Date . . . No.

GIẢI TÍCH - TUẦN 6

Câu 1: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$

Khai triển Taylor của $f(x)$ tới cấp $n=3$ tại điểm $x_0 = 2$ là

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + o(x-x_0)^3$$

Ta có:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)-2x+1}{(x-1)^2} = -(x-1)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(x-1)^{-3}$$

$$f'''(x) = -6(x-1)^{-4}$$

Vì vậy thay $x_0 = 2$ ta có:

$f(x) = 3$, $f'(x) = -1$, $f''(x) = 2$, $f'''(x) = -6$

Do đó công thức khai triển Taylor của $f(x)$ đến cấp $n=3$ tại $x_0 = 2$ là:

$$\frac{2x-1}{x-1} = 3 - 1(x-2) + 2\cdot\frac{(x-2)^2}{2!} - 6\cdot\frac{(x-2)^3}{3!} + 0x^3$$

$$= 3 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + o(x-2)^3$$

Date . . . No.

Câu 3: $f(x) = \ln(2+3x)$

Khai triển Taylor của $f(x)$ tới cấp $n=3$ tại điểm $x_0 = 1$ là

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0).\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0).\frac{(x-x_0)^3}{3!} + o(x-x_0)^3$$

Ta có: $f(x) = \ln(2+3x)$

$$f'(x) = \frac{3}{2+3x} \quad ; \quad f''(x) = \frac{3.3}{(2+3x)^2} = 9.(2+3x)^{-2}$$

$$f'''(x) = -18(2+3x)^{-3}$$

Vì vậy thay $x=1$ ta có:

$$f(1) = \ln 5 \; ; \; f'(1) = \frac{3}{5} \; ; \; f''(1) = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$f'''(1) = \frac{-18}{\sqrt[3]{5}}$$

Do đó công thức khai triển Taylor của $f(x)$ đến cấp $n=3$ tại $x_0 = 1$ là

$$\ln(2+3x) = \ln 5 + \frac{3}{5}(x-1) + \frac{9}{\sqrt{5}}.\frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{18}{\sqrt[3]{5}}.\frac{(x-1)^3}{3!}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2+3x) = \ln 5 + \frac{3}{5}(x-1) + \frac{9(x-1)^2}{2\sqrt{5}} - \frac{3(x-1)^3}{\sqrt[3]{5}} + o(x-1)^3$$

Scanned with CamScanner

Date No.

Câu 5:

1. $f(x) = \frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}}$, $n = 3$

Khai triển Maclaurin của $f(x)$ tới cấp $n = 3$ là

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + 0x^3$$

Ta có: $f(x) = \frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}}$

$$f'(x) = \frac{(2x + 3e^x).e^{2x} - (x^2 + 3e^x).2.e^{2x}}{(e^{2x})^2}$$

$$= \frac{2x + 3e^x - 2x^2 - 2.3e^x}{e^2} = \frac{2x - 2x^2 - 3.e^x}{e^2}$$

$$f''(x) = \frac{2 - 4x - 3e^x}{e^2} \; ; \; f'''(x) = \frac{-4 - 3e^x}{e^2}$$

Vì vậy thay $x = 0$ ta có

$$f(0) = 3 \; ; \; f'(0) = \frac{-3}{e^2} \; ; \; f''(0) = \frac{-1}{e^2} \; ; \; f'''(0) = \frac{-7}{e^2}$$

Do đó công thức khai triển Maclaurin đến cấp $n = 3$ là

$$\frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}} = 3 - \frac{3}{e^2}.x - \frac{1}{2e^2}.x^2 - \frac{7}{6e^2}.x^3 + 0x^3$$

Date . . No.

2. $f(x) = \ln \dfrac{2-3x}{3+2x}$

~~$f'(x) =$~~

Khai triển Maclaurin của $f(x)$ tới cấp $n=3$ là

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\cdot\frac{x^3}{3!} + o x^3$$

Ta có:

$$f(x) = \ln \frac{2-3x}{3+2x}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-3(3+2x)-2(2-3x)}{(3+2x)^2}}{\dfrac{2-3x}{3+2x}}$$

$$= \frac{-13}{(2-3x)(3+2x)} = 13\,(6x^2+5x-6)^{-1}$$

$$f''(x) = -13\cdot(12x+5)\cdot(6x^2+5x-6)^{-2}$$

$$f'''(x) = -13\cdot 12\cdot(6x^2+5x-6)^{-2} + 13\cdot 2(12x+5)^2\cdot(6x+5x-6)^{-3}$$

Vì vậy thay $x=0$ ta có

$f(0) = \ln\dfrac{2}{3}$; $f'(0) = \dfrac{-13}{6}$

$f''(0) = -\dfrac{65}{36}$; $f'''(0) = \dfrac{533}{108}$

Do đó công thức khai triển Maclaurin của $f(x)$ đến cấp $n=3$ là

$$\ln\frac{2-3x}{3+2x} = \ln\frac{2}{3} - \frac{13}{6}x - \frac{65}{72}x^2 + \frac{533}{648}x^3 + o x^3$$

3. $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$

Khai triển Maclaurin của $f(x)$ tới cấp $n=4$ là

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0).\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0).\frac{x^4}{4!} + 0x^4$$

Ta có: $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = (2x+3).(x^2+3x+2)^{-1}$$

$$f''(x) = 2(x^2+3x+2)^{-1} - (2x+3)(x^2+3x+2)^{-2}$$

$$= (x^2+3x+2)^{-2}(2x^2+3x+2-2x+3)$$
$$= (x^2+3x+2)^{-2}.(2x^2+x+5)$$

$$f'''(x) = -2(2x+3)(x^2+3x+2)^{-3} - (4x+1)(x^2+3x+2)^{-2}$$

$$= (x^2+3x+2)^{-3}(-4x^3-13x^2-15x-8)$$

$$f^{(4)}(x) = -3(2x+3)(x^2+3x+2)^{-4}.(-4x^3-13x^2-15x-8) + (-12x^2-26x-15)(x^2+3x+2)^{-3}$$

Vì vậy thay $x=0$ ta có:

$f(0) = \ln 2$; $f'(0) = \frac{3}{2}$; $f''(0) = \frac{5}{4}$

$f'''(0) = -1$; $f^{(4)}(0) = \frac{21}{8}$

Do đó công thức khai triển MacLaurin của $f(x)$ đến cấp $n=4$ là:

$$\ln(x^2+3x+2) = \ln 2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{7}{320}x^4 + 0x^4$$

Date . . . No.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$

Ta có: $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$

$\sqrt{1+2x} = 1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$

$\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$

· Do đó

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)-1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)-x} = -1.$

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$

Ta có: $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$

Do đó:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$

$= \dfrac{1}{24} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^4)}{x^4}$

$= \dfrac{1}{24}$

Bài 7:

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - \arcsin x}{\tan x - \sin x}$

Ta có: $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\Rightarrow \arctan x - \arcsin x = -\dfrac{x^2}{6} + 0x^3$

$\tan x - \sin x = -\dfrac{x^2}{6} + 0x^3$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - \arcsin x}{\tan x - \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\dfrac{x^3}{2} + o(x^3)}{+\dfrac{x^3}{2} + o(x^3)} = -1$