Introduction à la théorie et l'approximation des systèmes hyperboliques

Philippe Helluy

Chapitre 1

Généralités

1.1. Introduction

Dans ce cours, nous nous intéressons aux solutions $w(x,t)$ du système d'équations aux dérivées partielles

$$\partial_t w + A^k \partial_k w = 0. \tag{1.1.1}$$

Souvent, le vecteur w est appelé vecteur des variables conservatives. Nous utilisons les notations suivantes :

(1) $x = (x^1 \dots x^d)$ est un point d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (en pratique $d = 1, 2$ ou 3).

(2) t représente le temps, $t \in [0,T]$, $T > 0$.

(3) $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ et $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$.

(4) Pour tout (x,t) $w(x,t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

(5) Les A^k sont des matrices réelles $m \times m$ pour $k = 1 \dots d$.

(6) Nous utilisons la convention de somme sur les indices répétés :

$$A^k \partial_k w \text{ veut dire } \sum_k A^k \partial_k w$$

En général, il faut adjoindre à (1.1.1) une condition initiale

$$w(x,0) = w_0(x). \tag{1.1.2}$$

Si la condition initiale est très régulière il faut comprendre que w est une solution au sens classique, c'est à dire que l'on cherche des solutions régulières, donc dérivables, de (1.1.1), (1.1.2). Lorsque la condition initiale est moins régulière, par exemple seulement dans $L^2(\Omega)$, il existe plusieurs façons de définir les solutions. Une possibilité est d'abord de traiter le cas de conditions initiales régulières dans un sous-espace dense de L^2, de construire une solution w, de démontrer un résultat de continuité de w par rapport à w_0 pour la norme L^2 puis de prolonger par continuité l'opérateur linéaire ainsi construit à L^2 tout entier.

En général, il faut aussi ajouter des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ le bord de Ω. Ce point sera abordé au Chapitre 2. Ici, nous nous contentons d'étudier le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Pour que le problème (1.1.1), (1.1.2) soit bien posé, il faut satisfaire la condition suivante :

Définition 1. Le système (1.1.1) est dit hyperbolique ssi pour tout vecteur $n = (n_1 \dots n_d)$ de $\mathbb{R}^d$, la matrice $A(n) = A^k n_k$ est diagonalisable avec des valeurs propres réelles.

Cette notion est importante à cause du résultat suivant.

Théorème 2. *Si le système (1.1.1) est hyperbolique et si $\Omega = \mathbb{R}^d$, alors le problème d'évolution (1.1.1), (1.1.2) admet une unique solution $w \in C([0,T], L^2(\Omega))$ et il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour toute condition initiale $w_0 \in L^2(\Omega)$,*

$$\|w(\cdot,t)\| \leq C \|w_0(\cdot)\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme sur $L^2(\Omega)$

$$\|w(\cdot)\| := \left(\int_\Omega w(x)\cdot w(x)dx\right)^{1/2}.$$

Par ailleurs, si le système n'est pas hyperbolique, alors pour toute constante $C > 0$ et tout temps t il existe une condition initiale w_0 et une solution w du problème d'évolution telle que

$$\|w(\cdot,t)\| \geq C \|w_0(\cdot)\|,$$

en d'autres termes, le problème d'évolution est instable.

Exercice 3. Démontrer ce théorème (utiliser Fourier)

Remarque 4. Lorsque $m = 1$, le système est réduit à une équation scalaire. Il est donc évidemment hyperbolique. Lorsque les matrices A^k sont symétriques, alors le système est automatiquement hyperbolique, car une matrice symétrique est toujours diagonalisable avec des valeurs propres réelles. Dans ce cas il est aussi appelé système de Friedrichs.

Le cas plus général des systèmes non-linéaires sera abordé en seconde partie. Nous pouvons cependant déjà donner quelques définitions. Un système non-linéaire s'écrit

$$\partial_t w + \partial_k f^k(w) = 0, \tag{1.1.3}$$

où cette fois-ci les f^k sont des fonctions, en général non-linéaires, de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Nous introduisons la fonction flux du système non-linéaire

$$f(w, n) = n_k f^k(w).$$

La jacobienne du flux est notée

$$A(w, n) = D_w f(w, n) = A^k(w) n_k, \quad \text{avec } A^k(w) = D_w f^k(w).$$

Définition 5. Le système non-linéaire est dit hyperbolique ssi pour tout vecteur de variables conservatives w et pour toute direction n de $\mathbb{R}$ la jacobienne du flux $A(w, n)$ est diagonalisable avec des valeurs propres réelles.

Il s'agit bien d'une généralisation de la notion de système hyperbolique linéaire. En effet si les fonctions f^ksont linéaires alors $A^k = D_w f^k(w)$ sont bien des matrices constantes. Par ailleurs, un système non-linéaire est hyperbolique lorsque la linéarisation de ce système autour d'un état constant $\overline{w}$ est un système hyperbolique linéaire.

Exercice 6. Rendre la remarque précédente rigoureuse !

EXERCICE 7. Soit w une solution du problème d'évolution (1.1.1), (1.1.2) avec $\Omega = \mathbb{R}$. Montrer que formellement

$$\int_\Omega w = \int_\Omega w_0. \tag{1.1.4}$$

Déterminer également les conditions qui rendraient ce résultat rigoureux. La propriété (1.1.4) justifie que le système (1.1.3) soit aussi appelé système de lois de conservation et que w soit appelé vecteur des variables conservatives.

1.2. Exemples

Lorsque $m = 1$ le système hyperbolique linéaire (1.1.1) est une équation de transport à la vitesse $a = (A^1 \dots A^d)$

$$\partial_t w + a \cdot \nabla_x w = 0.$$

EXERCICE 8. Résoudre l'équation de transport.

