

Mục lục

1	Ước lượng hàm phân rã cho hệ thống tuyến tính có trễ	2
1.1	Đặt vấn đề	2
1.2	Hàm Lambert W	4
1.3	Giải phương trình vi phân có trễ sử dụng hàm Lambert W	6
1.3.1	Trường hợp vô hướng	6
1.3.2	Trường hợp bậc cao hơn	7
1.4	Ước lượng phân rã của hệ có trễ	8
1.5	Ví dụ số	14
1.6	Kết luận chương	21
2	Một số trường hợp đặc biệt trong phân tích tính chất ổn định của các hệ động lực có trễ	22
2.1	Giới thiệu	22
2.2	Một trường hợp đặc biệt của hệ bậc hai	23
2.3	Ví dụ số	27
2.4	Trường hợp hệ có một số lẻ của các giá trị riêng thực	30
2.5	Kết luận chương	32
	Tài liệu tham khảo	33

Chương 1

Ước lượng hàm phân rã cho hệ thống tuyến tính có trễ

1.1 Đặt vấn đề

Xét hệ thống tuyến tính đơn trễ với hệ số hằng (Linear Time Invariant Time-Delayed System) có dạng

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t-h) &= 0, t > 0, \\ x(0) = x_0, x(t) &= g(t) \quad \text{với } t \in [-h, 0),\end{aligned}\tag{1.1}$$

trong đó A và A_d là các ma trận hệ số cỡ $n \times n$, $x(t)$ là vectơ trạng thái cỡ $n \times 1$, $g(t)$ là hàm quỹ đạo ban đầu cỡ $n \times 1$, t là biến thời gian và h là độ trễ vô hướng cho trước. Một sự gián đoạn đã được cho phép tại $t = 0$ khi $g(0^-) \neq x(0) = x(0)$. Mục tiêu là tìm giới hạn trên cho tốc độ phân rã, được gọi là α - ổn định, cũng như giới hạn trên cho số K , sao cho chuẩn của trạng thái bị giới hạn bởi

$$\|x(t)\| \leq Ke^{\alpha t} \Phi(h, t_0)\tag{1.2}$$

trong đó $\Phi(h, t_0) = \sup_{t_0-h \leq t \leq t_0} \{\|x(t)\|\}$ và $\|\cdot\|$ biểu thị chuẩn Euclid. Các điều kiện cho sự tồn tại của K và α đã được thảo luận trong Hale và Verduyn-Lunel (1993). Điều quan trọng là chỉ ra rằng K và α là một cặp và không thể ước lượng riêng lẻ chúng. Mặc dù tồn tại một số phương pháp tiếp cận miền tần số để tối ưu α , một ước lượng tương ứng của K không được cung cấp trong cách tiếp cận đó. Với một giá trị α cho trước, nó không khả thi để thu được K bằng cách sử dụng mô phỏng, bởi vì hàm quỹ đạo ban đầu $g(t)$ và điều kiện ban đầu x_0 không thể xác định duy nhất khi chỉ biết giới hạn của $\|x\|$, với $t \in [-h, 0]$. Khó khăn là việc tìm một hàm

bao mà giới hạn chuẩn cho các trạng thái bất kì với $t > 0$ và với mọi hàm quỹ đạo ban đầu có thể có và điều kiện ban đầu. Khi $h = 0$, $A_d = 0$ và phương trình vi phân có trễ (DDE) trong phương trình (1.1) rút gọn thành một phương trình vi phân thường (ODE), thì hàm phân rã của nó là

$$\|x(t)\| \leq e^{\mu(A)t} \|x(0)\| \quad (1.3)$$

trong đó $\mu(A) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \theta A\| - 1}{\theta}$ là độ đo ma trận (Hale and Verduyn-Lunel, 1993). Khi có thời gian trễ, vấn đề trở nên phức tạp hơn vì quỹ đạo thời gian trễ của hệ thống phụ thuộc không chỉ vào trạng thái ban đầu x_0 mà còn hàm quỹ đạo ban đầu $g(t)$. Các cách tiếp cận hiện đại cho ta một ước tính với hàm phân rã hạn chế đáng kể. Ví dụ, kết quả từ cách tiếp cận theo chuẩn ma trận (Hale and Verduyn-Lunel, 1993) cho ta ước lượng

$$K = 1 + \|A_d\|h, \alpha = \|A\| + \|A_d\| \quad (1.4)$$

trong đó, ước lượng của α là một số dương. Đối với các phương pháp đo lường ma trận (Lehman and Shujate, 1994; Niculescu et al., 1998), K được cố định bằng 1, điều này làm cho ước lượng của α rất chặt chẽ. Ví dụ, xét quỹ đạo của hệ thống được biểu diễn trong Hình 1. Nếu K bằng 1 thì hàm phân rã có giá trị bằng 1 tại thời điểm $t = 0$. Khi đó α phải dương để hàm phân rã bị giới hạn bởi đỉnh của quỹ đạo trạng thái chuẩn tại $t = 2$. Tuy nhiên, giá trị tối ưu của α rõ ràng là một số âm. Ngoài ra, ta có thể áp dụng các phương pháp của Lyapunov để giải quyết vấn đề về mặt tính toán. Sử dụng các phương pháp Lyapunov-Krasovskii cổ điển, các ước lượng của K và α có thể thu được như sau

$$\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \alpha = -c_3 \quad (1.5)$$

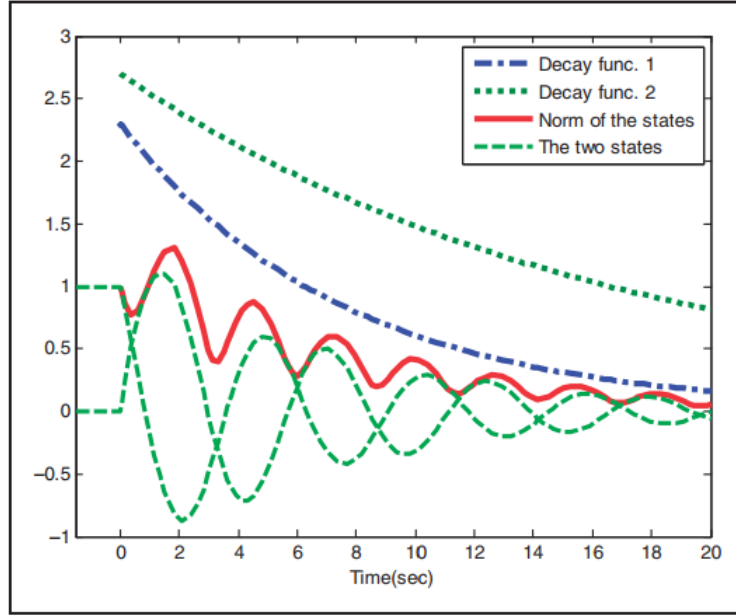
giả sử sự tồn tại của các hằng số dương c_1, c_2, c_3 sao cho

$$c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq c_2 \|x_t\|^2 \quad (1.6)$$

và

$$\dot{V}(x_t) \leq -2c_3 \|x(t)\|^2 \quad (1.7)$$

trong đó x_t biểu thị cho đoạn $\{x(t + \theta) | \theta \in [-h, 0]\}$ và $V(\cdot)$ là hàm Lyapunov-Krasovskii. Vì hạn chế vốn có của phương pháp Lyapunov, ước lượng tốc độ phân



Hình 1.1: Ví dụ về hàm phân rã cho hệ có trễ bậc hai $\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t-h) = 0$, với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -1 \end{bmatrix}$, $A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}$, $h = 1$ và $g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, với $t \leq 0$

rã, c_3 sẽ không thể đạt được giá trị tối ưu. Ước lượng của K , tức là $\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ cũng khó đạt được giá trị tối ưu.

Từ công thức nghiệm trong Yi et al. (2007a), mối quan hệ giữa quỹ đạo của phương trình (1.1) và hàm định dạng cũng như điều kiện ban đầu có thể được xác định về mặt phân tích theo chuỗi hàm Lambert W vô hạn. Chúng tôi có ý định khắc phục, hoặc giảm bớt hạn chế vốn có trong các phương pháp đo lường ma trận hoặc chuẩn và các phương pháp Lyapunov và nghiên cứu vấn đề ước lượng hàm phân rã theo một quan điểm mới và khác bằng cách áp dụng phương pháp hàm Lambert W.

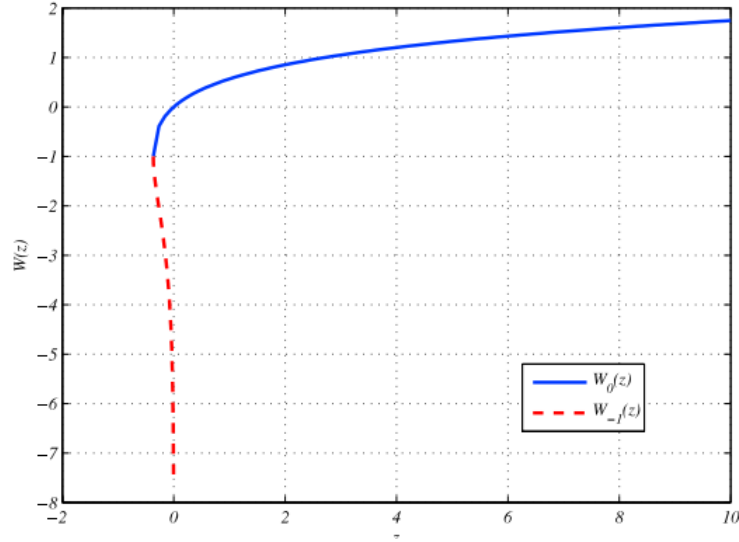
1.2 Hàm Lambert W

Hàm Lambert W là hàm số $W(z)$, $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, được định nghĩa là nghiệm của phương trình

$$W(z)e^{W(z)} = z. \quad (1.8)$$

Đây là một hàm đa trị, nghĩa là với mỗi $z \in \mathbb{C}$ thì có vô số nghiệm của (1.8). Để nhận diện giá trị này, một nhánh số được gán, ta gọi $W_k(z)$ là nhánh thứ k của hàm Lambert của z . Nhánh cắt được xác định bằng cách mỗi nhánh có một miền

xác định riêng biệt [2]. Với $z \in \mathbb{R}$, chỉ có hai nhánh cho giá trị thực. Nhánh chính $W_0(z)$ có giá trị thực với $z \geq \frac{-1}{e}$ và miền giá trị của nhánh này là $[-1; \infty]$. Nhánh $W_{-1}(z)$ có giá trị thực với $\frac{-1}{e} \leq z < 0$, và miền giá trị của nó là $(-\infty; -1]$. Hai nhánh này được biểu diễn ở hình 2.1. Một nghiên cứu toàn diện về định nghĩa và tính chất của hàm Lambert W được tìm thấy trong [2]. Bây giờ, ta sẽ định nghĩa



