

**Nguyễn Doãn Phước**

# **LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TUYẾN TÍNH**

**(IN LẦN THỨ TƯ, CÓ SỬA ĐỔI VÀ BỔ SUNG)**



**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT**

**Hà Nội 2009**

Author: **Nguyen Doan Phuoc**

Assoc. Prof. of Department of Automatic Control, Hanoi University of Technology.

Title: **Theory of Linear Control**

This book aims to provide basic knowledges of linear control. It presents the conceptual steps to carry out a linear control problem such as modelling, analysis and controller design. Many examples are given in the book to illustrate the theory.

This book is the product of several courses given by the author at the Hanoi University of Technology (HUT). It is written for control engineering students and master students in Universities as a course– and self study textbook.

Chịu trách nhiệm xuất bản: **PGS. TS. Tô Đăng Hải**

Biên tập: **Nguyễn Đăng**

Trình bày và chế bản: **Tác giả**

Vẽ bìa: **Trần Thắng**

---

In 1000 cuốn khổ 16×24 cm tại xưởng in NXB Văn hóa dân tộc. Giấy phép xuất bản số 150–60–4/2/2005. In xong và nộp lưu chiểu tháng 7/2005.

## Lời nói đầu

Sau lần xuất bản đầu tiên năm 2002, tác giả đã nhận được rất nhiều đóng góp từ phía bạn đọc để có được nội dung với chất lượng tốt hơn cho những lần xuất bản sau này. Tác giả hy vọng với sự sửa đổi đó, các bạn sinh viên đang theo học các ngành Điều khiển tự động, Đo lường và Tin học công nghiệp, Tự động hóa, học viên cao học, nghiên cứu sinh thuộc các ngành liên quan, sẽ có được một tài liệu với chất lượng tốt hơn hỗ trợ cho việc tự học, cũng như cho việc hiểu kỹ, hiểu sâu bài giảng.

Lý thuyết điều khiển tuyến tính là phần nền tảng cơ bản và quan trọng nhất của Lý thuyết điều khiển nói chung. Rất nhiều các phát triển mới về khái niệm cũng như phương pháp của Điều khiển nâng cao như Ổn định đều, Ổn định theo hàm mũ, Ổn định ISS, Điều khiển tuyến tính hóa chính xác, Điều khiển thích nghi kháng nhiễu ... đều có được sự gợi ý về tư tưởng từ Lý thuyết điều khiển tuyến tính. Nắm vững và làm chủ Lý thuyết điều khiển tuyến tính sẽ giúp ta có được một kiến thức cơ bản chắc chắn để tự tin tiến sâu hơn vào các lĩnh vực khác của Điều khiển.

So với lần xuất bản thứ nhất, ở lần xuất bản thứ tư này, quyển sách được bố cục lại hoàn toàn bằng việc phân chia các chương theo chủ đề từng dạng mô hình mô tả hệ thống được sử dụng. Cụ thể là:

- Chương 1 được dành cho phần nhập môn Lý thuyết điều khiển tuyến tính, các bước cơ bản cần phải thực hiện khi phải giải quyết một bài toán điều khiển.
- Chương 2 trình bày các bước thực hiện bài toán điều khiển khi mô hình toán học của đối tượng là mô hình trong miền phức (miền tần số).
- Chương 3 là nội dung các bước thực hiện bài toán điều khiển ứng với mô hình trạng thái của đối tượng (điều khiển trong không gian trạng thái).
- Chương 4 là nội dung từng bước thực hiện bài toán điều khiển khi đối tượng có mô hình không liên tục, được xem như phần nhập môn của điều khiển số.

trong đó, từng chương 2, 3 và 4 lại được trình bày theo đúng thứ tự thực hiện các bước một bài toán điều khiển, như: 1. Công cụ toán học cần thiết, 2. Xây dựng mô hình mô tả đối tượng, 3. Phân tích đối tượng và 4. Thiết kế bộ điều khiển.

Cũng so với lần xuất bản thứ nhất, ở các lần tái bản sau này, tác giả đã đưa thêm một số nội dung được cho là cần thiết của điều khiển nâng cao, nhưng có liên quan đến mô hình tuyến tính của đối tượng. Các phần được bổ sung thêm bao gồm:

- Phân tích tính bền vững của hệ tuyến tính có mô hình toán học của đối tượng là hàm truyền.

- Thuật toán thiết kế bộ điều khiển theo mô hình mẫu.
- Phương pháp tham số hóa Youla, phương pháp thiết kế bộ điều khiển ổn định mạnh và ổn định song hành để điều khiển ổn định bền vững đối tượng tuyến tính (nguyên lý điều khiển đa mô hình).
- Thiết kế bộ điều khiển tuyến tính theo nguyên lý bám tín hiệu mẫu (tracking control).
- Thiết kế bộ điều khiển bù bất định cho đối tượng tuyến tính.
- Thiết kế bộ lọc Kalman.

Cuối cùng, quyển sách đã được viết với sự giúp đỡ, chia sẻ rất to lớn của những thành viên trong gia đình tác giả là vợ Ngô Kim Thư, con gái Nguyễn Phước My và hai cháu ngoại Bông, Bo. Không có họ chắc chắn quyển sách không thể hoàn thành được. Quyển sách còn được hoàn thành nhờ sự cổ vũ, khuyến khích và tạo điều kiện thuận lợi của các đồng nghiệp trong Bộ môn Điều khiển Tự động, Trường Đại học Bách khoa, nơi tác giả đang công tác. Tác giả xin được gửi tới gia đình và các bạn lời cảm ơn chân thành.

