Class No.3 (part 2)

Saturday, September 25, 2021 11:03 AM

Phương pháp khử Gauss
và các phân tích ma trận LU, PLU

$Ax = b$, với $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ khả nghịch
$b \in \mathbb{R}^{n,1}$

VD1: Giải hệ $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b} \rightarrow [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right]$

Khử Gauss

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} H_2 - 4H_1 \\ H_3 - 7H_1 \end{array} \xrightarrow{①} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & -21 & -5 \end{array}\right] H_3 - 2H_2$$

$$\xrightarrow{②} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array}\right]$$

ma trận ◥ tam giác trên

Giải từ dưới lên: $x_3 = \frac{-1}{3}$, $x_2 = 2$, $x_1 = -2$.

Khái quát hoá:
p² Gauss
với $n=3$

$$Ax = b \xrightarrow{①} L_1 A x = L_1 . b \quad \text{với } L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} ◣$$

$$\xrightarrow{②} \underbrace{L_2 L_1 A}_{\downarrow \\ ◥ \; U} x = \underbrace{L_2 L_1 b}_{\downarrow \\ \tilde{b}} \quad \text{với } L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(giải từ dưới lên trên tìm x).

Tổng quát: p² Gauss

$$Ax = b \longrightarrow \overset{◣}{\underbrace{L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 A}_{◥ \; U}} x = \underbrace{L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 b}_{\tilde{b}}$$

Matrix decomposition (phân tích ma trận) $A = \underbrace{(L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1)^{-1}}_{} . U$.

$\Rightarrow A = L . U$

phân tích LU (L: ◣, U: ◥).

Trong VD trên $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$

$\rightarrow L = (L_2 L_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

K'tra: $A = L \cdot U$.

Độ phức tạp tính toán: (numerical complexity)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 *} \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{b}_2 \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{b}_3 \end{array}\right] \begin{array}{l} H_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} . H_1 \\ H_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} . H_1 \end{array}$$

nhân tử λ

⇐ VD: $n = 3$, $x \in \mathbb{R}^3$

$1 + (n-1) + (n-1) = 2n-1$ flops

$2n-1$ flops

Quan sát: 1 bước hết $(n-1).(2n-1)$ flops.

TQuát hoá: Độ phức tạp $= \sum_{i=1}^{n} (i-1)(2i-1)$ ①

(viết rõ hơn $= (n-1)(2n-1) + (n-2)(2n-3) + \ldots + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3$).

Theo ① ⇒ Độ phức tạp $= \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - 3i + 1)$

$= \sum_{i=1}^{n} 2i^2 - \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2i^2 - \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1).(2n+1)}{6} - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{2}{3} n^3 + \Theta(n^2)$$

Vì sao? dùng $\Theta(n^2)$

Chỉ cần q.tâm đến bậc cao nhất của n khi tính độ phức tạp thuật toán

(vì khi $n \gg 1$ thì như vậy mới có ý nghĩa)

Kết luận: Complexity của LU $= \frac{2}{3} n^3$.

Phân tích PLU (LU with pivoting/partial piv.)

Motivation: (i) $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$ ⇒ hệ có n° d.n nhưng LU fail.

vì có phép chia cho 0: $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{0} \to nan.$

(ii) $\underbrace{\begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 0 & 1-10^{20} & 2-10^{20} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 10^{-20} x_1 + x_2 = 1 & ① \\ (1-10^{20}) x_2 = 2-10^{20} & ② \end{cases}$

Vì $10^{20} \gg 1$, $10^{20} \gg 2$ ⇒ từ ② ta giải đc $x_2 = \frac{2-10^{20}}{1-10^{20}} \approx 1$.

Thay vào ① thì đc $x_1 = 0$. } n° sai bét.

N° c/xác là $x_1 = 1 + \frac{1}{10^{20}-1} \approx 1$, $x_2 = 1 - \frac{1}{10^{20}-1} \approx 1$.

Kết quả sai vì ta thực hiện phép / cho 1 số quá bé (10^{-20}) ⇒ khuếch đại sai số.

Ý tưởng PLU: (LU with pivoting):

VD2: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ -7 & -8 & 0 & -2 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{\text{pivot}} \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & -8 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$ $H_2 + \frac{4}{7} H_1$, $H_3 + \frac{1}{7} H_1$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -1/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & -8 & 0 & -2 \\ 0 & 3/7 & 6 & -8/7 \\ 0 & 6/7 & 3 & 5/7 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{\text{pivot}} \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & -8 & 0 & -2 \\ 0 & 6/7 & 3 & 5/7 \\ 0 & 3/7 & 6 & -8/7 \end{array}\right]$ $H_3 - \frac{1}{2} H_2$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/7 & 1 & 0 \\ -4/7 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & -8 & 0 & -2 \\ 0 & 6/7 & 3 & -8/7 \\ 0 & 0 & 9/2 & -3/2 \end{array}\right]$ with $\underbrace{}_{U}$ and $\underbrace{}_{\tilde{b}}$

Ma trận pivot $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ta có phân tích ma trận $PA = LU$.

$\underbrace{\qquad U \qquad}$ $\qquad \underbrace{\tilde{b}}$

anh Chuyên

Chú ý: Trong lập trình thì ngta thích viết hơi khác, đó là $A = PLU$.
Khi đó thì các em cần viết lại $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1) L cũng phải pivot đg thời với P.
2) Bước cuối cũng phải lấy chuyển vị của P, và viết rõ $A = PLU$.

Complexity: $\sim$ LU, thì PLU sử dụng $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ flops.

Tổng kết: i) PLU đc ưa thích hơn LU trong nhiều T/H, vì nó tránh đc phép / cho số quá bé.

ii) Vẫn có những T/H mà k cần dùng PLU, chỉ cần LU là đc, ví dụ như
+ các ma trận đối xứng, x/đ dương (Cholesky).
+ các ma trận dải $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
+ Các ma trận đg chéo trội $\left(|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right)$