Câu 1 : (a) Để tìm điều kiện đủ, ta chuyển hệ điều khiên tuyến tính bậc hai này thành hệ điều khiển tuyến tính bậc nhất và sử dụng kết quả đã biết về hệ điều khiển tuyến tính bậc nhất là dương trong. Ta đặt $z = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n & \dot{x_1} & \ldots & \dot{x_n} \end{pmatrix}^T$, khi đó $\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} & \ldots & \dot{x_n} & \ddot{x_1} & \ldots & \ddot{x_n} \end{pmatrix}^T$. Xét $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n,p}$, $\widetilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q,2n}$ $\widetilde{A}$ như sau :

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -K & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ được viết lại thành $\dot{z}(t) = \widetilde{A}z(t) + \widetilde{B}u(t)$ và $y(t) = \widetilde{C}x(t) + \widetilde{D}u(t)$ Ta lại để ý rằng điều kiện ban đầu không âm của hệ bậc 2 ban đầu chính là điều kiện ban đầu không âm của hệ bậc nhất trên. Sử dụng kết quả đã biết, điều kiện cần và đủ để hệ mới này dương trong là $\widetilde{A}$ Metzler, $\widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D} \geq 0$. Để $\widetilde{A}$ là Metzler thì $-K$ phải ≥ 0. Mặt khác, nếu hệ mới này là dương trong thì hệ cũ cũng vậy, do đó ta tìm được một điều kiện đủ để hệ cũ dương trong là $-K, B, C, \widetilde{D} \geq 0$.

(b) Điều kiện cần để hệ (1) dương trong là : $-K$ Metzler, $B \geq 0$, $C \geq 0$, $\widetilde{D} \geq 0$.
Ta giả sử hệ (1) là dương trong, các hệ số của các ma trận K, B, C, $\widetilde{D}$ lần lượt là $k_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \widetilde{d}_{ij}$.
Nếu tồn tại $\widetilde{d}_{ij} < 0$. Ta chọn $x(0) = 0, u(t) = e_j$, khi đó $y_i(0) = \widetilde{d}_{ij} < 0$ (mâu thuẫn do hệ là hệ dương trong), do đó $\widetilde{D} \geq 0$.
Nếu tồn tại $c_{ij} < 0$. Ta chọn $x(0) = e_j, u(t) = 0$, khi đó $y_i(0) = c_{ij} < 0$ (mâu thuẫn do hệ là hệ dương trong), do đó $C \geq 0$.
Nếu tồn tại $b_{ij} < 0$. Ta chọn điều kiện ban đầu là $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ và biến điều khiển $u(t) = e_j$. Khi đó $\ddot{x}_i(0) = b_{ij} < 0$, từ đây suy ra 0 là điểm cực đại địa phương của x_i. Do đó với t đủ bé $x_i(t) < 0$ (mâu thuẫn do hệ là dương trong). Vậy $B \geq 0$.
Ta viết lại hệ thành $\ddot{x}(t) = -Kx(t) + Bu(t)$ và giả sử tồn tại $-k_{ij} < 0$ với $i \neq j$. Ta chọn điều kiện ban đầu là $x(0) = e_j, \dot{x}(0) = 0$ và biến điều khiển $u(t) \equiv 0$. Khi đó $\ddot{x}_i(0) = -k_{ij} < 0$, mặt khác do $x(0) = e_j$ với $j \neq i$ nên $x_i(0) = 0$. Từ đó ta suy ra 0 là điểm cực đại địa phương của x_i. Do đó với t đủ bé $x_i(t) < 0$ (mâu thuẫn do hệ là dương trong). Vậy $-K$ là Metzler.
Ta đi tìm một điều kiện cần và đủ để hệ (1) là dương trong. Gọi hệ bậc nhất xây dựng như trong câu (a) là hệ (2), ta có nhận xét rằng, $x(t)$ là nghiệm của hệ (1) khi và chỉ khi $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) & \dot{x}(t) \end{pmatrix}^T$ là một nghiệm của hệ (2). Sử dụng công thức biến thiên hằng số, ta có thể viết :

$$z(t) = \exp^{\widetilde{A}t} z(0) + \int_0^t \exp^{\widetilde{A}(t-s)} \widetilde{B}u(s)ds$$

