Métodos Quantitativos

Aula 11. Regressão linear, parte 3

Pedro H. G. Ferreira de Souza

pedro.ferreira@ipea.gov.br

Mestrado Profissional em Políticas Públicas e Desenvolvimento

Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea)

12 dez. 2022

Recapitulação

Introdução

Variáveis qualitativas ou categóricas

Transformações em variáveis

Interações entre variáveis

Mais sobre valores preditos e resíduos

Cuidados no mundo real

Encerramento do semestre

Recapitulação

Introdução

Variáveis qualitativas ou categóricas

Transformações em variáveis

Interações entre variáveis

Mais sobre valores preditos e resíduos

Cuidados no mundo real

Encerramento do semestre

Regressão multivariada

O que vimos

1. Estimação no R e intepretação dos coeficientes
2. Viés de variável omitida
3. Inferência, testes de hipóteses e ICs
4. Pressupostos de OLS multivariada
5. Comparação e seleção de modelos

Recapitulação

Introdução

Variáveis qualitativas ou categóricas

Transformações em variáveis

Interações entre variáveis

Mais sobre valores preditos e resíduos

Cuidados no mundo real

Encerramento do semestre

O que ficou de fora?

Até agora usamos só **Variáveis quantitativas**, assumindo linearidade e separabilidade dos efeitos parciais.

Mas o que acontece se...

- Quisermos usar **variáveis qualitativas ou discretas**?
- Os efeitos parciais não forem **lineares**?
- Os efeitos parciais dependerem de **interações** entre variáveis?

... e muito mais.

Objetivos de hoje

1. OLS com variáveis qualitativas
    - Variáveis binárias e multinomiais
2. Transformações em variáveis
    - Logaritmos e polinômios
3. Interações entre variáveis
4. Mais sobre valores preditos e resíduos
5. Cuidados no mundo real

Pacotes

```
# Pacotes de uso geral
library(tidyverse)
library(broom)
# Pacote para estatisticas descritivas
library(summarytools)
# Pacote para visualizacao de resultados de modelos
library(modelsummary)
# Pacote para ler arquivos csv
library(readr)
# Pacotes com bases de dados
library(HistData)
library(causaldata)
```

Bases de dados #1 e #2

```
# Colera
colera <- Cholera
colera$water <-
  factor(colera$water,
         levels = c('New River','Kew','Battersea'))

# Restaurantes no Alasca
restaurantes <- restaurant_inspections
```

Bases de dados #3

Download

Baixem o arquivo `pnadc2021_limpa.csv` na página da aula 11 no GitHub.

- Arquivo contém seleção de variáveis (renomeadas) da PNADC 2021, do IBGE, com filtro para manter apenas indivíduos ocupados que trabalham pelo menos 30 horas semanais.
- São 109,818 observações e 8 variáveis

Leitura

```
local <- file.path("D:","OneDrive","work","Incompletos",
                   "mestrado ipea","11-regressao-linear-pt
                   "dados","pnadc2021_limpa.csv")
pnadc <- read_csv(local)
```

Recapitulação

Introdução

Variáveis qualitativas ou categóricas

Transformações em variáveis

Interações entre variáveis

Mais sobre valores preditos e resíduos

Cuidados no mundo real

Encerramento do semestre

Como fazer?

Para variáveis independentes com k categorias, incluímos no modelo $k-1$ **variáveis binárias** ou *dummy*, omitindo uma categoria de referência.

- O coeficiente de uma variável *dummy* oferece comparação direta entre aquela categoria e a categoria de referência

Exemplo

Suponha uma variável $z = \{0, 1, 2\}$ e as variáveis indicadoras $z_1 = (z == 1)$ e $z_2 = (z == 2)$, com o modelo $E(y) = \alpha + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2$.

- Quando $z_1 == 1$, $E(y) = \alpha + \beta_1 \rightarrow$ média de y para esse grupo (e vice-versa para z_2)
- Teste t dos coeficientes avalia H_0 de que média do grupo é igual à da categoria de referência
- Teste F da regressão avalia H_0 conjunta de que todos os grupos têm a mesma média

Exemplo com colera

```
mean(colera$cholera_drate)
freq(colera$water)
```

```
## [1] 66.13158
## Frequencies
## colera$water
## Type: Factor
##
##                  Freq   % Valid   % Valid Cum.   % Total   %
## --------------- ------ --------- -------------- ---------
--------------
##        New River     20     52.63          52.63     52.63
##              Kew      6     15.79          68.42     15.79
##        Battersea     12     31.58         100.00     31.58
##             <NA>      0                               0.00
##            Total     38    100.00         100.00    100.00
```

