Câu 1

$$\begin{cases} M\ddot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t) & \forall t \geq 0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ y = Cx(t) + \tilde{D}u(t) & x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Xét $M = I$.

a, Tìm một điều kiện đủ của các ma trận hệ số của (1) để hệ là dương trong. Điều kiện đó có phải điều kiện cần không?

b, Tìm điều kiện cần và đủ của các ma trận hệ số của hệ (1) để hệ là dương trong.

c, Chỉ ra 1 ví dụ mà hệ là dương ngoài nhưng không dương trong.

Bài làm

Với $M = I$ ta có hệ
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t) & \forall t \geq 0 \\ y = Cx(t) + Du(t) & \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ & x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ta viết lại hệ dưới dạng sau.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n\times n} \\ \hline -K & O_{n\times n} \end{array}\right)\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_{n\times p} \\ B \end{pmatrix} u(t) \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} u(t) \end{cases}$$

Đặt $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n\times n} \\ \hline -K & O_{n\times n} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$

$\tilde{B} = \begin{pmatrix} O_{n\times p} \\ B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n, p}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \in$

Ta thu được hệ

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = \tilde{A}X(t) + \tilde{B}u(t) \\ X(0) = X_0 \\ Y(t) = \tilde{C}X(t) + \tilde{D}.u(t) \end{cases} \quad (I)$$

Scanned with CamScanner

Bài t

Câu:

Đây có thể coi là hệ ~~xxx~~ điều khiển tuyến tính bậc nhất.

a, Gọi $G(t) \in \mathbb{R}$ là ma trận phản hồi xung của hệ khi đó

$$Y(t) = \int_0^t G(t-\tau)u(\tau).d\tau.$$

Với mọi biến điều khiển $u(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$. và điều kiện ban đầu không âm $x_0 \geq 0$, $\dot{x}_0 \geq 0$ (hay $X(0) = X_0 \geq 0$).

a, Dễ thấy nếu $G(t-\tau) \geq 0$ (từng phần tử của ma trận ≥ 0) thì

b, $$Y(t) \geq 0$$

Hơn nữa từ hệ (I) dễ thấy ngay $X(t) \geq 0$

c, Vậy đây là 1 điều kiện đủ để hệ ban đầu là dương trong. Nhưng không phải điều kiện cần để hệ là dương trong.

b, Điều kiện cần và đủ để hệ (I) là dương trong

Bài

a, là $\begin{cases} \tilde{A} \text{ là ma trận Metzler} \\ \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \geq 0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -K \geq 0 & \text{(tức là các phần tử của } K \text{ phải } \leq 0\text{)} \\ B \geq 0. \\ C \geq 0 \\ D \geq 0 \end{cases}$$

Đây cũng là điều kiện cần và đủ để hệ ban đầu là dương trong.

c,

Tc

Bài tập lớn

a) Câu 2: Xét hệ dương bậc nhất

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \forall\, t \geq 0 \quad (3) \\ y(t) = Cx(t) & x(0) = x_0 \quad (4) \end{cases}$$

a, Cho $C \geq 0$. CMR: một hệ dương bất kì dạng (3) là ổn định tiệm cận $\iff$ mọi hệ số của $\det(\lambda I - A) \ngeq 0$

b, Cho $C \geq 0$. CMR: (3) ổn định tiệm cận $\iff$ mọi định thức con góc trái của $-A$ là dương

c, Nếu hệ ổn định tiệm cận thì ổn định BIBO. Ngược lại?

Bài làm

a) Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là giá trị riêng của ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Đa thức tối tiểu của A có dạng

$$f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\dots(x-\lambda_n)^{m_n}$$

với m_i là số nguyên dương thoả mãn $1 \leq m_i \leq n_i$
$\left(\sum_{i=1} n_i = n.\right)$

Giả sử hệ của chúng ta là ổn định tiệm cận thì $u \equiv 0$ tức là

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) & \forall t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \\ y(t) = C.x(t) & (C \geq 0) \end{cases}$$ có nghiệm $x(t) = e^{At}x_0$