Voici d'autres exemples d'équations hyperboliques à traiter en exercice.

EXERCICE 9. On suppose $d = 2$. En acoustique les inconnues sont la pression $p(x, y, t)$ et le déplacement $u(x, y, t) = (u^1(x, y, t), u^2(x, y, t))$. Les équations sont

$$\begin{aligned} \partial_t p + c\nabla \cdot u &= 0, \\ \partial_t u + c\nabla p &= 0. \end{aligned}$$

Montrer que ce système est hyperbolique.

EXERCICE 10. Lire sur Wikipédia l'article consacré aux équations de Maxwell. On appelle système de Maxwell le système constitué des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère. Montrer que c'est un système hyperbolique. Traiter les cas $d = 3$, $d = 2$ (équations dites « transverse électriques » (mode TE) ou « transverse magnétique » (mode TM)). Traiter aussi le cas $d = 1$.

Exercice 11. Lire sur Wikipédia l'article consacré aux équations de Barré de Saint-Venant. Montrer que ces équations constituent un système hyperbolique non-linéaire. Traiter les cas $d = 1$ et $d = 2$.

Exercice 12. Trouver sur internet la formulation des équations d'Euler pour un gaz parfait compressible. Montrer qu'il s'agit d'un système hyperbolique non-linéaire. Traiter les cas $d = 1$ et $d = 2$.

1.3. Problème de Riemann

Soit un système hyperbolique linéaire de solution $\tilde{w}$ et soit un vecteur unitaire n dans $\mathbb{R}^d$: $|n| = \sqrt{n_1^2 + \cdots + n_d^2} = 1$. Nous allons chercher des solutions $\tilde{w}$ qui ne varient que selon la direction n. Nous posons donc

$$\xi = n \cdot x$$

et

$$\tilde{w}(x, t) = w(\xi, t).$$

Alors w est solution du système hyperbolique monodimensionnel $(d = 1)$

$$\partial_t w + A \partial_\xi w = 0, \tag{1.3.1}$$

où A est la matrice

$$A = A^k n_k.$$

Le problème de Riemann consiste à résoudre le problème d'évolution monodimensionnel (1.3.1) lorsque la condition initiale est constituée de deux états constants séparés par une discontinuité en $\xi = 0$

$$w(\xi, 0) = \begin{cases} w_L \text{ si } \xi < 0, \\ w_R \text{ sinon.} \end{cases}$$

Supposons que les valeurs propres (réelles) de A sont classées dans l'ordre croissant

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots \leq \lambda_m$$

et notons $r_1 \ldots r_m$ les vecteurs propres correspondants. Considérons la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A

$$P = (r_1 \ldots r_m)\,, \tag{1.3.2}$$

alors

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Le changement de vecteur inconnue

$$w = Pz$$

montre que les composantes de z vérifient des équations de transport dont les vitesses sont les valeurs propres de A

$$\partial_t z^i + \lambda_i \partial_x z^i = 0.$$

Posons

$$z_L = P^{-1} w_L, \quad z_R = P^{-1} w_R.$$

Alors

$$z^i(\xi, t) = \begin{cases} z_L^i \text{ si } \xi/t < \lambda_i, \\ z_R^i \text{ sinon.} \end{cases}$$

Mais d'autre part,

$$w = \sum_{i=1}^{m} z^i r_i$$

la solution du problème de Riemann est donc donnée par

$$w(x,t) = \begin{cases} w_L & \text{si} \quad \xi/t < \lambda_1, \\ \vdots & \\ \sum_{i=j}^m z_L^i r_i + \sum_{i=1}^{j-1} z_R^i r_i & \text{si} \quad \lambda_{j-1} < \xi/t < \lambda_j, \\ \vdots & \\ w_R & \text{si} \quad \xi/t > \lambda_m. \end{cases}$$

Dans le plan (ξ, t) il s'agit d'un ensemble de $m+1$ états constants, $w_1 = w_L, w_1, w_2, \ldots, w_{m+1} = w_R$ séparés par des droites d'équations $\xi = \lambda_i t$. L'état constant w_j est défini par

$$w_j = \sum_{i=1}^{j-1} z_R^i r_i + \sum_{i=j}^{m} z_L^i r_i. \tag{1.3.3}$$

En posant $\alpha = P^{-1}(w_R - w_L)$ les états w_j s'écrivent aussi de façon équivalente

$$w_j = w_L + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_R^i r_i = w_R - \sum_{i=j}^{m} \alpha_L^i r_i. \tag{1.3.4}$$

Pour appliquer les formules (1.3.3) ou (1.3.4) il est nécessaire de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A, puis de décomposer les états initiaux w_L et w_R, ou l'écart $w_R - w_L$, sur la base des vecteurs propres. Nous allons proposer une autre technique de calcul de la solution du problème de Riemann qui n'utilise que la connaissances des valeurs propres de A.

