

# Reducing the numbers of delays in a network of coupled DDAEs

Ha Phi<sup>a,1,\*</sup>, Nguyen Duy Truong<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Faculty of Mathematics, Mechanics, and Informatics, Vietnam National University, 334, Nguyen Trai, Thanh Xuan, Hanoi, Vietnam.*

<sup>b</sup>*Faculty of Mathematics, Mechanics, and Informatics, Vietnam National University, 334, Nguyen Trai, Thanh Xuan, Hanoi, Vietnam.*

---

## Abstract

In this paper note we examine a newly proposed method, namely "*component-wise timeshift transformation*" (*CTT*), which aims to reduce the number of delays in a network ([1, 2, 3]) for networks whose the node behaviors are described by Delay Differential Algebraic Equations (DDAEs). We study the effectiveness as well as drawbacks of this approach to the numerical solution procedure to the corresponding initial value problems. We also discuss the index of the network of coupled DAEs, and illustrate the effectiveness of a method by applying it to a network of mechanical systems.

*Keywords:* Singular system, Delay, Differential-Algebraic Equations, Strangeness-index, Index reduction, Regularization.  
*2000 MSC:* 15A23, 39A05, 39A06, 93C05

---

## 1. Introduction

We will show here that under certain assumptions, it is possible to reduce the number of time delays without altering the index nor the global dynamics of the network.

The main reason for a hybrid numerical-experimental setup is the fact that in some applications the description of the model in terms of differential equations is difficult due to its complex nature or uncertainty [58]. Since testing of a complete prototype may be prohibitively expensive, is it desirable to incorporate the benefits of actual testing with the benefits of numerical simulation. This is accomplished by subdividing the system under investigation into smaller subsystems, which are typically referred to as substructures; see Figure 1.1 for an illustration. Alternatively, a bottom-up approach is facilitated by modern modeling languages such as Modelica (<https://www.modelica.org>) or Matlab/Simulink (<https://www.mathworks.org>). These frameworks compose the complete model by linking small components from a large library together. Such an automated modeling concept typically results in a combination of differential and algebraic

---

\*Corresponding author

Email addresses: [haphi.hus@vnu.edu.vn](mailto:haphi.hus@vnu.edu.vn) (Ha Phi), (Nguyen Duy Truong)

Preprint submitted to *Journal of Computational and Applied Mathematics* September 13, 2020

equations, thus making the complete model a differential-algebraic equation (DAE).

Having decomposed the system into smaller substructures, the numerical-experimental paradigm is to test only a specific substructure experimentally, while the remainder of the system is simulated numerically. To ensure dynamical interaction in real-time, the experiment and the numerical simulation have to happen simultaneously with a possibility to interact through a well-defined interface. In real-time dynamic substructuring or hardware-in-the-loop testing [11] the interface, called transfer system, is typically provided by a set of hydraulic actuators and a set of sensors. Since the dynamic characteristic of any actuator includes a response delay [33,57], the resulting system is a DDAE. Note that further delays might be present, which arise, for instance, from data acquisition, computation, or digital signal processing. In many applications, these delays are small compared to the actuator delay and may thus be neglected in the modeling process; for more details, we refer to [40] and the references therein. The model equations for the hybrid numerical-experimental approach are discussed in Section 2, yielding the coupled DDAE (2.12). The approach is exemplified by a coupled pendulum-mass-spring-damper system (cf. Figure 2.1) taken from [40].

## 2. Reducing the number of delays in a network of coupled DDAE systems

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa

71 ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Mae-  
72 cenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum.  
73 Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia  
74 nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim.  
75 Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cur-  
76 sus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum  
77 pellentesque felis eu massa.

78 Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus  
79 tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In  
80 hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis.  
81 Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed  
82 gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.  
83 Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae  
84 risus porta vehicula.

85 Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a fau-  
86 cibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum  
87 diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue  
88 quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis  
89 porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo  
90 facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et  
91 vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim  
92 ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque  
93 egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

94 Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet,  
95 laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum  
96 at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fer-  
97 mentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed  
98 ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec  
99 luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies  
100 non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus,  
101 egestas vel, odio.

