

Modèle à un Facteur

P. Hénaff

Version: 06 Feb 2025

Risque d'un titre individuel: un paradoxe!

Rappel: Frontière Efficiente

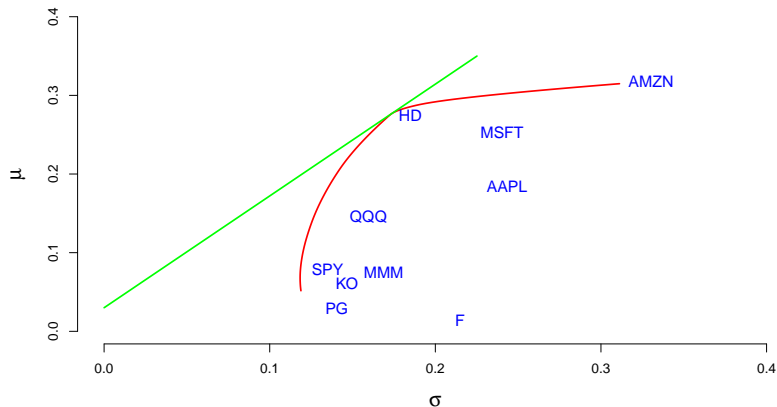


Figure 1: Droite de Marché des Capitaux

Relation Rendement/Risque

Portefeuille efficient:

$$\mu_P = r + \left(\frac{\mu_T - r}{\sigma_T} \right) \sigma_P$$

Titre individuel (CAPM/MEDAF):

$$\mu_i - r_f = \beta_i(\mu_M - r_f) \quad (1)$$

Derivation de la formule CAPM.

Decomposition du risque

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \epsilon_i$$

$$\text{cov}(\epsilon_i, r_M) = 0$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_\epsilon^2$$

- ▶ Risque de marché $\beta_i^2 \sigma_M^2$
- ▶ Risque spécifique σ_ϵ^2

Decomposition du risque d'un portefeuille

$$r_P = \sum_i w_i r_i$$

$$\beta_P = \sum_i w_i \beta_i$$

- ▶ Risque de marché $\beta_P^2 \sigma_M^2$
- ▶ Risque spécifique $\sum_i w_i^2 \sigma_\epsilon^2$

