q')$

E quindi dato che $\text{Size}_p(P|Q) = \text{Size}_p(P) + \text{Size}_p(Q)$ mentre $\text{Size}_p(P|Q') = \text{Size}_p(P) + \text{Size}_p(Q')$, per ipotesi induttiva $\text{Size}_p(P|Q) > \text{Size}_p(P|Q')$

$$* \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \quad Q \xrightarrow{\bar{\alpha}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'} \text{PAR-}\tau$$

Si osserva che nell'esecuzione di un passo di sincronizzazione, per ipotesi induttiva vale che: $\text{Size}_p(P) > \text{Size}_p(P')$ e $\text{Size}_p(Q) > \text{Size}_p(Q')$

E quindi dato che $\text{Size}_p(P|Q) = \text{Size}_p(P) + \text{Size}_p(Q)$ mentre $\text{Size}_p(P'|Q') = \text{Size}_p(P') + \text{Size}_p(Q')$, per ipotesi induttiva $\text{Size}_p(P|Q) > \text{Size}_p(P'|Q')$

Perciò si è dimostrato che il limite superiore $Size_p(P|Q) = Size_p(P) + Size_p(Q)$ passi, risulta essere corretto in tutti i tre casi PAR-L, PAR-R e PAR- τ .

$$* \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P \setminus L \xrightarrow{\alpha} P' \setminus L} RES \text{ se } \alpha, \bar{\alpha} \notin L$$

Si osserva che nell'esecuzione di un passo α , per ipotesi induttiva vale che:
 $Size_p(P) > Size_p(P')$

Applicare una restrizione ad un processo non fa aumentare il numero massimo di passi di esecuzione, ma avere una possibile variazione delle possibili interazioni con altri processi in parallelo, vale che:

$Size_p(P \setminus L) = Size_p(P)$ mentre $Size_p(P' \setminus L) = Size_p(P')$, per ipotesi induttiva $Size_p(P \setminus L) > Size_p(P' \setminus L)$

Perciò si è dimostrato che il limite superiore $Size_p(P \setminus L) = Size_p(P)$ passi, risulta essere corretto.

$$* \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P[f] \xrightarrow{f(\alpha)} P'[f]} REL$$

Si osserva che nell'esecuzione di un passo α , per ipotesi induttiva vale che:
 $Size_p(P) > Size_p(P')$

Applicare un relabelling ad un processo non fa aumentare il numero massimo di passi di esecuzione, ma avere una possibile variazione delle possibili interazioni con altri processi in parallelo, vale che:

$Size_p(P[f]) = Size_p(P)$ mentre $Size_p(P'[f]) = Size_p(P')$, per ipotesi induttiva $Size_p(P[f]) > Size_p(P'[f])$

Perciò si è dimostrato che il limite superiore $Size_p(P[f]) = Size_p(P)$ passi, risulta essere corretto.

1.1.2.2 Punto 2

Si vuole dimostrare che ogni processo CCS ha un numero finito di stati, cioè esiste un limite superiore del numero di stati di esecuzione per un processo P.

Definiamo $Size_s(P)$:

$$Size_s(P) \begin{cases} P = \mathbf{0}, & 1 \\ P = \alpha.R, & 1 + Size_s R \\ P = \sum_{i \in I} P_i, & \sum_{i \in I} Size_s P_i \\ P = R \mid Q, & Size_s R * Size_s Q \\ P = R \setminus L, & Size_s R \\ P = R[f], & Size_s R \end{cases}$$

Si dimostrerà di seguito che $Size_s(P)$ calcola il limite superiore del numero di stati dell'esecuzione del processo P.

1.1.2.2.1 Dimostrazione

Tramite dimostrazione per induzione sull'esecuzione di un processo P si dimostra che i limiti di $Size_s(P)$ sono corretti.

Caso Base:

0

Il processo **0** ha un solo stato, quello di partenza, per definizione quindi $Size_s(\mathbf{0}) = 1$ stato.

Caso Induttivo:

In un passo si raggiunge uno sotto processo dal quale poi in n passi finiti si raggiungerà un stato terminante. Si utilizza la seguente ipotesi induttiva:

Un processo composto da sotto processi con un limite superiore ai stati di esecuzione ha anch'esso un limite superiore di stati di esecuzione.

Tale ipotesi scritta verrà utilizzata per dimostrare che il sotto processo raggiunto, da lui allo stato terminante, ci saranno un numero finiti di stati perché limitati da un limiti superiore. Si ricorda inoltre che il numero di stati raggiunti è finito se gli n passi sono finiti. Grazie alla dimostrazione del punto 1 si sa che n è finito.

* ACT

Con l'azione α concatenata al processo P viene aggiunto a P uno stato in più, infatti $\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P$. P per ipotesi induttiva ha al più $Size_s(P)$ stati, quindi $\alpha.P$ avrà al più $Size_s(\alpha.P) = 1 + Size_s(P)$ stati.

* SUM

Si ha la seguente esecuzione: $\sum_{i \in I} P_i \xrightarrow{\alpha} P'$, dove qualunque P_i sia scelto per ipotesi induttiva ha un numero finito di stati d'esecuzione. Quindi tutti i processi che compongono la somma non deterministica hanno un numero finito di stati. Perciò $\sum_{i \in I} P_i$ ha al più $Size_s(\sum_{i \in I} P_i) = \sum_{i \in I} Size_s(P_i)$ stati inoltre, dato che il numero di processi P_i è finito, anche la somma dei stati lo sarà.

È corretto il limite superiore presentato precedentemente perché potrebbero esserci stati non condivisi tra i vari processi P_i , quindi tutti i $Size_s(P_i)$.

* PAR-L

Si ha la seguente esecuzione: $P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q$, dove $P|Q$ raggiunge lo stato $P'|Q$.

Per ipotesi induttiva $P'|Q$ ha un numero finito di stati d'esecuzione, cioè ha al più $Size_s(P'|Q) = Size_s(P') * Size_s(Q)$ stati, quindi $P|Q$ ha al più $Size_s(P|Q) = (Size_s(P') + 1) * Size_s(Q)$ stati. Dato che è possibile che non ci sia alcun stato condiviso durante l'esecuzione dei due processi, il limite superiore ad essi è uguale al totale delle combinazioni possibili tra gli stati dei due singoli processi.

* PAR-R

Si ha la seguente esecuzione: $P|Q \xrightarrow{\alpha} P|Q'$, dove $P|Q$ raggiunge lo stato $P|Q'$.

Per ipotesi induttiva $P|Q'$ ha un numero finito di stati d'esecuzione, cioè ha al più $Size_s(P|Q') = Size_s(P) * Size_s(Q')$ stati, quindi $P|Q$ ha al più $Size_s(P|Q) = Size_s(P) * (Size_s(Q') + 1)$ stati. Dato che è possibile che non ci sia alcun stato condiviso durante l'esecuzione dei due processi, il limite superiore ad essi è uguale al totale delle combinazioni possibili tra gli stati dei due singoli processi.

* **PAR- τ**

Si ha la seguente esecuzione: $P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'$, dove $P|Q$ raggiunge lo stato $P'|Q'$.

Per ipotesi induttiva $P'|Q'$ ha un numero finito di stati d'esecuzione, cioè ha al più $Size_s(P'|Q') = Size_s(P') * Size_s(Q')$ stati, quindi $P|Q$ ha al più $Size_s(P|Q) = Size_s(P') * Size_s(Q') + 1$ stati. Dato che è possibile che non ci sia alcun stato condiviso durante l'esecuzione dei due processi, il limite superiore ad essi è uguale al totale delle combinazioni possibili tra gli stati dei due singoli processi.

Dunque $Size_s(P|Q) = Size_s(P) * Size_s(Q)$ stati, risulta essere corretto.

* **RES**

Si ha la seguente esecuzione: $P \setminus L \xrightarrow{\alpha} P' \setminus L$.

Per ipotesi induttiva $P' \setminus L$ ha al più $Size_s(P' \setminus L) = Size_s(P')$ stati.