102 Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed  
103 vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget  
104 odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo  
105 eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare  
106 ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc  
107 dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam.  
108 Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos  
109 hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula  
110 eu, lacus.

### 111 3. On the index of a network of coupled DDAE systems

112 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit,  
113 vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida  
114 mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna.

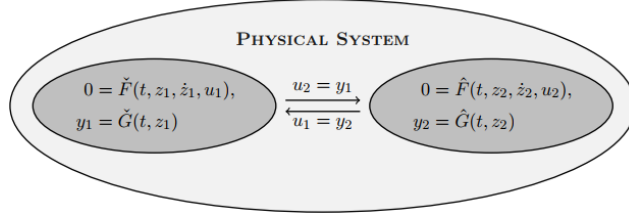


Figure 1: Decomposition of a physical system into substructures

115 Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus  
 116 et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra  
 117 metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus  
 118 eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium  
 119 quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean  
 120 faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Cur-  
 121 abitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue  
 122 eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim  
 123 rutrum.

124 Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi  
 125 auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et,  
 126 tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna,  
 127 vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse  
 128 ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et  
 129 magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna.  
 130 Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

131 Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at,  
 132 tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy  
 133 pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa  
 134 ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Mae-  
 135 cenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum.  
 136 Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia  
 137 nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim.  
 138 Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cur-  
 139 sus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum  
 140 pellentesque felis eu massa.

141 Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus  
 142 tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In  
 143 hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis.  
 144 Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed  
 145 gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.  
 146 Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae  
 147 risus porta vehicula.

148 Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a fau-

cibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

#### 4. Appliation to a network of mechanical systems and numerical simulation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et

193 magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna.  
194 Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

195 Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at,  
196 tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy  
197 pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa  
198 ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Mae-  
199 cenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum.  
200 Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia  
201 nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim.  
202 Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cur-  
203 sus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum  
204 pellentesque felis eu massa.

205 Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus  
206 tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In  
207 hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisi.  
208 Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed  
209 gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.  
210 Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae  
211 risus porta vehicula.

212 Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a fau-  
213 cibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum  
214 diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue  
215 quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis  
216 porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo  
217 facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et  
218 vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim  
219 ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque  
220 egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

221 Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet,  
222 laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum  
223 at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fer-  
224 mentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed  
225 ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec  
226 luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies  
227 non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus,  
228 egestas vel, odio.

229 Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed  
230 vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget  
231 odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo  
232 eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare  
233 ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc  
234 dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam.  
235 Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos  
236 hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula  
237 eu, lacus.

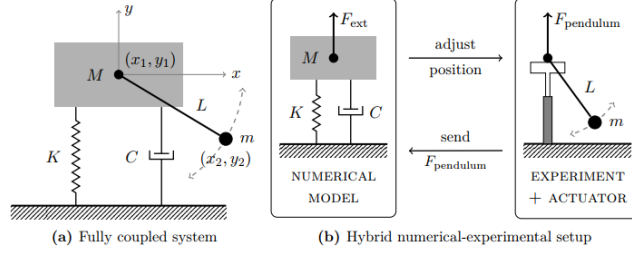


Figure 2: Real-time dynamic substructuring for a coupled pendulum-mass-spring-damper system

## 5. Conclusion

A conclusion section is not required. Although a conclusion may review the main points of the paper, do not replicate the abstract as the conclusion. A conclusion might elaborate on the importance of the work or suggest applications and extensions.

**Acknowledgment** We would like to thank an anonymous referee, whose comments are very helpful to us in the preparation of this research. The first author also would like to thank Jan Philipp Pade for introducing him to the topic and fruitful discussions.

## References

- [1] L. Lücken, J. P. Pade, and K. Knauer. Classification of coupled dynamical systems with multiple delays: Finding the minimal number of delays. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 14(1):286–304, 2015.
- [2] A. Wagemakers and M. A. F. Sanjuán. A new method to reduce the number of time delays in a network. *Scientific Reports*, 7(1):2744, Jun 2017.
- [3] A. Wagemakers, J. Used, and M. A. F. Sanjuán. Reducing the number of time delays in coupled dynamical systems. *The European Physical Journal Special Topics*, 227(10):1281–1289, Nov 2018.