Modèle statistique (Sharpe) et droite de marché des titres

$$R_i(t) = \alpha_i + \beta_i R_M(t) + e_i(t)$$

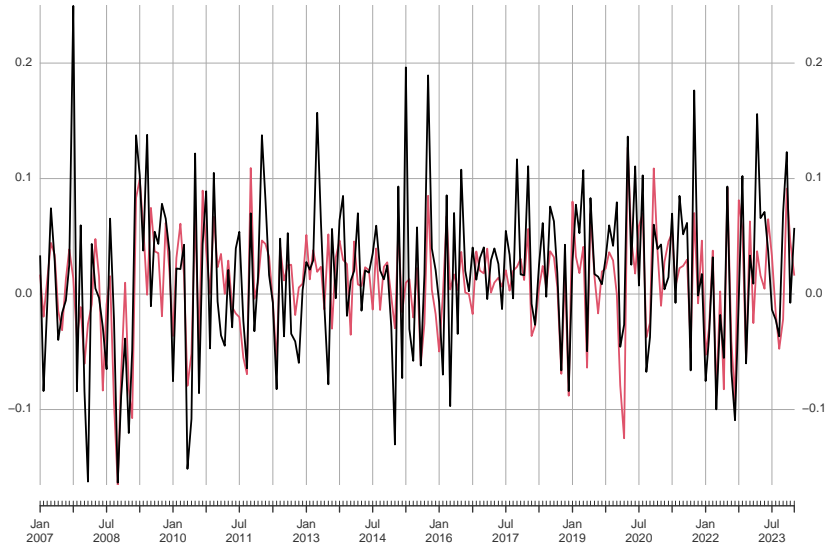
Données

| | AAPL | AMZN | MSFT | F | SPY | QQQ | XOM | MMM | HD | PG | KO |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Observations | 205.0000 | 205.0000 | 205.0000 | 205.0000 | 205.0000 | 205.0000 | 205.0000 | 205.0000 | 205.0000 | 205.0000 | 205.0000 |
| NAs | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| Minimum | -0.3296 | -0.2540 | -0.1634 | -0.5788 | -0.1652 | -0.1558 | -0.2619 | -0.1498 | -0.1652 | -0.1161 | -0.1668 |
| Quartile 1 | -0.0305 | -0.0429 | -0.0284 | -0.0500 | -0.0167 | -0.0190 | -0.0272 | -0.0290 | -0.0251 | -0.0213 | -0.0198 |
| Median | 0.0287 | 0.0255 | 0.0201 | -0.0013 | 0.0151 | 0.0192 | 0.0029 | 0.0106 | 0.0157 | 0.0074 | 0.0107 |
| Arithmetic Mean | 0.0251 | 0.0263 | 0.0166 | 0.0143 | 0.0087 | 0.0133 | 0.0067 | 0.0053 | 0.0148 | 0.0078 | 0.0080 |
| Geometric Mean | 0.0211 | 0.0216 | 0.0143 | 0.0047 | 0.0076 | 0.0118 | 0.0045 | 0.0034 | 0.0127 | 0.0068 | 0.0069 |
| Quartile 3 | 0.0838 | 0.0821 | 0.0592 | 0.0557 | 0.0369 | 0.0496 | 0.0453 | 0.0451 | 0.0615 | 0.0377 | 0.0397 |
| Maximum | 0.2377 | 0.5413 | 0.2495 | 1.2738 | 0.1270 | 0.1497 | 0.2692 | 0.1734 | 0.1890 | 0.1314 | 0.1419 |
| SE Mean | 0.0062 | 0.0070 | 0.0047 | 0.0103 | 0.0032 | 0.0038 | 0.0047 | 0.0043 | 0.0045 | 0.0032 | 0.0033 |
| LCL Mean (0.95) | 0.0129 | 0.0126 | 0.0073 | -0.0060 | 0.0024 | 0.0058 | -0.0025 | -0.0031 | 0.0058 | 0.0015 | 0.0016 |
| UCL Mean (0.95) | 0.0374 | 0.0401 | 0.0258 | 0.0347 | 0.0150 | 0.0208 | 0.0160 | 0.0137 | 0.0237 | 0.0142 | 0.0145 |
| Variance | 0.0079 | 0.0099 | 0.0045 | 0.0218 | 0.0021 | 0.0030 | 0.0045 | 0.0037 | 0.0042 | 0.0021 | 0.0022 |
| Stdev | 0.0890 | 0.0997 | 0.0672 | 0.1477 | 0.0457 | 0.0547 | 0.0673 | 0.0611 | 0.0650 | 0.0460 | 0.0468 |
| Skewness | -0.4785 | 0.6524 | 0.1045 | 2.8996 | -0.5549 | -0.4430 | 0.3389 | -0.2727 | -0.1381 | -0.0780 | -0.4822 |
| Kurtosis | 1.2512 | 3.1559 | 0.5505 | 25.7567 | 0.8687 | 0.3971 | 2.9693 | 0.0720 | 0.2214 | -0.0754 | 1.2419 |

