Bemerkungen

Mit * markierte Aufgaben sind freiwillig.

11.1 Minimal aufspannende Bäume (11+5* Punkte)

Sie möchten der Regierung helfen, Instandhaltungskosten zu sparen und das Netz der Autobahn-Verbindungen auf einen minimal aufspannenden Baum reduzieren.

Gegeben Sei die Datei *autobahn.txt*, in der nacheinander alle Autobahn-Abfahrten sowie deren Verbindungen gelistet sind. In der ersten Zeile stehen die Anzahl der Abfahrten und Verbindungen. Anschließend folgen pro Zeile jeweils erst die Namen der Abfahrten und anschließend die Verbindungen in der Form *Abfahrt1 Abfahrt2 Entfernung*.

a) (2P) Lesen Sie die Datei ein und bauen Sie den Graph als Adjazenzliste im Speicher auf. Beachten Sie, dass man die Verbindungen üblicherweise in beide Richtungen befahren darf, d.h. die Kanten in der Datei sind ungerichtet.
b) (4P) Implementieren Sie die Funktionen *union* & *find*. Verwenden Sie dabei die in der Vorlesung vorgestellte Datenstruktur, um eine gute Laufzeit zu garantieren.
c) (1P) Schreiben Sie eine Methode *isUndirectedGraph*, die genau dann true zurück liefert, wenn der Graph ungerichtet ist, d.h. wenn zu jeder Kante eine entgegengesetzte Kante mit gleichem Gewicht existiert.
d) (1P) Implementieren Sie den Algorithmus von Kruskal.
e) (3P) Nutzen Sie den Algorithmus von Kruskal, um unnötige Kanten im Graph zu eliminieren. Überprüfen Sie Ihre Implementierung mittels *isUndirectedGraph* und geben Sie die Zahl der ungerichteten Kanten aus, die in Ihrem resultierenden Graph übrig bleiben.
f) (5*P) Finden Sie den kürzesten Weg von “Berlin-Marzahn” nach “München-Süd, Kreuz” und geben Sie Gesamtlänge sowie die Anzahl der Knoten (inkl. Start und Ende) auf dem Weg aus. Vergleichen Sie die Ergebnisse im Original-Graph mit denen im minimalen Spannbaum.

11.2 Identische minimale Spannbäume (4 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $w : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion, seien $T_a, T_b \subseteq E$ minimale Spannbäume von G. Zeigen Sie, dass die beiden Folgen der sortierten Kantengewichte $(w_j)_{i\in\{a,b\}} := (w(e_j) : e_j \in T_i,$ aufsteigend sortiert$), j \in \{1, \ldots, |T_{min}|\}$ identisch sind.

11.3 Zyklen-Elimination (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgender Algorithmus zu einem minimalen Spannbaum führt:

Solange ein Zyklus in dem Graph existiert, entferne die teuerste Kante des Zyklus.