Thứ

Ngày / /

Ghi chú:

Bài 1: $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

$f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + (x-1).2(x-2).(x-3)^3 + (x-1)(x-2)^2.3(x-3)^2$

$f'(1) = (1-2)^2.(1-3)^3 = -8$

$f'(2) = 0$

$f'(3) = 0$

Bài 2: $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to} 1 + \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + (x-1).\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)'$

$f'(1) = 1 + \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

$= 1 + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\pi}{4}$

Bài 3:

1) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3}.x^{\frac{1}{3}-1} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3}.x^{-\frac{2}{3}}$

2) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1} + x^{-1/2} + x^{-1/3}$

$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}.x^{-3/2} - \frac{1}{3}.x^{-4/3}$

3) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} = x^{\frac{2}{3}} - 2.x^{-1/2}$

$y' = \frac{2}{3}.x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

4) $y = \sqrt[(m+n)]{(1-x)^m.(1+x)^n} = (1-x)^{\frac{m}{m+n}}.(1+x)^{\frac{n}{m+n}}$

$\ln y = \ln\left[(1-x)^{\frac{m}{m+n}}.(1+x)^{\frac{n}{m+n}}\right]$

$\Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{m+n}.[m\ln(1-x) + n\ln(1+x)]$

Đạo hàm 2 vế ta được:

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{1+x} - \frac{m}{1-x}\right) = \frac{1}{(m+n)}.\frac{(n-m)-(n+m)x}{(1-x)(1+x)}$

Ghi chú:

Thứ

Ngày / /

$$\Rightarrow y' = y \cdot \frac{1}{m+n} \cdot \frac{(n-m)-(n+m)x}{(1-x)(1+x)}$$

$$= (1-x)^{\frac{m}{m+n}} \cdot (1+x)^{\frac{n}{n+m}} \cdot \frac{1}{m+n} \cdot \frac{(n-m)-(n+m)x}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{m}{m+n}} \cdot (1+x)^{\frac{n}{n+m}}}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{(n-m)-(n+m)x}{m+n}$$

$$= \frac{(n-m)-(n+m)x}{m+n} \cdot (1-x)^{\frac{m}{m+n}-1} \cdot (1+x)^{\frac{n}{n+m}-1}$$

$$= \frac{(n-m)-(n+m)x}{(m+n) \cdot \sqrt[(n+m)]{(1-x)^{n} \cdot (1+x)^{m}}}$$

5) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} = \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\ln y = \frac{1}{3} \cdot [\ln(1+x^3) - \ln(1-x^3)]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{3x^2}{1+x^3} + \frac{3x^2}{1-x^3}\right] = x^2\left[\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1-x^3}\right]$$

$$y' = y \cdot x^2 \cdot \left[\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1-x^3}\right]$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \cdot \frac{2x^2}{1-x^6}, \quad |x| \neq 1$$

Ghi chú:

6) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = u^{\frac{1}{2}}$; $u = x + \sqrt{v}$;

với $v = x + \sqrt{x}$

$y' = \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}-1} \cdot u'$; $u' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v'$;

$v' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{v}}\right)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$\Rightarrow y' = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x+\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$, $x > 0$

7) $y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

$y' = \frac{(\sin^2 x)' \cdot \sin x^2 - (\sin x^2)' \cdot \sin^2 x}{(\sin x^2)^2}$

$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot \cos x$

$(\sin x^2)' = 2x \cdot \cos x^2$

$\Rightarrow y' = \frac{2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x^2 - 2x \cdot \cos x^2 \cdot \sin^2 x}{\sin^2 x^2}$

$= \frac{2\sin x\,(\cos x \cdot \sin x^2 - x\cos x^2 \cdot \sin x)}{\sin^2 x^2}$.

8) $y = \frac{1}{\cos^n x} = \cos^{-n} x$, $y' = -n(\cos x)^{-n-1} \cdot (-\sin x)$

$\Rightarrow y' = \frac{n\sin x}{\cos^{n+1} x}$.

