Aufgaben zu Wachstum und Zerfall

Version 1.1 (Feb. 2024)

1 Wachstum und Zerfall

1.1 Voraussetzung

1. [FctWZ] **Welche Art von Wachstum?**

Entscheiden Sie bei den folgenden Datenreihen, um welche Art von Wachstum es sich handelt (linear, exponentiell, quadratisch)?

Tipp: Skizzieren Sie dazu entsprechende Punkte im Koordinatensystem!

1. [FctWZ]

1. a) 5, 10, 15, 20, 25, ... linear

1. b) 2, 4, 6, 8, 10, linear

1. c) 3, 6, 12, 24, 48, ... exponentiell

1. d) 1.8, 5.4, 9, 12.6, 16.2, 19.8, 23.4, 27, ... linear

1. e) 2.3, 3.45, 5.18, 7.76, 11.6, 17.5, 26.2, ... exponentiell

1. f) 1.5, 6.25, 12.25, 20.25, 30.25, 42.25, 56.25, ... quadratisch (Parabel)

2. [FctWZ] **Rate vs. Faktor**

Berechnen Sie den Wachstumsfaktor aus der Wachstumsrate bzw. umgekehrt die Wachstumsrate aus dem Wachstumsfaktor.

Wachstums**rate**	Wachstums**faktor**
+4%	1.04
-9%	0.91
-25%	0.75
100%	2
200%	3
-100%	0

3. [FctWZ] **Skizzieren**

Skizzieren Sie die Graphen zu den folgenden Funktionen. Die y-Achse zeigt wie immer den Funktionswert $f(x)$ bzw. $f(t)$ an. Die x-Achse wird bei Funktionen, welche von der Zeit abhängen mit t bezeichnet.

(Mit e wird die Eulersche Konstante $2.71828182846\ldots$ bezeichnet.)

3. [FctWZ]

3. a) $f: y = 1.2^x$

3. b) $f(x) = 2^{0.263 \cdot x}$

3. c) $t \mapsto 0.8^t$

3. d) $y = 3^{\frac{-t}{4.923}}$

3. e) $x \mapsto \mathrm{e}^{0.1823x}$

Was fällt Ihnen dabei auf? Welche der obigen Funktionen gehören zur Wachstumsrate von -20%? Welche der obigen Funktionen gehören zum Wachstumsfaktor 1.2?

1.2 Einfache Wachstumsprozesse

Startwert ist hier eine Einheit.

4. [FctWZ] **Pilz**

An einer Kellerwand wächst eine Schimmelpilzart, deren Fläche exponentiell zunehme. Am Anfang ist 1 m^2 der Wand mit dem Pilz bedeckt. Jeden Tag nimmt die Fläche um Faktor 1.25 zu.

4. [FctWZ]

4. a) Welche Fläche ist nach 3 Tagen bedeckt? $1.25^3 \approx 1.9531\text{m}^2$

4. b) Welche Fläche ist nach n Tagen bedeckt? 1.25^nm^2

4. c) Nach wie vielen Tagen sind 5 m^2 der Wand mit dem Pilz bedeckt? $n = \log_{1.25}(5) \approx 7.213$ Tage.

5. [FctWZ] **Karton**

Ein Karton von einem Millimeter (mm) Dicke wird halbiert und aufeinandergelegt, sodass ein Karton der Dicke 2 mm entsteht.

Dieses Verfahren wird nun wiederholt und nach einer zweiten Verdopplung hat der Karton eine Dicke von 4 mm.

5. [FctWZ]

5. a) Wie dick ist der Karton nach einer weiteren Verdopplung, also nach der 3. Verdopplung der Dicke? Der Karton wird nun 8mm dick. 8 mm = 4 mm + 4 mm = 2·4 mm

5. b) Wie dick ist der Karton nach fünf Verdopplungen? Der Karton wird 2^5 mm = 32 mm dick.

5. c) Wie dick ist der Karton nach 7 Verdopplungen? Der Karton wird nun 2^7 = 128 mm dick.

5. d) Wie dick ist der Karton nach n Verdopplungen ($n \in \mathbb{N}$)? Der Karton wird nun 2^n mm dick, wobei wir das n natürlich beliebeg wählen können.

5. e) Nach wie vielen Verdopplungen ist der Karton 1 m dick? Hier kann man a) auspropieren und kommt bei 10 Verdopplungen auf 1.024 m. Natürlich geht das auch mit einer Formel:

$$2^n = 1000$$

Logarithmieren

$$n = \log_2(1000) \approx 9.966$$

Das heißt, so gut wie exakt ein Meter dick wäre es bei 9.966 Verdopplungen. Dies ist aber technisch nicht möglich, somit müssen wir auf die nächste Verdopplung aufrunden und erhalten auch 10 Verdopplungen.

5. f) Nach wie vielen Verdopplungen wäre der Karton bereits über 100 m hoch, also mind. so hoch wie das Sulzer Gebäude? Wie wiel höher als des Gebäude von 100 m würde der Karton dadurch?

$$2^n = 100\,000$$

$$n = \log_2(100\,000) \approx 16.61$$

Somit brauche ich 17 Verdopplungen. Da $2^{17} = 131072$ ergibt, wäre der Kartonstapel bereits 31.072 m höher als das Gebäude.

6. [FctWZ] **Sparen**

Max spart auf eine neue Spielekonsole. Die Mutter will Max dabei unterstützen und vor allem will sie, das Max lernt zu sparen. Sie schlägt ihm daher zwei Spar-Varianten vor.

Bei Variante A erhält Max Anfangs der ersten Woche $5.-$ € und danach jede Folgewoche $5.-$ € mehr als in der Vorangehenden Woche. Also 1. Woche $5.-$; 2. Woche $10.-$; 3. Woche $15.-$ € etc.

Bei Variante B erhält er Anfangs ersten Woche ebenfalls $5.-$ €, jedoch in jeder Folgewoche 40% mehr als in der vorangehenden Woche. Also in der 1. Woche auch $5.-$, in der 2. Woche bereits 7.- € und in der 3. Woche 9.80 € etc.

6. [FctWZ]

6. a) In der wie vielten Woche erhielte Max zum ersten Mal mehr mit Variante B als mit Variante A? (Hier ist nicht das kumulierte Vermögen, sondern das «Einkommen» gefragt.) In Woche 7 erhält er mit Variante A 35.- €, während er mit Variante B in der 7. Woche bereits 37.65 € erhält.

6. b) In welchem Woche überholt das angesparte Vermögen (= Summe aller Spargelder) durch exponentielles Einkommenswachstum (Varianten B) das Vermögen, das durch die Variante A angespart wurde? In Woche 9 hat er mit Variante A total 225.- € angespart; wohingegen mit Variante B in Woche 9 bereits 245.76 €angespart wurden.

6. c) Wie sieht das angesparte Vermögen bei Variante A nach 12 Wochen aus? In der 12. Woche erhält er 60.- €, was sich auf 390.- € kumuliert.

6. d) Wie sieht das angesparte Vermögen bei Variante B nach 12 Wochen aus? In der 12. Woche erhält er 202.48 €, was sich auf 696.17 € kumuliert.

1.3 Zerfall

Nicht immer ist die Wachstumsrate größer als 1

7. [FctWZ] **Wert des Autos**

Um wie viel Prozent hat der Wert eines Autos jährlich verloren, wenn der Wert nach 4 Jahren um 60 % gesunken ist?

$$100 - 60 = 0.4$$

somit

$$0.4 = a^4$$
$$a = \sqrt[4]{0.4} \approx 79.527\%$$

Dies entspricht einer jährlichen Abnahme von.

$$1 - 79.527\% \approx 0.2047$$

Also eine Prozentuale Abnahme von 20.47%.