Exemplo com `colera`

Como `water` já está formatada como variável `factor` com três categorias, basta incluir no comando da regressão:

```
col1 <- lm(cholera_drate ~ water, data = colera)
summary(col1)
```

Podemos comparar modelos também:

```
col2 <- lm(cholera_drate ~ water + elevation, data = colera)
col3 <- lm(cholera_drate ~ water + elevation + pop_dens,
           data = colera)
col4 <- lm(cholera_drate ~ water + elevation + pop_dens +
           house_valpp, data = colera)
msummary(list(col1, col2, col3, col4), output = "markdown",
         stars = TRUE, gof_omit = c('BIC|AIC|Log|Num. Obs|F'))
```

(Output nos próximos slides)

```
##
## Call:
## lm(formula = cholera_drate ~ water, data = colera)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -94.25 -16.80  -4.30  22.84  82.75
##
## Coefficients:
##                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)       47.800      7.969   5.998 7.76e-07 ***
## waterKew         -32.800     16.589  -1.977   0.0559 .
## waterBattersea    74.450     13.013   5.721 1.80e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '
##
## Residual standard error: 35.64 on 35 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5752, Adjusted R-squared:  0.551
## F-statistic:  23.7 on 2 and 35 DF,  p-value: 3.11e-07
```

	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
(Intercept)	47.800***	53.364***	46.863**	64.503**
	(7.969)	(9.416)	(14.410)	(18.004)
waterKew	-32.800+	-24.403	-21.938	-8.259
	(16.589)	(18.212)	(18.839)	(20.373)
waterBattersea	74.450***	69.595***	72.802***	68.532***
	(13.013)	(13.703)	(14.829)	(14.758)
elevation		-0.133	-0.125	-0.159
		(0.121)	(0.123)	(0.122)
pop_dens			0.045	0.050
			(0.075)	(0.073)
house_valpp				-2.945
				(1.869)
Num.Obs.	38	38	38	38
R2	0.575	0.590	0.594	0.623
R2 Adj.	0.551	0.554	0.545	0.565
RMSE	34.20	33.61	33.43	32.20

Codificação de variáveis categóricas

Variáveis categóricas nem sempre estão codificadas como `factor`, mas isso não é um problema.

- Se a variável já for uma *dummy* numérica ou `character`, não há problema; caso contrário, recodificar com `mutate()` e `factor()` ou só pedir para o R considerar como `factor` na regressão.

Restaurantes

```
glimpse(restaurantes)
```

```
## Rows: 27,178
## Columns: 5
## $ business_name     <chr> "MCGINLEYS PUB", "VILLAGE INN #1",
## $ inspection_score  <dbl> 94, 86, 80, 96, 83, 95, 94, 100, 92
## $ Year              <dbl> 2017, 2015, 2016, 2003, 2017, 2008,
## $ NumberofLocations <dbl> 9, 66, 79, 86, 53, 89, 28, 37, 109,
## $ Weekend           <lgl> FALSE, FALSE, FALSE, FALSE, FALSE,
```

Exemplo com restaurantes

```
table(restaurantes$Weekend)
print(c(min(restaurantes$Year), max(restaurantes$Year)))
```

```
##
## FALSE  TRUE
## 26968   210
## [1] 2000 2019
```

Exemplo com restaurantes

```
table(restaurantes$Weekend)
print(c(min(restaurantes$Year), max(restaurantes$Year)))
```

```
##
## FALSE  TRUE
## 26968   210
## [1] 2000 2019
```

```
res1 <- lm(inspection_score ~ NumberofLocations + Weekend,
           data = restaurantes)
res2 <- lm(inspection_score ~ NumberofLocations + Weekend +
           as.factor(Year), data = restaurantes)
msummary(list(res1, res2), output = "markdown",
         stars = TRUE, statistic = NULL,
         gof_omit = c('BIC|AIC|Log|Num. Obs|F'))
```

(Output no próximo slide)

	Model 1	Model 2
(Intercept)	94.851***	96.808***
NumberofLocations	-0.019***	-0.018***
WeekendTRUE	1.498***	1.328**
as.factor(Year)2001		0.578*
as.factor(Year)2002		0.522+
as.factor(Year)2003		1.091***
as.factor(Year)2004		-1.506***
as.factor(Year)2005		-1.980***
as.factor(Year)2006		-3.507***
as.factor(Year)2007		-2.873***
as.factor(Year)2008		-2.882***
as.factor(Year)2009		-3.470***
as.factor(Year)2015		-0.896***
as.factor(Year)2016		-2.520***
as.factor(Year)2017		-2.121***
as.factor(Year)2018		-2.654***
as.factor(Year)2019		-1.101***
Num.Obs.	27178	27178
R2	0.065	0.105
R2 Adj.	0.065	0.105

