

SIM & Treynor-Black

P. Hénaff

3/2021

Single Index Model (Sharpe)

- ▶ Rendement

$$R_i(t) = \alpha_i + \beta_i R_M(t) + e_i(t)$$

- ▶ Variance du rendement

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma(e_i)^2$$

- ▶ Covariance des rendements

$$\text{cov}(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$$

Allocation Treynor-Black

- ▶ Exploiter l'information donnée par α_i pour constituer un portefeuille “actif”
- ▶ Allouer le reste de son budget au portefeuille tangent en maximisant le ratio de Sharpe

Portefeuille Actif

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} \sigma^2(e_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma^2(e_n) \end{bmatrix}$$

$$w_{Ai} = \frac{\alpha_i / \sigma_i^2}{\sum \alpha_i / \sigma_i^2}$$

Portefeuille Actif

$$R_A = \alpha_A + \beta_A R_M$$

$$\sigma_A^2 = \beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma^2(e_A)$$

$$\alpha_A = \sum w_{Ai} \alpha_i$$

$$\beta_A = \sum w_{Ai} \beta_i$$

$$\sigma^2(e_A) = \sum w_{Ai}^2 \sigma^2(e_i)$$

$$w_{Ai} = \frac{\alpha_i / \sigma_i^2}{\sum \alpha_i / \sigma_i^2}$$

Allocation entre le Portefeuille Actif et le Portefeuille Tangent

$$w_A = \frac{\alpha_A \sigma_M^2}{\alpha_A \sigma_M^2 (1 - \beta_A) + R_M \sigma^2(e_A)}$$

Relation avec Ratio de Sharpe

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_A^2}{\sigma^2(e_A)} &= \alpha^T \Sigma^{-1} \alpha \\ &= \sum_i \frac{\alpha_i^2}{\sigma^2(e_i)}\end{aligned}$$