

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI  
KHOA TOÁN - TIN

—o0o—

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Tên đề tài

PHÂN TÍCH TÍNH CHẤT ỔN ĐỊNH  
CỦA CÁC HỆ ĐỘNG LỰC CÓ TRỄ  
SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM LAMBERT VÀ ỨNG DỤNG

<i>Chuyên ngành</i>	: Toán Ứng Dụng
<i>Mã số</i>	: 8.46.01.12
<i>Học viên</i>	: Nguyễn Thị Vân Anh
<i>Giảng viên hướng dẫn</i>	: TS. Hà Phi

HÀ NỘI - 2021

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Ước lượng hàm phân rã cho hệ thống tuyến tính có trễ</b>	<b>2</b>
1.1	Đặt vấn đề . . . . .	2
1.2	Hàm Lambert W . . . . .	4
1.3	Giải phương trình vi phân có trễ sử dụng hàm Lambert W . . . . .	6
1.3.1	Trường hợp vô hướng . . . . .	6
1.3.2	Trường hợp bậc cao hơn . . . . .	6
1.4	Ước lượng hàm phân rã của hệ có trễ . . . . .	8
1.5	Ví dụ số . . . . .	11
1.6	Điều khiển của động cơ DC . . . . .	17
1.7	Kết luận chương . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Một số trường hợp đặc biệt trong phân tích tính chất ổn định của các hệ động lực có trễ</b>	<b>20</b>
2.1	Giới thiệu . . . . .	20
2.2	Một trường hợp đặc biệt của hệ bậc hai . . . . .	21
2.3	Ví dụ số . . . . .	25
2.4	Trường hợp hệ có một số lẻ của các giá trị riêng thực . . . . .	28
2.5	Kết luận chương . . . . .	30
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>31</b>

# Chương 1

## Ước lượng hàm phân rã cho hệ thống tuyến tính có trễ

### 1.1 Đặt vấn đề

Xét hệ thống tuyến tính đơn trễ với hệ số hằng (Linear Time Invariant Time-Delayed System) có dạng

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-h) \text{ với mọi } t > 0, \\ x(0) &= x_0, \quad x(t) = g(t) \text{ với mọi } t \in [-h, 0),\end{aligned}\tag{1.1}$$

trong đó  $A$  và  $A_d$  là các ma trận hệ số cỡ  $n \times n$ ,  $x(t)$  là vectơ nghiệm cỡ  $n \times 1$ ,  $g(t)$  là hàm quỹ đạo ban đầu cỡ  $n \times 1$ ,  $t$  là biến thời gian và  $h$  là độ trễ vô hướng cho trước. Một sự gián đoạn được cho phép tại  $t = 0$  khi  $g(0^-) \neq x(0) = x_0$ . Mục tiêu là tìm giới hạn trên cho tốc độ phân rã  $\alpha$  cũng như giới hạn trên cho hằng số  $K$  sao cho ta có

$$\|x(t)\| \leq K e^{\alpha t} \Phi_h, \tag{1.2}$$

trong đó  $\Phi_h = \sup_{t_0-h \leq t \leq t_0} \{\|x(t)\|\}$  và  $\|\cdot\|$  biểu thị chuẩn Euclid. Các điều kiện cho sự tồn tại của  $K$  và  $\alpha$  đã được thảo luận trong ([5]). Một số lượng lớn các nghiên cứu đã được dành cho việc tìm hàm dạng  $K e^{\alpha t} \Phi$ . Ví dụ hàm phân rã được dùng trong Hình 1.1. Như trong hình vẽ, hàm phân rã 1 cho ta ước lượng tốt hơn của  $\alpha$  và  $K$  so với hàm phân rã 2. Điều quan trọng là  $K$  và  $\alpha$  là một cặp và không thể ước lượng riêng lẻ chúng. Mặc dù tồn tại một số phương pháp tiếp cận miền tần số để tối ưu  $\alpha$ , một ước lượng tương ứng của  $K$  không được trình bày trong cách tiếp cận đó. Khi  $h = 0$ ,  $A_d = 0$  và phương trình vi phân có trễ (DDE) trong phương trình (1.1)

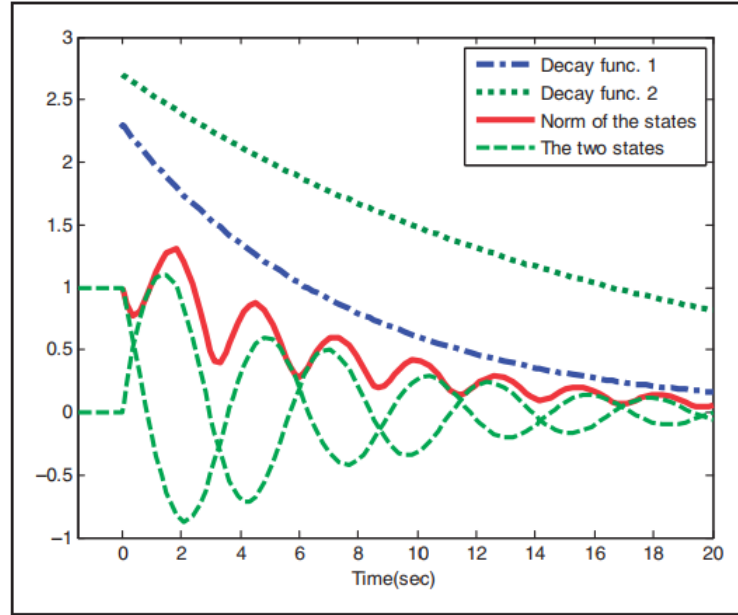
rút gọn thành một phương trình vi phân thường (ODE), thì hàm phân rã của nó là

$$\|x(t)\| \leq e^{\mu(A)t} \|x(0)\|, \quad (1.3)$$

trong đó  $\mu(A) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \theta A\| - 1}{\theta}$  là *độ đo ma trận* ([5]). Khi có thời gian trễ, vấn đề trở nên phức tạp hơn vì nghiệm  $x(t)$  phụ thuộc không chỉ vào trạng thái ban đầu  $x_0$  mà còn hàm quỹ đạo ban đầu  $g(t)$ . Các cách tiếp cận cổ điển cho ta những ước lượng với một số hạn chế đáng kể. Ví dụ, cách tiếp cận theo chuẩn ma trận ([5]) cho ta ước lượng

$$K = 1 + \|A_d\|h \quad \text{và} \quad \alpha = \|A\| + \|A_d\| > 0. \quad (1.4)$$

Đối với các phương pháp đo lường ma trận ([7, 9]),  $K$  được cố định bằng 1, điều này làm cho ước lượng của  $\alpha$  rất chặt chẽ. Ví dụ, xét quỹ đạo của hệ thống được biểu diễn trong Hình 1.1. Nếu  $K$  bằng 1 thì hàm phân rã có giá trị bằng 1 tại thời điểm  $t = 0$ . Khi đó  $\alpha$  phải dương để hàm phân rã bị giới hạn bởi đỉnh của quỹ đạo nghiệm chuẩn tại  $t = 2$ . Tuy nhiên, giá trị tối ưu của  $\alpha$  rõ ràng là một số âm.



Hình 1.1: Ví dụ về hàm phân rã cho hệ (1.1) với  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $h = 1$  và  $g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , với  $t \leq 0$ .

Ngoài ra, ta có thể áp dụng các phương pháp của Lyapunov để giải quyết vấn đề về mặt tính toán. Sử dụng các phương pháp Lyapunov-Krasovskii cổ điển (xem [5]),

các ước lượng của  $K$  và  $\alpha$  thu được là

$$K = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad \alpha = -c_3, \quad (1.5)$$

giả sử rằng tồn tại các hằng số dương  $c_1, c_2, c_3$  sao cho

$$c_1\|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq c_2\|x_t\|^2, \quad (1.6)$$

và

$$\dot{V}(x_t) \leq -2c_3\|x(t)\|^2, \quad (1.7)$$

trong đó  $x_t$  là hàm số được xác định bởi  $x_t(\theta) := x(t + \theta)$  với mọi  $\theta \in [-h, 0]$  và  $V(\cdot)$  là hàm Lyapunov-Krasovskii. Vì hạn chế vốn có của phương pháp Lyapunov, ước lượng tốc độ phân rã,  $c_3$  sẽ không thể đạt được giá trị tối ưu. Ước lượng của  $K$  cũng không đạt được giá trị tối ưu.

Chúng tôi có ý định khắc phục, hoặc giảm bớt những hạn chế vốn có trong các phương pháp đo lường ma trận và các phương pháp Lyapunov bằng cách áp dụng phương pháp hàm Lambert W. Mục tiêu là sử dụng biểu diễn dạng chuỗi cho công thức nghiệm của hệ (1.1) để đưa ra một ước lượng mới và tốt hơn cho hàm phân rã.

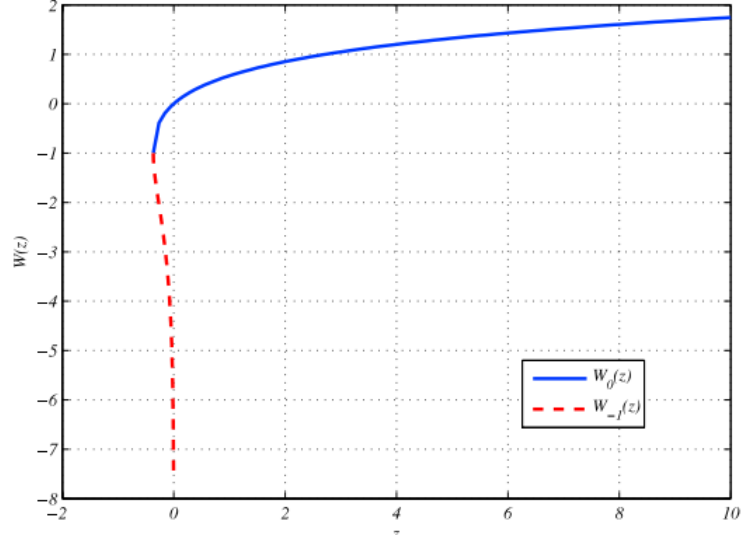
## 1.2 Hàm Lambert W

Hàm Lambert W là hàm số  $W(z)$ ,  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , được định nghĩa là nghiệm của phương trình

$$W(z)e^{W(z)} = z. \quad (1.8)$$

Đây là một hàm đa trị, nghĩa là với mỗi  $z \in \mathbb{C}$  thì có vô số nghiệm của (1.8). Để nhận diện giá trị này, một nhánh số được gán, ta gọi  $W_k(z)$  là nhánh thứ  $k$  của hàm Lambert của  $z$ . Nhánh cắt được xác định bằng cách mỗi nhánh có một miền xác định riêng biệt [2]. Với  $z \in \mathbb{R}$ , chỉ có hai nhánh cho giá trị thực. Nhánh chính  $W_0(z)$  có giá trị thực với  $z \geq \frac{-1}{e}$  và miền giá trị của nhánh này là  $[-1; \infty)$ . Nhánh  $W_{-1}(z)$  có giá trị thực với  $\frac{-1}{e} \leq z < 0$ , và miền giá trị của nó là  $(-\infty; -1]$ . Hai nhánh này được biểu diễn ở Hình 1.2. Một nghiên cứu toàn diện về định nghĩa và tính chất của hàm Lambert W được tìm thấy trong [2]. Bây giờ, ta sẽ định nghĩa ma trận của hàm Lambert W.

