Linguaggi per il global computing
Esercizi B e D + Barbershop

Federico Perin - 2029215 - Ottobre 2021

Indice

0.1 Esercizio D

Dimostrare che la trace equivalence è una congruenza per il CCS.

Prima di illustrare la dimostrazione si definisce che cosa si intende con i concetti di trace equivalence e congruenza.

Innanzitutto per traces di un processo P che di seguito verrà indicata con Tr(P) si intende, le sequenze di interazioni $\alpha_1 .....\alpha_n \in Act$ con n>= 0 tale che esiste una sequenza di transizioni $P \overset{\alpha_1}{\to} P_1 \overset{\alpha_2}{\to} ... \overset{\alpha_n}{\to} P_n$, e quindi rappresentata tutte le possibili interazioni con un processo. Più formalmente Tr(P) = { $\alpha_1 .....\alpha_n | P \overset{\alpha_1}{\to} P_1 \overset{\alpha_2}{\to} ... \overset{\alpha_n}{\to} P_n$ }. Quindi due processi P e Q si dicono trace equivalence P$\sim_t$Q se Tr(P) = Tr(Q).

Per congruenza si intende, dati due processi P e Q in relazione tra loro (P R Q), allora per ogni contesto C[ ], C[P] R C[Q].

Perciò si dimostrerà che se P$\sim_t$Q $\Rightarrow \forall$C[ ] C[P] $\sim_t$C[Q].

0.1.1 Dimostrazione

Siano P,Q e R processi CCS con P $\sim_t$ Q, allora

1. α.P $\sim_t$ α.Q
2. P + R $\sim_t$ Q + R
3. P|R $\sim_t$ Q|R
4. P\L $\sim_t$ Q\L
5. P[**f**] $\sim_t$ Q[**f**]

0.1.1.1 Prefisso C[ ] = α.

Si ha che Tr(C[P]) = Tr(α.P) = α.Tr(P), dato che con il contesto C[ ] si è aggiunto l'interazione α alle Tr(P). Per ipotesi Tr(P) = Tr(Q), inoltre aggiungendo l'interazione α sia a Tr(P) e sia a Tr(Q), si ha che α.Tr(P) = α.Tr(Q) = Tr(α.Q).

Perciò vale α.P $\sim_t$ α.Q.

0.1.1.2 Contesto non deterministico C[ ] = (+ R)

Nel caso del contesto non deterministico tra i processi P e R le Tr(P + R) = Tr(P) $\bigcup$ Tr(R). Se questo è vero, dato che per ipotesi Tr(P) = Tr(Q) e Tr(Q + R) = Tr(Q) $\bigcup$ Tr(R), allora Tr(P + R) = Tr(Q + R) .

Perciò si deve dimostrare che il contesto non deterministico tra i processi P e R è uguale alla unione delle traccie dei due processi. Dimostrato questo ne consegue la veridicità di P + R $\sim_t$ Q + R.

($\subseteq$)

Sia t $\in$Tr(P + R) $\Rightarrow$ t $\in$(Tr(P) $\bigcup$ Tr(R)) Per induzione su |t|:

Caso Base |t| = 0
Allora t = ε $\in$(Tr(P) $\bigcup$ Tr(R))

Caso Induttivo |t| = n + 1

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t', quindi P + R $\overset{\alpha_1}{\to}$ X' $\overset{t'}{\to}$ ovvero viene applicata una transizione secondo la regola della somma non deterministica arrivando in certo processo6 X', ci sono perciò due possibilità:

- P+R ha effettuato una transizione usando la regola SUM-L:

$$\frac{P \overset{\alpha_1}{\to} P'}{P + R \overset{\alpha_1}{\to} P' \overset{t'}{\to}} \textit{ SUM-L}$$

t = $\alpha_1.t'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva t' $\in Tr(P')$, quindi $\alpha_1.t' \in \alpha_1.Tr(P') \subseteq Tr(P)$ allora $t \in Tr(P) \bigcup Tr(R)$