Exemplo com a PNADC

```
freq(pnadc$regiao, headings = FALSE, report.nas = FALSE)
```

```
##
##                  Freq         %   % Cum.
## ----------- -------- -------- --------
##             1    14427    13.14    13.14
##             2    26322    23.97    37.11
##             3    32844    29.91    67.01
##             4    23030    20.97    87.98
##             5    13195    12.02   100.00
##         Total   109818   100.00   100.00
```

```
summary( lm(renda_trabalho ~ factor(regiao), data = pnadc))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = renda_trabalho ~ factor(regiao), data = pnadc)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
##  -2796  -1346   -750     70 297354
##
## Coefficients:
##                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)      2020.00      28.36  71.221   <2e-16 ***
## factor(regiao)2  -352.36      35.29  -9.985   <2e-16 ***
## factor(regiao)3   625.56      34.03  18.385   <2e-16 ***
## factor(regiao)4   729.73      36.17  20.174   <2e-16 ***
## factor(regiao)5   778.26      41.04  18.965   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '
##
## Residual standard error: 3407 on 109813 degrees of freedom
```

Recapitulação

Introdução

Variáveis qualitativas ou categóricas

Transformações em variáveis

Interações entre variáveis

Mais sobre valores preditos e resíduos

Cuidados no mundo real

Encerramento do semestre

Por que transformar variáveis?

Linearidade

Em MQO, a linearidade diz respeito aos parâmetros estimados: efeitos parciais dos coeficientes são lineares, ou seja, aumento de uma unidade em x aumenta a média condicional predita em β.

MQO é muito flexível porque pode incorporar **não linearidades** a partir de transformações em variáveis.

As duas transformações mais comuns são:

- Aplicação de logaritmos no y ou em algum x
- Inclusão de polinômios em algum x

Logaritmos (i)

Por que aplicar?

- Às vezes a teoria prevê efeitos multiplicativos;
- Em muitos casos, logaritmos geram melhor aderência aos pressupostos do modelo clássico;
- Logaritmos são menos sensíveis a *outliers*
- etc

Uma boa **regra de bolso** é aplicar logs em variáveis monetárias (quando todos os valores são positivos).

Interpretação de logs

- Se y ou algum x está em log, interpretação passa a ser em termos de mudanças percentuais (ver próximos slides)

Logaritmos (ii)

