Introduction à la théorie et l'approximation des sytèmes hyperboliques

Philippe Helluy

Chapitre 1

Généralités

1.1. Introduction

Dans ce cours, nous nous intéressons aux solutions $w(x,t)$ du système d'équations aux dérivées partielles

$$\partial_t w + A^k \partial_k w = 0. \tag{1.1.1}$$

Souvent, le vecteur w est appelé vecteur des variables conservatives. Nous utilisons les notations suivantes :

(1) $x = (x^1 \dots x^d)$ est un point d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (en pratique $d = 1, 2$ ou 3).

(2) t représente le temps, $t \in [0, T]$, $T > 0$.

(3) $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ et $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$.

(4) Pour tout (x,t) $w(x,t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

(5) Les A^k sont des matrices réelles $m \times m$ pour $k = 1 \dots d$.

(6) Nous utilisons la convention de somme sur les indices répétés :

$$A^k \partial_k w \text{ veut dire } \sum_k A^k \partial_k w$$

En général, il faut adjoindre à (1.1.1) une condition initiale

$$w(x,0) = w_0(x). \tag{1.1.2}$$

Si la condition initiale est très régulière il faut comprendre que w est une solution au sens classique, c'est à dire que l'on cherche des solutions régulières, donc dérivables, de (1.1.1), (1.1.2). Lorsque la condition initiale est moins régulière, par exemple seulement dans $L^2(\Omega)$, il existe plusieurs façons de définir les solutions. Une possibilité est d'abord de traiter le cas de conditions initiales régulières dans un sous-espace dense de L^2, de construire une solution w, de démontrer un résultat de continuité de w par rapport à w_0 pour la norme L^2 puis de prolonger par continuité l'opérateur linéaire ainsi construit à L^2 tout entier.

En général, il faut aussi ajouter des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ le bord de Ω. Ce point sera abordé au Chapitre 2. Ici, nous nous contentons d'étudier le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Pour que le problème (1.1.1), (1.1.2) soit bien posé, il faut satisfaire la condition suivante :

DÉFINITION 1. Le système (1.1.1) est dit hyperbolique ssi pour tout vecteur $n = (n_1 \dots n_d)$ de $\mathbb{R}^d$, la matrice $A(n) = A^k n_k$ est diagonalisable avec des valeurs propres réelles.

Cette notion est importante à cause du résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Si le système (1.1.1) est hyperbolique et si $\Omega = \mathbb{R}^d$, alors le problème d'évolution (1.1.1), (1.1.2) admet une unique solution $w \in C([0,T], L^2(\Omega))$ et il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour toute condition initiale $w_0 \in L^2(\Omega)$,*

$$\|w(\cdot,t)\| \leq C \|w_0(\cdot)\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme sur $L^2(\Omega)$

$$\|w(\cdot)\| := \left(\int_\Omega w(x) \cdot w(x) dx \right)^{1/2}.$$

Par ailleurs, si le système n'est pas hyperbolique, alors pour toute constante $C > 0$ et tout temps t il existe une condition initiale w_0 et une solution w du problème d'évolution telle que

$$\|w(\cdot,t)\| \geq C \|w_0(\cdot)\|,$$

en d'autres termes, le problème d'évolution est instable.

EXERCICE 3. Démontrer ce théorème (utiliser Fourier)

REMARQUE 4. Lorsque $m = 1$, le système est réduit à une équation scalaire. Il est donc évidemment hyperbolique. Lorsque les matrices A^k sont symétriques, alors le système est automatiquement hyperbolique, car une matrice symétrique est toujours diagonalisable avec des valeurs propres réelles. Dans ce cas il est aussi appelé système de Friedrichs.

Le cas plus général des systèmes non-linéaires sera abordé en seconde partie. Nous pouvons cependant déjà donner quelques définitions. Un système non-linéaire s'écrit

$$\partial_t w + \partial_k f^k(w) = 0, \tag{1.1.3}$$

où cette fois-ci les f^k sont des fonctions, en général non-linéaires, de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Nous introduisons la fonction flux du système non-linéaire

$$f(w, n) = n_k f^k(w).$$

La jacobienne du flux est notée

$$A(w, n) = D_w f(w, n) = A^k(w) n_k, \quad \text{avec } A^k(w) = D_w f^k(w).$$

Définition 5. Le système non-linéaire est dit hyperbolique ssi pour tout vecteur de variables conservatives w et pour toute direction n de $\mathbb{R}$ la jacobienne du flux $A(w, n)$ est diagonalisable avec des valeurs propres réelles.

