

Đề I
Bài tập lý thuyết. Đề 1. Lập đơn + Jacobi

Câu 1 (3 điểm)

- a) Chứng minh rằng phương trình $1 + 4x - 10x^3 = 0$ có nghiệm duy nhất trong đoạn $[1/2, 1]$.
b) Có rất nhiều cách khác nhau để chuyển về bài toán tìm điểm bất động ($x = \varphi(x)$) để giải bằng phương pháp lập đơn. Ta lấy ví dụ 2 phương pháp sau.

i) $\varphi(x) = 1 + 5x - 10x^3$,

ii) $\varphi(x) = \sqrt{\frac{1 + 4x}{10x}}$.

Hãy biện luận về tính hội tụ của các phương pháp trên.

- c) Tìm số bước lặp cần thiết sao cho sai số tuyệt đối của nghiệm bé hơn $1e - 6$.
d) Đưa ra công thức đánh giá ước lượng hậu nghiệm cho bài toán này.

Câu 2 (3 điểm)

- a) Viết công thức lặp để giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Jacobi. Phương pháp lặp này có hội tụ không? Vì sao?

$$4x_1 + 0.4x_2 - 0.4x_3 = 8$$

$$0.3x_1 - 3x_2 - 0.6x_3 = -9$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 - 5x_3 = 5$$

- b) Đối với hệ mà các em thu được bằng phương pháp Jacobi, hãy tìm $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_\infty$ của ma trận hệ số vuông cỡ 3×3 .
c) Tính số bước lặp cần thiết bằng ước lượng tiên nghiệm sao cho ta có ước lượng sai số nghiệm $\|x^* - x^n\| \leq 1e - 6$, với chuẩn $\|\cdot\|$ phù hợp.
d) Cho $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Hãy tìm x^i , $i = 1, 2, 3$. Viết công thức ước lượng hậu nghiệm để đánh giá sai số của x_3 .

Bài tập lập trình. Đề 1. Jacobi + Gauss-Seidel

Câu 3 Viết 2 hàm trong Python để giải hệ phương trình $Ax = b$ như sau

```
def Jacobi(A, b, nmax, tol):  
    return p
```

và

```
def Gauss_Seidel(A, b, nmax, tol):  
    return p
```

Ở đây $nmax$ là số bước lặp tối đa, tol là sai số cần đạt được giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ. Trong script test luôn cho trường hợp $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 7 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -26 \end{bmatrix}$ với $nmax, tol$ tùy chọn.

Câu 4 Sử dụng hai hàm vừa viết trong bài trên để giải hệ phương trình sau với sai số $eps = 1e-6$, $nmax = 100$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Đề II
Bài tập lý thuyết. Đề 2. Newton + Gauss-Seidel

Câu 5 (2 điểm) a) Hãy viết công thức lặp trong phương pháp Newton để giải các phương trình sau:

i) $e^x = 4x$, với $x_0 = 1$,

ii) $x^{1/3} = 0$, với $x_0 = 1$.

b) Tìm x_i , $i = 1, \dots, 6$ chính xác đến 4 chữ số thập phân. Biện luận về tính hội tụ của phương pháp Newton trong hai trường hợp trên.

Câu 6 (4 điểm) a) Viết công thức lặp để giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss-Seidel. Phương pháp lặp này có hội tụ không? Vì sao?

$$4x_1 + 0.4x_2 - 0.4x_3 = 8$$

$$0.3x_1 - 3x_2 - 0.6x_3 = -9$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 - 5x_3 = 5$$

b) Đối với hệ mà các em thu được bằng phương pháp Gauss-Seidel, hãy tìm $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_\infty$ của ma trận hệ số vuông cỡ 3×3 .

c) Tính số bước lặp cần thiết bằng ước lượng tiên nghiệm sao cho ta có ước lượng sai số nghiệm $\|x^* - x^n\| \leq 1e-6$, với chuẩn $\|\cdot\|$ phù hợp.

d) Cho $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Hãy tìm x^i , $i = 1, 2, 3$. Viết công thức ước lượng hậu nghiệm để đánh giá sai số của x_3 .

e) Trực chuẩn hóa các vector cột của ma trận bên vế trái, tính toán chính xác đến 3 chữ số thập phân. Từ đó suy ra phân tích QR của ma trận hệ số bên vế trái.

Bài tập lập trình. Đề 2. Curve fitting, phải lập hpt để chuyển về bình phương tối thiểu và giải bằng cả 2 phương pháp.

Câu 7 Viết 2 hàm trong Python để giải bài toán curve fitting có dạng

```
def curve_fitting_normal_equation(x, y, n):  
    return p
```

bằng phương pháp phương trình chính tắc, và

```
def curve_fitting_qr(x, y, n):  
    return p
```

bằng phương pháp QR. Ở đây, x, y là các vector lưu dữ liệu, n là bậc của đường cong đa thức ($1 \leq n \leq 3$), tức là $y \approx p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n$. Vector output $p = [p_0 \ p_1 \ \dots \ p_n]$. Yêu cầu phải lập hệ phương trình để chuyển về bình phương tối thiểu và giải bằng cả 2 phương pháp. Thầy cho phép gọi trực tiếp các hàm `qr` và `solve` trong python.

Sử dụng hàm vừa viết để giải bài toán sau.

Câu 8 Độ nhớt của một chất lưu là thông số đại diện cho ma sát trong của dòng chảy. Độ nhớt được biểu diễn qua một hàm bậc hai của nhiệt độ T , tức là $V = a + bT + cT^2$. Hãy tìm hàm xấp xỉ tốt nhất bằng số liệu sau theo phương pháp bình phương tối thiểu.

T	1	2	3	4	5	6	7
V	2.31	2.01	1.80	1.66	1.55	1.47	1.41.

Hết

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

ĐÁP ÁN

Ta có thể xét các phép lặp đơn sau

i) $\varphi(x) = 1 + 5x - 10x^3$ (phân kỳ),

ii) $\varphi(x) = \frac{10x^3 - 1}{4}$ (phân kỳ),

iii) $\varphi(x) = \frac{1 + 4x}{10x^2}$ (hội tụ),

iv) $\varphi(x) = \sqrt{\frac{1 + 4x}{10x}}$ (hội tụ rất nhanh).

The best solution would be iv), since the contraction constant on the interval $[0.7, 0.8]$ is approximately 0.14.