B. G. Grebenshchikov, Один метод построения почти периодических решений для системы нейтрального типа с линейным запаздыванием, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1260–1270

DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.606

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2019. Том 60, № 6

УДК 519.17+512.54

ОДИН МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Б. Г. Гребенщиков

Аннотация. Изучена возможность построения почти периодического решения для одной неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, являющимся линейной функцией аргумента (времени) при некоторых предположениях относительно правой части данной системы. Доказано, что это решение асимптотически устойчиво. Исследуется также проблема существования почти периодического решения у одной системы без нейтральных членов, при этом данное решение устойчиво.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.606

Ключевые слова: запаздывание, почти периодические решения, устойчивость.

1. Основные определения. Рассматриваем линейное нормированное пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой $\|w\| = \max\limits_j\{w_j^\top\}$ (здесь w_j $(j = 1, 1, \dots, m)$ — компоненты вектора w, $\top$ — значок транспонирования).

Норму матрицы $D = \{d_{ij}\}$ $(i, j = 1, \dots, m)$ определим в соответствии с нормой вектора [1], а именно

$$\|D\| = \max_i \sum_j |d_{ij}|. \tag{1.1.}$$

В пользу такого выбора говорит то, что норма вектор-функции на отрезке определяется почти сходным образом.

Определение 1. Функция $f(t)$ называется *почти периодической в смысле Бора*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $l(\varepsilon)$ такое, что любой отрезок $[\vartheta, \vartheta + l]$ содержит по меньшей мере одно число T, для которого выполнено неравенство $|f(t + T) - f(t)| < \varepsilon$, $-\infty < t < \infty$.

Определение 2. Решение $x(t, \phi(s), \phi'(s))$ системы дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием $\gamma(t) = (1 - \mu)t$ $(\mu = \text{const}, 0 < \mu < 1)$ нейтрального типа:

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bx(\mu t) + Rdx(\mu t)/dt, \tag{1.2}$$

определенное непрерывно дифференцируемой начальной вектор-функцией $\phi(s)$ $(s \in [\mu t_0, t_0])$, называется *устойчивым*, если существует постоянная величина $\widehat{C} > 0$ такая, что из условия ограниченности величины $\|\phi(s)\| + \|\phi'(s)\|$ следует неравенство $\|x(t, \phi(s), \phi'(s))\| < \widehat{C}$ $(t > t_0)$.

Определение 3. Если решение $x(t,\phi(s),\phi'(s))$ системы (1.2) наряду с устойчивостью обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t,\phi(s),\phi'(s))\|=0$, то такое решение называется *асимптотически устойчивым*.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную неоднородную систему нейтрального типа с линейным запаздыванием

$$dx(t)/dt=Ax(t)+Bx(\mu t)+Rdx(\mu t)/dt+f(t),\quad \mu=\mathrm{const},\ 0<\mu<1,\ \ t\geq t_0>0. \tag{2.1}$$

Здесь A,B,R — постоянные матрицы размера $m\times m$, $x(t)$ — m-мерная вектор-функция времени (аргумента) t; $f(t)$ — m-мерная вектор-функция, непрерывная на полуоси $[0,+\infty)$.

Решение системы (2.1) определено начальной вектор-функцией $\phi(s)$, заданной на отрезке $[\mu t_0,t_0]$, имеющей (в соответствии с определением 2) непрерывную производную при $\mu t_0<s\leq t_0$ [2, теорема 10.6]. Отметим, что системы с линейным запаздыванием встречаются в задачах механики, физики, биологии. В частности, при исследовании процесса колебаний токоприемника движущегося локомотива при взаимодействии с контактным проводом (при учете воздействия эластичной опоры) в [3] задача сводится к изучению поведения решения неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с линейным запаздыванием. Более сложная модель, приводящая к исследованию системы четвертого порядка, предложена в [4]. Если рассматривать колебания токоприемника при удалении локомотива от опоры, то возникают, в свою очередь, системы нейтрального типа с линейным запаздыванием. Задача прохождения токоприемником эластичной опоры имеет практическое применение при изучении устойчивости колебаний движущегося токоприемника и при определении износа контактного провода при различных скоростях движения локомотива, а также при различной величине силы нажатия полоза токоприемника на контактный провод. Учет эффекта последействия важен для правильного качественного и количественного описаний данных процессов.

Полагаем, что собственные значения λ матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}(\lambda)<-\delta_1,\quad \delta_1=\mathrm{const},\ \ \delta_1>0. \tag{2.2}$$

Наряду с этим считаем, что собственные значения ρ матрицы $-A^{-1}B$ меньше единицы по модулю, т. е. справедлива оценка

$$|\rho|<\delta_2,\quad \delta_2=\mathrm{const},\ \ 0<\delta_2<1. \tag{2.3}$$

Наконец, считаем, что оценка, подобная (2.3), справедлива и для собственных значений ν матрицы R, т. е.

$$|\nu|<\delta_3,\quad \delta_3=\mathrm{const},\ \ 0<\delta_3<1. \tag{2.4}$$

Непрерывную вектор-функцию $f(t)$ считаем равномерно ограниченной, т. е. справедливо неравенство

$$\sup_{0\leq t<\infty}\|f(t)\|\leq K,\quad K=\mathrm{const},\ \ K>0 \tag{2.5}$$

(в дальнейшем наложим еще некоторые ограничения на данную вектор-функцию).

