

# II Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die Termwerte und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

1.a)

$$T(x) := \frac{x^2 - 6x}{x - 4}$$
$$T(-2) = \frac{(-2)^2 - 6 \cdot (-2)}{(-2) - 4} = \frac{4 + 12}{-6} = \frac{16}{-6} = -\frac{2 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{-\frac{8}{3}}}$$

1.b)

$$T(x) := \frac{7x - a}{x^2 - 25}$$
$$T(-5) = \frac{7 \cdot (-5) - a}{(-5)^2 - 25} = \frac{-35 - a}{25 - 25} = \frac{-35 - a}{0} \notin \mathbb{R}$$

wir dürfen in  $\mathbb{R}$  nicht durch Null teilen.

1.c)

$$T(x) := \frac{5x(a-x)(x+3)(x-4)}{25(a-x)(x+3)(x+6)}$$
$$T(3) = \frac{\cancel{5}x(\cancel{a-x})(\cancel{x+3})(x-4)}{\cancel{5} \cdot 5(\cancel{a-x})(\cancel{x+3})(x+6)} = \frac{x(x-4)}{5(x+6)} \stackrel{x=3}{=} \frac{3(3-4)}{5(3+6)}$$
$$= \frac{3 \cdot (-1)}{5 \cdot 9} = \frac{-3 \cdot 1}{5 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{-1}{5 \cdot 3} = \underline{\underline{-\frac{1}{15}}}$$

Sonderfälle:  $T$  ist nicht definiert  
für  $a=x$ ,  $x=-3$  oder  $x=-6$

$T(3)$  ist also für  $a=3$  nicht definiert.

2. Kürzen: Welche Brüche sind im Zähler und Nenner bereits faktorisiert? Kreuzen Sie an:  
(Alle folgenden Brüche sind nicht kürzbar.)

2. a)	$\frac{7+x}{8+x}$	<input type="checkbox"/> f	$\frac{\text{Summe}}{\text{Summe}}$
2. b)	$\frac{24(7+x)}{(8+x) \cdot 13}$	<input checked="" type="checkbox"/> ✓	$\frac{\text{Produkt}}{\text{Produkt}}$
2. c)	$\frac{7x}{7+x}$	<input type="checkbox"/> f	$\frac{\text{Produkt}}{\text{Summe}}$
2. d)	$\frac{a(-1)\sqrt{x+3}}{x+3 \cdot 4b}$	<input type="checkbox"/> f	$\frac{\text{Produkt}}{\text{Summe}}$
2. e)	$\frac{x^2+1}{x-1}$	<input type="checkbox"/> f	$\frac{\text{Summe}}{\text{Differenz}}$
2. f)	$\frac{2x-3b}{3b \cdot (2x)}$	<input type="checkbox"/> f	$\frac{\text{Differenz}}{\text{Produkt}}$
2. g)	$\frac{6(4-x)}{7(x+5)^2}$	<input checked="" type="checkbox"/> ✓	$\frac{\text{Produkt}}{\text{Produkt}}$
2. h)	$\frac{x^2(a-c)}{x^2 \cdot a - c}$	<input type="checkbox"/> f	$\frac{\text{Produkt}}{\text{Differenz}}$
2. i)	$\frac{b \cdot \sqrt{a} (a^2-3)}{a^2 \sqrt{b} (a-4)^2}$	<input checked="" type="checkbox"/> ✓	$\frac{\text{Produkt}}{\text{Produkt}}$
2. j)	$\frac{8(x-4)}{-x-4}$	<input type="checkbox"/> f	$\frac{\text{Produkt}}{\text{Differenz}}$
2. k)	$\frac{8(x-4)}{(-1)(x+4)}$	<input checked="" type="checkbox"/> ✓	$\frac{\text{Produkt}}{\text{Produkt}}$

### 3. Faktorisieren Sie jeweils Zähler und Nenner

$$3. a) \quad \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 7x + 12} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$$

$$3. b) \quad \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}$$

$$3. c) \quad \frac{ac + ad + bc + bd}{x^2 - 1} = \frac{(a+b)(c+d)}{(x+1)(x-1)}$$

$$3. d) \quad \frac{xy + x + y + 1}{xy - x - y + 1} = \frac{(x+1)(y+1)}{(x-1)(y-1)}$$

$$3. e) \quad \frac{ab + ac}{ab + bc} = \frac{a(b+c)}{b(a+c)}$$

$$3. f) \quad \frac{\sqrt{2}ax^2 - \sqrt{2}ay^2}{2bxy - 2bx + 2xy - 2x} = \frac{\sqrt{2}a(x^2 - y^2)}{2x(by - b + y - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}a(x-y)(x+y)}{2x(b(y-1) + (y-1))} = \frac{\sqrt{2} \cdot a(x-y)(x+y)}{2 \cdot x(b+1)(y-1)}$$

