Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Die bisherigen Untersuchungen über Stabilität haben im wesentlichen gezeigt[1]), daß die Mannigfaltigkeit der für $t \to \infty$ nach Null strebenden Integrale des Differentialgleichungssystems

$$(1) \qquad \frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu + \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wenn die Zusatzfunktionen φ_ν im Vergleich zu den linearen Gliedern absolut sehr klein sind, im allgemeinen ebenso groß ist, wie wenn die Zusatzfunktionen gar nicht da wären. Die Raschheit der Konvergenz nach Null ist dabei mit der Exponentialfunktion $e^{-\varrho t}$, vergleichbar, wobei $-\varrho$ der Realteil einer charakteristischen Wurzel, d. h. einer Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x \ldots a_{1n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} \quad \ldots a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0,$$

ist. Der Fall, der soeben durch die Worte „im allgemeinen" charakterisiert wurde, liegt vor, wenn kein Realteil gleich Null ist. Wenn insbesondere bei dem (linearen) System ohne Zusatzfunktionen *jedes* Integral für $t \to \infty$ nach Null strebt, was nur eintritt, wenn alle Realteile negativ sind, so hat auch bei dem System mit Zusatzfunktionen *jedes* Integral, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, die Eigenschaft, daß $|x_\nu(t)|$ dauernd sehr klein bleibt und für $t \to \infty$ nach Null konvergiert (Fall der

[1]) Vgl. die Abhandlung des Verfassers: Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 129—160. Daselbst auch die wichtigste weitere Literatur.

Stabilität). Auf die genaue Formulierung der Bedingungen, die von den Zusatzfunktionen φ_ν zu fordern sind, kann in dieser Einleitung verzichtet werden.

Die bisher benutzten Methoden arbeiten durchweg mit den charakteristischen Wurzeln und lassen sich daher nicht auf Systeme der Form

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

übertragen, wo die $f_{\nu\mu}(t)$ beliebige stetige beschränkte Funktionen von t sind. Nach dem Gesagten wird man aber in bezug auf das System (2) zunächst vermuten, daß die Mannigfaltigkeit der für $t \to \infty$ nach Null strebenden Integrale „im allgemeinen" ebenso groß ist wie wenn die Zusatzfunktionen φ_ν nicht da wären. Insbesondere ist, wenn bei Weglassen der Zusatzfunktionen *jedes* Integral für $t \to \infty$ nach Null strebt, oder wenigstens, wenn es das mindestens so rasch tut wie eine Exponentialfunktion $e^{-\varrho t}$, zu vermuten, daß dann auch bei dem System mit Zusatzfunktionen *jedes* Integral, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, die Eigenschaft hat, daß $|x_\nu(t)|$ dauernd sehr klein bleibt und für $t \to \infty$ nach Null konvergiert.

Nach längeren Versuchen, diese Vermutungen zu beweisen, fand ich schließlich, daß sie gar nicht richtig sind, selbst dann nicht, wenn man die Worte „im allgemeinen" ungebührlich eng faßt und für die Zusatzfunktionen φ_ν wirklich nur die allerharmlosesten zuläßt. Das wird zunächst in § 2 an einem Beispiel gezeigt werden. Sodann entsteht natürlich die Aufgabe, die falsche Vermutung durch einen richtigen Satz zu ersetzen. Es zeigt sich, daß man das über das System (1) Gesagte nur wenig zu modifizieren braucht, um eine genaue Übertragung auf (2) zu ermöglichen. Wenn man nämlich bei (1) noch die Voraussetzung hinzufügt, daß das *lineare* System

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{u=1}^{n} a_{\nu\mu}\, x_u + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

für beliebige stetige beschränkte Funktionen $\psi_\nu(t)$ immer wenigstens ein beschränktes Integral haben soll, so verliert die über (1) gemachte Aussage dadurch nichts an Tragweite. Denn diese Voraussetzung ist, wie sich leicht beweisen läßt, in dem Fall, den wir durch die Worte „im allgemeinen" gekennzeichnet haben, wenn also die Realteile aller charakteristischen Wurzeln von Null verschieden sind, stets von selbst erfüllt.

In dieser Form läßt sich nun die Sache auf das System (2) übertragen. Die obigen Vermutungen werden nämlich richtig, und man darf sogar die unerfreulichen Worte „im allgemeinen" dabei ganz streichen, wenn man noch die Voraussetzung hinzufügt, daß das *lineare* System

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

für beliebige stetige beschränkte Funktionen $\psi_\nu(t)$ immer wenigstens ein beschränktes Integral haben soll. Der Unterschied gegenüber dem Früheren ist aber, daß diese Voraussetzung jetzt nicht mehr von selbst erfüllt ist, sondern eine wesentlich neue Forderung darstellt. Die genau formulierten Sätze dieser Art sind als Teilresultate in den Sätzen des § 6 und § 7 enthalten.

Diese Sätze wären natürlich wertlos, wenn man bei einem vorgelegten System (2) wirklich erst prüfen müßte, ob das zugehörige System (4) für beliebige stetige beschränkte $\psi_\nu(t)$ immer ein beschränktes Integral hat; denn man kann nicht alle möglichen $\psi_\nu(t)$ durchprobieren. Aber die Antwort, ob es immer ein beschränktes Integral gibt, kann aus dem Verhalten der gegebenen Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ allein oder, was dasselbe sagt, aus den Integralen des *homogenen* Systems

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

erschlossen werden. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind für einen Spezialfall in Satz 1 niedergelegt, und in § 6 und § 7 zeigt es sich, daß der allgemeine Fall sich stets auf diesen Spezialfall transformieren läßt.

Wir werden aber in dieser Arbeit nicht nur solche Zusatzfunktionen φ_ν ins Auge fassen, die gegenüber den linearen Gliedern absolut sehr klein sind, sondern auch solche, die nur einer Beschränktheitsforderung genügen. Dann handelt es sich nicht um Integrale, die für $t \to \infty$ nach Null streben, sondern um *beschränkte* Integrale. Durch Mitbehandlung dieses Problems erhalten die Untersuchungen erst die wünschenswerte Abgeschlossenheit, indem die als hinreichend erkannten Bedingungen jetzt auch notwendig sind. Vgl. z. B. die Sätze 5 und 8.

§ 2.

Beispiel eines unerwarteten Verhaltens.

Das lineare System

$$\begin{cases} x_1' = -a x_1 & (a > 0), \\ x_2' = (\sin\log t + \cos\log t - 2a)\, x_2, \end{cases} \tag{5}$$

wo der Akzent die Ableitung nach t bedeutet, hat das allgemeine Integral

$$x_1 = C_1 e^{-at},$$
$$x_2 = C_2 e^{(\sin\log t - 2a)t}.$$

Wenn $2a < 1$ ist, hat nur eine einparametrige Schar von Integralen, nämlich die für $C_2 = 0$ entstehende, die Eigenschaft, daß

$$\lim_{t\to\infty}(|x_1| + |x_2|) = 0 \tag{6}$$

ist, und für diese Schar ist sogar

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|x_1|+|x_2|}{e^{-ct}} = 0, \tag{7}$$

wenn nur $c < a$ gewählt wird.

Wenn dagegen $2a > 1$ ist, gilt für *jedes* Integral die Beziehung (6), ja sogar (7), wenn nur $c < \mathrm{Min}(a, 2a-1)$ gewählt wird.

