

⇒ Hệ pt vô nghiệm

BTVN GIẢI TÍCH - TUẦN 4.

Câu 1: $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

$$f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$$

$$f'(1) = (1-2)^2(1-3)^3 + 0 + 0 = -8$$

$$f'(2) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$f'(3) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Câu 2: $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

đó bạn nào tìm được đh này?

$$f'(x) = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + (x-1) \cdot \left(\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right)'$$

$$f'(1) = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{1}{1+1}} + 0$$

$$= 1 + \frac{\pi}{4}$$

Câu 3:

$$1. y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = x + \sqrt{x} + x^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$2. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = (-1) \cdot x^{-1-1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$= -x^{-2} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$$

đến đây đi thi là ok rồi

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$$

dòng này 0 cần

$$3. y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$4. y = \sqrt[n+m]{(1-x)^m \cdot (1+x)^n}$$

$$= (1-x)^{\frac{m}{n+m}} \cdot (1+x)^{\frac{n}{n+m}}$$

$$y' = \frac{m}{n+m} \cdot (1-x)^{\frac{m}{n+m}-1} \cdot (-1) \cdot (1+x)^{\frac{n}{n+m}} + \frac{n}{n+m} \cdot (1-x)^{\frac{m}{n+m}} \cdot (1+x)^{\frac{n}{n+m}-1}$$

$$= \boxed{\frac{-m}{n+m}} \cdot (1-x)^{\frac{m}{n+m}-1} \cdot (1+x)^{\frac{n}{n+m}} + \frac{n}{n+m} \cdot (1-x)^{\frac{m}{n+m}} \cdot (1+x)^{\frac{n}{n+m}-1}$$

$$= \frac{m(1+x)^{\frac{n}{n+m}}}{(n+m)(1-x)^{\frac{n}{n+m}}} + \frac{n(1-x)^{\frac{m}{n+m}}}{(n+m)(1+x)^{\frac{m}{n+m}}}$$

dòng này 0 cần

$$5. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} = \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)'$$

$$\text{ta có } \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)' = \frac{3x^2(1-x^3) - (1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

dùng ct $(p/q)' = (p'q - p \cdot q')/q^2$

$$= \frac{3x^2 - 3x^5 + 3x^2 + 3x^5}{(1-x^3)^2}$$

$$= \left(\frac{6x}{1-x^3} \right)^2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{6x}{1-x^3} \right)^2$$

$$6. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad (x+1) = (x-1) \sqrt{x+1}$$

$$= \left(x + \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(x + \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x + \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)'$$

$$\text{tao: } \left(x + \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(x + \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$7. y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

$$y' = \frac{2 \sin x \cos x \cdot \sin x^2 - \sin^2 x \cdot \cos(x^2) \cdot 2x}{\sin^2(x^2)}$$

=

$$8. y = \frac{1}{\cos^n x}$$

$$y' = \frac{-(\cos^n x)'}{\cos^{2n} x} = \frac{\cos^{n-1}(x) \cdot \sin(x) \cdot n}{\cos^{2n}(x)} = \frac{n \cdot \sin x}{\cos^{n+1}(x)}$$

$$9. y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2(\frac{x}{2})} - \frac{-\frac{1}{2}}{\sin^2(\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} \right)$$

$$= \frac{\cos^2 \sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})}{2 \cdot \cos^2(\frac{x}{2}) \cdot \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2 \cdot \sin^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$10. y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{Ta có: } \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

Đạo hàm cả 2 vế

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} (1 - \ln x)$$

$$\Rightarrow y' = y \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$$

$$= x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln x)$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$$

$$11. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$y' = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})'}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + [(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Tab: } \left((1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$12. y = e^x \ln \sin x$$

$$y' = e^x \ln \sin x + \frac{(\sin x)'}{\sin x} \cdot e^x$$

$$= e^x \ln \sin x + \cot x \cdot e^x$$

$$= e^x (\ln \sin x + \cot x)$$

~~$$13. y = \log_3(x^2 - \sin x)$$~~

~~$$y' = \frac{(x^2 - \sin x)'}{(x^2 - \sin x) \cdot \ln 3} = \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \cdot \ln 3}$$~~

$$13. y = \log_3(x^2 - \sin x)$$

$$= \frac{\ln(x^2 - \sin x)}{\ln 3}$$

$$y' = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{(x^2 - \sin x)'}{x^2 - \sin x} = \frac{2x - \cos x}{\ln 3 (x^2 - \sin x)}$$