Mặc dù đã rất nỗ lực, song chắc không thể không có thiếu sót. Do đó tác giả rất mong nhận được những góp ý sửa đổi, bổ sung thêm của bạn đọc để hoàn thiện. Thư góp ý xin gửi về:

**Trường Đại học Bách khoa Hà Nội**  
**Khoa Điện, Bộ môn Điều khiển Tự động**  
 phuocnd-ac@mail.hut.edu.vn

**Hà Nội, ngày 29 tháng 10 năm 2009**

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Nhập môn</b>	<b>11</b>
1.1	Nội dung bài toán điều khiển	11
1.1.1	Bài toán có tín hiệu tiền định (Điều khiển tiền định).....	14
	Khái niệm tín hiệu .....	14
	Phân loại tín hiệu tiền định .....	15
	Một số tín hiệu tiền định điển hình .....	17
	Chuẩn của tín hiệu (hay hàm số).....	19
1.1.2	Bài toán có tín hiệu ngẫu nhiên (Điều khiển ngẫu nhiên) .....	21
	Khái niệm quá trình ngẫu nhiên.....	21
	Quá trình ngẫu nhiên dừng và ngẫu nhiên egodic.....	22
1.2	Những cấu trúc cơ bản của hệ thống điều khiển	23
1.2.1	Phân loại hệ thống .....	23
1.2.2	Xác định tín hiệu điều khiển thích hợp .....	24
1.2.3	Sử dụng bộ điều khiển .....	25
	Điều khiển hở.....	25
	Điều khiển phản hồi trạng thái.....	26
	Điều khiển phản hồi tín hiệu ra .....	26
	Câu hỏi ôn tập và bài tập	27
<b>2</b>	<b>Điều khiển liên tục trong miền phức</b>	<b>29</b>
2.1	Các công cụ toán học	29
2.1.1	Lý thuyết hàm biến phức.....	29
	Định nghĩa, khái niệm hàm liên tục, hàm giải tích .....	29
	Tích phân phức và nguyên lý cực đại modulus.....	30
	Hàm bảo giác (conform) .....	32
2.1.2	Chuỗi Fourier và phép biến đổi Fourier .....	34
	Chuỗi Fourier (cho tín hiệu tuần hoàn).....	34
	Phép biến đổi Fourier .....	38
2.1.3	Phép biến đổi Laplace.....	46
	Phép biến đổi Laplace cho tín hiệu liên tục.....	46
	Phép biến đổi Laplace cho tín hiệu không liên tục (biến đổi Z).....	48
2.1.4	Phép biến đổi Laplace ngược.....	49
	Biến đổi ngược hàm hữu tỷ.....	49
	Phương pháp residue.....	52
2.1.5	Một ứng dụng của phép biến đổi Laplace: Giải phương trình vi phân .....	55
2.2	Xây dựng mô hình toán học	57
2.2.1	Phương trình vi phân mô tả quan hệ vào-ra.....	60
2.2.2	Hàm truyền, hàm trọng lượng và hàm quá độ .....	63
2.2.3	Phép biến đổi sơ đồ khối (đại số sơ đồ khối) .....	71
	Hai khối song song .....	71
	Hai khối nối tiếp .....	72

Hệ có hai khối nối hồi tiếp.....	72
Chuyển nút nối tín hiệu từ trước ra sau một khối .....	73
Chuyển nút nối tín hiệu từ sau tới trước một khối .....	73
Chuyển nút rẽ nhánh tín hiệu từ trước ra sau một khối.....	74
Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một nút nối.....	74
Chuyển nút rẽ nhánh từ sau tới trước một nút nối .....	75
2.2.4 Sơ đồ tín hiệu và công thức Mason .....	77
2.2.5 Đồ thị đặc tính tần biên-pha .....	83
Khái niệm hàm đặc tính tần .....	83
Xây dựng hàm đặc tính tần bằng thực nghiệm .....	85
Đồ thị đặc tính tần biên-pha.....	86
2.2.6 Đồ thị đặc tính tần logarith-Đồ thị Bode .....	90
2.2.7 Quan hệ giữa phần thực và ảo của hàm đặc tính tần-Toán tử Hilbert .....	96
Bài toán thứ nhất: Xác định hàm truyền từ phần thực hàm đặc tính tần.....	97
Bài toán thứ hai: Xác định hàm truyền từ phần ảo hàm đặc tính tần.....	99
Toán tử Hilbert: Trường hợp tổng quát.....	100
2.2.8 Xây dựng mô hình toán học của các khâu động học cơ bản bằng thực nghiệm chủ động.....	102
Khâu quán tính bậc nhất.....	103
Khâu tích phân-quán tính bậc nhất.....	104
Khâu tích phân-quán tính bậc n .....	105
Khâu quán tính bậc hai .....	107
Khâu quán tính bậc cao .....	109
Khâu (bù) Lead/Lag.....	111
Khâu dao động bậc hai.....	114
Khâu chậm trễ (khâu trễ).....	115
2.2.9 Ma trận hàm truyền cho hệ MIMO .....	117
<b>2.3 Phân tích hệ thống</b> .....	<b>118</b>
2.3.1 Những nhiệm vụ cơ bản của công việc phân tích .....	118
2.3.2 Xác định tính ổn định từ đa thức đặc tính .....	120
Mối liên hệ giữa vị trí các điểm cực và tính ổn định của hệ thống .....	120
Tiêu chuẩn đại số thứ nhất: Tiêu chuẩn Routh.....	122
Tiêu chuẩn đại số thứ hai: Tiêu chuẩn Hurwitz .....	127
Tiêu chuẩn đại số thứ ba: Tiêu chuẩn Lienard-Chipart.....	129
Tiêu chuẩn hình học: Tiêu chuẩn Michailov .....	131
2.3.3 Phân tích chất lượng hệ kín từ hàm truyền của hệ hở.....	134
Xét tính ổn định: Tiêu chuẩn Nyquist.....	134
Kiểm tra tính ổn định hệ kín nhờ biểu đồ Bode.....	140
Đánh giá sai lệch tĩnh .....	142
Thông số đặc trưng của quá trình quá độ: Độ quá điều chỉnh và thời gian quá độ....	144
Thông số đặc trưng của quá trình quá độ: Sai lệch bám.....	147
2.3.4 Quan hệ giữa chất lượng hệ thống với vị trí điểm cực và điểm không của hàm truyền.....	150
Một số kết luận chung.....	150
Điều kiện tồn tại độ quá điều chỉnh .....	151
Khâu thông tần và hệ pha cực tiểu .....	154