Nun betrachten wir das abgeänderte System

$$\begin{cases} x_1' = -a x_1, \\ x_2' = (\sin\log t + \cos\log t - 2a)\, x_2 + x_1^2. \end{cases} \tag{8}$$

Die Zusatzfunktionen 0 und x_1^2 werden für $|x_1| + |x_2| \to 0$ von zweiter Ordnung klein und lassen gewiß nichts an Einfachheit zu wünschen, so daß man für die Integrale von (8) das gleiche Verhalten wie bei dem System (5) erwarten sollte. Das allgemeine Integral von (8) ist aber

$$x_1 = C_1 e^{-at},$$

$$x_2 = e^{(\sin\log t - 2a)t}\left(C_2 + C_1^2\int_0^t e^{-\tau\sin\log\tau}\, d\tau\right).$$

Speziell für $t = e^{(2n+\frac{1}{2})\pi}$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, ist

$$e^{(\sin\log t - 2a)t} = e^{(1-2a)t},$$

und es gilt die Abschätzung

$$\int_0^t e^{-\tau\sin\log\tau}\, d\tau > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-\frac{2}{3}\pi}} e^{-\tau\sin\log\tau}\, d\tau > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-\frac{2}{3}\pi}} e^{\frac{1}{2}\tau}\, d\tau > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-\frac{2}{3}\pi}} e^{\frac{1}{2}te^{-\pi}}\, d\tau$$
$$= e^{\frac{1}{2}te^{-\pi}}\, t\,(e^{-\frac{2}{3}\pi} - e^{-\pi}).$$

Wenn daher $2a < 1$ ist, kann x_2 für $t \to \infty$ nie nach Null konvergieren, außer wenn C_1, C_2 beide verschwinden. Im Gegensatz zu dem System (5) gibt es also bei (8) kein Integral, das der Forderung (6) oder gar (7) genügt.

Wenn dagegen $2a > 1$, aber zugleich $2a < 1 + \frac{1}{2}e^{-\pi}$ ist, kann x_2 für $t \to \infty$ nur dann nach Null gehen, wenn $C_1 = 0$ ist, und in diesem Fall gilt auch wirklich die Beziehung (6) und sogar (7) für genügend kleines c. Im Gegensatz zu dem System (5) genügt also jetzt nicht jedes Integral (mit hinreichend kleinen $|x_\nu(0)|$) der Forderung (6), sondern nur einer einparametrigen Schar von Integralen kommt diese Eigenschaft zu.

§ 3.

Vorbereitende Sätze.

Vorbemerkung. In der ganzen Arbeit ist die unabhängig Variable t reell und durchläuft das unendliche Intervall $t \geqq 0$. Die vorkommenden Funktionen dürfen aber auch beliebige komplexe Werte annehmen, insbesondere sind für die Integrale der Differentialgleichungen komplexe Werte zugelassen. Die Ableitung nach t wird durch einen Akzent bezeichnet.

Wir betrachten zunächst das folgende spezielle System von linearen Differentialgleichungen

$$x'_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Es ist dadurch ausgezeichnet, daß die Koeffizienten $g_{\nu\mu}(t)$ für $\nu < \mu$ (d. h. oberhalb der Hauptdiagonale) gleich Null sind. Für jedes ν enthalten daher die ersten ν Gleichungen auch nur die ersten ν Unbekannten. Für ein solches System beweisen wir jetzt den

Satz 1. *Die gegebenen Funktionen*

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n)$$

seien für $t \geqq 0$ stetig und beschränkt. Notwendig und hinreichend dafür, daß dann das System (9) bei **jeder** *Wahl der stetigen beschränkten Funktionen $\omega_\nu(t)$ wenigstens ein beschränktes Integral hat, ist die folgende Eigenschaft der Funktionen $g_{\nu\nu}(t)$, wobei zur Abkürzung $\int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\, d\tau = G_\nu(t)$ gesetzt ist:*

Für jeden der Indizes $\nu = 1, \ldots, n$ ist ***entweder***

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} e^{G_\nu(t)} & \textit{beschränkt,} \\ e^{G_\nu(t)} \displaystyle\int_0^t \left| e^{-G_\nu(\tau)} \right| d\tau & \textit{beschränkt,} \end{cases}$$

oder aber

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} e^{G_\nu(t)} & \textit{nicht beschränkt,} \\ e^{G_\nu(t)} \displaystyle\int_t^\infty \left| e^{-G_\nu(\tau)} \right| d\tau & \textit{vorhanden und beschränkt.} \end{cases}$$

Man beachte dabei, daß die Bedingungen (A) und (B) für ein und denselben Index ν sich gegenseitig ausschließen.

Den Beweis von Satz 1 verbinden wir mit dem Beweis von

Satz 2. *Wenn das System (9) bei* **jeder** *Wahl der stetigen beschränkten Funktionen $\omega_\nu(t)$ wenigstens ein beschränktes Integral hat, wenn also die*

Bedingungen von Satz 1 *erfüllt sind, so gilt für jedes beschränkte Integral des homogenen Systems*

$$x'_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

die Beziehung

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Dem Beweis der beiden Sätze schicken wir einen Hilfssatz voraus, der auch später noch gute Dienste leisten wird.

Hilfssatz. *Ist* $G(t)$ *eine für* $t \geqq 0$ *stetige Funktion und sind die Funktionen*

$$e^{G(t)}, \qquad e^{G(t)} \int_0^t |e^{-G(\tau)}|\, d\tau$$

beschränkt, so ist $\lim\limits_{t\to\infty} e^{G(t)} = 0$.

In der Tat, wenn etwa

$$|e^{G(t)}| \leqq L_1, \qquad |e^{G(t)}| \int_0^t |e^{-G(\tau)}|\, d\tau \leqq L_2$$

ist, so hat man die Abschätzung

$$L_2 \geqq |e^{G(t)}| \int_0^t \frac{1}{L_1} d\tau = |e^{G(t)}| \frac{t}{L_1}.$$

Daher ist

$$|e^{G(t)}| \leqq \frac{L_1 L_2}{t},$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Nun wenden wir uns dem Beweis der beiden Sätze zu. Zunächst sei $n = 1$. Dann handelt es sich um die eine Differentialgleichung

$$x'_1 = g_{11}(t)\, x_1 + \omega_1(t) \tag{10}$$

mit dem allgemeinen Integral

$$x_1 = e^{G_1(t)} \left(c_1 + \int_0^t \omega_1(\tau)\, e^{-G_1(\tau)}\, d\tau \right), \tag{11}$$

wo $c_1 = x_1(0)$ eine willkürliche Konstante ist. Indem wir für $\omega_1(t)$ die spezielle Funktion

$$\omega_1(t) = \frac{|e^{-G_1(t)}|}{e^{-G_1(t)}}$$

setzen, die ja offenbar beschränkt, nämlich absolut gleich 1 ist, erhalten wir

$$x_1 = e^{G_1(t)} \left(c_1 + \int_0^t |e^{-G_1(\tau)}|\, d\tau \right). \tag{11a}$$

Wenn nun $e^{G_1(t)}$ beschränkt ist, dann muß, damit ein beschränktes Integral x_1 vorhanden ist, offenbar auch

$$e^{G_1(t)} \int_0^t \left| e^{-G_1(\tau)} \right| d\tau$$

beschränkt sein. Umgekehrt ist in diesem Fall das Integral (11a) und allgemeiner auch das Integral (11) für jede beschränkte Funktion $\omega_1(t)$ wirklich beschränkt, und zwar bei jeder Wahl von c_1.

Wenn dagegen $e^{G_1(t)}$ nicht beschränkt ist, so kann das Integral (11a) nur dann beschränkt sein, wenn für die Konstante c_1 der Wert

$$-\int_0^\infty \left| e^{-G_1(\tau)} \right| d\tau$$

gewählt wird. Dieses Integral muß also existieren, und die rechte Seite von (11a) geht dann über in

$$(12) \qquad - e^{G_1(t)} \int_t^\infty \left| e^{-G_1(\tau)} \right| d\tau.$$

Notwendig ist daher, daß diese Funktion beschränkt ist. Das ist aber auch hinreichend; denn das Integral (11) geht dann für den speziellen Wert

$$c_1 = -\int_0^\infty \omega_1(\tau)\, e^{-G_1(\tau)}\, d\tau$$

über in

$$x_1 = - e^{G_1(t)} \int_t^\infty \omega_1(\tau)\, e^{-G_1(\tau)}\, d\tau,$$

und diese Funktion ist wegen der Beschränktheit von (12) augenscheinlich für jede beschränkte Funktion $\omega_1(t)$ selbst beschränkt. Damit ist der Satz 1 für $n = 1$ bewiesen.

