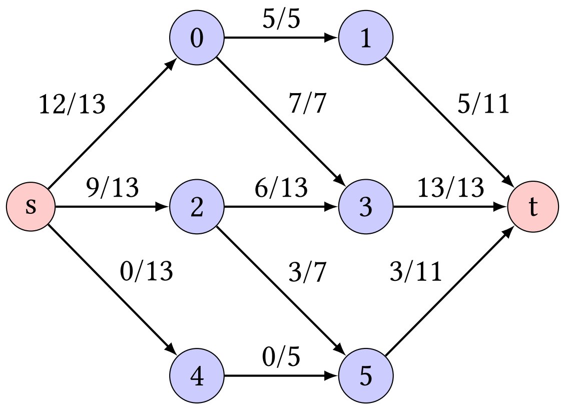
Bemerkungen

Dies ist das letzte DSEA-Übungsblatt in diesem Semester, viel Erfolg.

12.1 Ford-Fulkerson-Algorithmus (10 Punkte)

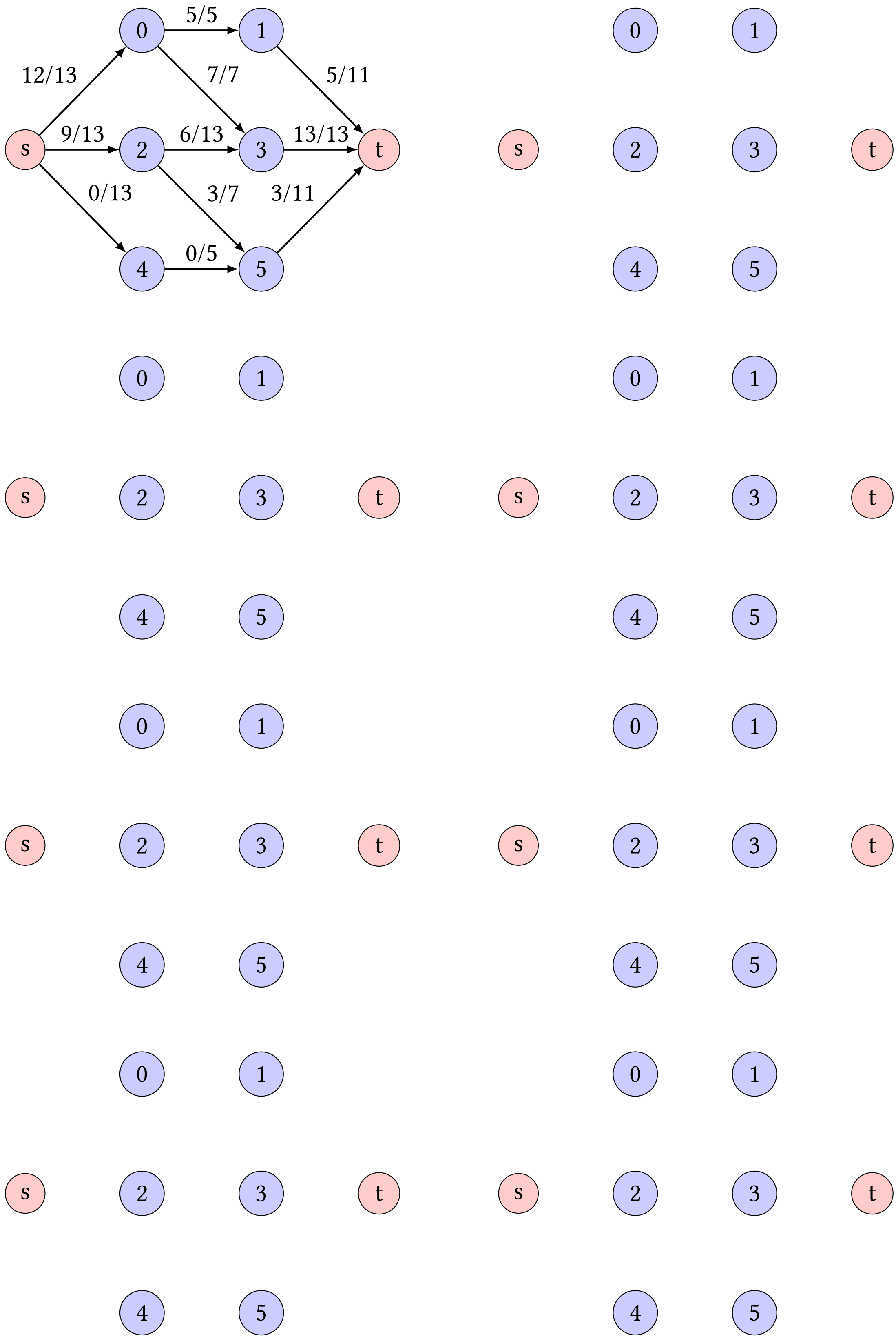
Seien $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ eine Kapazitätsfunktion sowie $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ eine Flussfunktion auf den Kanten. Den Fluss sowie die Kapazität einer Kante $e \in E$ wollen wir stets mit $f(e)/c(e)$ vermerken. In der Abbildung sehen Sie den Graphen mit Fluss- und Kapazitätsfunktion. Für $c(e) = 0$ einigen wir uns darauf, die Kante e nicht einzuzeichnen.



