

MEDAF et Modèle de Sharpe

Analyse de Performance

P. Hénaff

3/2021

Droite de Marché des Capitaux (Capital Market Line)



Figure 1: Droite de Marché des Capitaux

Rappel

Selon le modèle MV, tous les portefeuilles efficients se trouvent sur la droite

$$\bar{r} = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \sigma$$

Que peut on dire à propos d'un titre individuel i ?

$$\bar{r}_i - r_f = ?$$

Intuition...

MEDAF

$$\begin{aligned}\mu_i - r_f &= \frac{\sigma_{M,i}}{\sigma_M^2}(\mu_M - r_f) \\ &= \beta_i(\mu_M - r_f)\end{aligned}\tag{1}$$

avec $\mu_i = E(r_i)$, $\mu_M = E(r_M)$ Bien noter qu'il s'agit ici d'une formule *ex-ante*, conséquence logique du modèle MV de Markowitz. Voir note pour démonstration de la formule.

MEDAF: Droite de Marché des Titres

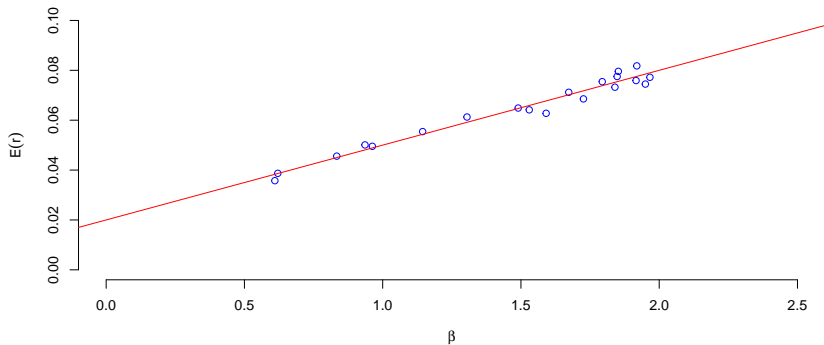


Figure 2: Droite de Marché des Titres

Single Index Model (Sharpe)

- Rendement

$$R_i(t) = \alpha_i + \beta_i R_M(t) + e_i(t)$$

- Espérance de rendement

$$E(R_i(t)) = \alpha_i + \beta_i E(R_M(t))$$

- Variance du rendement

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma(e_i)^2$$

- Covariance des rendements

$$\text{cov}(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$$

Simple actif et Portefeuille selon le SIM

$$\begin{aligned}R_i(t) &= \alpha_i + \beta_i R_M(t) + \epsilon_i(t) \\ \sigma_i^2 &= \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2\end{aligned}$$

Soit un portefeuille de n actifs avec $w_i = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}R_P(t) &= \alpha_P + \beta_P R_M(t) + \epsilon_P(t) \\ \sigma_P^2 &= \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_P}^2\end{aligned}$$