3. Ограниченность решения линейной неоднородной системы.

Теорема 1. *При выполнении неравенств* (2.2)–(2.5) *решение системы* (2.1) *ограничено.*

Доказательство. Ввиду положительности запаздывания $\gamma(t)$ и ограниченности величины $\|\phi'(s)\|$ решение системы (2.1) существует [5, теорема существования и единственности]. Заменой $\tau = \ln(t)$ сведем систему (2.1) к следующей системе с постоянным запаздыванием $\sigma = -\ln(\mu)$ [2]:

$$dz(\tau)/d\tau = e^{\tau}[Az(\tau) + Bz(\tau-\sigma) + \bar{f}(\tau)] + \mu R\, dz(\tau-\sigma)/d\tau, \;\; \bar{f}(\tau) = f(e^{\tau}). \quad (3.1)$$

Известно [6], что при выполнении неравенств (2.2)–(2.4) решение $z^0(\tau)$ соответствующей однородной системы

$$dz^0(\tau)/d\tau = e^{\tau}[Az^0(\tau) + Bz^0(\tau-\sigma)] + \mu R\, dz^0(\tau-\sigma)/d\tau \quad (3.2)$$

удовлетворяет экспоненциальной оценке

$$\|z^0(\tau)\| \le \overline{M} e^{-\bar{\beta}(\tau-\tau_0)} [\sup_{\tau_0-\sigma\le s\le\tau_0+, 1\le i\le m} \{|\bar{\phi}_i(s)|, |\bar{\phi}_i'(s)|\}], \quad (3.3)$$

$$z^0(s) = \bar{\phi}(s), \quad \tau_0 - \sigma \le s \le \tau_0,$$
$$\overline{M} = \mathrm{const}, \quad \overline{M} > 0, \quad \bar{\beta} = \mathrm{const}, \;\; \bar{\beta} > 0.$$

Константы $\overline{M}, \bar{\beta}$ одни и те же при любых начальных значениях $\tau_0 \ge \tau_0^* > 0$.

Полагаем $z_{n+1}(\tau) = z(\tau + n\sigma)$, $z_0(\tau) = \bar{\phi}(\tau-\sigma)$ $\bar{f}_{n+1}(\tau) = \bar{f}(n\sigma + \tau)$, $\tau_0 \le \tau \le \tau_0 + \sigma$. Тогда из системы (3.1) получаем счетную систему

$$dz_{n+1}(\tau)/d\tau = \mu^{-n} e^{\tau}[Az_{n+1}(\tau) + Bz_n(\tau) + \bar{f}_{n+1}(\tau)] + \mu R\, dz_n(\tau)/d\tau \quad (3.4)$$

на конечном промежутке $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$ при граничных условиях

$$z_{n+1}(\tau_0) = z_n(\tau_0 + \sigma). \quad (3.5)$$

Пусть $U_n(\tau, s) = \exp(\mu^{-n} A(e^{\tau} - e^{s}))$, $\tau_0 \le s \le \tau \le \tau_0 + \sigma$. Представим решение неоднородной системы (3.4) в интегральном виде (виде Коши) [2]:

$$z_{n+1}(\tau) = U_n(\tau, \tau_0) z_n(\tau_0 + \sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) B z_n(s) \frac{e^s}{\mu^n}\, ds$$
$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) \mu R\, dz_n(s)/ds + \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) \bar{f}_{n+1}(s) \frac{e^s}{\mu^n}\, ds. \quad (3.6)$$

Если ввести норму вектор-функции $z(\tau)$ на отрезке $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$ следующим образом [5]:

$$\|z(\tau)\|_{\sigma} = \sup_{\substack{\tau_0\le\tau\le\tau_0+\sigma,\\ 1\le i\le m}} \{|z_i(\tau)|, |z_i'(\tau)|\}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_0 + \sigma],$$

то при такой нормировке имеем банахово пространство $C^1_{[\tau_0, \tau_0+\sigma]}$ непрерывных функций, имеющих первую производную. В данном пространстве определим оператор сдвига $T_{n,\tau}$ (аналогично [7, гл. IV]):

$$T_{n,\tau} w(s) = U_n(\tau, \tau_0) w(\tau_0 + \sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) B w(s) \frac{e^s}{\mu^n}\, ds$$
$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) \mu R\, dw(s)/ds, \;\; w(\tau) \in C^1_{[\tau_0, \tau_0+\sigma]}. \quad (3.7)$$