Từ công thức này, ta suy ra được điều kiện cần và đủ để hệ (1) dương trong là : *ma trận $X(t)$ tạo bởi n hàng đầu của ma trận $\exp^{\widetilde{A}t}$ là dương với mọi $t \geq 0$.* Sở dĩ có điều này do ta có thể viết $x(t) = X(t)z(0) + \int_0^t X(t-s)\widetilde{B}u(s)ds$. Chú ý rằng ma trận $\widetilde{A}$ có dạng đặc biệt nên ta có thể biểu diễn được $\exp^{\widetilde{A}t}$ qua $-K$ như sau :

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n t^{2n}}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \times & \times \end{pmatrix}$$

(ta không quan tâm n hàng dưới). Như vậy ta thu được một điều kiện cần và đủ để hệ (1) dương là :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n t^{2n}}{(2n)!} \geq 0 \ \forall t \geq 0$$

và

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq 0 \ \forall t \geq 0$$

(c) Việc lấy một hệ dương ngoài nhưng không dương trong rất đơn giản bởi vì từ hai câu (a) và (b), một hệ là dương ngoài khi và chỉ khi $C, \widetilde{D} \geq 0$. Ta chỉ cần chọn C và $\widetilde{D}$ sao cho chúng ≥ 0, đồng thời chọn B sao cho nó có hệ số < 0. $\square$

Câu 2 : (a) Ta sử dụng kết quả quen thuộc sau trong hệ động lực : "*Với một ma trận vuông A, hệ $\dot{x} = Ax$ là ổn định tiệm cận nếu và chỉ nếu A chỉ có các giá trị riêng với phần thực âm*" (chứng minh có thể tham khảo sách Ordinary Differential Equations - Qualitative Theory của các tác giả Luis Barreira và Claudia Valls - định lý 3.10). Như vậy, ta quy về chứng minh rằng, nếu A là Metzler thì điều kiện trên tương đương với điều kiện đầu bài.
Giả sử mọi giá trị riêng của A đều có phần thực âm. Nếu x là nghiệm thực của $\det(\lambda I - A)$ thì $x < 0$. Hơn nữa, ta biết rằng nếu z là nghiệm không thuộc $\mathbb{R}$ của $\det(\lambda I - A)$ thì $\overline{z}$ cũng vậy, và do đó ta có thể viết $\det(\lambda I - A)$ dưới dạng $\Pi(\lambda - x)(\lambda - z)(\lambda - \overline{z}) = \Pi(\lambda - x)(\lambda - 2Re(z) + |z|^2)$. Do $Re(z) < 0$ và $x < 0$ nên ta suy ra mọi hệ số của $\det(\lambda I - A)$ đều dương.
Giả sử ngược lại mọi hệ số của $\det(\lambda I - A)$ đều dương. Ta sử dụng định lý Perron-Frobenius, định lý này nói rằng : "*Một ma trận vuông A với hệ số dương có một giá trị riêng thực $r > 0$ sao cho mọi giá trị riêng khác (kể cả phức) có mô đun bé hơn r*". Để sử dụng định lý này, ta xét $\eta > 0$ đủ lớn sao cho $\eta I + A$ là ma trận dương (η như vậy tồn tại do A là ma trận Metzler). Đặt $M = \eta I + A$, đa thức đặc trưng của M có dạng $\det(\lambda I - M) = \det(\lambda I - \eta I - A) = \det((\lambda - \eta)I - A) = P(\lambda - \eta)$ với $P(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Ta biểu diễn $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_n\lambda^n$ với $a_i > 0$, $i = 0, 1, ..., n$. Xét r là giá trị riêng như trong định lý Perron-Frobenius của ma trận M, khi đó $P(r - \eta) = 0$ hay $a_0 + a_1(r - \eta) + ... + a_n(r - \eta)^n = 0$. Do đó $r < \eta$. Bây giờ ta xét z là một giá trị riêng của A và giả sử $Re(z) \geq 0$. Do $P(z) = 0$ nên $P(z + \eta - \eta) = P(z) = 0$ suy ra $z + \eta$ là một giá trị riêng của M, hơn nữa ta có $Re(z + \eta) \geq \eta$ nên $|z + \eta| \geq \eta$, điều này mâu thuẫn với định lý Perron-Frobenius do theo định lý này thì $|z + \eta| < r < \eta$. Vậy $Re(z) < 0$ với mọi z là giá trị riêng của A. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