a) Verifizieren Sie, ob in der Abbildung ein gültiger Fluss eingezeichnet ist.
b) Zeichnen die den Restgraph G_f.
c) Ist der eingezeichnete Fluss bereits maximal? Führen Sie den Algorithmus von Ford und Fulkerson am dargestellten Graphen aus, d.h. gehen Sie wie folgt vor:
    - Finden Sie im Restgraph G_f einen Weg[1] p von s nach t und bestimmen Sie die minimale Kapazität $c_f(p)$.
    - Ändern Sie im Graph G den Fluss an allen Kanten auf dem Weg. Läuft der Weg entlang einer Kante, erhöhen Sie den Fluss um $c_f(p)$. Läuft der Weg entgegen einer Kante, verringern Sie den Fluss entsprechend.
    - Berechnen Sie den Restgraph G_f neu und wiederholen Sie die Schritte, bis Sie keinen Weg mehr finden können.
d) Geben Sie einen minimalen s-t-Schnitt an.

Die folgende Seite hilft Ihnen bei Ihren sorgfältigen Zeichnungen, die linke Seite ist jeweils für den Graph G gedacht, die Rechte für G_f. Verwenden Sie für Kanten im Graph G die Farbe schwarz, für Kanten im Restgraph G_f mit $(u, v) \in E$ blau bzw. für Rückkanten braun. Falls Sie mehr Schritte benötigen, zögern Sie nicht, die Seite mehrfach auszudrucken.

[1] Sie dürfen hier den Weg "sehen" und müssen keinen Algorithmus gesondert durchführen, aber markieren Sie Ihn in Ihren Zeichnungen.


