

Weihnachtsblatt

- Dieses Blatt ist das Weihnachtsblatt, bitte verwechseln Sie es nicht mit dem regulären Blatt 09, welches die “normalen” Aufgaben enthält und seit dem 2012-12-19 online bereit steht.
- Alle Aufgaben auf diesem Übungsblatt sind freiwillig. Sie können durch eine Bearbeitung der freiwilligen Aufgaben zusätzliche Punkte bekommen.

9.1 Catalan-Zahlen (7 Punkte)

Sei $V_n := \{v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{N}_0^n : v_i \leq i \text{ und } v_i \leq v_{i+1}\}$

- (1P) Notieren Sie alle Elemente von V_3 .
- (3P) Zeigen Sie, dass $|V_n| = C_n$, indem Sie eine Bijektion auf die Menge der Dyck-Wörter mit n Klammerpaaren angeben.
- (3P) Schreiben Sie ein kleines Java-Programm, dass diese Bijektion umsetzt, indem es eine Zeile mit einem Klammersausdruck $\in \{“(”, “)”\}^*$ einliest und die Zahlen v_i des Tupels der Reihe nach ausgibt. Trennen Sie dazu die Zahlen nur mit einem Leerzeichen.

9.2 Erzeugende Funktionen (3 Punkte)

$$\text{Sei } C_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k} & n > 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ folgendes gilt:

$$C(z) = 1 + z \cdot C^2(z)$$

9.3 Fibonacci (2 Punkte)

Zeigen Sie

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

9.4 Schlechte Nachbarn (8 Punkte)

Die Bürger einer unbenannten Stadt sind meist schlecht gelaunt und niemand mag seine beiden direkten Nachbarn. Es gibt nur einen Brunnen und da keiner weiter vom Brunnen entfernt wohnen möchte, als seine Nachbarn, stehen alle Häuser in einem großen Kreis um den Brunnen. Leider ist der Brunnen defekt und daher sollen Spenden gesammelt werden, um den Brunnen zu reparieren. Es ist bekannt, wie viel jeder Bürger zu spenden bereit ist, aber keiner will spenden, wenn einer seiner Nachbarn spendet. Die Summe der eingesammelten Spenden soll maximiert werden.

Als Eingabe werden nacheinander die Zahl n und dann die Höhe v_i der n einzelnen Spenden auf der Konsole eingegeben. Es gilt dabei $2 \leq n \in \mathbb{N}, i = 0, \dots, n-1, 0 \leq v_i \in \mathbb{N}$. Die

Spenden entsprechen einer Aufzählung im Uhrzeigersinn, benachbarte Spenden entsprechen benachbarten Häusern, mit einer Ausnahme: Die erste und letzte Spende gehören ebenfalls zu benachbarten Häusern.

Als Ausgabe geben Sie den maximal möglichen Wert aus, der eingesammelt werden kann.

- a) (5P) Beschreiben Sie, wie Sie das Problem mittels dynamischer Programmierung berechnen können. Beschreiben Sie dabei unter anderem
- die verwendete Datenstruktur
 - aus welchen Teilproblemen sich eine neue Lösung zusammensetzt
 - wie und in welcher Reihenfolge sie die Teilprobleme berechnen
- b) (3P) Schreiben Sie ein Java-Programm, welches Ihr in a) beschriebenes Vorgehen umsetzt.