Il s'agit bien d'une généralisation de la notion de système hyperbolique linéaire. En effet si les fonctions f^ksont linéaires alors $A^k = D_w f^k(w)$ sont bien des matrices constantes. Par ailleurs, un système non-linéaire est hyperbolique lorsque la linéarisation de ce système autour d'un état constant $\overline{w}$ est un système hyperbolique linéaire.

Exercice 6. Rendre la remarque précédente rigoureuse !

Exercice 7. Soit w une solution du problème d'évolution (1.1.1), (1.1.2) avec $\Omega = \mathbb{R}$. Montrer que formellement

$$\int_\Omega w = \int_\Omega w_0. \tag{1.1.4}$$

Déterminer également les conditions qui rendraient ce résultat rigoureux. La propriété (1.1.4) justifie que le système (1.1.3) soit aussi appelé système de lois de conservation et que w soit appelé vecteur des variables conservatives.

1.2. Exemples

Lorsque $m = 1$ le système hyperbolique linéaire (1.1.1) est une équation de transport à la vitesse $a = (A^1 \dots A^d)$

$$\partial_t w + a \cdot \nabla_x w = 0.$$

Exercice 8. Résoudre l'équation de transport.

Voici d'autres exemples d'équations hyperboliques à traiter en exercice.

Exercice 9. On suppose $d = 2$. En acoustique les inconnues sont la pression $p(x, y, t)$ et le déplacement $u(x, y, t) = (u^1(x, y, t), u^2(x, y, t))$. Les équations sont

$$\begin{aligned} \partial_t p + c\nabla \cdot u &= 0, \\ \partial_t u + c\nabla p &= 0. \end{aligned}$$

Montrer que ce système est hyperbolique.

Exercice 10. Lire sur Wikipédia l'article consacré aux équations de Maxwell. On appelle système de Maxwell le système constitué des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère. Montrer que c'est un système hyperbolique. Traiter les cas $d = 3$, $d = 2$ (équations dites « transverse électriques » (mode TE) ou « transverse magnétique » (mode TM)). Traiter aussi le cas $d = 1$.

Exercice 11. Lire sur Wikipédia l'article consacré aux équations de Barré de Saint-Venant. Montrer que ces équations constituent un système hyperbolique non-linéaire. Traiter les cas $d = 1$ et $d = 2$.

Exercice 12. Trouver sur internet la formulation des équations d'Euler pour un gaz parfait compressible. Montrer qu'il s'agit d'un système hyperbolique non-linéaire. Traiter les cas $d = 1$ et $d = 2$.

1.3. Problème de Riemann

Soit un système hyperbolique linéaire de solution $\tilde{w}$ et soit un vecteur unitaire n dans $\mathbb{R}^d$: $|n| = \sqrt{n_1^2 + \cdots + n_d^2} = 1$. Nous allons chercher des solutions $\tilde{w}$ qui ne varient que selon la direction n. Nous posons donc

$$\xi = n \cdot x$$

et

$$\tilde{w}(x, t) = w(\xi, t).$$

Alors w est solution du système hyperbolique monodimensionnel ($d = 1$)

$$\partial_t w + A \partial_\xi w = 0$$

Chapitre 2

Conditions aux limites

2.1. Théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida est un théorème abstrait de la théorie des opérateurs linéaires qui permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'évolution. Nous donnons les notions minimales pour comprendre l'énoncé de ce théorème. Pour plus de détails, nous renvoyons au livre de Brézis [**1**].