Phân tích bằng phương pháp quỹ đạo nghiệm số .....	156
2.3.5 Phân tích tính bền vững.....	161
Đánh giá chất lượng bền vững nhờ hàm nhảy .....	162
Đánh giá tính ổn định bền vững với sai lệch mô hình không có cấu trúc .....	163
Hệ vừa có tính ổn định bền vững vừa có độ nhạy nhỏ .....	164
Tính ổn định bền vững của hệ bất định có cấu trúc: Tiêu chuẩn Kharitonov .....	165
Bài toán mở .....	169
<b>2.4 Thiết kế bộ điều khiển .....</b>	<b>170</b>
2.4.1 Chọn tham số cho bộ điều khiển PID .....	170
Hai phương pháp xác định tham số PID của Ziegler–Nichols .....	172
Phương pháp Chien–Hrones–Reswick.....	174
Phương pháp tổng T của Kuhn .....	176
Phương pháp tối ưu độ lớn.....	177
Phương pháp tối ưu đối xứng .....	183
Chọn tham số PID tối ưu theo sai lệch bám .....	191
2.4.2 Phương pháp điều khiển cân bằng mô hình .....	193
Thiết kế bộ điều khiển cân bằng hàm truyền của hệ hở (loop shaping) .....	193
Thiết kế bộ điều khiển cân bằng hàm truyền của hệ kín .....	196
Điều khiển theo nguyên lý mô hình nội (IMC) .....	199
Thiết kế bộ điều khiển dự báo Smith cho đối tượng có trễ .....	201
2.4.3 Thiết kế bộ điều khiển theo mô hình mẫu.....	202
Thuật toán tìm nghiệm phương trình Euclid.....	204
Thuật toán thiết kế hai bộ điều khiển theo mô hình mẫu .....	205
2.4.4 Tập các bộ điều khiển làm ổn định đối tượng và khái niệm ổn định mạnh, ổn định song hành.....	207
Một số khái niệm cơ bản.....	207
Nội dung phương pháp tham số hóa Youla .....	208
Khả năng điều khiển ổn định mạnh (strongly stable) .....	212
Bộ điều khiển ổn định song hành (simultane stable).....	213
2.4.5 Điều khiển tách kênh.....	216
Tách kênh trong toàn bộ miền thời gian .....	216
Tách kênh trong chế độ xác lập .....	217
<b>Câu hỏi ôn tập và bài tập .....</b>	<b>218</b>
 <b>3 Điều khiển liên tục trong miền thời gian .....</b>	 <b>229</b>
<b>3.1 Công cụ toán học .....</b>	<b>229</b>
3.1.1 Những cấu trúc đại số cơ bản .....	229
Nhóm .....	229
Vành.....	230
Trường.....	230
Không gian vector.....	231
Không gian vector con .....	232
Đa tạp tuyến tính.....	233
Đại số.....	233
Ideale .....	233
3.1.2 Đại số ma trận.....	234

Các phép tính với ma trận .....	235
Định thức của ma trận .....	236
Hạng của ma trận .....	238
Ma trận nghịch đảo .....	238
Vết của ma trận .....	239
Ma trận là một ánh xạ tuyến tính .....	240
Phép biến đổi tương đương .....	240
Không gian nhân và không gian ảnh của ma trận .....	241
Giá trị riêng và vector riêng .....	242
Chuẩn của vector và ma trận .....	244
Ma trận có các phần tử phụ thuộc thời gian .....	245
<b>3.2 Xây dựng mô hình toán học</b> .....	<b>245</b>
3.2.1 Phương trình trạng thái .....	245
Cấu trúc chung .....	245
Quan hệ giữa mô hình trạng thái và hàm truyền .....	249
3.2.2 Quỹ đạo trạng thái .....	255
Ma trận hàm mũ và cách xác định .....	256
Nghiệm của phương trình trạng thái có tham số không phụ thuộc thời gian .....	262
Nghiệm của phương trình trạng thái phụ thuộc thời gian .....	264
Quá trình cưỡng bức và quá trình tự do .....	266
<b>3.3 Phân tích hệ thống</b> .....	<b>267</b>
3.3.1 Những nhiệm vụ cơ bản của công việc phân tích .....	267
3.3.2 Phân tích tính ổn định .....	268
Phân tích tính ổn định BIBO .....	268
Tiêu chuẩn ổn định Lyapunov– Hàm Lyapunov .....	271
3.3.3 Phân tích tính điều khiển được .....	276
Khái niệm điều khiển được và điều khiển được hoàn toàn .....	276
Các tiêu chuẩn xét tính điều khiển được cho hệ tham số hằng .....	280
Tiêu chuẩn xét tính điều khiển được cho hệ tham số phụ thuộc thời gian .....	284
3.3.4 Phân tích tính quan sát được .....	289
Khái niệm quan sát được và quan sát được hoàn toàn .....	289
Một số kết luận chung về tính quan sát được của hệ tuyến tính .....	290
Tính đối ngẫu và các tiêu chuẩn xét tính quan sát được của hệ tham số hằng .....	293
3.3.5 Phân tích tính động học không .....	295
<b>3.4 Thiết kế bộ điều khiển</b> .....	<b>297</b>
3.4.1 Bộ điều khiển phản hồi trạng thái gán điểm cực .....	297
Đặt vấn đề và phát biểu bài toán .....	297
Phương pháp Ackermann .....	298
Phương pháp Roppenecker .....	304
Phương pháp modal phản hồi trạng thái .....	308
3.4.2 Điều khiển tách kênh .....	317
Bộ điều khiển phản hồi trạng thái tách kênh Falb–Wolovich .....	317
Bộ điều khiển tách kênh Smith–McMillan .....	321
3.4.3 Điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu .....	324
Điều kiện cần và các bước tổng hợp bộ điều khiển tối ưu .....	324
Bàn về tính ổn định của hệ kín tối ưu và bài toán mở .....	330