Xét một ma trận  $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , có phân tích Jordan là  $H = ZJZ^{-1}$ , với  $J =$



Hình 1.2: Hai nhánh thực của hàm Lambert W

$\text{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_p(\lambda_p))$  và  $Z$  là một ma trận khả nghịch. Ma trận hàm Lambert W cho mỗi khối Jordan  $J_i$  cỡ  $m$  được định nghĩa bởi

$$W_k(J_i) := \begin{bmatrix} W_k(\lambda_i) & W'_k(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m-1)!} W_k^{m-1}(\lambda_i) \\ 0 & W_k(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m-2)!} W_k^{m-2}(\lambda_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_k(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

và ma trận hàm Lambert của  $H$  được định nghĩa bởi

$$W_k(H) := Z \text{diag}(W_k(J_1(\lambda_1), W_k(J_2(\lambda_2), \dots, W_k(J_p(\lambda_p)))) Z^{-1}. \quad (1.10)$$

Mọi ma trận được định nghĩa bởi (1.10), với  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  thỏa mãn

$$W_k(H) \exp(W_k(H)) = H. \quad (1.11)$$

Định nghĩa chuẩn ở trên dẫn đến cùng một nhánh  $k$  của hàm Lambert W được sử dụng trong tất cả các khối Jordan. Điều này là không cần thiết để có một nghiệm của 1.11. Từ  $W_0(0) = 0$  và  $W_k(0) = \infty$  với  $k \neq 0$ , ta điều chỉnh định nghĩa chuẩn để tránh sự vô hạn giá trị. Trường hợp đặc biệt này được gọi là trường hợp nhánh chuyển mạch, được định nghĩa trong [14]. Chi tiết hơn,  $W_k(H)$  sử dụng giá trị  $k$  cho những khối Jordan với  $\lambda \neq 0$  và 0 cho những khối Jordan với  $\lambda = 0$ . Định nghĩa này được sử dụng trong Chương 2. Bằng cách tương tự, giả sử rằng khi tính toán nhánh chính  $e^{-1}$  không là giá trị riêng của  $H$  ứng với khối Jordan có số chiều lớn

hơn 1. Điều này được yêu cầu để vượt qua khó khăn bởi thực tế rằng  $W'_0(e^{-1})$  không xác định. Hạn chế này làm giảm vẻ đẹp của định nghĩa ma trận hàm Lambert  $W$  nhưng không ảnh hưởng đến hiệu quả của việc sử dụng nó.

## 1.3 Giải phương trình vi phân có trễ sử dụng hàm Lambert $W$

### 1.3.1 Trường hợp vô hướng

Với trường hợp vô hướng, ta có phương trình

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_dx(t-h). \quad (1.12)$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$s - a - a_de^{-sh} = 0. \quad (1.13)$$

Nghiệm của (1.13) có thể được biểu diễn về hàm Lambert  $W$  theo các bước đơn giản (xem [14]) có dạng

$$s_k = \frac{1}{h}W_k(a_dhe^{-ah}) + a, \quad (1.14)$$

trong đó  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  là chỉ số của các nhánh của hàm Lambert được sử dụng. Mỗi nghiệm trong số vô hạn các nghiệm của (1.13) tương ứng với một nhánh của hàm này.

Năm 2006, Shinozaki & Mori đã chứng minh rằng trong số các nghiệm của (1.14), nghiệm tương ứng với nhánh chính  $k = 0$  luôn có phần thực lớn nhất, do đó nó là nghiệm trội của phương trình. Do đó, để phương trình (1.12) ổn định, điều kiện cần và đủ là  $\text{Re}(s_0) < 0$ .

### 1.3.2 Trường hợp bậc cao hơn

Xét hệ phương trình (1.1) với  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}, h > 0$ . Các bước sau đây được trình bày trong [14] nhằm tính toán các giá trị riêng bằng cách sử dụng ma trận hàm Lambert  $W$ . Phương pháp được đề xuất dựa trên việc tìm nghiệm của phương trình

$$S - A - A_d \exp(-Sh) = 0, \quad (1.15)$$

trong đó  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Biến đổi (1.15) ta được

$$(S - A) \exp((S - A)h + Ah) = A_d.$$

Giả sử ta tìm được một ma trận  $Q$  sao cho

$$\exp((S - A) + Ah) = \exp((S - A)h) Q^{-1}.$$

Khi đó ta có

$$h(S - A) \exp((S - A)h) = hA_d Q. \quad (1.16)$$

Đặt  $M := hA_d Q$ , ta thấy rằng với mỗi  $k \in \mathbb{Z}$  thì

$$S_k = \frac{1}{h} W_k(M) + A \quad (1.17)$$

là một nghiệm của (1.16). Bằng cách thay (1.17) vào (1.16), ta thu được biểu thức sau

$$W_k(M) \exp(W_k(M) + Ah) - hA_d = 0. \quad (1.18)$$

Đến đây có hai cách tiếp cận khác nhau để tìm  $S_k$ , trong đó (1.18) được coi như là phương trình phi tuyến của biến số  $M$  ([14]) hay biến số  $W_k(M)$  (xem [1, 4]). Các bước tính nghiệm đặc trưng của hệ được cho bởi thuật toán sau.

**Thuật toán 1.** Lặp lại với  $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

(1) Giải phương trình phi tuyến

$$W_k(M) \exp(W_k(M) + Ah) - hA_d = 0, \quad (1.19)$$

để tìm  $M_k$ , với  $M_k = hA_d Q_k$ .

(2) Tính  $S_k$  tương ứng với  $M_k$  vừa tìm được

$$S_k = \frac{1}{h} W_k(M_k) + A. \quad (1.20)$$

(3) Tính các giá trị riêng của  $S_k$ .

Để hệ (1.1) ổn định thì mọi giá trị riêng phải có phần thực âm. Việc tính nghiệm cho tất cả các nhánh là điều không thể. Để giải quyết khó khăn này, người ta giả sử rằng với bất kì nhánh  $k$  nào của ma trận hàm Lambert, chỉ tồn tại duy nhất nghiệm  $M_k$  của (1.19) tương ứng với ma trận  $S_k$ . Giả định này dựa trên quan sát từ nhiều ví dụ thực tế, dẫn đến một giả thuyết mạnh hơn sau đây [14, 15].

**Giả thiết 1.** Các giá trị riêng trội nhất nằm trên  $m$  nhánh chính của hàm Lambert  $W$  trong đó  $m$  là số khuyết của ma trận  $A_d$ . Cụ thể hơn, với mọi  $i \in \mathbb{Z}$  ta có

$$\max \{ \operatorname{Re}(eig(S_i)), -m \leq i \leq m \} = \max \{ \operatorname{Re}(eig(S_i)), i \in \mathbb{Z} \}. \quad (1.21)$$



**Hệ quả 1.1.** *Giả sử rằng Giả thiết 1 được thỏa mãn cho hệ (1.1). Khi đó, nếu  $\text{rank}(A_d) \geq 1$  thì giá trị riêng trội nhất của hệ (1.1) chính là giá trị riêng của ma trận  $S_0$  tương ứng với nhánh chính của hàm Lambert trong Thuật toán 1.*

## 1.4 Ước lượng hàm phân rã của hệ có trễ

Xét hệ phương trình (1.1). Nghiệm của (1.1) có thể viết được dưới dạng sau ([14])

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{S_k t} C_k^I, \quad (1.22)$$

trong đó  $S_k$  được tìm bằng cách sử dụng Thuật toán 1. Ở đây  $S_k$  và  $Q_k$  là ma trận cỡ  $n \times n$ ,  $C_k^I$  là véc tơ cỡ  $n \times 1$  và được xác định bởi hàm quỹ đạo ban đầu  $g(t)$  và  $x_0$ . Theo [3, Phụ lục A] nghiệm tổng quát của hệ (1.1) có thể được viết dưới dạng

$$x(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{S_k t} \left( \sum_{j=1}^n T_{kj}^I L_{kj}^I \right)}_{:=P_1} x_0 - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{S_k t} \sum_{j=1}^n \left( T_{kj}^I L_{kj}^I A_d G(\lambda_{kj}) \right)}_{:=P_2}, \quad (1.23a)$$

trong đó

$$\lambda_{kj} := \text{eig}(S_k), j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.23b)$$

$$G(\lambda_{kj}) := \int_0^h e^{-\lambda_{kj} s} g(s-h) ds, \quad (1.23c)$$

$$L_{kj}^I := \lim_{s \rightarrow \lambda_{kj}} \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial s} \prod_{j=1}^n (s - \lambda_{kj})}{\frac{\partial}{\partial s} \det(sI + A + A_d e^{-sh})} \text{adj}(sI + A + A_d e^{-sh}) \right\}, \quad (1.23d)$$

$$\tilde{R}_k^{I+} := \begin{bmatrix} T_{k1}^I & T_{k2}^I & \cdots & T_{kn}^I \end{bmatrix} = R_k^{I*} (R_k^I R_k^{I*})^{-1}, \quad (1.23e)$$

$$R_{kj}^I := \text{adj}(\lambda_{kj} I - S_k), \tilde{R}_k^I = \begin{bmatrix} R_{k1}^I \\ R_{k2}^I \\ \vdots \\ R_{kn}^I \end{bmatrix}, \quad (1.23f)$$

trong đó  $\tilde{R}_k^{I+}$  là nghịch đảo mở rộng Moore-Penrose cỡ  $n \times n^2$ ,  $R_k^{I*}$  là ma trận chuyển vị liên hợp  $n \times n^2$  của  $\tilde{R}_k^I$  và  $T_{kj}^I$  là khối vuông thứ  $j$  của  $\tilde{R}_k^{I+}$ .