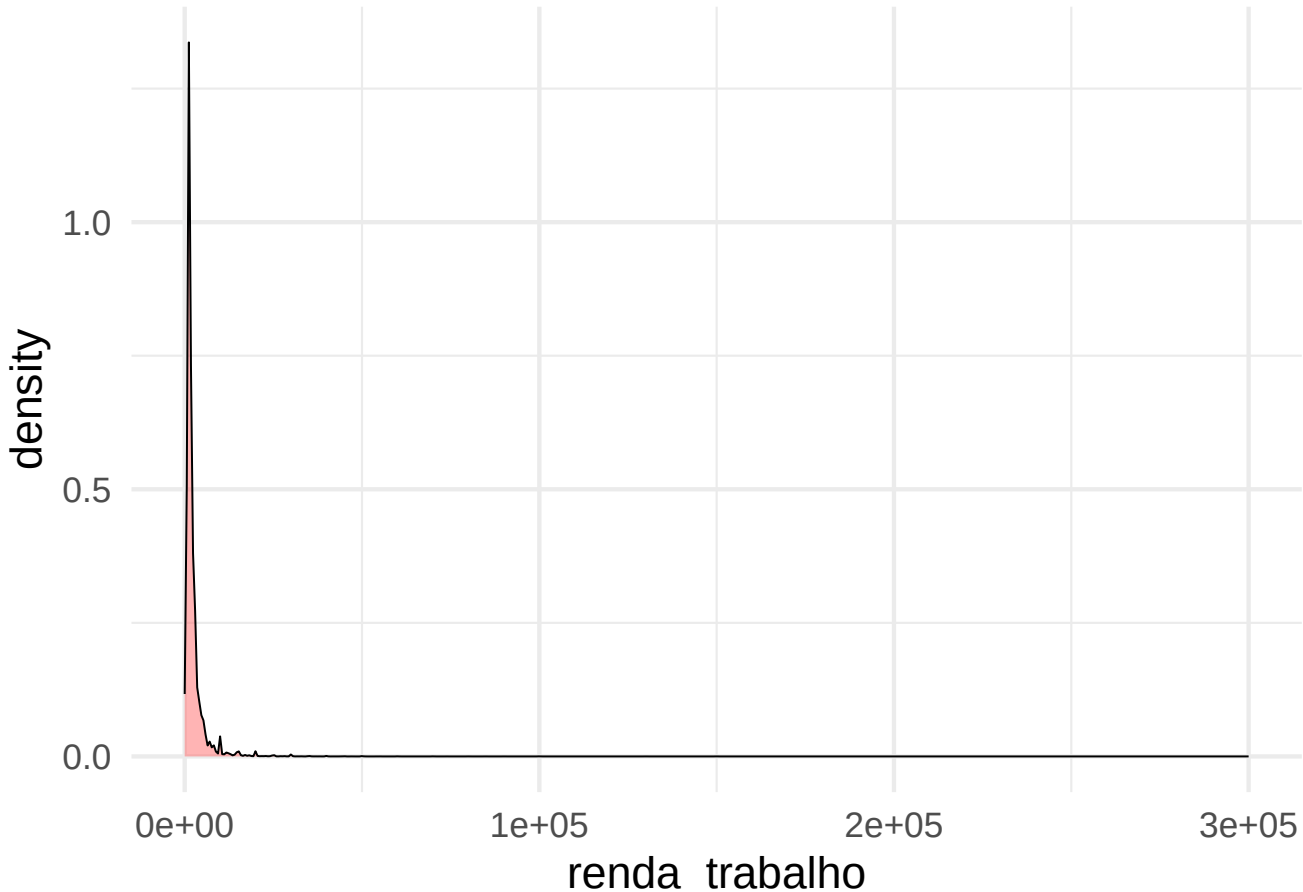
Interpretação

Modelo	Dependente	Independente	Interpretação de β_1
Nível-nível	y	x	$\Delta y = \beta_1$ para $\Delta x = 1$
Nível-log	y	$log(x)$	aprox: $\Delta y = \beta_1/100$ para $\Delta x = 1\%$, exato: $\Delta y = \beta_1 log(1 + c)$ para $\Delta x = c\%$
Log-nível	$log(y)$	x	aprox: $\Delta y = 100\beta_1\%$ para $\Delta x = 1$, exato: $\Delta y = 100(e^{\beta_1} - 1)\%$ para $\Delta x = 1$
Log-Log	$log(y)$	$log(x)$	aprox: $\Delta y = \beta_1\%$ para $\Delta x = 1\%$, exato: $\Delta y = 100((1 + c)^{\beta_1} - 1)\%$ para $\Delta x = c\%$

(Na prova vou pedir para voces usarem as interpretações aproximadas!)

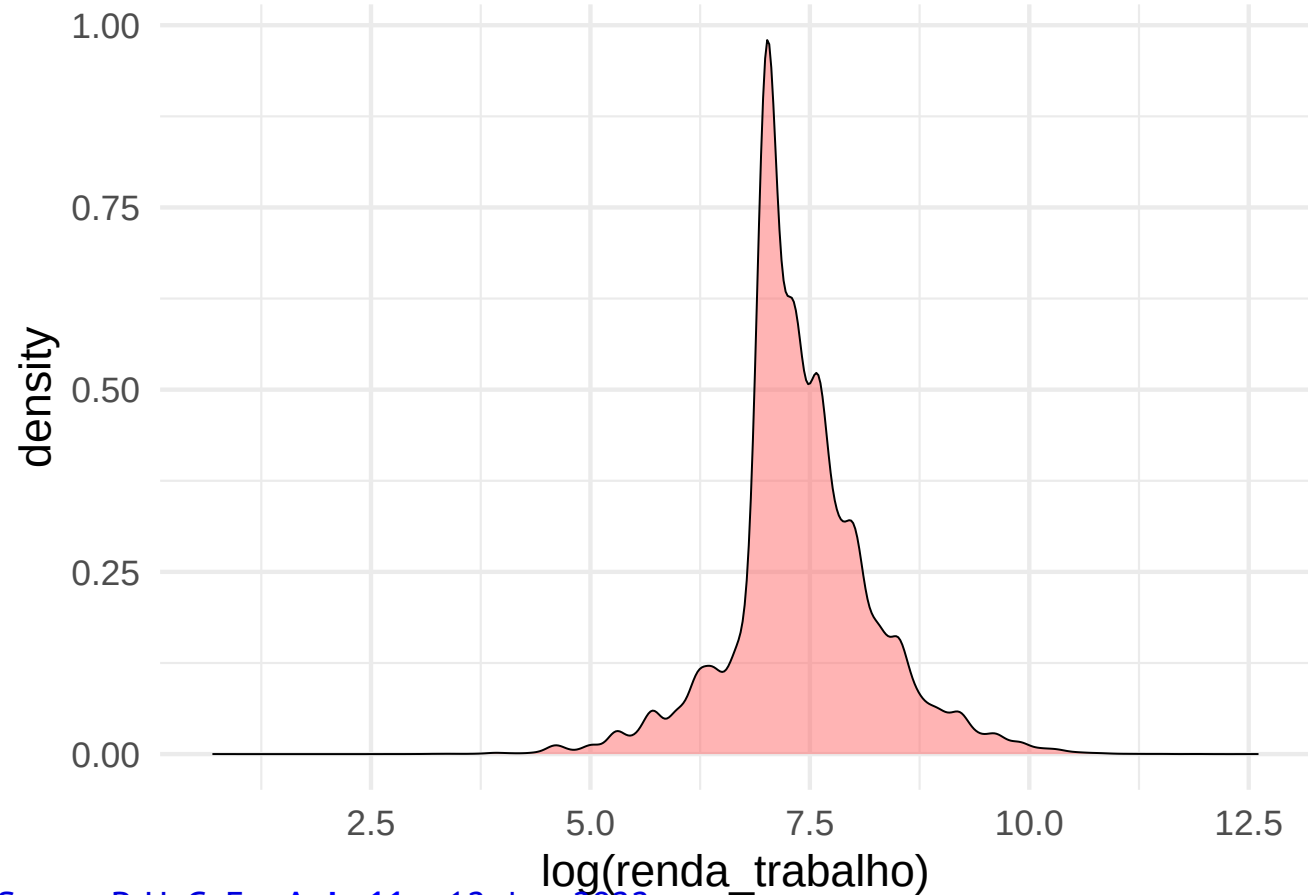
Renda do trabalho na PNADC

```
ggplot(data = pnadc, aes(x = renda_trabalho)) +
  geom_density(bw = .1, alpha = .5, fill = 'indianred1') +
    theme_minimal(base_size = 24)
```



