Allgemeine Hinweise

- Lesen Sie sich die Homepage zur Veranstaltung durch, vor allem insbesondere die verbindlichen Abgaberichtlinien. Kommentare an Formeln und im Quellcode sind Voraussetzung zum Erreichen der vollen Punktzahl.
- Verwenden Sie zur Abgabe der Programmieraufgabe das Onlinesystem SAUCE[1]. Die Zugangsdaten werden Ihnen im Laufe der Woche per Email an Ihre ...@students.uni-mainz.de-Adresse zugesandt. Lesen Sie die folgenden Hinweise aufmerksam: Zur Zeit können nur Java-Programme eingereicht werden, die aus einer einzigen .java-Datei bestehen, welche nicht in einem Package liegt. SAUCE vergleicht die Ausgabe sehr genau, achten Sie auf die Beispiele in SAUCE, damit Ihre Ausgabe den automatischen Test besteht. Wenn das erste Zeichen einer Zeile eine Raute (#) ist, wird die Zeile ignoriert. Dadurch können Sie z.B. den Benutzer nach einer Eingabe fragen, ohne dass diese Frage in den Vergleich einfließt. Konzentrieren Sie sich auf den eigentlichen Algorithmus, Sie müssen z.B. keine falschen Eingaben o.ä. abfangen. Falls es mit SAUCE unerwartete Probleme geben sollte (und nur dann), können Sie das Programm per Email an Ihren Übungsleiter abgeben.
- Dieses Übungsblatt ist in Kleingruppen von bis zu drei Personen zu bearbeiten und abzugeben.

2.1 Landau-Notation (9 Punkte)

a) (2P) Beweisen Sie die Transitivität der O-Notation:

$$f(n) \in O(g(n)), g \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n))$$

b) (5P) Rufen Sie sich die Definition von $\limsup$ in Erinnerung und beweisen Sie die in der Vorlesung angegebene Äquivalenz:

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

c) (2P) Gehen Sie davon aus, dass Sie sowohl b) als auch die analoge Aussage für Ω bereits bewiesen haben und zeigen Sie folgende Aussage:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow 0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

2.2 Master-Theorem (3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils ein $g(n)$, so dass $f(n) \in \Theta(g(n))$ gilt.

a) (1P) $f(n) = 5f(\frac{n}{2}) + 16n^3$
b) (1P) $f(n) = 9f(\frac{n}{3}) + 8n^2$
c) (1P) $f(n) = 12f(\frac{n}{2}) + 5n^3 + 7n^2$

[1] `https://sauce.zdv.uni-mainz.de/`

2.3 Akra-Bazzi-Theorem (5 Punkte)

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1 \\ \frac{20}{9} f(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) + f(\lfloor \frac{2x}{3} \rfloor) + x & \text{sonst} \end{cases}$$

a) (2P) Nutzen Sie das Akra-Bazzi-Theorem[2] um $g(x)$ mit $f(x) \in \Theta(g(x))$ zu bestimmen.
b) (1P) Schreiben Sie ein Java-Programm, das eine Zahl x von der Tastatur einliest, $f(x)$ berechnet und auf der Konsole ausgibt.
c) (2P) Zeichnen Sie einen Plot, der einige Punkte $(\log(x), \log(f(x)))$ enthält[3]. Es entsteht eine Ihnen wohlbekannte geometrische Figur, deren Gleichung sie leicht bestimmen können[4]. Versuchen Sie zu erklären, was die Parameter der Gleichung bedeuten und bedenken Sie dabei, welches asymptotische Verhalten zu erwarten war.

Für den Fall, dass Sie Probleme hatten die Tafel richtig zu lesen, für

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{für } 1 \leq x \leq x_0 \\ \sum_{i=1}^{m} a_i f(\frac{x}{b_i}) + g(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

$$\text{mit } \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{1}{b_i}\right)^p \stackrel{!}{=} 1$$

$$\text{gilt } f(x) \in \Theta\left(x^p \left(1 + \int_1^x \frac{g(u)}{u^{p+1}} du\right)\right).$$

2.4 Laufzeitverhalten (3 Punkte)

$$f(n) = (\log n)^n \qquad g(n) = n^{\log n}$$

Vergleichen Sie das Laufzeitverhalten von f und g. Gilt $f \in O(g)$ oder $g \in O(f)$?

[2]Einen weiteren Beweis des Akra-Bazzi-Theorems finden Sie hier: `http://www.mpi-inf.mpg.de/~mehlhorn/DatAlg2008/NewMasterTheorem.pdf`
[3]Wählen Sie x groß, es geht schließlich um das asymptotische Verhalten.
[4]Machen Sie es sich einfach und nutzen Sie nur wenige Punkte zur Berechnung.