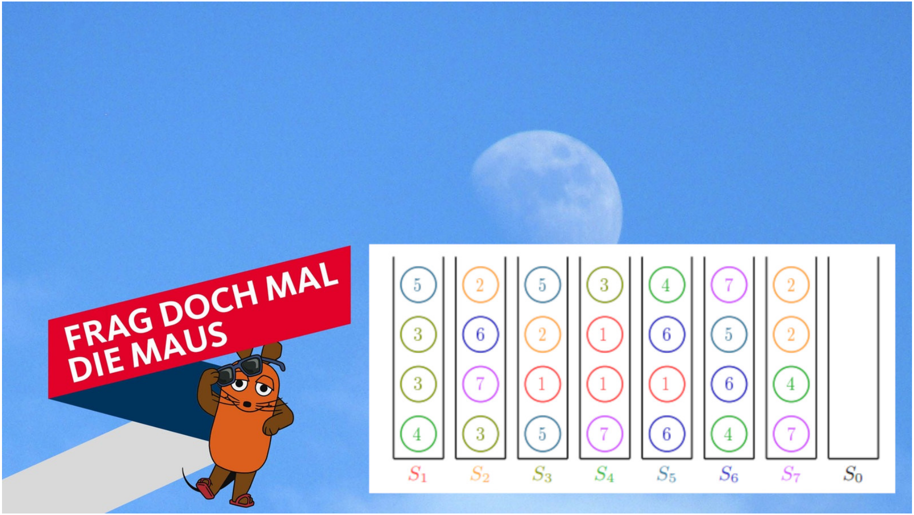
Sorting Colored Balls in Colored Tubes
von Ernst Althaus et. al

Ziel: Kleinste Anzahl an Zügen



Idee

- Feedback Arc Set Problem (FAS) ist ähnlich zum Spiel mit unbegrenzter Höhe
- Konstruktion des Spiels (SCBT) als Graphen
- Reduktion des Problems auf FAS
- FAS ist NP-vollständig, somit auch SCBT

Definitionen

- Menge an Farben $C = \{1, \ldots c\}$ mit festem $c \in \mathbb{N}$
- $c + 1$ Tuben der Höhe $h_i \in \mathbb{N}$ in den Farben und eine farblos
- Bis zu h_i Bälle pro Farbe
- Konfiguration S einer Tube ist eine Sequenz $(b_1, \ldots, b_l)$ mit $l \leq h$
- Tube-Rack $(T_0, T_1, \ldots, T_c)$ hat Höhenprofil $H = (h_0, \ldots, h_c)$ und Ersatztube T_0

Definitionen

- Konfiguration eines Tube-Racks ist $S = (S_0, \ldots, S_c)$ mit $|S_i| \leq h_i$
- Zug (i, j) heißt valide, falls $|S_i| \geq 1$ und $|S_j| < h_j$
- Finale Konfiguration ist $S = (S_0, \ldots, S_0)$ mit $S_0 = ()$ und $S_i = (i, \ldots, i)$ für $1 \leq i \leq c$
- i-farbiger Ball ist in finaler Position, falls er in Tube i ist und alle Bälle darunter Farbe i haben

Probleme

- SCBT-Problem:
  - $\Rightarrow$ Instanz (H, S, k) mit k validen Zügen
- Restricted SCBT-Problem (RSCBT):
  - $\Rightarrow$ Anzahl Bälle der Farbe i gleich der Höhe $h \in \mathbb{N}$ mit dem Höhenprofil $H = (h, \ldots, h)$

Lemma 1

1. Falls die Anzahl der Bälle der Farbe i h entspricht für alle $1 \leq i \leq c$, hat $((h, \dots, h), S, c \cdot h \cdot (2h + 1))$ eine Lösung,
2. Falls (H, S, k) eine Lösung hat und $H' \geq H$ gilt, dann hat (H', S, k) auch eine Lösung
3. Falls (H, S, k) mit $H = (\infty, \dots, \infty)$ eine Lösung hat, dann existiert eine Lösung mit:
    - Bälle in finaler Position werden nicht bewegt
    - Jeder andere wird 1- oder 2-mal bewegt
4. Falls $((\infty, \dots, \infty), S, k)$ eine Lösung hat und $H = (\infty, h_1, \dots, h_c)$ mit $h_i \geq \max(|s_i|, b_i)$ gilt, dann hat (H, S, k) eine Lösung

Feedback Arc Set (FAS)

- geg.: gerichteter Multigraph G=(V,E) und $k \in \mathbb{N}_0$
- ges.: $\exists E' \subseteq E$ mit $|E'| \leq k$, sodass $G'(V, E \backslash E')$ azyklisch ist

$\Rightarrow$ Nach Karp (1972) NP-vollständig

Konstruktion

- $V = \{1, \ldots, n\}$ und G azyklischqazre

Lemma 2

Beweis (Hinrichtung)

Beweis (Rückrichtung)

Beweis (Rückrichtung)

Definition DFVS

Lower Bounds

Algorithmus

Related Work

- Sortieren von farbigen Bällen in farblosen Tuben. Bälle nur auf Bälle gleicher Farbe oder in leere Tuben (Reduktion von 3-Partition)
- k i-farbige Bälle in umgekehrter Reihenfolge. Nur adjazente Bälle können getauscht werden
- Reales Problem: Container in Terminalen, um Effizienz im Lagerplatz zu steigern, unproduktive Züge beim Stapeln zu vermeiden und sich an Planungseinschränkungen zu halten

Fin