**Định lý 1.2.** *Giả sử rằng hệ (1.1) thỏa mãn Giả thiết 1. Bên cạnh đó ta cũng giả sử tồn tại các số thực  $\alpha, K_1, K_2, K_3$  và  $K_4$  sao cho*

$$\alpha = \max \{ \text{Re}(\text{eig}(S_i)), -m \leq i \leq m \}, \quad (1.24)$$

$$K_1 = \sup_{0 \leq t < h} \underbrace{\left\| e^{(-A-\alpha I)t} \right\|}_{=: J_1(t)}, \quad (1.25a)$$

$$K_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \geq h} \underbrace{\left\| \sum_{k=-N}^N e^{(S_k-\alpha I)t} \sum_{j=1}^n T_{kj}^I L_{kj}^I \right\|}_{=: J_2(N,t)}, \quad (1.25b)$$

$$K_3 = \sup_{0 \leq t < h} \underbrace{\int_0^t \left\| e^{(-A-\alpha I)t+Ah} A_d \right\| ds}_{=: J_3(t)}, \quad (1.25c)$$

$$K_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \geq h} \underbrace{\int_0^h \left\| \sum_{k=-N}^N e^{(S_k-\alpha I)t} \sum_{j=1}^n \left( T_{kj}^I L_{kj}^I A_d e^{\lambda_{ki}s} \right) \right\| ds}_{=: J_4(N,t)}, \quad (1.25d)$$

trong đó  $m$  là số khuyết của  $A_d$  và  $\text{eig}(S_i)$  là các giá trị riêng của  $S_i$ . Khi đó, nghiệm  $x(t)$  của phương trình 1.1 thỏa mãn ước lượng  $\|x(t)\| \leq K e^{\alpha t} \Phi_h$  với mọi  $t > 0$  trong đó  $\Phi_h := \sup_{-h \leq t \leq 0} \{ \|x(t)\| \}$  và  $K := \max(K_1, K_2) + \max(K_3, K_4)$ .

**Chứng minh.** Rõ ràng Giả thiết 1 cho ta tốc độ phân rã tối ưu của  $\alpha$  chính là giá trị  $\alpha$  trong (1.24). Ước lượng giá trị tối ưu của hệ số  $K$  sao cho  $\|x(t)\| \leq K e^{\alpha t} \Phi_h$  trong đó  $\Phi_h := \sup_{-h \leq t \leq 0} \|x(t)\|$ . Lấy chuẩn cả hai vế của phương trình (1.23a) ta được

$$\|x(t)\| \leq \|P_1(t)\| + \|P_2(t)\|. \quad (1.26)$$

Lưu ý rằng với  $t \in [0, h)$ , ta có  $x(t-h) = g(t-h)$  đã biết, vì vậy (1.1) trở thành

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = -A_d g(t-h) \text{ với mọi } t \in [0, h). \quad (1.27)$$

Mặt khác ta có các ước lượng sau với mọi  $t \in [0, h)$

$$\|P_1(t)\| \leq \|e^{(-A-\alpha I)t} x_0\| e^{\alpha t} \leq K_1 e^{\alpha t} \Phi_h, \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \|P_2(t)\| &\leq \int_0^t \| -e^{-A(t-s)} A_d \| \cdot \|g(s-h)\| ds \\ &\leq \int_0^t \| -e^{(-A-\alpha I)t+As} A_d \| \cdot \|g(s-h)\| e^{\alpha t} ds \\ &\leq K_3 e^{\alpha t} \Phi_h. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Với  $t \in [h, +\infty)$  ta có

$$\begin{aligned} \|P_1(t)\| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=-N}^N e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n T_{kj}^I L_{kj}^I x_0 \right\| e^{\alpha t} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \geq h} \left\| \sum_{k=-N}^N e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n T_{kj}^I L_{kj}^I \right\| e^{\alpha t} \|x_0\|. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Do đó  $\|P_1(t)\| \leq K_2 e^{\alpha t} \Phi_h$  với  $t \in [h, \infty)$ . Tương tự,

$$\begin{aligned} \|P_2(t)\| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=-N}^N e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n (T_{kj}^I L_{kj}^I A_d \int_0^h e^{\lambda_{ki}s} g(s-h) ds) \right\| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \int_0^h \sum_{k=-N}^N e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n (T_{kj}^I L_{kj}^I A_d e^{\lambda_{ki}s}) g(s-h) ds \right\| e^{\alpha t} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \geq h} \int_0^h \left\| \sum_{k=-N}^N e^{(S_k - \alpha I)t} \sum_{j=1}^n (T_{kj}^I L_{kj}^I A_d e^{\lambda_{ki}s}) \right\| ds \cdot \Phi_h. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Do đó ta có  $\|P_2(t)\| \leq K_4 e^{\alpha t} \Phi_h$  với mọi  $t \in [h, \infty)$ . Lấy tổng của (1.30) và (1.31), ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Nhận xét 1.** Đánh giá  $K$  và  $\alpha$  như trên (xem [3]) vẫn còn khá thô.  $K$  tốt nhất phải là  $\max\{K_1 + K_3, K_2 + K_4\}$ . Bên cạnh đó, đánh giá đẹp hơn (thể hiện vai trò của  $x(0)$ ) là

$$\|P_1(t)\| \leq \max\{K_1, K_2\} e^{\alpha t} \|x_0\|, \quad (1.32a)$$

$$\|P_2(t)\| \leq \max\{K_3, K_4\} e^{\alpha t} \Phi_h. \quad (1.32b)$$

**Nhận xét 2.** Phương pháp hàm Lambert W trình bày công thức nghiệm hiển dạng chuỗi vô hạn. Tính khả thi của phương pháp này phụ thuộc vào sự hội tụ của chuỗi. Mặc dù chưa có chứng minh cho sự hội tụ của chuỗi hàm Lambert W trong trường hợp tổng quát nhưng trong các ứng dụng của hệ có trễ thì chuỗi được xét luôn hội tụ, xem [14]. Dưới giả thiết chuỗi hội tụ, ta vẫn có thể đánh giá chuỗi số để thu được ước lượng của  $K$ . Quá trình này được minh họa trong ví dụ số ở Mục 1.5.

**Nhận xét 3.** Người ta đã quan sát thấy rằng, mặc dù chuỗi hàm Lambert W có thể hội tụ chậm tại  $t = 0^+$ , tốc độ hội tụ tăng nhanh khi  $t$  lớn hơn, xem [14]. Vì vậy, khi tính toán xấp xỉ nghiệm  $x(t)$ , phương pháp tiếp cận hàm Lambert W được áp dụng cho  $t \geq 0$  để đạt được sự hội tụ tốt hơn so với phương pháp từng bước cổ điển, với nghiệm  $x(t)$  được tính toán lần lượt trên các đoạn  $[(j-1)j, jh]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

**Nhận xét 4.** Lưu ý rằng các hằng số  $K_1, K_2, K_3$  và  $K_4$  thu được trực tiếp dựa trên nghiệm của hệ và không có hạn chế nào ngoài Giả thiết 1 được yêu cầu trong phương pháp. Việc sử dụng bất đẳng thức tam giác (1.26) sẽ gây ra hạn chế trong việc đánh giá  $\|x(t)\|$ , tuy nhiên việc sử dụng biểu diễn nghiệm (1.23a) là phù hợp trong trường hợp có thể xảy ra sự gián đoạn của nghiệm tại  $t = 0$  (tức là  $g(0^-) \neq x(0) = x_0$ ). Trong trường hợp đó, ước lượng của  $K$  từ phương pháp là tối ưu.

Định lý 1.2 cho ta kết quả tổng quát, còn với trường hợp vô hướng kết quả có thể được đơn giản hóa hơn nữa như trong hệ quả trực tiếp sau.

**Hệ quả 1.** Giả sử rằng phương trình (1.12) thỏa mãn Giả thiết 1. Bên cạnh đó ta cũng giả sử tồn tại các số thực  $\alpha, K_1, K_2, K_3$  và  $K_4$  sao cho

$$\alpha = \operatorname{Re} \left( \frac{W_0(-a_d h e^{ah})}{h} - a \right), \quad (1.33a)$$

và

$$K_1 = \sup_{0 \leq t < h} \|e^{(-a-\alpha)t}\| = \begin{cases} e^{(-a-\alpha)h}, & -a > \alpha \\ 1, & -a \leq \alpha \end{cases}, \quad (1.33b)$$

$$K_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \geq h} \left| \sum_{k=-N}^N \frac{e^{(S_k-\alpha)t}}{1 - a_d h e^{-S_k h}} \right|, \quad (1.33c)$$

$$K_3 = \sup_{0 \leq t < h} \int_0^t |e^{(-a-\alpha)t+as} a_d| ds = \left| \frac{a_d(1 - e^{-ah})e^{-\alpha h}}{a} \right|, \quad (1.33d)$$

$$K_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \geq h} \int_0^h \left| \sum_{k=-N}^N \frac{a_d e^{-S_k s}}{1 - a_d h e^{-S_k h}} e^{(S_k-\alpha)t} \right| ds. \quad (1.33e)$$

Khi đó quỹ đạo của phương trình (1.12) được giới hạn bởi hàm mũ  $\|x(t)\| \leq K e^{\alpha t} \Phi_h$  với mọi  $t > 0$ , trong đó  $\Phi_h = \sup_{-h \leq t \leq 0} \{\|x(t)\|\}$ .

## 1.5 Ví dụ số

Trong phần này, một ví dụ vô hướng và một ví dụ ma trận được trình bày để chứng minh tính hiệu quả của phương pháp tiếp cận được đề xuất.

