

<sup>1</sup> Reducing the numbers of delays in a network of coupled  
<sup>2</sup> DDAEs

<sup>3</sup> Ha Phi<sup>a,1,\*</sup>, Nguyen Duy Truong<sup>b</sup>

<sup>4</sup> <sup>a</sup>*Faculty of Mathematics, Mechanics, and Informatics, Vietnam National University, 334,  
5 Nguyen Trai, Thanh Xuan, Hanoi, Vietnam.*

<sup>6</sup> <sup>b</sup>*Faculty of Mathematics, Mechanics, and Informatics, Vietnam National University, 334,  
7 Nguyen Trai, Thanh Xuan, Hanoi, Vietnam.*

---

<sup>8</sup> **Abstract**

In this paper note we examine a newly proposed method, namely "*component-wise timeshift transformation*" (*CTT*), which aims to reduce the number of delays in a network ([1, 2, 3]) for networks whose the node behaviors are described by Delay Differential Algebraic Equations (DDAEs). We study the effectiveness as well as drawbacks of this approach to the numerical solution procedure to the corresponding initial value problems. We also discuss the index of the network of coupled DAEs, and illustrate the effectiveness of a method by applying it to a network of mechanical systems.

<sup>9</sup> *Keywords:* Singular system, Delay, Differential-Algebraic Equations,

<sup>10</sup> Strangeness-index, Index reduction, Regularization.

<sup>11</sup> *2000 MSC:* 15A23, 39A05, 39A06, 93C05

---

<sup>12</sup> **1. Introduction**

<sup>13</sup> We will show here that under certain assumptions, it is possible to reduce  
<sup>14</sup> the number of time delays without altering the index nor the global dynamics  
<sup>15</sup> of the network.

<sup>16</sup> The main reason for a hybrid numerical-experimental setup is the fact that  
<sup>17</sup> in some applications the description of the model in terms of differential equa-  
<sup>18</sup> tions is difficult due to its complex nature or uncertainty [58]. Since testing of a  
<sup>19</sup> complete prototype may be prohibitively expensive, is it desirable to incorporate  
<sup>20</sup> the benefits of actual testing with the benefits of numerical simulation. This is  
<sup>21</sup> accomplished by subdividing the system under investigation into smaller subsys-  
<sup>22</sup> tems, which are typically referred to as substructures; see Figure 1.1 for an illus-  
<sup>23</sup> tration. Alternatively, a bottom-up approach is facilitated by modern modeling  
<sup>24</sup> languages such as Modellica (<https://www.modelica.org>) or Matlab/Simulink  
<sup>25</sup> (<https://www.mathworks.org>). These frameworks compose the complete model  
<sup>26</sup> by linking small components from a large library together. Such an automated  
<sup>27</sup> modeling concept typically results in a combination of differential and algebraic

---

\*Corresponding author

Email addresses: [haphi.hus@vnu.edu.vn](mailto:haphi.hus@vnu.edu.vn) (Ha Phi), (Nguyen Duy Truong)

Preprint submitted to Journal of Computational and Applied Mathematics September 13, 2020

28 equations, thus making the complete model a differential-algebraic equation  
29 (DAE).

30 Having decomposed the system into smaller substructures, the numerical-  
31 experimental paradigm is to test only a specific substructure experimentally,  
32 while the remainder of the system is simulated numerically. To ensure dynamical  
33 interaction in real-time, the experiment and the numerically simulation have  
34 to happen simultaneously with a possibility to interact through a well-defined  
35 interface. In real-time dynamic substructuring or hardware-in-the-loop testing  
36 [11] the interface, called transfer system, is typically provided by a set of hy-  
37draulic actuators and a set of sensors. Since the dynamic characteristic of any  
38 actuator includes a response delay [33,57], the resulting system is a DDAE. Note  
39 that further delays might be present, which arise, for instance, from data ac-  
40 quisition, computation, or digital signal processing. In many applications, these  
41 delays are small compared to the actuator delay and may thus be neglected  
42 in the modeling process; for more details, we refer to [40] and the references  
43 therein. The model equations for the hybrid numerical-experimental approach  
44 are discussed in Section 2, yielding the coupled DDAE (2.12). The approach  
45 is exemplified by a coupled pendulum-mass-spring-damper system (cf. Figure  
46 2.1) taken from [40].

47 **2. Reducing the number of delays in a network of coupled DDAE  
48 systems**

49 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit,  
50 vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida  
51 mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna.  
52 Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus  
53 et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra  
54 metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus  
55 eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium  
56 quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean  
57 faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Cur-  
58 abitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue  
59 eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim  
60 rutrum.

61 Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi  
62 auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et,  
63 tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna,  
64 vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse  
65 ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et  
66 magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna.  
67 Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

68 Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at,  
69 tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy  
70 pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa

71 ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Mae-  
72 cenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum.  
73 Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia  
74 nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim.  
75 Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cur-  
76 suss pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum  
77 pellentesque felis eu massa.

78 Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus  
79 tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In  
80 hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis.  
81 Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed  
82 gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.  
83 Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae  
84 risus porta vehicula.

85 Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a fau-  
86 cibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum  
87 diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue  
88 quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis  
89 porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo  
90 facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et  
91 vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim  
92 ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque  
93 egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

94 Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet,  
95 laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum  
96 at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fer-  
97 mentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed  
98 ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec  
99 luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies  
100 non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus,  
101 egestas vel, odio.