Nous considérons un espace de Hilbert H de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En général, A désignera un opérateur non-borné de H à domaine dense c'est à dire une application linéaire d'un sous-espace vectoriel $D(A)$ de H à valeurs dans H. Le sous-espace vectoriel $D(A)$ est appelé domaine de A. Si H est un Hilbert de dimension infini, $D(A)$ n'est généralement pas fermé. Nous supposons que le domaine de A est dense, c'est à dire que $\overline{D(A)} = H$ pour la topologie forte de H. La topologie forte est la topologie associée à la norme du produit scalaire de H. Le graphe de A, noté $G(A)$ est l'ensemble

$$G(A) = \{(u, Au), u \in D(A)\} \subset H \times H.$$

En général, $\overline{G(A)}$ n'est pas le graphe d'un opérateur univoque, c'est à dire que $(u, f_1) \in \overline{G(A)}$ et $(u, f_2) \in \overline{G(A)}$ n'implique pas forcément que $f_1 = f_2$.

Exercice 13. Le vérifier sur un exemple...

Si $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur univoque, nous dirons que A est un opérateur non-borné fermable. Nous appellerons fermeture de A et nous noterons $\overline{A}$ l'opérateur tel que $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$.

DÉFINITION 14. Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit A un opérateur linéaire de $D(A)$, sous-espace vectoriel de H, dans H. A est maximal-monotone ssi

(1) Pour tout x dans $D(A)$, $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.

(2) $I + A$ est surjectif de $D(A)$ sur H.

Nous considérons alors le problème d'évolution abstrait d'inconnue $u(t) \in D(A)$

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= 0, \\ u(0) &= u_0 \in D(A). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Le théorème de Hille-Yosida donne une condition pour que ce problème soit bien posé. Dans le cas qui nous intéresse, l'opérateur A sera formellement l'opérateur aux dérivées partielles en espace $A^k \partial_k$ et son domaine $D(A)$ sera l'ensemble des w qui satisfont les conditions aux limites.

THÉORÈME 15. *(Hille-Yosida) Si A est maximal monotone, alors le problème (2.1.1) admet une solution unique u dans* $C^1([0,T], H) \cap C([0,T], D(A))$ *et pour tout t*

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad \|\partial_t u(t)\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|.$$

Notons que dans ce théorème, $D(A)$ est muni de la norme dite du graphe

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_H + \|Au\|_H.$$

Remarquons aussi que l'application, notée S^t qui à u_0 associe $u(t)$ peut donc être prolongée par densité en un semi-groupe de contrations de H dans H. Il est donc possible de définir des solutions du problème d'évolution lorsque $u_0 \in H$.

EXERCICE 16. Démontrer le théorème de Hille-Yosida lorsque H est un Hilbert de dimension finie.

Nous allons maintenant introduire quelques outils qui permettront de démontrer la surjectivité de $I + A$. Les démonstrations seront basées sur des techniques d'intégration par parties et de passage à l'adjoint.

Définition 17. Soit A un opérateur linéaire de H dans H de domaine $D(A)$ dense. $A^{\#}$ est un adjoint formel de A ssi $A^{\#}$ est à domaine dense et

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^{\#}), \quad \langle Au, v\rangle = \left\langle u, A^{\#} v\right\rangle$$

Exercice 18. Si A admet un adjoint formel $A^{\#}$, montrer que A est fermable c'est à dire que la fermeture du graphe de A, $G(A)$ dans $H \times H$ définit un opérateur univoque.

Définition 19. Soit A un opérateur de H dans H à domaine dense. L'adjoint de A noté A^* est un opérateur de H dans H défini de la façon suivante :

(1) $D(A^*) = \{v \in H, \exists C \geq 0, \forall u \in D(A), |\langle Au, v\rangle| \leq C \|u\|\}$. En d'autres termes, $D(A^*)$ est l'ensemble des v dans H telle que la forme linéaire $u \mapsto \langle Au, v\rangle$ est continue sur $D(A)$ pour la norme de H.
(2) Si $v \in D(A^*)$ alors l'application qui à u associe $\langle Au, v\rangle$ se prolonge (par densité de $D(A)$ dans H) en une forme linéaire continue sur H c'est à dire un élément de H'. Comme H est un espace de Hilbert, par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que $\langle Au, v\rangle = \langle f, u\rangle$. Alors par définition $f = A^* v$.

En général, $A^* \neq A^{\#}$.

Exercice 20. Montrer que pour tout adjoint formel $A^{\#}$, $G(A^{\#}) \subset G(A^*)$ et que donc $D(A^{\#}) \subset D(A^*)$.