Hình 1.2: Hai nhánh thực của hàm Lambert W

ma trận của hàm Lambert W . Xét một ma trận $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$, có phân tích Jordan là $H = ZJZ^{-1}$, với $J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_p(\lambda_p))$. Sau đây là một trong những định nghĩa tiêu chuẩn cho ma trận hàm Lambert. Ma trận hàm Lambert W cho khối Jordan cỡ m được định nghĩa bởi

$$W_k(J_i) = \begin{bmatrix} W_k(\lambda_i) & W'_k(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m-1)!} W_k^{m-1}(\lambda_i) \\ 0 & W_k(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m-2)!} W_k^{m-2}(\lambda_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_k(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

và ma trận hàm Lambert của H được định nghĩa bởi

$$W_k(H) = Z \text{diag}(W_k(J_1(\lambda_1), W_k(J_2(\lambda_2), \dots, W_k(J_p(\lambda_p)))) Z^{-1}. \quad (1.10)$$

Mọi ma trận được định nghĩa bởi (1.10), với $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ là một nghiệm riêng biệt cho phương trình ma trận

$$W_k(H) \exp(W_k(H)) = H. \quad (1.11)$$

Định nghĩa chuẩn ở trên dẫn đến cùng một nhánh k của hàm Lambert W được sử dụng trong tất cả các khối Jordan. Điều này là không cần thiết để có một nghiệm của (5). Từ $W_0(0) = 0$ và $W_k(0) = \infty$ với $k \neq 0$, ta điều chỉnh định nghĩa chuẩn để tránh sự vô hạn giá trị. Trường hợp đặc biệt này được gọi là trường hợp nhánh chuyển mạch, được định nghĩa trong Yi (2009) và [10]. Chi tiết hơn, $W_k(H)$ sử dụng giá trị k cho những khối Jordan với $\lambda \neq 0$ và 0 cho những khối Jordan với $\lambda = 0$. Định nghĩa này được sử dụng trong chương. Bằng cách tương tự, giả sử rằng khi tính toán nhánh chính e^{-1} không là giá trị riêng của H ứng với khối Jordan có số chiều lớn hơn 1. Điều này được yêu cầu để vượt qua khó khăn bởi thực tế rằng $W'_0(e^{-1})$ không xác định. Hạn chế này làm giảm vẻ đẹp của định nghĩa ma trận hàm Lambert W nhưng không ảnh hưởng đến hiệu quả của việc sử dụng nó (Jarlebring & Damm, 2007).

1.3 Giải phương trình vi phân có trễ sử dụng hàm Lambert W

1.3.1 Trường hợp vô hướng

Với trường hợp vô hướng, ta có phương trình

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau). \quad (1.12)$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$s - a - be^{-s\tau} = 0. \quad (1.13)$$

Nghiệm của (1.13) có thể được biểu diễn về hàm Lambert W theo các bước đơn giản ([1]; [2]; Yi, 2009; [10]) có dạng

$$s_k = \frac{1}{\tau} W_k(\tau b e^{-a\tau}) + a, \quad (1.14)$$

trong đó $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ là chỉ số của các nhánh của hàm Lambert được sử dụng. Mỗi nghiệm trong số vô hạn các nghiệm của (1.13) tương ứng với một nhánh của hàm này.

Năm 2006, Shinozaki & Mori đã chứng minh rằng trong số các nghiệm của (1.14), nghiệm tương ứng với nhánh chính $k = 0$ luôn có phần thực lớn nhất, do đó nó là nghiệm trội của phương trình. Để nghiên cứu sự ổn định cho phương trình vi phân

có trễ một chiều, điều kiện cần và đủ là tìm nghiệm của (1.13) trong (1.14) tương ứng với $k = 0$.

1.3.2 Trường hợp bậc cao hơn

Xét hệ điều khiển có trễ có dạng sau

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (1.15)$$

với $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tau > 0$.

Các bước sau đây được giới thiệu trong [1] và đã được mở rộng trong Yi (2009), [10], Yi and Ulsoy (2006) and Yi et al. (2006), nhằm tính toán các giá trị riêng bằng cách sử dụng ma trận hàm Lambert W. Phương pháp được đề xuất dựa trên việc tìm nghiệm của phương trình

$$S - A - B \exp(-S\tau) = 0, \quad (1.16)$$

trong đó $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Biến đổi (1.16) ta được

$$(S - A) \exp((S - A)\tau + A\tau) = B$$

Giả sử ta tìm được một ma trận Q sao cho

$$\exp((S - A) + A\tau) = \exp((S - A)\tau) Q^{-1}$$

Khi đó ta có

$$\tau(S - A) \exp((S - A)\tau) = \tau BQ. \quad (1.17)$$

Đặt $M := \tau BQ$. Ta thấy rằng với mỗi $k \in \mathbb{Z}$ thì

$$S_k = \frac{1}{\tau} W_k(M) + A, \quad (1.18)$$

là một nghiệm của (1.17). Bằng cách thay (1.18) vào (1.17), ta thu được biểu thức sau

$$W_k(M) \exp(W_k(M) + A\tau) - \tau B = 0. \quad (1.19)$$

Do đó, các bước tính nghiệm đặc trưng của hệ được cho bởi thuật toán sau

Thuật toán 1. Lặp lại với $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ (1) Giải phương trình phi tuyến

$$W_k(M) \exp(W_k(M) + A\tau) - \tau B = 0, \quad (1.20)$$

để tìm M_k , với $M_k = \tau B Q_k$. (2) Tính S_k tương ứng với M_k vừa tìm được

$$S_k = \frac{1}{\tau} W_k(M_k) + A. \quad (1.21)$$

(3) Tính các giá trị riêng của S_k .

Để hệ (1.15) ổn định thì mọi giá trị riêng phải có phần thực âm. Việc tính nghiệm cho tất cả các nhánh là điều không thể. Để giải quyết khó khăn này, người ta giả sử rằng với bất kì nhánh k nào của ma trận hàm Lambert, chỉ tồn tại duy nhất nghiệm M_k của (1.20) tương ứng với ma trận S_k . Giả định này dựa trên quan sát từ nhiều ví dụ, dẫn đến một giả thuyết mạnh hơn. Giả thuyết này được phát biểu chính thức trong Yi (2009) và nó là cơ sở cho một số nghiên cứu sau đó ([3]; Wei et al (2014); Yi, Duan, Nelson, Ulsoy, 2012; [9]; [6]; [8]).

Giả thiết 1. Các giá trị riêng trội nhất nằm trên m nhánh chính của hàm Lambert W , trong đó m là số khuyết của ma trận A_d . Cụ thể hơn, với mọi $i \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\max \{ \text{Re}(eig(S_{-m})), \dots, \text{Re}(eig(S_0)), \dots, \text{Re}(eig(S_m)) \} = \max \{ \text{Re}(eig(S_i)) \}. \quad (1.22)$$

Một hệ quả trực tiếp của Giả thiết 1 là khi hạng của ma trận B lớn hơn hoặc bằng $n - 1$ thì giá trị riêng có phần thực lớn nhất là giá trị riêng của ma trận S_0 , tương ứng với nhánh chính của hàm Lambert trong Thuật toán 1.

1.4 Ước lượng hàm phân rã của hệ có trễ

Xét ma trận thuần nhất DDE trong phương trình (1.1). Nghiệm của (1.1) được viết dưới dạng (Yi et al., 2006),

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{S_k t} C_k^I \quad (1.23)$$

trong đó

$$S_k = \frac{1}{h} W_k(-A_d h Q_k) - A \quad (1.24)$$

và Q_k được giải bởi điều kiện sau

$$W_k(-A_d h Q_k) e^{Ae^{W_k(-A_d h Q_k) - Ah}} = -A_d h \quad (1.25)$$

Trong đó S_k và Q_k là ma trận cỡ $n \times n$, C_I^k là véc tơ cỡ $n \times 1$ và được xác định bởi hàm đquỹ đạo ban đầu $g(t)$ và x_0 bằng cách sử dụng một trong hai cách tiếp cận (Yi et al., 2006, 2007b). Những kết quả trong Yi et al. (2006) đã được mở rộng ở đây để đưa ra một nghiệm tổng quát (xem trong Phụ lục A) để thấy rằng nghiệm của (1) có thể được viết dưới dạng

$$x(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{S_k t} \left(\sum_{j=1}^n T_{kj}^I L_{kj}^I \right) x_0 \right\}}_{P_1} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{S_k t} \sum_{j=1}^n \left(T_{kj}^I L_{kj}^I A_d G(\lambda_{kj}) \right) \right\}}_{P_2} \quad (1.26)$$

trong đó

$$\lambda_{kj} = \text{eig}(S_k), j = 1, 2, \dots, n \quad (1.27)$$

$$G(\lambda_{kj}) = \int_0^h e^{-\lambda_{kj} \tau} G(\tau - h) d\tau \quad (1.28)$$

$$L_{kj}^I = \lim_{s \rightarrow \lambda_{kj}} \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial s} \prod_{j=1}^n (s - \lambda_{kj})}{\frac{\partial}{\partial s} \det(sI + A + A_d e^{-sh})} \text{adj}(sI + A + A_d e^{-sh}) \right\} \quad (1.29)$$

$$\tilde{R}_k^{I+} = \begin{bmatrix} T_{k1}^I & T_{k2}^I & \dots & T_{kn}^I \end{bmatrix} = R_k^I * (R_k^I R_k^I)^{-1} \quad (1.30)$$

$$R_{kj}^I = \text{adj}(\lambda_{kj} I - S_k), \tilde{R}_k^I = \begin{bmatrix} R_{k1}^I \\ R_{k2}^I \\ \dots \\ R_{kn}^I \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Kí hiệu \tilde{R}_k^{I+} là nghịch đảo mở rộng Moore-Penrose cỡ $n \times n^2$, $R_k^I *$ là ma trận chuyển vị liên hợp $n \times n^2$ của \tilde{R}_k^I và T_{kj}^I là khối vuông thứ j của \tilde{R}_k^{I+} .

