

Câu 1 a) Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $x = e^{-x}$? Phép lặp đơn $x_{n+1} = e^{-x_n}$ có hội tụ với giá trị x_0 phù hợp hay không? Tính 6 giá trị đầu tiên của x_n .
b) Câu hỏi tương tự với phép lặp $x_{n+1} = 1 + \arctan(x_n)$.

Câu 2 Chứng minh rằng với các hằng số c, d thỏa mãn $|d| < 1$, phương trình $x = c + d \cos(x)$ có nghiệm duy nhất. Kiểm tra tính hội tụ của phép lặp $x_{n+1} = c + d \cos(x_n)$ và hãy đưa ra đánh giá cho tốc độ hội tụ.

Câu 3 Các phép lặp sau có hội tụ đến α hay không? Nếu hội tụ, hãy xác định tốc độ hội tụ, cho x_0 đủ gần α .

$$\begin{aligned} \text{a) } x_{n+1} &= \frac{15x_n^2 - 24x_n + 13}{4x_n}, \quad \alpha = 1, \\ \text{b) } x_{n+1} &= \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n^3}, \quad \alpha = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tìm số bước lặp cần thiết để nhận được xấp xỉ với sai số tuyệt đối không quá $1e - 5$, với $x_0 = \alpha + 1e - 1$.

Câu 4 Giả sử bài toán tìm nghiệm $f(x) = 0$ có nghiệm α thỏa mãn $f'(\alpha) \neq 0$. Ta có thể chuyển nó về bài toán tìm điểm bất động x của hàm số $g(x) = x + cf(x)$ với hằng số c . Phải chọn c thế nào để đảm bảo sự hội tụ nhanh của phép lặp đơn $x_{n+1} = g(x_n)$, giả sử rằng x_0 đủ gần α ? Kiểm nghiệm kết quả tìm được cho bài toán $x^3 - 5 = 0$.

Câu 5 Phép lặp đơn $x_{n+1} = 2 - (1 + c)x_n + cx_n^3$ sẽ hội tụ đến $\alpha = 1$ với một số giá trị của c , giả sử x_0 đủ gần α .

a) Tìm tất cả mọi c để phép lặp đơn này hội tụ. Tìm mọi c để phép lặp đơn này hội tụ bậc hai.

b) Với một c như vậy, hãy tính số bước lặp cần thiết để đạt được 5 chữ số chắc, cho điều kiện ban đầu $x_0 = \alpha + 1e - 1$.

Câu 6 Phương trình $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ có nghiệm duy nhất trong đoạn $[1, 2]$. Có rất nhiều cách khác nhau để chuyển về bài toán tìm điểm bất động. Hãy xét sự hội tụ của các phép lặp đơn sau, với điều kiện đầu $x_0 = 1.5$. Tìm bậc hội tụ của các phương pháp đó (nếu có) và tính sai số với $n = 1, \dots, 10$, từ đó so sánh với phương pháp phân đôi.

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= g_1(x) = x + x^3 + 4x^2 - 10 & \text{b) } x &= g_2(x) = \sqrt{10/x - 4x} \\ \text{c) } x &= g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3} & \text{d) } x &= g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x + 4}} \\ \text{e) } x &= g_3(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} \end{aligned}$$

Câu 7 Tìm bậc hội tụ của phương pháp lặp sau $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$ trong trường hợp nó hội tụ đến điểm bất động $\alpha = \sqrt{a}$.

Câu 8 Cho các phương trình sau

$$a) \ 3(2x - 1) = \cos(x) \qquad b) \ x^4 - 2x - 3 = 0$$

Hãy xây dựng cho mỗi phương trình một phương pháp lặp đơn hội tụ, biết rằng phương trình $a)$ (t.ú. $b)$) có nghiệm duy nhất trong $(0, 1)$ (t.ú. $(0, 2)$). Viết các công thức đánh giá sai số tiên nghiệm, hậu nghiệm sao cho sai số nhỏ hơn $1e - 4$.

—————Hết—————