

Risk Budgeting & Risk Parity

P. Hénaff

Version: 07 Feb 2025

Mesures de risque cohérente

- ▶ Croissance: $X > Y \Rightarrow \mathcal{R}(X) \geq \mathcal{R}(Y)$
- ▶ Invariance: $\mathcal{R}(X + k) = \mathcal{R}(X)$
- ▶ Homogénéité: $\lambda \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \mathcal{R}(\lambda X) = \lambda \mathcal{R}(X)$
- ▶ Convexité:
$$\lambda \in [0, 1] \Rightarrow \mathcal{R}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \mathcal{R}(X) + (1 - \lambda)\mathcal{R}(Y)$$

Théorème de décomposition d'Euler

Soit $f(X), X \in R^n$ homogène de degré 1: $f(\lambda X) = \lambda f(X)$

Alors:

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_i x_i \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \\ &= X^T \nabla_X f \end{aligned} \tag{1}$$

Décomposition du risque

Soit $\mathcal{RM}_p(w)$ une mesure cohérente du risque:

- ▶ CMR_i Contribution marginale au risque de l'actif i : $\frac{\partial \mathcal{RM}_p(w)}{\partial w_i}$
- ▶ CR_i Contribution au risque de l'actif i : $w_i \text{CMR}_i$
- ▶ Décomposition du risque

$$\begin{aligned}\mathcal{RM}_p(w) &= \sum_i w_i \text{CMR}_i \\ &= \sum_i \text{CR}_i\end{aligned}\tag{2}$$

- ▶ Contribution relative au risque (CRR):

$$\begin{aligned}1 &= \sum_i w_i \frac{\text{CMR}_i}{\mathcal{RM}_p(w)} \\ &= \sum_i \text{CRR}_i\end{aligned}\tag{3}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\mathcal{RM}_p(x) &= (w^T \Sigma w)^{1/2} \\ &= \sum_i w_i \frac{\partial \mathcal{RM}_p(w)}{\partial w_i} \\ &= w^T \nabla_w \mathcal{RM}_p(w)\end{aligned}\tag{4}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\mathcal{RM}_p(w) &= (w^T \Sigma w)^{1/2} \\ \nabla_w \mathcal{RM}_p(w) &= \frac{\partial (w^T \Sigma w)^{1/2}}{\partial w} \\ &= \frac{1}{2} (w^T \Sigma w)^{-1/2} 2 \Sigma w \\ &= \frac{\Sigma w}{\sqrt{w^T \Sigma w}}\end{aligned}\tag{5}$$

Exemple

- ▶ CMR_i Contribution marginale au risque de l'actif i : $\frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$
- ▶ Décomposition du risque

$$\mathcal{RM}_p(w) = \sum_i w_i \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \quad (6)$$

Utilité en gestion des risques

- Impact d'un changement d'allocation

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{RM}_p(w) &= \sum_i \Delta \bar{w}_i \text{CMR}_i \\ \sum_i \Delta \bar{w}_i &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

- Impact de l'ajout Δw_i de titres en portefeuille

$$\Delta \mathcal{RM}_p(w) = \sum_i \Delta w_i \text{CMR}_i\tag{8}$$

Lien avec β

$$R_p(\bar{w}) = \sum_i \bar{w}_i R_i$$

Definition

Le β d'un titre i par rapport au portefeuille est défini par:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_p(w))}{\text{Var}(R_p(w))}$$

Lien avec β

Si la mesure de risque est $\sigma_p(w)$, alors

$$\begin{aligned}
 \text{CMR}_i &= \frac{\partial \sigma_p(w)}{\partial w_i} \\
 &= \frac{(\Sigma w)_i}{\sigma_p(w)} \\
 &= \frac{\text{Cov}(R_i, R_p(w))}{\sigma_p(w)} \\
 &= \frac{\text{Cov}(R_i, R_p(w))}{\sigma_p^2(w)} \sigma_p(w) \\
 &= \beta_i \sigma_p(w)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Exemple

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma) \times P \times \text{diag}(\sigma) \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