Ta có biểu diễn Sylvester.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{s}\left(A_{k1} + A_{k2}t + \dots + A_{km_k}t^{m_k-1}\right)x_0 e^{\lambda_k t}$$

trong đó $$A_{kj} = \sum_{i=j-1}^{m_k-1} \frac{f_k(x)}{(i-j+1)!\,(j-1)!}\,\frac{d^{(i-j+1)}}{ds^{(i-j+1)}}\left[\frac{1}{f_k(x)}\right]\Bigg|_{x=\lambda_k} (A-I\lambda_k$$

với mỗi $j = 1, \dots, m_k$.

$$f_k(x) := \frac{f(x)}{(x - \lambda_k)^{m_k}}$$

Vì A là Metzler nên giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ có nhận giá trị thực hoặc phức (trong trường hợp phức, các giá trị riêng liên hợp với nhau) $x \times Re$

Ta đi tính $\lim\limits_{t \to +\infty} t^p |e^{\lambda_k t}|$

Nếu $Re \lambda_k \geq 0$, $p \geq 0$ thì $\lim\limits_{t \to +\infty} t^p . |e^{\lambda_k t}|$

$$= \lim_{t \to +\infty} t^p . e^{Re(\lambda_k).t} = +\infty.$$

Nếu $Re \lambda_k = 0$, $P = 0$ thì $\lim\limits_{t \to +\infty} t^p . |e^{\lambda_k t}|$

$$= \lim_{t \to +\infty} e^{Re(\lambda_k) t} = 1.$$

Nếu $Re \lambda_k < 0$, p bất kì cố định $\in \mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{t \to +\infty} t^p . |e^{\lambda_k t}|$

$$= \lim_{t \to +\infty} t^p . e^{Re(\lambda_k) t} = 0$$

(tốc độ hàm mũ nhanh hơn hàm đa thức)

Do đó

hệ ổn định tiệm cận

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re \lambda_k < 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$

Xét định thức

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

$$= (\lambda - \lambda_1).(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Khi đó vì $Re \lambda_i < 0 \quad \forall i = 0, 2, \dots, n-1$

$\Rightarrow a_i > 0$.

Scanned with CamScanner

Bài 2

a) Ngược lại, nếu $a_i > 0$ ta cmr hệ (3) ổn định tiệm cận

Nếu A là ma trận Metzler thì A có một giá trị riêng thực $\alpha = \max_k Re\lambda_k$

Hơn nữa $Re\,\lambda_k < 0 \ \forall k = 1, 2, .., n$ nếu $\alpha < 0$ (*)

Phản chứng nếu $\alpha = \max_k Re\,\lambda_k > 0$

Khi đó

$$P = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + .. + a_1\lambda + a_0 > 0$$

do $a_i > 0$.

$\Rightarrow$ đa thức đặc trưng của A không có giá trị riêng thực không âm mâu thuẫn với $\alpha > 0$

Do đó $\alpha < 0$, tức là, $Re\,\lambda_k < 0 \ \forall k = 1, 2, .., n$

Theo phần chứng minh trước đó $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n_+$.

b) Xét đa thức đặc trưng

$$P = \det(\lambda I - A) = \det[\lambda e_1 - A_1, \lambda e_2 - A_2, ..., \lambda e_n - A_n]$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sử dụng ~~công thức Laplace~~ tính chất của định thức để khai triển định thức trên

$$P = \det\begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bài c.

Tiếp tục làm như vậy với $\lambda - a_{ii}$ $\forall i = 1, 2, .., n$ (tách thành 2 định thức chứa λ và a_{ii})
ta sẽ thu được 2^n định thức trong khai triển của P
Trong 2^n tổng trên, có $C_n^i = \frac{n!}{(n-i)!\,i!}$ định thức có cột thứ i ở dạng

$$\begin{vmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ \lambda \\ \cdots \\ a_{ni} \end{vmatrix} \leftarrow \text{hàng thứ } i$$

Tổng của C_n^i định thức này bằng $a_i \lambda^i$ $\forall i = 1, 2, .., n-1$ (1)