Log Renda do trabalho na PNADC

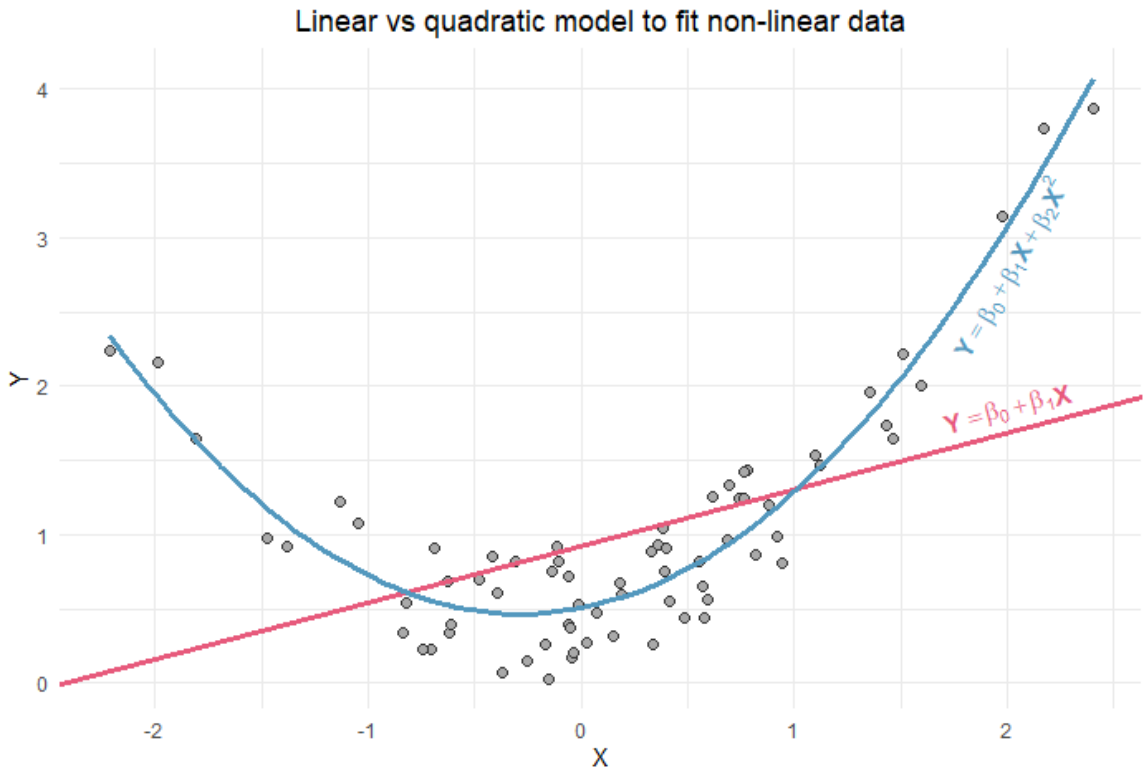
```
ggplot(data = pnadc, aes(x = log(renda_trabalho))) +
  geom_density(bw = .1, alpha = .5, fill = 'indianred1') +
    theme_minimal(base_size = 24)
```



Polinômios

É comum utilizarmos polinômios - principalmente termos quadráticos - para incorporar não linearidades nas variáveis. Por exemplo, podemos estimar $y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \epsilon$.

