

4.1 Jensensche Ungleichung (5 Punkte)

- a) (3P) Sei f konvex, $\lambda_i > 0 \forall i$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Beweisen Sie die Jensensche Ungleichung durch Induktion.

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

- b) (2P) Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + \ln(x) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Punkt x_0 , für den gilt:

$$f|_{0 < x < x_0} \text{ ist konkav und } f|_{x > x_0} \text{ ist konvex}$$

Dabei bedeutet $f|_A$ eine Einschränkung des Definitionsbereichs auf A . Demonstrieren Sie die Jensensche Ungleichung anhand von drei Stützstellen Ihrer Wahl.

4.2 Fibonacci (9 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_t &= f_{t-1} + f_{t-2} \\ n(t) &= n(t-1) + n(t-2) + 1 \end{aligned}$$

mit $f_0 = n(0) = 0$ und $f_1 = n(1) = 1$.

- a) (3P) Zeigen Sie, dass $n(t) = f_{t+2} - 1$.
b) (3P) Sei $p \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine Strategie zur Berechnung von A^p an, so dass die Anzahl der benötigten Matritzenmultiplikationen minimal ist, d.h. u.a. die Zeit $T(A^p) \in o(p)$ liegt.
c) (3P) Sei $t \in \mathbb{N}$. Finden¹ Sie eine geschlossene Formel für

$$m(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t = 1 \\ -m(t-1) + 2m(t-2) & \text{für } t \geq 2 \end{cases}$$

4.3 AVL-Bäume (6 Punkte)

- a) (2P) Vervollständigen und kommentieren Sie den Quellcode in der Beispieldatei AVL - Tree2.java.
b) (4P) In einen anfänglich leeren AVL-Baum werden die Zahlen 5,1,3,8,9,6,7 in genau dieser Reihenfolge eingefügt. Zeichnen Sie für jede Einfüge-Operation Grafiken, die

¹d.h. mit Herleitung

jeweils den Zustand des AVL-Baumes repräsentieren. Dabei soll für die jeweils erste Grafik das Element naiv (unbalanciert) einsortiert werden. Sind Rotationen des Baumes nötig, sollen ggf. weitere Grafiken nach jeder einzelnen Rotation gezeichnet werden.

Beispiel: Um das Element 3 einzufügen ist eine Links-Rechts-Rotation² nötig. Zeichnen Sie daher drei Grafiken: Nach dem naiven Einfügen, nach der Links- und nach der Rechtsrotation.

²Falls Sie die Rotationen mit der linken/rechten-Hand-Regel benennen, ist es eine RL-Rotation.