Dato che $Size_s(P' \setminus L)$ è finito, allora $P \setminus L$ avrà al più:

$Size_s(P \setminus L) = 1 + Size_s(P' \setminus L) = 1 + Size_s(P') = Size_s(P)$ stati, perché applicando una funzione di restrizione non si aumentano il numero massimo di stati d'esecuzione, vale quindi il limite superiore $Size_s(P \setminus L) = Size_s(P)$.

* **REL**

Si ha la seguente esecuzione: $P[f] \xrightarrow{f(\alpha)} P'[f]$.

Per ipotesi induttiva $P'[f]$ ha al più $Size_s(P'[f]) = Size_s(P')$ stati.

Dato che $Size_s(P'[f])$ è finito, allora $P[f]$ avrà al più:

$Size_s(P[f]) = 1 + Size_s(P'[f]) = 1 + Size_s(P') = Size_s(P)$ stati, perché applicando una funzione di relabelling non si aumentano il numero massimo di stati d'esecuzione ma si cambiano solo le possibili interazioni con altri processi in parallelo, vale quindi il limite superiore $Size_s(P[f]) = Size_s(P)$.

1.1.2.3 Conclusione prima parte

Si è dimostrato nei punti precedenti che i processi definiti attraverso il CCS finito hanno sempre un limite superiore sia per il numero di passi e sia per il numero di stati d'esecuzione, di conseguenza il numero di passi e stati sono entrambi finiti.

1.1.3 Dimostrazione per somme infinite

Ora per quanto riguarda la somma non deterministica $\sum_{i \in I} P_i$, l'insieme I sarà infinito.

Infatti i processi CCS che fanno parte della somma non deterministica, saranno infiniti e quindi hanno un numero infinito di stati ma hanno tutti una derivazione finita.

La dimostrazione sarà simile alla precedente per tutti i vari punti, tranne per il punto riguardante la somma non deterministica, infatti per dimostrare la finitezza dell'esecuzione si utilizzerà un'astrazione basata sulle generazioni della grammatica di CCS.

Si dimostra perciò per induzione sulla lunghezza di derivazione che ogni processo CCS termina in numero finito di passi.

Caso Base:

0

Il processo **0** termina in 0 passi per definizione.

Caso Induttivo:

La generazione della sequenza di interazioni avanza attraverso uno dei termini della grammatica e come ipotesi induttiva si ha che tale sequenza ha derivazione finita.

* **ACT, RES e REL**

Con l'azione α concatenata al processo P si ha che, la derivazione produrrà un processo del tipo, $\alpha^{n+1}.P$ con $n \geq 0$, dove esiste un nuovo passo e uno nuovo stato nell'esecuzione di P . Perciò il numero di stati e di passi d'esecuzione rimangono finiti.

* **PAR-L, PAR-R, PAR- τ**

Come dimostrato per il caso del CCS finito con somme finite, nell'esecuzione parallela la derivazione produrrà dei sotto processi che per ipotesi induttiva sono finiti e quindi il processo di cui fanno parte sarà anch'esso finito.

* **RES**

Con **RES** si avrà che la derivazione produrrà un certo numero finito di restrizioni. Perciò si avranno sempre passi e stati in numero finito e quindi vale quanto dimostrato nel CCS finito con somme finite.

* **REL**

Con **REL** si avrà che la derivazione produrrà un certo numero finito di relabelling. Perciò si avranno sempre passi e stati in numero finito e quindi vale quanto dimostrato nel CCS finito con somme finite.

* **SUM** In questo caso il processo derivato sarà del tipo $P_1 + P_2 + \dots$. Per ipotesi induttiva ogni P_i ha una derivazione di lunghezza finita, perciò si può dimostrare che la derivazione del processo P è finita per induzione sul numero di sotto processi che vengono usati nella somma.

Caso Base:

Processo **0** per definizione è finito.

Caso Induttivo:

L'ipotesi induttiva afferma che la scelta non deterministica tra i processi ha una derivazione di lunghezza finita. Inoltre si deve tener conto che nella scelta non deterministica, viene scelto un solo processo da eseguire tra tutti quelli presenti.

Quindi aggiungendo il processo P_{n+1} alla scelta, che per ipotesi induttiva anch'esso ha derivazione finita; la scelta diventerà tra l'esecuzione di uno

dei processi già presenti e il processo appena aggiunto P_{n+1} . Solo uno dei processi verrà eseguito e quindi la derivazione avrà una lunghezza superiormente limitata dalla massima lunghezza di derivazione dei sotto processi. Si è perciò dimostrato che l'insieme dei processi della scelta non deterministica può essere illimitato ma finito senza perdere la finitezza di esecuzione. Questo perché la derivazione esegue solo uno dei processi della scelta come scritto in precedenza e in più si sa che l'altezza della derivazione di P è limitata superiormente dall'altezza della derivazione del processo con l'altezza maggiore + 1, ovvero $\max_h(P_i) + 1$.

Purtroppo però il numero di stati che si ha durante l'esecuzione non è più limitato superiormente, perché essendo il limite superiore dato dalla $\sum_{i \in I} P_i$ con I infinito, il numero di processi CCS risulta essere infinito, e quindi la somma dei stati d'esecuzione sarà anch'essa infinita. Perciò il numero di stati non è limitato superiormente.

1.1.4 Conclusione

È stato dimostrato che ogni processo CCS finito termina in un numero finito di passi, indipendente dal fatto si utilizzi una grammatica che permette scelte non deterministiche in un insieme o infinito o finito. Si sottolinea che scelta di un insieme infinito o finito determinerà, se il numero di stati d'esecuzione raggiungibili sarà finito o infinito.

1.2 Esercizio D

Dimostrare che la trace equivalence è una congruenza per il CCS.

Prima di illustrare la dimostrazione si definisce che cosa si intende con i concetti di trace equivalence e congruenza.

Innanzitutto per tracce di un processo P che di seguito verrà indicata con $\text{Tr}(P)$, si intendono tutte le possibili sequenze di interazioni $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \text{Act}$ con $n \geq 0$ tale che esiste una sequenza di transizioni $P \xrightarrow{\alpha_1} P_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} P_n$, e quindi rappresentata tutte le possibili interazioni con un processo. Più formalmente $\text{Tr}(P) = \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid P \xrightarrow{\alpha_1} P_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} P_n \}$. Quindi due processi P e Q si dicono trace equivalence $P \sim_t Q$ se $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$.

Per congruenza si intende, dati due processi P e Q in relazione tra loro ($P R Q$), allora per ogni contesto $C[\]$, $C[P] R C[Q]$.

Perciò si dimostrerà che se $P \sim_t Q \Rightarrow \forall C[\] \ C[P] \sim_t C[Q]$.

1.2.1 Dimostrazione

Siano P, Q e R processi CCS con $P \sim_t Q$, allora

1. $\alpha.P \sim_t \alpha.Q$
2. $P + R \sim_t Q + R$
3. $P|R \sim_t Q|R$
4. $P \setminus L \sim_t Q \setminus L$
5. $P[f] \sim_t Q[f]$

Si definiscono di seguito alcune terminologie che verranno usate durante la dimostrazione.

Si indica con ε la sequenza vuota di interazioni. Essendo vuoto tutti i processi CCS sono in grado di eseguirla.

Sia R un processo CCS, indichiamo con $\alpha.\text{Tr}(R)$ l'insieme $\{\alpha t \mid t \in \text{Tr}(R)\}$

1.2.1.1 Prefisso $C[\] = \alpha.$

Nel caso del contesto prefisso si ha che $\text{Tr}(\alpha.P) = \alpha.\text{Tr}(P)$. Se questo è vero allora, grazie all'ipotesi $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$ si ha che $\alpha.\text{Tr}(P) = \alpha.\text{Tr}(Q) = \text{Tr}(\alpha.Q)$ e quindi vale che $\alpha.P \sim_t \alpha.Q$

(\subseteq)

Sia $t \in \text{Tr}(\alpha.P) \Rightarrow t \in \alpha.\text{Tr}(P)$

Per induzione su $|t|$:

Caso Base $|t| = 0$

Allora $t = \varepsilon \in \alpha.\text{Tr}(P)$

Caso Induttivo $|t| = n + 1$

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t' . Sappiamo che $\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{t'}$, ovvero $\alpha.P$ sa fare α grazie alla regola del prefisso che ne permette la transizione.

$$\frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{t'}} ACT$$

$t = \alpha.t'$ dove t' sarà una certa sequenza di interazioni con $|t'| = n$ e per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P)$. E quindi vale che $t = \alpha.t' \in \alpha.\text{Tr}(P)$.