DÉFINITION 13. Soit A une matrice $m \times m$ possédant des valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \ldots < \lambda_m$ et soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit Q l'unique polynôme d'interpolation de f sur les valeurs propres de A :

$$\deg Q \leq m, \quad \forall i = 1 \ldots m, \quad Q(\lambda_i) = f(\lambda_i).$$

Alors nous notons $f(A)$ le polynôme de matrice définie par

$$f(A) = Q(A).$$

Notons que pour calculer Q il suffit de connaître les valeurs propres de A. Si nous connaissons aussi une base de diagonalisation de A alors (voir (1.3.2))

$$f(A) = Q(A) = P^{-1}Q(PAP^{-1})P = P^{-1}Q(D)P = P^{-1}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_m) \end{pmatrix} P.$$

Considérons maintenant les fonctions $x \mapsto x^+ = \max(x, 0)$ et $x \mapsto x^- = \min(x, 0)$. Ces fonctions vérifient également $x = x^+ + x^-$ et $|x| = x^+ - x^-$. Nous avons alors une autre représentation de la solution du problème de Riemann :

Proposition 14. *Soit le problème de Riemann*

$$\begin{aligned} \partial_t w + A\partial_\xi w &= 0, \\ w(\xi, 0) &= \begin{cases} w_L & si \quad \xi < 0, \\ w_R & si \quad \xi > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La solution est donnée par

$$w(\xi, t) = \frac{1}{2}(w_L + w_R) - \frac{1}{2} sgn\left(A - \frac{\xi}{t} I\right)(w_R - w_L).$$

De plus

$$\begin{aligned} \left(A - \frac{\xi}{t} I\right) w(\xi, t) &= \frac{1}{2}\left(A - \frac{\xi}{t} I\right)(w_L + w_R) - \frac{1}{2}\left|A - \frac{\xi}{t} I\right|(w_R - w_L) \\ &= \left(A - \frac{\xi}{t} I\right)^+ w_L + \left(A - \frac{\xi}{t} I\right)^- w_R. \end{aligned}$$

Exercice 15. Démontrer cette proposition.

Chapitre 2

Conditions aux limites

2.1. Théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida est un théorème abstrait de la théorie des opérateurs linéaires qui permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'évolution. Nous donnons les notions minimales pour comprendre l'énoncé de ce théorème. Pour plus de détails, nous renvoyons au livre de Brézis [**1**].

Nous considérons un espace de Hilbert H de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En général, A désignera un opérateur non-borné de H à domaine dense c'est à dire une application linéaire d'un sous-espace vectoriel $D(A)$ de H à valeurs dans H. Le sous-espace vectoriel $D(A)$ est appelé domaine de A. Si H est un Hilbert de dimension infini, $D(A)$ n'est généralement pas fermé. Nous supposons que le domaine de A est dense, c'est à dire que $\overline{D(A)} = H$ pour la topologie forte de H. La topologie forte est la topologie associée à la norme du produit scalaire de H. Le graphe de A, noté $G(A)$ est l'ensemble

$$G(A) = \{(u, Au), u \in D(A)\} \subset H \times H.$$

En général, $\overline{G(A)}$ n'est pas le graphe d'un opérateur univoque, c'est à dire que $(u, f_1) \in \overline{G(A)}$ et $(u, f_2) \in \overline{G(A)}$ n'implique pas forcément que $f_1 = f_2$.

Exercice 16. Le vérifier sur un exemple...

Si $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur univoque, nous dirons que A est un opérateur non-borné fermable. Nous appellerons fermeture de A et nous noterons $\overline{A}$ l'opérateur tel que $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$.

DÉFINITION 17. Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit A un opérateur linéaire de $D(A)$, sous-espace vectoriel de H, dans H. A est maximal-monotone ssi

(1) Pour tout x dans $D(A)$, $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.

(2) $I + A$ est surjectif de $D(A)$ sur H.

Nous considérons alors le problème d'évolution abstrait d'inconnue $u(t) \in D(A)$

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= 0, \\ u(0) &= u_0 \in D(A). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Le théorème de Hille-Yosida donne une condition pour que ce problème soit bien posé. Dans le cas qui nous intéresse, l'opérateur A sera formellement l'opérateur aux dérivées partielles en espace $A^k \partial_k$ et son domaine $D(A)$ sera l'ensemble des w qui satisfont les conditions aux limites.

THÉORÈME 18. *(Hille-Yosida) Si A est maximal monotone, alors le problème (2.1.1) admet une solution unique u dans $C^1([0,T], H) \cap C([0,T], D(A))$ et pour tout t*

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad \|\partial_t u(t)\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|.$$

Notons que dans ce théorème, $D(A)$ est muni de la norme dite du graphe

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_H + \|Au\|_H.$$

Remarquons aussi que l'application, notée S^t qui à u_0 associe $u(t)$ peut donc être prolongée par densité en un semi-groupe de contrations de H dans H. Il est donc possible de définir des solutions du problème d'évolution lorsque $u_0 \in H$.

EXERCICE 19. Démontrer le théorème de Hille-Yosida lorsque H est un Hilbert de dimension finie.

Nous allons maintenant introduire quelques outils qui permettront de démontrer la surjectivité de $I+A$. Les démonstrations seront basées sur des techniques d'intégration par parties et de passage à l'adjoint.

DÉFINITION 20. Soit A un opérateur linéaire de H dans H de domaine $D(A)$ dense. $A^\#$ est un adjoint formel de A ssi $A^\#$ est à domaine dense et

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^\#), \quad \langle Au, v\rangle = \left\langle u, A^\# v\right\rangle$$

EXERCICE 21. Si A admet un adjoint formel $A^\#$, montrer que A est fermable c'est à dire que la fermeture du graphe de A, $G(A)$ dans $H \times H$ définit un opérateur univoque.

DÉFINITION 22. Soit A un opérateur de H dans H à domaine dense. L'adjoint de A noté A^* est un opérateur de H dans H défini de la façon suivante :

(1) $D(A^*) = \{v \in H, \exists C \geq 0, \forall u \in D(A), |\langle Au, v\rangle| \leq C\,\|u\|\}$. En d'autres termes, $D(A^*)$ est l'ensemble des v dans H telle que la forme linéaire $u \mapsto \langle Au, v\rangle$ est continue sur $D(A)$ pour la norme de H.