Phương pháp tìm nghiệm phương trình Riccati.....	332
3.4.4 Điều khiển bám (tracking control) bằng phản hồi trạng thái .....	334
3.4.5 Điều khiển phản hồi trạng thái thích nghi.....	337
Trường hợp đối tượng đã có chất lượng mong muốn khi không có nhiễu .....	338
Trường hợp tổng quát .....	340
3.4.6 Điều khiển phản hồi tín hiệu ra .....	341
Đặt vấn đề.....	341
Bộ quan sát Luenberger .....	344
Giảm bậc bộ quan sát Luenberger .....	346
Bộ quan sát Kalman .....	347
Thiết kế bộ điều khiển tối ưu phản hồi đầu ra LQG.....	350
Kết luận về chất lượng hệ kín: Nguyên lý tách .....	351
Điều khiển kháng nhiễu bằng phản hồi đầu ra.....	355
3.4.7 Loại bỏ sai lệch tĩnh bằng bộ tiền xử lý .....	356
3.4.8 Hiện tượng tạo đỉnh (peak) và bài toán chọn điểm cực.....	359
<b>Câu hỏi ôn tập và bài tập</b> .....	<b>364</b>
<b>4 Điều khiển hệ không liên tục</b> .....	<b>371</b>
<b>4.1 Tín hiệu và công cụ toán học</b> .....	<b>371</b>
4.1.1 Tín hiệu không liên tục đều .....	371
Mô tả quá trình trích mẫu .....	371
Dãy số, tính hội tụ và giá trị giới hạn.....	372
4.1.2 Công cụ toán học .....	374
Phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT).....	374
Phép biến đổi Z thuận.....	377
Phép biến đổi Z ngược.....	380
Chuỗi và tính hội tụ của chuỗi .....	383
4.1.3 Phép biến đổi $\mathcal{Z}$ .....	384
<b>4.2 Xây dựng mô hình toán học</b> .....	<b>386</b>
4.2.1 Khái niệm hệ không liên tục .....	386
4.2.2 Phương trình sai phân, hàm trọng lượng và hàm truyền .....	387
Phương trình sai phân.....	387
Dãy giá trị hàm trọng lượng (hàm trọng lượng).....	390
Hàm truyền .....	390
Một số kết luận chung.....	393
4.2.3 Mô hình trạng thái .....	394
Xác định mô hình trạng thái từ phương trình sai phân.....	394
Xác định mô hình trạng thái từ hàm truyền.....	396
Xác định mô hình trạng thái hệ không liên tục từ mô hình trạng thái hệ liên tục.....	396
Xác định hàm truyền từ mô hình trạng thái.....	398
Xác định hàm trọng lượng từ mô hình trạng thái.....	399
4.2.4 Đại số sơ đồ khối hệ không liên tục .....	399
Hai khối nối tiếp: .....	400
Hai khối song song: .....	400
Hệ hồi tiếp.....	400

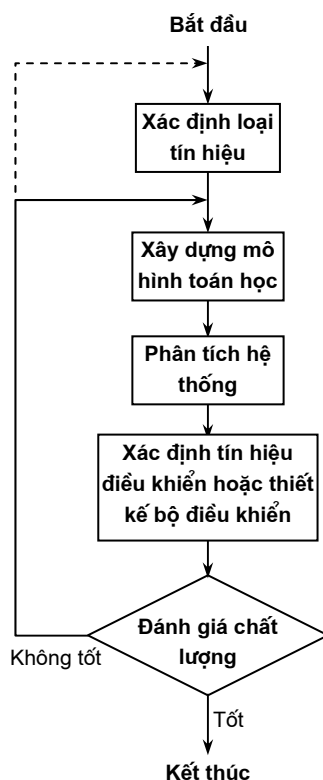
<b>4.3 Phân tích hệ không liên tục</b>	<b>404</b>
4.3.1 Phân tích tính ổn định.....	404
Quá trình tự do, điều kiện cần và đủ để hệ ổn định .....	404
Tiêu chuẩn Schur–Cohn–Jury .....	407
Sử dụng các tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ liên tục .....	410
Tiêu chuẩn Nyquist .....	413
4.3.2 Tính điều khiển được và quan sát được .....	415
Phân tích tính điều khiển được.....	415
Phân tích tính quan sát được .....	417
4.3.3 Chu kỳ trích mẫu và chất lượng hệ thống.....	421
Hiện tượng trùng phổ .....	421
Chọn chu kỳ trích mẫu để đồng nhất điểm cực .....	422
Quan hệ giữa chu kỳ trích mẫu và tính điều khiển được, quan sát được .....	422
Quan hệ giữa chu kỳ trích mẫu và tính ổn định .....	423
<b>4.4 Thiết kế bộ điều khiển</b>	<b>424</b>
4.4.1 Chọn tham số cho bộ điều khiển PID số.....	424
Cấu trúc bộ điều khiển PID số.....	424
Xác định tham số cho PID số bằng thực nghiệm .....	425
4.4.2 Các phương pháp thiết kế trong miền tần số.....	427
Sử dụng ánh xạ lưỡng tuyến tính để thiết kế bộ điều khiển.....	427
Thiết kế bộ điều khiển không liên tục theo mô hình mẫu .....	430
Thiết kế bộ điều khiển dead–beat.....	431
4.4.3 Các phương pháp thiết kế trong miền thời gian .....	435
Điều khiển phản hồi trạng thái gán điểm cực .....	435
Bộ quan sát trạng thái tiệm cận và kỹ thuật giảm bậc bộ quan sát.....	435
Thiết kế bộ lọc Kalman (quan sát trạng thái Kalman) .....	437
Điều khiển phản hồi đầu ra theo nguyên lý tách .....	440
Thiết kế bộ điều khiển dead–beat.....	441
4.4.4 Nhập môn điều khiển dự báo .....	443
Nguyên tắc chung của điều khiển dự báo (MPC–model predictive control).....	443
Điều khiển dự báo hệ SISO trong miền phức .....	443
Điều khiển dự báo hệ MIMO trong không gian trạng thái.....	446
<b>Câu hỏi ôn tập và bài tập</b>	<b>447</b>
<b>Ảnh Laplace và ảnh Z của một số tín hiệu cơ bản</b>	<b>451</b>
<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>452</b>