Ta sử dụng kết quả trong đại số tuyến tính:
Cho $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ có các ~~đích~~ phần tử trên ~~đ~~ không nằm trên đường chéo chính $a_{ij} \leq 0$ $\forall i \neq j$ và các định thức con ~~đích~~ chính ở góc trái là dương thì mọi định thức con chính là dương. (2)

Theo câu a, hệ ổn định tiệm cận $\Leftrightarrow$ $a_i > 0$ $\forall i = 1, 2, ... n-1$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra điều kiện cần và đủ để hệ ổn định tiệm cận là

$$|-a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \cancel{\det} |-A| > 0.$$

$\boxed{}$

B, Bài 2

c) $u(t)$: thông tin đầu vào.

$y(t)$: đầu ra

KMTTQ giả sử hệ (3) có điều kiện đ ban đầu không (zero state)

Khi đó và

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

với $g(t)$ là phản hồi xung

Ma trận truyền của hệ trên là

$$G(s) = C^T(sI-A)^{-1}.B.$$

Ta có

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = C^T.e^{At}.B.$$

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

với $L(s) = b_i s^i + b_{i-1}s^{i-1} + \dots + b_1 s + b_0$

$M(s) = s^i + a_{i-1}s^{i-1} + \dots + a_1 s + a_0$ $(i \leq n)$

Gọi $z_1, z_2, \dots, z_n$ là nghiệm của $L(s) = 0$

$s_1, s_2, \dots, s_n$ ______ $M(s) = 0$

KMTTQ giả sử $s_k \neq z_\ell$ $\forall k, \ell$.

$s_k \neq s_\ell$

Khi đó

$$g(t) = \sum_{k=1}^{i} A_k e^{s_k t} \qquad (1)$$

với $A_k = \dfrac{L(s_k)}{M'(s_k)}$, $M'(s_k) = (s_k - s_1)\dots(s_k - s_{k-1})(s_k - s_{k+1})\dots(s_k - s_n)$

Mặt khác hệ là BIBO, thì do

$$y(t) = \int_0^t g(\tau).u(t-\tau)\,d\tau \le \max_{[0,t]} u(t-\tau) \int_0^t g(\tau)d\tau$$

nên

$$\int_0^t g(\tau)d\tau < \infty \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), để ~~g(τ)~~ ta cần

$\Rightarrow \lim_{\tau \to +\infty} g(\tau) = 0$ hay $Re\, s_k < 0 \quad \forall k = 1, 2, .., i$

Do đó hệ (3) (4) là ổn định tiệm cận $\Leftrightarrow$ hệ ổn định BIBO.

Điều ngược lại không đúng

Chọn

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = [0, 1]^T, \quad C^T = [\,0 \quad 1\,]$$

)u(t-τ), dτ

Khi đó hệ đã cho không ổn định tiệm cận vì

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$$ có hệ số $-6 < 0$

Mặt khác

$$G(\lambda) = C^T(\lambda I - A)^{-1} B$$

$$= [0, 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda - 2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda + 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda + 3}$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda + 3}\right) = e^{-3t}.$$

Có $\int_0^t g(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-3\tau}\,d\tau = \left.\frac{e^{-3\tau}}{-3}\right|_0^t = \frac{1 - e^{-3t}}{3} < \infty$

nên hệ ổn định BIBO.

Vậy ổn định BIBO không suy ra ổn định tiệm cận

Bài 3 Ta có $y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\tau) u(\tau) d\tau$

Tại $t_0 = 0$

$$y(t) = \int_0^t g(t,\tau)u(\tau)\,d\tau \overset{LTI}{=} \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$

Từ đồ thị ta có

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } 0 \le t \le 1 \\ 2-t & \text{nếu } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \le t \le 1 \\ -1 & \text{nếu } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Nếu $0 \le t \le 1$, $0 \le \tau \le 1$, $0 \le t-\tau \le 1$

$$y(t) = \int_0^t \tau\,d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2}$$

Nếu $1 \le t \le 2$

$$y(t) = \int_0^{t-1} g(\tau)u(t-\tau)\,d\tau + \int_{t-1}^{1} g(\tau)u(t-\tau)\,d\tau + \int_1^t g(\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^{t-1} (-\tau)\,d\tau + \int_{t-1}^{1} \tau\,d\tau + \int_1^t (2-\tau)\,d\tau$$

