

# Mecánica Lagrangiana para el Modelado Dinámico y Simulación mediante Simulink-Matlab de un Péndulo de Furuta

Juan Libardo Duarte Madrid, Brayan Montero Arévalo, Paolo. A. Ospina-Henao., González Querubín Edwin.

*Facultad de Ingeniería Mecatrónica, Universidad Santo Tomás*

*Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Santo Tomás*

*Bucaramanga, Colombia*

`juan.duarte03@ustabuca.edu.co`

`brayan.montero@ustabuca.edu.co`

`paolo.ospina@ustabuca.edu.co`

`edwin.gonzalez@ustabuca.edu.co`

**Resumen** — En este artículo se presenta una forma alterna al modelado dinámico de un péndulo invertido rotacional o Furuta haciendo uso de la mecánica clásica conocida como Euler-Lagrange, la cual permite encontrar las ecuaciones de movimiento que describe nuestro sistema. Además, se cuenta con un diseño del modelo básico del sistema en el software SolidWorks, el cual proporciona algunas variables físicas necesarias para el modelado. Con el fin de verificar los resultados teóricos obtenidos, se realizó un contraste entre las soluciones obtenidas mediante la simulación en Simmechanics-Matlab y el sistema de ecuaciones Euler-Lagrange, solucionadas a través del método ODE23tb incluido en las librerías de Matlab para la solución de sistemas de ecuaciones del tipo y orden obtenidas. Este trabajo, cuenta además con un análisis de trayectorias del péndulo mediante un diagrama en el espacio fase, el cual permite identificar regiones estables e inestables del sistema.

**Palabras claves** — *Diagrama de espacio de fase, formalismo de Euler-Lagrange, modelado dinámico, péndulo invertido rotacional o de Furuta, sistema subactuado.*

## I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas mecánicos subactuados [1] están generando un interés en los investigadores de las teorías de control moderno. Este interés se debe a que estos sistemas presentan inconvenientes similares a los encontrados en aplicaciones industriales, tales como perturbaciones externas y/o comportamientos no lineales en algunas condiciones de su funcionamiento. El péndulo invertido rotacional [2] es un ejemplo claro de un sistema mecánico subactuado, este es un mecanismo de dos grados de libertad (DOF) y dos articulaciones de rotación. Está constituido de tres elementos principales: un motor, un brazo rotacional y un péndulo [3]. El eje del motor está conectado a un extremo del brazo rotacional haciendo que este gire completamente en un plano horizontal, al otro extremo del brazo se tiene conectado el péndulo que gira libremente 360 grados en un plano vertical. A pesar de ser una planta netamente académica, este sistema es de gran ayuda al estudiar, aplicar y analizar diferentes estrategias de modelado.

Algunas aplicaciones industriales [4] que presentan el comportamiento e inconvenientes mencionados anteriormente, se encuentran en campos como: la robótica, equilibrio de robots, robots bípedos [5], brazos robóticos; aeroespacial, posicionamiento de cohetes; telecomunicaciones, posicionamiento satelital; transporte, Segway [6, 7], estabilidad de barcos y submarinos, iBot, Self-

balancing unicycle; construcción, puente grúas; y monitoreo en campo, drones.

Para la realización de este trabajo, inicialmente se realizó una revisión bibliográfica de proyectos similares [8, 9, 10], con el fin de determinar las dimensiones apropiadas para el posterior diseño del prototipo en el software CAD SolidWorks. Luego, se realizó de manera continua el modelado dinámico del sistema usando como método la mecánica Lagrangiana. Con el modelo dinámico obtenido se realizaron una serie de simulaciones con el propósito de observar el comportamiento del sistema. De esta forma fue posible comprobar de modo gráfico la forma de la posición y velocidad angular tanto del brazo como del péndulo.

Una parte fundamental en la etapa de simulaciones, consistió en llevar el modelo CAD realizado en SolidWorks al entorno de Simmechanics [11] de Matlab. Al mismo tiempo, las ecuaciones obtenidas mediante el uso de la mecánica Lagrangiana fueron resueltas con el método ODE23tb (Ordinary Differential Equations) perteneciente al software Matlab. El uso de diagramas de bloques en Simulink permitió una representación del sistema. Lo anterior tenía como finalidad, elaborar una superposición de resultados de ambas simulaciones y establecer similitudes y/o diferencias de la forma de onda de las variables de interés.

Por último, la gráfica del potencial efectivo del sistema permite trazar las trayectorias y así obtener el diagrama de espacio de fase [12] en el cual se pueden estudiar los puntos críticos que corresponden a los máximos y mínimos de dicho potencial.

En la sección II se presenta el diseño del modelo básico con sus respectivas variables físicas. En la sección III se da una definición breve de los sistemas subactuados. En la sección IV se resalta la ventaja de hacer uso del formalismo de Euler-Lagrange. En la sección V se realizó el modelado dinámico del péndulo invertido rotacional diseñado. En la sección VI se mencionan los pasos definidos para realizar las simulaciones propuestas como método de validación de resultados. En la sección VII se plasman los resultados obtenidos además, de un análisis de ellos. Por último, la sección VIII contiene las conclusiones pertinentes del artículo.