# 1 NHẬP MÔN

## 1.1 Nội dung bài toán điều khiển

Điều khiển hệ thống được hiểu là *bài toán can thiệp vào đối tượng điều khiển để hiệu chỉnh, để biến đổi sao cho nó có được chất lượng mong muốn*. Như vậy rõ ràng khi thực hiện một bài toán điều khiển, ta cần phải tiến hành các bước sau đây:

- 1) Xác định khả năng can thiệp từ bên ngoài vào đối tượng. Vì đối tượng giao tiếp với môi trường bên ngoài bằng tín hiệu vào-ra nên chỉ có thể thông qua tín hiệu vào-ra này mới có thể can thiệp được vào nó. Như vậy phải hiểu rõ bản chất tín hiệu đối tượng là tiền định, ngẫu nhiên, liên tục hay không liên tục.
- 2) Sau khi đã hiểu rõ bản chất, phương tiện can thiệp đối tượng thì bước tiếp theo phải *xây dựng mô hình* mô tả đối tượng. Hình thức mô tả được dùng nhiều trong điều khiển là mô hình toán học biểu diễn mối quan hệ giữa tín hiệu vào-trạng thái-tín hiệu ra.
- 3) Với mô hình toán học đã có, tiếp theo ta phải xác định xem đối tượng hiện đã có những tính chất gì, các đặc tính nào cần phải sửa đổi và sửa đổi như thế nào để hệ có được chất lượng như ta mong muốn. Nói cách khác là phải *phân tích hệ thống* và phải chỉ rõ từng nhiệm vụ của sự can thiệp.
- 4) Khi đã xác định được từng nhiệm vụ cụ thể cho việc can thiệp ta sẽ tiến hành thực hiện việc can thiệp đó mà cụ thể là phải xác định tín hiệu kích thích ở đầu vào một cách thích hợp, hoặc phải *thiết kế bộ điều khiển* để tạo ra được tín hiệu đầu vào thích hợp đó.



**Hình 1.1:** Trình tự các bước thực hiện một bài toán điều khiển

5) Cuối cùng, do kết quả thu được hoàn toàn được xây dựng trên nền mô hình toán học đã có của đối tượng, song ở thực tế lại được áp dụng với đối tượng thực, nên cần thiết phải đánh giá lại chất lượng của kết quả can thiệp khi chúng làm việc thực với đối tượng. Nếu điều đó cũng mang lại chất lượng như mong đợi thì ta kết thúc bài toán điều khiển. Ngược lại, ta phải quay lại từ đầu với bước 1) hoặc 2).

Hình 1.1 cho ta một cái nhìn tổng quan về các bước phải thực hiện trong một bài toán điều khiển. Có thể thấy rằng kết quả bài toán điều khiển phụ thuộc rất nhiều vào bước xây dựng mô hình toán học mô tả đối tượng.

Việc xây dựng mô hình cho đối tượng được gọi là *mô hình hóa*. Người ta thường phân chia các phương pháp mô hình hóa ra làm hai loại:

- phương pháp lý thuyết và
- phương pháp thực nghiệm (nhận dạng).

Phương pháp lý thuyết là phương pháp thiết lập mô hình dựa trên các định luật có sẵn về quan hệ vật lý bên trong và quan hệ giao tiếp với môi trường bên ngoài của đối tượng. Các quan hệ này được mô tả theo quy luật lý-hóa, quy luật cân bằng, ... dưới dạng những phương trình toán học. Điều kiện để có thể xây dựng được mô hình toán học theo phương pháp lý thuyết là phải biết được cấu trúc vật lý bên trong hệ thống và các phương trình cân bằng hóa-lý giữa các thành phần bên trong đó.

**Ví dụ 1.1:** Xây dựng mô hình bằng phương pháp lý thuyết

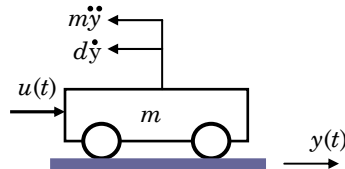
Chẳng hạn ta phải xây dựng mô hình cho đối tượng là một chiếc xe chuyển hàng. Tín hiệu đầu vào tác động để đẩy xe là lực  $u(t)$ . Dưới tác động của lực  $u(t)$  xe sẽ đi được quãng đường ký hiệu bởi  $y(t)$ . Hình 1.2 mô tả cấu trúc vật lý bên trong hệ.

Khi xe chuyển động sẽ có hai lực cản trở sự chuyển động của xe (bỏ qua ma sát tĩnh). Thứ nhất là lực ma sát động xác định bởi:

$$F_s = d \frac{dy}{dt}, \quad d \text{ là hệ số ma sát động}$$

và thứ hai là lực cản trở sự thay đổi tốc độ

$$F_{gt} = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad m \text{ là khối lượng của xe.}$$



**Hình 1.2:** Hệ thống xe chuyển hàng.

Từ hai phương trình cân bằng hóa-lý trên, cũng như theo nguyên tắc bảo toàn năng lượng chung, ta có được mô hình mô tả đối tượng, tức là mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào  $u(t)$  và tín hiệu ra  $y(t)$  như sau (gọi là mô hình vào-ra):

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + d \frac{dy}{dt} = u \Rightarrow \text{hàm truyền } G(s) = \frac{k}{s(1 + Ts)} \text{ với } k = \frac{1}{d} \text{ và } T = \frac{m}{d}. \quad \square$$

Trong các trường hợp mà ở đó sự hiểu biết về những quy luật giao tiếp bên trong đối tượng cũng về mối quan hệ giữa đối tượng với môi trường bên ngoài không được đầy đủ để có thể xây dựng được một mô hình hoàn chỉnh, nhưng ít nhất từ đó có thể cho biết các thông tin ban đầu về mô hình thì tiếp theo người ta phải áp dụng phương pháp thực nghiệm để hoàn thiện nốt việc xây dựng mô hình đối tượng trên cơ sở *quan sát tín hiệu vào và ra* của đối tượng sao cho mô hình thu được thỏa mãn các yêu cầu của phương pháp lý thuyết đề ra. Phương pháp thực nghiệm đó được gọi là *nhận dạng*. Khái niệm nhận dạng (*identification*) được Zadeh định nghĩa cụ thể như sau:

**Định nghĩa 1.1** (Nhận dạng): Nhận dạng là phương pháp *thực nghiệm* để xác định một mô hình cụ thể trong *lớp các mô hình thích hợp*, sao cho sai lệch giữa mô hình đó với hệ thống là *nhỏ nhất*.