8. [FctWZ] **Grogg**

In der Küche der Berghütte steht eine Flasche Grogg, die genau einen Liter des heiß begehrten Getränks enthält. Abgemacht war unter den Bergleuten, dass der Grogg nach der harten Bergtour gerecht aufgeteilt werde.

Nun ist es aber so, dass die Personen alle nacheinander in die Hütte kommen und alle denken sich, ich nehme nun nur ein Schlückchen vorab; nur 8%, nur so wenig also, dass es nicht auffällt.

8. [FctWZ]

8. a) Die ersten vier Personen sind Andrea, gefolgt von Bert, dann Clau und schließlich Dani. Wie viel Grog ist nach der 4. Person noch in der Flasche? Der Abnahmefaktor beträgt $1 - 0.08 = 0.92 = 92\%$. Nach der 4. Flasche ist 0.92^4 Liter also noch 7.16 dl Grog in der Flasche.

8. b) Geben Sie an, wie viel Grog sich nach der 8. Person noch in der Flasche befindet. $0.92^8 \approx 0.513$, also ca. 5.13 dl.

8. c) Geben Sie eine Formel an, die angibt wie viel Grog nach der n-ten Person in der Flasche ist. $f(n) = 0.92^n$

8. d) Weitere Personen erreichen die Hütte. Nach total wie vielen Personen ist nur ein ein Rest von 2dl in der Flasche?

$$0.2 = 0.92^n$$

Somit erhalten wir durch logarithmieren:

$$n = log_{0.92}(0.2) \approx 19.30$$

Somit ist nach der 19. Person noch etwas mehr und nach der 20. Person schon etwas weniger als 2 dl in der Flasche.

9. [FctWZ] **Wohnwagen** Ein Wohnwagen hat innerhalb von fünf Jahren 75% an Wert verloren.

9. [FctWZ]

9. a) Geben Sie eine Formel für den Wert des Wohnwagens in Abhängigkeit der Zeit an.

9. b) Wie viel Wert (in %) verlor der Wohnwagen jährlich?

$$f(t) = a^t$$

mit

$$0.25 = a^5$$

Somit ist

$$a = \sqrt[5]{0.25} \approx 0.757858$$

$$f(t) = \left(\sqrt[5]{0.25}\right)^t \approx 0.757858^t$$

9. c) Nach wie vielen Jahren (ab Beginn) wird der Wohnwagen noch 10% seines ursprünglichen Wertes haben?

Der Wert nach 5 Jahren beträgt noch 25%. Wenn die Formel $y = a^t$ verwendet wird mit

y=Wert nach t Jahren.

t=Anzahl Jahre

a=Abnahmefaktor pro Jahr

so können wir alles bekannte einsetzen:

$$y = a^t$$
$$25\% = a^5$$
$$0.25 = a^5$$
$$\sqrt[5]{0.25} = a$$

Daraus ergibt sich der Jährliche Faktor $a \approx 0.757858$. Somit verbleiben Jedes Jahr ca. 75.79% des Wertes vorhanden, was einer Abnahme von 1-0.7578... , also 24.21% entspricht.

1.4 Startwerte

Andere Startwerte als eine Einheit.

10. [FctWZ] **Gummiball**

Ein Gummiball wird fallen gelassen. Der Ball springt jeweils 72% der Fallhöhe wieder zurück.

Anfänglich wird der Ball aus 1.7m Höhe fallen gelassen

10. [FctWZ]

10. a) Wie hoch springt der Ball nach dem 3. Aufprall wieder zurück? $1.7 \cdot 0.72^3 \approx 63.45$cm

10. b) Wie hoch springt der Ball nach dem n. Aufprall wieder hoch? $1.7 \cdot 0.72^n$

10. c) Nach dem wievielten Aufprall springt der Ball noch 10 cm hoch? $1.7 \cdot 0.72^n = 0.1 \Longrightarrow n = \log_{0.72}\left(\frac{0.1}{1.7}\right) \approx 8.6$. Das heißt: Nach 8 Sprüngen ist der Ball noch höher als 10 cm; nach dem 9. Sprung hingegen weniger als 10 cm.

11. [FctWZ] **Neophytenplage**

Eine neu eingeschleppte Brombeerenart vermehrt sich im Wald exponentiell.

Anfänglich werden 82 Pflanzen gezählt. Ein Jahr später sind es bereits 102 Pflanzen.

11. [FctWZ]

11. a) Wie groß ist der jährliche Zunahmefaktor? $a = \frac{102}{82} = 1.\overline{24390}$

11. b) Wie groß ist die jährliche Zuwachsrate? $p = \frac{102}{82} - 1 \approx 24.39\%$

11. c) Wie viele Brombeerpflanzen sind nach fünf Jahren zu erwarten? $82 \cdot a^5 \approx 244$ Pflanzen

11. d) Wie viele Brombeerpflanzen sind nach n Jahren zu erwarten? $82 \cdot a^n \approx 82 \cdot 1.2349^N$ Pflanzen

11. e) Nach wie vielen Jahren werden 1000 Pflanzen erwartet, wenn sich die Pflanzenart weiterhin ungehindert ausbreiten kann? $82 \cdot a^n = 1000 \Longrightarrow n = \log_a(\frac{1000}{82}) \approx 11.46$

12. [FctWZ] **Tierpopulation**

Eine Tierpopulation von fünf tausend Stück nimmt wegen verändernder Klima- und Umweltbedingungen jährlich um sechs Prozent ab.

12. [FctWZ]

12. a) Skizzieren Sie die Population über die nächsten 30 Jahre. Graph

12. b) Wie lautet eine Funktionsgleichung, welche die Tierpopulation in Abhängigkeit vom Jahr angibt? $y = 5\,000 \cdot 0.94^t$

12. c) Um wie viele Tiere hat die Population nach 15 Jahren abgenommen?

$$y = 5\,000 \cdot 0.94^{15} = 1976 \text{ Tiere sind noch übrig}$$

d. h.:

$$5000 - 1976 = 3024 \text{ Tiere sind «verschwunden»}$$

12. d) Wann wird die Population auf eine kritische «Größe» von 100 Individuen geschrumpft sein? $y = 100 = 5\,000 \cdot 0.94^t$

$$\frac{100}{5\,000} = 0.94^t$$

$$t = \log_{0.94}\left(\frac{100}{5\,000}\right) \approx 63 \text{ Jahre}$$

13. [FctWZ] **Einwohnerzahl**

In Winterthur waren im Jahr 1997 89 850 Einwohner registriert. Im Jahr 2013 waren es bereits 107 799 Einwohner (Quelle: `stadt.winterthur.ch` Juli 2022).

Zum Glück nimmt die Bevölkerung hier nicht exponentiell zu. Doch für diese Aufgabenstellung dürfen Sie das *worst case*-Szenario von exponentiellem Wachstum annehmen.

13. [FctWZ]

13. a) Um wie viel % nimmt die Bevölkerung jährlich zu? $a = \frac{107\,799}{89\,850} \approx 1.199766$ ergo Zunahmefaktor = 1,.199766 in 16 Jahren. Pro Jahr: $a^{\frac{1}{16}}$. Zunahme also 1.145% jährlich.

13. b) Was prognostizieren Sie bei exponentiellem Wachstum fürs Jahr 2040? $= 8950 \cdot a^{\frac{43}{16}} \approx 146\,585$ Einwohner

13. c) In wie vielen Jahren nimmt die Bevölkerung jeweils um 25% zu? $1.25 = a^{\frac{t}{16}}$ ergo $t = 16 \cdot \log_a(1.25) \approx 19.60$. Alle ca. 20 Jahre nimmt die Bevölkerung um 25% zu.

14. [FctWZ] **Licht im Wasser**

In einem Wasserbecken nimmt die Lichtintensität pro Meter auf 24% ab. Dies spielt keine Rolle, ob horizontal oder vertikal gemessen wird.

14. [FctWZ]

14. a) Um wie viel nimmt die Intensität pro Meter ab? Wenn etwas **auf** 24% abnimmt, so nimmt es **um** 76% ab.