Поскольку произведение операторов в банаховом пространстве определено [8, гл. 3], решение однородной дифференциально-разностной системы $z^0_{n+1}(\tau)$ (соответствующей системе (3.3)) имеет вид

$$z^0_{n+1}(\tau) = T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \dots T_{1,s_1} T_0(s_0) z_0(s), \qquad (3.8)$$
$$\tau_0 \le s \le s_0 \le s_1 \le \dots \le s_{n-1} \le \tau \le \tau_0 + \sigma.$$

Отметим некоторые свойства данного линейного оператора. Ввиду (2.2) справедливо следующее неравенство [1, гл. 1]:

$$\|U_n(\tau, s)\| \le M \exp\left(\frac{-\delta_1}{\mu^n} A(e^\tau - e^s)\right), \quad M = \text{const}, \ M > 1, \ \tau_0 \le s \le \tau \le \tau_0 + \sigma. \qquad (3.9)$$

Из (3.7) следует, что

$$\|T_{n,\tau} w(s)\| \le M \left(1 + \frac{\|B\|}{\delta_1} \sup_s \|w(s)\| + \mu^{n+1} \frac{\|R\|}{\delta_1 t_0} \sup_s \|w'(s)\|\right), \qquad (3.10)$$

т. е. данный оператор $T_{n,\tau}$ равномерно ограничен [8, гл. 3]. Более точное свойство данного оператора вытекает из оценки (3.3), а именно

$$\left\| T_{n,\tau} \prod_{j=0}^{n-1} T_{j,s_j} z_0(s) \right\| \le \overline{M} q^{n-1} \|z_0\|_\sigma, \quad q = \mu^{\bar\beta}. \qquad (3.11)$$

Очевидно, решение неоднородного уравнения (3.6) можно представить как решение операторного уравнения

$$z_{n+1}(\tau) = T_{n,\tau} z_n(s) + I_n(\tau) \bar f_{n+1}(s), \qquad (3.12)$$

где $I_n(\tau)$ — интегральный оператор [8. гл. 3], определенный следующим образом:

$$I_n(\tau) w(s) = \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) w(s) \frac{e^s}{\mu^n}\, ds.$$

Отметим некоторые свойства этого оператора. Как следует из (3.2), для вектор-функции $F_n(\tau) = I_n(\tau) \bar f_{n+1}(s)$ справедлива оценка

$$\sup_\tau \|F_n(\tau)\| \le \frac{MK}{\delta_1}, \qquad (3.13)$$

отсюда оператор $I_n(\tau)$ равномерно ограничен. Далее, для выражения $dF_n(\tau)/d\tau$ имеем равенство

$$dF_n(\tau)\, d\tau = \frac{Ae^\tau}{\mu^n} F_n(\tau) + \frac{e^\tau}{\mu^n} \bar f_n(\tau). \qquad (3.14)$$

Из уравнений (3.8), (3.11) следует равенство

$$\begin{aligned} z_{n+1}(\tau) = T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \dots T_{1,s_1} T_0(s_0) z_0(s) \\ + T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \dots T_{1,s_1} I_0(s_1) \bar f_1(s) \\ + T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \dots T_{2,s_2} I_1(s_2) \bar f_2(s) + \dots + I_n(\tau) f_{n+1}(s). \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Ввиду того, что справедлива оценка

$$\sup_{s_j} \|T_{j,s_j} I_{j-1}(s_j) \bar f_j(s)\| \le \frac{M^2}{\delta_1} \left[1 + \frac{\|B\|}{\delta_1} + \frac{\|R\|}{t_0} \left(\frac{\|A\|}{\delta_1} + 1\right)\right] K = \overline{L} K$$

(она получается из соотношений (3.3), (3.10), (3.13) и (3.14)), имеем

$$\sup_{\tau} \|T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \dots T_{j,s_j} I_{j-1}(s_j) \bar{f}_j(s)\| \le \overline{M} L K q^{n-j-1}.$$

Тогда из соотношения (3.15) вытекает неравенство

$$\sup_{\tau} \|z_{n+1}(\tau)\| \le \overline{M} q^{n-1} \|z_0(\tau)\|_\sigma + \overline{LM} K (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) + \frac{MK}{\delta_1},$$

откуда получаем окончательную оценку любого n:

$$\sup_{\tau} \|z_{n+1}(\tau)\| \le q^{n-1} \|z_0(\tau)\|_\sigma + \left[\frac{\overline{LM}}{1-q} + \frac{M}{\delta_1}\right] K, \tag{3.16}$$

из которой и следует утверждение теоремы 1.

4. Построение почти периодического решения. Пусть теперь $f(t) \in \Pi^{(k)}$, где $\Pi^{(k)}$ — пространство почти периодических вектор-функций, имеющих производные до порядка k [1, дополнение]. Полагаем, что в системе (1.1) начальная вектор-функция $\phi(s)$ тождественно нулевая, $\mu t_0 \le s \le t_0$.