- P+R ha effettuato una transizione usando la regola SUM-R:

$$\frac{R \overset{\alpha_1}{\to} R'}{P + R \overset{\alpha_1}{\to} R' \overset{t'}{\to}} \textit{ SUM-R}$$

t = $\alpha_1.t'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva t' $\in Tr(R')$, quindi $\alpha_1.t' \in \alpha_1.Tr(R') \subseteq Tr(R)$ allora $t \in Tr(R) \bigcup Tr(P)$

($\supseteq$)

Sia t $\in$(Tr(P) $\bigcup$ Tr(R)) $\Rightarrow$ t $\in$Tr(P + R)
Perciò t può essere una traccia sia di P e sia di R oppure solo uno dei due, quindi:

Se t $\in$ Tr(P), P + R può scegliere di fare una transizione attraverso la regola SUM-L, e allora vale che t $\in$ Tr(P + R).

Se t $\in$ Tr(R), P + R può scegliere di fare una transizione attraverso la regola SUM-R, e allora vale che t $\in$ Tr(P + R).

Se t appartiene sia a P che R, qualsiasi regola venga applicata per fare la transizione vale sempre t $\in$ Tr(P + R).

Perciò si è dimostrato che Tr(P + R) = Tr(P) $\bigcup$ Tr(R) e quindi con Tr(P) = Tr(Q),
P + R $\sim_t$ Q + R come si voleva dimostrare.

0.1.1.3 Contesto parallelo C[ ] = (| R)

Intuitivamente le traccie Tr(P|R) sono tutte le possibili combinazione tra Tr(P) e Tr(R), cioè quindi tutte le loro interazioni e sincronizzazioni. Se tale intuizione è vera allora dato che Tr(P) = Tr(Q), si potrebbe sostituire P con Q nelle Tr(P|R) ed ottenere le stesse combinazioni della versione precedente, quindi varrebbe che Tr(P|R) = Tr(Q|R) e di conseguenza P|R $\sim_t$ Q|R.

Per dimostrare ciò, si deve prima dimostrare il seguente lemma che sarà utilizzato nella dimostrazione:
Siano A e B due processi CSS, se Tr(A) = Tr(B) $\Rightarrow \forall\alpha$ Tr(A')$\subseteq$Tr($\sum\{B' | B \overset{\alpha}{\to} B'\}$)

con A $\overset{\alpha}{\to}$ A'
Cioè se i processi A e B hanno le stesse traccie allora le traccie del sotto processo di A,

A' sono incluse nell'insieme delle traccie relative ai sotto processi B', raggiunti con una transizione α dal processo B.

Si dimostra di seguito tale lemma:

Tr($\sum\{B'|B \overset{\alpha}{\to} B'\}$) = {t'|t = α.t'∈Tr(B)}, dato che Tr(A) = Tr(B)

allora posso sostituire le Tr(B) con Tr(A) quindi, {t'|t = α.t'∈Tr(A)}.
Perciò Tr(A')⊆{t'|t = α.t'∈Tr(A)} = Tr($\sum\{B'|B \overset{\alpha}{\to} B'\}$) in accordo con quanto scritto precedentemente.

Si procede con la dimostrazione Tr(P|R) = Tr(Q|R):

(⊆)

Sia t ∈Tr(P|R) ⇒ t ∈(Q|R) Per induzione su |t|:

Caso Base |t| = 0
Allora t = ε ∈Tr(P|R) ⇒ ε ∈Tr(Q|R)

Caso Induttivo |t| = n + 1

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t', quindi P|R $\overset{\alpha_1}{\to}$ X' $\overset{t'}{\to}$ ovvero viene applicata una transizione secondo la regola del parallelo arrivando in un certo processo X'; ci sono perciò tre possibilità:

- P|R ha effettuato una transizione usando la regola PAR-L:

  $$\frac{P \overset{\alpha_1}{\to} P'}{P|R \overset{\alpha_1}{\to} P'|R \overset{t'}{\to}}\ \textit{PAR-L}$$

  t = $\alpha_1.t'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva t'∈Tr(P'|R),
  si applica il lemma:
  Tr(P') ⊆ Tr($\sum\{Q'|Q \overset{\alpha_1}{\to} Q'\}$) e quindi t' ∈ Tr(P'|R) ⇒ t'∈Tr($\sum_{Q \overset{\alpha_1}{\to} Q'} (Q'|R)$)

  Di conseguenza t∈ α_1.Tr($\sum_{Q \overset{\alpha_1}{\to} Q'} (Q'|R)$) = $\bigcup_{Q \overset{\alpha_1}{\to} Q'} Tr(\alpha_1.(Q'|R))$ e quindi, dato che il processo Q|R attraverso una transizione α_1 può arrivare al processo Q'|R, si dimostra che se t∈(P|R) ⇒ t ∈(Q|R).

