

# Finance Quantitative

Exo: Formule de Breeden-Litzenberger

Version: 06 Feb 2025

On se propose de calculer la distribution empirique de  $S_T$  à partir de la volatilité implicite des options.

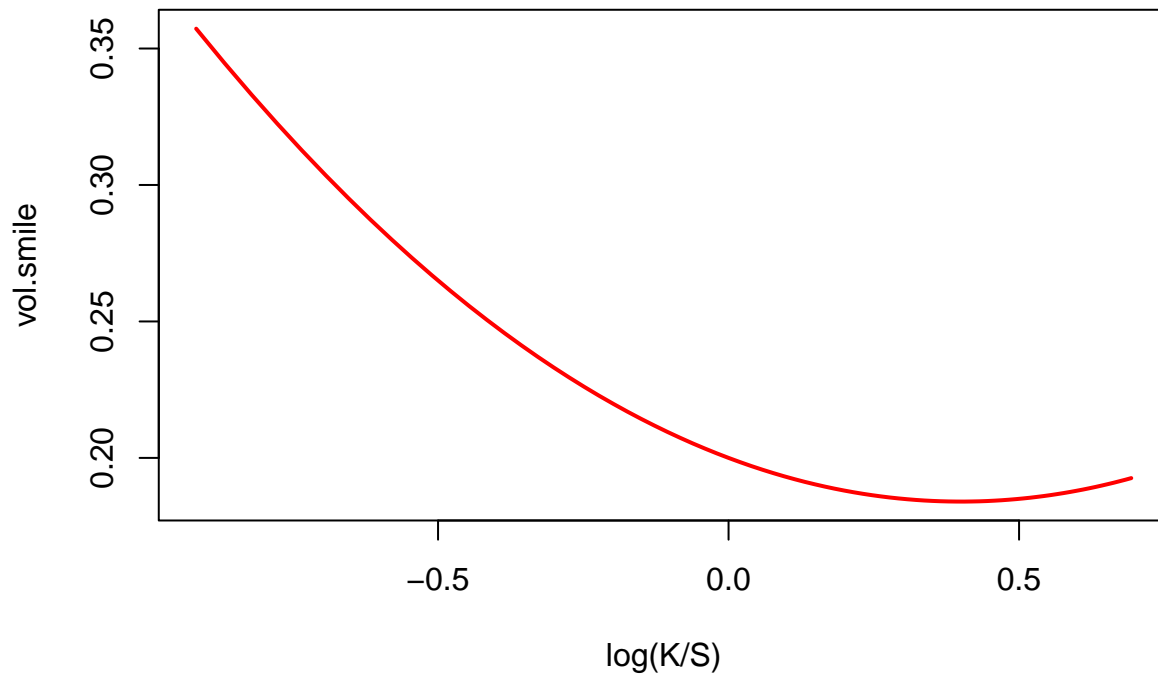
```
sigma <- .2  
S <- 100  
r <- .0  
b <- 0.0  
T <- 1
```

La courbe de volatilité est donnée par un polynôme du second degré. La volatilité de “Black-Scholes” est la volatilité à l’argent, réputée indépendante du strike.

```
## quadratic smile coefficients  
a1 <- -.80/10  
a2 <- 1/10  
  
## BS volatility function  
bsVol <- function(K) {  
  sigma  
}  
  
## Volatility with smile  
smileVol <- function(K) {  
  sigma + a1*log(K/S) + a2*log(K/S)^2  
}
```

## Smile de volatilité

```
KRange <- seq(40, 200, by=2)  
vol.smile <- sapply(KRange, smileVol)  
plot(log(KRange/S), vol.smile, type="l", col="red", lwd=2, xlab="log(K/S)")
```



## Options Européenne

Calcul du prix d'un call avec volatilité fonction du strike.

```
# Call avec smile de volatilité
call.sm <- function(K, vol.function) {
  tmp <- GBSOption(TypeFlag="c", S, X=K, Time=T,
                    r=r, b=b, sigma=vol.function(K))
  tmp@price
}
# test
print(paste("Call 90: ", round(call.sm(90, bsVol), 3)))
```

```
## [1] "Call 90: 13.589"
```

## Densité de $S_T$

Calculer la densité  $p(S_T)$  en utilisant la formule de Breeden-Litzenberger. Le résultat sera une fonction

## Vérification

```
## [1] "Integrale bs.pdf: 0.999995043597695 Integrale smile.pdf: 1.00612003392223"
```

## Valorisation d'un call digital strike=105

Valoriser un call digital en dehors de l'argent ( $K = 105$ ), en utilisant la distribution lognormale (Black-Scholes) et la distribution implicite dérivée du smile. On pourra utiliser la fonction "integrate" pour calculer

$$\int_K^\infty p(x)dx$$

Vérifiez l'intégration numérique de la distribution log-normale à l'aide de la formule analytique du call digital.

```
## [1] "Digital call 105 bs.pdf: 36.54 % smile.pdf: 39.08 %"
```

```
digital.payoff <- function(K) { 100 }
```

```
prix.digital.bs <- }
```