(\supseteq)

Sia $t \in \alpha.\text{Tr}(P) \Rightarrow t \in \text{Tr}(\alpha.P)$

Suddividiamo il problema in due casi:

Caso $t = \varepsilon$

Per definizione $t = \varepsilon \in \text{Tr}(\alpha.P)$.

Caso $t \neq \varepsilon$

Per definizione di $\alpha.\text{Tr}(P)$, $t = \alpha.t'$ con $t' \in \text{Tr}(P)$. È quindi è possibile effettuare la seguente sequenza di transizioni $\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{t'}$. Questo dimostra che $\alpha.P$ sa fare l'interazione t , allora $t = \alpha.t' \in \text{Tr}(\alpha.P)$.

Perciò si è dimostrato che $\text{Tr}(\alpha.P) = \alpha.\text{Tr}(P)$ e quindi con $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$, $\alpha.P \sim_t \alpha.Q$ come si voleva dimostrare.

1.2.1.2 Contesto non deterministico $C[] = (\quad + R)$

Nel caso del contesto non deterministico tra i processi P e R le $\text{Tr}(P + R) = \text{Tr}(P) \cup \text{Tr}(R)$. Se questo è vero, dato che per ipotesi $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$ e $\text{Tr}(Q + R) = \text{Tr}(Q) \cup \text{Tr}(R)$, allora $\text{Tr}(P + R) = \text{Tr}(Q + R)$.

Perciò si deve dimostrare che il contesto non deterministico tra i processi P e R è uguale alla unione delle tracce dei due processi. Dimostrato questo ne consegue la veridicità di $P + R \sim_t Q + R$.

(\subseteq)

Sia $t \in \text{Tr}(P + R) \Rightarrow t \in (\text{Tr}(P) \cup \text{Tr}(R))$

Per induzione su $|t|$:

Caso Base $|t| = 0$

Allora $t = \varepsilon \in (\text{Tr}(P) \cup \text{Tr}(R))$

Caso Induttivo $|t| = n + 1$

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t' , quindi $P + R \xrightarrow{\alpha_1} X' \xrightarrow{t'}$ ovvero viene applicata una transizione secondo la regola della somma non deterministica arrivando in certo processo X' . Ci sono perciò due possibilità:

- $P+R$ ha effettuato una transizione usando la regola SUM-L:

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha_1} P'}{P + R \xrightarrow{\alpha_1} P' \xrightarrow{t'}} \text{ SUM-L}$$

$t = \alpha_1.t'$ dove t' è una certa sequenza di interazioni con $|t'| = n$. Per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P')$, quindi $\alpha_1.t' \in \alpha_1.\text{Tr}(P')$ che ne consegue che $t \in \alpha_1.\text{Tr}(P')$. Alla luce di ciò e grazie alla regola SUM-L che permette la transizione $P \xrightarrow{\alpha_1} P'$, si può concludere che $t \in \text{Tr}(P)$.

- $P+R$ ha effettuato una transizione usando la regola SUM-R:

$$\frac{R \xrightarrow{\alpha_1} R'}{P + R \xrightarrow{\alpha_1} R' \xrightarrow{t'}} \text{ SUM-R}$$

$t = \alpha_1.t'$ dove t' è una certa sequenza di interazioni con $|t'| = n$. Per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(R')$, quindi $\alpha_1.t' \in \alpha_1.\text{Tr}(R')$ che ne consegue che $t \in \alpha_1.\text{Tr}(R')$. Alla luce di ciò e grazie alla regola SUM-R che permette la transizione $R \xrightarrow{\alpha_1} R'$, si può concludere che $t \in \text{Tr}(R)$.

(\supseteq)

Sia $t \in (\text{Tr}(P) \cup \text{Tr}(R)) \Rightarrow t \in \text{Tr}(P + R)$

t può essere una traccia sia di P e sia di R oppure solo uno dei due.

Suddividiamo il problema in due casi:

Caso $t = \varepsilon$

Per definizione $t = \varepsilon \in \text{Tr}(P + R)$.

Caso $t \neq \varepsilon$

t è una sequenza non vuota di interazioni di P .

Se $t \in \text{Tr}(P)$, si sa che esiste la sequenza di transizione $P \xrightarrow{\alpha_1} P' \xrightarrow{t'}$. Quindi $t = \alpha_1.t'$ con $t' \in \text{Tr}(P')$. Fatta questa premessa, applicando la regola SUM-L si ottiene che $P + R \xrightarrow{\alpha_1} P' \xrightarrow{t'}$. Si deduce che $\alpha_1 \in \text{Tr}(P + R)$, ma allora $P + R$ sa fare t , quindi $t \in \text{Tr}(P + R)$.

Se $t \in \text{Tr}(R)$, si sa che esiste la sequenza di transizione $R \xrightarrow{\alpha_1} R' \xrightarrow{t'}$. Quindi $t = \alpha_1.t'$ con $t' \in \text{Tr}(R')$. Fatta questa premessa, applicando la regola SUM-R si ottiene che $P + R \xrightarrow{\alpha_1} R' \xrightarrow{t'}$. Si deduce che $\alpha_1 \in \text{Tr}(P + R)$, ma allora $P + R$ sa fare t , quindi $t \in \text{Tr}(P + R)$.

Se t appartiene sia a P che R , qualsiasi regola venga applicata per fare la transizione vale sempre $t \in \text{Tr}(P + R)$.

Perciò si è dimostrato che $\text{Tr}(P + R) = \text{Tr}(P) \cup \text{Tr}(R)$ e quindi con $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$, $P + R \sim_t Q + R$ come si voleva dimostrare.

1.2.1.3 Contesto parallelo $C[\] = (\mid R)$

Intuitivamente le tracce $\text{Tr}(P|R)$ sono tutte le possibili combinazioni tra $\text{Tr}(P)$ e $\text{Tr}(R)$, cioè tutte le loro interazioni e sincronizzazioni. Se tale intuizione è vera allora dato che $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$, si potrebbe sostituire P con Q nelle $\text{Tr}(P|R)$ ed ottenere le stesse combinazioni della versione precedente. Perciò varrebbe $\text{Tr}(P|R) = \text{Tr}(Q|R)$ e di conseguenza $P|R \sim_t Q|R$.

Per dimostrare ciò, si definisce un insieme $\text{Tr}(P,R)$ che contiene tutte e sole le sequenze di interazioni che si possono ottenere combinando le $\text{Tr}(P)$ e le $\text{Tr}(R)$ seguendo le regole del parallelo, PAR-L, PAR-R e PAR- τ .

Quindi si definisce la seguente funzione C che date due tracce ne esegue la loro combinazione:

$$C(a, b) = \begin{cases} \max(x, y) & \text{se } a = \varepsilon \text{ OR } b = \varepsilon \\ \alpha_1 C(a', \alpha_2 b') \cup \alpha_2 C(\alpha_1 a', b') & \text{se } a = \alpha_1 a' \text{ AND } b = \alpha_2 b' \\ \tau C(x', y') & \text{se } a = \alpha a' \text{ AND } b = \bar{\alpha} b' \end{cases}$$

dove $\text{Tr}(P,R) = \{ C(a,b) \mid a \in \text{Tr}(P), b \in \text{Tr}(R) \}$.

Si procede con la dimostrazione $\text{Tr}(P|R) = \text{Tr}(P,R)$.

(\subseteq)

Sia $t \in \text{Tr}(P|R) \Rightarrow t \in (P,R)$.

Ovvero la funzione C sa eseguire la traccia t . Per induzione su $|t|$:

Caso Base $|t| = 0$

Allora $t = \varepsilon$, quindi $\varepsilon \in \text{Tr}(P)$ e $\varepsilon \in \text{Tr}(R)$ per definizione. Perciò applicando $\text{Tr}(P,R)$, si ha che $C(\varepsilon, \varepsilon) = \{ \max(\varepsilon, \varepsilon) \} = \{\varepsilon\}$ dove $t \in \{\varepsilon\}$.