(b) Ta sử dụng bổ đề sau đây về ma trận hệ số không âm : "*Nếu A là một ma trận vuông gồm các hệ số không âm và λ là một số thực. Khi đó $\lambda > \rho(A)$) (phổ của A) khi và chỉ khi các định thức con chính góc trái của $\lambda I - A$ đều dương*".
Để chứng minh phần (b), ta chỉ cần chỉ ra nếu A là một ma trận Metzler thì mọi giá trị riêng của A có phần thực âm khi và chỉ khi n định thức con chính góc trái của A đều dương.
Xét $\eta > 0$ đủ lớn sao cho $\eta I + A$ là ma trận dương (η như vậy tồn tại do A là ma trận Metzler). Khi đó $-A = \eta I - (\eta I + A)$ và do $\eta I + A$ là ma trận dương nên theo bổ đề trên, $-A$ có các định thức con góc trái dương khi và chỉ khi $\eta > \rho(\eta I + A)$. Do $\eta I + A$ dương nên theo định lý Perron-Frobenius, $\rho(\eta I + A)$ là giá trị riêng có môđun lớn nhất của $\eta I + A$. Do đó $\rho(\eta I + A) - \eta$ là giá trị riêng có phần thực lớn nhất của A. Như vậy $\eta > \rho(\eta I + A)$ khi và chỉ khi $\rho(\eta I + A) - \eta < 0$ hay tất cả các giá trị riêng của A đều có phần thực bé hơn 0. $\square$

(c) Ta sử dụng công thức biến thiên hằng số :

$$x(t) = \exp^{At} x(0) + \int_0^t \exp^{A(t-s)} Bu(s)ds$$

Giả sử hệ là ổn định tiệm cận và u bị chặn đều theo t. Do hệ ổn định tiệm cận nên ma trận A có các giá trị riêng với phần thực < 0. Ta sử dụng bổ đề sau : "*Nếu ma trận vuông A chỉ có các giá trị riêng với phần thực âm, khi đó tồn tại các hằng số $c, d > 0$ sao cho $\left\|\exp^{At}\right\| \leq c \exp^{-dt}$*". (chứng minh có thể tham khảo sách Ordinary Differential Equations - Qualitative Theory của các tác giả Luis Barreira và Claudia Valls - mệnh đề 2.27). Từ bổ đề ta có đánh giá cho $y(t)$:

$$\|y(t)\| \leq \|C\| \|x(t)\| \leq \left\|\exp^{At}\right\| \|x(0)\| + \int_0^t \left\|\exp^{A(t-s)}\right\| \|B\| \|u(s)\| ds$$

Đặt $a = \|x(0)\|, b = \|B\|$ và $M = \sup_t \|u(t)\|$, ta thu được :

$$\|y(t)\| \leq ca \exp^{-dt} + \int_0^t bMc \exp^{-dt+ds} ds$$

Do $d > 0$ nên $\lim_{t\to\infty} \exp^{-dt} = 0$ và do đó $\exp^{-dt}$ bị chặn đều theo t. Hơn nữa ta có :