Définition 21. Soit A un opérateur fermable. Soit u un élément de H. u est une solution forte de $Au = f$ ssi $\overline{A}u = f$.

Une solution forte u de $Au = f$ est telle que $(u, f) \in \overline{G(A)} = G(\overline{A})$. En d'autres termes, u est solution forte de $Au = f$ ssi il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(A)$ telle que

$$u_n \to u \text{ et } Au_n \to f.$$

Définition 22. Soit u un élément de H. u est une solution faible de $Au = f$ ssi A admet un adjoint formel $A^{\#}$ et si pour tout $v \in D(A^{\#})$

$$\langle f, v\rangle = \left\langle u, A^{\#}v\right\rangle$$

Exercice 23. Montrer que si A admet un adjoint formel, alors toute solution forte de $Au = f$ est aussi solution faible.

Proposition 24. *Si A et $A^{\#}$ sont deux opérateurs à domaines denses, adjoints formels et si toute solution faible de $Au = f$ est aussi une solution forte, alors*

$$\overline{A} = A^{\#*}$$

et

$$\overline{A^{\#}} = \overline{A}^{*}.$$

Démonstration. Montrer l'égalité d'opérateurs revient à démontrer l'égalité des graphes.
Montrons d'abord que $G(\overline{A}) \subset G(A^{\#*})$.
En effet, soit $(u, f) \in G(\overline{A})$. Alors u est solution forte de $Au = f$. Il s'ensuit que u est aussi solution faible c'est à dire que pour tout $v \in D(A^{\#})$ $\left\langle u, A^{\#}v\right\rangle = \langle f, v\rangle$. La forme linéaire $v \mapsto \left\langle u, A^{\#}v\right\rangle = \langle f, v\rangle$ est donc continue, $u \in D(A^{\#*})$ et $A^{\#*}u = f$ donc $(u, f) \in G(A^{\#*})$.
Montrons que $G(A^{\#*}) \subset G(\overline{A})$.
En effet, soit $(u, f) \in G(A^{\#*})$. Alors la forme linéaire $v \in D(A^{\#}) \mapsto \left\langle u, A^{\#}v\right\rangle = \langle f, v\rangle$ est continue et $\left\langle A^{\#*}u, v\right\rangle = \langle f, v\rangle = \left\langle u, A^{\#}v\right\rangle$. Par conséquent, u est solution faible de $Au = f$. Comme toute solution faible est forte, u est aussi solution forte et donc $(u, f) \in G(\overline{A})$.

La seconde égalité découle de résultats généraux sur les adjoints d'opérateurs dans les espaces de Hilbert. D'abord l'adjoint d'un opérateur fermable est égal à l'adjoint de sa fermeture donc $\overline{A} = A^{\#*} = \overline{A^{\#}}^{*}$. D'autre part, l'adjoint de l'adjoint d'un opérateur fermé à domaine dense est l'opérateur lui-même donc $\overline{A}^{*} = \overline{A^{\#}}$. □

PROPOSITION 25. *Si A est un opérateur à domaine dense fermable, alors $A^* = \overline{A}^{*}$*

DÉMONSTRATION. Comme d'habitude, nous procédons sur les graphes. D'une part, $G(A^*) \subset G(\overline{A}^{*})$. En effet, soit $(v, A^*v) \in G(A^*)$. Alors la forme linéaire $u \mapsto \langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$ est linéaire continue sur $D(A)$ et donc aussi sur $D(\overline{A})$, en prolongeant par continuité, et donc $(v, A^*v) \in G(\overline{A}^{*})$. De même, $G(\overline{A}^{*}) \subset G(A^*)$ car $D(A) \subset D(\overline{A})$. □

PROPOSITION 26. *Soit A un opérateur fermé à domaine dense tel que $D(A^*)$ est dense. Alors $A^{**} = A$.*

Voir [**1**] *page 46.*

LEMME 27. *Soit A un opérateur de H à domaine dense. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) A est surjectif

(2) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $v \in D(A^*)$, $\|v\| \leq C\,\|A^*v\|$.

(3) $Ker(A^*) = \{0\}$ et $Im(A^*)$ est fermé.