Như vậy có thể thấy bài toán nhận dạng có ba đặc điểm để nhận biết. Đó là:

- *thực nghiệm*, nhận biết qua việc đo các tín hiệu vào và ra,
- *lớp các mô hình thích hợp*, có được từ những thông tin ban đầu về hệ thống (gọi chung lại là thông tin A-priori),
- *sai lệch giữa mô hình có được và hệ thống là nhỏ nhất*, được nhận biết từ hàm mục tiêu mô tả sai lệch và được thực hiện bằng phương pháp *tối ưu*.

Những phương pháp xác định mô hình toán bằng thực nghiệm, song không có sự đánh giá sai lệch giữa mô hình và hệ thống và không cần phải tìm nghiệm tối ưu để có được mô hình với *sai lệch nhỏ nhất*, được gọi là phương pháp xấp xỉ mô hình (*model estimation*).

Tuy nhiên, từ nhiều lý do, chẳng hạn như vì đã bỏ qua các giả thiết phải có cho các định luật cân bằng được áp dụng, hay bỏ qua sự tác động của nhiễu trong quá trình đo tín hiệu vào và ra, ta không thể hy vọng rằng mô hình thu được, cho dù bằng lý thuyết hay thực nghiệm, là mô tả tuyệt đối chính xác hệ thống. Nói cách khác, giữa mô hình và hệ thống thực luôn *tồn tại sai lệch nhất định* và sai lệch này cũng luôn thay đổi theo thời gian làm việc, theo điều kiện môi trường xung quanh .... Bởi vậy, thông thường người ta cũng đã rất thỏa mãn, nếu có được một mô hình vừa có cấu trúc đơn giản, vừa *mô tả đủ chính xác* đối tượng với một số giả thiết nhất định. Nhưng điều này cũng dẫn đến khả năng kết quả thu được (bộ điều khiển) bị phụ thuộc vào những giả thiết này và khi chúng không còn được thỏa mãn, chẳng hạn như khi hệ thống thay đổi môi trường làm việc, hoặc khi có những tác động không lường trước của môi trường xung quanh vào hệ thống ... thì chúng sẽ không còn đúng nữa và ta lại phải thực hiện lại bài toán điều khiển từ đầu với các bước đã nêu ở hình 1.1.

Nhằm hạn chế việc phải thực hiện lại từ đầu bài toán điều khiển chỉ vì không lường trước được những sai lệch có thể có giữa mô hình và đối tượng thực, người ta đã phải giả định có sự tồn tại sai lệch này ngay khi phân tích và khi thiết kế bộ điều khiển. Đó cũng chính là nội dung của hai chuyên ngành riêng có tên gọi là:

- *Điều khiển bền vững*: Tạo ra được một bộ điều khiển mang lại chất lượng mong muốn cho một tập hợp các mô hình của hệ thống (chứ không chỉ riêng cho một mô hình), hoặc với một mô hình có chứa sai lệch bất định *bị chặn*.
- *Điều khiển thích nghi*: Tạo ra được bộ điều khiển có khả năng *tự chỉnh định, tự thay đổi* theo sự thay đổi của sai lệch (*không bị chặn*) giữa mô hình và đối tượng thực, sao cho chất lượng của hệ thống không bị thay đổi.

Quyển sách này sẽ trình bày chi tiết từng bước khi thực hiện một bài toán điều khiển tuyến tính. Tuy nhiên, do các công cụ toán học được sử dụng phải phù hợp với kiểu mô hình toán học thu được cũng như chủng loại tín hiệu tác động vào hệ thống, nên các bước thực hiện sẽ được trình bày theo ba dạng điển hình, cụ thể là:

- Chương 2 với các bước thực hiện bài toán điều khiển khi mô hình thu được là một *mô hình trong miền phức* (đối tượng điều khiển được mô tả bằng phương trình đại số trong miền phức).
- Chương 3 là nội dung các bước thực hiện bài toán điều khiển ứng với lớp các *mô hình trạng thái* (đối tượng điều khiển được mô tả bằng hệ các phương trình vi phân trong miền thời gian).
- Chương 4 là nội dung từng bước thực hiện bài toán điều khiển khi tín hiệu vào–ra tác động lên đối tượng điều khiển, hay hệ thống điều khiển là loại *tín hiệu không liên tục*, hoặc là *tín hiệu số*.

### 1.1.1 Bài toán có tín hiệu tiền định (Điều khiển tiền định)

#### Khái niệm tín hiệu

**Định nghĩa 1.2** (Tín hiệu): Tín hiệu là *một hoặc nhiều* hàm thời gian, mang thông tin vật lý và được truyền tải bằng một đại lượng vật lý (khác).

Như vậy tín hiệu có ba đặc điểm để nhận biết. Đó là:

- được mô tả bằng một (hoặc nhiều) hàm thời gian  $x(t)$ ,
- hàm thời gian đó phải mang một thông tin vật lý nhất định,
- và hàm đó phải truyền tải được cũng bằng một đại lượng vật lý.