$$\int_0^t \exp^{-dt+ds} ds = \frac{1}{d} - \frac{\exp^{-dt}}{d}$$

Từ đây do a, b, c, M là các hằng số nên ta suy ra $\|y(t)\|$ bị chặn đều theo t. Vậy hệ là ổn định BIBO. □
Một hệ là ổn định BIBO thì chưa chắc là ổn định tiệm cận, ta sẽ chỉ ra một phản ví dụ. Ta chỉ cần chọn sao cho $\|x(t)\|$ bị chặn đều nhưng $\exp^{At}$ không hội tụ về 0 khi $t \to \infty$. Ý tưởng xuất phát từ việc chọn một hệ tuyến tính là ổn định nhưng không ổn định tiệm cận. Ta chọn B là ma trận 0, A là ma trận :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ý tưởng chọn ma trận này được lấy từ bài tập 3.1 - sách Ordinary Differential Equations - Qualitative Theory của các tác giả Luis Barreira và Claudia Valls. Sử dụng công thức biến thiên hằng số : $x(t) = \exp^{At} x(0)$. Ta tính $\exp^{At}$, chú ý rằng :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4\mathrm{Id}$$

nên ta có thể viết :

$$\begin{aligned}
\exp^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \mathrm{Id} + \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2t) & 0 \\ 0 & \cos(2t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin(2t)/2 \\ -2\sin(2t) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t)/2 \\ -2\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cho $C = \mathrm{Id}$, ta suy ra ngay $y(t) = \exp^{At} x(0)$ và do đó $y(t)$ bị chặn đều theo t, tức là hệ ổn định BIBO. Rõ ràng hệ không ổn định tiệm cận do các hàm $\cos(2t)$ và $\sin(2t)$ không hội tụ khi t dần đến vô cùng. □

Bài 3 : (a) Ta có biểu diễn i-o : (xét $t_0 = 0$)

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

Từ biểu diễn của $u(\tau)$, ta suy ra $y(t) = \int_0^t g(t-\tau) d\tau$ nếu $t \leq 1$ và $y(t) = \int_0^{2-t} g(t-\tau) d\tau$ nếu $t > 1$ (sở dĩ ta có biểu diễn này do hàm g đối xứng qua 1). □

(b) Ta sử dụng biến đổi Laplace, nhắc lại rằng ma trận hàm truyền $\widehat{G} = (\widehat{g}_{ij})$ thoả mãn :

$$\begin{pmatrix} \widehat{y}_1(s) \\ \widehat{y}_2(s) \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} \widehat{g}_{11}(s) & \widehat{g}_{12}(s) \\ \widehat{g}_{21}(s) & \widehat{g}_{22}(s) \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} \widehat{u}_1(s) \\ \widehat{u}_2(s) \end{pmatrix}$$

Nhắc lại một số tính chất của phép biến đổi Laplace :
1) $\mathcal{L}(ax(t) + by(t)) = a\mathcal{L}(x(t)) + b\mathcal{L}(y(t))$.

2) $\mathcal{L}(x^{(n)}(t)) = s^n\widehat{x}(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}x^{(k-1)}(0)$
Sử dụng hai tính chất này, và biểu diễn $D_{11}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, ta có :

$$\mathcal{L}(D_{11}(\frac{d}{dt})y_1(t)) = \sum_{i=0}^{m} a_i\mathcal{L}(y_1^{(i)}(t)) = \sum_{i=0}^{m} a_i(s^i\widehat{y}_1(s) - \sum_{k=1}^{i} s^{i-k}y_1^{(k-1)}(0)) = \widehat{y}_1(s)D_{11}(s) - F(D_{11}, y_1)$$