Table 1: Décomposition du risque

| σ_i^2 | w | CMR | CR | CRR |
|--------------|-------|-------|-------|-------|
| 0.01 | 0.333 | 0.088 | 0.029 | 0.164 |
| 0.04 | 0.333 | 0.172 | 0.057 | 0.322 |
| 0.09 | 0.333 | 0.275 | 0.092 | 0.514 |

$$\sigma_p(w) = 0.178$$

Exemple (suite)

- Modification de l'allocation: $w^T = (.532, .276, .192)$

$$\Delta\sigma_p(w) = \text{CMR}^T(w^* - w) \quad (10)$$

$$= -0.03 \quad (11)$$

| σ_i | w | CMR | CR | CRR |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| 0.01 | 0.532 | 0.093 | 0.049 | 0.333 |
| 0.04 | 0.276 | 0.178 | 0.049 | 0.332 |
| 0.09 | 0.192 | 0.259 | 0.050 | 0.335 |

$$\sigma_p(w) = 0.148$$

Risk Parity & Budgeting

Parity:

$$\text{CR}_i = \frac{1}{N} \mathcal{RM}_p(w)$$

Budgeting:

$$\text{CR}_i = b_i \mathcal{RM}_p(w)$$

Cas Particulier: Risk Parity avec Σ diagonal

$$\Omega = \sqrt{\text{diag}(\Sigma)}$$

Cas Particulier: Risk Parity avec Σ diagonal

$$\Omega = \sqrt{\text{diag}(\Sigma)}$$

$$w = \frac{\Omega^{-1}}{1^T \Omega^{-1}} \quad (12)$$

$$w_i = \frac{1/\sigma_i}{\sum_i 1/\sigma_i} \quad (13)$$

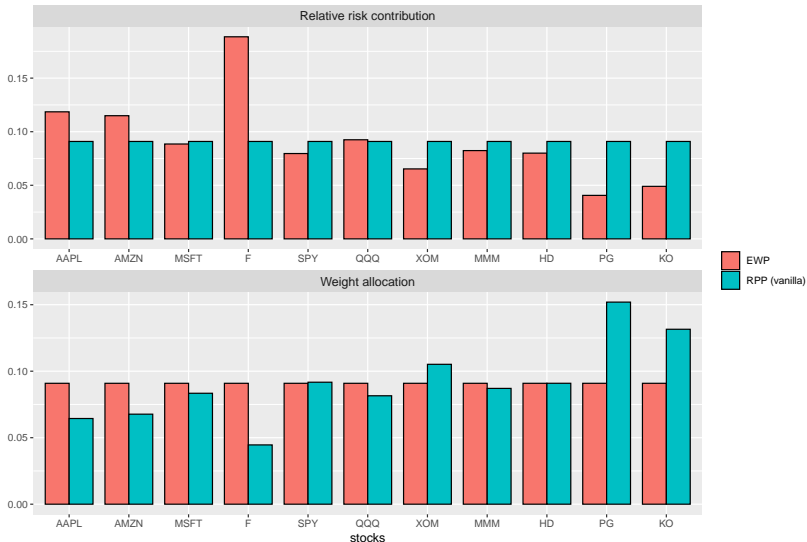
Risk Parity & Budgeting: Exemple.

```
Sigma <- cov(monthly.ret)
mu <- colMeans(monthly.ret)
rpp_vanilla <- riskParityPortfolio(Sigma)

w_all <- cbind("EWP" = rep(1/nrow(Sigma), nrow(Sigma)),
               "RPP (vanilla)" = rpp_vanilla$w)
```


Risk Budgeting

Portfolio capital and risk distribution



Exercice

Solution numérique du problème “risk parity”.

Contribution au risque de l’actif i : $w_i \frac{(\Sigma w)_i}{w^T \Sigma w}$

1. Calculer les poids w_i de la solution RP en résolvant un programme du type:

$$\min_w f(w)$$

s.t.

$$1^T w = 1$$

$$0 \leq w \leq 1$$

- ▶ Formuler la fonction objectif $f(w)$
 - ▶ Résoudre le problème avec le librairie NlcoOptim
2. Calculer la solution d’une seconde manière, en résolvant un système d’équations non-linéaires à l’aide de la librairie Ineqslv.