Caso Induttivo $|t| = n + 1$

Si ha che $t = \alpha_1.t'$ ovvero, t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t' , quindi si ha $P|R \xrightarrow{\alpha_1} X' \xrightarrow{t'}$ con $t' \in \text{Tr}(X')$. Viene perciò applicata una transizione secondo la regola del parallelo arrivando in un certo processo X' . Vi sono perciò tre possibilità:

- $P|R$ ha effettuato una transizione usando la regola PAR-L:

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha_1} P'}{P|R \xrightarrow{\alpha_1} P'|R \xrightarrow{t'}} \text{ PAR-L}$$

$t' \in \text{Tr}(P'|R)$ con $|t'| = n$, per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P',R)$ allora esistono $a' \in \text{Tr}(P')$, $b' \in \text{Tr}(R)$, tale che $t' \in C(a',b')$. Voglio però dimostrare che $a \in \text{Tr}(P)$, $b \in \text{Tr}(R)$, tale che $t \in C(a,b)$. Come mostrato precedentemente con l'applicazione della regola PAR-L esiste un'interazione α_1 tale che $P \xrightarrow{\alpha_1} P'$ con $\alpha_1 a' \in \text{Tr}(P)$.

Perciò mostriamo che $t \in C(a = \alpha_1 a', b = b') = \text{Tr}(P, R)$. Quindi:

- Se $b' = \varepsilon$
Si sa che $C(a', \varepsilon) = \{a'\}$, inoltre per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P', R) = \{ C(a', \varepsilon) \mid a' \in \text{Tr}(P'), \varepsilon \in \text{Tr}(R) \}$ quindi risulta che $t' = a'$, ma allora dato che $\alpha_1 a' \in \text{Tr}(P)$ posso concludere che $t = \alpha_1 t' \in C(\alpha_1 a', b')$ e quindi $t \in \text{Tr}(P, R)$.
- Se $b' \neq \varepsilon$
Per ipotesi induttiva $t' \in C(a', b')$. Si sa che dalla definizione di C , $C(\alpha_1 a', b')$ può assumere il valore $\alpha_1 C(a', b')$, ma allora $t = \alpha_1 t' \in \alpha_1 C(a', b')$ e quindi $t \in \text{Tr}(P, R)$.

- $P|R$ ha effettuato una transizione usando la regola PAR-R:

$$\frac{R \xrightarrow{\alpha_1} R'}{P|R \xrightarrow{\alpha_1} P|R' \xrightarrow{t'}} \text{ PAR-R}$$

$t' \in \text{Tr}(P|R')$ con $|t'| = n$, per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P, R')$ allora esistono $a' \in \text{Tr}(P)$, $b' \in \text{Tr}(R')$, tale che $t' \in C(a', b')$. Voglio però dimostrare che $a \in \text{Tr}(P)$, $b \in \text{Tr}(R)$, tale che $t \in C(a, b)$. Come mostrato precedentemente con l'applicazione della regola PAR-R esiste un'interazione α_1 tale che $R \xrightarrow{\alpha_1} R'$ con $\alpha_1 b' \in \text{Tr}(R)$. Perciò mostriamo che $t \in C(a = a', b = \alpha_1 b') = \text{Tr}(P, R)$. Quindi:

- Se $a' = \varepsilon$
Si sa che $C(\varepsilon, b') = \{b'\}$, inoltre per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P, R') = \{ C(\varepsilon, b') \mid \varepsilon \in \text{Tr}(P'), b' \in \text{Tr}(R) \}$ quindi risulta che $t' = b'$, ma allora dato che $\alpha_1 b' \in \text{Tr}(R)$ posso concludere che $t = \alpha_1 t' \in C(a', \alpha_1 b')$ e quindi $t \in \text{Tr}(P, R)$.
- Se $a' \neq \varepsilon$
Per ipotesi induttiva $t' \in C(a', b')$. Si sa che dalla definizione di C , $C(a', \alpha_1 b')$ può assumere il valore $\alpha_1 C(a', b')$, ma allora $t = \alpha_1 t' \in \alpha_1 C(a', b')$ e quindi $t \in \text{Tr}(P, R)$.

- $P|R$ ha effettuato una transizione usando la regola PAR- τ :

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha_1} P' \quad R \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} R'}{P|R \xrightarrow{\tau} P'|R' \xrightarrow{t'}} \text{ PAR-}\tau$$

$t' \in \text{Tr}(P'|R')$ con $|t'| = n$, per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P', R')$ allora esistono $a' \in \text{Tr}(P')$, $b' \in \text{Tr}(R')$, tale che $t' \in C(a', b')$. Voglio però dimostrare che $a \in \text{Tr}(P)$, $b \in \text{Tr}(R)$, tale che $t \in C(a, b)$. Come mostrato precedentemente con l'applicazione della regola PAR- τ esistono le interazioni α_1 e $\overline{\alpha_1}$ tale che $P \xrightarrow{\alpha_1} P'$ e $R \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} R'$ con $\alpha_1 a' \in \text{Tr}(P)$ e $\overline{\alpha_1} b' \in \text{Tr}(R)$.

Perciò mostriamo che $t \in C(a = \alpha_1 a', b = \overline{\alpha_1} b') = \text{Tr}(P, R)$.

Quindi dato che si sincronizzano nessuna delle due tracce possono essere vuote, e per ipotesi induttiva $t' \in C(a', b')$, sapendo che dalla definizione di C , $C(\alpha_1 a', \overline{\alpha_1} b')$ può assumere il valore $\tau C(a', b')$, allora $t = \tau t' \in \tau C(a', b')$ e quindi $t \in \text{Tr}(P, R)$.

(\supseteq)

Sia $t \in \text{Tr}(P, R) \Rightarrow t \in (P|R)$

Per induzione su $|t|$:

Caso Base $|t| = 0$

$t = \varepsilon$, allora $\varepsilon \in \text{Tr}(P | R)$ per definizione.

Caso Induttivo $|t| = n + 1$

t ha una prima interazione α_1 seguita poi dalla traccia t' , ovvero $t = \alpha_1 t'$. Si ricorda inoltre che esiste una $a \in \text{Tr}(P)$, $b \in \text{Tr}(R)$, tale che $t \in C(a, b)$. Ci sono perciò tre possibili α_1 :

- $\alpha_1 \in \text{Tr}(P)$, si ha quindi una sequenza di transizione $P \xrightarrow{\alpha_1} P' \xrightarrow{a'} \rightarrow$ con $a = \alpha_1 a'$ con $a' \in \text{Tr}(P)$. Posso perciò applicare PAR-L:

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha_1} P'}{P|R \xrightarrow{\alpha_1} P'|R \xrightarrow{a'} \rightarrow} \text{PAR-L}$$

Dall'applicazione della regola PAR-L si ottiene che $P|R \xrightarrow{\alpha_1} P'|R \xrightarrow{a'} \rightarrow$. Si deduce che $\alpha_1 \in \text{Tr}(P|R)$, $|t'| = n$ per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P'|R)$, allora $(P|R)$ sa fare t quindi $t = \alpha_1 t' \in \text{Tr}(P|R)$.

- $\alpha_1 \in \text{Tr}(R)$, si ha quindi una sequenza di transizione $R \xrightarrow{\alpha_1} R' \xrightarrow{b'} \rightarrow$ con $b = \alpha_1 b'$ con $b' \in \text{Tr}(R)$. Posso perciò applicare PAR-R:

$$\frac{R \xrightarrow{\alpha_1} R'}{P|R \xrightarrow{\alpha_1} P|R' \xrightarrow{b'} \rightarrow} \text{PAR-R}$$

Dall'applicazione della regola PAR-R si ottiene che $P|R \xrightarrow{\alpha_1} P|R' \xrightarrow{b'} \rightarrow$. Si deduce che $\alpha_1 \in \text{Tr}(P|R)$, $|t'| = n$ per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P|R')$, allora $(P|R)$ sa fare t quindi $t = \alpha_1 t' \in \text{Tr}(P|R)$.