Возникает вопрос о существовании почти периодического решения системы (1.1) и его вычислении.

Теорема 2. *При выполнении неравенств* (2.2)–(2.4) *и условий, налагаемых на вектор-функцию* $f(t)$, *система* (1.1) *имеет при любых* $0 < \mu < 1$ *почти периодическое решение* $\bar{x}(t)$, *которое может быть найдено методом последовательных приближений. Данное решение единственно и асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Будем искать почти периодическое решение $\bar{x}(t)$ методом последовательных приближений, полагая

$$dx_{n+1}(t)/dt = Ax_{n+1}(t) + Bx_n(\mu t) + R\,dx_n(\mu t)/dt + f(t), \quad x_0 = 0, \ \ n = 1, 2 \dots. \tag{4.1}$$

Очевидно, $x_1(t) = \bar{y}(t)$, где $\bar{y}(t)$ — почти периодическое решение неоднородной системы без запаздывающих членов

$$dy(t)/dt = Ay(t) + f(t). \tag{4.2}$$

Известно [1, дополнение], что данное (частное) решение системы (4.2) имеет вид

$$\bar{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} f(s)\,ds. \tag{4.3}$$

Но производная $x_1'(t) = dx_1(t)/dt$ является почти периодической вектор-функцией и $x_1'(\mu t)$ также является почти периодической вектор-функцией [1, дополнение]. Последовательно интегрируя соотношения (4.1), найдем $x_2(t)$, и т. д.

Для доказательства сходимости последовательных приближений введем следующую вектор-функцию: $\Delta_{n+1}(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$. Очевидно, $\Delta_{n+1}(t)$ удовлетворяют дифференциально-разностным соотношениям

$$d\Delta_{n+1}(t)/dt = A\Delta_{n+1}(t) + B\Delta_n(\mu t) + Rd\Delta_n(\mu t)/dt, \quad \Delta_1(t) = \bar{y}(t). \tag{4.4}$$

Отметим, что

$$dx(\theta(t))/dt = (dx(\theta(t))/d\theta)\,(d\theta(t)/dt)\,,$$

тогда $d\Delta_n(\mu t)/dt = \mu d\Delta_n(\theta)/d\theta$.

Последовательно получаем из (4.4) следующие равенства:

$$d\Delta_1(t)/dt = A\Delta_1(t) + f(t) = A\bar{y}(t) + f(t),$$

$$d\Delta_2(t)/dt = A\Delta_2(t) + B\Delta_1(\mu t) + R[A\Delta_1(\mu t) + f(\mu t)],$$

$$d\Delta_3(t)/dt = A\Delta_3(t) + B\Delta_2(\mu t) + R[A\Delta_2(\mu t) + B\Delta_1(\mu^2 t)] \\ + R^2[A\Delta_1(\mu^2 t) + f(\mu^2 t)], \dots$$

$$d\Delta_n(t)/dt = A\Delta_n(t) + B\Delta_{n-1}(\mu t) + R[A\Delta_{n-1}(\mu t) + B\Delta_{n-2}(\mu^2 t)] \\ + R^2[A\Delta_{n-2}(\mu^2 t) + B\Delta_{n-3}(\mu^3 t)] + \dots + R^{n-1}[A\Delta_1(\mu^{n-1} t) + f(\mu^{n-1} t)] \quad (4.5)$$

(здесь $R^2 = R \cdot R$, $R^n = R \cdot R^{n-1}$; правые части соотношений (4.5) уже не содержат «нейтральных» членов).

Ввиду того, что $f(t) \in \Pi^{(k+1)}$, ее производные также являются почти периодическими вектор-функциями. Тогда (следуя [9]), дифференцируя обе части последнего соотношения в (4.5) j раз ($1 \le j \le k$), получаем

$$\Delta_n^{(j+1)}(t) = A\Delta_n^{(j)}(t) + \mu^j B\Delta_{n-1}^{(j)}(\mu t) + \mu^j RA\Delta_{n-1}^{(j)}(\mu t) \\ + \mu^{2j} RB\Delta_{n-2}^{(j)}(\mu^2 t) + \mu^{2j} R^2 A\Delta_{n-2}^{(j)}(\mu^2 t) + \dots \\ + \mu^{(n-1)(j)} R^{n-1}[A\bar{y}^{(j)}(\mu^{n-1} t) + f^{(j)}(\mu^{n-1} t)] = A\Delta_n^{(j)}(t) + f_{n,k}(t). \quad (4.6)$$

Отметим следующие факты. В правой части соотношения (4.6) члены, содержащие линейные запаздывания, являются почти периодическими вектор-функциями. Следовательно, вектор-функция $f_{n,k}(t)$ почти периодическая. Ввиду неравенства (2.2) справедлива оценка, аналогичная (3.9):

$$\|e^{A(t-s)}\| \le Me^{-\delta_1(t-s)}, \quad t_0 \le s < t. \quad (4.7)$$

Наконец, вследствие (2.4) имеем неравенство [7, гл. i]

$$\|R^j\| \le M_1(\delta_3)^j, \quad M_1 = \mathrm{const}, \ M_1 > 1. \quad (4.8)$$