Định lý 1.1. Nếu tồn tại các vô hướng α, K_1, K_2, K_3 và K_4 sao cho

$$\alpha = \max \{ \text{Re}(\text{eig}(S_{-m})), \dots, \text{Re}(\text{eig}(S_0)), \text{Re}(\text{eig}(S_m)) \} \quad (1.32)$$

$$K_1 = \sup_{0 \leq t < h} \left\| e^{(-A - \alpha I)t} \right\| \quad (1.33)$$

$$K_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t \geq h} \left\| \sum_{k=-N}^N \left\{ e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n T_{kj}^I L_{kj}^I \right\} \right\| \right\} \quad (1.34)$$

$$K_3 = \sup_{0 \leq t < h} \int_0^t \left\| e^{(-A - \alpha I)t + A\tau} A_d \right\| d\tau \quad (1.35)$$

$$K_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t \geq h} \int_0^h \left\| \sum_{k=-N}^N \left\{ e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n \left(T_{kj}^I L_{kj}^I A_d e^{\lambda_{ki}\tau} \right) \right\} \right\| \right\} \quad (1.36)$$

trong đó m là số khuyết của A_d và $\text{eig}(S_i)$ là các giá trị riêng của S_i . Sau đó, các quỹ đạo của phương trình 1.1 được giới hạn bởi hàm mũ $\|x(t)\| \leq K e^{\alpha t} \Phi(h)$ với mọi $t > 0$, trong đó $\Phi(h) = \sup_{-h \leq t \leq 0} \{\|x(t)\|\}$ và $K = \max(K_1, K_2) + \max(K_3, K_4)$.

Chứng minh. Ước lượng tốc độ phân rã của α

Với hệ vô hướng (1.1), giá trị riêng ngoài cùng bên phải có thể xác định bằng nhánh chính $k = 0$ của hàm Lambert W vô hướng (Shinozaki and Mori, 2006). Chứng minh đó có thể dễ dàng mở rộng cho trường hợp ma trận khi A và A_d trong phương trình (1.1) (Jarlebring and Damm, 2007). Hiện tại, chưa có chứng minh nào cho trường hợp chung của ma trận phương trình vi phân có trễ. Tuy nhiên, trong tất cả các ví dụ đã xem xét trong tài liệu, nó đã quan sát thấy rằng giá trị riêng nằm ngoài cùng bên phải đều thu được chỉ bằng việc sử dụng m nhánh đầu tiên, trong đó m là số chiều của hạt nhân ma trận A_d (Yi et al., 2010c). Ta có một giả thiết như sau

$$\max\{\text{Re}(\text{eig}(S_{-m})), \dots, \text{Re}(\text{eig}(S_0)), \dots, \text{Re}(\text{eig}(S_m))\} \geq \max\{\text{Re}(\text{eig}(S_i))\}, \forall i \quad (1.37)$$

trong đó m là số chiều của hạt nhân ma trận A_d và $\text{eig}(S_i)$ là các giá trị riêng của S_i . Do đó, dựa vào giả thuyết trên, tốc độ phân rã tối ưu của ma trận của phương trình vi phân có trễ có thể tính được như phương trình (1.32).

Ước lượng của hệ số K

Sau khi xác định được α bằng cách sử dụng phương trình (1.32), sau đó ta phải xác định hệ số K sao cho $\|x(t)\| \leq K e^{\alpha t} \Phi$, trong đó $\Phi = \sup_{-h \leq t \leq 0} \|x(t)\|$. Lấy chuẩn cả hai vế của phương trình (1.26) ta được

$$\|x(t)\| \leq \|P_1(t)\| + \|P_2(t)\| \quad (1.38)$$

trong đó $P_1(t)$ và $P_2(t)$ đã được xác định trong phương trình (1.26). Việc sử dụng bất phương trình trong phương trình (1.38) sẽ dẫn đến sự hạn chế trong kết quả của chúng tôi. Vì hàm bao nên giới hạn bất kì quỹ đạo nào có thể, nên ta phải tách $\|x_0\|$ và $\|g(\cdot)\|$ ra khỏi chuỗi vô hạn nhưng không ảnh hưởng đến sự hội tụ.

Đầu tiên, lưu ý rằng với $t \in [0, h)$, trạng thái $x(t - h)$ trong ma trận của các DDE được xác định bởi các hàm quỹ đạo ban đầu. Do đó, trong giai đoạn này, ma trận thuần nhất DDE có thể coi như một ma trận của phương trình vi phân thường với đầu vào từ hàm quỹ đạo ban đầu

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = -A_d g(t - h). \quad (1.39)$$

Do đó, với $t \in (0, h)$, $P_1(t)$ bằng phản hồi tự do của (1.39) với $x(0) = x_0$ và $P_2(t)$ có thể được coi như phản hồi bắt buộc của phương trình (1.39) với đầu vào $g(t - h)$. Do đó, trong trường hợp này, giới hạn của $\|P_1(t)\|$ và $\|P_2(t)\|$ có thể thu được như sau

$$\|P_1(t)\| \leq \|e^{(-A-\alpha I)t} x_0\| e^{\alpha t} \leq K_1 e^{\alpha t} \Phi, t \in [0, h) \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \|P_2(t)\| &\leq \int_0^t \| -e^{-A(t-\tau)} A_d \| \cdot \|g(\tau - h)\| d\tau \\ &\leq \int_0^t \| -e^{(-A-\alpha I)t+A\tau} A_d \| \cdot \|g(\tau - h)\| e^{\alpha \tau} d\tau \\ &\leq K_3 e^{\alpha t} \Phi, t \in [0, h) \end{aligned} \quad (1.41)$$

trong đó K_1 và K_3 được định nghĩa tương ứng ở phương trình (1.33) và (1.35).

Với $t \in [h, +\infty)$, phương pháp hàm Lambert W đã được áp dụng. Lưu ý rằng

$$\begin{aligned} \|P_1(t)\| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=-N}^N \left\{ e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n T_{kj}^I L_{kj}^I x_0 \right\} \right\| e^{\alpha t} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t \geq h} \left\| \sum_{k=-N}^N \left\{ e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n T_{kj}^I L_{kj}^I \right\} \right\| \right\} e^{\alpha t} \|x_0\|, t \in [h, \infty) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Do đó, nếu K_2 trong phương trình (1.34) tồn tại, $\|P_1(t)\| \leq K_2 e^{\alpha t} \Phi$ với $t \in [h, \infty)$

sẽ thỏa mãn khi $\Phi = \sup_{-h \leq t \leq 0} \|x(t)\| \geq \|x(0)\|$. Tương tự,

$$\begin{aligned} \|P_2(t)\| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \left\{ \sum_{k=-N}^N e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n (T_{kj}^I L_{kj}^I A_d \int_0^h e^{\lambda_{ki}\tau} g(\tau - h) d\tau) \right\} \right\| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \int_0^h \left\{ \sum_{k=-N}^N \left\{ e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n (T_{kj}^I L_{kj}^I A_d e^{\lambda_{ki}\tau}) \right\} \right\} \times g(\tau - h) d\tau \right\| e^{\alpha t}, t \in [h, \infty) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Chuyển chuỗi tích phân và thu được chuẩn, sau đó chuyển $\|g(t - h)\|$ ra ngoài dấu tích phân

$$\|P_2(t)\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t \geq h} \int_0^h \left\| \sum_{k=-N}^N \left\{ e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n (T_{kj}^I L_{kj}^I A_d e^{\lambda_{ki}\tau}) \right\} \right\| d\tau \times \|g(\tau - h)\| \right\} \quad (1.44)$$

Do đó, nếu K_4 trong (1.36) tồn tại thì $\|P_2(t)\| \leq K_4 e^{\alpha t} \Phi$ với $t \in [h, \infty)$ sẽ giữ nguyên kể từ khi $\Phi = \sup_{-h \leq t \leq 0} \|x(t)\| \geq \|g(t - h)\|$ với $t \in [0, h)$. Vậy ta đã chứng minh xong. \square

Nhận xét 1. Phương pháp hàm Lambert W cung cấp một giải pháp về chuỗi vô hạn. Tính khả thi của phương pháp phụ thuộc vào sự hội tụ của chuỗi. Chứng minh cho sự hội tụ của chuỗi hàm Lambert W hiện tại chưa khả dụng. Tuy nhiên, ta vẫn có thể đánh giá chuỗi số để thu được ước lượng của K . Quá trình này được chứng minh trong ví dụ số ở phần 4.

Nhận xét 2. Người ta đã quan sát thấy rằng, mặc dù chuỗi hàm Lambert W có thể hội tụ chậm tại $t = 0^+$, tốc độ hội tụ tăng nhanh khi t lớn hơn. Vì DDE có thể xử lý một phương trình vi phân thường với $t \in [0, h)$, phương pháp tiếp cận hàm Lambert W được áp dụng cho $t \geq 0$ để đạt được sự hội tụ tốt hơn.

Nhận xét 3. Vì hàm bao cần ràng buộc bất kì quỹ đạo nào có thể, người ta phải tách $\|x_0\|$ và $\|g(\cdot)\|$ ra khỏi chuỗi vô hạn nhưng không ảnh hưởng đến sự hội tụ. Do đó, trong phương trình (1.44) chuỗi tích phân và chuẩn được đổi chỗ trước khi di chuyển $\|g(t - h)\|$ ra ngoài dấu tích phân.

Nhận xét 4. Lưu ý rằng ước lượng của K_1, K_2, K_3 và K_4 thu được trực tiếp dựa trên nghiệm của hệ và không có tính hạn chế được đưa ra trong quy trình đề xuất. Tuy nhiên, việc sử dụng dạng nghiệm của phương trình (1.26) phù hợp với sự gián đoạn tại $t = 0$ (tức là $g(0^-) \neq x(0) = x_0$) nhưng dẫn tới tính bảo toàn khi sử dụng bất đẳng thức tam giác (1.38). Khi xem xét sự gián đoạn như vậy, ước lượng của K từ phương pháp được tối ưu.

Định lý 1 cho ta kết quả chung cho các hệ thống DDE. Với trường hợp vô hướng, kết quả có thể được đơn giản hóa hơn nữa. Xét dạng vô hướng của phương trình (1.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} + ax(t) + a_d x(t-h) &= 0, t > 0 \\ x(t) &= g(t), t \in [-h, 0]; x(0) = x_0, t = 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

trong đó a, a_d, h là các hằng số vô hướng, t là thời gian, $x(t)$ và $g(t)$ là các hàm vô hướng.