(2) Si $v \in D(A^*)$ alors l'application qui à u associe $\langle Au, v\rangle$ se prolonge (par densité de $D(A)$ dans H) en une forme linéaire continue sur H c'est à dire un élément de H'. Comme H est un espace de Hilbert, par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que $\langle Au, v\rangle = \langle f, u\rangle$. Alors par définition $f = A^* v$.

En général, $A^* \neq A^\#$.

EXERCICE 23. Montrer que pour tout adjoint formel $A^\#$, $G(A^\#) \subset G(A^*)$ et que donc $D(A^\#) \subset D(A^*)$.

DÉFINITION 24. Soit A un opérateur fermable. Soit u un élément de H. u est une solution forte de $Au = f$ ssi $\overline{A}u = f$.

Une solution forte u de $Au = f$ est telle que $(u, f) \in \overline{G(A)} = G(\overline{A})$. En d'autres termes, u est solution forte de $Au = f$ ssi il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(A)$ telle que

$$u_n \to u \text{ et } Au_n \to f.$$

Définition 25. Soit u un élément de H. u est une solution faible de $Au = f$ ssi A admet un adjoint formel $A^\#$ et si pour tout $v \in D(A^\#)$

$$\langle f, v\rangle = \left\langle u, A^\# v\right\rangle$$

Exercice 26. Montrer que si A admet un adjoint formel, alors toute solution forte de $Au = f$ est aussi solution faible.

Proposition 27. *Si A et $A^\#$ sont deux opérateurs à domaines denses, adjoints formels et si toute solution faible de $Au = f$ est aussi une solution forte, alors*

$$\overline{A} = A^{\#*}$$

et

$$\overline{A^\#} = \overline{A}^*.$$

Démonstration. Montrer l'égalité d'opérateurs revient à démontrer l'égalité des graphes.

Montrons d'abord que $G(\overline{A}) \subset G(A^{\#*})$.

En effet, soit $(u, f) \in G(\overline{A})$. Alors u est solution forte de $Au = f$. Il s'ensuit que u est aussi solution faible c'est à dire que pour tout $v \in D(A^\#)$ $\left\langle u, A^\# v\right\rangle = \langle f, v\rangle$. La forme linéaire $v \mapsto \left\langle u, A^\# v\right\rangle = \langle f, v\rangle$ est donc continue, $u \in D(A^{\#*})$ et $A^{\#*}u = f$ donc $(u, f) \in G(A^{\#*})$.

Montrons que $G(A^{\#*}) \subset G(\overline{A})$.

En effet, soit $(u, f) \in G(A^{\#*})$. Alors la forme linéaire $v \in D(A^\#) \mapsto \left\langle u, A^\# v\right\rangle = \langle f, v\rangle$ est continue et $\left\langle A^{\#*}u, v\right\rangle = \langle f, v\rangle = \left\langle u, A^\# v\right\rangle$. Par conséquent, u est solution faible de $Au = f$. Comme toute solution faible est forte, u est aussi solution forte et donc $(u, f) \in G(\overline{A})$.

La seconde égalité découle de résultats généraux sur les adjoints d'opérateurs dans les espaces de Hilbert. D'abord l'adjoint d'un opérateur fermable est égal à l'adjoint de sa fermeture donc $\overline{A} = A^{\#*} = \overline{A^{\#}}^{*}$. D'autre part, l'adjoint de l'adjoint d'un opérateur fermé à domaine dense est l'opérateur lui-même donc $\overline{A}^{*} = \overline{A^{\#}}$. $\square$

PROPOSITION 28. *Si A est un opérateur à domaine dense fermable, alors $A^* = \overline{A}^{*}$*

DÉMONSTRATION. Comme d'habitude, nous procédons sur les graphes. D'une part, $G(A^*) \subset G(\overline{A}^{*})$. En effet, soit $(v, A^*v) \in G(A^*)$. Alors la forme linéaire $u \mapsto \langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$ est linéaire continue sur $D(A)$ et donc aussi sur $D(\overline{A})$, en prolongeant par continuité, et donc $(v, A^*v) \in G(\overline{A}^{*})$. De même, $G(\overline{A}^{*}) \subset G(A^*)$ car $D(A) \subset D(\overline{A})$. $\square$

PROPOSITION 29. *Soit A un opérateur fermé à domaine dense tel que $D(A^*)$ est dense. Alors $A^{**} = A$.*

Voir [**1**] *page 46.*

LEMME 30. *Soit A un opérateur de H à domaine dense. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) A est surjectif

(2) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $v \in D(A^*)$, $\|v\| \leq C\,\|A^*v\|$.

(3) $Ker(A^*) = \{0\}$ et $Im(A^*)$ est fermé.

Ce lemme est une généralisation fondamentale d'un résultat bien connu d'algèbre linéaire en dimension finie : pour montrer l'existence de la solution d'un problème linéaire il suffit de démontrer l'unicité de la solution du problème adjoint. Pour la démonstration, nous renvoyons à [**1**] page 30.