- Efeito marginal sobre y varia conforme o valor de x: $\Delta y \approx (\beta_1 + 2\beta_2 x)\Delta x$



Exemplo: PNADC

```
bra1 <- lm(log(renda_trabalho) ~ factor(regiao) + homem + anos_estudo +
           poly(idade, degree = 2), data = pnadc)
msummary(bra1, output = "markdown", stars = TRUE, statistic = NULL)
```

	Model 1
(Intercept)	6.015***
factor(regiao)2	-0.166***
factor(regiao)3	0.201***
factor(regiao)4	0.327***
factor(regiao)5	0.293***
homem	0.274***
anos_estudo	0.100***
poly(idade, degree = 2)1	67.605***
poly(idade, degree = 2)2	-26.723***
Num.Obs.	109818
R2	0.348
R2 Adj.	0.348
AIC	1841859.0

Exemplo: cólera

```
col5 <- lm(log(cholera_deaths) ~ water + log(popn),
           data = colera)
col6 <- lm(log(cholera_deaths) ~ water + log(popn) +
             poly(pop_dens, degree = 2), data = colera)
msummary(list(col5, col6),
         output = "markdown", stars = TRUE,
         gof_omit = c('BIC|AIC|Log|Num. Obs|F'))
```

(Output no próximo slide).

Exemplo: cólera

	Model 1	Model 2
(Intercept)	-5.890**	-5.840**
	(1.791)	(1.923)
waterKew	-1.192***	-1.128***
	(0.259)	(0.276)
waterBattersea	0.923***	0.966***
	(0.204)	(0.232)
log(popn)	1.040***	1.033***
	(0.163)	(0.174)
poly(pop_dens, degree = 2)1		0.514
		(0.606)
poly(pop_dens, degree = 2)2		-0.239
		(0.599)
Num.Obs.	38	38
R2	0.755	0.762

Recapitulação

Introdução

Variáveis qualitativas ou categóricas

Transformações em variáveis

Interações entre variáveis

Mais sobre valores preditos e resíduos

Cuidados no mundo real

Encerramento do semestre

Do que se trata?

O modelo que vimos até agora foi:

$$E(y) = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k$$

Por definição, esse modelo pressupõe que os efeitos parciais de cada regressor **não dependem** dos valores dos outros regressores.

Às vezes, esse modelo é inadequado por ser simples demais. Podemos enriquecê-lo incluindo **interações** entre os regressores, de modo que a relação entre um dado x e o y podem variar conforme o nível de outra variável independente

- Por exemplo, o retorno salarial por anos de estudo pode variar conforme o gênero, idade ou região

Interação entre variáveis quantitativas

Abordagem mais comum é via inclusão do **produto cruzado** para a interação entre variáveis:

$$E(y) = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2$$

Equivale a criar uma variável "artificial" $x_3 = x_1 x_2$. Observem que podemos reescrever:

- $E(y) = (\alpha + \beta_2 x_2) + (\beta_1 + \beta_3 x_2) x_1 = \alpha' + \beta' x_1$
- $\alpha' = \alpha + \beta_2 x_2$
- $\beta' = \beta_1 + \beta_3 x_2$

A média de y continua uma função linear de x_1, mas a inclinação do efeito parcial varia conforme x_2 muda $\rightarrow \beta_1$ equivale ao efeito parcial de x_1 somente quando $x_2 = 0$

Outras interações

É ainda mais comum usarmos interações entre variáveis categóricas e variáveis contínuas:

$$E(y) = \alpha + \beta_1 d + \beta_2 x_1 + \beta_3 d x_1$$

No modelo, o coeficiente β_1 desloca o intercepto para o grupo em que $d = 1$, enquanto o coeficiente β_3 permite que a inclinação da reta (efeito parcial) também varie entre grupos.

