Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN
K65TN (Seminar 1)

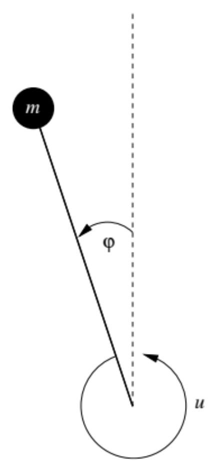
Bài Tập Lý Thuyết Điều Khiển Hệ Thống
Ngày 13 tháng 2 năm 2023

Bài Tập Lý Thuyết Điều Khiển Hệ Thống - No. 1

Câu 1 *Bài toán 1 (con lắc ngược): Xét mô hình điều khiển của một con lắc ngược (sau khi được tuyến tính hóa) cho bởi một phương trình vi phân bậc hai*

$$\varphi"(t) - \varphi(t) = u(t). \tag{1}$$

Ở đây, $\varphi(t) = \theta(t) - \pi$ *là độ lệch góc của con lắc so với trạng thái cân bằng thẳng đứng tại thời điểm* $t \geq 0$ *và* $u(t)$ *là mômen lực tác dụng.*



Hình 1: Con lắc ngược - Điều khiển sao cho con lắc chuyển động hướng về trục thẳng đứng

a) Chứng tỏ rằng đối với phản hồi tỷ lệ thuận (proportional state feedback) $u(t) = -\alpha\varphi(t)$ *với* $\alpha < 1$*, mệnh đề sau là đúng: Nếu các giá trị ban đầu thỏa mãn* $\varphi'(0) = -\varphi(0)\sqrt{1-\alpha}$*, thì* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$*. b) Cho* $\alpha \in \mathbb{R}$ *cố định. Xét hàm năng lượng* $V(x, y) := cosx - 1 + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + y^2)$*. Chứng minh rằng* $V(\varphi(t), \varphi'(t))$ *là hằng số dọc theo các nghiệm của phương trình con lắc phi tuyến với phản hồi tỷ lệ thuận, được cho bởi*

$$\varphi"(t) - \sin(\varphi(t)) + \alpha\varphi(t) = 0\ . \tag{2}$$

Từ đó kết luận rằng tồn tại các điều kiện ban đầu $\varphi(0) = \varepsilon;\ \varphi'(0) = 0$ *sao cho nghiệm của* (2) *với* ε *nhỏ tùy ý không thỏa mãn* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$*,* $\lim_{t\to\infty} \varphi'(t) = 0$*.*

Câu 2 ***Bài tập về biến đổi Laplace để huẩn bị cho hàm truyền trong Bài Giảng 2.***

Biến đổi Laplace của 1 hàm số $x(t)$ được định nghĩa bởi

$$X(s) := L[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \ ,$$

trong đó s là 1 số phức với phần thực $\Re(s) < 0$. Ta nói $X(s)$ là biến đổi Laplace của hàm $x(t)$. Biến đổi Laplace chuyển hàm từ miền thời gian t (time domain) sang miền tần số z (frequency domain). Chứng minh các tính chất sau của biến đổi Laplace.

a) Nếu a, b là các hằng số thì $L[ax(t) + by(t)] = aX(s) + bY(s)$.

b) $L[e^{-at}] = \dfrac{1}{s+a}$.

c) $L[x'(t)] = sX(s) - x(0)$.

d) $L[x(t-\tau)] = e^{-s\tau}X(s)$.

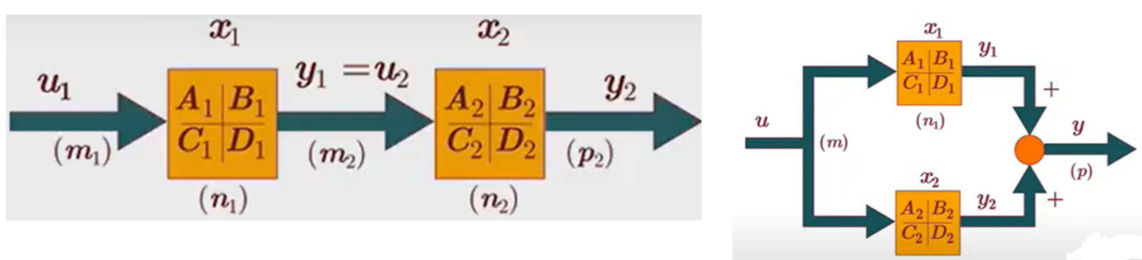
e) $L[e^{-at}x(t)] = X(s+a)$.

Câu 3 *a) Hãy áp dụng biến đổi Laplace cho hệ LTI*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{3}$$

để xây dựng công thức hàm truyền (transfer function) $G(s)$ sao cho $Y(s) = G(s)U(s)$.

b) Trong các mô hình điều khiển của 2 hệ thống điện được mắc nối tiếp và mắc song song hãy tìm mối liên hệ của hàm truyền hệ thống tổng với hàm truyền của 2 hệ thống con.



Hình 2: Mạch điện mắc nối tiếp (trái) và song song (phải).

Câu 4 *a) Nhắc lại rằng hai phương trình $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ và $\dot{z}(t) = -A^T(t)z(t)$ là* liên hợp. *Hãy tìm phương trình liên hợp của hệ LTV*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \tag{4}$$

b) Cho họ tiến hóa của phương trình $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ là $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$. Hãy xác định họ tiến hóa của phương trình liên hợp $\dot{z}(t) = -A^T(t)z(t)$.

Câu 5 *Cặp ma trận vuông* $(E, A) \in (R^{n,n})^2$ *được gọi là chính quy nếu* $\det(sE - A) \neq 0$ *với số* $s \in C$ *nào đó. Giả sử rằng cặp ma trận vuông* (E, A) *là chính quy, hãy chứng minh các khẳng định sau.*
a) Tồn tại 1 ma trận K *khả nghịch sao cho* KE *và* KA *là giao hoán.*
b) Tồn tại 2 ma trận khả nghịch W, T *sao cho* $WET = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, $WAT = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ *trong đó* J *có dạng Jordan,* N *là ma trận lũy linh.*
c) Từ đó hãy tìm công thức nghiệm tường minh của phương trình

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),$$

giả sử rằng hàm $f(t)$ *là đủ trơn.*