Ce lemme est une généralisation fondamentale d'un résultat bien connu d'algèbre linéaire en dimension finie : pour montrer l'existence de la solution d'un problème linéaire il suffit de démontrer l'unicité de la solution du problème adjoint. Pour la démonstration, nous renvoyons à [**1**] page 30.

THÉORÈME 28. *Si A et $A^{\#}$ sont adjoints formels monotones et si toute solution faible de $Au = f$ est forte, alors $\overline{A}$ et $\overline{A^{\#}}$ sont maximaux monotones.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $u \in D(A)$, $\langle (I + A)u, u\rangle \geq u^2$ car A est monotone. Par densité, nous montrons aussi que pour tout $u \in D(\overline{A})$, $\left\langle (I + \overline{A})u, u\right\rangle \geq u^2$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons que pour tout $u \in D(\overline{A})$, $\left\|(I+\overline{A})u\right\| \geq \|u\|$. De même pour tout $v \in D(\overline{A\#})$, $\left\|(I+\overline{A\#})v\right\| \geq \|v\|$. Mais comme $\overline{A\#} = \overline{A}^*$, il s'ensuit que pour tout $v \in D(\overline{A}^*)$, $\left\|(I+\overline{A}^*)v\right\| \geq \|v\|$. Donc, en appliquant le lemme 27 $I+\overline{A}$ et $I+\overline{A}^*$ sont surjectifs. Nous obtenons bien que $\overline{A}$ et $\overline{A\#}$ sont maximaux monotones. $\square$

2.2. Application au problème d'évolution

Dans cette section nous supposons que Ω est un ouvert de bord $\partial\Omega$ régulier. Pour x un point du bord, nous définissons $V(x)$ un espace vectoriel de dimension $q \leq m$. Les conditions aux limites en un point x du bord $\partial\Omega$ de $\partial\Omega$ serons de la forme

$$w(x,t) \in V(x). \tag{2.2.1}$$

Nous considérons le problème d'évolution pour un système de Friedrichs

$$\begin{aligned} \partial_t w + A^k \partial_k w &= 0, \\ w(x,t) &\in V(x), \quad x \in \partial\Omega, \\ w(x,0) &= w_0(x). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Rappelons que dans un tel système, les matrices A^k sont symétriques et que donc le système est bien hyperbolique. Nous choisissons $H = L^2(\Omega)$. Nous prenons

$$D(A) = \left\{u \in C^1(\overline{\Omega}), \forall x \in \partial\Omega, u(x) \in V(x)\right\}$$

et si $u \in D(A)$, alors $Au = A^k \partial_k u$.

Pour le problème adjoint, nous commençons par définir une condition aux limites adjointe $V^{\#}(x) = \left(A^k n_k V(x)\right)^{\top}$. Nous prenons aussi $V \cap E_- = \{0\}$

$$D(A^{\#}) = \left\{v \in C^1(\overline{\Omega}), \forall x \in \partial\Omega, v(x) \in V^{\#}(x)\right\}$$

et $A^{\#} v = -A^k \partial_k v$.

Exercice 29. Montrer que A et $A^{\#}$ sont adjoints formels.

Le théorème suivant est assez technique (voir [**5**], [**7**]) mais fondamental.

THÉORÈME 30. *(Lax-Philips-Rauch) Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Pour $x \in \partial\Omega$, notons $n(x)$ le vecteur normal à$\partial\Omega$ en x. Nous supposons que $x \mapsto V(x)$ est une application Lipschitzienne par rapport à x. Si* $\dim\ker A^k n_k(x)$ *est constant sur chaque composante connexe de $\partial\Omega$ et si pour tout $x \in \partial\Omega$,* $\ker A^k n_k(x) \subset V(x)$ *alors toute solution faible de $Au = f$ est aussi une solution forte.*

Dans cet énoncé, remarquons que l'espace vectoriel $V(x)$ peut être définie par une base : $V(x) = \text{vect}\,\{b_1(x) \dots b_q(x)\}$. Dire que $V(x)$ est Lipschitzien par rapport à x veut dire que les applications $x \mapsto b_r(x)$ sont Lipschitziennes. L'espace $V(x)$ peut aussi être défini au moyen du noyau d'une matrice $M(x)$

$$w \in V(x) \Leftrightarrow M(x)w = 0.$$

Dans ce cas, c'est $x \mapsto M(x)$ qui est Lipschitzienne.