Ở đây với một đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ và một hàm y, $F(P, y) = \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{k=1}^{i} s^{i-k}y^{(k-1)}(0)$ Tương tự, ta thu được :

$$\widehat{y}_1(s)D_{11}(s) - F(D_{11}, y_1) + \widehat{y}_2(s)D_{12}(s) - F(D_{12}, y_2) = \widehat{u}_1(s)N_{11}(s) - F(N_{11}, u_1) + \widehat{u}_2(s)N_{12}(s) - F(N_{12}, u_2)$$
$$\widehat{y}_1(s)D_{21}(s) - F(D_{21}, y_1) + \widehat{y}_2(s)D_{22}(s) - F(D_{22}, y_2) = \widehat{u}_1(s)N_{21}(s) - F(N_{21}, u_1) + \widehat{u}_2(s)N_{22}(s) - F(N_{22}, u_2)$$

Xét tại $y^{(k)}(0) = 0$ và $u^{(k)}(0) = 0$ với mọi k ta thu được các $F(D_{ij}, y_k)$ và $F(N_{ij}, y_k)$ đều bằng 0. Do đó :

$$\widehat{y}_1(s)D_{11}(s) + \widehat{y}_2(s)D_{12}(s) = \widehat{u}_1(s)N_{11}(s) + \widehat{u}_2(s)N_{12}(s)$$
$$\widehat{y}_1(s)D_{21}(s) + \widehat{y}_2(s)D_{22}(s) = \widehat{u}_1(s)N_{21}(s) + \widehat{u}_2(s)N_{22}(s)$$

Ta đã chuyển được về dạng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, do đó ta dễ dàng tìm được biểu diễn của $\widehat{G}(s)$ như sau :

$$\widehat{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{N_{11}(s)D_{22}(s) - N_{21}(s)D_{12}(s)}{D_{11}(s)D_{22}(s) - D_{21}(s)D_{12}(s)} & \dfrac{N_{12}(s)D_{22}(s) - N_{22}(s)D_{12}(s)}{D_{11}(s)D_{22}(s) - D_{21}(s)D_{12}(s)} \\ \dfrac{N_{11}(s)D_{21}(s) - N_{21}(s)D_{11}(s)}{D_{12}(s)D_{21}(s) - D_{22}(s)D_{11}(s)} & \dfrac{N_{12}(s)D_{21}(s) - N_{22}(s)D_{11}(s)}{D_{12}(s)D_{21}(s) - D_{22}(s)D_{11}(s)} \end{pmatrix}$$

Đây là ma trận hàm truyền của hệ. □

(c) Hệ thống phản hồi dương được biểu diễn bởi hệ phương trình :

$$v(t) = r(t) + y(t)$$
$$u(t) = av(t)$$
$$y(t) = u(t-1)$$

Tại $a = 1$ thì $u(t) = v(t)$. Muốn tìm phản hồi theo bước đơn vị, ta cho $r(t) \equiv 1$ và tìm y, ta có : $y(t) = u(t-1) = v(t-1) = r(t-1) + y(t-1) = 1 + y(t-1)$. Ta xem $u(t) = 0$ khi $t < 0$, từ đó suy ra y có biểu diễn như hình $3(a)$.
Tại $a = 0.5$ thì $u(t) = v(t)$. Tương tự ta có : $y(t) = \dfrac{1}{2}(y(t-1) + 1)$ và do $y(t) = 0$ khi $t < 1$ nên y có biểu diễn như hình $3(b)$.□
Hệ thống phản hồi âm được biểu diễn bởi hệ phương trình :

$$v(t) = r(t) - y(t)$$
$$u(t) = av(t)$$
$$y(t) = u(t-1)$$

Tại $a = 1$ thì $u(t) = \dfrac{1}{2}v(t)$. Cho $r(t) \equiv 1$, ta có : $y(t) = u(t-1) = v(t-1) = 1 - y(t-1)$. Chú ý rằng ta xem $u(t) = 0$ khi $t < 0$ nên $y(t) = 0$ khi $t < 1$, do đó ta có biểu diễn như hình $3(c)$.
Tại $a = 0.5$ thì $u(t) = \dfrac{1}{2}v(t)$. Tương tự, ta cũng có $y(t) = \dfrac{1}{2}(1 - y(t-1))$ và do $y(t) = 0$ khi $t < 1$ nên ta có biểu diễn như hình $3(d)$.□