## II. PROTOTIPO PROPUESTO

En esta sección se expone el diseño básico realizado en el software CAD SolidWorks con las siguientes características:

TABLA I  
VARIABLES DEL SISTEMA

Característica física	Simbología
Masa del péndulo	$m_1$
Longitud del brazo	$L_0$
Longitud del péndulo	$L_1$
Ubicación del centro de masa del péndulo	$l_1$
Momento de inercia del brazo	$I_0$
Momento de inercia del péndulo	$I_1$
Posición angular del brazo	$\theta_0$
Posición angular del péndulo	$\theta_1$

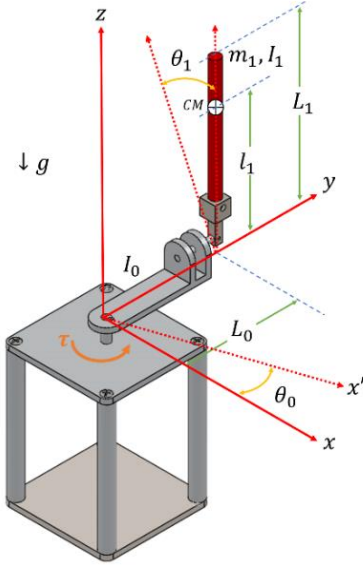


Fig. 1 Péndulo de Furuta

### III. SISTEMAS SUBACTUADOS

La actuación directa e indirecta son dos conceptos que se adquieren en el estudio de mecanismos. La primera consta del movimiento de elementos por acción de un actuador, mientras que la segunda consiste en la acción de movimiento transmitida por otro elemento interconectado. Tales movimientos se conocen como grados de libertad, de manera que los sistemas mecánicos o mecanismos se pueden clasificar dependiendo del número de grados de libertad y de la cantidad de actuadores. Los sistemas mecánicos completamente actuados son aquellos que tienen la misma cantidad de grados de libertad y actuadores. Los sistemas mecánicos subactuados son aquellos que poseen menos actuadores que grados de libertad [13]. Es importante resaltar las ventajas de los sistemas subactuados, puesto que si no tuvieran ventajas respecto a los sistemas mecánicos completamente actuados no tendría sentido su desarrollo, las principales ventajas presentes en los sistemas subactuados son: el ahorro de energía y los esfuerzos de control. Sin embargo, se pretende que estos sistemas realicen las mismas funciones de sistemas completamente actuados sin las desventajas de los mismos.

### IV. FORMULACIÓN EULER-LAGRANGE

Las ecuaciones dinámicas de cualquier sistema mecánico pueden obtenerse a partir de la mecánica clásica conocida (Newton), el inconveniente que presenta este formalismo es el uso de sus variables en forma vectorial, complicando así el análisis de forma notable cuando aumentan las articulaciones o existen rotaciones presentes en el sistema. En estos casos, es favorable emplear las ecuaciones de

movimiento de Lagrange, las cuales tienen un formalismo escalar debido a sus consideraciones puramente energéticas, facilitando así el análisis para cualquier sistema mecánico.

Para el uso de las ecuaciones de Lagrange es necesario seguir cuatro etapas:

- Cálculo de la energía cinética.
- Cálculo de la energía potencial.
- Cálculo del lagrangiano.
- Resolver las ecuaciones para cada grado de libertad.

Donde la energía cinética puede ser tanto rotacional como traslacional, esta forma de energía puede estar en función tanto de la posición como de la velocidad  $K(q(t), \dot{q}(t))$ .

La energía potencial se debe a fuerzas conservativas como las fuerzas ejercidas por resortes y por la gravedad, esta energía está en términos de la posición  $U(q(t))$ .

El lagrangiano se define como:

$$L = K - U \quad (1)$$

De modo que el lagrangiano en términos generales se define de la siguiente forma:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)) \quad (2)$$

Finalmente las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para un sistema de  $n$  grados de libertad está definida de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i \quad (3)$$

Donde  $i = 1, \dots, n$ ,  $\tau_i$  son las fuerzas o pares ejercidos de manera externa (actuadores) en cada articulación, además de fuerzas no conservativas como la fricción, resistencia al movimiento de un objeto dentro de un fluido y de forma general las que dependen del tiempo o de la velocidad. Se tendrán igual número de ecuaciones dinámicas como de grados de libertad.

### V. MODELADO DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL

Se realizó el modelado Lagrangiano del sistema mostrado en la Fig. 1. Por ello, inicialmente se analiza la energía cinética de cada eslabón.

#### A. Energía Cinética

La energía cinética está definida por una componente traslacional y otra rotacional para el péndulo y una componente rotacional para el brazo,

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (4)$$

Donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $v$  la velocidad lineal,  $I$  el momento de inercia,  $\omega$  la velocidad angular y  $K$  la energía cinética. En este caso hay dos cuerpos, el brazo y el péndulo. La energía cinética del brazo es,

$$K_0 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 \quad (5)$$

La energía cinética del péndulo es,

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (6)$$

La energía total del sistema es,

$$K_T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (7)$$

### B. Energía Potencial

Este sistema sólo almacena energía potencial gravitacional en el péndulo.

$$U = mgh \quad (8)$$

El brazo tiene en su naturaleza un movimiento de rotación en un plano horizontal, por tanto no posee cambio de altura en su centro de masa, que se prescinde de ésta debido a que no cambia en el tiempo.