Пусть в (4.6) $j = k$. Рассмотрим систему (4.6). Считаем, что члены, содержащие R^i, $i = 1, 2, \dots$, являются «возмущениями». Полагая, что «порожденное» (вектор-функцией $f_{n,k}(t)$) почти периодическое решение соответствующей «невозмущенной» системы имеет вид, аналогичный (4.3), и учитывая оценки (4.7) и (4.8), получаем неравенство

$$\sup_t \big\|\Delta_n^{(k)}(t)\big\| \le \frac{M\mu^k}{\delta_1}\|B\| \sup_t \big\|\Delta_{n-1}^{(k)}(t)\big\| + \frac{MM_1}{\delta_1}\|A\|\delta_3\mu^k \sup_t \big\|\Delta_{n-1}^{(k)}(\mu t)\big\| \\ + \frac{MM_1}{\delta_1}\|B\|\delta_3\mu^{2k} \sup_t \big\|\Delta_{n-2}^{(k)}(\mu^2 t)\big\| + \frac{MM_1}{\delta_1}\|A\|(\delta_3)^2\mu^{2k} \sup_t \big\|\Delta_{n-2}^{(k)}(\mu^2 t)\big\| + \dots \\ + \frac{MM_1}{\delta_1}(\delta_3)^{n-1}\mu^{(n-1)k}\big[\sup_t \|A\|\big\|\Delta_1^{(k)}(\mu^{n-1} t)\big\| + \|f^{(k)}(\mu^{n-1} t)\|\big].$$

Полагаем

$$u_j = \mu^{kj}(\delta_3)^j \sup_t \big\|\Delta_j^{(k)}(\mu^j t)\big\|,$$

тогда из последнего неравенства получаем весьма грубую оценку

$$u_n < \hat{b}[u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_2 + u_1] + \hat{a}\bar{f}_k.$$

Здесь

$$\hat{b} = \frac{MM_1}{\delta_1\delta_3}\|B\| + \frac{MM_1}{\delta_1}\|A\|, \quad \hat{a} = \frac{MM_1}{\delta_1}, \quad \bar{f}_k = \sup_t \|f^{(k)}(t)\|.$$

Если теперь обозначить $v_{n+1} = \hat{b}[u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_1] + \hat{a}\bar{f}_k$, то получим следующую цепь неравенств:

$$v_{n+1} - v_n = \hat{b}u_n \le \hat{b}v_n, \quad n = 1, 2 \dots,$$

откуда

$$v_{n+1} \le (1+\hat{b})v_n \le (1+\hat{b})^2 v_{n-1} \le \dots \le (1+\hat{b})^{n-1}v_2 = (1+\hat{b})^{n-1}(\hat{b}u_1 + \hat{a}u_1').$$

Но тогда

$$u_n \le (1+\hat{b})^{n-1}(\hat{b}u_1 + \hat{a}\bar{f}_k),$$

или, возвращаясь к прежним переменным $\big(\sup\limits_t \big\|\Delta_j^{(k)}(\mu^j t)\big\|\big)$, имеем следующую оценку:

$$\sup_t \big\|\Delta_n^{(k)}(t)\big\| \le L_k(q_k)^n[\sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\|], \tag{4.9}$$

$$L_k = \mathrm{const}, \quad L_k > 1, \quad q_k = \mu^k\delta_3(1+\hat{b}).$$

Полагаем натуральное число k в (4.9) настолько большим, что справедливо неравенство

$$q_k < 1.$$

Тогда из (4.9) имеем предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t \big\|\Delta_n^{(k)}(t)\big\| = 0.$$

Докажем, что такое предельное равенство справедливо и для $\sup\limits_t \big\|\Delta_n^{(j)}(t)\big\|$, $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Очевидно,

$$\Delta_{n+1}^{(k-1)}(t) = -\mu^{k-1}A^{-1}B\Delta_n^{(k-1)}(\mu t) + A^{-1}\Delta_{n+1}^{(k)}(t) - \mu^{k-1}A^{-1}R\Delta_{n+1}^{(k)}(\mu t) \tag{4.10}$$

(данное уравнение получается из исходного (4.6), если разрешить его относительно переменной $\Delta_{n+1}^{(k-1)}(t)$). Покажем (считая неоднородностью члены, содержащие величины $\Delta_{n+1}^{(k)}(t), \Delta_{n+1}^{(k)}(\mu t)$), что решение неоднородной разностной системы (4.10) может быть представлено в следующем виде (аналог формулы вариации постоянных [7, гл. i]):

$$\Delta_n^{(k-1)}(t) = [-\mu^{k-1}A^{-1}B]^n \bar{y}^{(k-1)}(\mu^n t)$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1}[-\mu^{k-1}A^{-1}B]^{n-1-i}\big[A^{-1}\Delta_{i+2}^{(k)}(\mu^{n-1-i}t) - \mu^{k-1}A^{-1}R\Delta_{i+1}^{(k)}(\mu^{n-i}t)\big]. \tag{4.11}$$