Wenn nun zunächst immer noch $n = 1$ und wenn die Bedingung von Satz 1 erfüllt ist, so folgt speziell für $\omega_1(t) = 0$ aus (11)

$$x_1 = c_1\, e^{G_1(t)}.$$

Wenn daher $e^{G_1(t)}$ nicht beschränkt ist, so kann x_1 nur für $c_1 = 0$ beschränkt sein, und dann ist dauernd $x_1 = 0$, also gewiß: $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$.

Wenn dagegen $e^{G_1(t)}$ beschränkt und folglich nach Voraussetzung (vgl. Bedingung (A) in Satz 1) auch

$$e^{G_1(t)} \int_0^t \left| e^{-G_1(\tau)} \right| d\tau$$

beschränkt ist, so ist nach dem Hilfssatz

$$\lim_{t\to\infty} e^{G_1(t)} = 0,$$

und daher wiederum: $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$. Damit ist auch der Satz 2 für $n = 1$ bewiesen.

Nunmehr beweisen wir die Sätze 1 und 2 durch vollständige Induktion, indem wir annehmen, daß beide bereits für das System von $n-1$ Gleichungen

$$x'_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{13}$$

gelten. Das System (9) geht daraus hervor, indem wir noch die n-te Gleichung mit der neuen Unbekannten x_n hinzufügen:

$$x'_n = g_{nn}(t)\, x_n + \sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(t)\, x_\mu + \omega_n(t). \tag{14}$$

Hieraus folgt, wenn $x_n(0) = c_n$ gesetzt wird,

$$x_n = e^{G_n(t)} \left(c_n + \int_0^t \left[\sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(\tau)\, x_\mu(\tau) + \omega_n(\tau) \right] e^{-G_n(\tau)}\, d\tau \right). \tag{15}$$

Wir wählen nun speziell

$$\omega_1(t) = 0, \ldots, \omega_{n-1}(t) = 0,$$

so daß dann für jedes beschränkte Integral x_ν, weil der Satz 2 für das System (13) bereits gelten soll, die Beziehung

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n-1} |x_\mu(t)| = 0 \tag{16}$$

gilt. Außerdem wählen wir für $\omega_n(t)$ die Funktion

$$\omega_n(t) = \frac{|e^{-G_n(t)}|}{e^{-G_n(t)}}.$$

Dann nimmt Formel (15) die Gestalt an

$$x_n = e^{G_n(t)} \left(c_n + \int_0^t [1 + H(\tau)]\, |e^{-G_n(\tau)}|\, d\tau \right), \tag{15a}$$

wobei zur Abkürzung

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(t)\, x_\mu(t)\, \frac{e^{-G_n(t)}}{|e^{-G_n(t)}|} = H(t) \tag{17}$$

gesetzt ist, so daß wegen (16)

$$\lim_{t \to \infty} H(t) = 0 \tag{18}$$

ist. Wenn daher $e^{G_n(t)}$ beschränkt ist, dann muß, damit ein beschränktes Integral x_n vorhanden ist, auch die Funktion

$$e^{G_n(t)} \int_0^t |e^{-G_n(\tau)}|\, d\tau$$

beschränkt sein. Umgekehrt ist in diesem Fall das Integral (15a) und allgemeiner auch das Integral (15) bei beschränkten $x_1, \ldots, x_{n-1}$ und beliebigem beschränkten $\omega_n(t)$ wirklich beschränkt, und zwar bei jeder Wahl von c_n.

Wenn dagegen $e^{G_n(t)}$ nicht beschränkt ist, so muß in (15a), damit x_n beschränkt ist, c_n einen ganz bestimmten Wert haben, und zwar geht dann die rechte Seite von (15a) über in

$$-e^{G_n(t)}\int_t^{\infty}[1+H(\tau)]\,|e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau.$$

Die Existenz und Beschränktheit dieser Funktion ist aber wegen (18) gleichbedeutend mit der Existenz und Beschränktheit von

$$e^{G_n(t)}\int_t^{\infty}|e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau. \tag{19}$$

Notwendig ist also, daß diese Funktion beschränkt ist. Das ist aber auch hinreichend; denn das Integral (15) geht dann für einen geeigneten Spezialwert c_n über in

$$x_n=-e^{G_n(t)}\int_t^{\infty}\Big[\sum_{\mu=1}^{n-1}g_{n\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau)+\omega_n(\tau)\Big]e^{-G_n(\tau)}\,d\tau,$$

und diese Funktion ist wegen der Beschränktheit von (19) augenscheinlich für beschränkte $x_1,\ldots,x_{n-1}$ und für ein beliebiges beschränktes $\omega_n(t)$ stets selbst beschränkt.

Nunmehr sei die Bedingung von Satz 1 erfüllt, und es seien alle $\omega_\nu(t)$ gleich Null. Dann gilt wieder die Formel (16) und folglich auch (18). Die Formel (15) geht aber jetzt über in

$$x_n=e^{G_n(t)}\Big(c_n+\int_0^{t}H(\tau)\,|e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau\Big), \tag{15b}$$

wo $H(t)$ wieder die Bedeutung (17) hat. Ist dann $e^{G_n(t)}$ nicht beschränkt, also nach Voraussetzung (vgl. Bedingung (B) in Satz 1) die Funktion (19) beschränkt, so muß in (15b), wenn x_n beschränkt sein soll, c_n einen ganz bestimmten Wert haben, und zwar geht dann (15b) über in

$$x_n=-e^{G_n(t)}\int_t^{\infty}H(\tau)\,|e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau.$$

Daraus folgt aber wegen (18) sogleich auch $\lim\limits_{t\to\infty}x_n(t)=0$.

Wenn dagegen $e^{G_n(t)}$ beschränkt und folglich nach Voraussetzung (vgl. Bedingung (A) in Satz 1) auch

$$e^{G_n(t)}\int_0^{t}|e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau$$

beschränkt ist, so ist nach dem Hilfssatz gewiß $\lim\limits_{t\to\infty}e^{G_n(t)}=0$. Aus diesem Grund und wegen (18) folgt aber aus (15b) wiederum $\lim\limits_{t\to\infty}x_n(t)=0$. Damit sind die beiden Sätze 1 und 2 vollständig bewiesen.

Eine wesentliche Ergänzung zu Satz 1 ist der

Satz 3. *Wenn die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind, so ist in dem allgemeinen beschränkten Integral des linearen Differentialgleichungssystems* (9) *die Anzahl der willkürlichen Konstanten stets so groß wie die Anzahl derjenigen Indizes* ν, *für welche die Bedingung* (A) *erfüllt ist; und zwar dürfen diejenigen Anfangswerte* $x_\nu(0) = c_\nu$ *willkürlich gewählt werden, für deren Index* ν *die Bedingung* (A) *erfüllt ist.*

Wenn insbesondere für jeden Index ν *die Bedingung* (A) *erfüllt ist, so ist jedes Integral beschränkt. Wenn dagegen für jeden Index* ν *die Bedingung* (B) *erfüllt ist, so gibt es nur ein einziges beschränktes Integral.*

Beweis. Wenn zunächst $n = 1$ ist, so handelt es sich wieder um die eine Differentialgleichung (10) mit dem allgemeinen Integral (11), wobei $c_1 = x_1(0)$ ist. Aus (11) erkennt man aber — und darauf ist auch schon oben hingewiesen worden — sogleich folgendes: Wenn die Bedingung (A) erfüllt, also $e^{G_1(t)}$ beschränkt ist, so ist x_1 bei jeder Wahl von c_1 beschränkt; wenn dagegen die Bedingung (B) erfüllt, also $e^{G_1(t)}$ nicht beschränkt ist, so ist x_1 nur bei eindeutig bestimmter Wahl von c_1 beschränkt. Damit ist der Satz 3 bereits für $n = 1$ bewiesen.