Hệ quả 1. Nếu tồn tại các đại lượng vô hướng α, K_1, K_2, K_3 và K_4 sao cho

$$\alpha = \operatorname{Re} \left[\frac{W_0(-a_d h e^{ah})}{h} - a \right] \quad (1.46)$$

$$K_1 = \sup_{0 \leq t < h} \|e^{(-a-\alpha)t}\| = \begin{cases} e^{(-a-\alpha)h}, & -a > \alpha \\ 1, & -a \leq \alpha \end{cases} \quad (1.47)$$

$$K_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t \geq h} \left\| \sum_{k=-N}^N \frac{e^{(S_k-\alpha)t}}{1 - a_d h e^{-S_k h}} \right\| \right\} \quad (1.48)$$

$$K_3 = \sup_{0 \leq t < h} \int_0^t \|e^{(-a-\alpha)t+a\tau} a_d\| d\tau = \left\| \frac{a_d(1 - e^{-ah})e^{-\alpha h}}{a} \right\| \quad (1.49)$$

$$K_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t \geq h} \int_0^h \left\| \sum_{k=-N}^N \frac{a_d r^{-S_k \tau}}{1 - a_d h e^{-S_k h}} e^{(S_k-\alpha)t} \right\| d\tau \right\} \quad (1.50)$$

Khi đó quỹ đạo của phương trình (1.45) được giới hạn bởi hàm mũ $\|x(t)\| \leq K e^{\alpha t} \Phi(h)$ với mọi $t > 0$, trong đó $\Phi(h) = \sup_{-h \leq t \leq 0} \{\|x(t)\|\}$.

Chứng minh. Nghiệm của phương trình (1.45) có thể viết dưới dạng chuỗi hàm Lambert W, W_k (Asl and Ulsoy, 2003) như sau

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^I e^{S_k t}, S_k = \frac{1}{h} W_k(-a_d h e^{a h}) - a \quad (1.51)$$

Theo biến đổi Laplace dựa vào phương pháp trong Yi et al. (2006), C_k^I trong phương trình (1.51) được xác định bởi

$$C_k^I = \frac{x_0 - a_d \int_0^h e^{-S_k t} g(t) dt}{1 - a_d h e^{-S_k h}} \quad (1.52)$$

Lưu ý rằng phản hồi tự do của $x(t)$, sử dụng phương trình (1.51) và (1.52) có thể được tách thành hai phần

$$x(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_0 e^{S_k t}}{1 - a_d h e^{-S_k h}}}_{P_1(t)} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_d \int_0^h e^{-S_k \tau} g(\tau - h) d\tau}{1 - a_d h e^{-S_k h}} e^{S_k t}}_{P_2(t)} \quad (1.53)$$

Ta có thể chứng minh tương tự như định lí 1 để chứng minh cho trường hợp vô hướng.

1.5 Ví dụ số

Trong phần này, một ví dụ vô hướng và một ví dụ ma trận được cung cấp để chứng minh tính hiệu quả của phương pháp tiếp cận được đề xuất.

Ví dụ 1.2. DDE vô hướng:

Xét một DDE vô hướng trong (1.45) với $a = a_d = h = 1$ (Yi et al., 2006)

$$\dot{x} + x(t) + x(t-1) = 0, t > 0 \quad (1.54)$$

Lưu ý rằng giá trị chính xác của $g(t)$ và x_0 không cần thiết ở đây nhưng sup của chúng được biết đến là $\Phi(h) = \sup_{-h \leq t \leq 0} \{\|x(t)\|\}$. Hàm phân rã thu được áp dụng cho bất kì hàm $g(t)$ và x_0 nào của hệ thống.

Từ phương trình (1.46), giá trị nằm ngoài cùng bên phải được tìm thấy là:

$$\alpha = \operatorname{Re} \left[\frac{W_0(-a_d h e^{a h})}{h} - a \right] = -0.605 \quad (1.55)$$

Do đó ta thu được tốc độ phân rã $\alpha = -0.605$. Tiếp theo, các phương trình (1.47), (1.48), (1.49), (1.50) đã được sử dụng để tính các giá trị K_1, K_2, K_3, K_4 tương ứng. Để thuận lợi cho quá trình này, ta định nghĩa

$$J_1(t) = e^{(-a-\alpha)t}, \quad t \in [0, h) \quad (1.56)$$

$$J_2(N, t) = \left\| \sum_{k=-N}^N \frac{e^{(S_k-\alpha)t}}{1 - a_d h e^{-S_k h}} \right\|, \quad t \in [h, \infty) \quad (1.57)$$

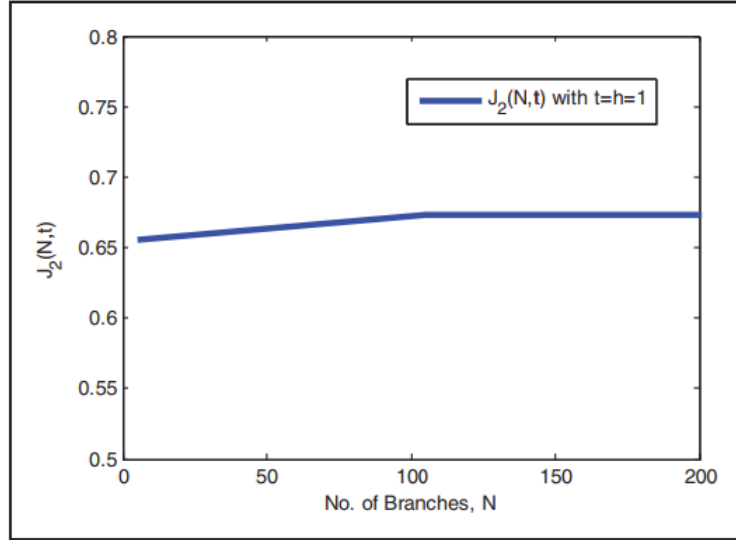
$$J_3(t) = \left\| \frac{a_d(1 - e^{-ah})e^{-\alpha h}}{a} \right\|, \quad t \in [0, h) \quad (1.58)$$

$$J_4(N, t) = \int_0^h \left\{ \left\| \sum_{k=-N}^N \frac{a_d e^{-S_k \tau}}{1 - a_d h e^{-S_k h}} e^{(S_k-\alpha)t} \right\| \right\} d\tau, \quad t \in [h, \infty) \quad (1.59)$$

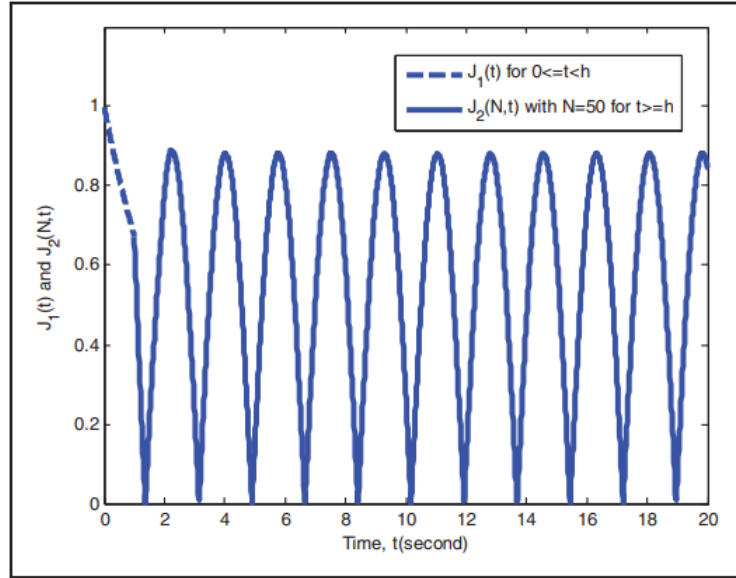
lưu ý rằng $K_1 = \sup_{0 \leq t < h} J_1(t)$, $K_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \sup_{N \rightarrow \infty} J_2(N, t) \}$, $K_3 = \sup_{0 \leq t < h} J_3(t)$ và $K_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \sup_{t \geq h} J_4(N, t) \}$. Với ví dụ này ta thu được $K_1 = J_1(0) = 1$ và $K_3 = J_3(h) = 1.1576$. Để ước lượng $K_2, J_2(N, t)$ trong phương trình (1.57), ta phải đánh giá cho $t \geq h$ với N đủ lớn. Đầu tiên, lưu ý rằng $J_2(N, t)$ tiếp cận một biên độ không đổi vì $\max\{\text{Re}(S_k - \alpha)\} \geq 0$ đúng với mọi nhánh. Do đó, nó luôn luôn đủ để kiểm tra một vài nhánh đầu tiên (ở đây $0 \leq t \leq 5h$) để thu được giá trị lớn nhất của chúng. Thứ hai, người ta đã quan sát thấy rằng sự hội tụ của $J_2(N, t)$ là nhanh hơn nhiều khi t càng lớn. Ví dụ, ở đây khi $t > 1.5$, $J_2(N, t)$ là rất gần với quỹ đạo cuối cùng với $N \geq 10$. Điều đó thuận lợi để tìm vị trí của đỉnh với N đủ lớn đầu tiên (ví dụ $N = 10$ là đủ ở đây) và sau đó tính $J_2(N, t)$ tại vị trí cụ thể khi N tăng lên để có độ chính xác tốt hơn, nếu cần thiết.

Do không gian hạn chế, chỉ có sự hội tụ cho trường hợp xấu nhất (tức là $t = h = 1$) được cung cấp ở đây trong Hình 2. Ở đây, ta lấy $N = 50$ và thu được $k = 0.9$ từ Hình 3. Cũng lưu ý rằng $J_2(N, t)$ với $N = 50, t = h$ là rất gần với $J_1(t)$ với $t = h^-$, cho nhất sự nhất quán tốt của hai đối tượng.

Sự hội tụ của $J_4(N, t)$ tại $t = 1$ được thể hiện trong Hình 4. K_4 được chọn bằng cách lấy giá trị lớn nhất dọc theo quỹ đạo của $J_4(N, t)$ với số nhánh N đủ lớn (ví dụ $N = 50$) trong Hình 5. Có thể thấy rằng $J_4(N, t)$ với $N = 50, t = h$ cũng phù hợp với $J_3(t)$ với $t = h^-$.