- $\alpha_1 \in \text{Tr}(P)$ AND $\alpha_1 \in \text{Tr}(R)$, si ha quindi una sequenza di transizione $P \xrightarrow{\alpha_1} P' \xrightarrow{a'} \rightarrow$ con $a = \alpha_1 \cdot a'$ con $a' \in \text{Tr}(P)$, e un'altra sequenza di transizioni $R \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} R' \xrightarrow{b'} \rightarrow$ con $b = \bar{\alpha}_1 \cdot b'$ con $b' \in \text{Tr}(R)$. Posso perciò applicare PAR- τ :

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha_1} P' \quad R \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} R'}{P|R \xrightarrow{\tau_1} P'|R' \xrightarrow{t'} \rightarrow} \text{PAR-}\tau$$

Dall'applicazione della regola PAR- τ si ottiene che $P|R \xrightarrow{\tau_1} P'|R' \xrightarrow{t'} \rightarrow$. Si deduce che $\tau_1 \in \text{Tr}(P|R)$, $|t'| = n$ per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P'|R')$, allora $(P|R)$ sa fare t quindi $t = \tau_1 t' \in \text{Tr}(P|R)$.

Quindi sia $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$ e $\text{Tr}(P, R) = \{ C(a, b) \mid a \in \text{Tr}(P), b \in \text{Tr}(R) \} = \text{Tr}(P \mid R)$, allora posso sostituire le tracce di P con quelle di Q per ottenere $\{ C(a, b) \mid a \in \text{Tr}(Q), b \in \text{Tr}(R) \} = \text{Tr}(P, R) = \text{Tr}(Q \mid R)$, dimostrando che $P \mid R \sim_t Q \mid R$.

1.2.1.4 Contesto restrizione $C[\] = \setminus L$

Il caso del contesto restrizione L sul processo P ha la seguente uguaglianza:

$\text{Tr}(P \setminus L) = \text{Tr}(P) \setminus \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L \}$ cioè le tracce che stanno in $\text{Tr}(P)$ non ci sono nell'insieme di restrizione L . Se questo è vero, dato che per ipotesi $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$ e quindi $\text{Tr}(Q) \setminus \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L \} = \text{Tr}(Q \setminus L)$, allora $\text{Tr}(P \setminus L) = \text{Tr}(Q \setminus L)$.

Perciò si deve dimostrare che il contesto restrizione L sul processo P è uguale a $\text{Tr}(P) \setminus \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L \}$. Dimostrato questo ne consegue la veridicità di $P \setminus L \sim_t Q \setminus L$.

(\subseteq)

Sia $t \in \text{Tr}(P \setminus L) \Rightarrow t \in \text{Tr}(P) \setminus \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L \}$

Per induzione su $|t|$:

Caso Base $|t| = 0$

Allora $t = \varepsilon \in \text{Tr}(P) \setminus \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L \}$ per definizione.

Caso Induttivo $|t| = n + 1$

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t' , quindi $P \setminus L \xrightarrow{\alpha_1} X' \xrightarrow{t'}$ ovvero viene applicata una transizione secondo la regola della restrizione arrivando in un certo processo X' , quindi:

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha_1} P'}{P \setminus L \xrightarrow{\alpha_1} P' \setminus L \xrightarrow{t'}} \text{ RES se } \alpha_1, \overline{\alpha_1} \notin L$$

$t = \alpha_1.t'$ con $|t'| = n$, per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P') \setminus \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L \}$.

Dato che $\alpha_1, \overline{\alpha_1} \notin L$ quindi $t = \alpha_1.t' \notin \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L \}$ allora vale che $t = \alpha_1.t' \in \text{Tr}(P) \setminus \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L \}$.

(\supseteq)

Sia $t \in \text{Tr}(P) \setminus \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L \} \Rightarrow t \in \text{Tr}(P \setminus L)$.

Per induzione su $|t|$:

Caso Base $|t| = 0$

Allora $t = \varepsilon \in \text{Tr}(P \setminus L)$ per definizione.

Caso Induttivo $|t| = n + 1$

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t' , cioè $t = \alpha_1.t'$. Si ha quindi una transizione $P \xrightarrow{\alpha_1} P'$, ciò è permesso dalla regola della restrizione, quindi:

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha_1} P'}{P \setminus L \xrightarrow{\alpha_1} P' \setminus L \xrightarrow{t'}} \text{ RES se } \alpha_1, \overline{\alpha_1} \notin \{\alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L\}$$

Dall'applicazione della regola RES si ottiene che $P \setminus L \xrightarrow{\alpha_1} P' \setminus L \xrightarrow{t'}$, posso dedurre che $\alpha_1 \in \text{Tr}(P \setminus L)$. $|t'| = n$ per ipotesi induttiva $t' \in \text{Tr}(P' \setminus L)$ allora $\text{Tr}(P \setminus L)$ sa fare t , quindi $t = \alpha_1.t' \in \text{Tr}(P \setminus L)$.

Dato che $\text{Tr}(P \setminus L) = \text{Tr}(P) \setminus \{\alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in L\}$ con $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$ allora si è dimostrato che $P \setminus L \sim_t Q \setminus L$.

1.2.1.5 Contesto relabelling $C[\] = [f]$

Nel caso del contesto relabelling sul processo P si ha che:

Data la funzione $f : \text{Act} \rightarrow \text{Act}$, le traccie di $P[f]$ sono:

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$f(\alpha.t) = f(\alpha).f(t)$$

Quindi voglio dimostrare che $\text{Tr}(P[f]) = \{f(t) \mid t \in \text{Tr}(P)\}$. Se questo è vero, dato che $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$ si può sostituire $\text{Tr}(P)$ con $\text{Tr}(Q)$ scrivendo $\{f(t) \mid t \in \text{Tr}(Q)\}$ e grazie alla uguaglianza scritta precedentemente, allora $\text{Tr}(P[f]) = \text{Tr}(Q[f])$.

(\subseteq)

Sia $t \in \text{Tr}(P[f]) \Rightarrow t \in \{f(t) \mid t \in \text{Tr}(P)\}$.

Per induzione su $|t|$:

Caso Base $|t| = 0$

Allora $t = \epsilon \in \{f(\epsilon) \mid \epsilon \in \text{Tr}(P)\}$ per definizione.

Caso Induttivo $|t| = n + 1$

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t' , quindi $P[f] \xrightarrow{\alpha_1} X' \xrightarrow{t'}$ ovvero viene applicata una transizione secondo la regola del relabelling arrivando in un certo processo X' , quindi:

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha_1} P'}{P[f] \xrightarrow{f(\alpha_1)} P'[f] \xrightarrow{f(t')}} \text{ REL}$$

$t = f(\alpha_1).f(t')$ dove t' è una certa sequenza di interazioni con $|t'| = n$. Per ipotesi induttiva si ha che $f(t') \in \{f(t') \mid t' \in \text{Tr}(P')\}$, inoltre per l'applicazione della regola REL che permette la transizione $P \xrightarrow{\alpha_1} P'$ allora $f(\alpha).f(t') \in \{f(t) \mid t \in \text{Tr}(P)\}$.

(\supseteq)

Sia $t \in \{f(t) \mid t \in \text{Tr}(P)\} \Rightarrow t \in \text{Tr}(P[f])$.

Per induzione su $|t|$:

Caso Base $|t| = 0$

Allora $t = \varepsilon \in \text{Tr}(P[\mathbf{f}])$ per definizione.

Caso Induttivo $|t| = n + 1$

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t' , cioè $t = \alpha_1.t'$. Si ha quindi una transizione $P \xrightarrow{\alpha_1} P'$, ciò è permesso dalla regola del relabelling, quindi:

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha_1} P'}{P[\mathbf{f}] \xrightarrow{f(\alpha_1)} P'[\mathbf{f}] \xrightarrow{f(t')}} \text{REL}$$

Dall'applicazione della regola REL si ottiene che $P[\mathbf{f}] \xrightarrow{f(\alpha_1)} P'[\mathbf{f}] \xrightarrow{f(t')}$. Si deduce che $P[\mathbf{f}]$ sa fare l'interazione α_1 , inoltre $|t'| = n$, per ipotesi induttiva $t' \in P'[\mathbf{f}]$ allora $t = \alpha_1.t' \in \text{Tr}(P[\mathbf{f}])$.

