Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN
Lớp thầy Hà Phi

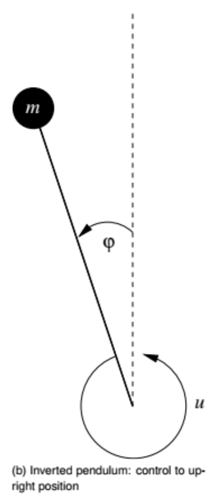
Bài Tập Lý Thuyết Điều Khiển Hệ Thống
Ngày 19 tháng 12 năm 2021

Bài Tập Lý Thuyết Điều Khiển Hệ Thống - No. 1

Câu 1 *Bài toán 1 (con lắc ngược): Xét mô hình điều khiển của một con lắc ngược (sau khi được tuyến tính hóa) cho bởi một phương trình vi phân bậc hai*

$$\varphi"(t) - \varphi(t) = u(t). \tag{1}$$

Ở đây, $\varphi(t) = \theta(t) - \pi$ *là độ lệch góc của con lắc so với trạng thái cân bằng thẳng đứng tại thời điểm* $t \geq 0$ *và* $u(t)$ *là mômen lực tác dụng.*



Hình 1: Con lắc ngược - Điều khiển sao cho con lắc chuyển động hướng về trục thẳng đứng

a) Chứng tỏ rằng đối với phản hồi tỷ lệ thuận (proportional state feedback) $u(t) = -\alpha\varphi(t)$ *với* $\alpha < 1$*, mệnh đề sau là đúng: Nếu các giá trị ban đầu thỏa mãn* $\varphi'(0) = -\varphi(0)\sqrt{1-\alpha}$*, thì* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$*. b) Cho* $\alpha \in \mathbb{R}$ *cố định. Xét hàm năng lượng* $V(x, y) := cosx - 1 + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + y^2)$*. Chứng minh rằng* $V(\varphi(t), \varphi'(t))$ *là hằng số dọc theo các nghiệm của phương trình con lắc phi tuyến với phản hồi tỷ lệ thuận, được cho bởi*

$$\varphi"(t) - \sin(\varphi(t)) + \alpha\varphi(t) = 0\ . \tag{2}$$

Từ đó kết luận rằng tồn tại các điều kiện ban đầu $\varphi(0) = \varepsilon$; $\varphi'(0) = 0$ *sao cho nghiệm của* (2) *với* ε *nhỏ tùy ý không thỏa mãn* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \varphi'(t) = 0$.

Câu 2 ***(tính ổn định của hệ thống LTI):*** *Cho* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. *Chứng minh các khẳng định sau:*
a) PTVP $x'(t) = Ax(t)$ *là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi* $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I - A) = 0\} \subset \mathbb{C}_-$ *và* $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.
b) PTVP $x'(t) = Ax(t)$ *là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi* $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I - A) = 0\} \subset \mathbb{C}_-$ *và các giá trị riêng thuần ảo là đơn (bội 1).*

Câu 3 ***Bài tập về biến đổi Laplace để huẩn bị cho hàm truyền trong Bài Giảng 2.***
Biến đổi Laplace của 1 hàm số $x(t)$ *được định nghĩa bởi*

$$X(s) := L[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \ ,$$

trong đó s là 1 số phức với phần thực $\Re(s) < 0$. *Ta nói* $X(s)$ *là biến đổi Laplace của hàm* $x(t)$. *Biến đổi Laplace chuyển hàm từ miền thời gian t (time domain) sang miền tần số z (frequency domain). Chứng minh các tính chất sau của biến đổi Laplace.*
a) Nếu a, b là các hằng số thì $L[ax(t) + by(t)] = aX(s) + bY(s)$ ***Tính tuyến tính****.*
b) $L[e^{-at}] = \dfrac{1}{s+a}$
c) $L[x'(t)] = sX(s) - x(0)$.
d) $L[x(t-\tau)] = e^{-s\tau}X(s)$
e) $L[e^{-at}x(t)] = X(s+a)$.

Câu 4 *Hãy áp dụng biến đổi Laplace cho hệ LTI*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{3}$$

để xây dựng công thức hàm truyền $G(s)$ *sao cho* $Y(s) = G(s)U(s)$.

Câu 5 ***Bài tập thực hành về tính ổn định - vẽ hình trong Matlab.*** *Cho hệ (3) với các ma trận hệ số là*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ D = 0.$$

Hãy tìm hiểu các hàm `eig` *và* `ode45` *trong MATLAB để xác định tính ổn định của hệ và vẽ hình đầu ra* $y(t)$, *trạng thái* $x(t)$ *với các dữ kiện sau:*

$$u(t) \text{ là hàm Heaviside (google nhé)}, \ x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [t_0, t_f] = [0, 10] \ .$$