14. b) Skizzieren Sie die Intensität im Koordinatensystem wie folgt: x-Achse = Eindringtiefe in Metern. Die Maßeinheit der Lichtintensität wird in Watt pro Quadratmetern gemessen (W/m^2); dies hat für die Aufgabe hier jedoch keine Relevanz. y-Achse = Lichtintensität in %. (Gestartet bei 100%) Graph

14. c) Wie lautet eine Funktionsvorschrift von m $\mapsto \%$? $x \mapsto 100\% \cdot 0.24^x$

14. d) Wie viel Prozent der ursprünglichen Lichtintensität sind nach 5 m noch übrig? $0.24^5 \approx 0.07963\%$

14. e) In wie vielen Metern ist noch 1% der Lichtintensität übrig? $x = \log_{0.24}(0.01) \approx 3.22[\text{m}]$

15. [FctWZ] **Federpendel**

Ein Federpendel wird in Schwingung gebracht. Wegen diversen physikalischen Einflüssen (Reibung, ...) nimmt die Amplitude exponentiell ab.

Nach einer Minute beträgt die Amplitude 5.3 cm und nach 4 Minuten nur noch 2.6 cm.

15. [FctWZ]

15. a) Machen Sie eine Skizze. Graph

15. b) Geben Sie die Funktionsgleichung der Amplitude in Abhängigkeit der Zeit an. ... Lösung noch ausstehend ...

15. c) Wie war die Amplitude zu Beginn ($t = 0$)? ... Lösung noch ausstehend ...

15. d) Wie groß wird die Amplitude nach 10 Minuten noch sein? ... Lösung noch ausstehend ...

16. [FctWZ] **Luftdruck**

Der Atmosphärische Luftdruck nimmt ab, je weiter wir uns von der Meereshöhe entfernen. Der Druck wird in hPa = Hectopascal gemessen. Ein Pa ist gleich $1\text{N}/\text{m}^2$, also ein Pascal ist die Kraft von einem Newton pro Quadratmeter.

Auf Meereshöhe ist der Luftdruck ca. 1013 hPa und nimmt ca. 13% pro km Höhenunterschied ab.

16. [FctWZ]

16. a) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen, der den Luftdruck (y-Achse) in Abhängigkeit der Höhe über Meer (x-Achse) angibt.

Graph

16. b) Wie lautet ein möglicher Funktionsterm, der die Abhängigkeit Luftdruck (hPa) von Meereshöhe (in Metern) angibt?

$y = 1013 \cdot 0.87^{\frac{x}{1000}}$

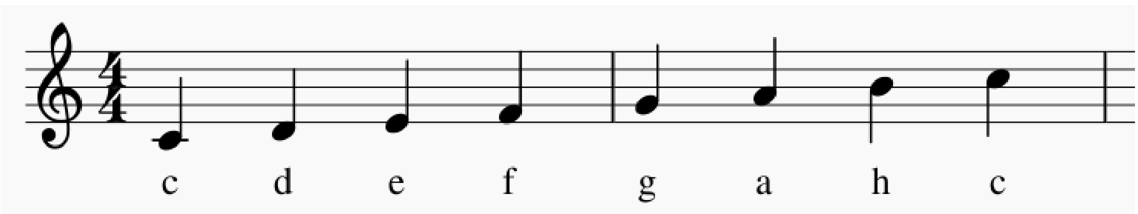
16. c) Wie hoch ist der Luftdruck auf dem Matterhorn (4478 Meter über Meeresspiegel)?

$y = 1013 \cdot 0.87^{\frac{4478}{1000}} \approx 543$ hPa

16. d) In welcher Höhe über Meeresspiegel ist der Luftdruck nur noch 500 hPa?

$$500 = 1013 \cdot 0.87^{\frac{x}{1000}}$$
$$\frac{500}{1013} = 0.87^{\frac{x}{1000}}$$
$$x = 1000 \cdot \log_{0.87}\left(\frac{500}{1013}\right) \approx 5070 \text{ m}$$

17. [FctWZ] **Temperierte Stimmung**



Legende: c-Dur Tonleiter

In der Musik wird heute fast ausschließlich die *temperierte Stimmung* verwendet. Dabei wird eine Oktave in zwölf gleiche Halbtonschritte eingeteilt. Gleich bedeutet hier, dass das Verhältnis der Frequenzen von zwei aufeinanderfolgenden Halbtönen jeweils immer gleich ist.

Das Verhältnis der Frequenzen einer Oktave ist 1:2. Hat ein Ton z. B. die Frequenz 220 Hz, so hat seine Oktave die Frequenz 440 Hz.

Eine Oktave wird in die Töne c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, b und h unterteilt; danach folgt das c der nächst höheren Oktave.

Das Verhältnis der Frequenzen von d zu dis ist also genau gleich, wie das Verhältnis der Frequenzen von f zu fis.

Bemerkung: In der oben abgebildeten c-Dur Tonleiter sind nicht alle Halbtonschritte vorhanden. Eine Tonleiter mit nur Halbtonschritten wird chromatisch genannt.

17. [FctWZ]

17. a) Gesucht ist das Verhältnis der Frequenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbtönen. Tipp: Wird das Verhältnis zwölf mal angewandt, so haben wir eine Oktave und das totale Verhältnis von 1:2 erreicht.

Verhältnis sei a. Somit gilt $1 : a^{12} = 1 : 2$ oder $a^{12} = 2$. Lösen wir das nach a auf, so erhalten wir das Verhältnis von $a = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463$

17. b) In der *reinen Stimmung* wäre das Verhältnis von Grundton (c) zur Quinte (g) 3:2. Dazwischen liegen sieben Halbtonschritte. Berechnen Sie das Verhältnis der Frequenzen von c zu g in der *temperierten Stimmung* und vergleichen Sie das Resultat mit der *reinen Stimmung*.

$a^7 \approx 1.4983$, was etwas weniger als 1.5 ist. Somit ist das *reine* g leicht höher als das *temperierte* g.

17. c) Der Kammerton a hat oft die Frequenz 440 Hz. Berechnen Sie die Frequenz des darüber liegenden Tones c, wenn Sie wissen, dass zwischen a und c drei Halbtonschritte liegen.

Frequenz von c $= 440 \cdot a^3 \approx 523.3$ Hz

18. [FctWZ] **Feinstaub**

Nachdem die letzten Handwerker das Haus verlassen hatten; als endlich der Elektriker die letzten Steckdosen montiert und der Maler die letzten Abdeckungen zusammengesucht und in seinen Wagen geladen hatte, kehrte endlich Ruhe in das alte Gemäuer ein. Doch eines blieb. Der Staub! In allen Ritzen hatte er sich versteckt, erpicht darauf, jederzeit bei kleinstem Windstoß hervorzutreten und den zukünftigen Mietern das Husten zu erleichtern und die Ruhe zu stehlen!

Der Hausherr machte sich selbst auf in den Kampf gegen den Baustellenstaub und begann mit Besen, Tüchern und einem Staubsauger dem beinahe unberechenbaren Störenfried den Garaus zu machen. Er begann ganz oben im Dachstock und die Putzerei endete nach einigen Stunden im Keller.

Doch der Staub blieb. Er ließ sich nicht so einfach vertreiben. Etwas weniger war da, doch eine gewisse Erinnerung an Sisyphus der alten griechischen Mythologie begann im Hausherrn aufzusteigen. Der vorhandene Staub verteilte sich gemütlich wieder gleichmäßig in Haus und Ritzen und wartet auf ein nächstes Opfer.

Das Putzen wurde wiederholt, doch immer noch waren Ritzen, Staubsaugersack, Kleider, Schuhe; kurz alles noch voller Staub.