Division du travail en Gestion de Portefeuille

- Espérance de rendement

$$E(R_i(t)) = \alpha_i + \beta_i E(R_M(t))$$

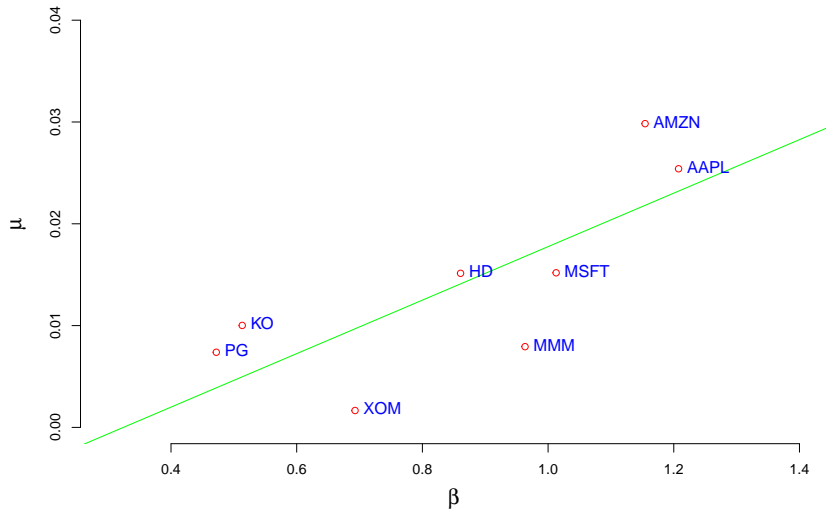
- Variance du rendement

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma(e_i)^2$$

Illustration numérique

	AAPL	AMZN	MSFT	F	SPY	QQQ	XOM	MMM	HD	PG	KO
Observations	158.0000	158.0000	158.0000	158.0000	158.0000	158.0000	158.0000	158.0000	158.0000	158.0000	158.0000
NAs	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Minimum	-0.3296	-0.2540	-0.1634	-0.5788	-0.1652	-0.1558	-0.1423	-0.1498	-0.1652	-0.1161	-0.1668
Quartile 1	-0.0213	-0.0303	-0.0280	-0.0456	-0.0144	-0.0159	-0.0265	-0.0230	-0.0227	-0.0211	-0.0168
Median	0.0291	0.0256	0.0203	-0.0022	0.0128	0.0192	0.0022	0.0144	0.0178	0.0081	0.0104
Arithmetic Mean	0.0254	0.0298	0.0152	0.0115	0.0076	0.0123	0.0017	0.0079	0.0151	0.0074	0.0100
Geometric Mean	0.0214	0.0252	0.0130	0.0020	0.0067	0.0110	0.0004	0.0063	0.0133	0.0065	0.0090
Quartile 3	0.0792	0.0830	0.0545	0.0470	0.0324	0.0455	0.0411	0.0455	0.0608	0.0361	0.0405
Maximum	0.2377	0.5413	0.2495	1.2738	0.1091	0.1317	0.1128	0.1734	0.1605	0.1161	0.1419
SE Mean	0.0071	0.0079	0.0053	0.0120	0.0033	0.0040	0.0040	0.0045	0.0049	0.0034	0.0035
LCL Mean (0.95)	0.0114	0.0143	0.0047	-0.0121	0.0010	0.0044	-0.0062	-0.0010	0.0055	0.0006	0.0031
UCL Mean (0.95)	0.0394	0.0454	0.0257	0.0352	0.0142	0.0201	0.0095	0.0168	0.0248	0.0141	0.0170
Variance	0.0079	0.0098	0.0045	0.0226	0.0018	0.0025	0.0025	0.0032	0.0037	0.0019	0.0020
Stdev	0.0889	0.0990	0.0670	0.1504	0.0419	0.0502	0.0502	0.0566	0.0612	0.0430	0.0442
Skewness	-0.6572	0.7403	0.0788	3.6175	-0.7421	-0.6247	-0.3969	-0.3662	-0.3033	-0.2344	-0.2589
Kurtosis	1.9491	4.0251	0.8958	31.4460	1.5521	0.9798	0.0867	0.5184	0.4291	0.0619	1.1258

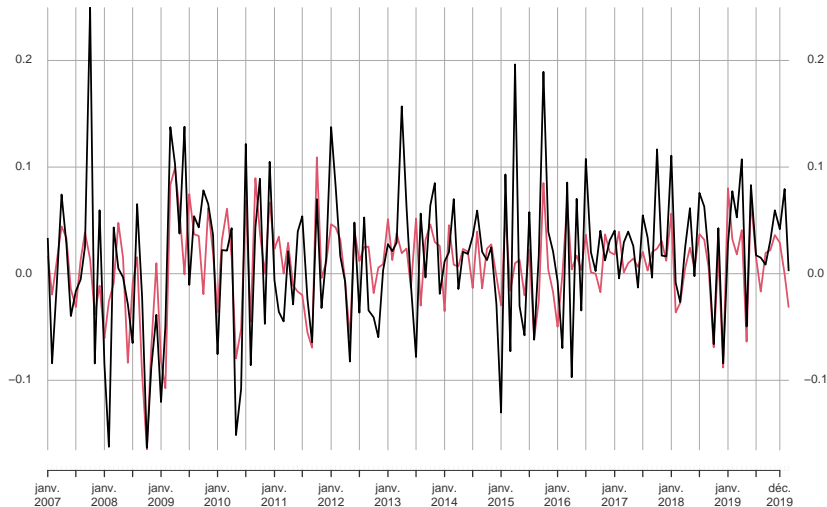
Droite de marché des titres(Security Market Line)



MSFT & SPY

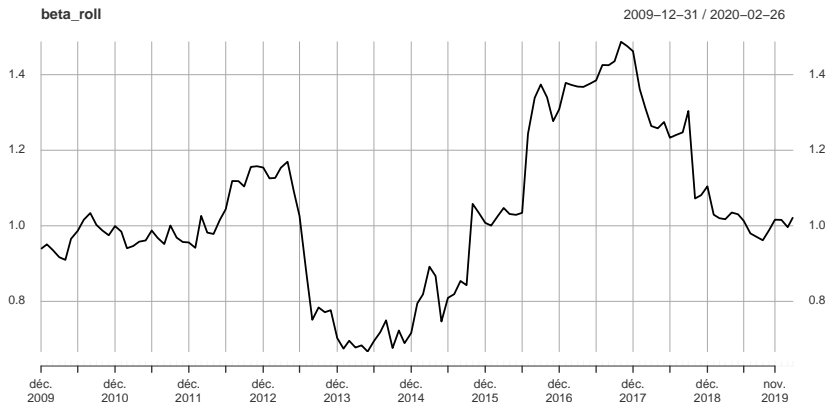
`monthly.ret[, c("MSFT", "SPY")]`

2007-01-31 / 2020-02-26



Calcul de β

```
beta_roll <- removeNA(rollapply(data=monthly.ret$MSFT, Rb=r
                                FUN=CAPM.beta, width=36, by
```