- Na prática, o teste de hipóteses para $H_0 : \beta_3 = 0$ avalia se o efeito parcial de fato varia ou não

Exemplo: PNADC

```
bra2 <- lm(log(renda_trabalho) ~ factor(regiao) + homem +
             branco + anos_estudo + poly(idade, degree = 2),
           data = pnadc)
bra3 <- lm(log(renda_trabalho) ~ factor(regiao) + branco +
             homem * anos_estudo + poly(idade, degree = 2),
           data = pnadc)
bra4 <- lm(log(renda_trabalho) ~ factor(regiao) + homem +
             branco * anos_estudo + poly(idade, degree = 2),
           data = pnadc)
bra5 <- lm(log(renda_trabalho) ~ factor(regiao) + anos_estudo +
             branco * homem + poly(idade, degree = 2),
           data = pnadc)
msummary(list(bra2, bra3, bra4, bra5), output = "markdown",
         stars = TRUE)
```

(Output no próximo slide).

	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
(Intercept)	6.013***	5.878***	6.080***	6.010***
	(0.008)	(0.012)	(0.009)	(0.009)
factor(regiao)2	-0.174***	-0.174***	-0.176***	-0.174***
	(0.007)	(0.007)	(0.007)	(0.007)
factor(regiao)3	0.166***	0.170***	0.164***	0.166***
	(0.007)	(0.007)	(0.007)	(0.007)
factor(regiao)4	0.252***	0.256***	0.252***	0.252***
	(0.007)	(0.007)	(0.007)	(0.007)
factor(regiao)5	0.275***	0.277***	0.275***	0.275***
	(0.008)	(0.008)	(0.008)	(0.008)
homem	0.275***	0.459***	0.275***	0.279***
	(0.004)	(0.013)	(0.004)	(0.006)
branco	0.135***	0.134***	-0.035**	0.140***
	(0.004)	(0.004)	(0.012)	(0.007)
anos_estudo	0.097***	0.108***	0.091***	0.097***
	(0.0005)	(0.0009)	(0.0007)	(0.0005)
poly(idade, degree = 2)1	65.436***	65.188***	65.324***	65.454***
	(0.680)	(0.679)	(0.679)	(0.680)
poly(idade, degree = 2)2	-27.321***	-27.364***	-27.040***	-27.312***
	(0.653)	(0.653)	(0.653)	(0.653)
homem × anos_estudo		-0.016***		
		(0.001)		
branco × anos_estudo			0.015***	
			(0.001)	
branco × homem				-0.008
				(0.008)
Num.Obs.	109818	109818	109818	109818
R2	0.354	0.355	0.355	0.354

Mais sobre interações

1. Sempre incluam no modelo os efeitos principais quando forem usar interações

- Ou seja, o modelo deve ser $E(y) = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2$, e **não** $E(y) = \alpha + \beta x_1 x_2$

2. Na prática, termos quadráticos equivalem à interação de uma variável com ela mesma
3. Nada impede a inclusão de interações entre três (ou mais) variáveis, mas a interpretação fica muito complicada

- É tentador testar todas as interações possíveis, mas não se esqueçam de que modelos são úteis justamente por simplificarem o mundo

Recapitulação

Introdução

Variáveis qualitativas ou categóricas

Transformações em variáveis

Interações entre variáveis

Mais sobre valores preditos e resíduos

Cuidados no mundo real

Encerramento do semestre

Salvando valores preditos

A "reta" da regressão gera valores preditos (médias condicionais) para cada observação do banco de dados...

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$$

... e os resíduos para cada observação são dados por $y - \hat{y}$.

No R, o jeito mais fácil de criar os valores preditos para o seu banco de dados é com a função `augment`, do pacote `broom`:

```
colera_predicted <- augment(col4)
```

`.fitted` são os valores preditos, `.resid` são os resíduos

Função `predict()`

```
bra6 <- lm(log(renda_trabalho) ~ homem + branco + anos_estudo +
           poly(idade, degree = 2), data = pnadc)
yhat <- predict(bra6, data.frame(homem = 1, branco = 0,
                                 anos_estudo = 5, idade = 30))
print(yhat)
```

```
##        1
## 6.644839
```

Função predict()

```
bra6 <- lm(log(renda_trabalho) ~ homem + branco + anos_estudo +
           poly(idade, degree = 2), data = pnadc)
yhat <- predict(bra6, data.frame(homem = 1, branco = 0,
                                 anos_estudo = 5, idade = 30))
print(yhat)
```

```
##        1
## 6.644839
```

O valor predito está em log porque o y foi *log(renda_trabalho)*! Para virar nível, fazer $e^{s_e^2/2}e^{\hat{y}}$