- P|R ha effettuato una transizione usando la regola PAR-R:

  $$\frac{R \overset{\alpha_1}{\to} R'}{P|R \overset{\alpha_1}{\to} P|R' \overset{t'}{\to}}\ \textit{PAR-R}$$

  t = $\alpha_1.t'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva t'∈Tr(P|R'),
  si applica il lemma:
  t'∈Tr(P|R') ⇒ t'∈Tr(Q|R') e quindi t∈Tr(α_1.(P|R'))⇒ t∈Tr(α_1.(Q|R')).
  Dato che il processo Q|R attraverso una transizione α_1 può arrivare al processo

Q|R', si dimostra che se t∈(P|R) ⇒ t ∈(Q|R).

- P|R ha effettuato una transizione usando la regola PAR-τ:

$$\frac{P \overset{\alpha_1}{\to} P' \qquad R \overset{\overline{\alpha_1}}{\to} R'}{P|R \overset{\tau_1}{\to} P'|R' \overset{t'}{\to}} \; PAR\text{-}\tau$$

t = $\tau_1.t'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva t'∈Tr(P'|R'),
si applica il lemma:
Tr(P') ⊆ Tr($\sum\{Q'|Q \overset{\alpha_1}{\to} Q'\}$) e quindi t'∈Tr(P'|R') ⇒ t'∈Tr($\sum_{Q \overset{\alpha_1}{\to} Q'} (Q'|R')$)

Di conseguenza t∈ τ_1.Tr($\sum_{Q \overset{\alpha_1}{\to} Q'} (Q'|R')$) $= \bigcup_{Q \overset{\alpha_1}{\to} Q'} Tr(\tau_1.(Q'|R'))$ e quindi, dato che il processo Q|R attraverso una transizione τ_1 effettua la sincronizzazione tra Q e R per arrivare al processo Q'|R', si dimostra che se t∈(P|R) ⇒ t ∈(Q|R).

(⊇)

Sia t ∈Tr(Q|R) ⇒ t ∈(P|R) Per induzione su |t|:

Caso Base |t| = 0
Allora t = ε ∈Tr(Q|R) ⇒ ε ∈Tr(P|R)

Caso Induttivo |t| = n + 1

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t', quindi Q|R $\overset{\alpha_1}{\to}$ X' $\overset{t'}{\to}$ ovvero viene applicata una transizione secondo la regola del parallelo arrivando in un processo stato X'; ci sono perciò tre possibilità:

- Q|R ha effettuato una transizione usando la regola PAR-L:

$$\frac{Q \overset{\alpha_1}{\to} Q'}{Q|R \overset{\alpha_1}{\to} Q'|R \overset{t'}{\to}} \; PAR\text{-}L$$

t = $\alpha_1.t'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva t'∈Tr(Q'|R),
si applica il lemma:
Tr(Q') ⊆ Tr($\sum\{P'|P \overset{\alpha_1}{\to} P'\}$) e quindi t' ∈ Tr(Q'|R) ⇒ t' ∈ Tr($\sum_{P \overset{\alpha_1}{\to} P'} (P'|R)$)

Di conseguenza t ∈ α_1.Tr($\sum_{P \overset{\alpha_1}{\to} P'} (P'|R)$) $= \bigcup_{P \overset{\alpha_1}{\to} Q'} Tr(\alpha_1.(P'|R))$ e quindi, dato che il processo P|R attraverso una transizione α_1 può arrivare al processo P'|R, si dimostra che se t∈(Q|R) ⇒ t ∈(P|R).