THÉORÈME 31. *Si A et $A^{\#}$ sont adjoints formels monotones et si toute solution faible de $Au = f$ est forte, alors $\overline{A}$ et $\overline{A^{\#}}$ sont maximaux monotones.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $u \in D(A)$, $\langle (I + A)u, u\rangle \geq u^2$ car A est monotone. Par densité, nous montrons aussi que pour tout $u \in D(\overline{A})$, $\left\langle (I + \overline{A})u, u\right\rangle \geq u^2$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons que pour tout $u \in D(\overline{A})$, $\left\|(I+\overline{A})u\right\| \geq \|u\|$. De même pour tout $v \in D(\overline{A\#})$, $\left\|(I+\overline{A\#})v\right\| \geq \|v\|$. Mais comme $\overline{A\#} = \overline{A}^*$, il s'ensuit que pour tout $v \in D(\overline{A}^*)$, $\left\|(I+\overline{A}^*)v\right\| \geq \|v\|$. Donc, en appliquant le lemme 30 $I+\overline{A}$ et $I+\overline{A}^*$ sont surjectifs. Nous obtenons bien que $\overline{A}$ et $\overline{A\#}$ sont maximaux monotones. $\square$

2.2. Application au problème d'évolution

Dans cette section nous supposons que Ω est un ouvert de bord $\partial\Omega$ régulier. Pour x un point du bord, nous définissons $V(x)$ un espace vectoriel de dimension $q \leq m$. Les conditions aux limites en un point x du bord $\partial\Omega$ de $\partial\Omega$ serons de la forme

$$w(x,t) \in V(x). \tag{2.2.1}$$

Nous considérons le problème d'évolution pour un système de Friedrichs

$$\begin{aligned} \partial_t w + A^k \partial_k w &= 0, \\ w(x,t) &\in V(x), \quad x \in \partial\Omega, \\ w(x,0) &= w_0(x). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Rappelons que dans un tel système, les matrices A^k sont symétriques et que donc le système est bien hyperbolique. Nous choisissons $H = L^2(\Omega)$. Nous prenons

$$D(A) = \left\{u \in C^1(\overline{\Omega}), \forall x \in \partial\Omega, u(x) \in V(x)\right\}$$

et si $u \in D(A)$, alors $Au = A^k \partial_k u$.

Pour le problème adjoint, nous commençons par définir une condition aux limites adjointe $V^\#(x) = \left(A^k n_k V(x)\right)^\top$. Nous prenons aussi

$$D(A^\#) = \left\{v \in C^1(\overline{\Omega}), \forall x \in \partial\Omega, v(x) \in V^\#(x)\right\}$$

et $A^\# v = -A^k \partial_k v$.

Exercice 32. Montrer que A et $A^\#$ sont adjoints formels.

Le théorème suivant est assez technique (voir **[5]**, **[7]**) mais fondamental.

THÉORÈME 33. *(Lax-Philips-Rauch) Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^d$ *de frontière* $\partial\Omega$ *de classe* C^1*. Pour* $x \in \partial\Omega$*, notons* $n(x)$ *le vecteur normal à* $\partial\Omega$ *en* x*. Nous supposons que* $x \mapsto V(x)$ *est une application Lipschitzienne par rapport à* x*. Si* $\dim\ker A^k n_k(x)$ *est constant sur chaque composante connexe de* $\partial\Omega$ *et si pour tout* $x \in \partial\Omega$*,* $\ker A^k n_k(x) \subset V(x)$ *alors toute solution faible de* $Au = f$ *est aussi une solution forte.*

Dans cet énoncé, remarquons que l'espace vectoriel $V(x)$ peut être définie par une base : $V(x) = \mathrm{vect}\,\{b_1(x)\ldots b_q(x)\}$. Dire que $V(x)$ est Lipschitzien par rapport à x veut dire que les applications $x \mapsto b_r(x)$ sont Lipschitziennes. L'espace $V(x)$ peut aussi être défini au moyen du noyau d'une matrice $M(x)$

$$w \in V(x) \Leftrightarrow M(x)w = 0.$$

Dans ce cas, c'est $x \mapsto M(x)$ qui est Lipschitzienne.

DÉFINITION 34. L'espace vectoriel des conditions aux limites V est dit positif par rapport à $A^k n_k$ ssi

$$\forall u \in V, \left\langle A^k n_k u, u\right\rangle \geq 0.$$

Il est dit maximal positif si de plus la dimension de V est égale au nombre de valeurs propres ≥ 0 de $A^k n_k$ en comptant leur multiplicité.

Nous allons vérifier que la deuxième condition exprime qu'il n'existe pas d'espace vectoriel contenant V et strictement plus grand que V vérifiant la condition 1. D'où la notion de maximalité. Nous allons aussi montrer que si V est maximal positif, c'est aussi le cas pour $V^{\#}$.

Comme $A^k n_k$ est une matrice symétrique, elle admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas où $A^k n_k$ est inversible. Nous supposons que les valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1\dots m}$ de $A^k n_k$ sont rangées de la façon suivante

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0 > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_m.$$

Par conséquent, l'entier p est le nombre de valeurs propres positives de $A^k n_k$ en tenant compte de leurs multiplicité. Nous notons $(r_i)_{i=1\dots m}$ une base orthonormée de vecteurs propres correspondants. La matrice $P = (r_1 \dots r_m)$ est unitaire $(P^{-1} = P^T)$ et $V \cap E_- = \{0\}$

$$D = P^T A^k n_k P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Remarquons alors que dans la nouvelle base, le produit scalaire $\left\langle A^k n_k u, v \right\rangle$ devient

$$\langle Du', v' \rangle, \quad u' = Pu, \quad v' = Pv.$$

Nous notons E_+ l'espace vectoriel engendré par $\{r_1 \dots r_p\}$ et par E_- l'espace engendré par $\{r_{p+1} \dots r_m\}$. Par conséquent, $\dim E_+ = p$, $\dim E_- = m-p$, $\mathbb{R}^m = E_+ \oplus E_-$, $E_+ \perp E_-$ et $A^k n_k E_\pm = E_\pm$.

Nous notons Π_+ (respectivement Π_-) la projection orthogonale sur l'espace vectoriel E_+ (respectivement E_-).