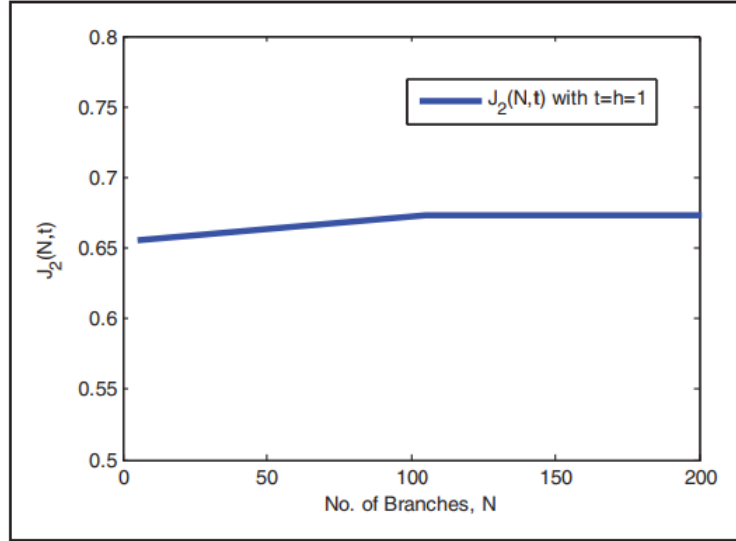
**Ví dụ 1.3.** Xét (1.12) với  $a = a_d = h = 1$

$$\dot{x}(t) + x(t) + x(t-1) = 0 \text{ với mọi } t > 0. \quad (1.34)$$

Từ phương trình (1.33a), giá trị riêng trội nhất là:

$$\alpha = \operatorname{Re} \left( \frac{W_0(-a_d h e^{a h})}{h} - a \right) = -0.605. \quad (1.35)$$

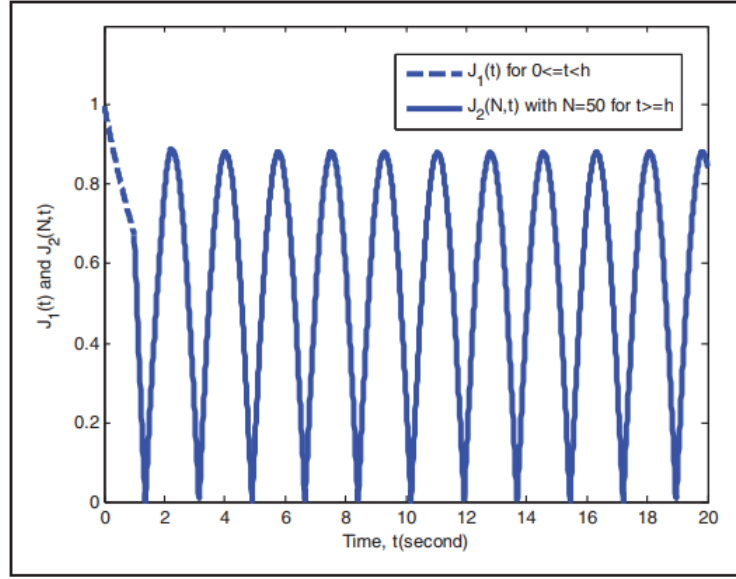
Do đó ta thu được tốc độ phân rã  $\alpha = -0.605$ . Tiếp theo, (1.33b) được sử dụng để tính các giá trị  $K_1, K_2, K_3, K_4$  tương ứng. Trong ví dụ này ta thu được  $K_1 = J_1(0) = 1$  và  $K_3 = J_3(h) = 1.1576$ . Để ước lượng  $K_2$ , ta phải đánh giá  $J_2(N, t)$  cho  $t \geq h$  và  $N$  đủ lớn. Đầu tiên, lưu ý rằng  $J_2(N, t)$  tiếp cận một biên độ không đổi vì  $\max\{\operatorname{Re}(S_k - \alpha)\} \geq 0$  đúng với mọi nhánh. Do đó, nó luôn luôn đủ để kiểm tra một vài nhánh đầu tiên (ở đây  $0 \leq t \leq 5h$ ) để thu được giá trị lớn nhất của chúng. Thứ hai, người ta đã quan sát thấy rằng sự hội tụ của  $J_2(N, t)$  là nhanh hơn nhiều khi  $t$  càng lớn. Ví dụ, ở đây khi  $t > 1.5$ ,  $J_2(N, t)$  là rất gần với quỹ đạo cuối cùng với  $N \geq 10$ . Điều đó thuận lợi để tìm vị trí của đỉnh với  $N$  đủ lớn đầu tiên (ví dụ  $N = 10$  là đủ ở đây) và sau đó tính  $J_2(N, t)$  tại vị trí cụ thể khi  $N$  tăng lên để có độ chính xác tốt hơn, nếu cần thiết.



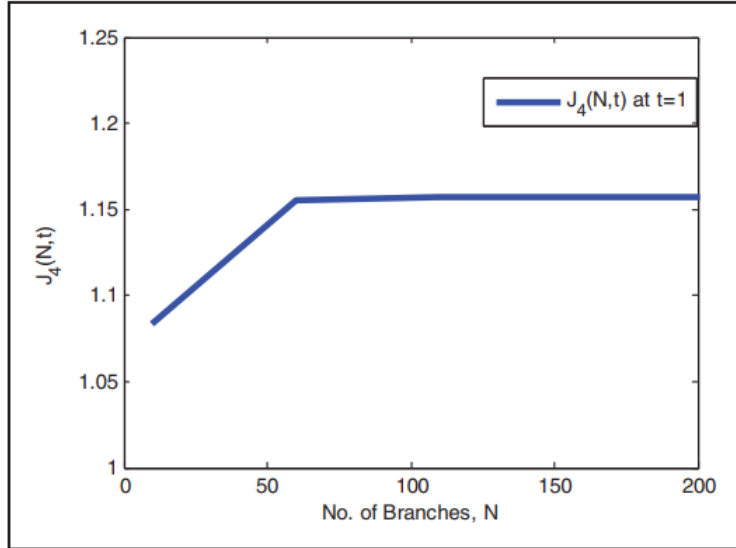
Hình 1.3: Sự hội tụ của  $J_2(N, t)$  tại  $t = h = 1$  trong Ví dụ 1.3

Chỉ có sự hội tụ cho trường hợp xấu nhất (tức là  $t = h = 1$ ) được trình bày ở đây trong Hình 1.3. Ở đây, ta lấy  $N = 50$  và thu được  $k = 0.9$  từ Hình 1.4. Cũng lưu ý rằng  $J_2(N, t)$  với  $N = 50, t = h$  là rất gần với  $J_1(t)$  với  $t = h^-$ .

Sự hội tụ của  $J_4(N, t)$  tại  $t = 1$  được thể hiện trong Hình 1.5.  $K_4$  được chọn bằng cách lấy giá trị lớn nhất dọc theo quỹ đạo của  $J_4(N, t)$  với số nhánh  $N$  đủ lớn (ví dụ  $N = 50$ ) trong Hình 1.6. Có thể thấy rằng  $J_4(N, t)$  với  $N = 50, t = h$  cũng phù



Hình 1.4: Hàm  $J_1(t)$  và  $J_2(t)$  với  $N = 50$  trong Ví dụ 1.3



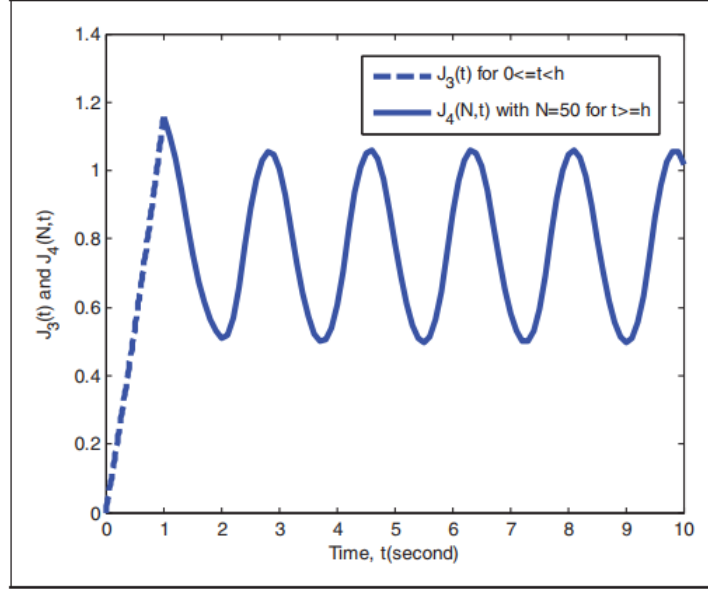
Hình 1.5: Sự hội tụ của  $J_2(N, t)$  tại  $t = h = 1$  trong Ví dụ 1.3

hợp với  $J_3(t)$  với  $t = h^-$ .

Do đó, ta được  $K_1 = 1, K_2 = 0.9, K_3 = 1.1576, K_4 = 1.16$  và hệ số  $K$  được ước lượng là

$$K = \max(K_1, K_2) + \max(K_3, K_4) = 2.16.$$

Các tham số của hàm phân rã thu được bằng các phương pháp trong [5] và [8] và bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lambert được so sánh trong Bảng 1.1. Tốc độ phân rã  $\alpha$  được cải thiện đáng kể so với trong [5] và [8]. Để ước lượng hệ số  $K$ , cách tiếp cận đạt được kết quả hạn chế hơn trong ví dụ này vì ta sử dụng bất đẳng thức



Hình 1.6: Hàm  $J_3(t)$  và  $J_4(t)$  với  $N = 50$  trong Ví dụ 1.3

tam giác để tách riêng  $P_1$  và  $P_2$  khi lấy chuẩn. Cũng lưu ý rằng điểm gián đoạn tại  $t = 0$  (tức là nếu  $g(0) \neq x_0$ ) được xem xét trong ví dụ của chúng ta. Một điểm gián đoạn như vậy không thể được chấp nhận bằng phương pháp hàm Lyapunov ([8]), vì nó biểu thị hàm Lyapunov không khả vi liên tục tại  $t = 0^+$ . Mặc dù phương pháp hàm Lambert W cho  $K$  lớn hơn nhưng vì  $\alpha$  nhỏ hơn nên ước lượng đạt được tốt hơn khi  $t$  càng lớn. Tốc độ phân rã thu được ở đây là tối ưu, điều mà không thể đạt được khi sử dụng phương pháp Lyapunov và phương pháp đo lường ma trận.