102 Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed  
103 vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget  
104 odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo  
105 eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare  
106 ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc  
107 dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam.  
108 Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos  
109 hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula  
110 eu, lacus.

111 **3. On the index of a network of coupled DDAE systems**

112 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit,  
113 vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida  
114 mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna.

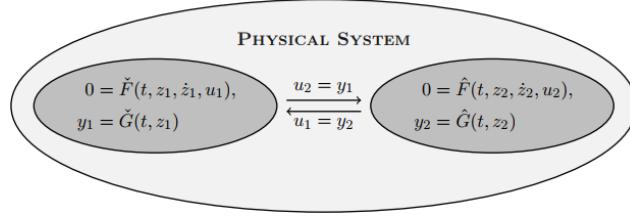


Figure 1: Decomposition of a physical system into substructures

115 Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus  
 116 et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra  
 117 metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus  
 118 eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium  
 119 quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean  
 120 faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Cur-  
 121 abitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue  
 122 eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim  
 123 rutrum.  
 124 Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi  
 125 auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et,  
 126 tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna,  
 127 vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse  
 128 ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et  
 129 magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna.  
 130 Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.  
 131 Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at,  
 132 tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy  
 133 pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa  
 134 ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Mae-  
 135 cenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum.  
 136 Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia  
 137 nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim.  
 138 Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cur-  
 139 sus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum  
 140 pellentesque felis eu massa.  
 141 Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus  
 142 tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In  
 143 hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis.  
 144 Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed  
 145 gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.  
 146 Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae  
 147 risus porta vehicula.  
 148 Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a fau-

149 cibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum  
150 diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue  
151 quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis  
152 porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo  
153 facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et  
154 vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim  
155 ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque  
156 egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.  
157

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet,  
158 laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum  
159 at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum  
160 eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed  
161 ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec  
162 luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies  
163 non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus,  
164 egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed  
165 vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget  
166 odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo  
167 eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare  
168 ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc  
169 dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam.  
170 Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos  
171 hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula  
172 eu, lacus.  
173

#### 174 **4. Application to a network of mechanical systems and numerical sim- 175 ulation**

176 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit,  
177 vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida  
178 mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna.  
179 Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus  
180 et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra  
181 metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus  
182 eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium  
183 quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean  
184 faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Cur-  
185 abitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue  
186 eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim  
187 rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi  
188 auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et,  
189 tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna,  
190 vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse  
191 ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et  
192

193 magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna.  
194 Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

195 Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at,  
196 tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy  
197 pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa  
198 ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Mae-  
199 cenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum.  
200 Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia  
201 nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim.  
202 Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cur-  
203sus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum  
204 pellentesque felis eu massa.

205 Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus  
206 tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In  
207 hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis.  
208 Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed  
209 gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.  
210 Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae  
211 risus porta vehicula.

212 Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a fau-  
213 cibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum  
214 diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue  
215 quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis  
216 porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo  
217 facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et  
218 vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim  
219 ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque  
220 egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

221 Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet,  
222 laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum  
223 at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fer-  
224 mentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed  
225 ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec  
226 luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies  
227 non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus,  
228 egestas vel, odio.

229 Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed  
230 vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget  
231 odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo  
232 eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare  
233 ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc  
234 dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam.  
235 Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos  
236 hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula  
237 eu, lacus.

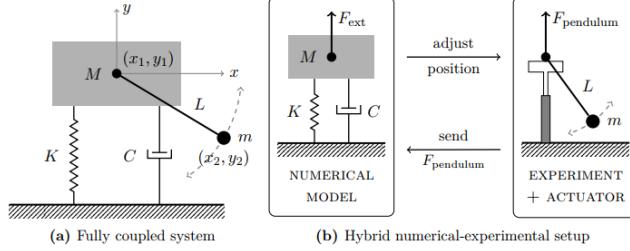


Figure 2: Real-time dynamic substructuring for a coupled pendulum-mass-spring-damper system

## 238 5. Conclusion

239 A conclusion section is not required. Although a conclusion may review the  
 240 main points of the paper, do not replicate the abstract as the conclusion. A  
 241 conclusion might elaborate on the importance of the work or suggest applications  
 242 and extensions.

243 **Acknowledgment** We would like to thank an anonymous referee, whose com-  
 244 ments are very helpful to us in the preparation of this research. The first author  
 245 also would like to thank Jan Philipp Pade for introducing him to the topic and  
 246 fruitful discussions.

## 247 References

- 248 [1] L. Lücken, J. P. Pade, and K. Knauer. Classification of coupled dynamical  
 249 systems with multiple delays: Finding the minimal number of delays. *SIAM  
 250 Journal on Applied Dynamical Systems*, 14(1):286–304, 2015.
- 251 [2] A. Wagemakers and M. A. F. Sanjuán. A new method to reduce the number  
 252 of time delays in a network. *Scientific Reports*, 7(1):2744, Jun 2017.
- 253 [3] A. Wagemakers, J. Used, and M. A. F. Sanjuán. Reducing the number of  
 254 time delays in coupled dynamical systems. *The European Physical Journal  
 255 Special Topics*, 227(10):1281–1289, Nov 2018.