Den allgemeinen Beweis können wir wieder durch vollständige Induktion erbringen, indem wir annehmen, daß der Satz 3 für das System der $n-1$ Gleichungen (13) bereits gelte. Fügen wir dann wieder die n-te Gleichung (14) mit dem allgemeinen Integral (15) hinzu, wobei c_n die Bedeutung $x_n(0)$ hat, so können wir aus (15) folgendes entnehmen: Wenn für den Index $\nu = n$ die Bedingung (A) erfüllt, also $e^{G_n(t)}$ beschränkt ist, so ist x_n bei jeder Wahl von c_n beschränkt; wenn dagegen für $\nu = n$ die Bedingung (B) erfüllt, also $e^{G_n(t)}$ nicht beschränkt ist, so ist x_n nur bei eindeutig bestimmter Wahl von c_n beschränkt. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3 ist der

Satz 4. *Wenn die Bedingungen von Satz 1 in der Weise erfüllt sind, daß für* k *Indizes* ν *die Bedingung* (A) *und für die* $n-k$ *anderen Indizes* ν *die Bedingung* (B) *erfüllt ist, so hat das lineare homogene Differentialgleichungssystem*

$$x'_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

genau k *linear unabhängige beschränkte Integrale. Dabei darf* k *jede der Zahlen* $0, 1, \ldots, n$ *bedeuten. Der Fall* $k = 0$ *besagt natürlich, daß kein beschränktes Integral vorhanden ist außer dem trivialen* $x_\nu(t) = 0$.

§ 4.

Fall der Stabilität bei einem speziellen System.

Satz 5. *Die gegebenen Funktionen*

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n)$$

seien für $t \geqq 0$ *stetig und beschränkt. Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Differentialgleichungssystem*

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für jede beliebige Wahl der im Bereich

$$t \geqq 0, \quad x_\lambda \text{ beliebig} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

stetigen beschränkten Funktionen $\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ *nur beschränkte Integrale hat, darin, daß die* $2n$ *Funktionen*

$$e^{G_\nu(t)}, \quad e^{G_\nu(t)} \int_0^t \left| e^{-G_\nu(\tau)} \right| d\tau \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei $G_\nu(t) = \int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\, d\tau$ *ist, beschränkt sind.*

Wenn sie erfüllt ist und wenn dann die Funktionen χ_ν *in einem Bereich der Form*

$$t \geqq 0, \quad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

den weiteren Bedingungen

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu| \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

genügen, wo γ *eine hinreichend kleine (von* a *und den* $g_{\nu\mu}(t)$ *abhängende) Konstante ist, so ist für jedes Integral, dessen Anfangswerte* $x_\nu(0)$ *absolut hinreichend klein sind, dauernd* $|x_\nu(t)| \leqq a$, *und es gilt sogar die Beziehung*

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Daß die angegebene Bedingung notwendig ist, folgt unmittelbar aus den Sätzen 1 und 3. Daß sie hinreicht und daß auch die weiteren Behauptungen von Satz 5 zutreffen, wird bewiesen sein, wenn es gelingt, den nachstehenden schärferen Satz zu beweisen.

Satz 6. *Die Funktionen*

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n),$$

$$\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

seien im Bereich

$$t \geqq 0, \quad |x_\lambda| \leqq b\alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

stetig, und es sei, wenn $\int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\,d\tau = G_\nu(t)$ *gesetzt wird,*

$$|g_{\nu\mu}(t)| \leqq K,$$

$$|e^{G_\nu(t)}| \leqq L_1 \quad (\textit{wegen } G_\nu(0) = 0 \textit{ also } L_1 \geqq 1),$$

$$|e^{G_\nu(t)}| \int_0^t |e^{-G_\nu(\tau)}|\,d\tau \leqq L_2,$$

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{K b \alpha^n}{1-\alpha},$$

wobei b, α, K, L_1, L_2 *positive Konstanten sind, für die*

$$\alpha < 1, \quad \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} < 1$$

ist. Bedeutet dann c eine positive Zahl derart, daß

$$\frac{c}{b} L_1 + \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} = \vartheta < 1,$$

also wegen $L_1 \geqq 1$ *gewiß* $c < \vartheta b < b$ *ist, so ist jedes Integral des Differentialgleichungssystems*

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ *den Bedingungen*

$$|x_\nu(0)| \leqq c\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

genügen, für $t \geqq 0$ *dauernd vorhanden und genügt den Ungleichungen*

$$|x_\nu(t)| < b\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Wenn die Funktionen χ_ν *noch die weiteren Bedingungen*

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{1}{n} \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu| \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

erfüllen, so ist außerdem

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Um den Satz 6 zu beweisen, schreiben wir das darin auftretende Differentialgleichungssystem in der Form[2])

$$x_\nu' = g_{\nu\nu} x_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu} x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

---

[2]) Unter einer Summe der Form $\sum_{\mu=1}^{\nu-1}$ ist, falls $\nu = 1$ ist, stets die Null zu verstehen.

Hieraus folgt sogleich

$$(20)\quad \begin{cases} x_\nu(t) = e^{G_\nu(t)}\left(x_\nu(0) + \int\limits_0^t \Phi_\nu(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau\right), \\ \Phi_\nu(\tau) = \sum\limits_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(\tau)\, x_\mu(\tau) + \chi_\nu(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)). \end{cases}$$

Wegen $|x_\nu(0)| \leqq c\alpha^{n-\nu}$ und $c < b$ gelten die zu beweisenden Ungleichungen

$$|x_\nu(t)| < b\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

mindestens für hinreichend kleine Werte von t. Solange sie aber gelten, ist auf Grund der im ersten Teil von Satz 6 geforderten Ungleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$$
$$\leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K b\alpha^{n-\mu} + \frac{K b \alpha^n}{1-\alpha} = \frac{K b \alpha}{1-\alpha}\, \alpha^{n-\nu}$$

und aus (20) ergibt sich dann die Abschätzung

$$|x_\nu(t)| \leqq c\alpha^{n-\nu} L_1 + \frac{K b \alpha}{1-\alpha}\, \alpha^{n-\nu} L_2 = \vartheta\, b\alpha^{n-\nu}$$

Solange also $|x_\nu(t)| < b\alpha^{n-\nu}$ ist, gilt sogar die schärfere Ungleichung $|x_\nu(t)| \leqq \vartheta\, b\alpha^{n-\nu}$. Daraus folgt aber, daß das Integral $x_\nu(t)$ bis zu beliebig großen Werten von t fortsetzbar ist und daß dabei stets $|x_\nu(t)| \leqq \vartheta\, b\alpha^{n-\nu}$ bleibt. Damit ist der erste Teil von Satz 6 bereits bewiesen.

