Class No.5

Sunday, October 3, 2021 4:03 PM

Bài toán tìm A^{-1}, $\det(A)$

1) Tính A^{-1}

Trong thực tế tính toán thì ứng dụng LU hoặc PLU sẽ tốt hơn.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix}}_{B = I_3} \right] \xrightarrow{LU} \left[U \,\middle|\, \tilde{B} \right] \to \text{Giải } X \text{ từ } AX = I_n.$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}.$$

Complexity: $\frac{8}{3} n^3 = 4 \cdot \frac{2}{3} n^3$

(tìm A^{-1} tiêu tốn gấp 4 lần thực hiện phân tích $A = LU$)

$\Rightarrow$ Giải $Ax = b$ bằng cách tìm A^{-1}, sau đó lấy $x = A^{-1}b$ thì tốn gấp $\sim$ 4 lần giải = LU.

Lập trình: Matlab $x = A\backslash b$ (nghĩa là giải $Ax = b$ bằng LU)

Python x = linalg.solve(A,b)

(bạn nào viết code x = dot(inv(A), b) hay x = inv(A) * b sẽ bị - điểm).

2) Tính $\det(A)$

Khai triển Laplace $\det(A) \longrightarrow$ complexity $> n!$. Chỉ cần $n = 20 \Rightarrow 20! \simeq 2.4 \cdot 10^{18}$

$\Rightarrow$ với 1 máy tính thực hiện 10^9 flops/sec $\Rightarrow$ 76 năm.

$$\det(A) = \det(PLU) = \underbrace{\det(P)}_{} \cdot \underbrace{\det(L)}_{} \cdot \det(U)$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \Rightarrow n \text{ flops}.$$

Việc tính $\det(A)$ tốn nhất là thực hiện p/tích PLU $\Rightarrow \frac{2}{3} n^3$ flops