Hình 1.3: Sự hội tụ của $J_2(N, t)$ tại $t = h = 1$ trong Ví dụ 1

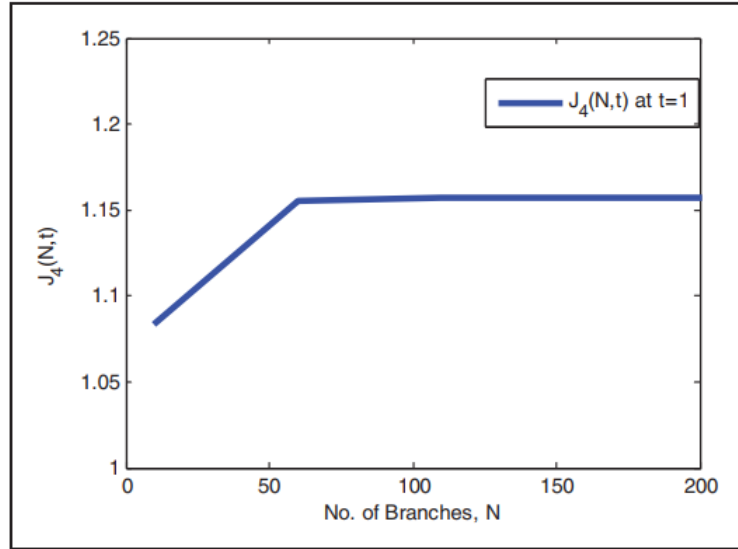


Hình 1.4: Hàm $J_1(t)$ và $J_2(t)$ với $N = 50$ trong Ví dụ 1

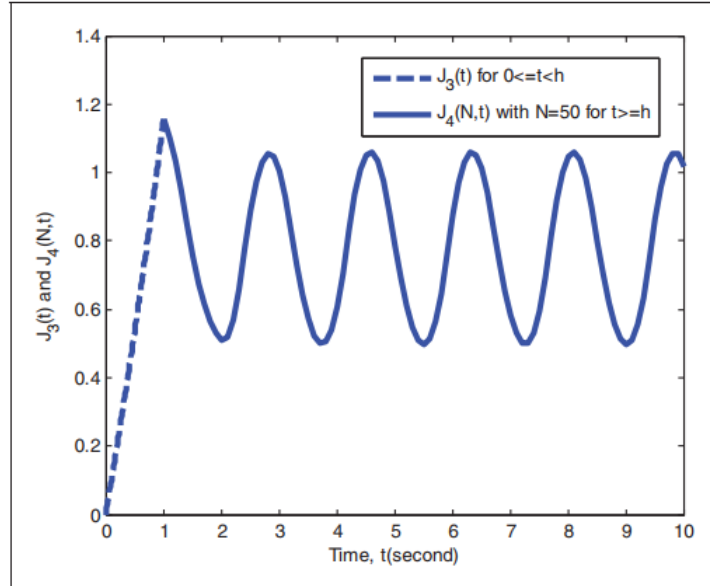
Do đó, ta được $K_1 = 1, K_2 = 0.9, K_3 = 1.1576, K_4 = 1.16$ và hệ số J được ước lượng là

$$K = \max(K_1, K_2) + \max(K_3, K_4) = 2.16$$

Các tham số của hàm phân rã thu được bằng các phương pháp trong in Hale and Verduyn-Lunel (1993) and Mondie' and Kharitonov (2005) và bằng cách sử dụng phương pháp được đề xuất, được so sánh trong Bảng 1. Tốc độ phân rã α được cải thiện đáng kể so với trong Hale and Verduyn-Lunel (1993) and Mondie' and Kharitonov (2005). Để ước lượng hệ số K , cách tiếp cận đạt được kết quả



Hình 1.5: Sự hội tụ của $J_2(N, t)$ tại $t = h = 1$ trong Ví dụ 1



Hình 1.6: Hàm $J_3(t)$ và $J_4(t)$ với $N = 50$ trong Ví dụ 1

conservative hơn trong ví dụ này vì ta sử dụng bất đẳng thức tam giác để tách riêng P_1 và P_2 khi lấy chuẩn. Cũng lưu ý rằng điểm kì dị tại $t = 0$ (tức là nếu $g(0) \neq x_0$) được xem xét trong ví dụ của chúng ta. Một điểm kì dị như vậy không thể được chấp nhận bằng phương pháp dựa trên hàm Lyapunov (tức là Mondie' and Kharitonov, 2005), vì nó biểu thị hàm Lyapunov không khả vi liên tục tại $t = 0^+$. Mặc dù ước lượng của K sử dụng phương pháp hàm Lambert W lớn hơn, nhưng hàm phân rã theo cấp số nhân sử dụng cách tiếp cận mới cho ước lượng tốt hơn khi t càng lớn như hàm phân rã theo hàm mũ.

Nhận xét 5. Tốc độ phân rã thu được trong phương pháp được đề xuất là tối ưu, cái mà không thể đạt được khi sử dụng phương pháp Lyapunov và phương pháp đo lường ma trận so tính hạn chế của chúng. Mặc dù chỉ so sánh các phương pháp đã chọn khác ở đây, nhưng tính hạn chế là thứ vốn có trong phương pháp Lyapunov và phương pháp đo lường ma trận.

Ví dụ 1.3. Dạng ma trận của phương trình vi phân có trễ:

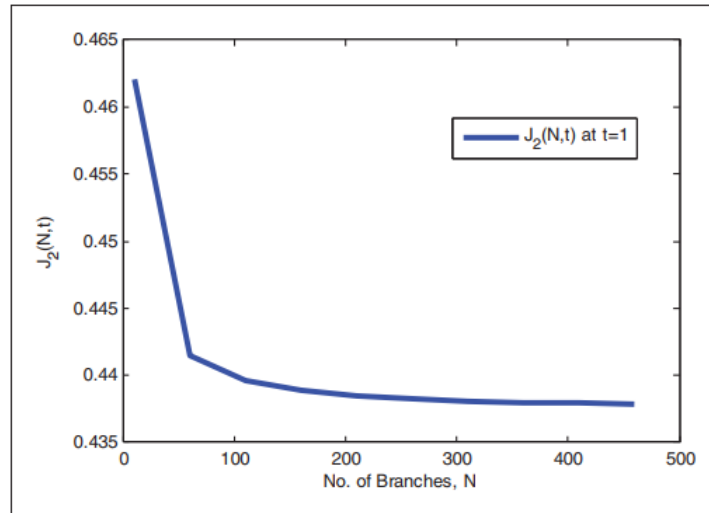
Xét ví dụ (Yi et al., 2006)

$$\dot{x} + Ax(t) + A_d x(t-h) = 0, \quad t > 0, \quad (1.60)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}; \quad A_d = \begin{bmatrix} -1.66 & 0.697 \\ -0.93 & 0.33 \end{bmatrix}; \quad h = 1$$

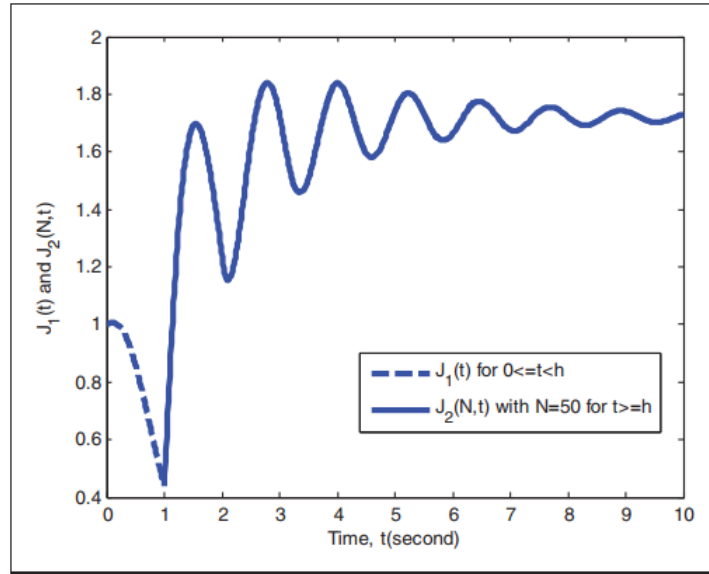
Đầu tiên, phương pháp hàm Lambert W được đề xuất trong Yi et al. (2006) được



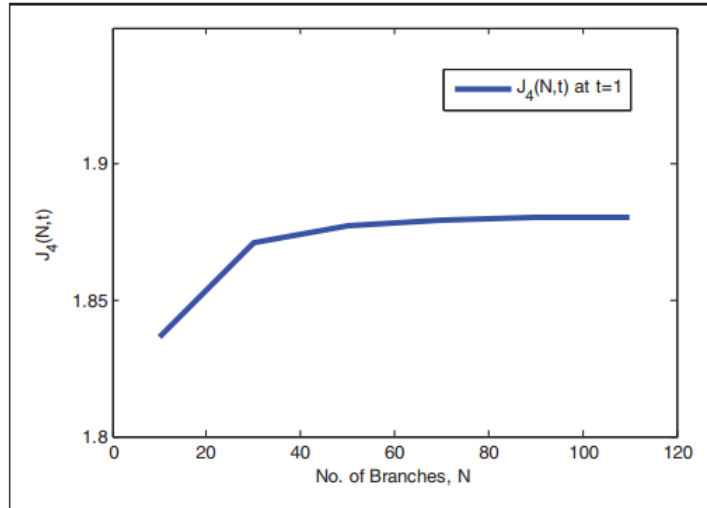
Hình 1.7: Sự hội tụ của $J_2(N, t)$ tại $t = h = 1$ trong Ví dụ 2

sử dụng để phân tích phổ của hệ ma trận này và xác định vị trí ngoài cùng bên phải. Với ví dụ này, $m = Nullity(A_d) = 0$ và giá trị ngoài cùng bên phải của hệ có thể thu được bằng nhánh chính $k = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} \alpha &= \max\{\text{Re}(eig(S_0))\} \\ &= \max \left\{ \text{Re} \left(eig \left(\frac{1}{h} W_0(-A_d h Q_0) - A \right) \right) \right\} \\ &= -1.10119 \end{aligned} \quad (1.61)$$

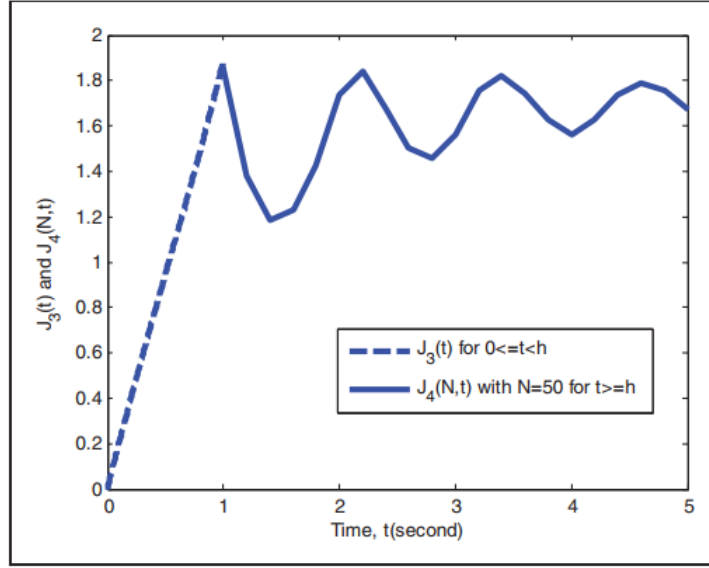


Hình 1.8: Hàm $J_1(t)$ và $J_2(t)$ với $N = 50$ trong Ví dụ 2



Hình 1.9: Sự hội tụ của $J_4(N, t)$ tại $t = h = 1$ trong Ví dụ 2

Sau khi thu được tốc độ phân rã, vế phải của các phương trình (1.33), (1.34), (1.35) và (1.36) được đánh giá bằng số để tính các giá trị K_1, K_2, K_3 và K_4 tương ứng.