4. Kürzen Sie so weit wie möglich. Faktorisieren Sie, wenn nötig.

Vor dem Kürzen müssen im Zähler sowie im Nenner je ein Produkt stehen!

$$4. a) \quad \frac{7ab}{14b} = \frac{7 \cdot a \cdot b}{2 \cdot 7 \cdot b} = \frac{\cancel{7} \cdot a \cdot \cancel{b}}{2 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{b}} = \underline{\underline{\frac{a}{2}}}$$

$$4. b) \quad \frac{3ab^2}{9a^2b^4} = \frac{3 \cdot a \cdot b \cdot b}{3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{b} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot b} = \underline{\underline{\frac{1}{3ab^2}}}$$

$$4. c) \quad \frac{-35r^3s^6}{-42r^4s^2} = \frac{(-1) 5 \cdot 7 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s}{(-1) 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot s \cdot s} = \frac{(-1) \cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{s} \cdot \cancel{s} \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s}{(-1) \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{s} \cdot \cancel{s}} = \underline{\underline{\frac{5 \cdot s^4}{6 \cdot r}}}$$

$$4. d) \quad \frac{ax+ay}{bx+by} = \frac{a(x+y)}{b(x+y)} = \frac{a \cdot \cancel{(x+y)}}{b \cdot \cancel{(x+y)}} = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

$$4. e) \quad \frac{192rss - 48st}{180rss - 48st} = \frac{12s(16rs - 4t)}{12s(15rs - 4t)} = \underline{\underline{\frac{16rs - 4t}{15rs - 4t}}}$$

$$4. f) \quad \frac{(3-x)(8.4+y)}{(8.4-x)(3-x)} = \frac{\cancel{(3-x)} \cdot (8.4+y)}{\cancel{(3-x)} \cdot (8.4-x)} = \underline{\underline{\frac{8.4+y}{8.4-x}}}$$

$$4. g) \quad \frac{7e - 7f}{e^2 - f^2} = \frac{7 \cdot (e-f)}{(e+f)(e-f)} = \frac{7 \cdot \cancel{(e-f)}}{(e+f) \cdot \cancel{(e-f)}} = \underline{\underline{\frac{7}{e+f}}}$$

$$4. h) \quad \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{\cancel{(a+b)}(a+b)}{\cancel{(a+b)}(a-b)} = \underline{\underline{\frac{a+b}{a-b}}}$$

$$4. i) \quad \frac{xy + 2x - y - 2}{xy - x - y + 1} = \frac{x(y+2) - 1 \cdot (y+2)}{x(y-1) - 1 \cdot (y-1)} = \frac{(x-1)(y+2)}{(x-1)(y-1)} = \underline{\underline{\frac{y+2}{y-1}}}$$

$$4. j) \quad \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 12} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-4)} = \frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{\cancel{(x+3)}(x-4)} = \underline{\underline{\frac{x-2}{x-4}}}$$

4. k)

$$\frac{a^4 - 5a^3}{a^4 - a^3 - 20a^2} = \frac{a^3(a-5)}{a^2(a^2 - a - 20)} = \frac{a^3 \cdot (a-5)}{a^2(a-5)(a+4)}$$

$$= \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot (a-5)}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} (a-5)(a+4)} = \frac{a}{a+4}$$

4. l)

$$\frac{x^2 - xy - 6y^2}{x^2 - 2xy - 8y^2} = \frac{(x+2y)(x-3y)}{(x+2y)(x-4y)} = \frac{\cancel{(x+2y)}(x-3y)}{\cancel{(x+2y)}(x-4y)} = \frac{x-3y}{x-4y}$$

4. m)

$$\frac{ab - ac}{c - b} = \frac{a(b-c)}{(c-b)} = \frac{a \cdot (b-c)}{(-1) \cdot (b-c)} = \frac{a(\cancel{b-c})}{-1 \cdot (\cancel{b-c})} = \frac{a}{-1} = \underline{\underline{-a}}$$