s
0
1
2
3
4
5
t
5/5
12/13
7/7
5/11
9/13
6/13
13/13
0/13
3/7
3/11
0/5

12.2 Bundesliga (5 Punkte)

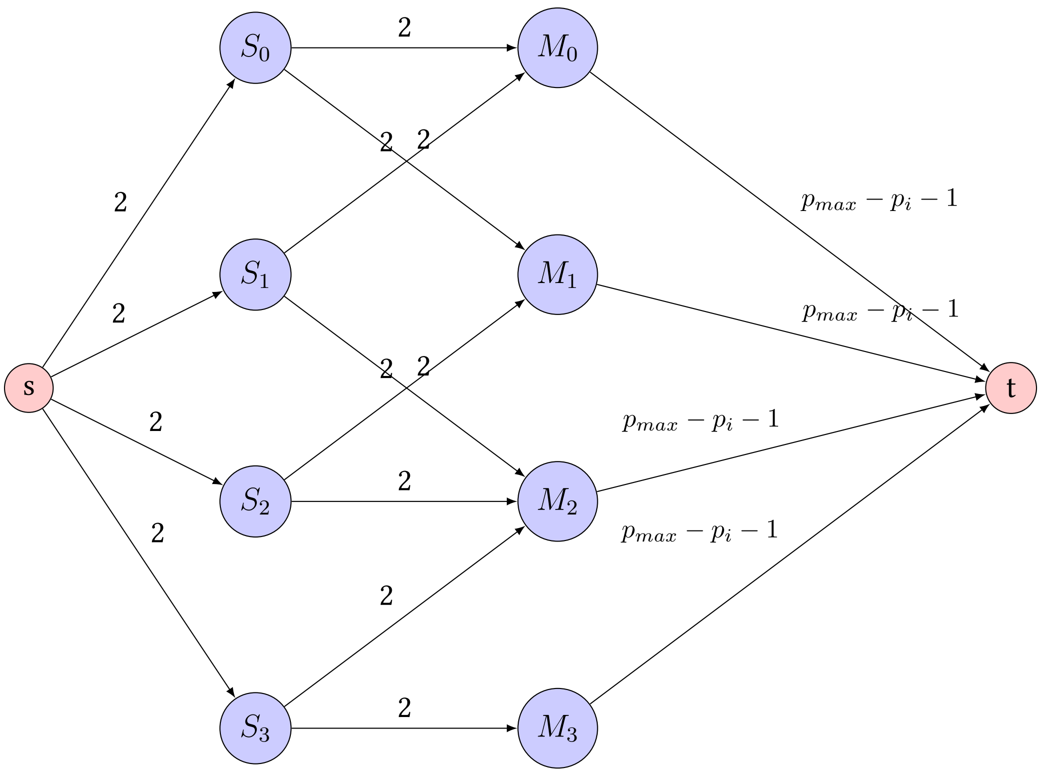
In der Fußball-Bundesliga ist ein Großteil der Saison schon vorbei und die Lieblingsmannschaft hat bisher zwar gut, aber nicht überragend gespielt. Es stellt sich nun die Frage, ob diese Mannschaft noch Meister werden kann. Die aktuellen Punkte aller Mannschaften sowie alle verbleibenden Spiele sind Ihnen bekannt.

Um das Problem zu vereinfachen, nehmen wir an, dass unsere Lieblingsmannschaft alle verbleibenden Spiele gewinnen wird und wollen wissen, ob es einen Ausgang der Spiele der anderen Mannschaften gibt, so dass unsere Mannschaft am Ende mehr Punkte als alle anderen hat. Um das Problem weiter zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die alte Punktezählung gilt: Bei einem Spiel erhält die gewinnende Mannschaft 2 Punkte, die Verlierer 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erhalten beide 1 Punkt.

Wir wollen die Frage, ob die Lieblingsmannschaft noch Meister werden kann, mit einem maximalen Fluß lösen. D.h. Ziel ist es, geschickt einen Graph zu erstellen, so dass uns z.B. der Algorithmus von Ford-Fulkerson das Problem löst. Seien M_i die anderen Mannschaften mit Punkten p_i. Seien ferner S_i die Spiele der anderen Mannschaften untereinander und p_{max} die Punktzahl unserer Lieblingsmannschaft, wenn diese alle ihre Spiele gewinnt.

Ihre Aufgabe ist es, zu erklären, wieso ein Graph mit folgender Konstruktion das Problem löst und wie man daran erkennt, ob unsere Mannschaft noch eine Chance auf den Titel hat. Es soll gelten, dass die Quelle s mit jedem Spiel-Knoten mit der Kapazität 2 verbunden sei, genauso wie jedes Spiel mit den zwei daran teilnehmenden Mannschaften. Die Mannschaften seien jeweils mit der Senke t über eine Kante verbunden, deren Kapazität $p_{max} - p_i - 1$ beträgt.

Hier ein exemplarischer Graph für vier andere Mannschaften, die noch vier Spiele spielen müssen.



12.3 Fluss-Addition (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass $|f \oplus f'| = |f| + |f'|$.

12.4 Mühle (10* Punkte)

Formulieren Sie folgendes Problem als Flussproblem und lösen Sie es: Kann man acht Spielsteine so auf ein Mühle-Spielbrett legen, dass alle Linien belegt sind?

Erklären und zeichnen Sie, wie genau Sie Ihren Graph aufbauen, die Kapazitäten setzen, weshalb man an Ihrem Graph erkennt, ob er die Aufgabe löst und wie man das Ergebnis abliest.

Die Skizze zeigt ein Beispiel mit zehn Steinen, so dass alle Linien belegt sind.