La energía potencial del péndulo es,

$$U_1 = m_1 g l_1 (\cos \theta_1 - 1) \quad (9)$$

Donde el término  $g$  representa la gravedad. La energía potencial total del sistema es,

$$U_T = m_1 g l_1 (\cos \theta_1 - 1) \quad (10)$$

### C. Posición del Péndulo

Debido a que el péndulo es un cuerpo rígido, la posición requerida es la de su centro de masa.

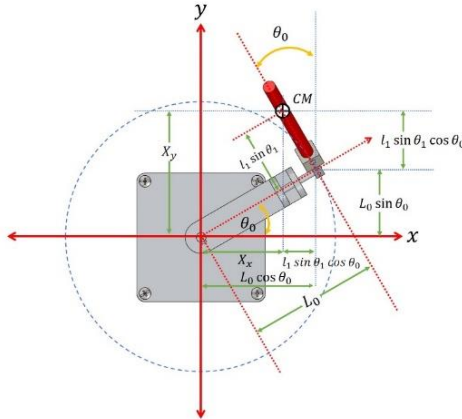


Fig. 2 Proyección del brazo y péndulo en el plano  $xy$

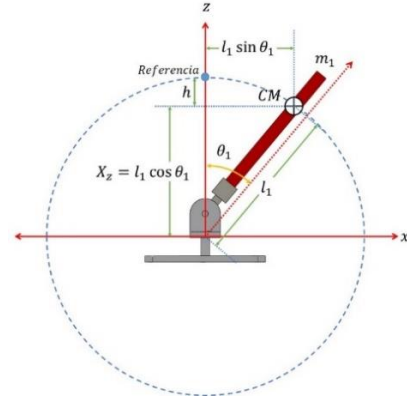


Fig. 3 Proyección del péndulo en el plano  $xz$

A continuación, se muestra la posición de las componentes del centro de masa:

$$X_x = L_0 \cos \theta_0 - l_1 \sin \theta_1 \sin \theta_0, \quad (11)$$

$$X_y = L_0 \sin \theta_0 + l_1 \sin \theta_1 \cos \theta_0, \quad (12)$$

$$X_z = l_1 \cos \theta_1, \quad (13)$$

La posición del centro de masa es:

$$X_{CM} = [X_x \quad X_y \quad X_z]^T \quad (14)$$

### D. Velocidad Lineal del Centro de Masa

La velocidad está definida como la derivada de la posición con respecto al tiempo.

$$\frac{d}{dt}(X_{CM}) = V_{CM} \quad (15)$$

$$\dot{X}_{CM} = V_{CM} = [\dot{X}_x \quad \dot{X}_y \quad \dot{X}_z]^T \quad (16)$$

Las componentes de la velocidad se hallan derivando cada componente de la posición (11), (12) y (13) respectivamente,

$$\dot{X}_x = -\dot{\theta}_0 L_0 \sin \theta_0 - l_1 (\dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \cos \theta_0 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_0) \quad (17)$$

$$\dot{X}_y = \dot{\theta}_0 L_0 \cos \theta_0 + l_1 (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_0 - \dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \sin \theta_0) \quad (18)$$

$$\dot{X}_z = -\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \quad (19)$$

Con la velocidad lineal del centro de masa se obtiene el término  $V_{CM}^2$  mediante la expresión,

$$V_{CM}^2 = [\dot{X}_x \quad \dot{X}_y \quad \dot{X}_z] \begin{bmatrix} \dot{X}_x \\ \dot{X}_y \\ \dot{X}_z \end{bmatrix} = \dot{X}_x^2 + \dot{X}_y^2 + \dot{X}_z^2 \quad (20)$$

Se hallan por separado cada una de las componentes al cuadrado de la velocidad del centro de masa.

$$\dot{X}_x^2 = \dot{\theta}_0^2 L_0^2 \sin^2 \theta_0 - 2(\dot{\theta}_0 L_0 \sin \theta_0) (l_1 (\dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \cos \theta_0 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_0)) + l_1^2 (\dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \cos \theta_0 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_0)^2 \quad (21)$$

$$\dot{X}_y^2 = \dot{\theta}_0^2 L_0^2 \cos^2 \theta_0 + 2(\dot{\theta}_0 L_0 \cos \theta_0) \left( l_1 (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_0 - \dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \sin \theta_0) \right) + l_1^2 (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_0 - \dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \sin \theta_0)^2 \quad (22)$$

$$\dot{X}_z^2 = \dot{\theta}_1^2 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \quad (23)$$

Finalmente se obtiene la siguiente expresión para la velocidad lineal.

$$V_{CM}^2 = L_0^2 \dot{\theta}_0^2 + l_1^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_0^2 \sin^2 \theta_1) + 2L_0 l_1 m_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (24)$$