- P|R ha effettuato una transizione usando la regola PAR-R:

$$\frac{R \xrightarrow{\alpha_1} R'}{Q|R \xrightarrow{\alpha_1} Q|R' \xrightarrow{t'}} \; PAR\text{-}R$$

t = $\alpha_1.t'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva t' $\in Tr(Q|R')$,
si applica il lemma:
t'∈Tr(Q|R') ⇒ t'∈Tr(P|R') e quindi t∈Tr(α_1.(Q|R'))⇒ t∈Tr(α_1.(P|R')).
Dato che il processo P|R attraverso una transizione α_1 può arrivare al processo P|R', si dimostra che se t∈(Q|R) ⇒ t ∈(P|R).

- P|R ha effettuato una transizione usando la regola PAR-τ:

$$\frac{Q \xrightarrow{\alpha_1} Q' \qquad R \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} R'}{Q|R \xrightarrow{\tau_1} Q'|R' \xrightarrow{t'}} \; PAR\text{-}\tau$$

t = $\tau_1.t'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva t' $\in Tr(Q'|R') \Rightarrow t' \in Tr(P'|R')$,
si applica il lemma:
Tr(Q') ⊆ Tr($\sum\{P'|P \xrightarrow{\alpha_1} P'\}$) e quindi t' ∈ Tr(Q'|R') ⇒ t' ∈ Tr($\sum_{P \xrightarrow{\alpha_1} P'} (P'|R')$)

Di conseguenza t ∈ τ_1.Tr($\sum_{P \xrightarrow{\alpha_1} P'} (P'|R')) = \bigcup_{P \xrightarrow{\alpha_1} P'} Tr(\tau_1.(P'|R'))$ e quindi, dato che il processo P|R attraverso una transizione τ_1 effettua la sincronizzazione tra P e R per arrivare al processo P'|R', si dimostra che se t∈(Q|R) ⇒ t ∈(P|R).

Quindi con Tr(P) = Tr(Q), P|R $\sim_t$ Q|R come si voleva dimostrare.

0.1.1.4 Contesto restrizione C[ ] = \L

Il caso del contesto restrizione L sul processo P ha la seguente uguaglianza:
Tr(P\L) = Tr(P)\{t=...α_x...|α_x ∈L} cioè le traccie che stanno in Tr(P) non ci sono nell'insieme di restrizione definito precedentemente. Se questo è vero, dato che per ipotesi Tr(P) = Tr(Q) e quindi Tr(Q\L) = Tr(Q)\{t=...α_x...|α_x ∈L}, allora Tr(P\L) = Tr(Q\L).

Perciò si deve dimostrare che il contesto restrizione L sul processo P è uguale a
Tr(P)\{t=...α_x...|α_x ∈L}. Dimostrato questo ne consegue la veridicità di P\L $\sim_t$ Q\L.

(⊆)

Sia t ∈Tr(P\L) ⇒ t ∈Tr(P)\{t=...α_x...|α_x ∈L} Per induzione su |t|:

Caso Base |t| = 0
Allora t = ε ∈Tr(P)\{t=...α_x...|α_x ∈L}

Caso Induttivo |t| = n + 1

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t', quindi P\L $\xrightarrow{\alpha_1}$ X' $\xrightarrow{t'}$ ovvero viene applicata una transizione secondo la regola della restrizione arrivando in un certo processo X', quindi:

$$\frac{P \overset{\alpha_1}{\to} P'}{P\backslash L \overset{\alpha_1}{\to} P'\backslash L \overset{t'}{\to}} \; RES \text{ se } \alpha_1, \overline{\alpha_1} \notin \text{L}$$

t = $\alpha_1.t'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva t' ∈ Tr(P'\L), quindi $\alpha_1.t' \in \alpha_1$.Tr(P'\L)⊆ Tr(P\L). Dato che $\alpha_1, \overline{\alpha_1} \notin$ L quindi t = α.t' ∉ { t=...α_x...|α_x ∈L} allora
t ∈Tr(P)\{t =...α_x...|α_x ∈L}.