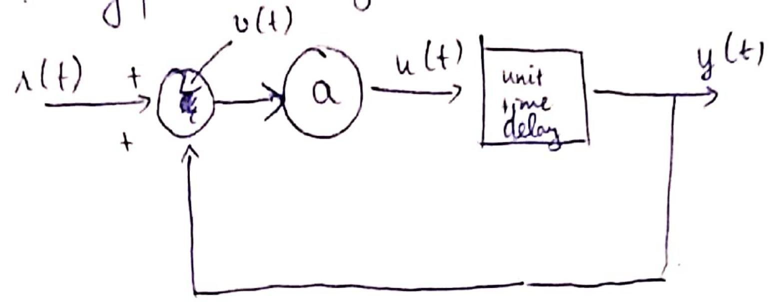
$$= -\frac{(\tau^2)}{2}\Big|_0^{t-1} + \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1}^{1} + \left(2\tau - \frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_1^t$$

$$= -\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(t-1)^2}{2} + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}t^2 + 4t - 2$$

Bài c)

b) Hệ thống phản hồi dương



Ta có $v(t) = x(t) + y(t)$

$u(t) = a v(t)$

$y(t) = u(t-1)$

Khi đó ta thu được phản hồi xung.

$$g(t) = u(t-1) = a v(t-1)$$

$$= a.[x(t-1) + y(t-1)]$$

$$= a x(t-1) + a^2 v(t-2) = \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a^i x(t-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a^i \delta(t-i) \Rightarrow g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \delta(t-i)$$

~~Với a = 1:~~

$$\cancel{g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t-i)}$$

Khi $t < 0$, đầu vào $x(t) = u(t) = 0$, đầu ra

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} a^i \delta(t-i-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a^i \int_0^t \delta(t-i-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a^i u(\tau) \Big|_{\tau = t-i} = \sum_{i=1}^{\infty} a^i u(t-i)$$

Bài 3

b, Xét một hệ điều khiển 2 đầu vào và 2 đầu ra được biểu diễn bởi

$$D_{11}(p)y_1(t) + D_{12}(p)y_2(t) = N_{11}(p)u_1(t) + N_{12}(p)u_2(t)$$

$$D_{21}(p)y_1(t) + D_{22}(p).y_2(t) = N_{21}(p)u_1(t) + N_{22}(p)u_2(t)$$

trong đó N_{ij} và D_{ij} là đa thức của $p := d/dt$.

Tìm ma trận hàm truyền

Bài làm

Ta viết lại hệ dưới dạng

$$D(p).y(t) = N(p)u(t)$$

trong đó $D(p) = \begin{pmatrix} D_{11}(p) & D_{12}(p) \\ D_{21}(p) & D_{22}(p) \end{pmatrix}$; $N(p) = \begin{pmatrix} N_{11}(p) & N_{12}(p) \\ N_{21}(p) & N_{22}(p) \end{pmatrix}$

$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$; $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$

Giả sử $D(p)$ khả nghịch, khi đó

$$y(t) = D^{-1}(p).N(p).u(t)$$

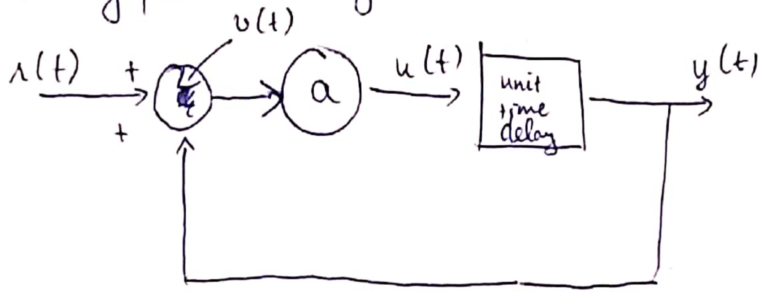
$$= G(p).u(t)$$

với $G(p) = D^{-1}(p).N(p)$

Áp dụng phép biến đổi Laplace ta thu được ma trận hàm truyền của hệ

$$\hat{G}(p) = \mathcal{L}(G(p))$$

b, Hệ thống phản hồi dương



Ta có $v(t) = r(t) + y(t)$

$$u(t) = a\,v(t)$$

$$y(t) = u(t-1)$$

Khi đó ta thu được phản hồi xung.