DÉFINITION 31. L'espace vectoriel des conditions aux limites V est dit positif par rapport à $A^k n_k$ ssi

$$\forall u \in V, \left\langle A^k n_k u, u \right\rangle \geq 0.$$

Il est dit maximal positif si de plus la dimension de V est égale au nombre de valeurs propres ≥ 0 de $A^k n_k$ en comptant leur multiplicité.

Nous allons vérifier que la deuxième condition exprime qu'il n'existe pas d'espace vectoriel contenant V et strictement plus grand que V vérifiant la condition 1. D'où la notion de maximalité. Nous allons aussi montrer que si V est maximal positif, c'est aussi le cas pour $V^\#$.

Comme $A^k n_k$ est une matrice symétrique, elle admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas où $A^k n_k$ est inversible. Nous supposons que les valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1\dots m}$ de $A^k n_k$ sont rangées de la façon suivante

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0 > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_m.$$

Par conséquent, l'entier p est le nombre de valeurs propres positives de $A^k n_k$ en tenant compte de leurs multiplicité. Nous notons $(r_i)_{i=1\ldots m}$ une base orthonormée de vecteurs propres correspondants. La matrice $P = (r_1 \ldots r_m)$ est unitaire $(P^{-1} = P^T)$ et$V \cap E_- = \{0\}$

$$D = P^T A^k n_k P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Remarquons alors que dans la nouvelle base, le produit scalaire $\langle A^k n_k u, v \rangle$ devient

$$\langle Du', v' \rangle, \quad u' = Pu, \quad v' = Pv.$$

Nous notons E_+ l'espace vectoriel engendré par $\{r_1 \ldots r_p\}$ et par E_- l'espace engendré par $\{r_{p+1} \ldots r_m\}$. Par conséquent, $\dim E_+ = p$, $\dim E_- = m-p$, $\mathbb{R}^m = E_+ \oplus E_-$, $E_+ \perp E_-$et $A^k n_k E_\pm = E_\pm$.

Nous notons Π_+ (respectivement Π_-) la projection orthogonale sur l'espace vectoriel E_+ (respectivement E_-).

Commençons par le

Lemme 32. *Si V est un espace positif par rapport à $A^k n_k$ alors $V \cap E_- = \{0\}$ et $q = \dim V \leq p$.*

Démonstration. $V \cap E_- = \{0\}$ découle du fait que pour tout $u \in E_-$ non nul,

$$\langle A^k n_k u, u \rangle \leq \max_{k=p+1\ldots m} \lambda_k \|u\|^2 < 0.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dim V = q > p$. Considérons une base $(b_1 \ldots b_q)$ de V. Il existe des réels $\alpha_1 \ldots \alpha_q$ non tous nuls tels que la combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \Pi_+ b_i = 0.$$

En effet, $\{\Pi_+ b_1 \dots \Pi_+ b_q\}$ est un ensemble de q vecteurs dans E_+, espace de dimension $p < q$. Considérons alors le vecteur

$$u = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i b_i.$$

Par construction, $u \in V \cap E_-$, donc $u = 0$. Comme les b_i sont des vecteurs linéairement indépendants cela implique que les α_i sont tous nuls ce qui conduit à une contradiction, donc $\dim V \leq p$. □

La condition aux limites V et la condition aux limites adjointe $V^\#$ jouent des rôles symétriques. Lorsque $A^k n_k$ est inversible, comme $V^\# = \left(A^k n_k V\right)^T$, alors $\dim V^\# = m - \dim V$. Nous en déduisons le

Lemme 33. *Si $V^\#$ est un espace positif par rapport à $-A^k n_k$ alors $V^\# \cap E_+ = \{0\}$ et $\dim V^\# \leq m - p$.*

Une conséquence intéressante des lemmes 32 et 33 est que si les conditions aux limites V et $V^\#$ sont positives alors elles sont toutes les deux aussi maximales puisque $\dim V + \dim V^\# = m$. De ce qui précède nous pouvons déduire le