Hình 1.10: Hàm $J_3(t)$ và $J_4(t)$ với $N = 50$ trong Ví dụ 2

Tương tự, ta định nghĩa

$$J_1(t) = \left\| e^{(-A-\alpha I)t} \right\|, \quad t \in [0, h) \quad (1.62)$$

$$J_2(N, t) = \left\| \sum_{k=-N}^N \left\{ e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^N T_{kj}^I L_{kj}^I \right\} \right\|, \quad t \in [h, \infty) \quad (1.63)$$

$$J_3(t) = \int_0^t \left\| e^{(-A-\alpha I)t + A\tau} A_d \right\| d\tau, \quad t \in [0, h) \quad (1.64)$$

$$J_4(N, t) = \int_0^h \left\| \sum_{k=-N}^N \left\{ e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n (T_{kj}^I L_{kj}^I A_d e^{\lambda_{ki}\tau}) \right\} \right\| d\tau, \quad t \in [h, \infty) \quad (1.65)$$

Lưu ý rằng $K_1 = \sup_{0 \leq t < h} J_1(t)$, $K_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \{\sup_{t \geq h} J_2(N, t)\}$, $K_3 = \sup_{0 \leq t < h} J_3(h)$ và $K_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} \{\sup_{t \geq h} J_4(N, t)\}$

Như trong trường hợp vô hướng, $J_2(N, t)$ trong (1.53) cũng hội tụ đến một quỹ đạo nhất định khi N tăng đối với trường hợp ma trận, như biểu diễn trong Hình 6. Do đó K_1 thu được bằng cách tính $J_1(t)$ cho $0 \leq t < h$ và K_2 thu được bằng cách lấy giá trị lớn nhất của $J_2(N, t)$ với $t \geq h$ với một số nhánh N đủ lớn (ở đây $N = 50$) như trong Hình 7.

Một quy trình tương tự cũng có thể áp dụng để thu được K_3 và K_4 như minh họa trong Hình 8 và 9. Kết quả là ta được

$$K_1 = 1.076, K_2 = 1.9, K_3 = 1.89, K_4 = 1.9$$

và hệ số K được xác định bởi

$$K = \max(K_1, K_2) + \max(K_3, K_4) = 3.8$$

Một lần nữa, hàm phân rã được ước lượng bằng phương pháp Mondie' and Kharitonov (2005) and Hale and VerduynLunel (1993) được so sánh với phương pháp được đề xuất trong Bảng 2.

Trong Ví dụ 2, tốc độ phân rã thu được bằng cách sử dụng phương pháp được đề xuất là giá trị tối ưu của α và cho thấy sự cải thiện đáng kể so với các phương pháp miền thời gian khác. Kết quả cho hệ số K từ phương pháp cũng ít hạn chế đáng kể so với các phương pháp khác được xem xét. Với phương pháp Lyapunov, bậc của hệ càng tăng dẫn đến sự tăng về số chiều của bài toán tối ưu tương ứng, dẫn đến hạn chế hơn. Hơn nữa, ước lượng của K thường không được tối ưu hóa trong phương pháp hàm Lyapunov. Với phương pháp hàm Lambert W, vấn đề được giải quyết bằng cách đánh giá chuỗi rõ ràng, không công thức hóa nó như một vấn đề tối ưu hóa.

1.6 Kết luận chương

Trong chương này chúng ta đã thảo luận về một cách tiếp cận dựa trên hàm Lambert W để đưa ra các ước lượng của hàm phân rã cho hệ thống tuyến tính có trễ. Sử dụng phương pháp được đề xuất, chúng ta đạt được ước lượng tối ưu của tốc độ phân rã α . Hệ số hằng K thu được bằng cách sử dụng một chuỗi vô hạn hàm Lambert W và thường ít hạn chế hơn khi được so sánh với một số phương pháp phổ biến khác. Ước lượng tốt hơn của hàm phân rã không chỉ mô tả chính xác hơn trạng thái của hệ thống có trễ mà còn dẫn đến thiết kế điều khiển hiệu quả hơn. Bên cạnh đó, một chứng minh tổng quát về sự hội tụ của hàm Lambert cũng như việc xác định các giá trị riêng trội bằng cách trích ra một số lượng hữu hạn nhánh của hàm Lambert cũng còn mở cho các nghiên cứu trong tương lai. Một nhánh nghiên cứu khác có liên quan đến hàm Lambert cũng đang được quan tâm là hệ thống có trễ tuần hoàn theo thời gian ([? ?]), trong đó độ trễ và thời gian tuần hoàn khiến cho việc ước lượng tốc độ phân rã trở nên khó khăn hơn.

Chương 2

Một số trường hợp đặc biệt trong phân tích tính chất ổn định của các hệ động lực có trễ

2.1 Giới thiệu

Ta xét hệ điều khiển có trễ với hệ số hằng được biểu diễn bằng phương trình vi phân có trễ dạng

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau). \quad (2.1)$$

Như trong chương trước chúng ta đã thấy việc phân tích tính chất ổn định của hệ đã được giải quyết bằng việc sử dụng các giá trị riêng trội của hệ tương ứng với các nhánh thứ $k = 0, \pm 1, \dots, \pm m$, trong đó m là số khuyết của ma trận B (tức là số chiều của hạt nhân ma trận) trong (2.1). Do đó, chỉ có một số nhánh hữu hạn được xem xét để xác định xem một nghiệm có ổn định hay không, hoặc để đánh giá tốc độ tăng/giảm của nghiệm. Nền tảng cơ bản của phương pháp luận này là giả thiết rằng nhánh chính của hàm Lambert W xác định sự ổn định của hệ thống. Điều này đã được chứng minh cho các hệ thống bậc nhất ([1]; [4]). Tuy nhiên với trường hợp bậc cao hơn, kết quả này không được mở rộng chặt chẽ, và chỉ dựa trên các quan sát của Yi, Nelson và Ulsoy trong [7].

Trong chương này, ta chỉ ra rằng giả thiết trên nói chung không hoàn toàn đúng. Bằng việc nghiên cứu các hệ bậc hai cụ thể với cấu trúc rất phổ biến trong các ứng dụng, ta chỉ ra rằng toàn bộ phổ của hệ thống (2.1) có thể tìm được mà chỉ cần sử dụng hai nhánh của hàm Lambert W (thay vì $2m + 1$ nhánh như trong Giả thiết 1), tức là không có tương ứng một - một nào giữa các giá trị riêng và các nhánh của hàm Lambert W . Điều này do thực tế rằng một phương trình phi tuyến

quan trọng trong cách tiếp cận sử dụng hàm Lambert không có nghiệm duy nhất. Hơn nữa, ta chỉ ra rằng nhánh chính không những có thể sử dụng để tìm nghiệm trội nhất của hệ mà còn có thể dùng để tìm các nghiệm khác nữa. Cấu trúc của chương này như sau. Mục 2.2 trình bày về hệ bậc hai và những kết quả chính thu được khi phân tích hệ đó. Những phân tích này được minh họa bằng thử nghiệm số trong mục 5. Mục 6, ta sẽ trình bày các thảo luận trong một trường hợp đặc biệt khác mà kết quả của mục 4 không thể áp dụng trực tiếp. Cuối cùng, ta đưa ra một số kết luận của nghiên cứu trong mục 7.

2.2 Một trường hợp đặc biệt của hệ bậc hai

Xét hệ (1.15), với A và B là các ma trận có dạng sau

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Từ (2.2), ta có hạng của B bằng 1, lý thuyết dự đoán rằng nghiệm của (1.20) tương ứng với $k = 0$ và $k = \pm 1$ cho ta các nghiệm trội của bài toán.

Từ cấu trúc của B , ta thấy $M_k = \tau B Q_k$ có dạng

$$M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Theo định nghĩa của ma trận hàm Lambert W , sử dụng trường hợp nhánh chuyển mạch, vì M_k có một giá trị riêng bằng 0.

Nếu $m_{22} \neq 0$, ta có

$$W_k(M_k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{m_{21}}{m_{22}} W_k(m_{22}) & W_k(m_{22}) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Từ đó ta được

$$S_k = \frac{1}{\tau} W_k(M_k) + A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m_{21}}{\tau m_{22}} W_k(m_{22}) + a_{21} & \frac{1}{\tau} W_k(m_{22}) + a_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Nếu $m_{22} = 0, m_{21} \neq 0$, ta được

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m_{21}}{\tau} + a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

trong đó, ta sử dụng $W_0(0)' = 1$. Bây giờ, ta sẽ phát biểu kết quả chính của bài toán.

Định lý 1. Cho A và B được cho bởi (2.2). Lấy $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ là một cặp giá trị riêng liên hợp bất kỳ. Giả sử bội của chúng bằng một. Khi đó, với $k = 0$ hoặc $k = -1$, tồn tại một nghiệm thực của (1.20), sao cho nếu nghiệm này và giá trị k tương ứng được chọn trong bước đầu tiên của Thuật toán 1 thì giá trị riêng λ và $\bar{\lambda}$ được tìm thấy trong bước cuối cùng của thuật toán.

Chứng minh. Ý tưởng chính là thực hiện các bước của Thuật toán 1 theo thứ tự ngược lại.

Ta xây dựng một ma trận thực S_k nhận cặp $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ là giá trị riêng là

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -|\lambda|^2 & 2\text{Re}(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Sau đó, ta xây dựng M_k từ (2.7). Xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $2\text{Re}(\lambda) \neq a_{22}$.

