Model Risk

P. Hénaff

3/2021

Le Modèle Moyenne-Variance

$$w^* = \text{argmin} \quad w^T \Sigma w$$
$$\text{s.t.}$$
$$\mu^T w = \mu^*$$

Equivalent à:

$$\begin{aligned} w^* &= \text{argmin} \quad \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \gamma x^T \mu^* \\ &= \gamma \Sigma^{-1} \mu^* \end{aligned}$$

Decomposition de Σ et Σ^{-1} (Stevens 1997)

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= V\Omega V^T \\
\Sigma^{-1} &= V\Omega^{-1} V^T \\
&= \mathcal{I}
\end{aligned}
$$

Exemple 1

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma) \times \mathrm{P} \times \text{diag}(\sigma) \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

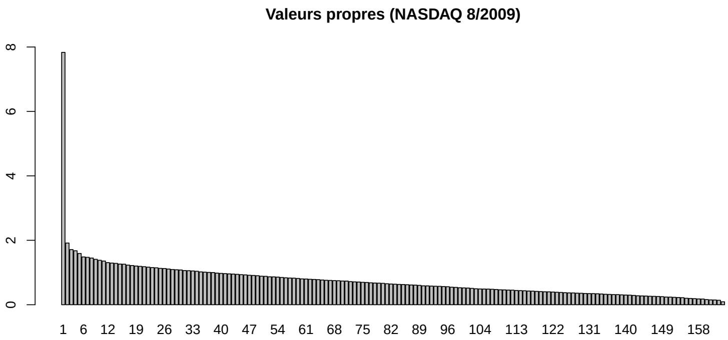
	Σ			Σ^{-1}		
	V1	V2	V3	V1	V2	V3
Eigenvectors						
1	-0.2404	-0.2168	0.9462	0.9462	-0.2168	-0.2404
2	-0.4599	-0.8330	-0.3077	-0.3077	-0.8330	-0.4599
3	-0.8548	0.5091	-0.1006	-0.1006	0.5091	-0.8548
Eigenvalues						
	0.1153	0.0222	0.0026	389.8800	45.1264	8.6749

Exemple 2

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad \rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.85 \\ 0.9 & 1 & 0.8 \\ 0.85 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

	Σ			Σ^{-1}		
	V1	V2	V3	V1	V2	V3
Eigenvectors						
1	-0.2565	-0.2046	0.9446	0.9446	-0.2046	-0.2565
2	-0.5054	-0.8047	-0.3115	-0.3115	-0.8047	-0.5054
3	-0.8239	0.5573	-0.1030	-0.1030	0.5573	-0.8239
Eigenvalues						
	0.1274	0.0113	0.0013	778.6401	88.2399	7.8503

Retour sur l'ACP



Interprétation de $\mathcal{I}$ (I)

Modèle multifacteur pour le rendement:

$$R_{i,t} = \beta_0 + \beta_i^T R_t^{(-i)} + \epsilon_{i,t}$$

avec $R_t^{(-i)}$ vecteur de rendement de tous les actifs sauf l'actif i, $\epsilon_{i,t} \sim \mathcal{N}(0, s_i^2)$

Voir l'article de Stevens. La matrice d'information $\mathcal{I}$ est de la forme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{i,i} &= \frac{1}{\sigma_i^2(1 - R_i^2)} \\
\mathcal{I}_{i,j} &= -\frac{\beta_{i,j}}{\sigma_i^2(1 - R_i^2)} \\
&= -\frac{\beta_{j,i}}{\sigma_j^2(1 - R_j^2)}
\end{aligned}$$

Interprétation de $\mathcal{I}$ (II)

Ce qui donne une expression simple pour w_i, le poid de l'actif i dans le portefeuille optimal:

$$w_i(\gamma) = \gamma \frac{\mu_i - \beta_i^T \mu_i^{(-i)}}{s_i^2}$$

avec s_i^2: variance du résidu du modèle de couverture du titre i.

Conséquences pour le portefeuille optimal MV

- Plus l'actif i est bien répliqué par les autres actifs (s_i petit), plus forte est la pondération dans le portefeuille MV
- Le signe de w_i est déterminé par la différence entre le rendement espéré du titre et de celui du portefeuille de couverture.

le portefeuille optimal MV de Markowitz ne procure pas une diversification des facteurs de risque, mais réalise une concentration du risque sur les facteurs d'arbitrage (sur les actifs qui peuvent être très bien répliqués par d'autres actifs de l'univers des titres)

Bibliographie

Stevens, Guy V. G. 1997. "On the Inverse of the Covariance Matrix in Portfolio Analysis." 587.