В самом деле, из (4.10) последовательно имеем

$$\Delta_2^{(k-1)}(t) = -\mu^{k-1}A^{-1}B\bar{y}^{(k-1)}(\mu t) + A^{-1}\big[\Delta_2^{(k)}(t) - \mu^{k-1}R\Delta_1^{(k)}(\mu t)\big],$$

$$\Delta_3^{(k-1)}(t) = -\mu^{k-1}A^{-1}B\Delta_2^{(k-1)}(\mu t) + A^{-1}\big[\Delta_3^{(k)}(t) - \mu^{k-1}R\Delta_2^{(k)}(\mu t)\big]$$
$$= (-\mu^{k-1}A^{-1}B)^2\bar{y}^{k-1}(\mu^2 t) - \mu^{k-1}A^{-1}BA^{-1}\big[\Delta_2^{(k)}(t) - \mu^{k-1}R\Delta_1^{(k)}(\mu t)\big]$$

$$+ A^{-1}\left[\Delta_3^{(k)}(t) - \mu^{k-1} R \Delta_2^{(k)}(\mu t)\right].$$

Аналогично

$$\Delta_4^{(k-1)}(t) = (-\mu^{k-1}A^{-1}B)^3 \bar{y}(k-1)(\mu^3 t) - \mu^{k-1}A^{-1}BA^{-1}\left[\Delta_3^{(k)}(\mu t) - \mu^{k-1}R\Delta_3^{(k)}(\mu t)\right] + (\mu^{k-1}A^{-1}B)^2 A^{-1}\left[\Delta_2^{(k)}(\mu^2 t) - \mu^{k-1}R\Delta_2^{(k)}(t)\right] + A^{-1}\left[\Delta_4^{(k)}(t) - \mu^{k-1}R\Delta_4^{(k)}(\mu t)\right]$$

и т. д.

Продолжая подобный процесс, получим для любых $\Delta_{n+1}^{(k-1)}(t)$ формулу (4.11).

Рассмотрим уравнение (4.11). Ввиду оценки (2.3) справедливо неравенство

$$\|(-A^{-1}B)^i\| \le M_2(\delta_2)^i, \quad M_2 = \mathrm{const}, \ \ M_2 > 1. \tag{4.12}$$

Учитывая (4.8) и (4.12), из (4.11) получаем

$$\sup_t \left\|\Delta_n^{(k-1)}(t)\right\| \le M_2(\mu^{k-1}\delta_2)^n \sup_t \|\bar{y}^{(k-1)}(t)\| + M_1 M_2 \sum_{i=0}^{n-1} [(\mu^{k-1}\delta_2)^{n-1-i}][\|A^{-1}\|(q_k + \|R\|)(q_k)^{i+1}[\sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|\bar{f}^{(k)}(t)\|]. \tag{4.13}$$

Без ограничения общности считаем, что $q_k < \sqrt{\delta_2} = \hat{q}$, что всегда выполнимо при достаточно большом k. Первый член в правой части (4.13) стремится к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим поведение оставшихся членов. Очевидно,

$$(\mu^{k-1}\delta_2)^{n-1-i}(\delta_2)^{0.5(i+1)} = (\mu^{k-1}\hat{q})^{n-1-i},$$

тогда справедливы соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} (\mu^{k-1}\delta_2)^{n-1-i}(\delta_2)^{0.5(i+1)} = (\mu^{k-1}(\hat{q})^2)^n \left[\frac{1}{\mu^{k-1}\hat{q}} + \frac{1}{(\mu^{k-1}\hat{q})^2} + \dots + \frac{1}{(\mu^{k-1}\hat{q})^n}\right] = (\mu^{k-1}(\hat{q})^2)^n \frac{(\mu^{k-1}\hat{q})^{-n-1} - 1}{(\mu^{k-1}\hat{q})^{-1} - 1} < \frac{(\hat{q})^n}{1 - \mu^{k-1}\hat{q}}.$$

Отсюда

$$M_1 M_2 \sum_{i=0}^{n-1} [(\mu^{k-1}\delta_2)^{n-1-i}][\|A^{-1}\|(q_k + \|R\|)(q_k)^{i+1}(\sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|\bar{y}^{(k+1)}(t)\|)] < \frac{M_1 M_2 \|A^{-1}\|(q_k + \|R\|)(\hat{q})^n}{1 - \mu^{k-1}\hat{q}} (\sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\|). \tag{4.14}$$

