

Gestion de Portefeuille

Ex 5: Modèle Black-Litterman

Version: 12 Feb 2025

```
library(xts)
library(kableExtra)
library(quadprog)
library(fPortfolio)
library(BLCOP)
```

L'objet de cet exercice est de combiner l'approche de Black-Litterman et le modèle moyenne-variance classique pour imposer des contraintes à la solution.

Rappel

Distribution *ex-ante* des rendements:

$$r \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

Rendements espérés d'équilibre

$$\Pi = \delta \Sigma w_{eq}$$

Distribution de l'espérance de rendement:

$$\mu = \Pi + \epsilon^{(e)}$$

avec

$$\epsilon^{(e)} \sim \mathcal{N}(0, \tau \Sigma)$$

Expression des vues:

$$P\mu = Q + \epsilon^{(v)}$$

avec

$$\epsilon^{(v)} \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$$

Solution *ex-post*:

Espérance de rendement

$$\mu^* = [(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q]$$

Covariance des rendements

$$M^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}$$

Distribution *ex-post* des rendements:

$$r \sim \mathcal{N}(\mu^*, \Sigma^*)$$

avec $\Sigma^* = \Sigma + M^{-1}$.

Données

Données de He & Litterman:

```
data =
'1,0.4880,0.4780,0.5150,0.4390,0.5120,0.4910
 0.4880,1,0.6640,0.6550,0.3100,0.6080,0.7790
 0.4780,0.6640,1,0.8610,0.3550,0.7830,0.6680
 0.5150,0.6550,0.8610,1,0.3540,0.7770,0.6530
 0.4390,0.3100,0.3550,0.3540,1,0.4050,0.3060
 0.5120,0.6080,0.7830,0.7770,0.4050,1,0.6520
 0.4910,0.7790,0.6680,0.6530,0.3060,0.6520,1'

Corrmat = matrix( as.double(spl( gsub('\n', ' ', data), ' '),
                               nrow = length(spl(data, '\n')), byrow=TRUE)

stdevs = c(16.0, 20.3, 24.8, 27.1, 21.0, 20.0, 18.7)/100
w.eq = c(1.6, 2.2, 5.2, 5.5, 11.6, 12.4, 61.5)/100
# Prior covariance of returns
Sigma = Corrmat * (stdevs %*% t(stdevs))
```

Rendements d'équilibre

```
# risk aversion parameter
delta = 2.5
Pi = delta * Sigma %*% w.eq
```

Assets	Std Dev	Weq	PI
Australia	16	1.6	3.9
Canada	20.3	2.2	6.9
France	24.8	5.2	8.4
Germany	27.1	5.5	9
Japan	21	11.6	4.3
UK	20	12.4	6.8
USA	18.7	61.5	7.6

Questions

En utilisant la librairie BLCOP, calculez l'espérance et la covariance ex-post des rendements en imposant la vue #1 (le marché allemand sur-performe de 5%).

Attention à bien observer la signification des paramètres de BLViews et posteriorEst de librairie BLCOP.

```

asset.names <- c('Australia','Canada','France','Germany','Japan','UK','USA')
n <- length(asset.names)
P.1 <- matrix(data=0, ncol = n, nrow = 1, dimnames = list(NULL, asset.names))
P.1[,4] <- 1
P.1[,3] = -0.295
P.1[,6] = -0.705
sd = .05
view.1 <- BLViews(P = P.1, q = 0.05,
                  confidences = 1/sd,
                  assetNames = asset.names)

# kappa est the \tau de Litterman et He dans le calcul de \Omega
p.dist <- posteriorEst(views=view.1, sigma=Sigma, mu=as.numeric(Pi), tau=0.05,
                      kappa=0.05)

df <- data.frame(prior=p.dist@priorMean, post=p.dist@posteriorMean)

```

Table 1: Espérances de rendement *ex-ante* et *ex-post*

	$\mu_{ex-ante}$	$\mu_{ex-post}$
Australia	0.039	0.043
Canada	0.069	0.076
France	0.084	0.093
Germany	0.090	0.110
Japan	0.043	0.045
UK	0.068	0.070
USA	0.076	0.081

Avec les résultats de la question précédente, calculer les poids optimaux (Table 4 de l'article de Litterman et He).

```

w.star <- (1/delta) * solve(p.dist@posteriorCovar, p.dist@posteriorMean)
names(w.star) <- asset.names

```

On reproduit les résultats de Litterman et He.

Table 2: Poids optimum, modèle MV

	w^*
Australia	1.5
Canada	2.1
France	-3.9
Germany	35.4
Japan	11.0
UK	-9.5
USA	58.6

Calculer le portefeuille tangent avec $w_i \geq 0$.

On prendra $R_f = 2\%$.

On pose le problème d'optimisation que l'on résoud directement.

```
r.f <- .02
r.star = .06
mu <- matrix(p.dist@posteriorMean, nrow=n, ncol=1)
Amat <- mu-r.f
Amat <- cbind(Amat, diag(n))
bvec <- c(r.star, rep(0,n))
dvec <- rep(0,n)
sol <- solve.QP(p.dist@posteriorCovar, dvec, Amat, bvec, meq=1)
w.nom <- sol$solution
w.den <- sum(w.nom)
w.t <- w.nom/sum(w.nom)
r.bar = sum(w.t * mu)
```

Table 3: Portefeuille tangent (solve.QP) $R_f=2\%$.

	weight
Germany	44.65
USA	55.35

On peut également utiliser, par exemple, le package fPortfolio. Comme on dispose déjà du vecteur μ et de la matrice de covariance, il faut écrire sa propre fonction de calcul de la moyenne et de la covariance des rendements.

```
BLCov <- function(x, spec=NULL, ...) {
  x.mat = as.matrix(x)
  list(mu=p.dist@posteriorMean, Sigma=p.dist@posteriorCovar)
}

spec <- portfolioSpec()
setEstimator(spec) <- "BLCov"
setRiskFreeRate(spec) <- .02

# dummy data for returns
ts <- timeSeries(matrix(1, nrow=10, ncol=length(asset.names)))
colnames(ts) <- asset.names
tgPortfolio <- tangencyPortfolio(
  data=ts,
  spec=spec)
```

On retrouve le même portefeuille tangent:

Table 4: Portefeuille tangent (fPortfolio) $R_f=2\%$.

	weight
Germany	44.65
USA	55.35