Quindi dato che $\text{Tr}(P[\mathbf{f}]) = \{f(t) \mid t \in \text{Tr}(P)\}$ con $\text{Tr}(P) = \text{Tr}(Q)$ allora si è dimostrato che $P[\mathbf{f}] \sim_t Q[\mathbf{f}]$.

1.2.2 Conclusione

Si è dimostrato con i vari casi della dimostrazione precedente, che per ogni possibile contesto che può essere usato, la trace equivalence risulta essere una congruenza per il CCS.

2 Barbershop

Il problema del Barbiere formato da 2 tipi di processi, un processo barbiere che effettua tagli di barba/capelli a dei processi clienti, e un insieme di processi clienti che vogliono effettuare un taglio. Il negozio del barbiere prevede l'esistenza di una sala d'attesa con n sedie, e la stanza del barbiere con una sedia dove viene effettuato il taglio. Se non ci sono clienti che aspettano di essere serviti, il barbiere dorme. Se arriva un cliente nel negozio vi sono tre casi possibili; tutte le sedie sono occupate da altri clienti, e quindi il cliente se ne va dal negozio, oppure il barbiere è occupato e c'è almeno una sedia libera nella sala d'attesa, il cliente può sedersi ed aspettare che il barbiere si liberi ed effettui il taglio, infine se il barbiere sta dormendo, il barbiere si sveglierà e effettuerà il taglio al cliente.

È importante rispettare i seguenti vincoli:

- I processi cliente dovrebbero ricevere il taglio;
- Se un cliente arriva quando il negozio è pieno, se ne va;
- Il barbiere dovrebbe effettuare i tagli;
- Il barbiere serve i clienti uno per volta.

2.1 Una possibile soluzione

Il libro Little Book of Semaphores suggerisce la seguente soluzione:

Sia $n = 2$, quindi una sedia per la sala d'attesa e una per la barberia.

Si vuole utilizzare un **mutex** per proteggere la sezione critica al cui interno vi è un contatore di clienti presenti nel negozio. Quindi il contatore per essere modificato si dovrà garantire la mutua esclusione. Quando un cliente entra nel negozio dovrà entrare nella sezione critica per controllare che il contatore sia uguale a n , se lo è allora esce dal negozio, se invece non lo è incrementa il contatore ed esce dalla sezione critica. Una volta incrementato il cliente segnala attraverso un semaforo **Customer** la sua presenza al barbiere e si mette in attesa nel semaforo **Barber** per attendere il servizio del barbiere.

Una volta che il barbiere segnala la presa in carico del cliente sul semaforo **Barber**, viene effettuato il taglio e il cliente e il barbiere si sincronizzano sui semafori **CustomerDone** e **BarberDone** per garantire che il taglio sia stato fatto e che il barbiere possa effettuare un taglio ad un altro cliente in attesa se c'è altrimenti torna a dormire. Il cliente dopo il taglio entra di nuovo nella sezione critica per decrementare il contatore in modo tale da uscire dal negozio.

Il barbiere nello specifico all'inizio rimane in attesa sul semaforo **Customer** aspettando l'arrivo di un cliente (simula il fatto che stia dormendo), una volta svegliato, segnala sul semaforo **Barber** di essere pronto con il taglio e prendere in carico un cliente (il primo che sincronizza con il segnale), effettua il taglio si sincronizza con il cliente che ha ricevuto il servizio. Se ci sono altri clienti in attesa passa direttamente al nuovo lavoro da effettuare senza mettersi a dormire, invece se non c'è nessuno torna a dormire e si ferma sul semaforo **Customer**.

Di seguito viene mostrata una possibile soluzione in pseudo-codice.

```
mutex.wait()
    if customers == n:
        mutex.signal()
        balk()
        customers += 1
mutex.signal()

customer.signal()
barber.wait()

# getHairCut()

customerDone.signal()
barberDone.wait()

mutex.wait()
    customers -= 1
mutex.signal()
```

Figura 1: Definizione processo cliente.

```
customer.wait()
barber.signal()

# cutHair()

customerDone.wait()
barberDone.signal()
```

Figura 2: Definizione processo barbiere.

2.2 Modellazione in CCS

Quindi le entità utilizzate nel programma CCS sono:

- $Customer_i$: Processo cliente che riceve il taglio;
- $Count_i$: Mutex con al suo interno il contatore del numero di clienti presenti nel negozio;
- Barber: Processo barbiere che effettua il taglio;
- Sys: Sistema.

Di seguito si mostra un esempio del sistema con $n = 2$ e tre clienti.

```
Count1 = enter.incExit.Count2;
Count2 = enter.(incExit.CountB + decExit.Count1);
CountB = enter.(balk.CountB + decExit.Count2);
```

```
Customer1 = 'enter.enter1.exit1.('incExit.C1 + 'balk.Customer1);
C1 = semCustomer.'semBarber.getHairCut1.semCustomerDone.'semBarberDone.
'enter.enter1.exit1.'decExit.Customer1;
```

```
Customer2 = 'enter.enter2.exit2.('incExit.C2 + 'balk.Customer2);
C2 = semCustomer.'semBarber.getHairCut2.semCustomerDone.'semBarberDone.
'enter.enter2.exit2.'decExit.Customer2;
```

```
Customer3 = 'enter.enter3.exit3.('incExit.C3 + 'balk.Customer3);
C3 = semCustomer.'semBarber.getHairCut3.semCustomerDone.'semBarberDone.
```

```
'enter.enter3.exit3.'decExit.Customer3;
```

```
Barber = 'semCustomer.semBarber.cutHair.'semCustomerDone.semBarberDone.Barber;
```

```
set L = { enter, incExit, decExit, balk, semCustomer, semCustomerDone, semBarber, semBarberDone};
```

```
Sys = (Customer1|Customer2|Customer3|Count1|Barber) \L;
```

2.2.1 Codifica Mutex e contattore clienti

Per codificare il contattore e il *mutex* si è deciso di utilizzare un unico processo, o meglio un insieme di processi che codificano il *mutex* e il contattore, perciò abbiamo:

```
Count1 = enter.incExit.Count2;
```

Codifica il contatore che passa da zero a uno gestendo il tutto in mutua esclusione. Per interagire con il contattore i processi clienti devono sincronizzarsi su **enter** che risulta essere un canale ristretto, ciò permette la mutua esclusione che sarà dimostrata in seguito. Per poter incrementare il contattore e uscire dalla sezione critica i processi cliente utilizzeranno il canale **incExit** anch'esso ristretto, mentre il processo **Count1** andrà nel processo **Count2** per mantenere il contattore a uno e per dare la possibilità di decrementare o incrementare un successivo processo cliente.

```
Count2 = enter.(incExit.CountB + decExit.Count1);
```

Codifica il contatore che passa da uno a due e/o da uno a zero, gestendo il tutto in mutua esclusione. Analogamente a **Count1** c'è **enter** per la sincronizzazione in mutua esclusione. Viene data una scelta in più su come proseguire l'esecuzione. A seconda di cosa richiede il processo cliente può essere data la possibilità di incrementare il contattore e uscire, sempre attraverso il canale **incExit**, oppure il decremento attraverso **decExit**(canale ristretto). La scelta dipende dello stato d'esecuzione in cui si trova il processo cliente. Nel caso incrementi, **Count2** va in **CountB** altrimenti torna in **Count1**.

```
CountB = enter.(balk.CountB + decExit.Count2);
```

Codifica il contatore che non può essere più incrementato perché uguale a **n**, e l'azione di decremento. Il funzionamento è uguale a **Count2** tranne per il fatto che **incExit** non esiste ma c'è **balk**(canale ristretto) usato per simulare l'uscita dal locale del cliente nel caso in cui voglia ricevere un taglio ma non ci sono sedie disponibili.