$$g(t) = u(t-1) = a\,v(t-1)$$

$$= a\,[r(t-1) + y(t-1)]$$

$$= a\,r(t-1) + a^2 v(t-2) = \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a^i\, r(t-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a^i \delta(t-i) \Rightarrow g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \delta(t-i)$$

~~Với a = 1:~~

$$\cancel{g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t-i)}$$

Khi $t < 0$, đầu vào $r(t) = u(t) = 0$, đầu ra

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} a^i \delta(t-i-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

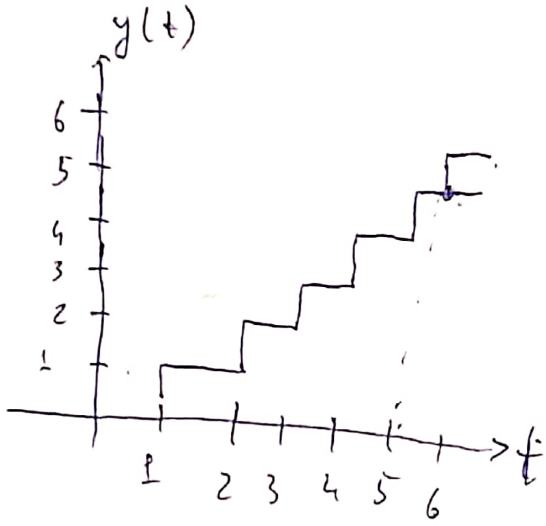
$$= \sum_{i=1}^{\infty} a^i \int_0^t \delta(t-i-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a^i\, u(\tau)\Big|_{\tau = t-i} = \sum_{i=1}^{\infty} a^i u(t-i)$$

Bài 3

c) Khi $a = 1$:

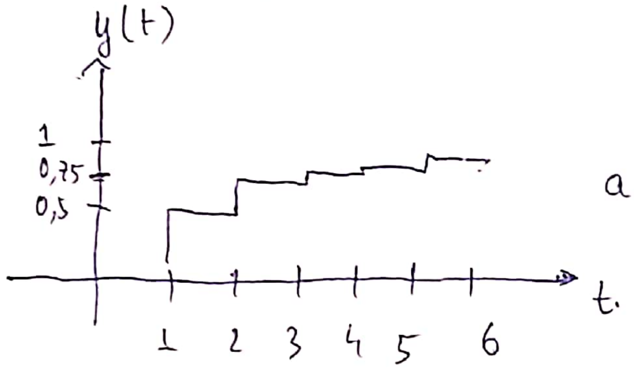
$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u(t-i)$$



$a = 1$

Khi $a = 0,5$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} u(t-i)$$



$a = 0,5$

Với hệ thống phản hồi âm

$$v(t) = r(t) - y(t)$$

$$u(t) = a\,v(t)$$

$$y(t) = u(t-1)$$

Phản hồi xung

$$g(t) = u(t-1) = a\,v(t-1)$$

$$= a.r(t-1) - a\,y(t-1)$$

$$= \dots$$

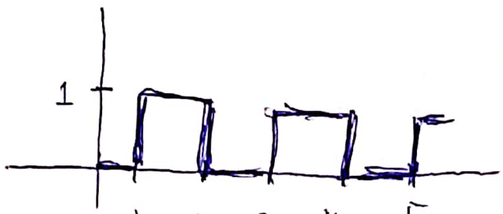
$$= \sum_{i=1}^{\infty} a^i \delta(t-i).(-1)^{i-1} = -\sum_{i=1}^{\infty} (-a)^i.\delta(t-i)$$

Đầu ra

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} (-a)^i u(t-i)$$

Khi $a = 1$

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i u(t-i)$$



Khi $a = \frac{1}{2}$ $\quad y(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^i u(t-i)$