4. n)

$$\frac{x^3 - x^2}{1 - x^2} = \frac{x^2(x-1)}{\underbrace{(1-x)}_{(-1)(x-1)}(1+x)} = \frac{x^2(x-1)}{(-1) \cdot (x-1) \cdot (1+x)}$$

$$= \frac{x^2 \cdot \cancel{(x-1)}}{(-1) \cdot \cancel{(x-1)} \cdot (1+x)} = \frac{x^2}{-(1+x)} = \underline{\underline{\frac{-x^2}{1+x}}}$$

4. o)

$$\frac{ab - 2cd}{2abcd} = \frac{ab - 2cd}{2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d} \quad \left. \vphantom{\frac{ab - 2cd}{2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d}} \right\} \begin{array}{l} \text{Zähler und Nenner sind} \\ \text{bereits vollständig} \\ \text{faktorisiert.} \end{array}$$

4. p)

challenge

$$\frac{(a+4)^2 - (b-1)^2}{a+13 - (b+8)} = \frac{(a+4+b-1)(a+4-(b-1))}{a+13-b-8}$$

$$= \frac{(a+b+3)(a-b+5)}{(a-b+5)}$$

$$= \frac{(a+b+3) \cdot \cancel{(a-b+5)}}{1 \cdot \cancel{(a-b+5)}} = \underline{\underline{a+b+3}}$$

4. q)

$$\frac{49x^2 - 4(x+2)^2}{45x^2 - 16(x+1)}$$

$$A = 7x$$

$$B = 2(x+2)$$

$$= \frac{A^2 - B^2}{45x^2 - 16x - 16} = \frac{(A+B)(A-B)}{(9x+4)(5x-4)} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{3. Binomische F.} \\ \leftarrow \text{Zweiklummer-Ansatz} \end{array}$$

$$= \frac{(7x+2(x+2))(7x-2(x+2))}{(9x+4)(5x-4)} = \frac{(7x+2x+4)(7x-2x-4)}{(9x+4)(5x-4)}$$

$$= \frac{(9x+4)(5x-4)}{(9x+4)(5x-4)} = \underline{\underline{1}}$$

5. Erweitern Sie den Bruch auf den vorgegebenen Nenner.

5. a)

$$\begin{array}{ll} \text{Bruch} & \frac{7x-4}{ab} \\ \text{Nenner} & a^2 b^3 \end{array}$$

$$\frac{(7x-4) \cdot a \cdot b \cdot b}{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b} = \frac{(7x-4) a b^2}{a^2 b^3}$$

5. b)

$$\begin{array}{ll} \text{Bruch} & \frac{x+2}{x-2} \\ \text{Nenner} & x^2 - 4x + 4 \end{array}$$

$$\text{Nenner} \quad x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x-2)} = \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$$

6. Erweitern Sie mit (-1).

6. a)

$$\frac{1-b}{-b-3} = \frac{(-1) \cdot (1-b)}{(-1) \cdot (-b-3)} = \frac{b-1}{b+3}$$

6. b)

$$\frac{-5(-a+1)}{-s} = \frac{\overbrace{(-1) \cdot (-5)}^5 \cdot (-a+1)}{(-1) \cdot (-s)} = \frac{5(-a+1)}{s}$$

## 7. Machen Sie gleichnamig

7. a)

$$\frac{7a}{33} \quad \text{und} \quad \frac{2b}{44}$$

↓

↓

$$\frac{7 \cdot a}{3 \cdot 11}$$

$$\frac{\cancel{2} \cdot b}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 11}$$

→ Hauptnenner  $3 \cdot 11 \cdot 2 = 66$

$$\frac{7 \cdot a \cdot 2}{3 \cdot 11 \cdot 2}$$

$$\frac{b \cdot 3}{2 \cdot 11 \cdot 3}$$

$$\frac{14a}{66}$$

und

$$\frac{3b}{66}$$

7. b)

$$\frac{3}{a+1}$$

und

$$\frac{4}{2a-4}$$

kürzen:  $2a-4 = 2(a-2)$

$$\frac{3}{a+1}$$

und

$$\frac{2}{a-2}$$

→ Hauptnenner  $(a+1) \cdot (a-2)$

$$\frac{3 \cdot (a-2)}{(a+1) \cdot (a-2)}$$

und

$$\frac{2 \cdot (a+1)}{(a-2) \cdot (a+1)}$$

ausmultipliziert:

$$\frac{3a-6}{a^2-a-2}$$

und

$$\frac{2a+2}{a^2-a-2}$$



# Addition/Subtraktion

8. Addieren bzw. subtrahieren Sie die folgenden Bruchterme

$$8. a) \quad \frac{7}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 4 - 3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{28 - 9}{12} = \underline{\underline{\frac{19}{12}}}$$

$$8. b) \quad \frac{1}{4} + \frac{a}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{a \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3 + 4a}{3 \cdot 4} = \underline{\underline{\frac{3 + 4a}{12}}}$$

$$8. c) \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{x}{5} \quad \text{Hauptnenner} = 60$$

$$= \frac{1 \cdot 20}{3 \cdot 20} - \frac{1 \cdot 5}{12 \cdot 5} + \frac{x \cdot 12}{5 \cdot 12}$$

$$= \frac{20 - 5 + 12x}{5 \cdot 12} = \frac{15 + 12x}{60} = \frac{3(5 + 4x)}{3 \cdot 20} = \underline{\underline{\frac{5 + 4x}{20}}}$$

$$8. d) \quad \frac{7x}{33} - \frac{12}{22} + \frac{2a}{55a} = \frac{7x}{3 \cdot 11} - \frac{6}{11} + \frac{2}{5 \cdot 11} =$$

(Note: pink arrows indicate simplification of 12/22 to 6/11 and 2a/55a to 2/5)

$$= \frac{7x \cdot 5}{3 \cdot 11 \cdot 5} - \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{11 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 11 \cdot 3}$$

$$= \frac{(7x \cdot 5) - (6 \cdot 3 \cdot 5) + (2 \cdot 3)}{3 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{35x - 90 + 6}{165} = \underline{\underline{\frac{35x - 84}{165}}}$$

$$8. e) \quad \frac{a+2b}{a} - \frac{a-2b}{a} = \frac{(a+2b) - (a-2b)}{a} = \frac{a+2b-a+2b}{a} = \underline{\underline{\frac{4b}{a}}}$$

$$8. f) \quad \frac{4x}{5} + \frac{9x}{13} = \overset{\frac{52}{65} \text{ (TR)}}{\left(\frac{4}{5} + \frac{9}{13}\right)} \cdot x = \underline{\underline{\frac{52}{65} \cdot x}}$$

$$8. g) \quad \frac{5a}{b^2} - \frac{-a}{2b} = \frac{5a \cdot 2}{b^2 \cdot 2} - \frac{-a \cdot b}{2b \cdot b} = \frac{5 \cdot 2 \cdot a - (-a) \cdot b}{2b^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{10a + ab}{2b^2}}}$$

$$\begin{aligned}
 8. h) \quad 7 - \frac{2a-3}{3} &= \frac{7 \cdot 3}{3} - \frac{2a-3}{3} = \frac{(7 \cdot 3) - (2a-3)}{3} \\
 &= \frac{21 - 2a + 3}{3} = \underline{\underline{\frac{24 - 2a}{3}}}
 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 8. i) \quad x+2 - \frac{3x+x^2}{x} &= x+2 - \frac{x(3+x)}{x} \\
 &= x+2 - \frac{\cancel{x}(3+x)}{1 \cdot \cancel{x}} \\
 &= x+2 - (3+x) = x+2-3-x = \underline{\underline{-1}}
 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 8. j) \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} &= \frac{1 \cdot (b-a)}{a \cdot (b-a)} - \frac{1 \cdot a}{(b-a) \cdot a} \\
 &= \frac{b-a}{a(b-a)} - \frac{a}{a(b-a)} = \underline{\underline{\frac{b-2a}{a(b-a)}}}
 \end{aligned}$$

8. k)

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \\
 &= \frac{a \cdot y \cdot z}{x \cdot y \cdot z} + \frac{b \cdot x \cdot z}{y \cdot x \cdot z} + \frac{c \cdot x \cdot y}{z \cdot x \cdot y} \\
 &= \frac{axy + bxz + cxy}{xyz}
 \end{aligned}$$


---

8. l)

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{5x-6} - \frac{b-2a}{12-10x} &= \frac{2a}{2(5x-6)} - \frac{2a-b}{2(5x-6)} \\
 &= \frac{2a-2a+b}{2(5x-6)} = \frac{b}{2(5x-6)}
 \end{aligned}$$