Nun sei B eine positive Zahl derart, daß

$$(21)\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}}\, |x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist. Wenn dann die χ_ν auch den im zweiten Teil von Satz 6 geforderten Ungleichungen genügen, so ist für genügend große Werte von t, etwa für $t \geqq t_0$,

$$(22)\qquad |x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$(23)\qquad |\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| < \frac{1}{n}\, \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu B \alpha^{n-\mu} = \frac{K B \alpha^n}{1-\alpha} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

In Formel (20) zerlegen wir nun das Integral von 0 bis t in

$$\int\limits_0^t = \int\limits_0^{t_0} + \int\limits_{t_0}^t .$$

Das erste Integral der rechten Seite ist einfach eine Konstante A_ν. Zur Abschätzung des zweiten können wir die für $t \geqq t_0$ gültigen Formeln (22), (23) benutzen. Hiernach ergibt sich für $t \geqq t_0$ aus (20) die Abschätzung

$$|x_\nu(t)| \leqq |e^{G_\nu(t)}| \cdot |x_\nu(0) + A_\nu| + \left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} K B \alpha^{n-\mu} + \frac{K B \alpha^n}{1-\alpha}\right] L_2$$
$$= |e^{G_\nu(t)}| \cdot |x_\nu(0) + A_\nu| + \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} B \alpha^{n-\nu}.$$

Nach dem Hilfssatz auf S. 708 ist aber auf Grund der Voraussetzungen von Satz 6

$$\lim_{t \to \infty} e^{G_\nu(t)} = 0,$$

und daher folgt aus der vorigen Ungleichung sogleich

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} |x_\nu(t)| \leqq \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} B \alpha^{n-\nu} < \vartheta B \alpha^{n-\nu} \tag{24}$$

Aus einer Ungleichung der Form (21) kann also allemal auf (24) geschlossen werden. Indem man diesen Schluß wiederholt anwendet, ergibt sich auch

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} |x_\nu(t)| < \vartheta^k B \alpha^{n-\nu},$$

wo k beliebig groß sein darf. Daher ist

$$\lim_{t \to \infty} x_\nu(t) = 0,$$

womit auch der zweite Teil von Satz 6 bewiesen ist.

§ 5.

Fall der Instabilität und bedingten Stabilität bei einem speziellen System.

Satz 7. *In dem Differentialgleichungssystem*

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

mögen die Funktionen

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n),$$

$$\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

im Bereich

$$t \geqq 0, \quad |x_\lambda| \leqq b \alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

stetig sein und den Ungleichungen genügen:

$$|g_{\nu\mu}(t)| \leqq K,$$

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{K b \alpha^n}{1-\alpha},$$

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \chi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*)| \leqq \frac{1}{n} \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu - x_\mu^*|.$$

Ferner sei, wenn $\int\limits_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\,d\tau = G_\nu(t)$ *gesetzt wird, für jeden einzelnen Index* ν *entweder*

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} |e^{G_\nu(t)}| \leqq L_1, \\ |e^{G_\nu(t)}| \int\limits_0^t |e^{-G_\nu(\tau)}|\,d\tau \leqq L_2 \end{cases}$$

oder aber

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} |e^{G_\nu(t)}| \text{ nicht beschränkt}, \\ |e^{G_\nu(t)}| \int\limits_t^\infty |e^{-G_\nu(\tau)}|\,d\tau \leqq L_2. \end{cases}$$

Die Indizes der ersten Art mögen kurz mit ν_A, *die der zweiten Art mit* ν_B *bezeichnet werden. Dabei seien* b, α, K, L_1, L_2 *positive Konstanten*[3], *die den Ungleichungen genügen:*

$$\alpha < 1, \qquad \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} < 1.$$

Bedeutet dann c *eine positive Zahl derart, daß* $c \leqq b$ *und, falls es unter den Indizes* ν *wenigstens ein* ν_A *gibt, auch*

$$\frac{c}{b} L_1 + \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} \leqq 1$$

ist, so hat das gegebene Differentialgleichungssystem wenigstens ein beschränktes Integral; und zwar gibt es, wenn man $x_\nu(0) = c_\nu$ *für jedes* $\nu = \nu_A$ *im Bereich* $|c_\nu| \leqq c\,\alpha^{n-\nu}$ *willkürlich vorgibt, genau ein Integral, für welches dauernd* $|x_\nu(t)| \leqq b\,\alpha^{n-\nu}$ *für alle* ν *ist.*

Wenn für alle ν *außerdem* $\chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ *ist, so gilt für die angegebenen Integrale noch die weitere Beziehung*

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Nach diesem Satz ist, falls es kein ν_A gibt, auch kein $x_\nu(0)$ willkürlich; es gibt dann nur ein einziges Integral, für welches dauernd $|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$ bleibt, und dieses ist im Fall $\chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ natürlich das Integral $x_\nu(t) = 0$. Das ist also der Fall der vollkommenen Instabilität. Falls es kein ν_B gibt, sind alle $x_\nu(0)$ willkürlich wählbar; das ist der bereits im vorigen Paragraphen unter etwas allgemeineren Voraussetzungen behandelte Fall der Stabilität. Falls es unter den Indizes ν sowohl ν_A als auch ν_B gibt, liegt sogenannte bedingte Stabilität vor (unvollkommene Instabilität).

[3]) Die Konstante L_1 kommt natürlich nur dann vor, wenn es unter den Indizes ν mindestens ein ν_A gibt.

Um Satz 7 zu beweisen, schreiben wir das darin auftretende Differentialgleichungssystem wieder in der Form

$$(25)\qquad x'_\nu = g_{\nu\nu}(t)\,x_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)\,x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

woraus folgt:

$$(26)\qquad \begin{cases} x_\nu(t) = e^{G_\nu(t)} \int \Phi_\nu(t)\, e^{-G_\nu(t)}\, dt, \\ \Phi_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)). \end{cases}$$

Dabei bestimmen sich die Integrationskonstanten für $\nu = \nu_B$ eindeutig aus der Forderung, daß x_ν für $t \to \infty$ beschränkt bleiben soll, und für $\nu = \nu_A$ aus der Nebenbedingung $x_\nu(0) = c_\nu$. Hiernach ist

$$(27)\qquad \begin{cases} x_\nu(t) = e^{G_\nu(t)} \left(c_\nu + \int_0^t \Phi_\nu(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau \right) & \text{für } \nu = \nu_A, \\ x_\nu(t) = e^{G_\nu(t)} \int_\infty^t \Phi_\nu(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau & \text{für } \nu = \nu_B. \end{cases}$$

Umgekehrt ergibt sich aus (27) auch rückwärts wieder (25) sowie die Nebenbedingung $x_\nu(0) = c_\nu$ für $\nu = \nu_A$. Es genügt daher zu beweisen, daß das Integralgleichungssystem (27) genau eine Lösung x_ν mit den in Satz 7 behaupteten Eigenschaften hat.

Wir zeigen zuerst, daß es *höchstens eine* Lösung gibt, für die dauernd $|x_\nu(t)| \leqq b\,\alpha^{n-\nu}$ ist. Sind x_ν, x_ν^* zwei solche Lösungen und setzt man sie in (27) ein, so ergibt sich durch Subtraktion der entstehenden Gleichungen:

$$(28)\qquad x_\nu(t) - x_\nu^*(t) = e^{G_\nu(t)} \int^t [\Phi_\nu(\tau) - \Phi_\nu^*(\tau)]\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau,$$

wo Φ_ν^* eine analoge Bedeutung wie Φ_ν hat und wo die untere Integralgrenze gleich 0 für $\nu = \nu_A$ und gleich ∞ für $\nu = \nu_B$ ist. Nun sind wegen $|x_\nu| \leqq b\,\alpha^{n-\nu}$, $|x_\nu^*| \leqq b\,\alpha^{n-\nu}$ die Ungleichungen

$$(29)\qquad |x_\nu(t) - x_\nu^*(t)| \leqq A\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für eine gewisse Zahl A sicher richtig. Wenn sie aber für einen gewissen Wert von A gelten, so ist nach den in Satz 7 gemachten Voraussetzungen auch

$$\begin{aligned} &|\Phi_\nu(t) - \Phi_\nu^*(t)| \\ &= \left| \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)\,(x_\mu - x_\mu^*) + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \chi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*) \right| \\ &\leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K A\,\alpha^{n-\mu} + \frac{1}{n}\,\frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu A\,\alpha^{n-\mu} \\ &= K A\,\frac{\alpha - \alpha^\nu}{1-\alpha}\,\alpha^{n-\nu} + \frac{K A\,\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{K A\,\alpha}{1-\alpha}\,\alpha^{n-\nu}, \end{aligned}$$

und aus (28) ergibt sich dann die Abschätzung

$$|x_\nu(t) - x_\nu^*(t)| \leqq \frac{KA\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu} L_2 = \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} A\alpha^{n-\nu}.$$

Die Ungleichungen (29) bleiben also auch richtig, wenn man die Konstante A durch die nach Voraussetzung kleinere Konstante $\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}A$ ersetzt. Durch wiederholte Anwendung dieses Prozesses kann man die Konstante A beliebig klein machen; aus (29) folgt dann aber

$$x_\nu(t) - x_\nu^*(t) = 0,$$

so daß die Lösungen x_ν und x_ν^* in der Tat zusammenfallen.