#### E. Energía del Sistema

La energía cinética total del sistema es,

$$K_T = K_0 + K_1 \quad (25)$$

Reemplazando (5) y (6) en (25) se obtiene,

$$K_T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 V_{CM}^2 \quad (26)$$

La energía cinética total se obtiene al sustituir la ecuación (24) en (26)

$$K_T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 [L_0^2 \dot{\theta}_0^2 + l_1^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_0^2 \sin^2 \theta_1) + 2L_0 l_1 m_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1] \quad (27)$$

La energía potencial del sistema se puede observar en la ecuación (10),

#### F. Ecuaciones de Euler-Lagrange

El lagrangiano del sistema es,

$$L = K_T - U_T \quad (28)$$

Sustituyendo (10) y (27) en (28) se obtiene el lagrangiano del sistema,

$$L = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (L_0^2 m_1 \dot{\theta}_0^2) + \frac{1}{2} (l_1^2 m_1 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} (l_1^2 m_1 \dot{\theta}_0^2 \sin^2 \theta_1) + L_0 l_1 m_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) \quad (29)$$

Como se tienen dos grados de libertad (DOF) las ecuaciones de Euler-Lagrange tienen la siguiente la forma,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = \tau \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (31)$$

Donde  $\tau$  es el torque generado por el motor. Resolviendo (30) y (31) obtenemos las ecuaciones de movimiento las cuales vienen dadas por,

$$I_0 \ddot{\theta}_0 + L_0^2 m_1 \ddot{\theta}_0 + \{ l_1^2 m_1 (\ddot{\theta}_0 \sin^2 \theta_1 + 2\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1) \} + \{ L_0 l_1 m_1 (\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) \} = \tau \quad (32)$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + l_1^2 m_1 \ddot{\theta}_1 + L_0 l_1 m_1 \ddot{\theta}_0 \cos \theta_1 - l_1^2 m_1 \dot{\theta}_0^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (33)$$

Donde (32) es la ecuación de movimiento del brazo y (33) la del péndulo.

## VI. SIMULACIÓN

A pesar que el formalismo de Euler-Lagrange garantiza un alto grado de aproximación de los modelos matemáticos, es indispensable realizar comparaciones para validar estos resultados. Para la verificación del modelado se siguieron los siguientes pasos:

- 1) Representar las ecuaciones del sistema en el espacio de estados.
- 2) Definir un experimento con condiciones iniciales, interacciones naturales y fuerzas externas.
- 3) Exportar a Simmechanics-Matlab el modelo CAD de SolidWorks.
- 4) Agregar los bloques necesarios para obtener las gráficas deseadas del modelo y aplicar las fuerzas externas.
- 5) Simular experimento.
- 6) Exportar los resultados de Simmechanics al Workspace de Matlab.
- 7) Implementar un diagrama de bloques en Simulink-Matlab para resolver las ecuaciones.
- 8) Exportar las soluciones de las ecuaciones al Workspace de Matlab.
- 9) Graficar y sobreponer las soluciones.

Como se puede observar en los pasos mencionados anteriormente, la simulación del modelo se dividió en dos etapas: la primera, implementar las ecuaciones obtenidas y la segunda, simular el modelo CAD diseñado inicialmente.

## VII. RESULTADOS

A continuación, se presenta cada una de las etapas mencionadas en la sección anterior.

- 1) Partiendo de [14],

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (34)$$

De modo que la ecuación (34) es la ecuación dinámica para sistemas mecánicos de n grados de libertad (DOF). Donde  $M$  es la matriz de inercia del sistema,  $C$  es la matriz centrífuga y de Coriolis,  $G$  el vector de gravedad y  $\tau$  las fuerzas externas.

Tomando las ecuaciones de movimiento (32) y (33) y llevándolas a la expresión matricial (34) se obtiene la representación en espacio de estados del sistema,

$$\begin{bmatrix} I_0 + m_1 L_0^2 + l_1^2 m_1 \sin^2 \theta_1 & L_0 l_1 m_1 \cos \theta_1 \\ L_0 l_1 m_1 \cos \theta_1 & I_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2l_1^2 m_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 & -L_0 l_1 m_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ -l_1^2 m_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g l_1 m_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

La matriz  $M(q)$  es primordial tanto para el modelado dinámico como para el diseño de controladores. Esta matriz tiene una gran relación con la energía cinética, además la matriz de inercia es una

matriz simétrica, positiva y cuadrada de  $n \times n$ , cuyos elementos dependen únicamente de las coordenadas generalizadas.

La matriz centrífuga y de Coriolis  $C(q, \dot{q})$  es importante en el estudio de estabilidad de los sistemas de control, de sistemas mecánicos, entre otros. Esta matriz es cuadrada de  $n \times n$  y tiene dependencia en sus elementos tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas.

El vector de gravedad  $G(q)$  está presente en sistemas mecánicos que no poseen contrapesos o resortes, a su vez se encuentra en sistemas que tienen desplazamientos fuera del plano horizontal. Este vector es de  $n \times 1$  y tiene solo dependencia de las posiciones articulares.

2) El sistema se encuentra inicialmente en reposo como se muestra en la Fig. 5 a). Luego, le es aplicado un torque a la primera articulación. Finalmente, se estableció un intervalo de simulación de 5 segundos.