---

8. m)

$$\begin{aligned}
 x - \frac{x^3-5}{x^2-5} &= \frac{x \cdot (x^2-5)}{x^2-5} - \frac{x^3-5}{x^2-5} \\
 &= \frac{(x^3-5x) - (x^3-5)}{x^2-5} \\
 &= \frac{x^3-5x-x^3+5}{x^2-5} = \frac{-5x+5}{x^2-5} \\
 &= \frac{5(-x+1)}{x^2-5}
 \end{aligned}$$

8. n)

$$\frac{a+3b}{a^2+6ab+9b^2} - \frac{a-b}{5a+15b}$$

≠ MTA S. 51

$$= \frac{a+3b}{(a+3b)(a+3b)} - \frac{a-b}{5(a+3b)}$$

Aufg.  
24. a)

$$= \frac{1 \cdot (a+3b)}{(a+3b)(a+3b)} - \frac{a-b}{5(a+3b)}$$

$$= \frac{1 \cdot 5}{(a+3b) \cdot 5} - \frac{a-b}{5(a+3b)}$$

$$= \frac{5 - (a-b)}{5(a+3b)} = \frac{5-a+b}{5(a+3b)}$$

8. o)

$$\frac{m^2}{m-1} + \frac{6m^2}{12m} = \frac{m^2}{m-1} + \frac{6 \cdot m \cdot m}{2 \cdot 6 \cdot m}$$

$$= \frac{m^2}{m-1} + \frac{6 \cdot m \cdot m}{2 \cdot 6 \cdot m}$$

$$= \frac{m^2 \cdot 2}{(m-1) \cdot 2} + \frac{m \cdot (m-1)}{2 \cdot (m-1)}$$

$$= \frac{2m^2 + m(m-1)}{2(m-1)} = \frac{2m^2 + m^2 - m}{2(m-1)}$$

$$= \frac{3m^2 - m}{2(m-1)} = \frac{m(3m-1)}{2(m-1)}$$

8. p)

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{x} - \frac{3}{10} - \frac{x}{15} &= \frac{5 \cdot 60}{x \cdot 60} - \frac{3 \cdot 6x}{10 \cdot 6x} - \frac{x \cdot 4x}{15 \cdot 4x} \\
 &= \frac{300}{60x} - \frac{18x}{60x} - \frac{4x^2}{60x} \\
 &= \frac{300 - 18x - 4x^2}{60x} \\
 &= \frac{2(150 - 9x - 2x^2)}{2 \cdot 30x} \\
 &= \frac{150 - 9x - 2x^2}{30x}
 \end{aligned}$$

8. q)

$$\begin{aligned}
 &\frac{a+6}{a^2+5a-14} + \frac{3-a}{a^2-4a+4} \\
 &= \frac{a+6}{(a-2)(a+7)} + \frac{3-a}{(a-2)(a-2)} = \\
 &= \frac{(a+6)(a-2)}{(a-2)(a+7)(a-2)} + \frac{(3-a) \cdot (a+7)}{(a-2)(a-2)(a+7)} \\
 &= \frac{(a+6)(a-2) + (3-a)(a+7)}{(a-2)^2(a+7)} \\
 &= \frac{\cancel{a^2} + 4a - 12 + 3a + 21 - \cancel{a^2} - 7a}{(a-2)^2(a+7)} \\
 &= \frac{9}{(a-2)^2(a+7)}
 \end{aligned}$$

8.r)

$$\begin{aligned}
\frac{2e-f}{12e^2+16ef} - \frac{1.5}{9e+12f} &= \frac{2e-f}{4e(3e+4f)} - \frac{1.5}{3(3e+4f)} \\
&= \frac{2e-f}{4e(3e+4f)} - \frac{\cancel{1.5}}{\cancel{3}(3e+4f)} \\
&= \frac{2e-f}{4e(3e+4f)} - \frac{1}{2(3e+4f)} \\
&= \frac{2e-f}{4e(3e+4f)} - \frac{1 \cdot 2}{2(3e+4f)} \cdot 2 \\
&= \frac{2e-f}{4e(3e+4f)} - \frac{2}{4(3e+4f)} \\
&= \frac{2e-f-2}{4(3e+4f)}
\end{aligned}$$

8.s)

$$\frac{\alpha}{2\alpha-3\beta} + \frac{\beta}{3\beta-2\alpha} - \frac{\alpha\beta}{4\alpha^2-9\beta^2}$$