Um jetzt zu zeigen, daß das System (27) auch wirklich eine Lösung der verlangten Art hat, wenden wir sukzessive Näherungen an, indem wir setzen:

$$(30)\quad \begin{cases} x_{\nu 0}(t) \quad = 0, & \\ x_{\nu,k+1}(t) = e^{G_\nu(t)}\left(c_\nu + \int\limits_0^t \Phi_{\nu k}(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau\right) & \text{für } \nu = \nu_A, \\ x_{\nu,k+1}(t) = e^{G_\nu(t)} \int\limits_\infty^t \Phi_{\nu k}(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau & \text{für } \nu = \nu_B, \end{cases}$$

wobei natürlich analog zu (26)

$$(31)\qquad \Phi_{\nu k}(\tau) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(\tau)\, x_{\mu k}(\tau) + \chi_\nu(\tau, x_{1k}(\tau), \ldots, x_{nk}(\tau))$$

ist. Man sieht leicht, daß die Funktionswerte von $|x_{\mu k}(t)|$ stets $\leqq b\alpha^{n-\mu}$ sind, also im Definitionsbereich der Funktionen χ_ν bleiben, so daß die Funktionen $x_{\nu,k+1}(t)$ wirklich sukzessive gebildet werden können. Denn jedenfalls trifft das für $k = 0$ zu. Wenn es aber für einen gewissen Wert k zutrifft, so folgt zunächst aus (31)

$$|\Phi_{\nu k}(\tau)| \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} Kb\alpha^{n-\mu} + \frac{Kb\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu}.$$

und daher aus (30) für $\nu = \nu_A$:

$$|x_{\nu,k+1}(t)| \leqq c\alpha^{n-\nu} L_1 + \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu} L_2 = \left(cL_1 + \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}b\right)\alpha^{n-\nu} \leqq b\alpha^{n-\nu}$$

und noch einfacher für $\nu = \nu_B$:

$$|x_{\nu,k+1}(t)| \leqq \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu} L_2 < b\alpha^{n-\nu}.$$

Die Funktionen $x_{\nu k}(t)$ können also wirklich für alle k gebildet werden, und es ist

$$(32)\qquad |x_{\nu k}(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Nun zeigen wir weiter, daß

$$(33) \qquad |x_{\nu k}(t) - x_{\nu, k-1}(t)| \leqq \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} b\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist. Da $x_{\nu 0}(t) = 0$ ist, trifft das nach (32) jedenfalls für $k = 1$ zu. Wenn aber die Formel (33) für einen gewissen Wert von k gilt, so ist nach (31) und auf Grund der in Satz 7 gemachten Voraussetzungen

$$\begin{aligned} &|\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_{\nu, k-1}(\tau)| \\ &\leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} b\,\alpha^{n-\mu} + \frac{1}{n}\,\frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu} \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} b\,\alpha^{n-\mu} \\ &= K b \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} \left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha^{n-\mu} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) = K b \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} \frac{\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Daher folgt aus (30) sowohl für $\nu = \nu_A$ als für $\nu = \nu_B$:

$$\begin{aligned} |x_{\nu, k+1}(t) - x_{\nu k}(t)| &= \left| e^{G_\nu(t)} \int_{0,\infty}^{t} [\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_{\nu, k-1}(\tau)]\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau \right| \\ &\leqq K b \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} \frac{\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha} L_2 = \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k} b\,\alpha^{n-\nu}, \end{aligned}$$

womit die Formel (33) allgemein bewiesen ist. Aus (33) folgt aber sogleich, daß die Grenzwerte

$$(34) \qquad \lim_{k \to \infty} x_{\nu k}(t) = x_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für $t \geqq 0$ gleichmäßig vorhanden und also stetige Funktionen von t sind Wegen (32) ist dann auch

$$(35) \qquad |x_\nu(t)| \leqq b\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Die Funktionen $x_\nu(t)$ bleiben also absolut unter der in Satz 7 behaupteten Schranke. Sie genügen aber auch dem Gleichungssystem (27). Das ergibt sich leicht, indem man in (30) zur Grenze $k \to \infty$ übergeht, wobei nur die Formel

$$\lim_{k \to \infty} e^{G_\nu(t)} \int_{\infty}^{t} \Phi_{\nu k}(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau = e^{G_\nu(t)} \int_{\infty}^{t} \Phi_\nu(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau \quad \text{für} \quad \nu = \nu_B$$

wegen des unendlichen Integrationsintervalles einer genaueren Begründung bedarf. Nun folgt aber aus (33) und (34) leicht

$$|x_{\nu k}(t) - x_\nu(t)| \leqq \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^{k} b\,\alpha^{n-\nu} \frac{1}{1 - \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}}.$$

Daraus ergibt sich zunächst die Abschätzung

$$|\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_\nu(\tau)| \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{b\,\alpha^{n-\mu}}{1-\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}} + \frac{1}{n}\,\frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{b\,\alpha^{n-\mu}}{1-\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}}$$

$$= \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{K b}{1-\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}} \left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha^{n-\mu} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^k \cdot \frac{K b\,\alpha}{1-\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{\alpha^{n-\nu}}{1-\alpha},$$

und folglich ist für $\nu = \nu_B$

$$\left| e^{G_\nu(t)} \int_\infty^t [\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_\nu(\tau)]\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau \right| \leqq \left(\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}\right)^k \cdot \frac{K b\,\alpha}{1-\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{\alpha^{n-\nu}}{1-\alpha} \cdot L_2,$$

woraus die zu beweisende Limesformel unmittelbar hervorgeht.

Damit ist nun Satz 7 bewiesen, abgesehen von der Behauptung, daß für

$$(36) \qquad \chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

stets $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0$ ist. Um auch diese als richtig zu erkennen, bemerken wir zunächst, daß aus (36) auf Grund der andern in Satz 7 in bezug auf χ_ν gemachten Voraussetzungen folgt:

$$(37) \qquad |\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{1}{n}\,\frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu|.$$

Nun sei B eine positive Zahl derart, daß

$$(38) \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} |x_\nu(t)| < B\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist. Für genügend große Werte von t ist dann

$$|x_\nu(t)| < B\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und folglich mit Rücksicht auf (37) auch

$$|\chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))| < \frac{1}{n}\,\frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu B\,\alpha^{n-\mu} = \frac{K B\,\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Nach der in (26) gegebenen Definition von $\Phi_\nu(t)$ ist daher für genügend große Werte von t

$$|\Phi_\nu(t)| < \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K B\,\alpha^{n-\mu} + \frac{K B\,\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{K B\,\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha}.$$

Folglich nach (27) zunächst für $\nu = \nu_B$

$$|x_\nu(t)| < \frac{K B \alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha} L_2 = \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} B \alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = \nu_B)$$

und analog für $\nu = \nu_A$, weil dann nach dem Hilfssatz auf Seite 708 gewiß $\lim\limits_{t\to\infty} e^{G_\nu(t)} = 0$ ist,

$$|x_\nu(t)| < \varepsilon + \frac{K B \alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha} L_2 = \varepsilon + \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} B \alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = \nu_A),$$

wo ε beliebig klein sein darf, wenn nur t genügend groß ist. Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt aber sowohl für $\nu = \nu_B$ als auch für $\nu = \nu_A$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x_\nu(t)| \leqq \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} B \alpha^{n-\nu} < \sqrt{\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}} B \alpha^{n-\nu}.$$

Die Ungleichung (38) bleibt daher richtig, wenn man B durch die kleinere Zahl $\sqrt{\frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha}} B$ ersetzt. Durch wiederholte Anwendung dieses Prozesses kann man B beliebig klein machen, woraus folgt:

$$\lim_{t\to\infty} x_\nu(t) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

W. z. b. w.

§ 6.