	Hệ số $K$	Tốc độ phân rã $\alpha$
Tiếp cận ma trận tiêu chuẩn (Hale, 1993), xem [5]	2	2
Tiếp cận Lyapunov (Mondie, 2005), xem [8]	1.414	-0.42
Tiếp cận hàm Lambert	2.16	-0.605

Bảng 1.1: So sánh kết quả cho Ví dụ 1.3

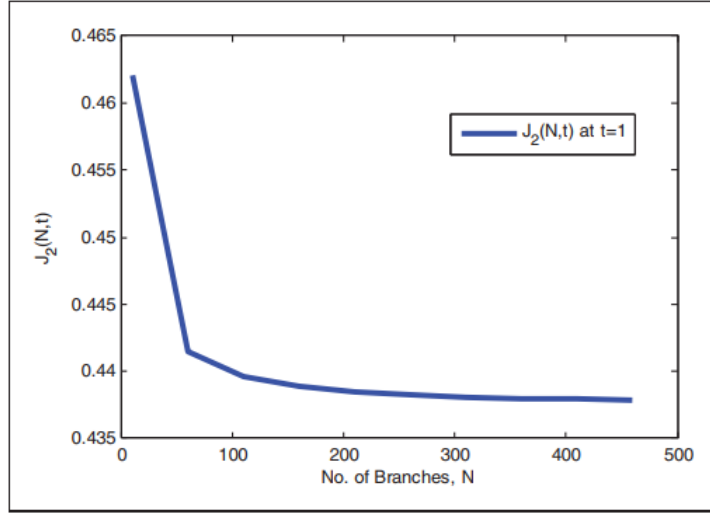
**Ví dụ 1.4.** Xét hệ

$$\dot{x} + Ax(t) + A_d x(t-h) = 0, \quad t > 0, \quad (1.36)$$

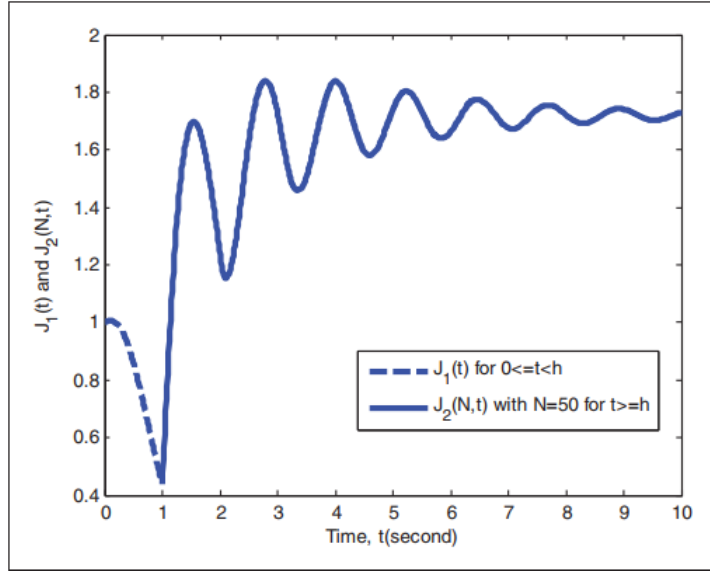
trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}; \quad A_d = \begin{bmatrix} -1.66 & 0.697 \\ -0.93 & 0.33 \end{bmatrix}; \quad h = 1$$

Đầu tiên, phương pháp hàm Lambert W được sử dụng để phân tích phổ của hệ



Hình 1.7: Sự hội tụ của  $J_2(N, t)$  tại  $t = h = 1$  trong Ví dụ 1.4



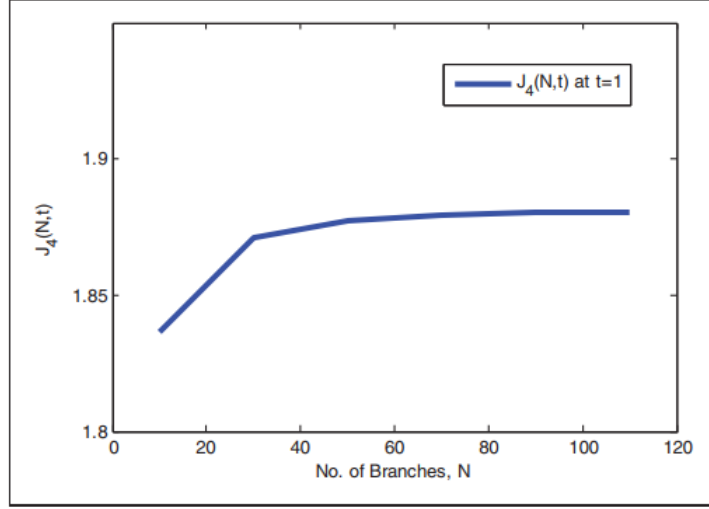
Hình 1.8: Hàm  $J_1(t)$  và  $J_2(t)$  với  $N = 50$  trong Ví dụ 1.4

phương trình này và xác định hoành độ phổ. Với ví dụ này,  $m = \text{Nullity}(A_d) = 0$  và hoành độ phổ của hệ có thể thu được bằng nhánh chính  $k = 0$ . Do đó

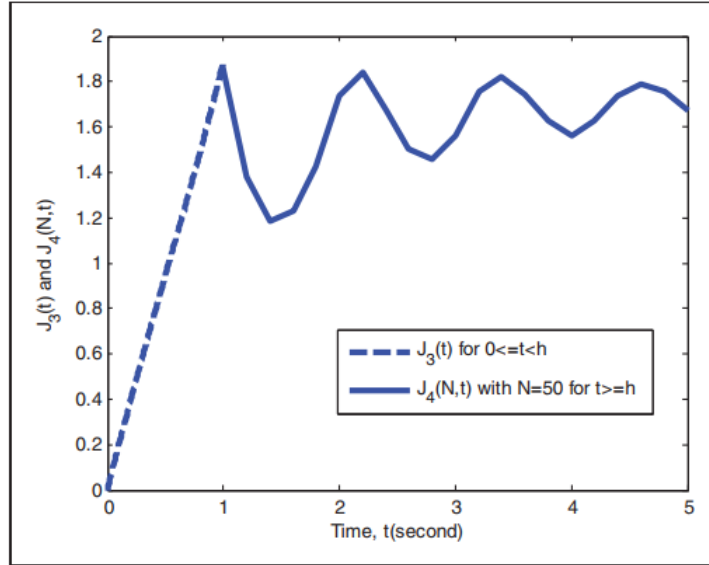
$$\begin{aligned}
 \alpha &= \max\{\text{Re}(\text{eig}(S_0))\} \\
 &= \max \left\{ \text{Re} \left( \text{eig} \left( \frac{1}{h} W_0 (-A_d h Q_0) - A \right) \right) \right\} \\
 &= -1.10119.
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Sau khi thu được tốc độ phân rã, các vế phải (1.25) được đánh giá số để tính các giá trị  $K_1, K_2, K_3$  và  $K_4$  tương ứng. Tương tự như trường hợp vô hướng,  $J_2(N, t)$  trong (1.25b) cũng hội tụ đến một quỹ đạo nhất định khi  $N$  tăng đối với trường hợp ma





Hình 1.9: Sự hội tụ của  $J_4(N, t)$  tại  $t = h = 1$  trong Ví dụ 1.4



Hình 1.10: Hàm  $J_3(t)$  và  $J_4(t)$  với  $N = 50$  trong Ví dụ 1.4

trận, như biểu diễn trong Hình 1.7. Do đó  $K_1$  thu được bằng cách tính  $J_1(t)$  cho  $0 \leq t < h$  và  $K_2$  thu được bằng cách lấy giá trị lớn nhất của  $J_2(N, t)$  với  $t \geq h$  với một số nhánh  $N$  đủ lớn (ở đây  $N = 50$ ) như trong Hình 1.8.

Một quy trình tương tự cũng có thể áp dụng để thu được  $K_3$  và  $K_4$  như minh họa trong Hình 1.9 và 1.10. Kết quả là ta được

$$K_1 = 1.076, K_2 = 1.9, K_3 = 1.89, K_4 = 1.9,$$

và hệ số  $K$  được xác định bởi

$$K = \max(K_1, K_2) + \max(K_3, K_4) = 3.8.$$

Trong Ví dụ 1.4, tốc độ phân rã thu được bằng cách sử dụng phương pháp được đề xuất là giá trị tối ưu của  $\alpha$  và cho thấy sự cải thiện đáng kể so với các phương pháp miền thời gian khác.

	Hệ số $K$	Tốc độ phân rã $\alpha$
Tiếp cận ma trận tiêu chuẩn (Hale, 1993), xem [5]	8.0192	3.0525
Tiếp cận Lyapunov (Mondie, 2005), xem [8]	9.33	-0.9071
Tiếp cận Lambert-W, xem [3]	3.8	-1.0119

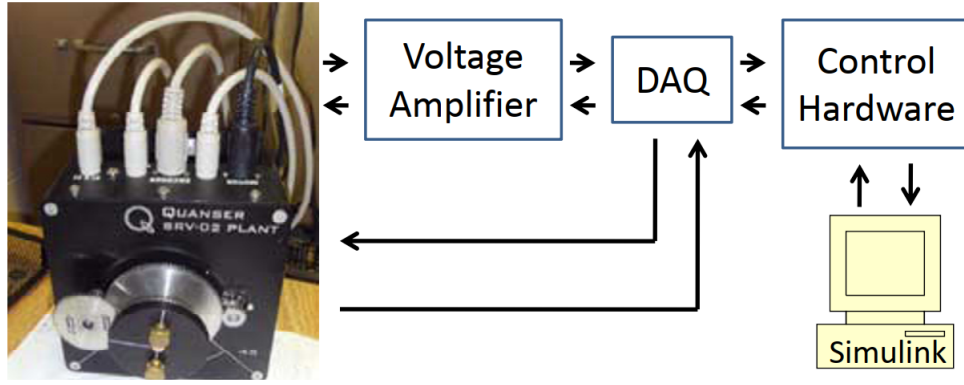
Bảng 1.2: So sánh kết quả cho Ví dụ 1.4

Kết quả cho hệ số  $K$  từ phương pháp cũng ít hạn chế đáng kể so với các phương pháp khác được xem xét. Với phương pháp Lyapunov, bậc của hệ càng tăng dẫn đến sự tăng về số chiều của bài toán tối ưu tương ứng, dẫn đến hạn chế hơn. Hơn nữa, ước lượng của  $K$  thường không được tối ưu hóa trong phương pháp hàm Lyapunov. Với phương pháp hàm Lambert W, vấn đề được giải quyết bằng cách đánh giá chuỗi chứ không cần chuyển bài toán ban đầu sang một bài toán tối ưu hóa.

## 1.6 Điều khiển của động cơ DC

Động cơ DC được sử dụng trong rất nhiều ứng dụng như bộ truyền động cánh tay robot, máy công cụ, máy cán và điều khiển máy bay. Trong các ứng dụng này, độ trễ về mặt thời gian là vốn có và không thể bỏ qua được. Ví dụ, độ trễ truyền thông trong mạng tự động hóa nhà máy là 0.0862 s, độ trễ do thời gian lấy mẫu trong bộ mã hóa là 0.5 s, v.v. Bên cạnh đó, một nguyên nhân khác của độ trễ là do quá trình kết nối giữa các cảm biến và cơ cấu truyền động với bộ điều khiển không thể xảy ra tức thời. Do đó, các thiết bị điều khiển động cơ DC có tác động của độ trễ luôn rất được quan tâm nghiên cứu, xem [3, 6] và các tài liệu liên quan trong đó.