Ghi chú:

Thứ

Ngày / /

9) $y = tg\frac{x}{2} - cotg\frac{x}{2}$

$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{\sin^2 x}$

10) $y = x^{\frac{1}{x}}$

lôga cuả 2 vế ta được: $\ln y = \frac{1}{x}\cdot\ln x$

$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

$\Rightarrow y' = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}\cdot(1-\ln x)$

11) $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$y' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

12. $y = e^x\cdot\ln\sin x$

$y' = e^x\cdot\ln\sin x + (\ln\sin x)'\cdot e^x$

$= e^x\cdot\ln\sin x + e^x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$

$= e^x\cdot\left(\ln\sin x + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = e^x\cdot(\ln\sin x + cotg x)$
với $\sin x > 0$

Thứ

Ghi chú:

13) $y = \log_3 (x^2 - \sin x)$ ĐK: $x^2 - \sin x > 0$

$y' = \dfrac{1}{\ln 3 \cdot (x^2 - \sin x)} \cdot (x^2 - \sin x)'$

$= \dfrac{1}{\ln 3 \cdot (x^2 - \sin x)} \cdot (2x - \cos x)$

$= \dfrac{2x - \cos x}{\ln 3 \cdot (x^2 - \sin x)}$

14) $y = e^{\text{arctg}\, x} = e^{u}$, $u = \text{arc tg}\, x$

$y' = e^{u} \cdot u'$, $u' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2} e^{\text{arctg}\, x}$

15: $y = e^{x^x} = e^{u}$, $u = x^x$

lôga biểu thức u: $\ln u = x . \ln x$

Đạo hàm 2 vế: $\dfrac{u'}{u} = \ln x + \dfrac{1}{x} . x = 1 + \ln x$

$\rightarrow u' = x^x \cdot (1 + \ln x)$

Có: $y' = e^{u} . u' = e^{x^x} \cdot [x^x \cdot (1 + \ln x)]$

Bài 4: $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$, $A(3, 2)$

phương trình tiếp tuyến của đường cong có dạng:

$y = k . (x - x_A) + y(A)$

$k = y'(A) = 3x^2 - 6x - 1 = 3 . 3^2 - 6 . 3 - 1 = 8$

$\Rightarrow y = 8 . (x - 3) + 2 = 8x - 22.$

Ghi chú:

Thứ

Ngày / /

Bài 6: 1) $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y' = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Tại $x = 0$ thì $y'_-(0) = -1$, $y'_+(0) = 1$,

do đó $x = 0$ hàm số không có đạo hàm và $y' = sgn(x)$; $x \neq 0$

2) $y = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$ tức $y' = 2|x|$

3) $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot (x \neq 0)$

Bài 7:

1) $y = \begin{cases} 1-x & \text{khi } -\infty < x < 1 \\ (1-x)(2-x) & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x) & \text{khi } 2 < x < +\infty \end{cases}$

$y' = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x^2 . e^{-x^2}, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e} & |x| > 1 \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 2x . e^{-x^2} . (1-x^2), & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

Bài 9: $f(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-100)$. Tính $f'(0)$?

$f'(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-100) + g(x)$

với $g(x) = x(x-2) \dots (x-100) + \dots$

$\Rightarrow f'(0) = (-1)(-2) \dots (-100) + g(0)$

vì $g(0) = 0 \rightarrow f'(0) = 100!$

Ghi chú:

Bài 10: $f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a) với $x \neq 0$ thì hàm số liên tục.

tại $x = 0$ phải có $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, nghĩa là:

$\lim\limits_{x \to 0} x^n . \sin\frac{1}{x} = 0$

vì $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ nên $\lim\limits_{x \to 0} x^n . \sin\frac{1}{x} = 0$

nghĩa là khi $n > 0$ thì $\lim\limits_{x \to 0} x^n . \sin\frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0$

b) Để xét tính khả vi của $f(x)$ tại $x = 0$ ta lập số gia: $\Delta f = f(0 + \Delta x) - f(0)$

$= (\Delta x)^n . \sin\frac{1}{\Delta x} - 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^n . \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} . \sin\frac{1}{\Delta x}$

vì $\left|\sin\frac{1}{\Delta x}\right| \leq 1$ nên: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = 0$

khi $n - 1 > 0$

Mặt khác $f(0) = 0$.