So sánh (2.5) và (2.7), ta lấy M_k có dạng (2.3), trong đó $m_{21} \in \mathbb{R}$ và $m_{22} \in \mathbb{R}$ được chọn sao cho thỏa mãn phương trình sau

$$\begin{cases} 2\text{Re}(\lambda) = \frac{1}{\tau}W_k(m_{22}) + a_{22} \\ -|\lambda|^2 = \frac{m_{21}}{\tau m_{22}}W_k(m_{22}) + a_{21} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra

$$W_k(m_{22}) = \tau(2\text{Re}(\lambda) - a_{22}). \quad (2.8)$$

$$m_{21} = -\frac{m_{22}(|\lambda|^2 + a_{21})}{2\text{Re}(\lambda) - a_{22}}. \quad (2.9)$$

Lựa chọn như vậy luôn thực hiện được với $k = 0$ hoặc $k = -1$. Phương trình (2.8) ngụ ý rằng $W_k(m_{22})$ phải là một số thực. Như đã đề cập trước đó, theo định nghĩa nhánh cắt của hàm Lambert W thì chỉ có hai nhánh cho giá trị thực là nhánh chính $k = 0$ và nhánh $k = -1$ và hợp hai miền giá trị của W_0 và W_{-1} chứa tập số thực \mathbb{R} (xem hình 1). Hơn nữa, trong trường hợp này, $m_{22} \neq 0$, đó là lí do của việc sử dụng (2.5).

Trường hợp 2: $2\text{Re}(\lambda) = a_{22}$.

Ta có $\frac{1}{\tau}W_k(m_{22}) = 0$. Do đó $W_k(m_{22}) = 0$. Vì vậy $m_{22} = 0$.

Khi đó

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m_{21}}{\tau} + a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Vì vậy $m_{21} = -\tau(|\lambda|^2 + a_{21})$.

Do vậy

$$M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tau(|\lambda|^2 + a_{21}) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Cuối cùng, ta có cặp (k, M_k) được xây dựng như trên là một nghiệm của (1.20).

Thật vậy, lấy \mathbf{v} và $\bar{\mathbf{v}}$ là các vector riêng tương ứng với các giá trị riêng λ và $\bar{\lambda}$. Nếu λ là giá trị riêng có bội bằng 1, thì cặp (\mathbf{V}, λ) là một cặp bất biến của (1.15), trong đó

$$\mathbf{V} := \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix}, \quad \lambda := \text{diag}(\lambda, \bar{\lambda}). \quad (2.11)$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}\lambda - A - B\mathbf{V}\exp(-\lambda) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} - A - B \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \exp \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} - A - B \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ta có phương trình đặc trưng

$$\det(\lambda I_2 - A - Be^{-\lambda\tau}) = 0.$$

Vì \mathbf{v} và $\bar{\mathbf{v}}$ là các vector riêng nên ta có

$$\begin{cases} (\lambda I_2 - A - Be^{-\lambda\tau})\mathbf{v} = 0 \\ (\bar{\lambda} I_2 - A - Be^{-\bar{\lambda}\tau})\bar{\mathbf{v}} = 0 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{v} - A\mathbf{v} - Be^{-\lambda\tau}\mathbf{v} = 0 \\ \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}} - A\bar{\mathbf{v}} - Be^{-\bar{\lambda}\tau}\bar{\mathbf{v}} = 0 \end{cases}.$$

Như vậy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} - A - B \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda\tau} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda}\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Từ (2.12) và (2.13) ta thấy \mathbf{V} và λ thỏa mãn phương trình

$$\mathbf{V}\lambda - A - B\mathbf{V}\exp(-\lambda) = 0. \quad (2.14)$$

Ta có thể kiểm tra trực tiếp S_k có phân tích Jordan là

$$S_k = \mathbf{V}\lambda\mathbf{V}^{-1}. \quad (2.15)$$

Từ đó ta có

$$\exp(-S_k) = \exp(-\mathbf{V}\lambda\mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{V}\exp(-\lambda)\mathbf{V}^{-1}. \quad (2.16)$$

Suy ra

$$\mathbf{V}\lambda = S_k\mathbf{V}, \quad \mathbf{V}\exp(-\lambda) = \exp(-S_k)\mathbf{V}. \quad (2.17)$$

Thay vào (2.14), với V khả nghịch, ta được

$$S_k - A - B\tau \exp(-S_k\tau) = 0. \quad (2.18)$$

Cuối cùng, thay S_k bởi

$$S_k = \frac{1}{\tau}W_k(M_k) + A \quad (2.19)$$

ta được kết quả trong (1.20).

Định lý 2. Cho A và B được cho bởi (2.2). Lấy $\lambda_1 \neq \lambda_2$ là hai giá trị riêng thực bội đơn của phương trình đặc trưng của hệ cho bởi (2.2). Sau đó, cho $k = 0$ hoặc $k = -1$, tồn tại một nghiệm thực của (1.20), sao cho nếu nghiệm này và giá trị k tương ứng được chọn trong bước đầu tiên của thuật toán 1 thì giá trị riêng λ_1 và λ_2 được tìm thấy trong bước cuối cùng của thuật toán.

Chứng minh. Chứng minh hoàn toàn tương tự với mệnh đề 1. Ta xây dựng ma trận S_k nhận λ_1 và λ_2 làm giá trị riêng là

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Tiếp theo ta sẽ xây dựng ma trận M_k . Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. $\lambda_1 + \lambda_2 \neq a_{22}$

Ta đi tìm m_{21} và m_{22} sao cho

$$\begin{cases} W_k(m_{22}) = \tau(\lambda_1 + \lambda_2 - a_{22}) \\ m_{21} = -\frac{m_{22}(\lambda_1\lambda_2 + a_{21})}{\lambda_1 + \lambda_2 - a_{22}} \end{cases}.$$

Điều này luôn thực hiện được cho trường hợp $k = 1$ hoặc $k = 0$ và $W_k(M_{22})$ phải là số thực.

Trường hợp 2. $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{22}$

$$M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tau(\lambda_1\lambda_2 + a_{21}) & 0 \end{bmatrix}.$$

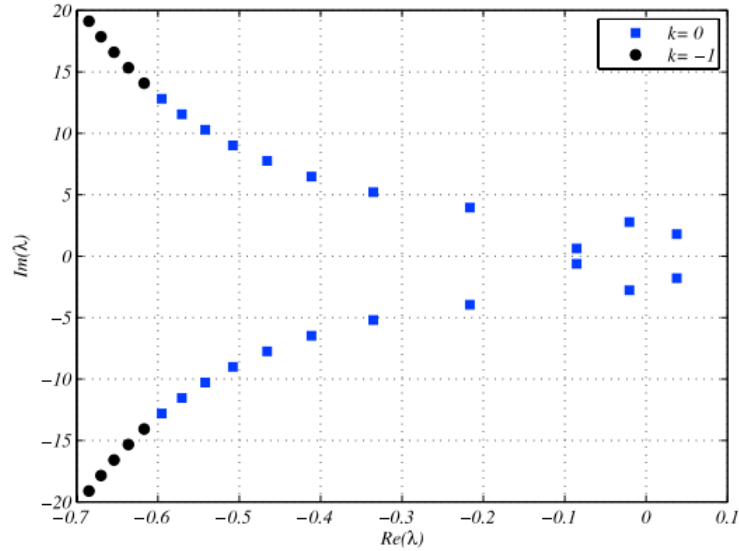
Ta có cặp (k, M_k) chính là một nghiệm của (1.20).

Từ Định lý 1 và 2, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 1. Cho A và B được cho bởi (2.2). Nếu tất cả các giá trị riêng của (2.2) là đơn và nếu số lượng các giá trị riêng thực khác một, bằng cách lựa chọn ban đầu M_k thích hợp cho phương trình (??), thì tất cả các giá trị riêng có thể tìm được chỉ bằng hai nhánh W_0 và W_{-1} của ma trận hàm Lambert W . Hơn nữa, ta có thể hạn chế rằng điều kiện ban đầu của (1.20) phải là ma trận giá trị thực.

Chú ý. Những phân tích ở trên chỉ ra rằng, với điều kiện ban đầu thích hợp, tất cả các giá trị riêng của hệ (2.2) có thể tìm thấy bằng hai nhánh $k = 0$ và $k = -1$. Tuy nhiên, số nhánh cao hơn có thể được sử dụng để tìm các cặp nghiệm khác nhau sử dụng cách tiếp cận ngược như ở trên, không có bất kỳ cấu trúc cụ thể nào. Điều này được chứng minh trong phần sau.

2.3 Ví dụ số



Hình 2.1: Các nghiệm đặc trưng của hệ được nghiên cứu dưới đây. Các nghiệm được biểu diễn bởi hình vuông màu xanh có thể tìm thấy bằng nhánh chính của hàm Lambert W , những hình tròn màu đen được tìm thấy tương ứng với nhánh $k = -1$

Ta xét một hệ được định nghĩa bởi ma trận

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -0.6 \end{bmatrix} (t - 5) \quad (2.21)$$

Khi dùng hộp công cụ LambertDDE ([6]) để tính các nghiệm đặc trưng của hệ thì phần mềm này không thể tìm được nghiệm với bất kì giá trị k nào. Với nghiệm số, ta sử dụng ma trận $\exp(-A\tau)$ là điều kiện ban đầu của Q_k . Trong trường hợp này, giá trị tìm được nằm ngoài miền hội tụ nghiệm của (1.20). Để thu được ước lượng hậu nghiệm của Q_k , ta đảo ngược quá trình tìm nghiệm như trong chứng minh của Định lý 1. Đầu tiên, ta sử dụng thuật toán QPmR ([5]) để tìm giá trị riêng của hệ nằm trong miền gần với gốc tọa độ của mặt phẳng phức. Các giá trị riêng của hệ được biểu diễn ở Hình 2.

Các giá trị riêng trội của hệ là $\lambda = 0.0377 \pm 1.7911i$. Xét ma trận S là

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.2096 & 0.0753 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Từ (19), ta có

$$W_k(M) = \tau(S - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8.9521 & 5.3766 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Ta thấy $W(m_{22}) \in [-1, \infty)$, đó là miền của nhánh chính W_0 của hàm Lambert W.

Do đó, có một ma trận M ứng với $k = 0$ và thỏa mãn (2.23) là

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.9361 & 1.1628 \end{bmatrix} \times 10^3. \quad (2.24)$$

Vì B và M là các ma trận suy biến nên có vô số ma trận Q_0 thỏa mãn $M_0 = \tau B Q_0$.

