Finance Quantitative

Exo: Formule de Breeden-Litzenberger

Version: 03 Mar 2025

On se propose de calculer la distribution empirique de S_T à partir de la volatilité implicite des options.

```
sigma <- .2
S <- 100
r <- .0
b <- 0.0
T <- 1
```

La courbe de volatilité est donnée par un polynôme du second degré (en pratique, des modèles plus sophistiqués sont bien sûr utilisés). La volatilité de "Black-Scholes" est la volatilité à l'argent, réputée indépendante du strike.

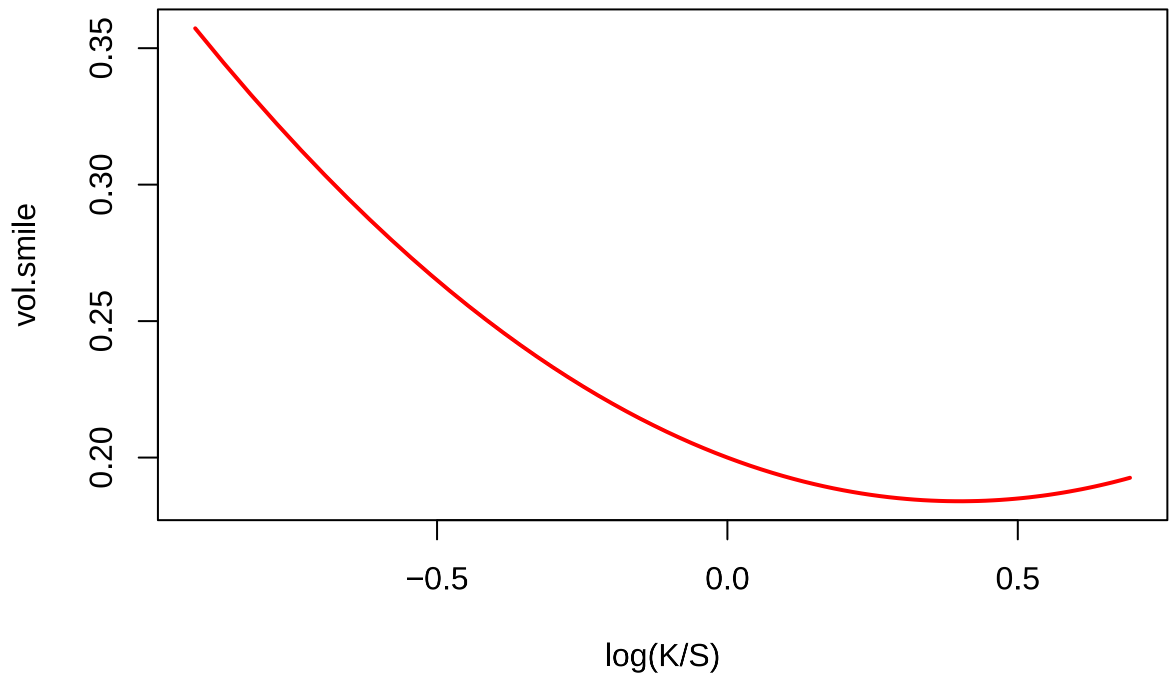
```
## quadratic smile coefficients
a1 <- -.80/10
a2 <- 1/10

## BS volatility function
bsVol <- function(K) {
  sigma
}

## Volatility with smile
smileVol <- function(K) {
  sigma + a1*log(K/S) + a2*log(K/S)^2
}
```

Smile de volatilité

```
KRange <- seq(40, 200, by=2)
vol.smile <- sapply(KRange, smileVol)
plot(log(KRange/S), vol.smile, type="l", col="red", lwd=2, xlab="log(K/S)")
```



Options Européenne

Pour faciliter les calculs, on crée une fonction qui prend l'algorithme de smile comme argument:

```
# Call avec smile de volatilité
call.sm <- function(K, vol.function) {
  tmp <- GBSOption(TypeFlag="c", S, X=K,Time=T,
                   r=r, b=b, sigma=vol.function(K))
  tmp@price
}
# test
print(paste("Call 90: ", round(call.sm(90, bsVol),3)))
```

```
## [1] "Call 90:  13.589"
```

Densité de S_T

Calculer la densité $p(S_T)$ en utilisant la formule de Breeden-Litzenberger. Le résultat sera une fonction Vérifier numériquement que $\int p(S_T) dS_T = 1$.

Valorisation d'un call digital strike=105

Valoriser un call digital en dehors de l'argent ($K = 105$), en utilisant la distribution lognormale (Black-Scholes) et la distribution implicite dérivée du smile. On pourra utiliser la fonction "integrate" pour calculer

$$\int_K^\infty p(x)dx$$

Vérifiez l'intégration numérique de la distribution log-normale à l'aide de la formule analytique du call digital.

Effectuer le même calcul pour un put digital, $K = 70$. Est-ce que ces résultats sont cohérents avec votre observation de la densité de S_T?