(⊇)

Sia t ∈Tr(P)\{t=...α_x...|α_x ∈L} ⇒ t ∈Tr(P\L). Per induzione su |t|:

Caso Base |t| = 0
Allora t = ε ∈Tr(P\L)

Caso Induttivo |t| = n + 1

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t', cioè t = α_1.t'. Si ha quindi una transizione P $\overset{\alpha_1}{\to}$ P', ciò è permesso dalla regola della restrizione, quindi:

$$\frac{P \overset{\alpha_1}{\to} P'}{P\backslash L \overset{\alpha_1}{\to} P'\backslash L \overset{t'}{\to}} \; RES \text{ se } \alpha_1, \overline{\alpha_1} \notin \{\text{t=...}\alpha_x\text{...}|\alpha_x \in \text{L}\}$$

Questo dimostra che P\L sa fare l'interazione α_1, perciò per ipotesi induttiva t'∈P'\L allora α_1.t' ∈Tr(P\L).

Quindi dato che Tr(P\L) = Tr(P)\{t=...α_x...|α_x ∈L} con Tr(P) = Tr(Q) allora si è dimostrato che P\L $\sim_t$ Q\L.

0.1.1.5 Contesto relabelling C[ ] = [**f**]

Nel caso del contesto relabelling sul processo P si ha che:
Data la funzione $f : Act \to Act$, le traccie di P[**f**] sono:
f(ϵ) = ϵ
f($\alpha.t$) = f(α).f(t)
Quindi voglio dimostrare che Tr(P[**f**]) = {f(t)| t ∈ Tr(P)}. Se questo è vero, dato che Tr(P) = Tr(Q) si può sostituire Tr(P) con Tr(Q) scrivendo {f(t)| t ∈ Tr(Q)} e grazie alla uguaglianza scritta precedentemente, allora Tr(P[**f**]) = Tr(Q[**f**]).

(⊆)

Sia t∈ Tr(P[**f**]) ⇒ t ∈ {f(t)| t ∈ Tr(P)}. Per induzione su |t|:

Caso Base |t| = 0
Allora t = ε ∈ {f(ε)| ε ∈ Tr(P)}

Caso Induttivo |t| = n + 1

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t', quindi P[**f**] $\stackrel{\alpha_1}{\to}$ X' $\stackrel{t'}{\to}$ ovvero viene applicata una transizione secondo la regola del relabelling arrivando in un certo processo X', quindi:

$$\frac{P \stackrel{\alpha_1}{\to} P'}{P[\mathbf{f}] \stackrel{f(\alpha_1)}{\to} P'[\mathbf{f}] \stackrel{f(t')}{\to}} \; REL$$

t = $f(\alpha_1).f(t)'$ con |t'| = n, per ipotesi induttiva si ha che f(t') ∈ {f(t')| t' ∈ Tr(P')}, allora f(α).f(t') ∈ {f(t)| t ∈ Tr(P)}.

(⊇)

Sia t∈{f(t)| t ∈ Tr(P)} ⇒ t∈Tr(P[**f**]). Per induzione su |t|:

Caso Base |t| = 0
Allora t = ε ∈Tr(P[**f**])

Caso Induttivo |t| = n + 1

t ha una prima interazione seguita poi dalla traccia t', cioè t = α_1.t'. Si ha quindi una transizione P $\stackrel{\alpha_1}{\to}$ P', ciò è permesso dalla regola del relabelling, quindi:

$$\frac{P \stackrel{\alpha_1}{\to} P'}{P[\mathbf{f}] \stackrel{f(\alpha_1)}{\to} P'[\mathbf{f}] \stackrel{f(t')}{\to}} \; REL$$

Questo dimostra che P[**f**] sa fare l'interazione α_1, perciò per ipotesi induttiva t'∈P'[**f**] allora α_1.t' ∈Tr(P[**f**]).

Quindi dato che Tr(P[**f**]) = {f(t)| t ∈ Tr(P)} con Tr(P) = Tr(Q) allora si è dimostrato che P[**f**] $\sim_t$ Q[**f**].

0.1.2 Conclusione

Si è dimostrato con i vari casi della dimostrazione precedente, che per ogni possibile contesto che può essere usato, la trace equivalence risulta essere è una congruenza per il CCS.