Einzelbrüche  
faktorisieren

$$\frac{\alpha}{2\alpha-3\beta} + \frac{\beta}{3\beta-2\alpha} - \frac{\alpha\beta}{(2\alpha-3\beta)(2\alpha+3\beta)}$$

$$\frac{\alpha(2\alpha+3\beta)}{HN} + \frac{\beta(2\alpha+3\beta)}{-HN} - \frac{\alpha\beta}{HN}$$

Gleichnamig  
 $HN = (2\alpha-3\beta)(2\alpha+3\beta)$   
 $-HN = (3\beta-2\alpha)(2\alpha+3\beta)$ 

$$= \frac{\alpha(2\alpha+3\beta)}{HN} - \frac{\beta(2\alpha+3\beta)}{HN} - \frac{\alpha\beta}{HN} = \frac{2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta(2\alpha+3\beta)-\alpha\beta}{HN}$$

$$= \frac{2\alpha^2+3\alpha\beta-2\alpha\beta-3\beta^2-\alpha\beta}{HN} = \frac{2\alpha^2-3\beta^2}{HN}$$

$$= \frac{2\alpha^2-3\beta^2}{(2\alpha-3\beta)(2\alpha+3\beta)}$$

# Multiplikation

9. Multiplizieren Sie die Bruchterme

9. a)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c-a}{a^2} = \frac{a(c-a)}{b \cdot a^2} = \frac{\cancel{a} \cdot (c-a)}{b \cdot \cancel{a} \cdot a} = \frac{c-a}{\underline{\underline{ab}}}$$

9. b)

$$m \cdot \frac{n}{-m} = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{-m} = \frac{m \cdot n}{-m} = \frac{m \cdot n}{(-1) \cdot m} = \frac{n}{-1} = \underline{\underline{-n}}$$

9. c)

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{6x^3-18x^2} \cdot (-3x^2) &= \frac{(x-3) \cdot (-3x^2)}{6x^2(x-3) \cdot 1} \\ &= \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (-1) \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{x^2}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{x^2} \cdot (x-3) \cdot 1} \\ &= \frac{-1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

9. d)

$$\begin{aligned} (a-b) \cdot \frac{2a}{(b-a)} &= \frac{(a-b) \cdot 2 \cdot a}{(b-a)} = \frac{(-1) \cdot \cancel{(b-a)} \cdot 2 \cdot a}{(\cancel{b-a}) \cdot 1} \\ &= (-1) \cdot 2 \cdot a = \underline{\underline{-2a}} \end{aligned}$$

9. e)

$$\begin{aligned} \frac{-xy}{4x-4y} \cdot (16y-16x) &= \frac{-x \cdot y \cdot (16y-16x)}{4x-4y} \\ &= \frac{-x \cdot y \cdot 16 \cdot (y-x)}{4(x-y)} \\ &= \frac{-x \cdot y \cdot 16 \cdot (-1)(x-y)}{4 \cdot (x-y)} \\ &= \frac{-x \cdot y \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot (-1) \cdot \cancel{(x-y)}}{\cancel{4} \cdot (x-y)} \\ &= -x \cdot y \cdot 4 \cdot (-1) = \underline{\underline{4xy}} \end{aligned}$$

9.f)

$$\begin{aligned}
 & \frac{3x - 3y}{2z} \cdot \frac{4z^2 + 2z}{2x^2 - 2y^2} = \frac{3 \cdot (x - y)}{2 \cdot z} \cdot \frac{2z(2z + 1)}{2(x^2 - y^2)} \\
 & = \frac{3 \cdot (x - y) \cdot 2 \cdot z(2z + 1)}{2 \cdot z \cdot 2 \cdot (x^2 - y^2)} \\
 & = \frac{3 \cdot (x - y) \cdot 2 \cdot z(2z + 1)}{2 \cdot z \cdot 2 \cdot (x + y)(x - y)} \\
 & = \frac{3 \cdot \cancel{(x - y)} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{z}(2z + 1)}{\cancel{2} \cdot \cancel{z} \cdot 2 \cdot (x + y) \cancel{(x - y)}} \\
 & = \frac{3 \cdot (2z + 1)}{2 \cdot (x + y)}
 \end{aligned}$$



# Division

## 10. Dividieren Sie durch Brüche

10. a)

$$6 : \frac{2}{x} = 6 \cdot \frac{x}{2} = \frac{6x}{2} = \underline{\underline{3x}}$$