Calcul de α

```
alpha_roll <- removeNA(rollapply(data=monthly.ret$MSFT, Rb=
                                FUN=CAPM.alpha, width=36,
```



Attribution de Performance (1)

- ▶ $t=0$: Achat d'une action à 50E
- ▶ $t=1$: Dividende reçu: 2E, achat d'une action à 53E
- ▶ $t=2$: Dividende reçu: 4E, valeur de marché d'une action: 54E

Rendement annuel?

Quels Indicateurs de Risque?

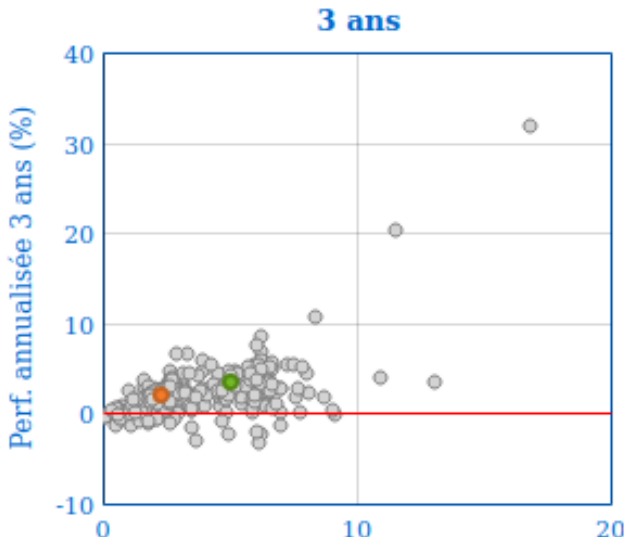


Figure 3: Indicateurs de Risque

Quels Indicateurs de Risque?

- ▶ Sharpe: $(r_P - r_f)/\sigma_P$
- ▶ Treynor: $(r_P - r_f)/\beta_P$
- ▶ IR: $\alpha_P/\sigma(e_P)$

Diagramme Rendement / Risque



Attribution de Performance: Timing

Performance et indicateurs mensuels au 31/01/2020

	1 an	3 ans	5 ans
--	------	-------	-------

Perf Annualisée ?

Fonds	11,46 %	5,20 %	3,18 %
Catégorie	5,26 %	0,79 %	0,53 %
Différence	6,20 %	4,41 %	2,65 %
Indice*	5,26 %	0,79 %	0,53 %
Différence	6,20 %	4,41 %	2,65 %

Risque

Volatilité ?	3,43 %	3,90 %	4,53 %
Volatilité Cat	2,57 %	2,97 %	3,54 %
Volatilité Indice	2,57 %	2,97 %	3,54 %
Perte Maximum ?	-1,51 %	-5,89 %	-8,60 %
Délai de recouvrement ?	101 j	608 j	981 j
DSR ?	1,74 %	2,63 %	3,12 %
Sortino ?	6,84	2,12	1,12
VAR 95 ?	-0,63 %	-0,85 %	-0,94 %
VAR 99 ?	-0,85 %	-1,19 %	-1,88 %

	1 an	3 ans	5 ans
--	------	-------	-------

Ratios

Ratio de Sharpe ?	3,46	1,43	0,77
Ecart de Suivi ?	2,63 %	2,85 %	3,99 %
Ratio d'Information (IR) ?	2,41	1,57	0,68
Up Capture Ratio ?	1,33	1,21	0,90
Down Capture Ratio ?	0,60	0,67	0,61
Ratio Omega ?	2,91	1,62	1,32

Réactivité

Beta ?	0,87	0,92	0,69
R² ?	42,07	46,99	28,10
Beta haussier ?	0,76	0,85	0,57
Beta baissier ?	0,57	1,00	0,68

Asymétrie

Skewness ?	-0,30	-0,71	-0,31
Kurtosis ?	-0,58	0,88	2,12

Timing = Call sur le marché

Attribution de Performance: Allocation et Selection

i : indice de la classe d'actif.

Benchmark

$$r_B = \sum_i w_{Bi} r_{Bi}$$

Portefeuille

$$r_P = \sum_i w_{Pi} r_{Pi}$$

Attribution de Performance: Allocation et Selection

Contribution de la classe i =

$$\begin{aligned} w_{Pi}r_{Pi} - w_{Bi}r_{Bi} = \\ (w_{Pi} - w_{Bi})r_{Bi} & \quad \text{allocation} \\ + w_{Pi}(r_{Pi} - r_{Bi}) & \quad \text{selection} \end{aligned}$$