Einige weitere Male wurde die Saug- und Wisch-Aktion wiederholt. Und erst nachdem zum ersten Mal weniger als 0.1% (also ein Promille) der ursprünglichen Staubmenge vorhanden waren, gab sich der Hausherr mit seiner Arbeit zufrieden.

Wie oft hatte der Hausherr die Putz-Aktion durchgeführt?

Gehen Sie davon aus, dass nach jedem Putzen noch 37% der vorhandenen Staubmenge im Haus verbleibt.

18. [FctWZ]

18. a) Machen Sie eine Skizze bei der die x-Achse die Anzahl der Putz-Aktionen und die y-Achse die Staubmenge, begonnen bei 100%, aufzeigt.

18. b) Berechnen Sie die Anzahl der Putz-Aktionen, die nötig sind, sodass maximal ein Promille der ursprünglichen Staubmenge vorhanden bleibt.

$$0.37^n = 0.001$$

Logarithmieren

$$n = \log_{0.37}(0.001) \approx 6.94$$

Nach «6.94» Putz-Aktionen wäre noch exakt 0.1% der ursprünglichen Staubmenge vorhanden. Somit kann der Hausherr nach dem siebten Mal getrost aufhören und sich mit einem Promille Reststaub zufrieden geben.

1.5 Beobachtungsintervall

Andere Startwerte und andere Zeitintervalle als die Einheiten

19. [FctWZ] **Sauerteig**

Eine Sauerteigkultur verdopple sich bei optimaler, stetiger «Fütterung» alle 5.5 Stunden. Anfänglich werden 53g gemessen.

19. [FctWZ]

19. a) Welche Masse kann nach 11 Stunden erreicht werden? $y = b \cdot a^{\frac{t}{\tau}}$ mit $a = 2$, $b = 53$, $\tau = 5.5$, Einheit = Stunden.

$y = 53 \cdot 2^{\frac{11}{5.5}} = 53 \cdot 4 = 212$g

19. b) Welche Masse kann nach 24 Stunden erreicht werden? $y = b \cdot a^{\frac{t}{\tau}}$ mit $a = 2$, $b = 53$, $\tau = 5.5$, Einheit = Stunden.

$y = 53 \cdot 2^{\frac{24}{5.5}} = 53 \cdot 20.59 = 1091$g

19. c) Wann ist mit einer Verzehnfachung der Masse der Kultur zu rechnen? $y = b \cdot a^{\frac{t}{\tau}}$ mit $a = 2$, $b = 53$, $\tau = 5.5$, Einheit = Stunden.

$$530 = 53 \cdot 2^{\frac{t}{5.5}}$$
$$10 = 2^{\frac{t}{5.5}}$$
$$t = 5.5 \cdot \log_2(10) \approx 18.27\text{Stunden}$$

20. [FctWZ] **Bakterien** Ohne Nahrungsmangel und ohne Platzmangel wächst eine Bakterienkultur in der Anzahl exponentiell.

Um 7:00 Uhr waren es 2 500 Bakterien. Um 12:00 Uhr waren es bereits 40 000 Stück.

20. [FctWZ]

20. a) Um welchen Faktor haben die Bakterien (genauer die Anzahl der Bakterien) während diesen fünf Stunden zugenommen?

$40\,000/2\,500 = 16$

20. b) Geben Sie eine Funktionsgleichung an, welche die Bakterienzahl ab 7:00 in Stunden angibt. Null Stunden liefert 2 500 Stück, fünf Stunden ergibt 40 000 Stück ... $\tau = 5 : t \mapsto b \cdot a^{\frac{t}{\tau}} = 2\,500 \cdot 16^{\frac{t}{5}}$

20. c) Geben Sie die Anzahl der Bakterien um 9:30 Uhr an. $2\,500 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 10\,000$

20. d) In welcher Zeitspanne wird sich die Anzahl der Bakterien verdoppelt haben? $t_{10} = 5 \cdot log_{16}(2) \approx 1.25$h also nach jeweils 75 Minuten = $\frac{5}{4}$ Stunden

20. e) Wie viele Stunden vor 7:00 Uhr waren es 150 Bakterien?

$$150 = 2\,500 \cdot 16^{\frac{t}{5}}$$

$$\frac{150}{2\,500} = 16^{\frac{t}{5}}$$

$$t = 5 \cdot \log_{16}\left(\frac{150}{2\,500}\right) \approx -5.0736 \text{ h}$$

21. [FctWZ] **Inflation**

Ein Europäisches Land hatte während fünf Jahren eine kumulierte Inflation von 16.5%. Das heißt: Der Durchschnitt der Waren, die vor fünf Jahren zu einem bestimmten Preis bezogen werden konnten, kosten heute 16.5% mehr.

21. [FctWZ]

21. a) Berechnen Sie die jährliche Inflationsrate und geben Sie das Resultat in % auf eine Dezimale gerundet an.

$p = \sqrt[5]{1.165} \approx 1.031$ somit ist die jährliche Rate = 3.1%.

21. b) Eine Schubkarre kostete vor 5 Jahren 80.- €. Welcher Preis ist heute zu erwarten?

21. c) Gehen wir von gleichbleibender Inflationsrate während der letzten sieben Jahre aus: Ein Bürostuhl kostet heute € 75.-. Wie viel hat der Stuhl vor sieben Jahren gekostet?

1.6 Halbwertszeit / Verdopplungszeit

22. [FctWZ] **Radioaktiver Stoff**

Ein radioaktiver Stoff zerfällt jedes Jahr um elf Prozent. Anfänglich ist ein kg des Stoffes vorhanden.

22. [FctWZ]

22. a) Wie viel vom Stoff ist nach vier Jahren noch übrig? 0.89^4kg $\approx 62.74\%$

22. b) Wie viel vom Stoff ist nach n Jahren noch übrig? $0,89^n$kg

22. c) Nach wie vielen Jahren wird noch 50% des Stoffes übrig bleiben? (Diese Zeitspanne nennt man die Halbwertszeit T_2.) $T_2 = n = \log_{0.89}(0.5) \approx 5.948$ Jahre.

23. [FctWZ] **Halbwertszeit**

Tritium zerfällt innerhalb von 1.873 Jahren auf 90% (also um 10%).

23. [FctWZ]

23. a) Erstellen Sie eine Skizze, welche den Verlauf der vorhandenen Menge in % angibt. Starten Sie mit 100%.

Graph

23. b) Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für den Tritiumgehalt (in %) in Abhängigkeit der Zeit (in Jahren) an.

$$f(t) = 100\% \cdot 0.9^{\frac{t}{1.873}}$$

23. c) Wie groß ist die Halbwertszeit von Tritium?

$$0.5 = (0.9)^{\frac{t}{1.873}}$$

$$t = 1.873 \cdot \log_{0.9}(0.5) \approx 12.32 \text{ Jahre}$$

24. [FctWZ] **Verdopplungszeit**

E. coli-Bakterien (Benannt nach Th. Escherich) durchlaufen bei optimalen Bedingungen pro Tag (24 h) sechs (bis sieben) Generationen. Das bedeutet, dass sich ein einziges Bakterium sechs mal teilt und sich somit die Anzahl sechs mal verdoppelt.

24. [FctWZ]

24. a) Machen Sie eine aussagekräftige Skizze zur Vermehrung dieser Bakterien

24. b) Gehen Sie zunächst von sechs Generationen innerhalb von 24 h aus und geben Sie eine Funktion an, welche die Anzahl Bakterien in Abhängigkeit der Zeit (in Stunden) angibt. Gehen Sie von einer Startpopulation $f(0) = \text{G}_0$ aus.