Trong Hình 1.11 ta mô tả động cơ DC đơn giản thường được sử dụng. Nó bao gồm các bộ phận sau: 1) hệ thống cơ học bao gồm trục và đĩa, 2) bộ điều khiển phản hồi được triển khai trên PC sử dụng Matlab / Simulink, 3) cảm biến (bộ mã hóa và máy đo tốc độ) để thu được trạng thái của hệ thống, và 4) thiết bị truyền động bao gồm động cơ servo DC được điều khiển bởi bộ khuếch đại điện áp. Hệ điều khiển đóng kín (closed-loop control) của hệ thống động cơ DC có phương trình không gian



Hình 1.11: Động cơ DC, [3]

trạng thái dạng

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Kk_I & -Kk_P \end{bmatrix} x(t-h), \quad (1.38)$$

trong đó  $x = \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}$ , với

- $\omega(t)$  là tốc độ trục tải đo được,
- $k_P$  là độ lợi điều khiển tỷ lệ,
- $k_I$  là độ lợi điều khiển tích phân,
- $K, \tau$  là các hằng số trong hàm truyền điện áp đến tốc độ của hệ thống động cơ DC,
- $h$  là độ trễ của hệ thống.

Sử dụng các dữ kiện trong [3], tiếp theo ta sẽ đi ước lượng tốc độ phân rã của nghiệm của hệ phương trình có trễ (1.38).

**Ví dụ 1.5.** Xét hệ thống động cơ DC được mô tả bởi phương trình (1.38) với giá trị của các tham số được cho dưới đây

$$k_P = 0.4451, \quad k_I = 2.3046, \quad K = 1.53, \quad \tau = 0.0254, \quad h = 0.1.$$

Thực hiện quá trình tính toán tương tự như trong Ví dụ 1.4, ta thu được các kết quả sau.

## 1.7 Kết luận chương

Trong chương này chúng ta đã thảo luận về một cách tiếp cận dựa trên hàm Lambert W để đưa ra các ước lượng của hàm phân rã cho hệ phương trình vi phân tuyến

tính có trễ. Sử dụng phương pháp được đề xuất, chúng ta đạt được ước lượng tối ưu của tốc độ phân rã  $\alpha$ . Hệ số hằng  $K$  thu được bằng cách sử dụng một chuỗi vô hạn hàm Lambert  $W$  và thường ít hạn chế hơn khi được so sánh với một số phương pháp phổ biến khác. Ước lượng tốt hơn của hàm phân rã không chỉ mô tả chính xác hơn nghiệm của hệ thống có trễ mà còn dẫn đến thiết kế điều khiển hiệu quả hơn. Bên cạnh đó, một chứng minh tổng quát về sự hội tụ của hàm Lambert cũng như việc xác định các giá trị riêng trội bằng cách trích ra một số lượng hữu hạn nhánh của hàm Lambert cũng còn mở cho các nghiên cứu trong tương lai. Một nhánh nghiên cứu khác có liên quan đến hàm Lambert cũng đang được quan tâm là hệ thống có trễ tuần hoàn theo thời gian trong đó độ trễ và thời gian tuần hoàn khiến cho việc ước lượng tốc độ phân rã trở nên khó khăn hơn.

## Chương 2

# Một số trường hợp đặc biệt trong phân tích tính chất ổn định của các hệ động lực có trễ

### 2.1 Giới thiệu

Ta xét hệ điều khiển có trễ với hệ số hằng được biểu diễn bằng phương trình vi phân có trễ dạng

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h). \quad (2.1)$$

Như trong chương trước chúng ta đã thấy việc phân tích tính chất ổn định của hệ đã được giải quyết bằng việc sử dụng các giá trị riêng trội của hệ tương ứng với các nhánh thứ  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm m$ , trong đó  $m$  là số khuyết của ma trận  $A_d$ . Nền tảng cơ bản của phương pháp luận này là Giả thiết 1, tức là  $2m + 1$  nhánh chính của hàm Lambert W xác định sự ổn định của hệ thống. Điều này đã được chứng minh cho các hệ thống bậc nhất (xem [10]). Tuy nhiên với trường hợp bậc cao hơn, kết quả này không được mở rộng chặt chẽ, và chỉ dựa trên các quan sát của Yi, Nelson và Ulsoy trong [12, 14].

Trong chương này, ta chỉ ra rằng giả thiết trên nói chung không hoàn toàn đúng. Bằng việc nghiên cứu các hệ bậc hai cụ thể với cấu trúc rất phổ biến trong các ứng dụng, ta chỉ ra rằng toàn bộ phổ của hệ thống (2.1) có thể tìm được mà chỉ cần sử dụng hai nhánh của hàm Lambert W (thay vì  $2m + 1$  nhánh như trong Giả thiết 1), tức là không có tương ứng một - một nào giữa các giá trị riêng và các nhánh của hàm Lambert W. Điều này do thực tế rằng một phương trình phi tuyến quan trọng trong cách tiếp cận sử dụng hàm Lambert không có nghiệm duy nhất. Hơn nữa, ta chỉ ra rằng nhánh chính không những có thể sử dụng để tìm nghiệm

trội nhất của hệ mà còn có thể dùng để tìm các nghiệm khác nữa. Cấu trúc của chương này như sau. Mục 2.2 trình bày về hệ bậc hai và những kết quả chính thu được khi phân tích hệ đó. Những phân tích này được minh họa bằng thử nghiệm số trong Mục 2.3. Mục 2.4, ta sẽ trình bày các thảo luận trong một trường hợp đặc biệt khác mà kết quả của Mục 2.2 không thể áp dụng trực tiếp. Cuối cùng, ta đưa ra một số kết luận của nghiên cứu trong Mục 2.5.

## 2.2 Một trường hợp đặc biệt của hệ bậc hai

Xét hệ (1.1), với  $A$  và  $A_d$  là các ma trận có dạng sau

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Từ (2.2), ta có hạng của  $A_d$  bằng 1, lí thuyết dự đoán rằng nghiệm của (1.19) tương ứng với  $k = 0$  và  $k = \pm 1$  cho ta các nghiệm trội của bài toán.

Từ cấu trúc của  $A_d$ , ta thấy  $M_k = hA_dQ_k$  có dạng

$$M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Theo định nghĩa của ma trận hàm Lambert  $W$ , sử dụng trường hợp nhánh chuyển mạch, vì  $M_k$  có một giá trị riêng bằng 0.

Nếu  $m_{22} \neq 0$ , ta có

$$W_k(M_k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{m_{21}}{m_{22}}W_k(m_{22}) & W_k(m_{22}) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Từ đó ta được

$$S_k = \frac{1}{h}W_k(M_k) + A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m_{21}}{hm_{22}}W_k(m_{22}) + a_{21} & \frac{1}{h}W_k(m_{22}) + a_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Nếu  $m_{22} = 0, m_{21} \neq 0$ , ta được

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m_{21}}{h} + a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

trong đó, ta sử dụng  $W_0(0)' = 1$ . Bây giờ, ta sẽ phát biểu kết quả chính của bài toán.

**Định lý 2.1.** Cho  $A$  và  $A_d$  được cho bởi (2.2). Lấy  $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$  là một cặp giá trị riêng liên hợp bất kỳ. Giả sử bội của chúng bằng một. Khi đó, với  $k = 0$  hoặc  $k = -1$ , tồn tại một nghiệm thực của (1.19), sao cho nếu nghiệm này và giá trị  $k$  tương ứng được chọn trong bước đầu tiên của Thuật toán 1 thì giá trị riêng  $\lambda$  và  $\bar{\lambda}$  được tìm thấy trong bước cuối cùng của thuật toán.

**Chứng minh.** Ý tưởng chính là thực hiện các bước của Thuật toán 1 theo thứ tự ngược lại.

Ta xây dựng một ma trận thực  $S_k$  nhận cặp  $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$  là giá trị riêng là

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -|\lambda|^2 & 2\text{Re}(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Sau đó, ta xây dựng  $M_k$  từ (2.7). Xét hai trường hợp sau.

*Trường hợp 1:*  $2\text{Re}(\lambda) \neq a_{22}$ .

So sánh (2.5) và (2.7), ta lấy  $M_k$  có dạng (2.3), trong đó  $m_{21} \in \mathbb{R}$  và  $m_{22} \in \mathbb{R}$  được chọn sao cho thỏa mãn phương trình sau

$$\begin{cases} 2\text{Re}(\lambda) = \frac{1}{h}W_k(m_{22}) + a_{22} \\ -|\lambda|^2 = \frac{m_{21}}{hm_{22}}W_k(m_{22}) + a_{21} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra

$$W_k(m_{22}) = h(2\text{Re}(\lambda) - a_{22}). \quad (2.8)$$

$$m_{21} = -\frac{m_{22}(|\lambda|^2 + a_{21})}{2\text{Re}(\lambda) - a_{22}}. \quad (2.9)$$

Lựa chọn như vậy luôn thực hiện được với  $k = 0$  hoặc  $k = -1$ . Phương trình (2.8) ngụ ý rằng  $W_k(m_{22})$  phải là một số thực. Như đã đề cập trước đó, theo định nghĩa nhánh cắt của hàm Lambert  $W$  thì chỉ có hai nhánh cho giá trị thực là nhánh chính  $k = 0$  và nhánh  $k = -1$  và hợp hai miền giá trị của  $W_0$  và  $W_{-1}$  chứa tập số thực  $\mathbb{R}$  (xem Hình 1.2). Hơn nữa, trong trường hợp này,  $m_{22} \neq 0$ , đó là lí do của việc sử dụng (2.5).

*Trường hợp 2:*  $2\text{Re}(\lambda) = a_{22}$ .

Ta có  $\frac{1}{h}W_k(m_{22}) = 0$ . Do đó  $W_k(m_{22}) = 0$ . Vì vậy  $m_{22} = 0$ .

Khi đó

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m_{21}}{h} + a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Vì vậy  $m_{21} = -h(|\lambda|^2 + a_{21})$ .

Do vậy

$$M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h(|\lambda|^2 + a_{21}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Cuối cùng, ta có cặp  $(k, M_k)$  được xây dựng như trên là một nghiệm của (1.19).