Commençons par le

Lemme 35. *Si V est un espace positif par rapport à $A^k n_k$ alors $V \cap E_- = \{0\}$ et $q = \dim V \leq p$.*

Démonstration. $V \cap E_- = \{0\}$ découle du fait que pour tout $u \in E_-$ non nul,

$$\left\langle A^k n_k u, u \right\rangle \leq \max_{k=p+1\dots m} \lambda_k \|u\|^2 < 0.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dim V = q > p$. Considérons une base $(b_1 \dots b_q)$ de V. Il existe des réels $\alpha_1 \dots \alpha_q$ non tous nuls tels que la combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \Pi_+ b_i = 0.$$

En effet, $\{\Pi_+ b_1 \dots \Pi_+ b_q\}$ est un ensemble de q vecteurs dans E_+, espace de dimension $p < q$. Considérons alors le vecteur

$$u = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i b_i.$$

Par construction, $u \in V \cap E_-$, donc $u = 0$. Comme les b_i sont des vecteurs linéairement indépendants cela implique que les α_i sont tous nuls ce qui conduit à une contradiction, donc $\dim V \le p$. □

La condition aux limites V et la condition aux limites adjointe $V^{\#}$ jouent des rôles symétriques. Lorsque $A^k n_k$ est inversible, comme $V^{\#} = \left(A^k n_k V\right)^T$, alors $\dim V^{\#} = m - \dim V$. Nous en déduisons le

Lemme 36. *Si $V^{\#}$ est un espace positif par rapport à $-A^k n_k$ alors $V^{\#} \cap E_+ = \{0\}$ et $\dim V^{\#} \le m - p$.*

Une conséquence intéressante des lemmes 35 et 36 est que si les conditions aux limites V et $V^{\#}$ sont positives alors elles sont toutes les deux aussi maximales puisque $\dim V + \dim V^{\#} = m$. De ce qui précède nous pouvons déduire le

Lemme 37. *Si V est un espace maximal positif par rapport à $A^k n_k$ alors $V^{\#}$ est aussi maximal positif par rapport à $-A^k n_k$.*

Démonstration. Supposons que V est maximal positif pour $A^k n_k$. Montrons alors que $V^{\#}$ est aussi maximal positif pour $-A^k n_k$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $v \in V^{\#}$ tel que $\left\langle A^k n_k v, v \right\rangle > 0$. v ne peut pas aussi appartenir à V car sinon nous aurions $\left\langle A^k n_k v, v \right\rangle = 0$. Considérons l'espace vectoriel $U = \{u + tv, u \in V, t \in \mathbb{R}\}$. U contient V et, puisque $v \notin V$, $\dim U = 1 + \dim V = p + 1$. Montrons que U est un espace positif. Soit donc $w \in U$,$w = u + tv$ avec $t \in \mathbb{R}$, $u \in V$. Alors

$$\begin{aligned}\left\langle A^k n_k(u+tv),(u+tv)\right\rangle &= \left\langle A^k n_k u,u\right\rangle + 2t\left\langle A^k n_k u,v\right\rangle + t^2\left\langle A^k n_k v,v\right\rangle \\ &= \left\langle A^k n_k u,u\right\rangle + t^2\left\langle A^k n_k v,v\right\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

donc U est bien un espace positif. D'après le lemme 35, nous devrions alors avoir $\dim U \leq p$. C'est impossible puisque $\dim U = p+1$. Par conséquent, $V^\#$ est bien positif pour $-A^k n_k$.

Mais d'autre part, $\dim V^\# = m - \dim V = m - p$ et donc $V^\#$ est aussi maximal positif. □

Nous pouvons maintenant regrouper les résultats de cette section dans le théorème suivant :

Théorème 38. *Supposons que la condition aux limites (2.2.1) est maximale positive pour $A^k n_k$ (voir définition (34)). Supposons aussi que les hypothèses du théorème 33 soient satisfaites. Alors les opérateurs $\overline{A}$ et $\overline{A^\#}$ sont maximaux monotones.*

Ce théorème assure que si les conditions aux limites sont maximales positives alors les problèmes d'évolution

$$\partial_t u + Au = 0, \quad u(\cdot,0) = u_0(\cdot)$$

et

$$\partial_t v + A^\# v = 0 \quad v(\cdot,0) = v_0(\cdot)$$

sont bien posés.

2.3. Exemples

Exercice 39. Trouver toutes les conditions maximales positives pour l'équation des ondes (voir Exercice 9).

Exercice 40. Trouver les conditions maximales positives pour les équations de Saint-Venant linéarisées.

Exercice 41. Trouver les conditions maximales positives pour les équations de Maxwell.

Chapitre 3

Approximation par la méthode de Galerkin-Discontinu

3.1. Généralités

Nous allons maintenant présenter une méthode d'approximation de type Galerkin-Discontinu. Nous considérons l'opérateur différentiel

$$L = A^k \partial_k.$$

Il s'agit alors d'approcher les solutions de

$$\begin{aligned} \partial_t w + Lw &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ Mw &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

avec des conditions aux limites $V(x) = \ker M(x)$ maximales positives sur le bord de Ω. Nous avons démontré au chapitre précédent que la solution est naturellement dans $C^0([0,T], D(A))$. Pour pouvoir démontrer un résultat de convergence de la méthode, il sera nécessaire de supposer une régularité plus élevée des solutions. Cependant, dans de nombreux exemples utiles en pratique, les solutions présentent des discontinuités stationnaires qui coïncident avec les discontinuités de la conditions initiales. Il faut donc définir des espaces fonctionnels qui tiennent compte de ces discontinuités.

Pour définir ces espaces, nous considérons donc des ouverts Ω_i réguliers, $i = 1 \dots N$ satisfaisant les propriétés suivantes

(1) $\overline{\cup_i \Omega_i} = \overline{\Omega}$,

(2) $\forall i, j \quad i \neq j \Rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$.