$f(0) = \text{G}_0 \cdot (2^6)^{\frac{1}{24}} = \text{G}_0 \cdot 2^{\frac{1}{4}}$; b = G_0; $a = 2$ und $\tau = 4$; bzw. $a = 2^6$ und $\tau = 24$

24. c) Geben Sie die Zunahme a_h pro Stunde an für (1.) 6 Generationen und (2.) sieben Generationen pro Tag

(1.) $a_h = 2^{\frac{1}{4}} \approx 1.1892$

(2.) $a_h = 2^{\frac{7}{24}} \approx 1.2241$

24. d) Wie ist die durchschnittliche Verdopplungszeit, wenn Sie von 6.5 Generationen pro Tag im Schnitt ausgehen?

$$f(t) = \mathsf{G}_0 \cdot 2^{\frac{6.5t}{24}} \Longrightarrow$$

$$2 \cdot \mathsf{G}_0 = \mathsf{G}_0 \cdot 2^{\frac{6.5\mathsf{T}_2}{24}} \Longrightarrow$$

$$\mathsf{T}_2 = \log_{2^{\frac{6.5}{24}}}(2) \approx 3.6923\mathsf{h}$$

25. [FctWZ] **Düngemittel**

Ein Düngemittel in einem See habe eine Halbwertszeit von acht Monaten. Das heißt, nach acht Monaten ist jeweils noch die Hälfte der Düngemittelkonzentration im See vorhanden.

25. [FctWZ]

25. a) Zeichnen Sie einen Graphen, der die Düngemittelkonzentration (in %) in Abhängigkeit von der Zeit (in Monaten) angibt.

Graph

25. b) Entwerfen Sie einen Funktionsterm, der die Düngemittelkonzentration in Abhängigkeit der Zeit ermitteln kann.

$$f(t) = 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$$

25. c) Nach welcher Zeit sind nur noch 5% der ursprünglichen Düngemittelkonzentration im See?

$$5\% = 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$$

$$t = 8 \cdot \log_{0.5}(0.05) \approx 34.6 \text{ Monate}$$

2 E-Funktion

Die Basis e

2.1 Punkte Aufgaben

26. [FctWZ] **Startwert 100%**

Eine Exponentialfunktion mit Startwert *eins* (= 100%) gehe durch den Punkt A. Geben Sie die Funktionsgleichung erstens in der Form $f(x) = a^x$ und zweitens in der Form $g(x) = \mathrm{e}^{qx}$ an (e sei die Eulersche Zahl).

26. [FctWZ]

26. a) $A = (2|6)$

a: Punkt einsetzen

$$f(2) = 6 = a^2$$

Wurzel ziehen:

$$a = \sqrt{6} \Longrightarrow f(x) = (\sqrt{6})^x$$

q: Punkt einsetzen

$$f(2) = 6 = \mathrm{e}^{2q}$$

$$\ln(6) = 2q$$
$$q = \frac{\ln(6)}{2}$$
$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln(6)}{2}\cdot x}$$

26. b) $A = (1|\pi)$

a: Punkt einsetzen

$$\pi = a^1 \Longrightarrow a = \pi$$
$$f(x) = \pi^x$$

q: Punkt einsetzen

$$\pi = \mathrm{e}^{q\cdot 1}$$

$$\pi = \mathrm{e}^q$$

logarithmieren

$$\ln\pi = q$$

q in die Funktionsgleichung einsetzen:

$$g(x) = \mathrm{e}^{\ln\pi\cdot x}$$

26. c) $A = (3|\,\mathrm{e}^6)$

a: Punkt einsetzen

$$f(3) = \mathrm{e}^6 = a^3$$

Wurzel ziehen:

$$a = \sqrt[3]{\mathrm{e}^6} \Longrightarrow f(x) = \left(\sqrt[3]{\mathrm{e}^6}\right)^x$$

q: Punkt einsetzen

$$f(3) = \mathrm{e}^6 = \mathrm{e}^{3q}$$
$$\ln(\mathrm{e}^6) = 3q$$
$$6 = 3q$$
$$q = 2$$
$$g(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

26. d) $A = (2.5|\frac{-2}{e})$

a: Punkt einsetzen

$$f(2.5) = \frac{-2}{\mathrm{e}} = a^{2.5}$$

.... in $\mathbb{R}$ nur möglich für $a < 0$ und 2.5 ungerade; doch 2.5 ist nicht ungerade!

26. e) $A = (0|1)$

Dies ist undefiniert: Alle Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a^x$ gehen durch den Punkt $(0|1)$.

26. f) $A = (x_A|y_A)$

a: x_A-te Wurzel ziehen: $a = \sqrt[x_A]{y_A}$

q:

$$\ln(y_A) = q \cdot x_A$$

somit:

$$q = \frac{\ln(y_A)}{x_A}$$

27. [FctWZ] **Zweipunkte Aufgaben**

Eine Exponentialfunktion gehe durch die Punkte A und B. Geben Sie die Funktionsgleichung erstens in der Form $f(x) = b \cdot a^x$ und zweitens in der Form $g(x) = b \cdot e^{qx}$ an.

27. [FctWZ]

27. a) $A = (0|2)$ und $B = (2|4)$ $f(x) = 2 \cdot (\sqrt{2})^x = 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$ oder $g(x) = 2 \cdot e^{\frac{\ln(2)}{2} \cdot x}$

2.2 Basiswechsel-Aufgaben

28. [FctWZ] **Moos**

Eine Moosart bedeckt in einem Moor mehr und mehr der Fläche. Die Fläche in m^2 wird in Abhängigkeit der Zeit t [in Jahren] wie folgt angegeben:

$$f(t) = 30 \cdot \mathrm{e}^{1.79179 \cdot t}$$

28. [FctWZ]

28. a) Geben Sie die Funktion in der Form $f(t) = b \cdot a^t$ an, mit geeignetem a und b. Dabei ist a der Wachstumsfaktor in Jahren (auch die Zeiteinheit t soll in Jahren angegeben werden).

$$f(0) : 30 \cdot e^{1.79179 \cdot 0} = b \cdot a^0$$

somit

$$30 = b$$

Und: für $t = 1$:

$$f(t) = 30 \cdot e^{1.79179} = b \cdot a^1$$

Durch $b = 30$ teilen:

$$e^{1.79179} = a$$

und somit

$$a \approx 6.000$$
$$f(t) = 30 \cdot 6.000^t$$

29. [FctWZ] **Algen**

Eine Algenplage verdopple sich alle 7 Stunden.

29. [FctWZ]

29. a) Um wie viel nimmt die Algenplage pro Tag (=24 Stunden) zu?

$$f(24) = b \cdot 2^{\frac{24}{7}}$$

Der Vervielfachungsfaktor pro Tag ist also ≈ 10.77

29. b) Wie lautet die Funktionsgleichung $f(t) = b \cdot a^t$, wenn t in Tagen, und nicht in Stunden gerechnet wird?

$f(t) = b \cdot 10.77^t$

29. c) Nach wie vielen Minuten hat die Algenplage um 2% zugenommen?