Thật vậy, lấy  $\mathbf{v}$  và  $\bar{\mathbf{v}}$  là các vector riêng tương ứng với các giá trị riêng  $\lambda$  và  $\bar{\lambda}$ . Nếu  $\lambda$  là giá trị riêng có bội bằng 1, thì cặp  $(\mathbf{V}, \lambda)$  là một cặp bất biến của (1.1) trong đó

$$\mathbf{V} := \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix}, \quad \lambda := \text{diag}(\lambda, \bar{\lambda}). \quad (2.11)$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}\lambda - A - A_d\mathbf{V}\exp(-\lambda) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} - A - A_d \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \exp \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} - A - A_d \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ta có phương trình đặc trưng

$$\det(\lambda I_2 - A - A_d e^{-\lambda h}) = 0.$$

Vì  $\mathbf{v}$  và  $\bar{\mathbf{v}}$  là các vector riêng nên ta có

$$\begin{cases} (\lambda I_2 - A - A_d e^{-\lambda h})\mathbf{v} = 0 \\ (\bar{\lambda} I_2 - A - A_d e^{-\bar{\lambda} h})\bar{\mathbf{v}} = 0 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{v} - A\mathbf{v} - A_d e^{-\lambda h} \mathbf{v} = 0 \\ \bar{\lambda} \bar{\mathbf{v}} - A\bar{\mathbf{v}} - A_d e^{-\bar{\lambda} h} \bar{\mathbf{v}} = 0 \end{cases}.$$

Như vậy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} - A - A_d \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda h} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda} h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Từ (2.12) và (2.13) ta thấy  $\mathbf{V}$  và  $\lambda$  thỏa mãn phương trình

$$\mathbf{V}\lambda - A - A_d\mathbf{V}\exp(-\lambda) = 0. \quad (2.14)$$

Ta có thể kiểm tra trực tiếp  $S_k$  có phân tích Jordan là

$$S_k = \mathbf{V}\lambda\mathbf{V}^{-1}. \quad (2.15)$$



Từ đó ta có

$$\exp(-S_k) = \exp(-\mathbf{V}\lambda\mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{V}\exp(-\lambda)\mathbf{V}^{-1}. \quad (2.16)$$

Suy ra

$$\mathbf{V}\lambda = S_k\mathbf{V}, \quad \mathbf{V}\exp(-\lambda) = \exp(-S_k)\mathbf{V}. \quad (2.17)$$

Thay vào (2.14), với  $V$  khả nghịch, ta được

$$S_k - A - A_d h \exp(-S_k h) = 0. \quad (2.18)$$

Cuối cùng, thay  $S_k$  bởi

$$S_k = \frac{1}{h}W_k(M_k) + A \quad (2.19)$$

ta được kết quả trong (1.19).

**Định lý 2.2.** Cho  $A$  và  $B$  được cho bởi (2.2). Lấy  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  là hai giá trị riêng thực bội đơn của phương trình đặc trưng của hệ cho bởi (2.2). Sau đó, cho  $k = 0$  hoặc  $k = -1$ , tồn tại một nghiệm thực của (1.19), sao cho nếu nghiệm này và giá trị  $k$  tương ứng được chọn trong bước đầu tiên của Thuật toán 1 thì giá trị riêng  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  được tìm thấy trong bước cuối cùng của thuật toán.

**Chứng minh.** Chứng minh hoàn toàn tương tự với Định lý 2.1. Ta xây dựng ma trận  $S_k$  nhận  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  làm giá trị riêng là

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Tiếp theo ta sẽ xây dựng ma trận  $M_k$ . Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1.*  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq a_{22}$

Ta đi tìm  $m_{21}$  và  $m_{22}$  sao cho

$$\begin{cases} W_k(m_{22}) = h(\lambda_1 + \lambda_2 - a_{22}) \\ m_{21} = -\frac{m_{22}(\lambda_1\lambda_2 + a_{21})}{\lambda_1 + \lambda_2 - a_{22}} \end{cases}.$$

Điều này luôn thực hiện được cho trường hợp  $k = 1$  hoặc  $k = 0$  và  $W_k(M_{22})$  phải là số thực.

*Trường hợp 2.*  $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{22}$

$$M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h(\lambda_1\lambda_2 + a_{21}) & 0 \end{bmatrix}.$$

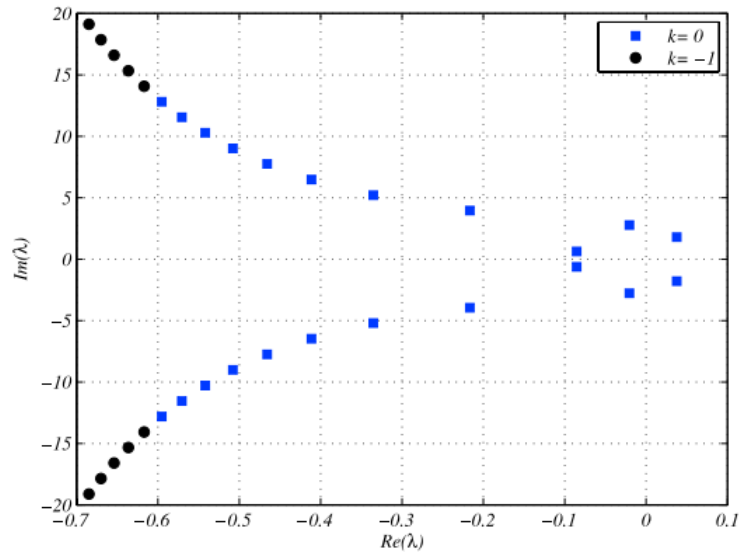
Ta có cặp  $(k, M_k)$  chính là một nghiệm của (1.19).

Từ Định lý 2.1 và 2.2, ta thu được hệ quả sau.

**Hệ quả 2.3.** Cho  $A$  và  $A_d$  được cho bởi (2.2). Nếu tất cả các giá trị riêng của (2.2) là đơn và nếu số lượng các giá trị riêng thực khác một, bằng cách lựa chọn ban đầu  $M_k$  thích hợp cho phương trình (1.19), thì tất cả các giá trị riêng có thể tìm được chỉ bằng hai nhánh  $W_0$  và  $W_{-1}$  của ma trận hàm Lambert  $W$ . Hơn nữa, ta có thể hạn chế rằng điều kiện ban đầu của (1.19) phải là ma trận giá trị thực

**Chú ý 2.4.** Những phân tích ở trên chỉ ra rằng, với điều kiện ban đầu thích hợp, tất cả các giá trị riêng của hệ (2.2) có thể tìm thấy bằng hai nhánh  $k = 0$  và  $k = -1$ . Tuy nhiên, số nhánh cao hơn có thể được sử dụng để tìm các cặp nghiệm khác nhau sử dụng cách tiếp cận ngược như ở trên, không có bất kỳ cấu trúc cụ thể nào. Điều này được chứng minh trong phần sau.

## 2.3 Ví dụ số



Hình 2.1: Các nghiệm đặc trưng của hệ được nghiên cứu dưới đây. Các nghiệm được biểu diễn bởi hình vuông có thể tìm thấy bằng nhánh chính của hàm Lambert  $W$ , các nghiệm được biểu diễn bởi hình tròn được tìm thấy tương ứng với nhánh  $k = -1$

Ta xét một hệ được định nghĩa bởi ma trận

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -0.6 \end{bmatrix} x(t-5). \quad (2.21)$$

Khi dùng hộp công cụ LambertDDE ([15]) để tính các nghiệm đặc trưng của hệ thì phần mềm này không thể tìm được nghiệm với bất kỳ giá trị  $k$  nào. Với nghiệm số,

ta sử dụng ma trận  $\exp(-Ah)$  là điều kiện ban đầu của  $Q_k$ . Trong trường hợp này, giá trị tìm được nằm ngoài miền hội tụ nghiệm của (1.19). Để thu được ước lượng hậu nghiệm của  $Q_k$ , ta đảo ngược quá trình tìm nghiệm như trong chứng minh của Định lý 2.1. Đầu tiên, ta sử dụng thuật toán QPmR ([11]) để tìm giá trị riêng của hệ nằm trong miền gần với gốc tọa độ của mặt phẳng phức. Các giá trị riêng của hệ được biểu diễn ở Hình 2.1.

Các giá trị riêng trội của hệ là  $\lambda = 0.0377 \pm 1.7911i$ . Xét ma trận  $S$  là

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.2096 & 0.0753 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Từ (2.5), ta có

$$W_k(M) = h(S - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8.9521 & 5.3766 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Ta thấy  $W(m_{22}) \in [-1, \infty)$ , đó là miền của nhánh chính  $W_0$  của hàm Lambert W. Do đó, có một ma trận  $M$  ứng với  $k = 0$  và thỏa mãn (2.23) là

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.9361 & 1.1628 \end{bmatrix} \times 10^3. \quad (2.24)$$

Vì  $A_d$  và  $M$  là các ma trận suy biến nên có vô số ma trận  $Q_0$  thỏa mãn  $M_0 = hA_dQ_0$ . Ta có thể lấy  $Q_0$  như sau

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -650.3812 & -392.6121 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Khi ma trận  $Q_0$  này được sử dụng như một giá trị ban đầu ta tìm được giá trị riêng trội của bài toán ngay trong phép lặp đầu tiên như mong đợi. Hơn nữa, nếu ma trận này bị nhiễu một chút thì phương pháp vẫn hội tụ đến nghiệm như trên sau một số phép lặp.

Bây giờ, ta xét một cặp giá trị riêng không trội là  $\lambda = -9.4133 \pm 6.4803i$ . Sử dụng lập luận tương tự, ta thu được ma trận  $S$  như sau

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -42.1633 & -0.8226 \end{bmatrix}, W_k(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -185.8166 & 0.8868 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Trong trường hợp này, ta có  $W(m_{22}) \in [-1, \infty)$ . Điều này cho thấy rằng cặp giá trị riêng cũng được tìm thấy bằng cách sử dụng nhánh chính của hàm Lambert W.

Khi đó, ta có

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -451.0419 & 2.1526 \end{bmatrix}.$$

Từ đó, ta có ma trận  $Q_0$  là

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 145.3412 & -5.7175 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

được tạo ra như trường hợp trước, được sử dụng như điều kiện ban đầu. Phương pháp số hội tụ đến nghiệm khi sử dụng nhánh chính.

Thực tế, ta quan sát được rằng khi sử dụng điều kiện ban đầu phù hợp, 11 cặp nghiệm được biểu diễn bằng hình vuông trong Hình 2.1 có thể tìm thấy khi sử dụng nhánh chính của ma trận hàm Lambert  $W$ .