10. b)

$$m^2 : \frac{4}{m} = m^2 \cdot \frac{m}{4} = \frac{m^2 \cdot m}{4} = \underline{\underline{\frac{m^3}{4}}}$$

10. c)

$$\begin{aligned} \frac{27x^2y^3}{5z^2} : 81x^3y^4 &= \frac{27x^2y^3}{5 \cdot z^2 \cdot 81 \cdot x^3y^4} \\ &= \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}{5 \cdot z^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y} \\ &= \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}}{5 \cdot z^2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot y \cdot y} = \underline{\underline{\frac{1}{5xyz^2}}} \end{aligned}$$

10. d)

$$\frac{-a}{-b} : \frac{-b}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{-b} = \frac{a \cdot c}{-b^2} = \underline{\underline{-\frac{ac}{b^2}}}$$

10. e)

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + 2ab}{4a^2 - 4ab + b^2} : \frac{3ab + 6b^2}{2a^2 - 2a - ab + b} \\ &= \frac{a(a+2b)}{(2a-b)(2a-b)} : \frac{3b(a+2b)}{\underbrace{2a(a-1) - b(a-1)}_{(2a-b)(a-1)}} \\ &= \frac{a(a+2b)}{(2a-b)(2a-b)} \cdot \frac{(2a-b)(a-1)}{3 \cdot b(a+2b)} \\ &= \frac{\cancel{a(a+2b)} \cdot \cancel{(2a-b)}(a-1)}{(2a-b)\cancel{(2a-b)} \cdot 3 \cdot b \cdot \cancel{(a+2b)}} = \underline{\underline{\frac{a(a-1)}{3b(2a-b)}}} \end{aligned}$$

# Doppelbrüche

11. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$11. a) \quad \frac{\frac{a}{2b}}{\frac{2a}{3b}} = \frac{a}{2b} : \frac{2a}{3b} = \frac{a}{2b} \cdot \frac{3b}{2a} = \frac{3 \cdot a \cdot b}{4 \cdot a \cdot b} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$11. b) \quad \frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{g}} = 1 : \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) = 1 : \left( \frac{g}{fg} + \frac{f}{fg} \right) \\ = 1 : \left( \frac{g+f}{fg} \right) = 1 \cdot \frac{fg}{g+f} = \underline{\underline{\frac{fg}{g+f}}}$$

$$11. c) \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = 1 : \left( 1 - \frac{1}{a} \right) = 1 : \left( \frac{a}{a} - \frac{1}{a} \right) \\ = 1 : \left( \frac{a-1}{a} \right) = 1 \cdot \frac{a}{a-1} = \underline{\underline{\frac{a}{a-1}}}$$

$$11. d) \quad \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = \left( x + \frac{1}{2} \right) : \left( x - \frac{1}{2} \right) \\ = \left( \frac{2x}{2} + \frac{1}{2} \right) : \left( \frac{2x}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ = \frac{2x+1}{2} : \frac{2x-1}{2} = \frac{2x+1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{2x-1} \\ = \underline{\underline{\frac{2x+1}{2x-1}}}$$

alternativer

$$\text{Lösungsweg:} \quad \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \left( x + \frac{1}{2} \right)}{2 \cdot \left( x - \frac{1}{2} \right)} = \underline{\underline{\frac{2x+1}{2x-1}}}$$

# Gemischte Aufgaben

12. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

12. a)

$$2xy \left( \frac{x}{2y} - \frac{y}{2x} \right)$$

$$= 2xy \cdot \left( \frac{\overset{x}{x} \cdot \overset{x}{x}}{\underset{x}{2y} \cdot \underset{x}{x}} - \frac{\overset{y}{y} \cdot \overset{y}{y}}{\underset{y}{2x} \cdot \underset{y}{y}} \right)$$

$$= 2xy \cdot \left( \frac{x^2 - y^2}{2xy} \right) = \frac{2xy \cdot (x^2 - y^2)}{2xy}$$

$$= \underline{\underline{x^2 - y^2}} = \underline{\underline{(x + y)(x - y)}}$$

12. b)

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{a}{b} \right) : \frac{7}{ab} = \left( \frac{b}{ab} + \frac{a^2}{ab} \right) \cdot \frac{ab}{7} = \frac{b + a^2}{ab} \cdot \frac{ab}{7}$$

$$= \frac{(b + a^2) : \cancel{ab}}{\cancel{ab} \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{b + a^2}{7}}}$$