

Bài Tập Lý Thuyết Điều Khiển Hệ Thống - No. 3

Câu 1 Các hệ thống sau có điều khiển được hay không? Vì sao? Tìm hàm truyền của các hệ thống đó. (Gợi ý: Xem lại Bài tập 4, phiếu Bài tập No.1.)

a) **Dạng chính tắc điều khiển được (controllability canonical form)**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & \dots & -\alpha_r \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (1)$$

$$y = [\beta_1 \quad \dots \quad \beta_r] x + Du, \quad (2)$$

trong đó α_i, β_i, D là các hệ số (thực hoặc phức).

b) **Dạng chính tắc quan sát được (observability canonical form)**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\alpha_{r-1} & & & & 1 \\ -\alpha_r & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{r-1} \\ \beta_r \end{bmatrix} u, \quad (3)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 0] x + Du, \quad (4)$$

trong đó α_i, β_i, D là các hệ số (thực hoặc phức).

c) **Bài toán nhận dạng (relization problem):** Cho trước hàm truyền, đi tìm dạng không gian trạng thái.

Hãy tổng quát hóa các dạng chính tắc ở trên, sao cho hàm truyền của hệ có dạng

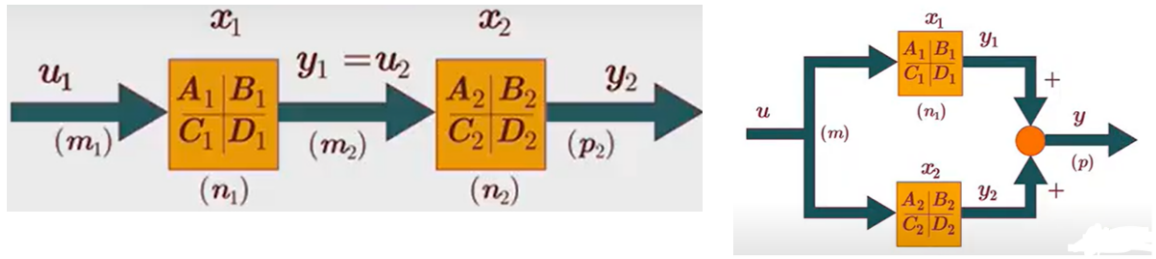
$$G(s) = D + \frac{\beta_r s^{r-1} + \dots + \beta_2 s + \beta_1}{s^r + \alpha_r s^{r-1} + \dots + \alpha_2 s + \alpha_1}, \quad (5)$$

trong đó $r \leq n$. Ở đây $G(s)$ được gọi là 1 hàm chính thường, **proper function**.

Câu 2 Nghiên cứu về tính điều khiển được của 2 hệ thống được mắc nối tiếp/song song với nhau theo các sơ đồ trong Hình 1.

Giả sử rằng các hệ con đều là điều khiển được.

1) Hãy xây dựng phương trình của hệ thống mắc nối tiếp, chú ý rằng ở đây đầu vào của hệ tổng chỉ có u_1 , và đầu ra của hệ tổng là y_2 . Chứng minh rằng nếu hệ thống tổng là điều khiển được thì nó không thể có vector riêng trái dạng $w = [w_1 \quad 0] \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ mà thỏa mãn điều kiện



Hình 1: Mạch nối tiếp (trái) & Mạch song song (phải)

$$w^H B = 0 .$$

2) Hãy xây dựng phương trình của hệ thống song song. Chứng minh hệ thống song song sẽ đánh mất tính điều khiển được khi và chỉ khi A_1 và A_2 có giá trị riêng chung λ , và các vector riêng trái w_1, w_2 tương ứng thỏa mãn

$$\begin{aligned} w_1^H B_1 + w_2^H B_2 &= 0, \\ w_1^H A_1 &= \lambda w_1^H, \quad w_2^H A_2 = \lambda w_2^H. \end{aligned}$$

Câu 3 Cho hệ điều khiển LTI là SISO (single input/single output). Hãy chứng minh công thức hàm truyền sau

$$G(s) := D + C(sI - A)^{-1}B \stackrel{\text{chứng minh}}{=} \frac{\det(sI - A + BC)}{\det(sI - A)} - 1 + D . \quad (6)$$

Câu 4 Cho hệ thống điều khiển với thiết kế đạo hàm có dạng

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (7)$$

$$y = Cx, \quad (8)$$

$$z = \frac{dy}{dt} \quad (9)$$

Hãy chuyển hệ trên về hệ điều khiển truyền thống, vẫn với đầu vào u nhưng đầu ra là z .

Câu 5 a) Trong trường hợp hệ ổn định, Gramian điều khiển W_c được xác định bởi công thức

$$W_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt.$$

Hãy chứng minh W_c thỏa mãn phương trình Lyapunov sau

$$A W_c + W_c A^T = -B B^T . \quad (10)$$

b) Trường hợp tổng quát của phương trình Lyapunov là phương trình Sylvester có dạng

$$A X + X B = C. \quad (11)$$

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình Sylvester có nghiệm là $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$, trong đó $\sigma(A)$ là phổ của ma trận A .

c) **Luật khử Roth**

Chứng minh rằng điều kiện đủ để hai ma trận $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ (với số chiều ma trận phù hợp) là đồng dạng là **phương trình Sylvester** $AX - XB = C$ có nghiệm.

Câu 6 Bài tập lập trình (Optional)

Hãy đi tìm hiểu các lệnh sau trong MATLAB: **ctrb**, **ctrbf**. Thực hành dựa trên:

- a) Bài tập 5a, phiếu Bài tập No.2.
- b) Ví dụ của Bài tập 1 ở trên (chọn 2 vector α và β là input vector). Viết function kiểm tra tính điều khiển được trong MATLAB.

Câu 7 Chứng minh rằng hệ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (12)$$

là điều khiển được thì cặp (A_{22}, A_{21}) phải là điều khiển được.

Câu 8 Cho 2 hàm truyền của 2 hệ thống điều khiển mắc nối tiếp có dạng là

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}, \quad G_2(s) = \frac{s^2+3s+2}{2s^2-s-1}.$$

- a) Tìm hàm truyền của hệ thống tổng.
- b) Xây dựng mô hình không gian trạng thái của 2 hệ thống con sao cho cả 2 hệ thống con đó đều là điều khiển được.
- c) Hệ thống tổng có điều khiển được không? Vì sao?
- d) Trình bày ý tưởng tìm phân tích điều khiển Kalman và rút gọn hệ thống tổng nếu nó không điều khiển được.

Câu 9 Cho 2 hàm truyền của 2 hệ thống điều khiển mắc nối tiếp có dạng là

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}, \quad G_2(s) = \frac{s^2+3s+2}{2s^2-s-1}.$$

- a) Tìm hàm truyền của hệ thống tổng.
- b) Xây dựng mô hình không gian trạng thái của 2 hệ thống con sao cho cả 2 hệ thống con đó đều là quan sát được.
- c) Hệ thống tổng có quan sát được không? Vì sao?
- d) Trình bày ý tưởng tìm phân tích quan sát Kalman và rút gọn hệ thống tổng nếu nó không quan sát được.