Une telle décomposition du domaine de calcul Ω est appelé un *maillage* de Ω. Les ouverts Ω_i sont appelés les *éléments* du maillage.

Soit k un entier ≥ 1. Nous définissons l'espace E des fonctions w de $H = (L^2(\Omega))^m$ telles que la restriction de w à chaque ouvert Ω_i est dans l'espace de Sobolev $\left(H^{k+1}(\Omega_i)\right)^m$

$$E = \left\{w \in H, w|_{\Omega_i} \in H^{k+1}(\Omega_i)^m\right\}. \tag{3.1.2}$$

L'espace E est muni de la norme

$$\|w\|_E = \sum_i \|w|_{\Omega_i}\|_{H^{k+1}(\Omega_i)^m}.$$

Pour construire la formulation Galerkin-Discontinu, nous allons supposer que la solution faible w de (3.1.1) que nous cherchons à approcher satisfait

$$w \in C^1([0,T], E).$$

Par ailleurs, dire que w est solution faible de (3.1.1) implique que w est une solution de (3.1.1) au sens des distributions. Par conséquent, dans chaque ouvert Ω_i

$$\partial_t w + Lw = 0$$

au sens de la dérivée usuelle des fonctions. Puisque w est dans $C^1([0,T], E)$, la trace de w sur $\partial\Omega$ est définie (la trace d'une fonction de H^1 est bien définie dans $H^{1/2}$). Par conséquent, au sens usuel, w vérifie

$$Mw = 0 \quad \text{sur } [0,T] \times \partial\Omega. \tag{3.1.3}$$

Le choix de l'espace E autorise w à présenter des discontinuités sur les bords des ouverts Ω_i. Nous introduisons donc l'ensemble des discontinuités éventuelles de w

$$D = (\cup_i \partial\Omega_i) \setminus \partial\Omega.$$

D est une surface que l'on suppose orientée par une normale unitaire n. Sur D nous indiçons par "L" (comme « Left ») le côté de $-n$ et par "R" (comme « Right ») le côté de n. Nous utilisons la notation standard pour les discontinuités sur D

$$[w] := w_R - w_L.$$

Le fait que w soit solution de (3.1.1) au sens des distributions implique que sur D, w satisfait la condition de saut de Rankine-Hugoniot

$$\left[A^k n_k w\right] = 0. \tag{3.1.4}$$

Voir [**9**]. Si u et v sont des éléments de E, nous introduisons alors les notations suivantes

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega u \cdot v,$$
$$[u, v] = \int_D u \cdot v,$$
$$(u, v) = \int_{\partial\Omega} u \cdot v,$$

et, lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous poserons aussi

$$A^k n_k = A.$$

Puisque w vérifie (3.1.1), (3.1.3) et (3.1.4), cela implique que pour toute fonction test $\psi \in E$

$$\langle \partial_t w, \psi\rangle + \langle Lw, \psi\rangle + \left[A^-(w_R - w_L), \psi_L\right] + \left[A^+(w_R - w_L), \psi_R\right] + (Mw, \psi) = 0.$$

Nous introduisons alors la forme bilinéaire B sur $E \times E$ définie par

$$B(w, \psi) = \langle Lw, \psi\rangle + \left[A^-(w_R - w_L), \psi_L\right] + \left[A^+(w_R - w_L), \psi_R\right] + (Mw, \psi)\,. \tag{3.1.5}$$

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 42. *Soit w un élément de $C^1([0, T], E)$. Soit B la forme bilinéaire sur E définie par (3.1.5). Alors w est solution faible de (3.1.1) ssi pour tout ψ élément* *de E et pour tout $t \in [0,T]$*

$$\langle \partial_t w(\cdot,t), \psi(\cdot)\rangle + B(w(\cdot,t),\psi(\cdot)) = 0.$$

REMARQUE 43. Nous aurions aussi pu considérer la forme bilinéaire

$$B(w,\psi) = \langle Lw,\psi\rangle + \left[A(w_R - w_L), \frac{\psi_L + \psi_R}{2}\right] + (Mw,\psi)\,, \tag{3.1.6}$$

et énoncer le même résultat. Le schéma associé à la forme (3.1.5) est appelé schéma de Galerkin-discontinu décentré, tandis que le schéma associé à (3.1.6) est le schéma centré. Le schéma décentré possède des propriétés de stabilité et de convergence plus fortes que le schéma centré, ce qui justifie le choix de la décomposition $A = A^+ + A^-$.

Nous allons détailler quelques propriétés de la forme bilinéaire B du schéma décentré (3.1.5). Commençons par un lemme très utile.

LEMME 44. *Pour tout w, ψ dans E*

$$\langle Lw,\psi\rangle = -\langle w, L\psi\rangle + [Aw_L,\psi_L] - [Aw_R,\psi_R] + (Aw,\psi)\,. \tag{3.1.7}$$

DÉMONSTRATION. L'application de la formule de Green sur l'ouvert Ω_i conduit à

$$\int_{\Omega_i} A^k \partial_k w \cdot \psi = -\int_{\Omega_i} A^k \partial_k \psi \cdot w + \int_{\partial\Omega_i} A^k n_k w \cdot \psi. \tag{3.1.8}$$

Nous sommons ensuite cette relation sur tous les ouverts Ω_i. En remarquant que $\cup_i \partial\Omega_i = D \cup \partial\Omega$, et réorganisant les termes de bord, nous obtenons (3.1.7). □

La proposition suivante est une réécriture de la forme bilinéaire B.