Erst mal in Minuten angeben (7 Stunden = 420 Minuten) :

$$f(t) = b \cdot 2^{\frac{t}{420}}$$

Faktor 1.02 = 2%

$$1.02 \cdot b = b \cdot 2^{\frac{t}{420}} \,|\, \text{durch } b \text{ teilen.}$$

$$1.02 = 2^{\frac{t}{420}}$$

$$\log_2(1.02) = \frac{t}{420}$$

$$420 \cdot \log_2(1.02) = t$$

$$t \approx 12.00\text{min}$$

29. d) Finden Sie ein passendes q, sodass die Algenplage mit der Funktion $f(t) = b \cdot \mathrm{e}^{qt}$ mit t in Stunden angegeben werden kann. e ist hier die Eulersche Zahl 2.7182818284590.

$$b \cdot 2^{\frac{t}{7}} = b \cdot e^{qt}$$

$$2^{\frac{t}{7}} = e^{qt}$$

t-te Wurzel ziehen:

$$2^{\frac{1}{7}} = e^{q}$$

Logarithmieren zur Basis e ($\ln()$):

$$q = \ln(2^{\frac{1}{7}}) \approx 0.099021$$

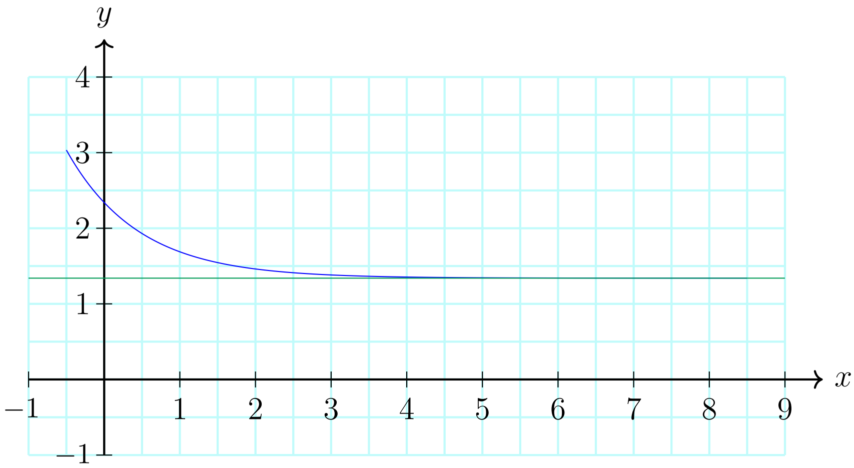
3 Sättigung

Irgendwo ist auch mal Schluss

3.1 Begrenzter Zerfall

30. [FctWZ] **Asymptote** Gegeben ist die Funktion $f(t) = 2.87^{-t} + 1.34$. 30. [FctWZ]

30. a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t)$.



30. b) $g(t) = 1.34$

30. c) Was hat die Zahl 2.87 mit dem Startwert und der Asymptote zu f zu tun? Die 2.87 gibt an, wie rasch sich der Graph von f an g anschmiegt. Auf den Startwert (1+1.34) und auf die Asymptote $g : t \mapsto 1.34$ hat die Zahl 2.87 keinen Einfluss.

31. [FctWZ] **Wäsche Trocknen**

Wäsche trocknet schneller, umso trockener die Umgebungsluft ist. Wir vernachlässigen hier die Sonne, die Temperatur und den Wind und gehen davon aus, dass die Differenz der Umgebungs-Feuchte und der Wäsche-Feuchte exponentiell abnimmt.

Frisch gewaschene Wäsche werde aufgehängt und habe im Geflecht eine «Luftfeuchtigkeit» von 95% (= relative Luftfeuchtigkeit).

Die Außenluft habe eine relative Luftfeuchtigkeit von 35%.

Nach einer Stunde messen wir eine relative «Luftfeuchtigkeit im Geflecht von 54%.

31. [FctWZ]

31. a) Machen Sie eine Skizze im Koordinatensystem, welche die Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit von der Zeit (t) aufzeichnet.

Graph

31. b) Geben Sie die Funktionsgleichung $f(t)$ an, welche die relative «Luftfeuchtigkeit im Geflecht» in Stunden (t) nach dem Aufhängen angibt.

$$f(t) = 35 + (95 - 35) \cdot \left(\frac{19}{95 - 35}\right)^t$$

$$f(t) = 35 + 60 \cdot \left(\frac{19}{60}\right)^t$$

31. c) Wie «trocken» ist die Wäsche nach 1.5 Stunden?

$$f(1.5) = 35 + 60 \cdot \left(\frac{19}{60}\right)^{1.5} \approx 45.69\%$$

31. d) Nach wie vielen Stunden hat die Wäsche eine relative «Wäsche-Feuchtigkeit» von 40%.

$$f(t) = 35 + 60 \cdot \left(\frac{19}{60}\right)^t$$

$f(t) = 40[\%]$ einsetzen:

$$40[\%| = 35 + 60 \cdot \left(\frac{19}{60}\right)^t$$

$$5[\%| = 60 \cdot \left(\frac{19}{60}\right)^t$$

$$\frac{5}{60}[\%| = \left(\frac{19}{60}\right)^t$$

$$t = \log_{\frac{19}{60}}(\frac{5}{60}) \approx 2.16[\text{h}]$$

32. [FctWZ] **Kara Ben Nemsi**

Kara Ben Nemsi ist gut im Spurenlesen. Er weiß, dass Steine rund um ein Feuer eine Temperatur von rund $400°$ C annehmen. Ebenfalls ist ihm der gesättigte Zerfall bei der Temperaturkurve nach dem Löschen des Feuers bekannt.

Es gilt:

$$f(t) = U + (f(0) - U) \cdot a^t$$

Dabei sind

$f(t)$ die Temperatur nach t Minuten

U ist die Umgebungstemperatur (hier die Sättigungsgrenze)

$f(0)$ ist die Anfangstemperatur nach Löschen der Steine (also $400°$ C)

a ist ein spezifischer Abnahmefaktor für Wüstensteine ($a \approx 0.9753$).

Kara Ben Nemsi verfolgt einige Ganoven und erreicht eine Feuerstelle, welche offensichtlich seine Verfolgten benutzt hatten. Er misst eine Umgebungstemperatur von 28° C und ermittelt die Temperatur der Steine auf 40° C.

Welchen Vorsprung (in Minuten) haben die Ganoven? (Oder: Vor wie vielen Minuten wurde das Feuer gelöscht?)

$$f(t) = 28 + (400 - 28) \cdot 0.9753^t$$

$$40 = 28 + (400 - 28) \cdot 0.9753^t$$

$$12 = (400 - 28) \cdot 0.9753^t$$

$$12 = (372) \cdot 0.9753^t$$

$$\frac{12}{372} = 0.9753^t$$

$t = log_a(\frac{12}{372}) \approx 137.3$min

33. [FctWZ] **Impfung**

Nach einer rigorosen Durchimpfung kann eine Krankheit (die hier nicht genannt werden will) von anfänglich 30% infizierten Personen drastisch reduziert werden. Es ist davon auszugehen, dass jedoch im Endeffekt immer noch 2% der Bevölkerung die Krankheit bekommen kann bzw. ansteckend bleiben wird.

Die Funktionsgleichung der Prozentzahl $p()$ der angesteckten Bevölkerung nach t Wochen lautet somit:

$$p(t) = 2 + (30 - 2) \cdot \mathrm{e}^{qt}$$

Ermitteln Sie q, wenn Sie wissen, dass die Krankheit nach 8 Wochen von 30% bereits auf 12% gesunken ist.

$$p(t) = 2 + \ 28 \cdot e^{-0.1287 \cdot t}$$

$$p(8) = 12$$

$$2 + (30 - 2) \cdot \ \mathrm{e}^{8 \cdot q} = 12$$

$$(30 - 2) \cdot \ \mathrm{e}^{8 \cdot q} = 10$$

$$28 \cdot \ \mathrm{e}^{8 \cdot q} = 10$$

$$\mathrm{e}^{8 \cdot q} = \frac{10}{28}$$

$$8 \cdot q = \ln(\frac{10}{28})$$

$$q = \ln(\frac{10}{28})/8 \approx \ -0.1287$$

34. [FctWZ] **Brot**

Frisch gebackenes Brot wird kühl gestellt. Die Umgebungstemperatur misst zwölf Grad. Nach zehn Minuten beträgt die Temperatur noch achtzig Grad und nach weiteren zehn Minuten noch 48 Grad.