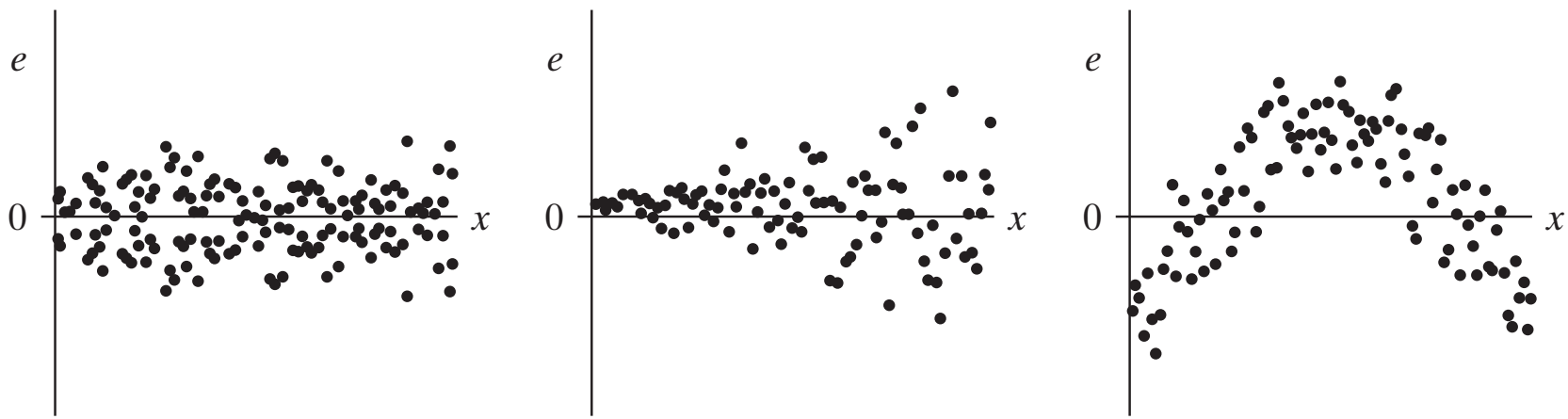
```
exp(yhat) * exp(summary(bra6)$sigma^2/2)
```

```
##        1
## 961.8995
```

Análise de resíduos

Muitos testes para diagnóstico de problemas podem ser feitos com os resíduos (ou resíduos padronizados) dos modelos:

1. Histograma para verificar normalidade dos resíduos padronizados, bem como potenciais *outliers*
2. Scatterplot entre resíduo *vs.* valores preditos para verificar linearidade e homoscedasticidade



(a) Assumptions satisfied (b) Nonconstant standard deviation (c) Nonlinear term needed

Recapitulação

Introdução

Variáveis qualitativas ou categóricas

Transformações em variáveis

Interações entre variáveis

Mais sobre valores preditos e resíduos

Cuidados no mundo real

Encerramento do semestre

Pequena lista...

1. Séries temporais e dados em painel normalmente possuem erros autocorrelacionados, o que fere os pressupostos clássicos e exige técnicas específicas
2. A maior parte dos bancos de dados amostrais não é coletada por amostra aleatória simples, o que exige o uso de pesos amostrais e desenhos amostrais complexos para cálculo dos erros padrão
3. Homoscedasticidade também é um pressuposto frequentemente violado, mas temos tanto testes para detectar a violação (e.g., Breusch-Pagan, White) quanto alternativas para saná-la (MQO com erros padrão robustos, GLS)
4. Como o viés de variável omitida é uma ameaça incontornável em dados observacionais, afirmações causais em geral dependem de experimentos ou quase experimentos

Pequena lista...

5. Erros de medida são muito prejudiciais, e estão por toda parte.

- Mesmo se o erro for aleatório em algum x, haverá viés de atenuação em todos os coeficientes para variáveis correlacionadas com o x com erro. Se o erro estiver em y, o problema é só de eficiência.
- Se o erro não for aleatório, é mais complicado ainda
- Se há suspeita de erros sérios, pode-se usar modelos de variáveis instrumentais

6. MQO tem limitações sérias quando o y é uma variável binária ou multinomial, entre outros casos

- Aproximação linear só funciona bem em casos específicos
- Para variáveis categóricas, pode ser melhor usar modelos logit ou probit

Recapitulação

Introdução

Variáveis qualitativas ou categóricas

Transformações em variáveis

Interações entre variáveis

Mais sobre valores preditos e resíduos

Cuidados no mundo real

Encerramento do semestre

Datas importantes

26 de dezembro

Data limite para entrega da **Atividade #6** e da **prova final**

6 de janeiro

Entrega das notas.

Recuperação

Caso haja alunos com nota inferior ao mínimo de corte, podemos fazer atividades de recuperação em janeiro.