MSFT & SPY

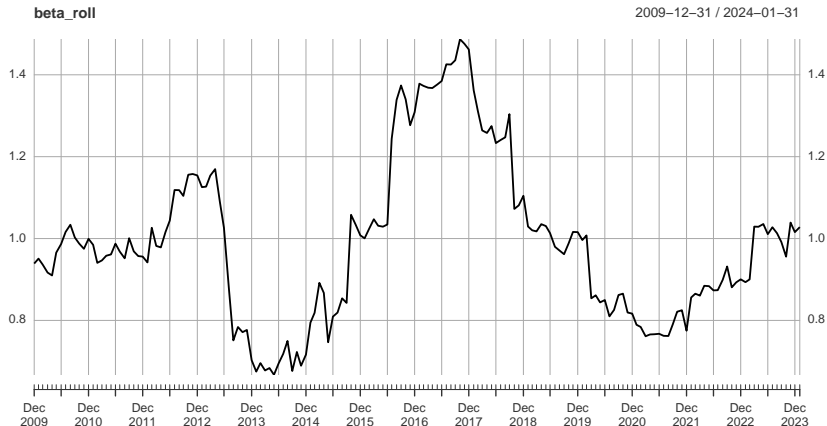
monthly.ret[, c("MSFT", "SPY")]

2007-01-31 / 2024-01-31



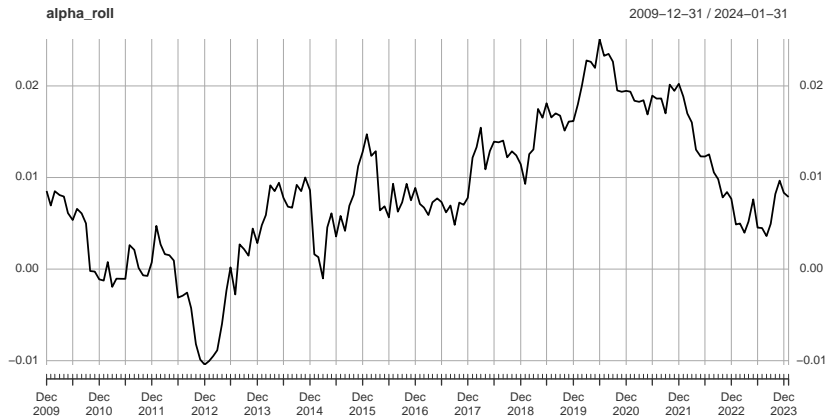
Calcul de β

```
beta_roll <- na.omit(rollapply(data=monthly.ret$MSFT, Rb=mo
                                FUN=CAPM.beta, width=36, by
```



Calcul de α

```
alpha_roll <- na.omit(rollapply(data=monthly.ret$MSFT, Rb=r  
                                FUN=CAPM.alpha, width=36,
```



Mesures de performance

Prendre en compte à la fois la rentabilité moyenne et le risque subi.

- ▶ Ratio de Sharpe, fondé sur σ , adapté à l'évaluation d'un portefeuille bien diversifié
- ▶ Alpha de Jensen, fondé sur β , adapté aux titres individuels.

Ratio de Sharpe

$$S_P = \frac{\overline{r_P} - \overline{r_f}}{\sigma_P}$$

Permet de visualiser la performance par rapport à la CML sur a graphique rendement/risque.

Ratio de Treynor

$$S_P = \frac{\overline{r_P} - \overline{r_f}}{\beta_P}$$

Permet de visualiser la performance du portefeuille par rapport à la droite des actifs risqués (Security Market Line: SML)

Ratio M^2 (Modigliani & Miller)

$$M_P^2 = \bar{r}_f + \frac{\sigma_B}{\sigma_P}(\bar{r}_P - \bar{r}_f)$$

Une mesure de performance ajustée pour le risque, à comparer avec le rendement moyen d'un portefeuille de référence B .

Alpha de Jensen

$$\overline{R}_p - r_f = \alpha_p + \beta_p(\overline{R}_M - r_f) + \epsilon_p$$

Visuellement, le terme α_p représente la distance verticale entre le portefeuille et la SML dans un diagramme rendement/beta.

Division du travail en Gestion de Portefeuille

- Espérance de rendement (analyse financière)

$$E(R_i(t)) = \alpha_i + \beta_i E(R_M(t))$$

- Variance (gestion du risque)

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma(e_i)^2$$