3-4) Después de exportar el modelo CAD de SolidWorks a Simmechanics, fue necesario añadir unos cuantos bloques al diagrama obtenido, puesto que el modelo CAD estaba sólo bajo el efecto de la gravedad y no tendría algún tipo de movimiento, por ello se incluyen bloques que proporcionan el escalón de torque al brazo para que comience a girar, además de añadir bloques para el sensado de los desplazamientos y las velocidades angulares en un intervalo de 5 segundos de prueba.

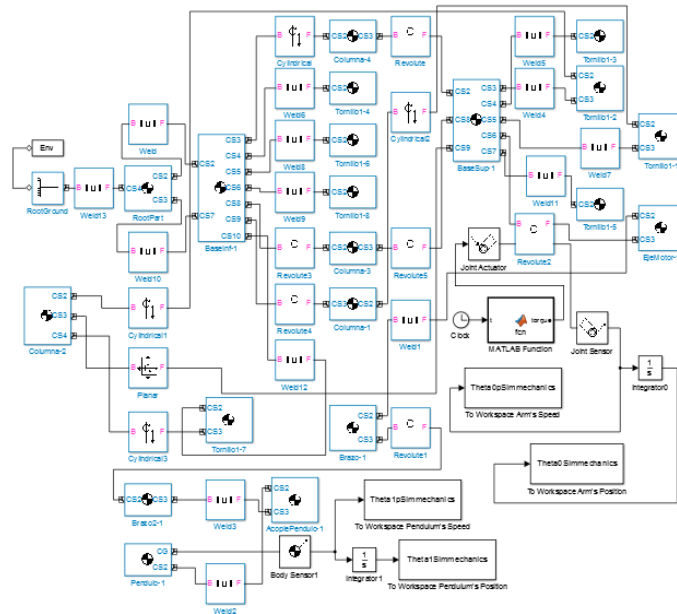


Fig. 4 Diagrama de bloques final en Simmechanics

5) Se tomaron algunos instantes de la posición del sistema en el intervalo de tiempo definido.

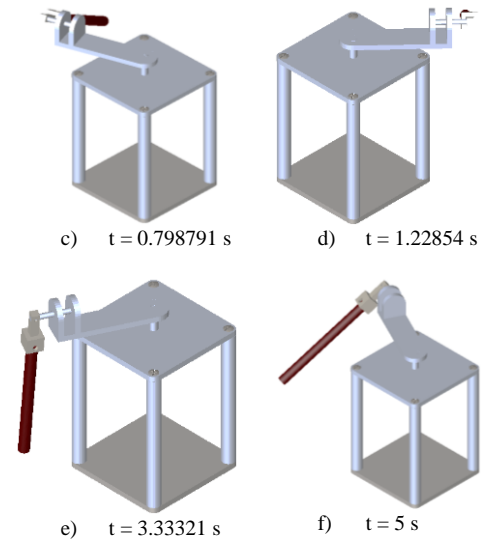
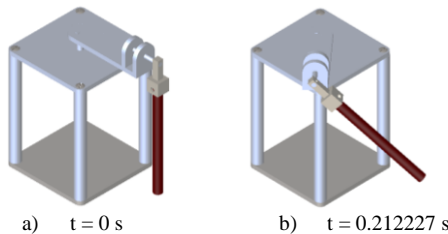


Fig. 5 Experimento en Simmechanics

6) Para exportar las soluciones del sistema al Workspace es necesario agregar los bloques con el nombre To Workspace ubicados en la librería de Simulink, el cual creará una celda para cada solución, con el dato respectivo y el tiempo en el cual se obtiene tal dato.

7) La implementación del diagrama de bloques se realizó para resolver numéricamente las ecuaciones del sistema, obteniendo así los valores de  $\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1$  a lo largo del intervalo de tiempo definido. El diagrama implementado es el siguiente:

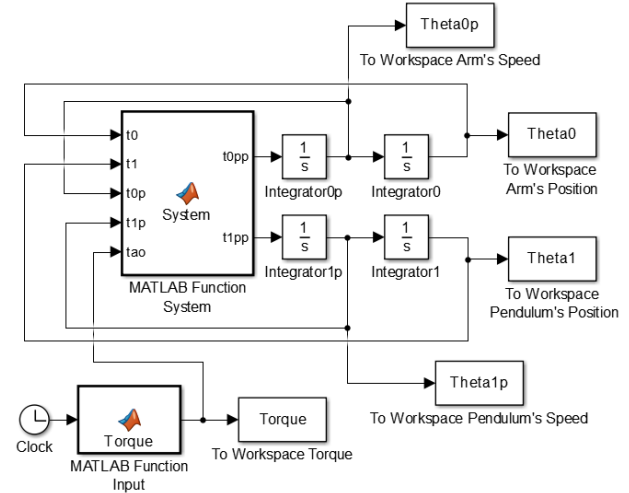


Fig. 6 Diagrama de bloques con ecuaciones de Euler-Lagrange

En donde el primer bloque tiene la entrada aplicada al sistema, que en este caso es un escalón de torque de 0.2 segundos, el cual tiene como valor 0.5 N.m que es el torque máximo ofrecido por el motor. El bloque que lleva por nombre System contiene las ecuaciones del modelo en el espacio de estados, con 5 entradas ( $\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1, \tau$ ) y 2 salidas ( $\ddot{\theta}_0, \ddot{\theta}_1$ ).