đúng

14. $y = e^{\arctan x}$

$$y' = e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

15. $y = e^{x^x} = e^{u(x)}$

Đặt $x^x = u \Rightarrow \ln u = x \ln x$

$$\Leftrightarrow (\ln u)' = (x \ln x)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{u'}{u} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

$$\Leftrightarrow u' = u(1 + \ln x)$$

$$y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u' = e^{x^x} \cdot x^x \cdot (1 + \ln x) \quad \text{đúng}$$

Câu 4:

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 5$$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 1$$

$$y'(x_A) = y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 1 = 8$$

Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ tại $A(3, 2)$ là:

$$y - 2 = 8(x - 3) \Leftrightarrow y = 8x - 22$$

Câu 6:

$$1. y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Tại } x=0: \left. \begin{array}{l} y'_-(0) = -1 \\ y'_+(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tại } x=0 \text{ hàm } y \text{ không có đạo hàm}$$

$$2. y = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{tất quá}} y' = 2|x|$$

Tại $x=0$ thì $y'_-(0) = -2 \cdot 0 = 0$, còn $y'_+(0) = 2 \cdot 0 = 0$. Như vậy $y'_-(0) = y'_+(0)$ chứng tỏ hàm số có đạo hàm tại 0 là $y'(0) = 0$.

Kết hợp với công thức y' ở trên thì ta có $y' = 2|x|$

$$3. y^* = \ln |x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \text{ với mọi } x \text{ khác } 0$$

Tại $x=0$ hàm số 0 xác định nên 0 có đạo hàm tại đó.

Câu 7:

$$1. y = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ (1-x)(2-x), & 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x), & x > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Phải xét cả đạo hàm trái và đạo hàm phải tại 2 điểm đặc biệt là $x=1$ và $x=2$
Đáp số 0 thay đổi gì

$$2. y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$$

Gộp thế này đi thi sẽ mất hết điểm

$$\text{Ta có: } y = x^2 \cdot e^{-x^2}, \quad |x| \leq 1$$

$$\Rightarrow y' = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$= 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - x^2) \quad \text{đúng khi } -1 < x < 1$$

$$KL: y' = \begin{cases} 2x \cdot e^{-x^2} (1 - x^2), & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Xét tại $x = -1$ thì $y'(-1) = 0$ còn $y'(+1) = 2 \cdot (-1) \cdot e^{-1} \cdot [1 - (-1)^2] = 0 = y'(-1)$, do đó hàm số có đạo hàm $y'(-1) = 0$

Tương tự xét tại $x = 1$ thì $y'(1) = 0 = y'(+1)$ do đó hàm số có đạo hàm $y'(1) = 0$

Câu 9:

$$f(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-100)$$

$$f'(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-100) + x(x-2)(x-3) \dots (x-100) + \dots + x(x-1) \dots (x-99)$$

$$f'(0) = (-1)(-2) \dots (-100) + 0 + \dots + 0$$

$$= 100!$$

Câu 12:

$$1. y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^2|$$

$$y = \begin{cases} (x-1)(x-2)^2(x-3)^2 & , x > 1 \\ (1-x)(x-2)^2(x-3)^2 & , x < 1 \end{cases}$$

Với $x > 1$:

$$y' = (x-2)^2(x-3)^2 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^2 + 2(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

$$= (x-2)(x-3)(x^2 - 5x + 6 + 2x^2 - 9x + 6 + 2x^2 - 6x + 4)$$

$$= (x-2)(x-3)(5x^2 - 19x + 16)$$

$\Rightarrow y'$
Với $x < 1$:

$$y' = -(x-2)^2(x-3)^2 + 2(1-x)(x-2)(x-3)^2 + 2(1-x)(x-2)^2(x-3)$$

Tại $x = 1$:

$$y'_-(1) = (1-2)(1-3)(5 \cdot 1^2 - 19 \cdot 1 + 16) =$$

$$y'_-(1) = -(1-2)^2(1-3)^2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = -4$$

$$y'_+(1) = (1-2)^2(1-3)^2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 4$$

$y'_-(1) \neq y'_+(1) \Rightarrow y$ không có đạo hàm tại $x = 1$
 \Rightarrow không khả vi tại $x = 1$.

Câu 13:

$$1. f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = -1; \quad f'_+(0) = 1$$