Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN
K61 TTƯD

Học Kỳ 1 (2018-2019)
Bài Tập Giải Tích Số. No 8
Phương pháp bình phương tối thiểu

PHẦN I: PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU DẠNG BẢNG

Trong các bài tập từ 1-4, hãy sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu theo cả 2 cách: lập phương trình chuẩn tắc sử dụng phép nhân ma trận A^T, và sử dụng các đa thức Chebyshev.

Câu 1 *Hãy tìm hàm $f(x) = ax + b$ để xấp xỉ tốt nhất bảng số liệu sau theo phương pháp bình phương tối thiểu*

x	1	2	3	4
y	0	1	1	2

Kiểm tra kết quả vừa tìm được với kết quả của việc dùng built-in function polyfit trong Matlab/Octave.

Câu 2 *Độ nhớt của một chất lưu là thông số đại diện cho ma sát trong của dòng chảy. Độ nhớt được biểu diễn qua một hàm bậc hai của nhiệt độ T, tức là $V = a + bT + cT^2$. Hãy tìm hàm xấp xỉ tốt nhất bảng số liệu sau theo phương pháp bình phương tối thiểu.*

T	1	2	3	4	5	6	7
V	2.31	2.01	1.80	1.66	1.55	1.47	1.41.

Kiểm tra kết quả vừa tìm được với kết quả của việc dùng built-in function polyfit trong Matlab/Octave.

Câu 3 *a) Cường độ phóng xạ của một nguồn phóng xạ được cho bởi công thức $y = ae^{bx}$. Hãy xác định các tham số để xấp xỉ tốt nhất bảng số liệu sau theo phương pháp bình phương tối thiểu.*

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	3.16	2.38	1.75	1.34	1.00

b) Câu hỏi tương tự phần a) nếu như hàm số được xét có dạng $y = (ax + b)^{-1}$.

Câu 4 *Cho bảng số liệu sau.*

x	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

a. Hãy tìm đa thức bậc 1 (tuyến tính) tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.
b. Hãy tìm đa thức bậc 2 tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.
c. Hãy tìm đa thức bậc 3 tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.
d. Hãy tìm hàm xấp xỉ dạng be^{ax} tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.
e. Hãy tìm hàm xấp xỉ dạng bx^a tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.

Câu 5 *Để tìm hàm nghiệm dạng* $g(x) = a + bx^{-1} + cx^{-2}$ *của bài toán tìm bình phương tối thiểu của một bảng số liệu dạng*

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

một sinh viên quyết định biến đổi bài toán thành tìm nghiệm dạng $x^2g(x) = ax^2 + bx + c$ *của bài toán mới tương ứng với bảng số liệu*

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	$x_0^2y_0$	$x_1^2y_1$	$\dots$	$x_n^2y_n$

Hỏi kết quả hàm $g(x)$ *trong hai bài toán này có trùng nhau không? Vì sao?*

PHẦN II: PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU TRÊN $L_2[a,b]$

Câu 6 *Tìm đa thức nghiệm dạng* $ax + b$ *cho bài toán bình phương tối tiểu của hàm số* $f(x)$ *trog các trường hợp sau đây*

a. $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $[-1, 1]$; *b.* $f(x) = x^3$, $[-1, 1]$; *c.* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $[-1, 1]$;
d. $f(x) = e^x$, $[0, 2]$; *e.* $f(x) = 1/2cosx + 1/3sin2x$, $[0, 1]$; *f.* $f(x) = x\ln x$, $[1, 3]$.

Câu 7 *Xét hàm* $f(x) = e^{2x}$ *trên đoạn* $[0, \pi]$. *Chúng ta muốn xấp xỉ nó bằng đa thức lượng giác có dạng* $p(x) = a + b\cos(x) + c\sin(x)$. *Hãy lập hệ phương trình và tìm a, b, c dựa vào phương pháp bình phương tối thiểu.*

Câu 8 *Đối với hệ phương trình tuyến tính dạng* $Ax = b$, *bài toán (và cả ma trận A) gọi là có* ***điều kiện xấu*** *nếu như số điều kiện cond(A) là lớn. Sử dụng hàm cond trong Matlab/Octave, hãy kiểm tra điều kiện của hệ phương trình chuẩn tắc tương ứng với các trường hợp sau:*
a) $\min \|f - P\|_{L_2}$ *với* $f(x) = e^{2x}$, $[a, b] = [0, \pi]$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
b) $\min \|f - P\|_{L_2}$ *với* $f(x) = e^{2x}$, $[a, b] = [0, \pi]$, $p(x) = a_0 + a_1\cos(x) + a_2\sin(x)$.
c) $\min \|f - P\|_{L_2}$ *với* $f(x) = e^{2x}$, $[a, b] = [0, \pi]$, $p(x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x)$, *trong đó* $L_i(x)$ *là đa thứ Legendre bậc i.*
So sánh sai số (chính là $\min \|f - P\|_{L_2}$*) trong 3 trường hợp trên và đưa ra kết luận.*

——————————Hết——————————-