

BÀI TẬP PHƯƠNG PHÁP PHÂN ĐÔI

Câu 1 Hãy viết hàm phân đôi (bisection trong Python có dạng) sau:

```
def bisection(f, a, b, nmax, tol):  
    return c, err, n
```

trong đó f là hàm số; a, b : là điểm đầu và điểm cuối của đoạn ta tìm nghiệm; $nmax$: số lượng tối đa các phép lặp; tol : sai số nhỏ nhất cho phép; c : nghiệm xấp xỉ; err : đánh giá cận trên của sai số tuyệt đối của nghiệm xấp xỉ; n : số bước lặp thực hiện để tìm c .

Trong các câu sau hãy sử dụng chính hàm bisection vừa viết trong câu 1 để thực hành trong Python.

Câu 2 Sử dụng phương pháp phân đôi để tìm nghiệm của các phương trình sau, với sai số $tol = 1e - 6$.

- (a) Các nghiệm thực của phương trình $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.
- (b) Nghiệm của phương trình $x = 1 + 0.3\cos(x)$.
- (c) Nghiệm dương nhỏ nhất của $\cos(x) = 1/2 + \sin(x)$.
- (d) Nghiệm của $x = e^{-x}$.
- (e) Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $e^{-x} = \sin(x)$.

Câu 3 Vẽ đồ thị của hai hàm số ở 2 vế của phương trình $x = \tan(x)$, và quan sát giao điểm của 2 đồ thị đó.

- (a) Dựa vào đồ thị, hãy chọn 2 điểm đầu mút a, b cho phương pháp phân đôi để tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $x = \tan(x)$, với độ chính xác $\epsilon = 1e - 4$.
- (b) Tìm nghiệm gần 100 nhất của phương trình $x = \tan(x)$ sử dụng phương pháp phân đôi.

Câu 4 a) Viết script trong Python sử dụng phương pháp phân đôi để tìm tất cả các nghiệm của phương trình sau với độ chính xác $\epsilon = 1e - 6$.

$$f(x) := 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = 0.$$

- b) Tính số bước lặp theo công thức trong lý thuyết và so sánh với kết quả lập trình trong Python.

BÀI TẬP PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN

Câu 5 Hãy viết hàm lập đơn trong Python dạng sau:

```
def lapdon(f, x0, nmax, tol):  
    return c, err, n
```

trong đó f là hàm số; x_0 là giá trị đầu tiên của phép lặp đơn; n_{\max} : số lượng tối đa các phép lặp; tol : sai số nhỏ nhất cho phép; c : nghiệm xấp xỉ; err : đánh giá cận trên của sai số tuyệt đối của nghiệm xấp xỉ; n : số bước lặp thực hiện để tìm c .

Trong các câu sau hãy sử dụng chính hàm vừa viết trong câu 5 để thực hành trong Python, khi mà ta có tính chất ánh xạ co của hàm f .

Câu 6 a) Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $x = e^{-x}$? Phép lặp đơn $x_{n+1} = e^{-x_n}$ có hội tụ với giá trị x_0 phù hợp hay không? Viết Python script để tính 6 giá trị đầu tiên của x_n .
b) Câu hỏi tương tự với phép lặp $x_{n+1} = 1 + \arctan(x_n)$.

Câu 7 Chứng minh rằng với các hằng số c, d thỏa mãn $|d| < 1$, phương trình $x = c + d \cos(x)$ có nghiệm duy nhất. Kiểm tra tính hội tụ của phép lặp $x_{n+1} = c + d \cos(x_n)$ và hãy đưa ra đánh giá cho tốc độ hội tụ.

Câu 8 Các phép lặp sau có hội tụ đến α hay không? Nếu hội tụ, hãy xác định tốc độ hội tụ, cho x_0 đủ gần α .

$$a) x_{n+1} = \frac{15x_n^2 - 24x_n + 13}{4x_n}, \quad \alpha = 1, \quad b) x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n^3}, \quad \alpha = \sqrt{2}.$$

a) Sử dụng công thức ước lượng tiên nghiệm, hãy tìm số bước lặp cần thiết để nhận được xấp xỉ với sai số tuyệt đối không quá $1e-5$, với $x_0 = \alpha + 1e-1$.

b) Cùng câu hỏi, nhưng cho sai số tương đối

Câu 9 Phép lặp đơn $x_{n+1} = 2 - (1 + c)x_n + cx_n^3$ sẽ hội tụ đến $\alpha = 1$ với một số giá trị của c , giả sử x_0 đủ gần α .

a) Tìm tất cả mọi c để phép lặp đơn này hội tụ. Tìm mọi c để phép lặp đơn này hội tụ bậc hai, tức là $|x_{n+1} - \alpha| = \mathcal{O}(|x_n - \alpha|^2)$.

b) Với một c như vậy, hãy tính số bước lặp cần thiết để đạt được 5 chữ số chắc, cho điều kiện ban đầu $x_0 = \alpha + 1e-3$.

Câu 10 Phương trình $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ có nghiệm duy nhất trong đoạn $[1, 2]$. Có rất nhiều cách khác nhau để chuyển về bài toán tìm điểm bất động. Hãy xét sự hội tụ của các phép lặp đơn sau, với điều kiện đầu $x_0 = 1.5$. Tìm bậc hội tụ của các phương pháp đó (nếu có) và tính sai số với $n = 1, \dots, 10$, từ đó so sánh với phương pháp phân đôi.

$$a) x = g_1(x) = x + x^3 + 4x^2 - 10 \quad b) x = g_2(x) = \sqrt{10/x - 4x}$$

$$c) x = g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3} \quad d) x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x + 4}}$$

$$e) x = g_3(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

Câu 11 Cho các phương trình sau

$$a) 3(2x - 1) = \cos(x) \quad b) x^4 - 2x - 3 = 0$$

Hãy xây dựng cho mỗi phương trình một phương pháp lặp đơn hội tụ, biết rằng phương trình a) (t.ú. b)) có nghiệm duy nhất trong $(0, 1)$ (t.ú. $(0, 2)$). Viết các công thức đánh giá sai số tiên nghiệm, hậu nghiệm sao cho sai số nhỏ hơn $1e-4$.

Hết