Ta có thể lấy Q_0 như sau

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -650.3812 & -392.6121 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Khi ma trận Q_0 này được sử dụng như một giá trị ban đầu ta tìm được giá trị riêng trội của bài toán ngay trong phép lặp đầu tiên như mong đợi. Hơn nữa, nếu ma trận này bị nhiễu một chút thì phương pháp vẫn hội tụ đến nghiệm như trên sau một số phép lặp.

Bây giờ, ta xét một cặp giá trị riêng không trội là $\lambda = -9.4133 \pm 6.4803i$. Sử dụng lập luận tương tự, ta thu được ma trận S như sau

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -42.1633 & -0.8226 \end{bmatrix}, W_k(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -185.8166 & 0.8868 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Trong trường hợp này, ta có $W(m_{22}) \in [-1, \infty)$. Điều này cho thấy rằng cặp giá trị riêng cũng được tìm thấy bằng cách sử dụng nhánh chính của hàm Lambert W.

Khi đó, ta có

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -451.0419 & 2.1526 \end{bmatrix}.$$

Từ đó, ta có ma trận Q_0 là

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 145.3412 & -5.7175 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

được tạo ra như trường hợp trước, được sử dụng như điều kiện ban đầu. Phương pháp số hội tụ đến nghiệm khi sử dụng nhánh chính.

Thực tế, ta quan sát được rằng khi sử dụng điều kiện ban đầu phù hợp, 11 cặp nghiệm được biểu diễn bằng hình vuông màu xanh trong hình 2 có thể tìm thấy khi sử dụng nhánh chính của ma trận hàm Lambert W .

Nếu ta xét cặp giá trị riêng $\lambda = -0.6169 \pm 14.0734$ thì S và $W_k(M_k)$ tương ứng là

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -198.4405 & -1.2338 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$W_k(M) = \tau(S - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -967.2027 & -1.1692 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Trong trường hợp này, $W(M_{22}) \in (-\infty; -1]$, đó là miền giá trị của nhánh $k = -1$.

Ứng với $k = -1$, ta có ma trận M_{-1} như sau

$$M_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -300.4152 & -0.3632 \end{bmatrix}$$

Từ đó, ta có ma trận Q_{-1} là

$$Q_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 95.1384 & -4.8789 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Đây là một nghiệm của (1.20) ứng với $k = -1$. Chọn điều kiện ban đầu gần với ma trận này đảm bảo sự hội tụ cho nghiệm này.

Quy trình này có thể được lặp lại cho tất cả các nghiệm được đánh dấu bằng hình vuông màu đen trong hình 2, cũng như cho các nghiệm còn lại ở phía bên trái mặt phẳng phức, bằng việc luôn luôn sử dụng nhánh W_{-1} . Ví dụ này minh họa quá trình tính toán của toàn bộ phổ của hệ (2.2) bằng cách sử dụng chỉ hai nhánh thực của hàm Lambert W và việc chọn điều kiện ban đầu thích hợp cho phương trình phi tuyến (1.20).

Để thấy số nhánh cao hơn cũng được sử dụng để tìm giá trị riêng, ta xét một cặp giá trị riêng không liên hợp, với $\lambda_1 = -0.0204 + 2.7705i$ và $\lambda_2 = -0.4658 + 7.7500i$. Chú ý cách một trong những giá trị riêng này được tìm thấy sử dụng $k = 0$, trong khi những giá trị riêng khác sử dụng $k = -1$ ở ví dụ trước. Với hai giá trị riêng này, theo Định lý 2, ta có ma trận S như sau

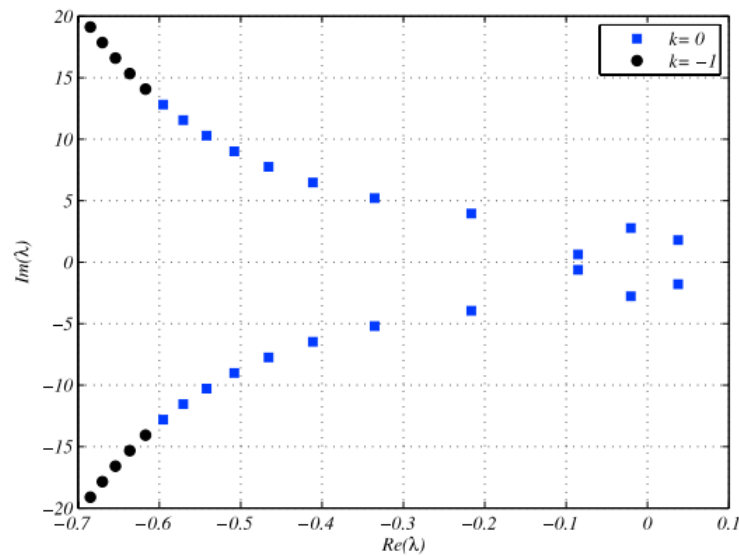
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21.4619 + 1.4486i & -0.4862 + 10.5205i \end{bmatrix}.$$

Do đó,

$$W_k(M) = \tau(S - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 132.3092 + 7.2411i & 2.5693 + 52.6026i \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Theo [2] $W_k(m_{22})$ nằm trong miền giá trị của nhánh thứ 9 của hàm Lambert W. Do đó, cặp giá trị riêng này được tìm thấy bằng cách sử dụng $k = 9$ và một điều kiện ban đầu thích hợp của (1.20). Thêm vào đó, ta nhận thấy rằng nếu giữ nguyên λ_2 và sử dụng liên hợp của λ_1 , ma trận được tạo thành nằm trong phạm vi nhánh ứng với $k = 4$. Điều này nhấn mạnh sự thiếu tương ứng cấu trúc giữa các giá trị riêng của (2.2) và các nhánh của ma trận hàm Lambert W.

2.4 Trường hợp hệ có một số lẻ của các giá trị riêng thực



Hình 2.2: Các nghiệm đặc trưng của hệ trong (2.32)

Các thảo luận ở trên đã xem xét các hệ thống mà tất cả các giá trị riêng của nó có thể ghép thành từng cặp sao cho các ma trận thực S được xây dựng. Trường hợp này xảy ra khi các giá trị riêng phức đi theo cặp liên hợp và số giá trị riêng thực là số chẵn. Khi có một số lẻ của phần thực của các giá trị riêng, điều này là không thể. Trong phần này, ta xem xét và thảo luận sâu hơn về vấn đề này.

Xét hệ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x.(t-1), \quad (2.32)$$

ta có phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + 1 - e^\lambda = 0. \quad (2.33)$$

Từ (2.33), ta có thể thấy rằng chỉ có một giá trị riêng thực nằm ở gốc tọa độ và có bội 1. Hơn nữa, đây còn là giá trị riêng trội nhất (xem Hình 2.3).

Ta thấy B có 0 là giá trị riêng bội 2. Theo những quan sát trong Yi (2009) và Yi et al. (2010c), trong trường hợp giá trị riêng trội có thể được tìm thấy bằng cách sử dụng nhánh chính hoặc nhánh $k = \pm 1$.

Sử dụng kĩ thuật tính ngược ở trên cho ví dụ này, ta thấy tất cả các giá trị riêng liên hợp có thể thu được bằng cách sử dụng nhánh $k = -1$ và điều kiện ban đầu thích hợp. Tuy nhiên, giá trị riêng trội ở gốc tọa độ không thể tìm thấy bằng cách sử dụng nhánh chính của hàm Lambert W. Như trong Định lý 1-2 cách xây dựng ma trận thực S_k không thể thực hiện được với giá trị riêng thực đơn. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng tồn tại một ma trận thực M_k tương ứng với ma trận thực S_k , được định nghĩa bởi (1.18), có giá trị riêng $\lambda = 0$. Vì S_k thỏa mãn (1.16), điều này dẫn đến $Im(S_k)$ là không gian riêng ứng với giá trị riêng 0 có bội hình học bằng 2. Điều này mâu thuẫn với việc hàm $f(\lambda) = \lambda^2 + 1 - e^{-\lambda}$ chỉ có nghiệm thực 0 với bội 1.

Nếu ta nói lỏng điều kiện và cho phép S có giá trị phức như trong phương pháp được trình bày ở Định lý 1-2, ta có thể thay thế các giá trị riêng ở gốc tọa độ với bất kì giá trị riêng phức nào có dạng $\lambda = a + ib$. Điều này dẫn đến các ma trận có dạng

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a - ib \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$W_k(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau & -\tau(a + ib) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Ma trận được cho trong (2.35) có thể tìm được bằng cách sử dụng một giá trị k sao cho $-\tau bi$ thuộc vào miền giá trị của nhánh thứ k của hàm Lambert W. Do đó, với những hệ thống cụ thể, giá trị riêng trội có thể tìm được bằng cách sử dụng bất kì nhánh nào của ma trận hàm Lambert, nếu có một điều kiện ban đầu phù hợp. Thực tế này đã được quan sát trong Chương 3 của Yi et al. (2010c).

2.5 Kết luận chương

Tài liệu tham khảo

- [1] F. M. Asl and A. G. Ulsoy. Analysis of a system of linear delay differential equations. *ASMEJ. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 125:215–223, 2003. (trang 6, 7, 22)
- [2] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the Lambert W function. *In: Advances in Computational Mathematics*, 5:329–359, 1996. (trang 5, 6, 30)
- [3] S. Duan, J. Ni, and A. G. Ulsoy. Decay function estimation for linear time delay systems via the Lambert W function. *Journal of Vibration and Control*, 18(10):1462–1473, 2012. (trang 8)
- [4] H. Shinozaki and T. Mori. Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results. *Automatica*, 42(1):1791–1799, 2006. (trang 22)
- [5] T. Vyhldal and P. Zitek. Mapping based algorithm for large-scale computation of quasipolynomial zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(1):171–177, 2009. (trang 28)
- [6] P. W. U. A. G. Yi, S. Nelson. Dc motor control using the Lambert W function approach. In *IFAC Workshop on Time Delay Systems*. 2012. (trang 8, 28)
- [7] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Delay differential equations via the matrix Lambert W function and bifurcation analysis: application to machine tool chatter. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 4(2):355–368, 2007. (trang 22)
- [8] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Design of observer-based feedback control

- for time delay systems with application to automotive powertrain control. *J. Franklin Institute*, 347(1):358–376, 2010. (trang 8)
- [9] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Eigenvalue assignment via the Lambert W function for control of time-delay systems. *J. Vibration and Control*, 16(7-8):961–982, 2010. (trang 8)
- [10] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. *Time-Delay Systems: Analysis and Control Using the Lambert W Function*. World Scientific, 2010. (trang 6, 7)