ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN-CƠ-TIN HỌC

Nguyễn Trọng Phúc

BÀI TẬP CUỐI KÌ

Ngành Toán học
(Chương trình đào tạo: tài năng)

Hà Nội - 2021

Bài cuối kì Xeminar

Nguyễn Trọng Phúc

Câu 4.

a)

i) Ta chứng minh điều kiện cần và đủ của K là $K \leq 0$.

Thật vậy, giả sử $K \leq 0$ suy ra $-K \geq 0$. Suy ra hai bất đẳng thức đề bài cho là hiển nhiên đúng.

Ngược lại, giả sử ta có K thỏa mãn hai bất đẳng thức đề bài. Khi đó, giả sử phản chứng $K \geq 0$. Khi đó ta có :

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-1)^m(\sqrt{K}t)^{2m} = \cos(\sqrt{K}t)$$

Do đó nếu ta chọn $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{K}} > 0$ thì $\cos(\sqrt{K}t) = -1 < 0$ (mâu thuẫn)

Vậy điều giả sử là sai. Suy ra điều kiện cần và đủ là $K \leq 0$.

Câu 5.

Trước hết vì M khả nghịch nên ta viết lại phương trình đề bài thành :

$$\ddot{x}(t) + M^{-1}D\dot{x}(t) + M^{-1}Kx(t) = M^{-1}Bu(t)$$

Đặt $z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$. Khi đó từ phương trình trên ta có:

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix} u(t)\ (*)$$

Đặt $P = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix}$

b) Ta thấy điều kiện cần và đủ để hệ đã cho là C_2 điều khiển được tương đương với điều kiện cần và đủ để hệ (*) điều khiển được. Theo định lý 6.1, điều kiện cần và đủ để hệ (*) điều khiển được là ma trận $W_{c_2}(t) = \int_0^t e^{P\tau}QQ'e^{P'\tau'}d\tau$ khả nghịch với mọi $t > 0$. Đây cũng chính là điều kiện cần và đủ để hệ ban đầu là C_2 điều khiển được.

a) Từ phương trình (*), ta suy ra :

$$z(t_1) = e^{Pt}z(0) + \int_0^{t_1} e^{P(t_1-\tau)}Qu(\tau)d\tau$$

Gọi $N(t)$ là ma trận $n \times 2n$ tạo bởi n hàng đầu tiên của ma trận e^{Pt}. Ta có:

$$x(t_1) = N(t_1)z(0) + \int_0^t N(t_1 - \tau)Qu(\tau)d\tau$$

Ta chứng minh điều kiện cần và đủ để hệ đã cho là C-điều khiển được là ma trận :

$$W_c(t) = \int_0^t N(\tau)QQ'N(\tau)'d\tau$$

khả nghịch với mọi $t > 0$.

Thật vậy, đầu tiên, giả sử $W_c(t)$ khả nghịch với mọi $t > 0$. Khi đó, với $z(0) = z_0$ và x_1 bất kì, ta chọn :

$$u(t) = -Q'N(t_1 - t)'W_c^{-1}(t_1)[N(t_1)z_0 - x_1]$$

Với $u(t)$ như trên, ta có:

$$x(t_1) = N(t_1)z_0 - \left(\int_0^{t_1} N(t_1 - \tau)QQ'N(t_1 - \tau)'d\tau\right)W_c^{-1}[N(t_1)z_0 - x_1]$$

$$= N(t_1)z_0 - W_c(t_1)W_c^{-1}[N(t_1)z_0 - x_1] = x_1$$

Do đó $u(t)$ biến x_0 thành x_1 tại thời điểm t_1. Suy ra hệ là C-điều khiển được.

Ngược lại, giả sử hệ là C-điều khiển được. Ta thấy $W_c(t)$ là ma trận nửa xác định dương với mọi $t > 0$. Ta chứng minh $W_c(t)$ là ma trận xác định dương với mọi $t > 0$. Thật vậy, giả sử tồn tại $t_1 > 0$ sao cho $W_c(t_1)$ không xác định dương. Suy ra tồn tại $vect\ v$ khác 0 sao cho:

$$v'W_c(t_1)v = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^{t_1} v'N(\tau)QQ'N(\tau)'d\tau = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^{t_1} ||v'N(\tau)Q||^2 d\tau = 0$$

Suy ra $v'N(\tau)Q = 0$ với mọi $\tau \in [0, t_1]$.

Vì hệ là C-điều khiển được nên tồn tại $u(t)$ biến $z(0) = N(-t_1)v$ thành $x_1 = 0$. Khi đó ta có:

$$0 = v + \int_0^{t_1} N(t_1 - \tau)Qu(\tau)d\tau$$

Nhân hai vế với v' suy ra $||v||^2 = 0$ suy ra $v = 0$ (mâu thuẫn). Do đó $W_c(t)$ xác định dương với mọi $t > 0$. Suy ra $W_c(t)$ khả nghịch với mọi $t > 0$.

c) Từ công thức của $x(t)$, ta suy ra:

$$y(t) = CN(t)z(0) + C\int_0^t N(t - \tau)Qu(\tau)d\tau$$

Đặt $\overline{y}(t) = y(t) - C\int_0^t N(t-\tau)Qu(\tau)d\tau$
Khi đó: $CN(t)z(0) = \overline{y}(t)$ $(*)$.
Vì y, u đã biết nên $\overline{y}$ đã biết.
Ta chứng minh điều kiện cần và đủ để hệ là quan sát được là ma trận :

$$W_o(t) = \int_0^t N(\tau)'C'CN(\tau)d\tau$$

khả nghịch với mọi $t > 0$.

Đầu tiên giả sử $W_o(t)$ khả nghịch với mọi $t > 0$. Nhân cả 2 vế của phương trình (*) với $N(t)'C'$ và lấy tích phân trên $[0, t_1]$, ta có:

$$W_o(t_1)z(0) = \int_0^{t_1} N(\tau)'C'\overline{y}(\tau)d\tau$$

Suy ra : $z(0) = W_o(t_1)^{-1}\int_0^{t_1} N(\tau)'C'\overline{y}(\tau)d\tau$
Suy ra $z(0)$ xác định duy nhất. Suy ra hệ là quan sát được.

Ngược lại, giả sử hệ quan sát được. Ta thấy $W_o(t)$ nửa xác định dương với mọi $t > 0$. Giả sử phản chứng tồn tại $t_1 > 0$ sao cho $W_o(t_1)$ không xác định dương. Suy ra tồn tại véc-tơ v khác 0 sao cho :

$$v'W_o(t_1)v = \int_0^{t_1} v'N(\tau)'C'CN(\tau)vd\tau = \int_0^{t_1} ||CN(\tau)v||^2 d\tau = 0$$

Suy ra $CN(\tau)v = 0$ với mọi $\tau \in [0, t_1]$. Khi đó, chọn $u(t) = 0, z(0) = v$ hoặc $z(0) = 0$ thì $y(t) = CN(t)z(0) = 0$. Suy ra hệ không quan sát được. Do đó $W_o(t)$ xác định dương với mọi $t > 0$. Suy ra $W_o(t)$ khả nghịch với mọi $t > 0$.