Nếu ta xét cặp giá trị riêng  $\lambda = -0.6169 \pm 14.0734$  thì  $S$  và  $W_k(M_k)$  tương ứng là

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -198.4405 & -1.2338 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$W_k(M) = h(S - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -967.2027 & -1.1692 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Trong trường hợp này,  $W(M_{22}) \in (-\infty; -1]$ , đó là miền giá trị của nhánh  $k = -1$ . Ứng với  $k = -1$ , ta có ma trận  $M_{-1}$  như sau

$$M_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -300.4152 & -0.3632 \end{bmatrix},$$

Từ đó, ta có ma trận  $Q_{-1}$  là

$$Q_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 95.1384 & -4.8789 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Đây là một nghiệm của (1.19) ứng với  $k = -1$ . Chọn điều kiện ban đầu gần với ma trận này đảm bảo sự hội tụ cho nghiệm này.

Quy trình này có thể được lặp lại cho tất cả các nghiệm được đánh dấu bằng hình tròn trong Hình 2.1, cũng như cho các nghiệm còn lại ở phía bên trái mặt phẳng phức, bằng việc luôn luôn sử dụng nhánh  $W_{-1}$ . Ví dụ này minh họa quá trình tính toán của toàn bộ phổ của hệ (2.2) bằng cách sử dụng chỉ hai nhánh thực của hàm Lambert  $W$  và việc chọn điều kiện ban đầu thích hợp cho phương trình phi tuyến (1.19).

Để thấy số nhánh cao hơn cũng được sử dụng để tìm giá trị riêng, ta xét một cặp giá trị riêng không liên hợp, với  $\lambda_1 = -0.0204 + 2.7705i$  và  $\lambda_2 = -0.4658 + 7.7500i$ . Chú ý cách một trong những giá trị riêng này được tìm thấy sử dụng  $k = 0$ , trong

khi những giá trị riêng khác sử dụng  $k = -1$  ở ví dụ trước. Với hai giá trị riêng này, theo Định lý 2.2, ta có ma trận  $S$  như sau

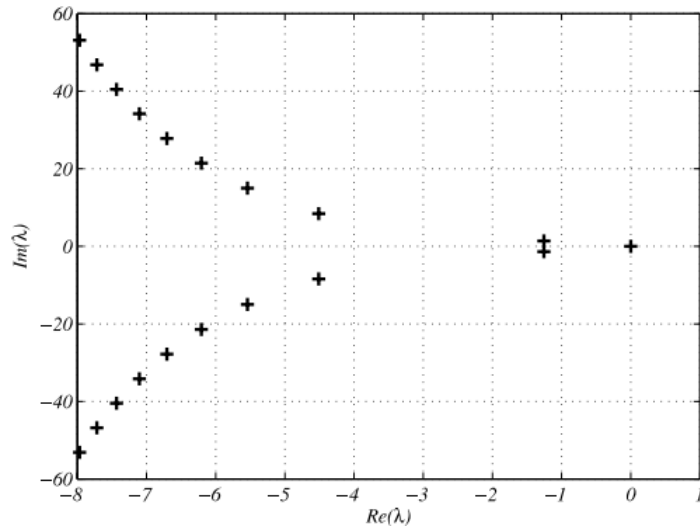
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21.4619 + 1.4486i & -0.4862 + 10.5205i \end{bmatrix}.$$

Do đó,

$$W_k(M) = h(S - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 132.3092 + 7.2411i & 2.5693 + 52.6026i \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Theo [2]  $W_k(m_{22})$  nằm trong miền giá trị của nhánh thứ 9 của hàm Lambert W. Do đó, cặp giá trị riêng này được tìm thấy bằng cách sử dụng  $k = 9$  và một điều kiện ban đầu thích hợp của (1.19). Thêm vào đó, ta nhận thấy rằng nếu giữ nguyên  $\lambda_2$  và sử dụng liên hợp của  $\lambda_1$ , ma trận được tạo thành nằm trong phạm vi nhánh ứng với  $k = 4$ . Điều này nhấn mạnh sự thiếu tương ứng cấu trúc giữa các giá trị riêng của (2.2) và các nhánh của ma trận hàm Lambert W.

## 2.4 Trường hợp hệ có một số lẻ của các giá trị riêng thực



Hình 2.2: Các nghiệm đặc trưng của hệ trong (2.32)

Các thảo luận ở trên đã xem xét các hệ thống mà tất cả các giá trị riêng của nó có thể ghép thành từng cặp sao cho các ma trận thực  $S$  được xây dựng. Trường hợp này xảy ra khi các giá trị riêng phức đi theo cặp liên hợp và số giá trị riêng thực là số chẵn. Khi có một số lẻ các giá trị riêng thực, điều này là không thể. Trong phần

này, ta xem xét và thảo luận sâu hơn về vấn đề này.

Xét hệ

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-1), \quad (2.32)$$

ta có phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + 1 - e^\lambda = 0. \quad (2.33)$$

Từ (2.33), ta có thể thấy rằng chỉ có một giá trị riêng thực nằm ở gốc tọa độ và có bội 1. Hơn nữa, đây còn là giá trị riêng trội nhất (xem Hình 2.2).

Ta thấy  $A_d$  có 0 là giá trị riêng bội 2. Do đó giá trị riêng trội có thể được tìm thấy bằng cách sử dụng nhánh chính hoặc nhánh  $k = \pm 1$ .

Sử dụng kĩ thuật tính ngược ở trên cho ví dụ này, ta thấy tất cả các giá trị riêng liên hợp có thể thu được bằng cách sử dụng nhánh  $k = -1$  và điều kiện ban đầu thích hợp. Tuy nhiên, giá trị riêng trội ở gốc tọa độ không thể tìm thấy bằng cách sử dụng nhánh chính của hàm Lambert W. Như trong Định lí 2.1 - 2.2 cách xây dựng ma trận thực  $S_k$  không thể thực hiện được với giá trị riêng thực đơn. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng tồn tại một ma trận thực  $M_k$  tương ứng với ma trận thực  $S_k$ , được định nghĩa bởi (1.17), có giá trị riêng  $\lambda = 0$ . Vì  $S_k$  thỏa mãn (1.15), điều này dẫn đến  $Im(S_k)$  là không gian riêng ứng với giá trị riêng 0 có bội hình học bằng 2. Điều này mâu thuẫn với việc hàm  $f(\lambda) = \lambda^2 + 1 - e^{-\lambda}$  chỉ có nghiệm thực 0 với bội 1.

Nếu ta nói lỏng điều kiện và cho phép  $S$  có giá trị phức như trong phương pháp được trình bày ở Định lí 2.1 - 2.2, ta có thể thay thế các giá trị riêng ở gốc tọa độ với bất kì giá trị riêng phức nào có dạng  $\lambda = a + ib$ . Điều này dẫn đến các ma trận có dạng

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a - ib \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

$$W_k(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & -h(a + ib) \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Ma trận được cho trong (2.35) có thể tìm được bằng cách sử dụng một giá trị  $k$  sao cho  $-hbi$  thuộc vào miền giá trị của nhánh thứ  $k$  của hàm Lambert W. Do đó, với những hệ thống cụ thể, giá trị riêng trội có thể tìm được bằng cách sử dụng bất kì nhánh nào của ma trận hàm Lambert, nếu có một điều kiện ban đầu phù hợp. Thực tế này đã được quan sát trong Chương 3 của [13].

## 2.5 Kết luận chương

Phương pháp luận để phân tích tính chất ổn định của các hệ phương trình vi phân có trễ (xem [14]) được xây dựng dựa trên hàm Lambert  $W$  của ma trận, với giả định rằng có tương ứng  $1 - 1$  giữa các giá trị riêng của hệ và các nhánh của hàm ma trận Lambert  $W$ , và  $2m + 1$  nhánh đầu tiên sẽ quyết định tính chất ổn định của hệ hay tốc độ phân rã nghiệm. Chương này minh họa rằng tương ứng  $1 - 1$  như vậy không tồn tại trong mọi trường hợp, kể cả trong trường hợp hệ hai chiều, trong đó các nhánh tương ứng với  $k = 0$  và  $k = -1$  có thể được sử dụng để tìm tất cả các giá trị riêng của hệ. Một vấn đề nghiên cứu thú vị khác là tìm hiểu xem liệu sự tương ứng  $1 - 1$  giữa các giá trị riêng và các nhánh của hàm Lambert  $W$  có thể được mở rộng sang các hệ thống bậc cao, với thêm một số giả thiết bổ sung về các ma trận hệ số của hệ.

# Tài liệu tham khảo

- [1] R. Cepeda-Gomez and W. Michiels. Some special cases in the stability analysis of multi-dimensional time-delay systems using the matrix Lambert W function. *Automatica*, 53:339–345, Mar 2015. (trang )
- [2] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the Lambert W function. *In: Advances in Computational Mathematics*, 5:329–359, 1996. (trang )
- [3] S. Duan, J. Ni, and A. G. Ulsoy. Decay function estimation for linear time delay systems via the Lambert W function. *Journal of Vibration and Control*, 18(10):1462–1473, 2012. (trang )
- [4] A. Galip Ulsoy and R. Gitik. On the convergence of the matrix lambert w approach to solution of systems of delay differential equations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 142(2), Nov 2019. (trang )
- [5] J. Hale and V. Lunel. Introduction to functional differential equations. 1993. (trang )
- [6] V. Léchappé, S. Rouquet, A. González, F. Plestan, J. D. León, E. Moulay, and A. Glumineau. Delay estimation and predictive control of uncertain systems with input delay: Application to a DC Motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(9):5849–5857, 2016. (trang )
- [7] B. Lehman and K. Shujaee. Delay independent stability conditions and decay estimates for time-varying functional differential equations. page 1673–1676, 1994. (trang )
- [8] S. Mondi and V. L. Kharitonov. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an lmi approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50:2, 2005. (trang )



- [9] S.-I. Niculescu, C. De Souza, and L. Dugard. Robust exponential stability of uncertain systems with time varying delays. page 743–748, 1994. (trang )
- [10] H. Shinozaki and T. Mori. Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results. *Automatica*, 42(1):1791–1799, 2006. (trang )
- [11] T. Vyhldal and P. Zitek. Mapping based algorithm for large-scale computation of quasipolynomial zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(1):171–177, 2009. (trang )
- [12] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Delay differential equations via the matrix Lambert W function and bifurcation analysis: application to machine tool chatter. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 4(2):355–368, 2007. (trang )
- [13] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Design of observer-based feedback control for time delay systems with application to automotive powertrain control. *J. Franklin Institute*, 347(1):358–376, 2010. (trang )
- [14] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. *Time-Delay Systems: Analysis and Control Using the Lambert W Function*. World Scientific, 2010. (trang )
- [15] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Dc motor control using the Lambert W function approach. In *IFAC Workshop on Time Delay Systems*. 2012. (trang )