Lemme 34. *Si V est un espace maximal positif par rapport à $A^k n_k$ alors $V^\#$ est aussi maximal positif par rapport à $-A^k n_k$.*

Démonstration. Supposons que V est maximal positif pour $A^k n_k$. Montrons alors que $V^\#$ est aussi maximal positif pour $-A^k n_k$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $v \in V^\#$ tel que $\left\langle A^k n_k v, v \right\rangle > 0$. v ne peut pas aussi appartenir à V car sinon nous aurions $\left\langle A^k n_k v, v \right\rangle = 0$. Considérons l'espace vectoriel $U = \{u + tv, u \in V, t \in \mathbb{R}\}$. U contient V et, puisque $v \notin V$, $\dim U = 1 + \dim V = p + 1$. Montrons que U est un espace positif. Soit donc $w \in U$,$w = u + tv$ avec $t \in \mathbb{R}$, $u \in V$. Alors

$$\begin{aligned}\left\langle A^k n_k (u + tv), (u + tv) \right\rangle &= \left\langle A^k n_k u, u \right\rangle + 2t \left\langle A^k n_k u, v \right\rangle + t^2 \left\langle A^k n_k v, v \right\rangle \\ &= \left\langle A^k n_k u, u \right\rangle + t^2 \left\langle A^k n_k v, v \right\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

donc U est bien un espace positif. D'après le lemme 32, nous devrions alors avoir $\dim U \leq p$. C'est impossible puisque $\dim U = p + 1$. Par conséquent, $V^{\#}$ est bien positif pour $-A^k n_k$.

Mais d'autre part, $\dim V^{\#} = m - \dim V = m - p$ et donc $V^{\#}$ est aussi maximal positif. $\square$

Nous pouvons maintenant regrouper les résultats de cette section dans le théorème suivant :

THÉORÈME 35. *Supposons que la condition aux limites (2.2.1) est maximale positive pour $A^k n_k$ (voir définition (31)). Supposons aussi que les hypothèses du théorème 30 soient satisfaites. Alors les opérateurs $\overline{A}$ et $\overline{A^{\#}}$ sont maximaux monotones.*

Ce théorème assure que si les conditions aux limites sont maximales positives alors les problèmes d'évolution

$$\partial_t u + Au = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$$

et

$$\partial_t v + A^{\#} v = 0 \quad v(\cdot, 0) = v_0(\cdot)$$

sont bien posés.

2.3. Exemples

EXERCICE 36. Trouver toutes les conditions maximales positives pour l'équation des ondes (voir Exercice 9).

EXERCICE 37. Trouver les conditions maximales positives pour les équations de Saint-Venant linéarisées.

Exercice 38. Trouver les conditions maximales positives pour les équations de Maxwell.

Chapitre 3

Approximation par la méthode de Galerkin-Discontinu

3.1. Généralités

3.2. Convergence de la méthode GD

Chapitre 4

Programmation efficace de la méthode Galerkin-Discontinu

4.1. Intégration numérique

4.2. Schéma temporel

4.3. Parallélisme local

4.4. Parallélisme global

Chapitre 5

Exemples d'applications

5.1. Maxwell

5.2. Saint-Venant

5.3. Transport

5.4. Modèles cinétiques

Première partie

Systèmes non-linéaires (Bopeng Rao)

Bibliographie

[1] Haım Brezis. Analyse fonctionnelle. collection mathématiques appliquées pour la maıtrise.[collection of applied mathematics for the master's degree], 1983.

[2] Alexandre Ern, Jean-Luc Guermond, and Gilbert Caplain. An intrinsic criterion for the bijectivity of hilbert operators related to friedrich'systems. *Communications in partial differential equations*, 32(2) :317–341, 2007.

[3] Kurt O Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 11(3) :333–418, 1958.

[4] Kurt O Friedrichs and Peter D Lax. Boundary value problems for first order operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 18(1-2) :355–388, 1965.

[5] Peter D Lax and Ralph S Phillips. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(3) :427–455, 1960.

[6] Robert D Moyer. On the nonidentity of weak and strong extensions of differential operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 19(2) :487–488, 1968.

[7] Jeffrey Rauch. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 291(1) :167–187, 1985.