#### Ví dụ 1.2: Minh họa khái niệm tín hiệu

- Để điều khiển một bình nước sao cho mực nước trong bình luôn là hằng số không đổi thì độ cao cột nước trong bình sẽ là một trong những thông số kỹ thuật được quan tâm của hệ thống. Giá trị về độ cao cột nước tại thời điểm  $t$  được đo bởi cảm biến và được biểu diễn thành một đại lượng điện áp dưới dạng hàm số phụ thuộc thời gian  $u(t)$  có đơn vị là *Volt*. Đại lượng vật lý ở đây là điện áp đã được sử dụng để truyền tải hàm thời gian  $u(t)$  mang thông tin về độ cao cột nước.

- Để điều khiển nhiệt độ thì tất nhiên nhiệt độ hiện thời là một thông số kỹ thuật của hệ thống được quan tâm. Giá trị nhiệt độ tại thời điểm  $t$  dưới dạng giá trị của hàm số phụ thuộc thời gian  $i(t)$  được đo bởi cảm biến và được biểu diễn thành một đại lượng dòng điện có đơn vị là *Ampe*. Như vậy tín hiệu  $i(t)$  là một hàm thời gian mang thông tin về nhiệt độ trong phòng tại thời điểm  $t$  và được truyền tải bởi đại lượng vật lý là dòng điện.
- Tiếng nói là một đại lượng vật lý. Tiếng nói được biến đổi thành dòng điện là một đại lượng vật lý khác để truyền hữu tuyến đi xa. Dòng điện được mô tả bằng một hàm thời gian  $i(t)$ . Như vậy hàm thời gian  $i(t)$  ở đây là một tín hiệu, nó mang thông tin của tiếng nói và được truyền tải nhờ dòng điện.  $\square$

Nếu trong đối tượng có nhiều tín hiệu  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  được quan tâm cùng một lúc thì sau đây ta sẽ sử dụng ký hiệu *vector*:

$$\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$$

để chỉ chúng, trong đó chỉ số mũ  $T$  là ký hiệu của phép chuyển vị vector (hay ma trận).

### Phân loại tín hiệu tiền định

*Tín hiệu tiền định* là tín hiệu nêu ở định nghĩa 1.2, nhưng được mô tả chỉ bằng một hàm thời gian  $x(t)$ . Do được mô tả bằng hàm thời gian nên dựa vào tính chất của hàm thời gian đó người ta đã phân loại tín hiệu thành từng cặp phạm trù như sau:

- 1) *liên tục* và *không liên tục* (phân loại thông qua miền xác định  $t \in \mathbb{R}$ ). Một tín hiệu được gọi là liên tục, nếu hàm  $x(t)$  mô tả nó liên tục từng đoạn, ngược lại nó được gọi là tín hiệu không liên tục. Khái niệm hàm  $x(t)$  liên tục trong một đoạn được hiểu là nó liên tục tại mọi điểm trong đoạn đó, tức là với mọi  $t_0$  thuộc đoạn đó luôn có:

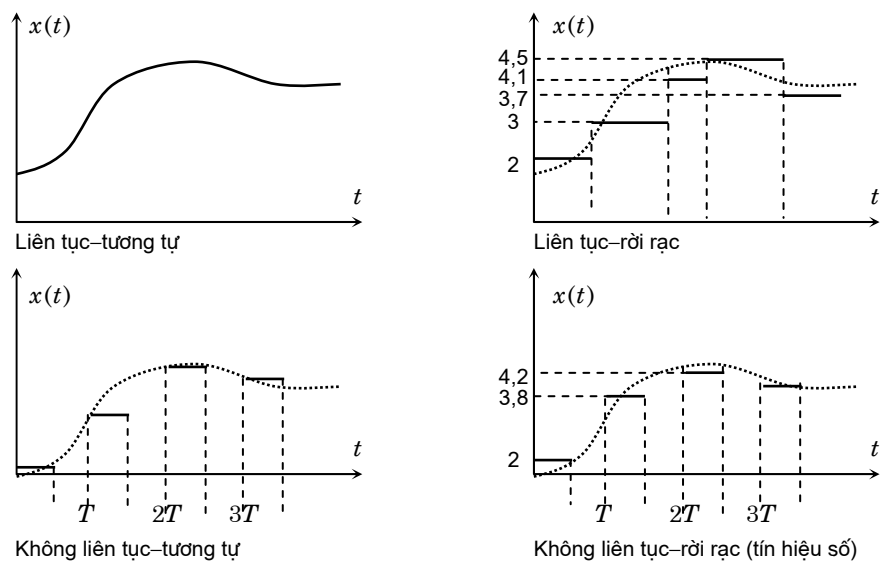
$$x(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x(t_0 - 0) = x(t_0 + 0)$$

và giới hạn này không phụ thuộc chiều  $t \rightarrow t_0$  từ bên trái sang (luôn có  $t < t_0$ ), được ký hiệu bởi  $x(t_0 - 0)$ , hay từ bên phải tới (luôn có  $t > t_0$ ), được ký hiệu là  $x(t_0 + 0)$ .

Tín hiệu không liên tục được mô tả bởi dãy các giá trị  $\{x_k\}$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  của nó.

- 2) *tương tự* và *rời rạc* (phân loại thông qua miền giá trị  $x \in \mathbb{R}$ ). Tín hiệu tương tự là tín hiệu mà hàm  $x(t)$  mô tả nó có miền giá trị tạo thành từng khoảng liên thông, ngược lại nó sẽ được gọi là tín hiệu rời rạc. Chẳng hạn tín hiệu có giá trị chỉ là những số hữu tỷ là tín hiệu rời rạc.
- 3) *tuần hoàn* và *không tuần hoàn*. Tín hiệu  $x(t)$  được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại hằng số  $T$  để có  $x(t+T) = x(t)$ ,  $\forall t$ . Hằng số  $T$  được gọi là *chu kỳ* của tín hiệu tuần hoàn.
- 4) *nhân quả* và *phi nhân quả* (causal và uncausal). Tín hiệu nhân quả là hàm  $x(t)$  thỏa mãn  $x(t) = 0$  khi  $t < 0$ , ngược lại nó sẽ được gọi là phi nhân quả.

