Finance Quantitative

Risque Systématique et Risque Spécifique dans un modèle à un facteur
Solution

Patrick Hénaff

Version: 12 Feb 2025

Modèle à un facteur (CAPM/MEDAF)

L'excès de rendement des titres est déterminé par le coefficient d'exposition au risque de marché β_i:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \epsilon_i$$

ou r_i, $r - M$, ϵ_i sont des variables aléatoires, avec $\mathrm{cov}(\epsilon_i, r_M) = 0$ et donc:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_\epsilon^2$$

Le risque du titre i est décomposé en un risque de marché $\beta_i^2 \sigma_M^2$ et un risque spécifique σ_ϵ^2 qui peut être éliminé par diversification.

Questions

On se propose de mesurer numériquement cet effet de diversification sur un exemple numérique:

On considère n actifs ayant tous $\beta_i = 0.8$, $\sigma_i = .25$ alors que $\sigma_M = .2$.

Calculer le risque systématique et le risque spécifique de chacun de ces titres.

```
beta.i <- .8
sigma.i <- .25
sigma.M <- .2
sigma.e <- sqrt(sigma.i^2 - beta.i^2 * sigma.M^2)
sigma.s <- beta.i * sigma.M
```

Risque systématique: 0.16, risque spécifique: 0.19.

Construire un portefeuille équipondéré de n titres, et calculer de nouveau le risque total du portefeuille, décomposé en risque systématique et le risque spécifique.

Le rendement du portefeuille est:

$$R_p = \sum_i w_i [r_f + \beta_i (r_M - r_f) + \epsilon_i]$$

Le risque du portefeuille est:

$$\sigma_P = [\beta^2 \sigma_M^2 + \frac{1}{n} \sigma_\epsilon^2]^{\frac{1}{2}}$$

Faire varier n et tracer un graphe des deux composantes du risque en fonction de n.

```
sigma.p <- function(n) {
sqrt(sigma.M^2 * beta.i^2 + (1/n)*sigma.e^2)
}

nb <- seq(1,100,2)
sigma.p <- sapply(nb, sigma.p)
sigma.market <- beta.i * sigma.M
plot(nb, sigma.p, type='l', col="red", ylim=c(.1, .25), ylab=expression(sigma),
     xlab="nombre de titres en portefeuille")
abline(h=sigma.market, col="blue")
legend("topright", legend=c(expression(sigma[P]), expression(sigma[M])),
       col=c("red", "blue"), lty=1)
```

On observe que la diversification du risque spécifique s'obtient avec un nombre relativement faible de titres.

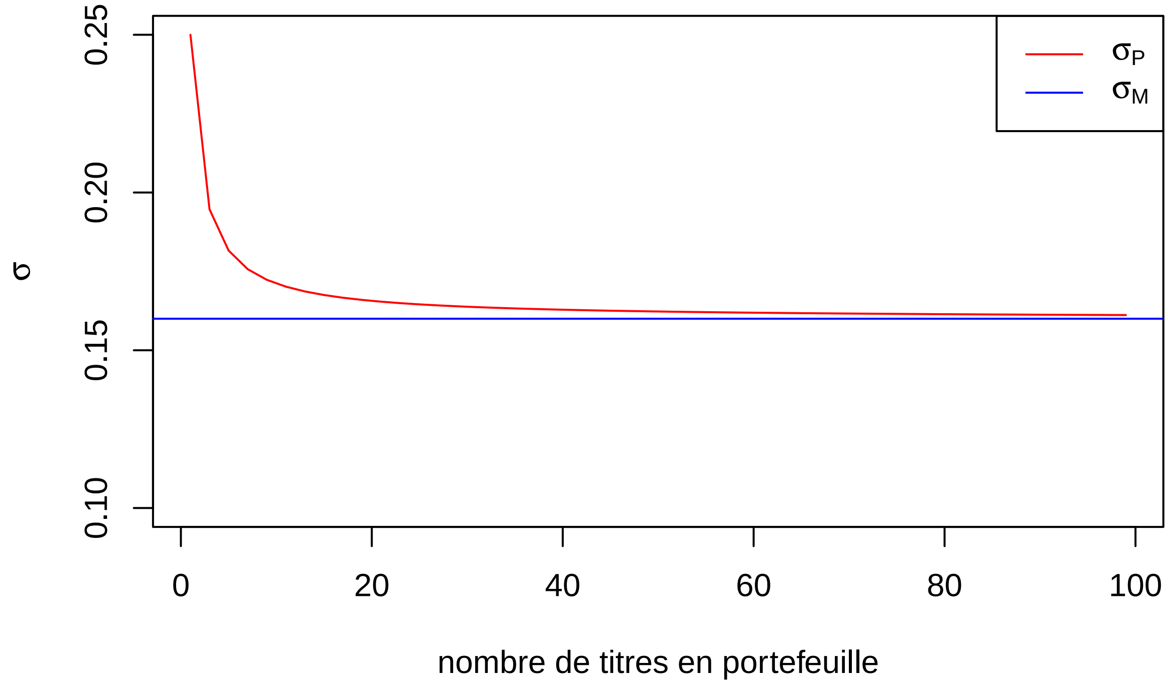

Figure 1: Risque d'un portefeuille en fonction du nombre de titres détenus. Le risque total est décomposé en risque systématique σ_M lié à l'exposition au marché, et en risque spécifique $\sigma_P - \sigma_M$ qui décroit du fait de la diversification.