

PHẦN I: Các quy tắc cầu phương cơ bản: Trung điểm; Hình Thang; Simpson

BÀI TẬP LÝ THUYẾT

Câu 1 a) Hãy tính các tích phân sau sử dụng cả 3 phương pháp Hình thang/Simpson/Trung điểm với các điểm nút cách đều và so sánh kết quả.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx .$$

b) Nếu tích phân $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ cần tính với sai số nhỏ hơn $1e-7$, sử dụng các nút cách đều trong phương pháp hình thang, hỏi chúng ta cần bao nhiêu điểm nút?

Câu 2 Tích phân logarit là một dạng tích phân phụ thuộc tham số đặc biệt có dạng

$$\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} .$$

Với x đủ lớn, số lượng các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng x là xấp xỉ gần bằng $\text{li}(x)$. Ví dụ, có 46 số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng 200, và $\text{li}(200)$ thì xấp xỉ 50. Hãy tìm $\text{li}(200)$ đến 3 chữ số chắc, sử dụng ba phương pháp cầu phương đã nói ở trên.

Gợi ý: Như vậy tìm h để sai số toàn phần bé hơn $1e-3$, sau đó dùng quy tắc cầu phương cho các điểm nút cách đều h .

Câu 3 Xét tích phân $\int_0^1 \sin(\pi x^2/2) dx$ và giả sử rằng chúng ta muốn tính gần đúng tích phân với sai số bé hơn $1e-4$.

a. Nếu chúng ta dùng quy tắc hình thang với các nút cách đều thì độ rộng h cần dùng là bao nhiêu?

b. Câu hỏi tương tự với quy tắc Simpson?

BÀI TẬP THỰC HÀNH

Câu 4 Viết các hàm trong Python để tính tích phân dựa trên các quy tắc cầu phương Trung điểm; Hình thang; Simpson dạng composite, ví dụ như

```
def Simpson(f, a, b, tol):  
    return I, h
```

trong đó f là hàm; a và b là 2 đầu mút, tol là sai số cần đạt được của việc tính xấp xỉ tích phân, I là giá trị gần đúng của tích phân, h là độ rộng mỗi bước. Chú ý các nút được sử dụng

là cách đều, tức là $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_i = a + i * h$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Câu 5 Nhắc lại rằng độ dài của một đường cong được biểu diễn bởi hàm số $y = f(x)$ trên một đoạn $[a, b]$ được tính bởi tích phân $I(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Sử dụng các hàm vừa viết trong bài tập trước để tính độ dài của các đường cong sau.

(a) $f(x) = \sin(\pi x)$, $0 \leq x \leq 1$,

(b) $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$,

(c) $f(x) = e^{x^2}$, $0 \leq x \leq 1$.

Dựa trên kết quả lý thuyết, hãy đánh giá các sai số toàn phần với mỗi phương pháp và mỗi đường cong.

PHẦN II: Các quy tắc cầu phương Newton-Cotes

Câu 6 Để tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$, ngoài 3 phương pháp nêu trên người ta còn tìm các công thức Newton-Cotes khác bằng phương pháp hệ số bất định (đã học trên lớp sáng nay). Hãy sử dụng phương pháp đó để đi tìm công thức cầu phương sử dụng 4 điểm chia $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. Công thức thu được được gọi là Quy tắc Simpson 3/8, khác với Quy tắc Simpson 1/3 đã học trên lớp. Hãy tìm quy tắc Simpson 3/8 đó.

Câu 7 Đối với trường hợp 5 điểm chia, ta có quy tắc Boole được sinh ra từ lớp công thức Newton-Cotes sử dụng 5 điểm chia $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Hãy tìm công thức Boole đó.

Câu 8 Sử dụng các quy tắc Simpson 3/8 và Boole để tính xấp xỉ độ dài các đường cong trong Bài tập 5. So sánh thời gian tính toán và sai số của các phương pháp này với các công thức cầu phương cơ bản.

Hết