Из (4.13), (4.14) получаем более грубую оценку

$$\sup_t \left\|\Delta_n^{(k-1)}(t)\right\| \le L_{k-1}(\sqrt{\delta_2})^n [\sup_t \|\bar{y}^{(k-1)}(t)\| + \sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\|],$$

$$L_{k-1} = \mathrm{const}, \quad L_{k-1} > 1. \tag{4.15}$$

Если рассмотреть уравнение

$$\Delta_{n+1}^{(k-2)}(t) = -\mu^{k-2}A^{-1}B\Delta_n^{(k-2)}(\mu t) + A^{-1}\Delta_{n+1}^{(k-1)}(t) - \mu^{k-2}A^{-1}R\Delta_{n+1}^{(k-1)}(\mu t), \tag{4.16}$$

то, принимая во внимание только что полученную оценку (4.15), методами, аналогичными использованными нами, получим из (4.16) очередное неравенство

$$\sup_t \big\|\Delta_n^{(k-2)}(t)\big\| \le L_{k-2}(\sqrt{\delta_2})^n [\sup_t \|\bar y^{(k-2)}(t)\| + \sup_t \|\bar y^{(k-1)}(t)\| + \sup_t \|\bar y^{(k)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\|], \quad L_{k-2} = \text{const},\ L_{k-2} > 1, \tag{4.17}$$

и т. д. В итоге приходим к окончательной оценке

$$\sup_t \|\Delta_n(t)\| \le L_0(\sqrt{\delta_2})^n \left[\sum_{i=1}^{k} \sup_t \|\bar y^{(i)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\| \sup_t + \|\bar y(t)\|\right], \tag{4.18}$$

$$L_0 = \text{const},\ \ L_0 > 1,$$

откуда и вытекает сходимость последовательных приближений.

Как следует из теоремы 1, любое решение неоднородной системы (1.1) ограничено. Известно [1, дополнение], что пределом $\hat x(t)$ равномерно сходящейся последовательности почти периодических вектор-функций $\{x_n(t)\}$ является также почти периодическая вектор-функция. Данное решение $\hat x(t)$ единственно. Действительно, пусть есть еще одно почти периодическое решение $\hat x_1(t)$. Разность этих решений $\overline{\Delta}(t) = \hat x(t) - \hat x_1(t)$ также почти периодическое решение, удовлетворяющее соответствующему однородному уравнению. Но тогда ввиду неравенств (2.2)–(2.4) для этого решения справедливо предельное равенство [6] $\lim\limits_{t\to\infty} \overline{\Delta}(t) = 0$; противоречие. Следовательно, $\overline{\Delta}(t)$ не является почти периодической вектор-функцией и единственным почти периодическим решением является построенное выше методом последовательных приближений решение $\hat x(t)$. Оно асимптотически устойчиво, поскольку, представив решение $x(t, \phi(t))$ в виде суммы частного почти периодического решения неоднородной системы (1.1) и решения $x^0(t, \phi(t))$ однородной системы, сведем исследование к анализу асимптотических свойств соответствующей однородной системы [5, гл. ii].

Теорема 2 доказана.

5. Существование почти периодического решения для некоторых систем без нейтральных членов. Рассмотрим неоднородную систему без нейтральных членов:

$$dy(t)/dt = Ay(t) + By(\mu t) + f(t), \quad \mu = \text{const},\ 0 < \mu < 1,\ \ t \ge t_0 > 0. \tag{5.1}$$

Предполагаем, что справедлива оценка (2.2) и наряду с этим устойчива (но не асимптотически) разностная система

$$y_{n+1} = -A^{-1}By_n. \tag{5.2}$$

Условия устойчивости разностной системы (5.2) приведены, например, в [7, гл. i].

Рассмотрим достаточные условия существования почти периодического решения у системы (5.1) в этом случае. Вначале докажем одну лемму для оценки решения соответствующей однородной системы.

Лемма. *При выполнении условий, налагаемых на собственные числа* λ *(оценка (2.2)), решение однородной системы*

$$d\hat y(t)/dt = A\hat y(t) + B\hat y(\mu t), \tag{5.3}$$

определенное кусочно непрерывной начальной вектор-функцией $\phi(s)$, устойчиво.

Доказательство. Продифференцируем обе части системы (5.3). Получаем систему вида

$$d\hat{y}'(t)/dt = A\hat{y}'(t) + \mu B\hat{y}'(\mu t),\ \ t > \frac{t_0}{\mu};\quad \hat{y}'(t) = d\hat{y}(t)/dt. \tag{5.4}$$

Известно [5, гл. ii], что при $t > \frac{t_0}{\mu}$ решение системы (5.4) существует. Очевидно, что собственные значения ρ_μ «вырожденной» матрицы $-\mu A^{-1}B$ меньше единицы по модулю. В [10] методами, несколько отличающимися от использованных нами при доказательстве оценки (4.18) (с учетом (3.3)), доказано неравенство

$$\|\hat{y}'(t)\| \le \widehat{M}_1 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\beta} \sup_{\mu t_0 \le s \le \mu^{-1} t_0} \|y(s)\|, \tag{5.5}$$

$$\widehat{M}_1 = \mathrm{const},\ \ \widehat{M}_1 > 1,\quad \beta = \mathrm{const},\ \ \beta > 0.$$

Рассмотрим поведение решения системы (5.3), учитывая оценку (5.5).