34. [FctWZ]

34. a) Machen Sie eine Skizze zum Temperaturverlauf. Graph

34. b) Geben Sie eine allgemeine Funktionsgleichung für diese Temperaturabnahme an

$$f(t) = 12 + b \cdot a^t$$

Punkte einsetzen:

$$f(10) : 80 = 12 + b \cdot a^{10}$$

$$f(20) : 48 = 12 + b \cdot a^{20}$$

Zwölf abzählen

$$f(10) : 68 = b \cdot a^{10}$$

$$f(20) : 36 = b \cdot a^{20}$$

Die zweite Gleichung durch die erste teilen:

$$\frac{36}{68} = a^{10}$$

$$a = \sqrt[10]{\frac{36}{68}} \approx 0.938381$$

b durch Einsetzen:

$$b = \frac{68}{a^{10}} = \frac{1156}{9}$$

34. c) Wie warm war das Brot anfänglich?

$$f(0) = 12 + b \cdot a^0 = 12 + b = \frac{1264}{9} \approx 140.44 \text{ Grad}$$

35. [FctWZ] **Dreipunkte Aufgabe**

Tee kühlt ab und die Temperatur nähert sich der Zimmertemperatur. Die folgenden Temperaturen wurden gemessen:

- 52.4 Grad nach 6 Minuten
- 38.7 Grad nach 10 Minuten
- 31 Grad nach 14 Minuten

35. [FctWZ]

35. a) Geben Sie eine allgemeine Funktionsgleichung für diese Temperaturabnahme an (Da es verschiedene Zeitabstände sind, ist die Wahl von $\tau = 1$ sinnvoll. $f(t) = c + b \cdot a^t$

35. b) Wie hoch ist die Umgebungstemperatur?

Taschenrechner Ansatz:

$$f(t) := c + b \cdot a^t$$

Gleichung:

$$gls := \{f(6) = 52.4, f(10) = 38.7, f(14) = 31\}$$

Lösen:

$$solve(gls, c) \Longrightarrow c \approx 21.12^\circ$$

36. [FctWZ] **Tonic: Die Differenz zur Sättigung als Einstiegsaufgabe.**

Ein Tonic-Getränk wird bei 5 Grad Celsius aus der Kühlbox genommen. Nach einer Minute ist das Getränk bereits auf 15 Grad Celsius aufgewärmt. Kein Wunder die Außentemperatur c beträgt 35 Grad (c stehe hier für die Kapazitätsgrenze, **c**apacity).

36. [FctWZ]

36. a) Geben Sie zum Zeitpunkt t_0 (Startzeit) und zum Zeitpunkt t_1 (Eine Minute später) jeweils die Temperaturdifferenz zur Außentemperatur c an.

Differenz bei t_0 = 30 Grad; Differenz bei t_1 = 20 Grad

36. b) Was geschieht im Laufe der Zeit mit dieser Differenz?

Diese sog. Sättigungsdifferenz nimmt ab und geht gegen 0. Es ist anzunehmen, dass die Temperaturdifferenz exponentiell zerfällt.

36. c) Die Temperaturdifferenz zerfällt exponentiell und geht gegen 0. Wie lautet die Formel ($d(t) =$ ...) für die Temperatur**differenz**? Tipp: Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem die Funktion $d(t)$ der Temperaturdifferenz auf.

$$d(t) = 30 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^t$$

Probe: $d(0) = 30$ und $d(1) = 20$.

36. d) Nachdem Sie nun die Formel für die Temperaturdifferenz ($d(t)$) kennen: Sind Sie in der Lage eine Formel für die Temperatur anzugeben?

$$f(t) = 35 - d(t)$$

somit

$$f(t) = 35 - 30 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^t$$

Probe:

$$f(0) = 35 - 30 \cdot 1 = 5$$

$$f(1) = 35 - 30 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^1 = 35 - 20 = 15$$

3.2 Begrenztes Wachstum

37. [FctWZ] **Sauerstoff**

Ein Patient hat im Blut eine Sauerstoffkonzentration von 70%. Ziel ist es, seinen Sauerstoff wieder auf 100% zu bringen und dazu wird sein Sauerstoff erhöht.

Zwei Minuten nach der Behandlung hat der Patient bereits 80% Sauerstoff seiner möglichen Sättigung erreicht. Gehen Sie von einem (exponentiell) beschränkten Prozess aus.

37. [FctWZ]

37. a) Machen Sie eine Skizze des Sauerstoffgehaltes.

Graph

37. b) Geben Sie die Formel $y = f(t)$ an mit y = Sauerstoffgehalt und t = Zeit in Minuten.

$$f(t) = 100 - 30 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^{\frac{t}{2}}$$

37. c) Wie groß ist sein Sauerstoffgehalt nach 8 Minuten?

$$f(8) = 100 - 30 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^{\frac{8}{2}} \approx 94.07\%$$

37. d) Bei 97% der Sauerstoffsättigung können wir die Behandlung abbrechen. Wann wird das erreicht sein?

$$97 = 100 - 30 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^{\frac{t}{2}}$$
$$-3 = -30 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^{\frac{t}{2}}$$
$$3 = 30 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^{\frac{t}{2}}$$
$$\frac{1}{10} = \left(\frac{20}{30}\right)^{\frac{t}{2}}$$
$$\log_{\left(\frac{20}{30}\right)}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{t}{2}$$
$$2 \cdot \log_{\left(\frac{20}{30}\right)}\left(\frac{1}{10}\right) = t \approx 11.36 \text{ min.}$$

38. [FctWZ] **Cola**

Eine Cola wird bei 5° C aus der Kühlbox genommen. Die Umgebungstemperatur ist 32° C. Nach 3 Minuten messen wir bereits eine Temperatur von 9° C

Wir gehen davon aus, dass die Temperaturdifferenz der Cola zur Umgebungstemperatur exponentiell abnimmt.

38. [FctWZ]

38. a) Machen Sie eine Skizze im Koordinatensystem, welche die Abhängigkeit von der Cola-Temperatur von der Zeit (t) aufzeichnet.

Graph

38. b) Geben Sie eine Funktionsgleichung $f(t)$ an, welche die Temperatur in Minuten (t) nach dem herausnehmen der Cola aus der Kühlbox angibt.

$$f(t) = c - b \cdot a^{\frac{t}{\tau}}$$

$$f(t) = 32 - 27 \cdot \left(\frac{23}{27}\right)^{\frac{t}{3}}$$

38. c) Wie «warm» ist die Cola nach 10 Minuten?

$$f(10) = 32 - 27 \cdot \left(\frac{23}{27}\right)^{\frac{10}{3}} \approx 16.18^\circ \text{ C}$$

38. d) Nach wie vielen Minuten ist die Cola 18° C «warm»?

$$f(t) = 18 = 32 - 27 \cdot \left(\frac{23}{27}\right)^{\frac{t}{3}}$$

$$-14 = -27 \cdot \left(\frac{23}{27}\right)^{\frac{t}{3}}$$

$$\frac{14}{27} = -\left(\frac{23}{27}\right)^{\frac{t}{3}}$$

$$t = 3 \cdot \log_{\left(\frac{23}{27}\right)}\left(\frac{14}{27}\right) \approx 12.29 \text{ min.}$$

39. [FctWZ] **«Silly Blubb»**

Das neue Waschmittel «Silly Blubb» will sich im Markt etablieren. Dank einer tollen Fernseh- und Internetwerbung nehmen die Verkaufszahlen rasant zu.

Es ist jedoch zu erwarten, dass nicht mehr als 20% aller Käufer auf «Silly Blubb» umschwenken werden.

Nach dem ersten Monat sind bereits 5% der Waschmittelkäufer auf «Silly Blubb» umgelenkt worden. Nach zwei weiteren Monaten sind wir bei 8% gelandet.

39. [FctWZ]

39. a) Machen Sie eine Skizze im Koordinatensystem, welche die Abhängigkeit von Monat (x-Achse) zu Käuferzahl in Prozent darstellt.