Los datos numéricos necesarios para resolver las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange son los siguientes:

TABLA II

# VARIABLES NUMÉRICAS DEL SISTEMA

Característica física	Simbología	Valor
Masa del péndulo	$m_0$	0.2866 kg
Longitud del brazo	$L_0$	0.201 m
Longitud del péndulo	$L_1$	0.30997 m
Ubicación del centro de masa del péndulo	$l_1$	0.154985 m
Gravedad	$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
Momento de inercia del brazo	$I_0$	0.0052 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inercia del péndulo	$I_1$	0.0023 kg.m <sup>2</sup>

Se hizo una aproximación en cuanto al cálculo de los momentos de inercia, ambos eslabones se tomaron como barras circulares de masa constante e invariante,

$$I_0 = \frac{1}{3} m_0 L_0^2 \quad (36)$$

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \quad (37)$$

Donde la ecuación (36) es el momento de inercia del brazo medido desde el extremo conectado al eje del motor hasta el extremo opuesto. Mientras que la ecuación (37) es el momento de inercia del péndulo medido hasta el centro de masa.

8) La forma de exportar los datos al Workspace del diagrama de la Fig. 6 se realiza con el mismo bloque agregado en el paso 6).

9) Tomando los datos exportados en los pasos 6) y 8) se realizaron las siguientes gráficas.

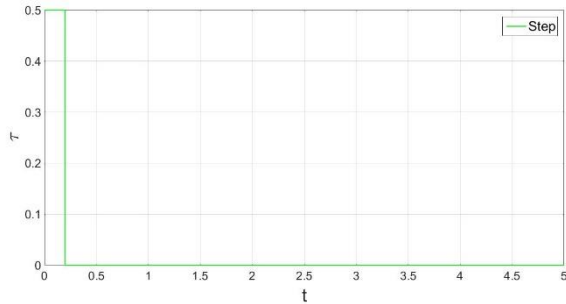


Fig. 7 Escalón aplicado

Se observa que el comportamiento del sistema es el mismo en ambas simulaciones. Se realizó una superposición de resultados a modo de visualizar el error entre el modelo CAD simulado y las ecuaciones de Euler-Lagrange, obteniendo los siguientes resultados:

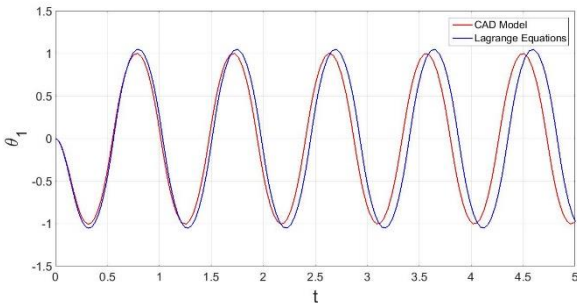


Fig. 8. Comparación resultados posición angular del péndulo

La Fig. 8 permite visualizar la superposición del comportamiento del desplazamiento del centro de masa en el péndulo. La línea roja representa al modelo CAD mientras que la azul es el resultado de graficar la solución de  $\theta_1$  con respecto al tiempo.

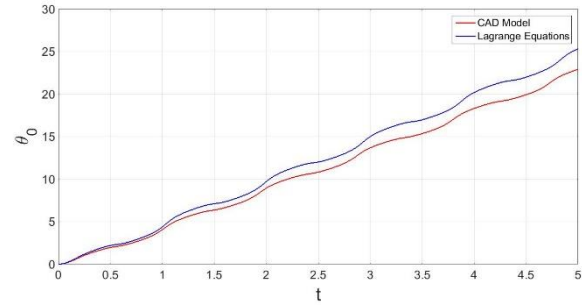


Fig. 9 Comparación resultados posición angular del brazo

La Fig. 9 es la superposición de los resultados obtenidos al simular y graficar  $\theta_0$  en función del tiempo, donde la línea roja es el resultado de simular en Simmechanics el modelo CAD y la línea azul resulta de la solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

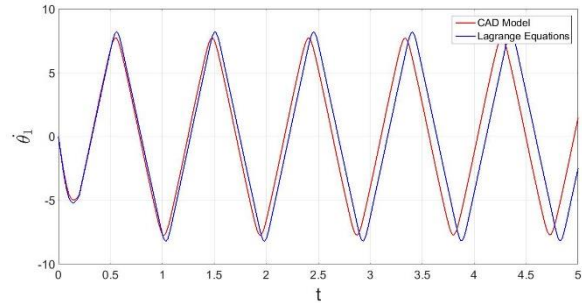


Fig. 10 Comparación resultados velocidad angular del péndulo

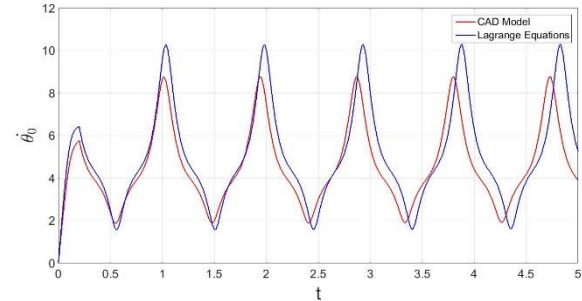


Fig. 11 Comparación resultados velocidad angular del brazo

De igual manera que ocurrió con las Fig. 8 y 9 las Fig. 10 y 11 ilustran el comportamiento de la velocidad angular con respecto al tiempo para el péndulo y el brazo respectivamente.