Fall der Stabilität bei dem allgemeinen System.

Nunmehr sind wir in der Lage, auch das allgemeine Differentialgleichungssystem (2) der Einleitung durch Zurückführung auf das in § 4 und § 5 behandelte spezielle System zu erledigen.

Satz 8. *Die gegebenen Funktionen*

$$f_{\nu\mu}(t) \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, n)$$

seien für $t \geqq 0$ stetig und beschränkt. Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Differentialgleichungssystem

$$\text{(I)} \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für jede beliebige Wahl der im Bereich

$$t \geqq 0, \quad x_\lambda \text{ beliebig} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

stetigen beschränkten Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ nur beschränkte Integrale hat, darin, daß das lineare System

$$\text{(II)} \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für beliebige stetige beschränkte $\psi_\nu(t)$ stets lauter beschränkte Integrale hat.

Wenn sie erfüllt ist und wenn dann die Funktionen φ_ν *in einem Bereich der Form*

$$t \geqq 0, \qquad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

den weiteren Bedingungen

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu| \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

genügen, wo γ *eine hinreichend kleine (nur von* a *und den Funktionen* $f_{\nu\mu}(t)$ *abhängende) Konstante ist, so gelten für jedes Integral, dessen Anfangswerte* $x_\nu(0)$ *absolut hinreichend klein sind, sogar die Beziehungen*

$$|x_\nu(t)| \leqq a \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Beweis[4]). Wir bezeichnen die Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{11} \cdots f_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1} \cdots f_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) \ldots f_{1n}(t) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n1}(t) \ldots f_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

mit F. Dann gibt es[5]) eine beschränkte Matrix (d. h. Matrix, deren Elemente beschränkte stetige Funktionen von t sind)

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \ldots p_{1n}(t) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_{n1}(t) \ldots p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

mit beschränkter Reziproken

$$P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} q_{11} \cdots q_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_{n1} \cdots q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}(t) \ldots q_{1n}(t) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_{n1}(t) \ldots q_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

[4]) Der erste Teil des Satzes ließe sich einfacher beweisen, indem man auf Grund der Beschränktheit von φ_ν zuerst zeigt, daß jedes Integral von (I) in jedem beliebig großen *endlichen* Intervall $0 \leqq t \leqq T$ beschränkt ist und infolgedessen im Endlichen nie zu existieren aufhört. Wenn man dann ein solches für $t \geqq 0$ dauernd existierendes Integral x_ν in (I) einsetzt, so geht φ_ν in eine beschränkte Funktion ψ_ν von t allein über und, da jedes Integral von (II) beschränkt ist, bleibt x_ν beschränkt. — Der zweite für die Stabilität wesentlichere Teil des Satzes dürfte sich aber kaum auf so einfache Art beweisen lassen. Auch für den ersten Teil ist der Beweis des Textes deshalb vorzuziehen, weil nur er ein Mittel an die Hand gibt, das Erfülltsein der Voraussetzung, daß das System II stets ein beschränktes Integral hat, aus den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ allein zu erkennen.

[5]) Das ist bewiesen in der im gleichen Band erschienenen Arbeit des Verfassers: Über eine Matrixtransformation, S. 465—473.

und beschränkter Ableitung

$$P' = \begin{pmatrix} p'_{11} & \cdots & p'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p'_{n1} & \cdots & p'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{11}(t) & \cdots & p'_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p'_{n1}(t) & \cdots & p'_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

derart, daß die (natürlich wieder beschränkte) Matrix $(PF + P')Q = G$ oberhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen enthält:

$$(PF + P')Q = G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1}(t) & g_{n2}(t) & \cdots & g_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Führen wir nun vermöge der Transformation

$$(39)\qquad \begin{cases} y_\nu = \sum\limits_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t)\, x_\mu & (\nu = 1, \ldots, n), \\ x_\nu = \sum\limits_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t)\, y_\mu & (\nu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

neue Unbekannte $y_1, \ldots, y_n$ ein, so transformiert sich das Differentialgleichungssystem (I) in

$$(\mathrm{Ia})\qquad y'_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu + \chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n),$$

wobei

$$(40)\qquad \begin{cases} \chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n) = \sum\limits_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t)\, \varphi_\mu(t, x_1, \ldots, x_n) & (\nu = 1, \ldots, n), \\ \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t)\, \chi_\mu(t, y_1, \ldots, y_n) & (\nu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

ist. Analog geht das System (II) über in

$$(\mathrm{IIa})\qquad y'_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei

$$(41)\qquad \begin{cases} \omega_\nu(t) = \sum\limits_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t)\, \psi_\mu(t) & (\nu = 1, \ldots, n), \\ \psi_\nu(t) = \sum\limits_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t)\, \omega_\mu(t) & (\nu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

ist. Die Forderung, daß das System (I) für beliebige stetige beschränkte $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ lauter beschränkte Integrale haben soll, ist daher gleichbedeutend mit der Forderung, daß das System (Ia) für beliebige stetige beschränkte $\chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ lauter beschränkte Integrale haben soll.

Letzteres trifft nach Satz 5 dann und nur dann zu, wenn die $2n$ Funktionen

$$(42) \qquad e^{G_\nu(t)}, \quad e^{G_\nu(t)}\int_0^t |e^{-G_\nu(\tau)}|\,d\tau \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei $G_\nu(t) = \int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\,d\tau$ ist, beschränkt sind. Nach Satz 3 ist das aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das lineare System (IIa) für beliebige stetige beschränkte $\omega_\nu(t)$ nur beschränkte Integrale hat, und damit ist offenbar gleichbedeutend, daß das lineare System (II) für beliebige stetige beschränkte $\psi_\nu(t)$ nur beschränkte Integrale hat[6]).

Damit ist der erste Teil von Satz 8 bewiesen, der zweite Teil ergibt sich alsdann vermöge der Transformation (39) unmittelbar aus dem zweiten Teil von Satz 5.

§ 7.

Fall der Instabilität und bedingten Stabilität bei dem allgemeinen System.

Satz 9. *In dem Differentialgleichungssystem*

$$(\mathrm{I}) \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\,x_\mu + \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

seien die Funktionen

$$f_{\nu\mu}(t) \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, n),$$
$$\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

im Bereich

$$t \geqq 0, \quad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

stetig und beschränkt. Speziell die $f_{\nu\mu}(t)$ seien so beschaffen, daß das lineare inhomogene System

$$(\mathrm{II}) \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\,x_\mu + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für beliebige stetige beschränkte Funktionen $\psi_\nu(t)$ stets wenigstens ein beschränktes Integral hat und daß das homogene System

$$(\mathrm{III}) \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\,x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

genau k linear unabhängige beschränkte Integrale hat $(k \geqq 0,\ k \leqq n)$.

---

[6]) Die Matrix P kann auf unendlich viele Arten gewählt werden. Demgemäß ergeben sich auch für die Matrix G unendlich viele Möglichkeiten, wobei die Funktionen (42) andere werden können. Wenn sie aber bei einer bestimmten Wahl von P sämtlich beschränkt sind, so müssen sie bei jeder zulässigen Wahl von P beschränkt sein, so daß diese Beschränktheit eine von P unabhängige invariante Eigenschaft ist. Denn diese Beschränktheit ist ja die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das von P ganz unabhängige System (II) lauter beschränkte Integrale hat.