$\Rightarrow$ với $n > 1$ hàm số $f(x)$ khả vi tại 0.

c)

Với $x \neq 0 \rightarrow f'(x) = nx^{n-1} . \sin\frac{1}{x} - \frac{x^n}{x^2} . \cos\frac{1}{x}$

$= nx^{n-1} . \sin\frac{1}{x} - x^{n-2} . \cos\frac{1}{x}$

$= x^{n-2} . (nx . \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$

Theo ý (b), ta có $f(x)$ khả vi tại $x = 0$ và $f'(0) = 0$

nên để $f'(x)$ liên tục tại $x = 0$

thì $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-2} . (nx \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}) = 0$

khi $n - 2 > 0 \Rightarrow n > 2$.

với $n > 2$ thì $f(x)$ có đạo hàm liên tục tại $x = 0$

HONG HA

Ghi chú:

Thứ

Ngày / /

Bài 12: xét tính khả vi của các hàm số:

1) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$

$$y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3| = \begin{cases} (x-1)(x-3)^3.(x-2)^2 & , (x-1)(x-3) \geq 0 \\ -(x-1).(x-3)^3.(x-2)^2 & , (x-1)(x-3) < 0 \end{cases}$$

Vì $(x-1)(x-3) \geq 0$ khi $x \leq 1$ hoặc $x \geq 3$

$(x-1)(x-3) < 0$ khi $1 < x < 3$.

Với $x < 1$ hoặc $x > 3$:

$$y' = (x-3)^3(x-2)^2 + 3(x-3)^2(x-1)(x-2)^2 + 2(x-2)(x-1)(x-3)^3$$

Với $1 < x < 3$.

$$y' = -[(x-3)^3.(x-2)^2 + 3(x-3)^2.(x-1)(x-2)^2 + 2(x-2)(x-3)^3]$$

$\Rightarrow y'_+(3) = y'_-(3) = 0 \Rightarrow$ hàm số có đạo hàm $= 0$ tại $x = 3$

* Tại $x = 1$ có: $y'_+(1) = -(1-3)^3(1-2)^2 = 8$

$y'_-(1) = (1-3)^3(1-2)^2 = -8$

Vì $y'_+(1) \neq y'_-(1)$ nên y không có đạo hàm tại $x = 1$, do đó không khả vi tại $x = 1$

2) $y = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & , \cos x \geq 0 \\ -\cos x & , \cos x < 0 \end{cases}$

$$y' = \begin{cases} -\sin x & \text{nếu } \cos x > 0 \\ \sin x & \text{nếu } \cos x < 0 \end{cases}$$

Tại các giá trị của x sao cho $\cos x = 0$ tức $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

là các điểm đặc biệt

thì $\sin x = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$ phụ thuộc vào k chẵn hay lẻ. $\Rightarrow y'_+\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \neq y'_-\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Hàm số không khả vi tại $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

còn sẽ khả vi tại tất cả các điểm khác

Thứ

Ngày / /

Ghi chú:

Bài 13 ① $f(x) = |x|$

$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

$f'_-(0) = -1 \qquad f'_+(0) = 1$

② $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$

Điều xác định: $\sin x^2 \geq 0$

$\sqrt{2k\pi} \leq |x| \leq \sqrt{(2k+1)\pi}$, $k \in N$

Khi $x^2 = 2k\pi$ hoặc $x^2 = (2k+1)\pi$ thì $\sin x^2 = 0$

do đó: với $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$, $k \in N$ thì:

$f'_-(x) = f'_+(x) = \dfrac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$

Khi $x \to 0$ thì $\sin x^2 \sim x^2$ và $\sqrt{\sin x^2} \sim |x|$

Do đó: với $x = 0$ thì $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$

Với $x = \pm\sqrt{2k\pi}$ hoặc $x = \pm\sqrt{(2k+1)\pi}$, có:

$f'_\pm(\sqrt{2k\pi}) = \pm\infty$, $k \in N^+$

$f'_\pm(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \pm\infty$, $k \in N^+$.