Из равенства (5.3) имеем неоднородное разностное уравнение

$$\hat{y}(t) = -A^{-1}By(\mu t) + A^{-1}\hat{y}'(t). \tag{5.6}$$

Считая величину $\hat{y}'(t)$ неоднородностью, запишем решение системы (5.6), используя аналог формулы вариации постоянных:

$$\hat{y}(t) = (-A^{-1}B)^n \hat{y}(\mu^n t) - \sum_{j=0}^{n-1} (-A^{-1}B)^j A_{-1} y'(\mu^j t),\quad t \in (t_0\mu^{1-n}, t_0\mu^{-n}]. \tag{5.7}$$

Ввиду того, что разностная система (5.2) устойчива, для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство [7, гл. i]

$$\|(-A^{-1}B)^n\| \le \widehat{M},\quad \widehat{M} = \mathrm{const},\ \ \widehat{M} > 1,$$

тогда из (5.3), (5.7) имеем оценку

$$\hat{y}_n \le \widehat{M} y_0 + \|A^{-1}\|\widehat{M} \sum_{j=0}^{n-1} y'_j < \widehat{M}\widehat{M}_1 \left[\frac{\|A^{-1}\| + \|A\| + \|B\|}{q(1-q)}\right] \sup_t \|y_0\|,$$

$$\hat{y}_n = \sup_{t \in (\mu^{1-n}t_0, \mu^{-n}t_0]} \|\hat{y}(t)\|,\ \ y'_j = \sup_{t \in (\mu^{1-j}t_0, \mu^{-j}t_0]} \|y'(t)\|,\ \ q = \mu^\beta,\ \ 0 < q < 1. \tag{5.8}$$

Из (5.8) следует устойчивость системы (5.3). Лемма доказана.

Рассмотрим проблему существования почти периодического решения у системы (5.1). Ввиду того, что разностная система устойчива, но не асимптотически, строить почти периодическое решение методами, изложенными выше, не представляется возможным. Однако существует почти периодическое решение $\bar{y}'(t)$ системы (5.4).

Теорема 3. *При ограниченности величины* $\left\|\int\limits_{t_0}^{t} \bar{y}'(s)\,ds\right\|$ *система* (5.1) *допускает почти периодическое решение* $\bar{y}(t)$.

Доказательство. Поскольку собственные числа λ матрицы A удовлетворяют оценке (2.2), а собственные числа ρ_μ матрицы $-\mu A^{-1}B$ — оценке (2.3), строим почти периодическое решение системы (5.4) $\bar{y}'(t)$. Ввиду того, что $\left\|\int\limits_{t_0}^{t} \bar{y}'(s)\,ds\right\|$ ограничен, величина $\int\limits_{t_0}^{t} \bar{y}'(s)\,ds$ является почти периодической вектор-функцией [1, дополнение], следовательно, система (5.1) допускает почти периодическое решение, которое является устойчивым, но не асимптотически.

Теорема доказана.

Следует заметить, что при этом данное почти периодическое решение может оказаться и не единственным. В самом деле, пусть $B = -A$. Тогда любое выражение $\bar{y}(t) + \bar{h}$ ($\bar{h}$ — постоянный вектор размерности m) является почти периодическим решением системы (5.8).

Отметим, что автор продолжает исследования систем, начатые ранее в [6, 11, 12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
3. *Fox L., Mayers D. F., Ockendon J. R., Taylor A. B.* On functional differential equation // Inst. Math. Appl. 1972. V. 8. P. 271–307.
4. *Ockendon J., Tayler A.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. Soc. London. Ser. A. 1971. V. 322. P. 447–468.
5. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
6. *Гребенщиков Б. Г.* Об устойчивости стационарных систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием, линейно зависящим от времени // Изв. вузов. Математика. 1991. № 7. С. 69–71.
7. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
8. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
9. *Kato T., McLeod J. B.* The functional differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ and generalisation // Lect. Notes Math. 1972. V. 280. P. 308–313.
10. *Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И.* Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 5. С. 751–758.
11. *Гребенщиков Б. Г.* Построение почти периодических решений для одной системы с линейным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 786–795.
12. *Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И.* Почти периодические решения одной квазилинейной системы с линейным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 768–773.

Поступила в редакцию 4 июля 2018 г.
После доработки 30 августа 2018 г.
Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Гребенщиков Борис Георгиевич
Уральский федеральный университет,
кафедра прикладной математики энергетического института,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
b.g.grebenshchikov@urfu.ru