LEMME 45. *Pour tout w, ψ dans E*

$$\begin{aligned} B(w,\psi) = &-\langle w, L\psi\rangle + \left[A^- w_R + A^+ w_L, \psi_L\right] \\ &+ \left[-A^+ w_L - A^- w_R, \psi_R\right] + ((M+A)w,\psi)\,. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du lemme (44) et du fait que $A = A^+ + A^-$. $\square$

De même que l'opérateur L est monotone, nous allons démontrer une propriété analogue pour la forme bilinéaire B.

PROPOSITION 46. *Pour tout w dans E*

$$B(w,w) = [|A|(w_R - w_L), w_R - w_L] + \left(\left(M + \frac{1}{2}A\right) w, w\right). \tag{3.1.10}$$

De plus si $M + \frac{1}{2}A$ est une matrice positive alors

$$B(w,w) \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. Nous posons $\psi = w$, et nous effectuons la demi somme de (3.1.5) et de (3.1.9). La relation (3.1.10) découle alors de l'identité $|A| = A^+ - A^-$. La matrice $|A|$ est (symétrique) positive. Si $M + \frac{1}{2}A$ est une matrice positive alors pour tout $w \in E$, alors

$$\left(M + \frac{1}{2}A\right) w \cdot w \geq 0,$$

donc la forme bilinéaire B est bien positive sur E. $\square$

La forme bilinéaire B est positive, mais elle n'est pas symétrique, ce qui ne permet pas de lui appliquer directement l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il est donc utile d'estimer la partie antisymétrique de B. C'est l'objet du lemme suivant :

LEMME 47. *Pour tout w, ψ dans E*

$$\frac{1}{2}\left(B(w,\psi) - B(\psi,w)\right) = -\langle w, L\psi\rangle + \left[\frac{1}{2}A(w_L + w_R), \psi_L - \psi_R\right] + \left(\frac{A + M - M^T}{2} w, \psi\right).$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat se démontre en utilisant les formules (3.1.5), (3.1.9) et la relation

$$Mw \cdot \psi = w \cdot M^T \psi.$$

$\square$

3.2. Convergence de la méthode GD

Nous allons maintenant démontrer un résultat de convergence pour la méthode GD. Nous constatons d'abord que si l'espace E est construit sur une décomposition en ouverts Ω_i (voir (3.1.2)) et que $w \in E$, alors w est aussi contenu dans tout espace E' qui serait construit à partir d'un redécoupage de chaque ouvert Ω_i. Plus précisément, nous considérons des ouverts ω_{ij} tels que :

(1) $\cup_j \overline{\omega_{ij}} = \overline{\Omega_i}$

(2) $j \neq l \Rightarrow \omega_{ij} \cap \omega_{il} = \emptyset$.

Nous définissons

$$E' = \left\{ w \in H, \forall i, j, w|_{\omega_{ij}} \in H^{k+1}(\omega_{ij})^m \right\}.$$

Alors, $E \subset E'$. Avec cette construction, nous pouvons toujours nous ramener au cas où les ouverts Ω_i sont aussi petits que nécessaire. Nous notons alors h le plus grand diamètre des ouverts Ω_i

$$h = \max_i \operatorname{diam} \Omega_i,$$

et nous pouvons envisager de faire tendre h vers 0. L'espace d'approximation est noté E_h. C'est l'ensemble des fonctions vectorielles sur Ω dont la restriction à chaque Ω_i est polynomiale de degré inférieur ou égal à k :

$$E_h = \{ w \in H, \quad \forall i, \quad w|_{\Omega_i} \text{ polynôme de d}^\circ \leq k \}.$$

L'esapce E_h est un sous-espace vectoriel de dimension finie de H. Notons π l'opérateur de projection sur E_h au sens de la norme de H. Cette projection est définie de manière unique par la propriété

$$\forall \psi_h \in E_h, \quad \langle \pi w, \psi_h \rangle = \langle w, \psi_h \rangle.$$

Nous disposons alors des estimations suivantes [**8**].

Proposition 48. *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de h, telle que pour tout w dans E*

$$\|w - \pi w\|_H \leq C h^{k+1} \|w\|_E$$

et

$$\|w - \pi w\|_{L^2(D)} \leq C h^{k+1/2} \|w\|_E .$$

Dans ces estimations, pour être tout à fait précis, il faudrait préciser que la constante C dépend de la « forme » des ouverts Ω_i.

Chapitre 4

Programmation efficace de la méthode Galerkin-Discontinu

4.1. Intégration numérique

4.2. Schéma temporel

4.3. Parallélisme local

4.4. Parallélisme global

Chapitre 5

Exemples d'applications

5.1. Maxwell

5.2. Saint-Venant

5.3. Transport

5.4. Modèles cinétiques

Bibliographie

[1] Haïm Brezis. Analyse fonctionnelle. collection mathématiques appliquées pour la maıtrise.[collection of applied mathematics for the master's degree], 1983.

[2] Alexandre Ern, Jean-Luc Guermond, and Gilbert Caplain. An intrinsic criterion for the bijectivity of hilbert operators related to friedrich'systems. *Communications in partial differential equations*, 32(2) :317–341, 2007.

[3] Kurt O Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 11(3) :333–418, 1958.

[4] Kurt O Friedrichs and Peter D Lax. Boundary value problems for first order operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 18(1-2) :355–388, 1965.

[5] Peter D Lax and Ralph S Phillips. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(3) :427–455, 1960.

[6] Robert D Moyer. On the nonidentity of weak and strong extensions of differential operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 19(2) :487–488, 1968.

[7] Jeffrey Rauch. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 291(1) :167–187, 1985.

[8] P-A Raviart and J-M Thomas. *Introduction à l" analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1983.

[9] Laurent Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, volume 3. Hermann, 1961.