2.2.2 Codifica Customer

La codifica dei clienti avviene nel seguente modo:

```
Customer1 = 'enter.enter1.exit1.('incExit.C1 + 'balk.Customer1);
```

```
C1 = semCustomer.'semBarber.getHairCut1.semCustomerDone.'semBarberDone.
```

```
'enter.enter1.exit1.'decExit.Customer1;
```

Il cliente per poter controllare se può entrare si sincronizza sul canale **enter** rimando in attesa della possibilità di entrare nella sezione critica. Una volta entrato controlla se può incrementare oppure no il contattore, quindi sceglie se eseguire **incExit** o **balk**, tale scelta dipende da cosa offre il processo **count**. Nel caso sia **CountB**, l'unica azione possibile per il cliente è eseguire **balk** che lo fa uscire dalla sezione critica e non lo fa entrare nel negozio. Nel caso invece sia **Count1** o **Count2** il cliente esegue **incExit** così che incrementi il contattore e esca dalla sezione critica. Successivamente si sincronizza con il barbiere, che nel caso in cui il barbiere sia libero passa a ricevere il taglio. Finito il

taglio si sincronizza subito con il barbiere per poi entrare nella sezione critica in mutua esclusione e decrementare il contatore per simulare la sua uscita dal negozio.

2.2.3 Codifica Barber

La codifica del Barbiere avviene nel seguente modo:

$\text{Barber} = \text{'semCustomer.semBarber.cutHair' semCustomerDone.semBarberDone.Barber};$

Il barbiere rimane in attesa di un nuovo cliente da servire su `semCustomer` se non ci sono clienti in attesa. Una volta arrivato un cliente si sincronizza con esso ed esegue il taglio, successivamente si sincronizza con il cliente appena servito per garantire che sia avvenuto il taglio per poi tornare all'inizio della sua esecuzione per poter eseguire un nuovo cliente se c'è, altrimenti attende un nuovo cliente.

2.2.4 Codifica del sistema

L'intero sistema viene codificato nel seguente modo:

$\text{Sys} = (\text{Customer1}|\text{Customer2}|\text{Customer3}|\text{Count1}|\text{Barber}) \setminus L;$
 $\text{set } L = \{ \text{enter}, \text{incExit}, \text{decExit}, \text{balk}, \text{semCustomer}, \text{semCustomerDone}, \text{semBarber}, \text{semBarberDone} \};$

Il sistema viene rappresentato attraverso una composizione parallela dei processi `Customer`, `Barber` e `Count1`. Tutti i canali vengono ristretti per permettere la sincronizzazione dei processi, escluso `cutHair`, `getHairCuti`, `enteri`, `exiti` usato per mostrare un comportamento all'esterno.

2.3 Verifica della correttezza attraverso CWB

Di seguito si verificano se il programma definito rispetta tutte le caratteristiche stabilite dalla definizione del problema, attraverso l'uso della Edinburgh Concurrency Workbench (CWB).

2.3.1 Trace Equivalence

Dato che il sistema con 3 clienti e $n = 2$ risulta avere 752 stati, è troppo complesso scrivere una specifica che catturi il comportamento dell'intero sistema. Quindi trovare una specifica che sia bisimile a `Sys` non è molto interesse quello che ci interessa è perciò catturare alcune caratteristiche intessenti utili per la verifica. Si procede quindi nello scrivere due specifiche generali che catturino, una la mutua esclusione nella modifica del contatore e l'altra che ogni cliente viene servito uno alla volta. Si hanno le seguenti:

$\text{SpecM} = \text{enter1.exit1.SpecM} + \text{enter2.exit2.SpecM} + \text{enter3.exit3.SpecM};$

$\text{SpecC} = \text{cutHair.getHairCut1.SpecC} + \text{getHairCut1.cutHair.SpecC} +$
 $\text{cutHair.getHairCut2.SpecC} + \text{getHairCut2.cutHair.SpecC} +$
 $\text{cutHair.getHairCut3.SpecC} + \text{getHairCut3.cutHair.SpecC};$

Si nota che unendo nel modo corretto queste due specifiche si può costruire la specifica bisimile a `Sys`, ma come detto risulta essere troppo complesso e quello che ci interessa è la cattura delle caratteristiche chiave del sistema, le quali garantiscono il corretto funzionamento.

Quindi si prendono due versioni di `Sys`, `Sys1` versione senza i canali `cutHair` e `getHairCuti` e `Sys2` versione senza i canali `enteri` e `exiti`.

Per dimostrare che **Sys1** e **Sys2** hanno le caratteristiche descritte dalle specifiche **SpecM** e **SpecC** si ricorre all'uso della Trace Equivalence. Si vuole che le tracce di **Sys1** siano $\text{Tr}(\text{Sys1}) = \text{Tr}(\text{SpecM})$, mentre le tracce di **Sys2** siano $\text{Tr}(\text{Sys2}) = \text{Tr}(\text{SpecC})$. Vogliamo perciò che le tracce di **Sys1** siano sequenze di enter_i e exit_i ben accoppiate mentre per le tracce di **Sys2** siano sequenze di cutHair e getHairCut_i anch'essi ben accoppiate.

Attraverso la CWB con il comando **mayeq(Sys1,SpecM)** otteniamo la conferma che $\text{Tr}(\text{Sys1}) = \text{Tr}(\text{SpecM})$. Analogamente con **mayeq(Sys2,SpecC)** si dimostra che $\text{Tr}(\text{Sys2}) = \text{Tr}(\text{SpecC})$.

Si sottolinea che nonostante **Sys1** e **Sys2** hanno comportamenti esterni differenti, al loro interno sono garantite le due proprietà che si sono verificate con la Trace Equivalence, dato che si è solo modificato il comportamento esterno che ha origine dalla struttura interna del sistema rimasta invariata.

2.3.2 Verifica tramite HML

Passiamo ora a dimostrare alcune proprietà chiave del **Sys** attraverso la logica di Hennessy-Milner per una dimostrazione più formale.

Nelle verifiche verranno usate le seguenti formule:

- **Inv(P)** = $\max(X. (P \ \& \ [-]X))$;
Sempre vera la proprietà P.
- **Pos(P)** = $\min(X. (P \mid \langle - \rangle X))$;
Esiste un stato in cui vale la proprietà P.
- **WeakEven(P)** = $\min(X. (P \mid \langle \text{eps} \rangle \langle - \tau \rangle \langle \text{eps} \rangle T \ \& \ [[\text{eps}]] [-\tau] [[\text{eps}]] X))$;
Prima o poi l'esecuzione eseguirà un stato in cui vale P attraverso passi interni e esterni.
- **WUntil(P,Q)** = $\max(X. Q \mid (P \ \& \ [-]X))$;
Until in versione weak. Vale la proprietà P finché non diventa vera Q cioè l'esecuzione arriva un stato dove può vale Q.
- **SUntil(P,Q)** = $\min(X. Q \mid (P \ \& \ \langle - \rangle T \ \& \ [-]X))$;
Until in versione strong. Vale la proprietà P finché non diventa vera Q.

2.3.2.1 Assenza di deadlock

Il sistema riesce sempre a eseguire un passo senza rimanere bloccato.

$$\text{NoDeadlock} = \text{Inv}(\langle - \rangle T);$$

con il comando **checkprop(Sys, Nodetadlock)** si ottiene **true**, quindi il sistema non va mai in deadlock.

2.3.2.2 Presenza di Livelock

Siano:

$$\begin{aligned} \text{TauLoop} &= \max(X. \langle \tau \rangle X); \\ \text{prop Livelock} &= \text{Pos}(\text{TauLoop}); \end{aligned}$$

Attraverso **checkprop(Sys, Livelock)** si ottiene **false**, quindi non vi è la presenza di Livelock.

2.3.2.3 Mutua esclusione contattore

L'accesso alla sezione critica che contiene il contattore avviene in mutua esclusione, sia per incrementare e sia per decrementare il contattore. Quindi solo un processo può eseguire `exit` perchè solo un processo cliente può trovarsi nella sezione critica.

$$\text{MutexC} = \text{Inv}([[\text{exit1}]]F \mid [[\text{exit2}]]F) \ \& \ ([[\text{exit2}]]F \mid [[\text{exit3}]]F) \ \& \ ([[\text{exit1}]]F \mid [[\text{exit3}]]F));$$

È sempre vero che al più solo uno dei tre processi è in grado di fare `exiti`. Con il comando **checkprop**(Sys, **MutexC**) si ottiene **true**, quindi vale la mutua esclusione.