Es importante aclarar que las gráficas no tienen un error nulo, debido a las aproximaciones que se hicieron para el cálculo de los momentos de inercia de cada eslabón, la diferencia radica en que el software SolidWorks realiza un cálculo más exacto de los momentos de inercia, pues el software si tiene en cuenta la geometría de cada eslabón.

A continuación, se muestra el análisis de trayectorias del péndulo, el cual parte de la energía potencial presente en el centro de masa mostrada en la ecuación (9)



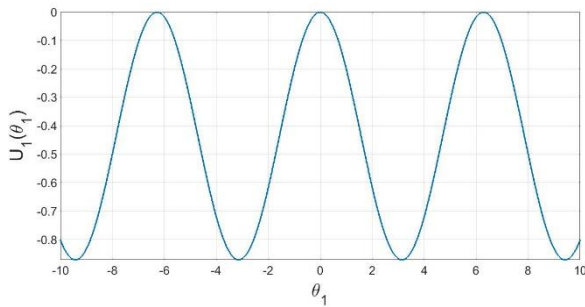


Fig. 12. Energía potencial del péndulo

Cuando se reúnen todas las trayectorias del péndulo se obtiene el diagrama de fase, el cual muestra cuáles son los puntos críticos del sistema, en este caso sabemos que el péndulo tiene dos puntos críticos, un punto estable en el cual el péndulo está en su posición colgante y el punto inestable que en este caso hace referencia a un punto metaestable que se satisface cuando el péndulo está invertido. De modo gráfico se puede obtener los puntos críticos del sistema, mediante la Fig. 12 se puede observar que los mínimos ocurren cuando la onda va de una pendiente negativa a una pendiente positiva, por ello se obtienen mínimos en  $\pm\pi i$  donde  $i$  debe ser impar. De manera similar, se pueden hallar los máximos, estos se presentan cuando se pasa de una pendiente positiva a una negativa, por ello, los máximos están presentes en  $\pm\pi i$  donde  $i$  debe ser igual a 0 o par.

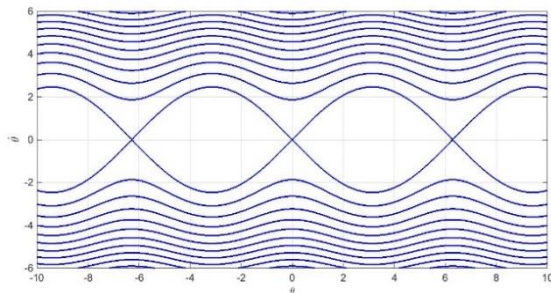


Fig. 13. Espacio de fase del péndulo

Físicamente cada punto de la gráfica anterior representa un posible estado del sistema, explícitamente el estado en el cual el péndulo estaría.

Como se mencionó anteriormente el péndulo tiene dos puntos de equilibrio. Sin embargo, en el espacio de fase se ven infinitud de estos puntos, debido a que se ha representado la posición como si fuera una recta o un espacio  $R$  cuando el espacio real es un círculo que no es topológicamente igual a  $R$ . Por tanto, si el espacio que representa la situación geométrica del sistema no es topológicamente equivalente a  $R$ , por consiguiente el espacio de fase no lo será en  $R^2$ , ya que este es el producto cartesiano entre el espacio geométrico y el espacio que representa la velocidad que generalmente es  $R$ .

Topológicamente, el péndulo tiene un espacio geométrico  $S^1$  que es equivalente a un círculo y un espacio de velocidades  $R$ , por tanto, el espacio de fase será  $S^1 \times R$  que equivale a un cilindro y no  $R^2$ . El proceso gráfico correcto debe hacerse sobre un cilindro, en el cual su circunferencia es la representación geométrica del péndulo, esto es equivalente al conjunto de posibles posiciones del centro de masa, mientras que la posición a lo largo de su eje representa la velocidad del centro de masa, este cilindro será el espacio de fase topológicamente correcto. Al recorrer la circunferencia del cilindro podemos observar que existe un solo mínimo y un solo máximo diametralmente opuestos. En la Fig. 12 se podían tomar niveles de

energía que eran resultado de trazar líneas rectas paralelas al eje de la posición  $\theta_1$ , pues bien, ahora esos niveles se podrán tomar con círculos que rodean al cilindro.

## VIII. CONCLUSIONES

El formalismo de Euler-Lagrange permite realizar un modelado dinámico del péndulo invertido rotacional de una forma sencilla, gracias a que el formalismo trabaja de forma escalar.