Graph

39. b) Geben Sie einen mögliche Funktionsterm $f(t)$ an, welcher die Prozentzahl der Käufer nach Monaten angibt. Bedenken Sie, dass die «Sättigungsgrenze» bei 20% liegt.

$$f(t) = 20 - 15 \cdot (\frac{12}{15})^{\frac{t-1}{2}}$$

39. c) Wie viele Prozente der Käufer sind in Monat 6 nach Verkaufsstart bereits «Silly Blubb» Käufer?

$$y = 20 - 15 \cdot \left(\frac{12}{15}\right)^{\frac{6-1}{2}} \approx 11.41\%$$

39. d) Nach wie vielen Monaten sind 16% der Käufer von «Silly Blubb» überzeugt worden?

$$f(t) = 16[\%] = 20 - 15 \cdot ()^{\frac{t-1}{2}}$$

$$\frac{4}{15} = ()^{\frac{t-1}{2}}$$

$$\frac{4}{15} = ()^{\frac{t-1}{2}}$$

$$\frac{t-1}{2} = \log_{(\frac{12}{15})}\left(\frac{4}{15}\right)$$

$$t = 1 + 2 \cdot \log_{(\frac{12}{15})}\left(\frac{4}{15}\right) \approx 12.85 \text{ Monate}$$

40. [FctWZ] **Ritter Nimmersatt**

Ritter Nimmersatt ist nimmer satt. Erst bei einer Magenfülle von 5 Litern stößt ihm alles wieder auf. Richtig wohlgenährt ist er normalerweise erst bei einem Magen, der zu 4.5 Liter gefüllt ist.

Er beginnt das Festmahl bei Kunigundes Hochzeit mit einer Magenfülle von 2 Litern[1]. In der ersten Minute schafft er es, 3 dl Flüssigkeit oder Nahrung in sich regelrecht hineinzustopfen. Danach nimmt sein Futtern «exponentiell gesättigt» ab (bis zur Sättigungsgrenze von 5 Litern, die er hoffentlich nicht erreicht)[2]

Nach wie vielen Minuten ist er so richtig gesättigt; m. a. W. wann hat er besagte 4.5 Liter im Magen[3]?

$c = 5$, $b = m_0 = 5 - 2 = 3$, $m = m_1 = 5 - 2.3 = 2.7$, $\tau = 1$, $a = \frac{2.7}{3} = 0.9$ und somit:

$$f(t) = 4.5 = 5 - 3 \cdot \left(\frac{2.7}{3}\right)^t$$

$$t = log_{\frac{4.5-5}{-3}}(\frac{2.7}{3}) \approx 17.006$$

Und so ist er nach 17 Minuten so richtig satt.

[1] Darunter würde er echte Hungerschübe leiden!

[2] Beim «normalen» Menschen stellt sich das Sättigungsgefühl schlagartiger ein; eine «exponentielle» Sättigung wurde hier nur für diese Aufgabe erfunden.

[3] Der Moment ist gekommen, wo die Wachen den Ritter Nimmersatt vorsorglich unter ominösem Vorwand aus der Burg schaffen sollten.

41. [FctWZ] **WC-Spülung**

Ältere Spülkästen für Toiletten funktionieren nach folgendem Prinzip. Wird die Kordel gezogen, so hebt sich eine Ansaugglocke, welche das Wasser ansaugt. Jetzt wird aufs Mal durch den Sog der ganze Kasten entleert.

Beim Wiederauffüllen, und darum gehts bei diesem Modell, wird zunächst Wasser im vollen Druck der Röhre wieder in den Spülkasten gepumpt (dies ist vorest ein linearer Prozess). Doch damit es wieder mit dem Füllen aufhört, ist ein Schwimmer angebracht. Dieser Schwimmer ist immer auf der Wasseroberfläche und hebt sich beim Füllen des Spülkastens an.

Über eine Stange ist der Schwimmer mit einem Ventil verbunden, das sich umso mehr schließt, je höher der Schwimmer steht. Also: Je höher der Pegelstand, umso geschlossener ist das Ventil. Dies bedeutet aber wiederum, dass das Wasser umso langsamer einfließt, je höher der Schwimmer steht. Erst bei der maximalen Füllung von ca. 8 bis 11 Litern ist das Ventil ganz geschlossen.

41. [FctWZ]

41. a) Skizzieren Sie den Prozess für einen 10-Liter Spülkasten, wenn Sie davon ausgehen, dass der Schwimmer erst ab 5 Litern beginnt das Ventil zu schließen und dass die ersten 5 Liter mit 3 Litern pro Minute gefüllt werden. Gehen Sie ab den 5 Litern von einem beschränkten Prozess aus bei dem in der ersten Minute (nach den 5 Litern) nur noch 2 Liter (wegen der Ventilschließung) in den Spülkasten fließen. Gehen Sie weiter davon aus, dass der Kasten bei 10 Litern ganz voll ist und auch wird bei 10 Litern das Ventil ganz geschlossen sein (= Sättigungsgrenze). Skizze mit zwei Bereichen f_1 bis Eine Minute 40 Sekunden (= $\frac{5}{3}$ Minuten) und f_2 ab $\frac{5}{3}$ Minuten; jetzt erst beginnt das beschränkte Wachstum.

41. b) Geben Sie die beiden Funktionsgleichungen der ersten Teilaufgabe an: Erstens die lineare Füllung (f_1) bis zu den 5 Litern; zweitens das beschränkte Wachstum (f_2) nach den 5 Litern.

Bis $\frac{5}{3}$ Minuten:

$$f_1(t) = 3t$$

Ab $\frac{5}{3}$ Minuten:

$$f_2(t) = 10 - 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{t-\frac{5}{3}}$$

Machen Sie unbedingt die Probe für 0', für 1'40" und für 2' 40" um die $t - \frac{5}{3}$ im Exponenten zu verstehen!

41. c) Geben Sie für die erste Teilaufgabe an wie viele Liter im Spülkasten sind nach

(a) einer Minute 3 Liter
(b) zwei Minuten ≈ 5.783 Liter
(c) zehn Minuten ≈ 9.929 Liter

41. d) Wann sind 9 Liter im Kasten?

$$f_2(t) = 9$$

$$9 = 10 - 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{t-\frac{5}{3}}$$

$$-1 = -5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{t-\frac{5}{3}}$$

$$1 = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{t-\frac{5}{3}}$$

$$0.2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{t-\frac{5}{3}}$$

$$\log_{\frac{3}{5}}(0.2) = t - \frac{5}{3}$$

$$\log_{\frac{3}{5}}(0.2) + \frac{5}{3} = t \approx 4.871\text{min.} \approx 4'49.04''$$

42. [FctWZ] **Kondensatorladung**

Wird ein Kondensator mit Kapazität C (in Farad) an einer Spannung U_0 (in Volt) über einen Vorwiderstand R (in Ohm) aufgeladen, so beschreibt die Spannung im Kondensator $U_C(t)$ ein beschränktes Wachstum.

Es gilt:

$$U_C(t) = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{R\cdot C}}\right)$$

Dabei sind gegeben:

Die Ladungsspannung $U_0 = 9$ V.

Der Vorwiderstand $R = 470$ Ohm.

Die Kapazität $C = 0.002$ Farad.

Die Ladungszeit t wird in Sekunden gemessen.

42. [FctWZ]

42. a) Wie viel Ladung ist im Kondensator nach 2 Sekunden?

$$U_C(2) = \ 9 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2}{470\cdot 0.002}}\right) \approx 7.9280 \text{ V}$$

42. b) Wann ist der Kondensator auf 8.9 Volt aufgeladen?

$$8.9 = 9 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{470\cdot 0.002}}\right)$$

$$\frac{8.9}{9} = 1 - e^{-\frac{t}{470\cdot 0.002}}$$

$$1 - \frac{8.9}{9} = e^{-\frac{t}{470\cdot 0.002}}$$

$$ln(1 - \frac{8.9}{9}) = -\frac{t}{470\cdot 0.002}$$

$$-ln(1-\frac{8.9}{9})=\frac{t}{470\cdot 0.002}$$

$$-ln(1-\frac{8.9}{9})\cdot(470\cdot 0.002)=t$$

$$t\approx 42.30 \text{ s}$$