2.3.2.4 Mutua esclusione nell'esecuzione del taglio

Ogni cliente viene servito uno alla volta, quindi non è possibile che due clienti vengono serviti contemporaneamente dal barbiere ma al più solo uno. Si dimostra perciò la mutua esclusione nell'esecuzione del taglio.

$$\text{MutexB} = \text{Inv}([[\text{getHairCut1}]]F \mid [[\text{getHairCut2}]]F) \ \& \ ([[\text{getHairCut2}]]F \mid [[\text{getHairCut3}]]F) \ \& \ ([[\text{getHairCut1}]]F \mid [[\text{getHairCut3}]]F);$$

È sempre vero che al più solo uno dei tre processi è in grado di fare `getHairCuti`. Con il comando **checkprop**(Sys, **MutexB**) si ottiene **true**, quindi vale la mutua esclusione.

2.3.2.5 Verifica comportamento del barbiere nell'attesa dell'arrivo di un nuovo cliente

Il barbiere aspetta, cioè dorme, finché non entra un cliente. Quindi a livello di codice CCS il processo **Barber** rimane fermo in `'semCustomer` finché non si sincronizza con un processo `Customeri` attraverso l'azione `semCustomer`, dopo di che **Barber** può proseguire la sua esecuzione.

Per dimostrare tale proprietà si inseriscono nel sistema Sys, i canali `entered` in tutti i processi `Ci`, quindi:

$$\text{C1} = \text{semCustomer}.\text{entered}.'\text{semBarber}.\text{getHairCut1}.\text{semCustomerDone}.'\text{semBarberDone}.\text{'enter}.\text{enter1}.\text{exit1}.'\text{decExit}.\text{Customer1};$$

Mentre nel processo **Barber** si inserisce `waked`, quindi:

$$\text{Barber} = \text{'semCustomer}.\text{waked}.\text{semBarber}.\text{cutHair}.\text{'semCustomerDone}.\text{semBarberDone}.\text{Barber};$$
$$\text{UntilB} = \text{Inv}(\text{WUntil}([[\text{waked}]]F, \ll\text{entered}\gg T));$$

È sempre vero che il processo **Barber** non sa fare `waked` finché un processo `Customeri` può fare `entered`. La possibilità di poter fare `entered` la si ha solo se c'è stata una sincronizzazione, cioè il barbiere si è svegliato e il cliente è entrato e successivamente può segnalarlo. Quindi eseguendo **checkprop**(Sys, **UntilB**) si ottiene **true**, vale perciò la proprietà.

Non sarebbe andata bene la versione con lo strong until perché non è sempre vero che il processo **Barber** non sa fare `waked` finché un processo `Customeri` esegue `entered`, infatti:

$$\text{UntilB} = \text{Inv}(\text{SUntil}([[\text{waked}]]F, \ll\text{entered}\gg T));$$

Allora **checkprop**(Sys, **UntilB**) ritorna **false**.

2.3.2.6 Verifica comportamento del cliente nell'attesa di essere servito

Il cliente aspetta, finché il barbiere non gli da il segnale di sedersi per il taglio. Quindi a livello di codice CCS il processo Customer_i rimane fermo in `'semBarber` finché non si sincronizza con un processo `Barber` attraverso l'azione `semBarber`, dopo di che Customer_i può proseguire la sua esecuzione.

$$\begin{aligned} \text{UntilC} = & \text{Inv}(\text{WUntil}([\text{getHairCut1}]]\text{F}, \langle \text{cutHair} \rangle \text{T}) \\ & | \text{WUntil}([\text{getHairCut2}]]\text{F}, \langle \text{cutHair} \rangle \text{T}) \\ & | \text{WUntil}([\text{getHairCut3}]]\text{F}, \langle \text{cutHair} \rangle \text{T}); \end{aligned}$$

È sempre vero che il processo Customer_i non sa fare `getHairCuti` finché un processo `Barber` può fare `cutHair`. La possibilità di poter fare `cutHair` la si ha solo se c'è stata una sincronizzazione. Si è aggiunta la clausola OR perché può accadere che nonostante si abbia la possibilità di poter fare `cutHair` non è detto che il processo Customer_i sa fare `getHairCuti` perché a causa della mutua esclusione dopo la sincronizzazione al più solo uno sa fare l'azione. Quindi eseguendo `checkprop(Sys, UntilC)` si ottiene **true**, vale perciò la proprietà.

2.3.2.7 Fairness

Purtroppo la soluzione data al problema non garantisce una piena fairness, cioè può accadere che un processo Customer_j prenda per molte volte possesso del `Barber` lasciando gli altri processi $\text{Customer}_{k \neq j}$ in attesa di un taglio. Vi è quindi solo garantita la possibilità che si possa ricevere il taglio. Per dimostrare ciò si aggiunge ad ogni processo Customer_i si aggiunge il canale `willi` per esprimere la volontà di effettuare un taglio, quindi:

`Customer1 = will.enter.enter1.exit1.(incExit.C1 + balk.Customer1);`

Sia la seguente formula:

$$\begin{aligned} \text{FairC} = & \text{Inv}([\text{will1}] \text{Pos}(\langle \text{getHairCut1} \rangle \text{T})) \\ & \& [\text{will2}] \text{Pos}(\langle \text{getHairCut2} \rangle \text{T})) \\ & \& [\text{will3}] \text{Pos}(\langle \text{getHairCut3} \rangle \text{T})); \end{aligned}$$

Una volta espressa la volontà di eseguire un taglio esiste uno stato in cui è possibile effettuarlo. Quindi eseguendo `checkprop(Sys, FairC)` si ottiene **true**, esiste perciò uno stato in cui è possibile eseguire il taglio. Non è detto però che venga eseguito questo, infatti:

$$\begin{aligned} \text{FairC2} = & \text{Inv}([\text{will1}] \text{WeakEven}(\langle \text{getHairCut1} \rangle \text{T})) \\ & \& [\text{will2}] \text{WeakEven}(\langle \text{getHairCut2} \rangle \text{T})) \\ & \& [\text{will3}] \text{WeakEven}(\langle \text{getHairCut3} \rangle \text{T})); \end{aligned}$$

È sempre vero che dopo aver espresso la volontà di eseguire un taglio attraverso `willj` prima o poi il processo Customer_j lo riceverà. Ma per `checkprop(Sys, FairC2)` risulta essere **false**, e quindi vale ciò che si è detto precedentemente, non vale la fairness.

Vi è garantita però che non ci sia la possibilità di attesa infinita per ogni processo Customer_i , infatti siano:

$$\begin{aligned} \text{WaitForever1} &= \max (X. \langle \text{getHairCut1} \rangle X); \\ \text{WaitForever2} &= \max (X. \langle \text{getHairCut2} \rangle X); \\ \text{WaitForever3} &= \max (X. \langle \text{getHairCut3} \rangle X); \end{aligned}$$

$$\text{WaitForeverWill} = (\text{Pos}(\llbracket \text{will1} \rrbracket \text{WaitForever1}) \mid (\text{Pos}(\llbracket \text{will2} \rrbracket \text{WaitForever2})) \mid (\text{Pos}(\llbracket \text{will3} \rrbracket \text{WaitForever3})))$$

Attraverso **checkprop**(Sys, **WaitForeverWill**) si ottiene **false**, quindi non vi è la possibilità di avere attesa infinita nel ricevere il taglio.

Si può ragionare sul fatto che è possibile modificare il sistema in modo che sia garantita la fairness.

Un modo soluzione diciamo "semplice" può essere quella di far terminare i processi Customer_i una volta effettuato un taglio, e quando sono terminati tutti ci sia un processo preposto a riattivarli tutti. Questo modifica garantisce che prima o poi tutti i processi Customer_i eseguano un taglio.

Una soluzione più raffinata può essere quella di impostare un ordine d'esecuzione tale da garantire che tutti eseguano un taglio, quindi si potrebbe realizzare una sorta di coda FIFO in modo tale da stabilire un ordine d'esecuzione dando a tutti i clienti un turno in cui verrà eseguito il taglio.