Wenn dann die Funktionen φ_ν den weiteren Bedingungen genügen

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma_1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*)| \leqq \gamma_2 \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu - x_\mu^*| \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wo γ_1, γ_2 zwei hinreichend kleine (nur von a und den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ abhängende) positive Konstanten sind, so bilden diejenigen Integrale von (I), für die dauernd $|x_\nu(t)| \leqq a$ bleibt, eine Schar mit genau k willkürlichen Konstanten; und zwar kann man k linear unabhängige Verbindungen der Anfangswerte

$$\sum_{\mu=1}^{n} A_{\varkappa\mu} x_\mu(0) = \alpha_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

in einem hinreichend kleinen Bereich $|\alpha_\varkappa| \leqq c_\varkappa$ willkürlich wählen[7]*), wodurch das betreffende Integral dann eindeutig bestimmt ist.*

Wenn für alle ν außerdem $\varphi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ ist, so ist für diese Integrale sogar

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Beweis. Genau wie im vorigen Paragraphen wenden wir wieder die Transformation (39) an. Die Differentialgleichungssysteme (I), (II), (III) gehen dadurch über in bzw.

$$\text{(Ia)} \qquad y_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu + \chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$\text{(IIa)} \qquad y_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$\text{(IIIa)} \qquad y_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei die Funktionen χ_ν, ω_ν wieder durch die Gleichungen (40), (41) bestimmt sind.

Die in Satz 9 über die Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ gemachten Voraussetzungen sind dann gleichbedeutend damit, daß das System (IIa) für beliebige stetige beschränkte $\omega_\nu(t)$ stets ein beschränktes Integral hat und daß das System (IIIa) genau k linear unabhängige beschränkte Integrale hat. Nach Satz 4 ist also, wenn wieder $\int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\, d\tau = G_\nu(t)$ gesetzt wird, für genau k Indizes ν

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} e^{G_\nu(t)} & \text{beschränkt,} \\ e^{G_\nu(t)} \int_0^t |e^{-G_\nu(\tau)}|\, d\tau & \text{beschränkt,} \end{cases}$$

[7]) Im Falle $k = 0$, wenn also das System (III) kein beschränktes Integral außer dem trivialen $x_\nu(t) = 0$ hat, soll das besagen, daß es nur ein einziges Integral der verlangten Art gibt, so daß also die Anfangswerte $x_\nu(0)$ völlig eindeutig sind.

und für die andern $n-k$ Indizes ν ist

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{array}{rl} e^{G_\nu(t)} & \text{nicht beschränkt,} \\ e^{G_\nu(t)} \int\limits_t^\infty \left| e^{-G_\nu(\tau)} \right| d\tau & \text{vorhanden und beschränkt}^{8)}. \end{array} \right.$$

Wir bezeichnen die k Indizes ν der ersten Art wie in Satz 7 mit ν_A, die $n-k$ andern mit ν_B.

Durch die Transformation (39) geht der Bereich

$$(43) \qquad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, \ldots, n),$$

in dem die Funktionen φ_ν gegeben sind, über in einen mit t veränderlichen Bereich $\mathfrak{B}$ für die y_λ, der jedenfalls, wenn α irgend eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet, einen von t unabhängigen Bereich der Gestalt

$$(44) \qquad |y_\lambda| \leqq b_0 \alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

als Teilbereich umfaßt und andererseits auch ganz in einem ebenfalls von t unabhängigen Bereich

$$(45) \qquad |y_\lambda| \leqq b_1 \alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

enthalten ist. Die Zahl α wählen wir, um Satz 7 anwenden zu können, so, daß mit Benutzung der dortigen Bezeichnungen

$$\alpha < 1, \quad \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} < 1$$

ist, wobei K und L_2 gewisse obere Schranken sind, die nur von den $g_{\nu\mu}(t)$, also letzten Endes nur von den $f_{\nu\mu}(t)$ abhängen. Daher ist die Wahl von α allein durch die Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ bedingt. Nachdem wir α dementsprechend gewählt haben, sind dann die Konstanten b_0, b_1 in (44), (45) nur von a und den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ abhängig, und natürlich ist $b_0 \leqq b_1$. Die Funktionen χ_ν sind dann zunächst nur im Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben und stetig. Um sie in den ganzen Bereich (45) passend fortzusetzen, setzen wir die ursprünglich gegebenen Funktionen φ_ν aus dem Bereich (43) hinaus beliebig weit fort durch die Formeln

$$\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_\nu(t, \vartheta_1 x_1, \ldots, \vartheta_n x_n),$$

$$\vartheta_\mu = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } |x_\mu| \leqq a, \\ \dfrac{a}{|x_\mu|} & \text{für } |x_\mu| > a. \end{array} \right.$$

---

[8]) Analog wie bei der Fußnote [6]) Seite 725 kann eine Matrix P der verlangten Art wieder auf unendlich viele Arten gewählt werden, und die Funktionen G_ν können dabei andere werden. Wenn aber bei einer bestimmten Wahl von P für k Indizes ν die Bedingung (A) und für $n-k$ Indizes ν die Bedingung (B) erfüllt ist, so muß das bei jeder zulässigen Wahl von P ebenso sein. Jedoch brauchen die k Indizes, für welche die Bedingung (A) erfüllt ist, nicht immer die gleichen zu sein; nur ihre Anzahl k ist invariant.

Es ist leicht zu sehen, daß die so fortgesetzten Funktionen φ_ν überall stetig sind und daß auch die zunächst nur im Bereich (43) geforderten Ungleichungen

$$(46)\quad \begin{cases} |\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma_1, \\ |\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*)| \leqq \gamma_2 \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu - x_\mu^*| \end{cases}$$

überall in Geltung bleiben.

Die vermöge (39) und (40) aus den Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ entstehenden Funktionen $\chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ sind dann ebenfalls überall, also auch im ganzen Bereich (45) stetig; in dem Teilbereich $\mathfrak{B}$, also erst recht im Bereich (44), decken sie sich mit den früheren Funktionen χ_ν, von denen sie also stetige Fortsetzungen sind. Aus (39), (40), (46) folgt dann aber weiter, wenn γ_1, γ_2 hinreichend klein (nur von a und den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ abhängig) gewählt werden,

$$|\chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \frac{K b_0 \alpha^n}{1-\alpha},$$

$$|\chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n) - \chi_\nu(t, y_1^*, \ldots, y_n^*)| \leqq \frac{1}{n} \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |y_\mu - y_\mu^*|,$$

wobei K wieder die vorhin erwähnte obere Schranke bedeuten soll.

Nunmehr kann man auf das System (Ia) sowohl für den Bereich (45) als auch für den Bereich (44) den Satz 7 anwenden. Hiernach gibt es, wenn man $y_\nu(0)$ für die k Indizes $\nu = \nu_A$ in einem hinreichend kleinen Bereich $|y_\nu(0)| \leqq c\alpha^{n-\nu}$ willkürlich vorgibt, genau ein Integral y_ν des Differentialgleichungssystems (Ia), für welches dauernd $|y_\nu(t)| \leqq b_1 \alpha^{n-\nu}$ bleibt, und für dieses ist sogar $|y_\nu(t)| \leqq b_0 \alpha^{n-\nu}$, wenn nur die Zahl c klein genug gewählt wurde. Vermöge der Transformation (39) entspricht dem genau ein Integral des Differentialgleichungssystems (I), für welches $|x_\nu(t)| \leqq a$ bleibt. Dabei darf man also

$$y_\nu(0) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(0)\, x_\mu(0)$$

für die k Indizes $\nu = \nu_A$ im Bereich

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(0)\, x_\mu(0)\right| \leqq c\alpha^{n-\nu}$$

willkürlich vorgeben. Hiermit ist der Satz 9 abgesehen von dem letzten Absatz bewiesen. Der letzte Absatz folgt dann aber unmittelbar aus dem letzten Absatz von Satz 7.

(Eingegangen am 28. März 1930.)