En este trabajo se ha presentado paso a paso el modelado dinámico del sistema propuesto, además de la simulación respectiva de la solución de las ecuaciones y una posterior validación de los resultados con ayuda de una simulación del modelo CAD diseñado en SolidWorks en la extensión de Simmechanics Matlab.

Este documento se diferencia de los demás gracias al uso de la extensión Simmechanics para la simulación del modelo CAD, esta herramienta es sencilla de usar y confiable, esto es una ventaja para realizar simulaciones de modelo 3D puesto que no es necesaria la creación de plataformas para su simulación. También permite trabajar de formas diferentes en el mismo software que en este caso es Matlab, es decir, en el entorno de Simulink se pudo realizar simulaciones para el mismo modelo de dos formas totalmente distintas; la primera, teniendo en cuenta el modelo CAD; y la segunda, implementando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

Los resultados gráficos obtenidos son acertados, puesto que, como es de conocimiento general el péndulo tiene un movimiento senoidal, tal movimiento se puede ver reflejado en la Fig. 8. Como se puede ver en la Fig. 6, la posición es obtenida después de integrar la velocidad, que a su vez fue obtenida de integrar la aceleración que arrojó la solución numérica, por tanto al ser un procedimiento secuencial se puede concluir con total seguridad que los resultados son correctos.

Adicionalmente, en este artículo en particular se realiza el análisis en cuanto a las trayectorias del péndulo, tal análisis de espacio de fase es topológicamente correcto, siendo este un buen aporte a futuros estudios dinámicos, cinemáticos y físicos del sistema.

El trabajo desarrollado es de gran importancia para estudios posteriores en estabilidad, controlabilidad, observabilidad, control de posición o velocidad, y conservación de energía.

## REFERENCIAS

- [1] F. Gómez-Estern, "Control de sistemas no lineales basado en la estructura hamiltoniana," tesis doctoral, Universidad de Sevilla España, 2002.
- [2] J. Á. Acosta, "Furuta's pendulum: A conservative nonlinear model for theory and practice," *Mathematical Problems in Engineering*, 2010.
- [3] M.A. Cruz, R. Silva Ortigoza, C.A. Merlo Zapata, M.G. Villarreal Cervantes, D. Muñoz Carrillo, V.M. Hernandez Guzmán, "Modeling and Construction of a Furuta Pendulum Prototype". *International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering*, 2014.
- [4] Blajer W., Kolodziejczyk K., Modeling of underactuated mechanical systems in partly specified motion, *Journal of Theoretical and applied mechanics*, 2008.
- [5] S. Kajita, M. Morisawa, K. Miura, S. Nakaoka, K. Harada, K. Kaneko, et al., "Biped walking stabilization based on linear inverted pendulum tracking," In: *Proceedings of the IEEE/RSJ 2010 International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Taipei, pp. 4489-449, 2010.
- [6] Younis, W., Abdelati, M. (2009). Design and implementation of an experimental segway model, *AIP Conference Proceedings*, 1107, p. 350-354, 2009.
- [7] A. Viguria, R. Cano, M. Fiacchini, A. Prieto, B. J. Vela, F. R. Rubio, J. Aracil, C. Canudas-de-Wit. "PPCAR (Personal Pendulum Car): Vehículo Basado en Péndulo Invertido". *Departament Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, España. Laboratoire d'Automatique de Grenoble (CNRS-LAG), Francia.*
- [8] Quanser Innovate Educate, "The Rotatory Control Lab a Modular Single Source Solution You Can Control", Tomado de: [www.quanser.com](http://www.quanser.com).

- [9] R. Toro Santa María, "Diseño y Control de un Péndulo Furuta para su Utilización en las Aulas de Clase de la Universidad EAFIT", Proyecto de grado para su utilización en las aulas de clase de la Universidad EAFIT. Universidad EAFIT, escuelas de ingenierías, departamento de ingeniería mecánica. Medellin, 2009, pp. 88.
- [10] Ch. Huang Yu, F. Cheng Wang, Y. Ju Lu., "Robust Control of a Furuta Pendulum". SICE Annual Conference 2010, The Grand Hotel, Taipei, Taiwan, 2010.
- [11] V. Fedák, F. Ďurovský, R. Üveges., "Analysis of Robotic System Motion in SimMechanics and MATLAB GUI Environment", Department of Electrical Engineering and Mechatronics, FEEaI, Technical University of Kosice, Slovakia.
- [12] J. B. Marion. "Dinámica clásica de las partículas y sistemas". University of Maryland College Park. Academic Press, New York y London. Editorial Reverté, S. A, 1998, pp 643.
- [13] C. D. Conejo Rosas, "Control Robusto H de Sensibilidad Mezclada Aplicado a Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo Subactuados", tesis al grado de maestro en ciencias de la ingeniería eléctrica con orientación en control automático, Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. División de Estudios de Posgrado pp. 112.
- [14] R. Kelly, V. Santibáñez, "Control de Movimiento de Robots Manipuladores", PEARSON EDUCATION, S.A., Madrid, 2003, pp. 59-113.