Việc phân chia chúng thành từng cặp như vậy để nói rằng một tín hiệu không thể có các tính chất trong cùng một cặp. Chẳng hạn *không thể có tín hiệu vừa tương tự, vừa rời rạc*, song lại có tín hiệu *vừa không liên tục và vừa rời rạc*. Tín hiệu không liên tục và rời rạc được gọi là *tín hiệu số*.



**Hình 1.3:** Các dạng tín hiệu cơ bản khác nhau.

Hình 1.3 minh họa bốn dạng cơ bản của tín hiệu causal. Bốn kiểu tín hiệu trên chỉ là sự phân loại cơ bản theo *miền xác định* hoặc *theo miền giá trị* của  $x(t)$ . Trên cơ sở bốn kiểu phân loại cơ bản đó mà một tín hiệu  $x(t)$  khi được để ý chung đồng thời tới cả miền xác định và miền giá trị có thể là:

- dạng tín hiệu liên tục–tương tự,
- dạng tín hiệu không liên tục–tương tự,
- dạng tín hiệu liên tục–rời rạc,
- dạng tín hiệu không liên tục–rời rạc,

**Ví dụ 1.3:** Khái niệm tín hiệu không liên tục–rời rạc (tín hiệu số)

Giả sử ta có tín hiệu liên tục–tương tự  $x(t)$ . Để xử lý tín hiệu  $x(t)$  bằng những thuật toán chạy trên máy tính người ta cần phải trích mẫu tín hiệu tại những điểm thời gian cách đều nhau  $T_a$  được gọi là *thời gian trích mẫu*. Nếu dãy các giá trị tín hiệu  $\{x_k\}$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  thu được với  $x_k = x(kT_a)$  được xem như một tín hiệu thì do miền xác định của  $\{x_k\}$  là tập điểm đếm được



$$\{t = kT_a \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z} \text{ là ký hiệu chỉ tập các số nguyên}$$

không liên thông, tức là không tạo ra được một khoảng bất kỳ nào để nên dãy  $\{x_k\}$  liên tục tại các điểm trong đó, nên  $\{x_k\}$  là tín hiệu có dạng không liên tục–tương tự.

Tín hiệu không liên tục – tương tự  $\{x_k\}$  vẫn chưa thể xử lý được bằng máy tính bởi máy tính chỉ làm việc được với số hữu tỷ trong một khoảng cho phép, trong khi  $x_k$  có thể là một số thực bất kỳ (ví dụ như số vô tỷ  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\pi$ , ...). Hơn nữa, miền giá trị cho phép của các số hữu tỷ còn phụ thuộc máy tính, ngôn ngữ lập trình. Chẳng hạn biến thực kiểu **double** của ngôn ngữ lập trình C chỉ làm việc được với những số hữu tỷ trong khoảng từ  $-1,7 \cdot 10^{-308}$  đến  $1,7 \cdot 10^{308}$  hoặc với biến kiểu **long double** thì khoảng cho phép là từ  $-1,1 \cdot 10^{-4932}$  đến  $1,1 \cdot 10^{4932}$ .

Bởi vậy bước tiếp theo cần phải làm là xấp xỉ các giá trị  $x_k$  thành số hữu tỷ gần nhất, ký hiệu là  $\hat{x}_k$ , nhưng không nằm ngoài miền cho phép. Việc xấp xỉ  $\{x_k\}$  thành  $\{\hat{x}_k\}$  vô hình chung đã rời rạc hóa miền giá trị của  $x(t)$ . Miền giá trị của  $\{\hat{x}_k\}$  bây giờ là tập các số hữu tỷ (các điểm không liên thông). Ví dụ

$$\{\hat{x}_k \in \mathbb{Q} \mid -1,7 \cdot 10^{-308} \leq \hat{x}_k \leq 1,7 \cdot 10^{308}\}, \quad \mathbb{Q} \text{ là tập các số hữu tỷ}$$

và do đó dãy  $\{\hat{x}_k\}$  là tín hiệu không liên tục – rời rạc (tín hiệu số). □

### Một số tín hiệu tiền định điển hình

Trong vô số các các tín hiệu với nhiều dạng khác nhau, điều khiển tuyến tính có một sự quan tâm đặc biệt đến một số tín hiệu điển hình thường gặp trong ứng dụng (hình 1.4). Đó là các tín hiệu bậc thang (Heaviside), tín hiệu tăng đều, tín hiệu xung vuông và hàm xung dirac. Tất cả các loại tín hiệu này đều có một điểm chung là causal (nhân quả), tức là  $x(t)=0$  khi  $t < 0$ .

- 1) *Tín hiệu bước nhảy đơn vị* (còn gọi là hàm *Heaviside*) định nghĩa bởi

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t \geq 0 \\ 0 & \text{khi } t < 0 \end{cases}$$

Cho một tín hiệu  $x(t)$  bất kỳ. Nếu  $x(t)$  liên tục, khả vi từng khúc và có giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) < \infty \quad (\text{tức là bị chặn})$$

thì nó biểu diễn được thông qua hàm Heaviside như sau:

$$x(t) = x(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} 1(t-\tau) d\tau$$

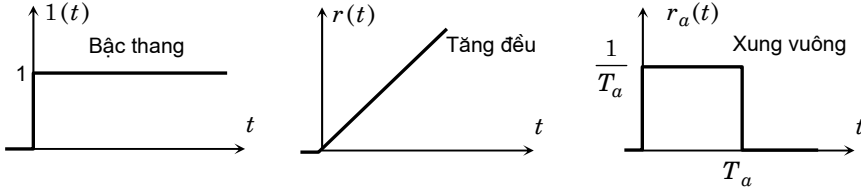
- 2) *Tín hiệu điều hòa*:  $x(t) = A \sin(\omega t)$  và  $y(t) = B \cos(\omega t)$

3) *Tín hiệu tăng đều* được xác định qua công thức

$$r(t) = t1(t) = \begin{cases} t & \text{ khi } t \geq 0 \\ 0 & \text{ khi } t < 0 \end{cases}$$

4) *Tín hiệu xung vuông*, định nghĩa bởi

$$r_a(t) = \frac{1(t) - 1(t - T_a)}{T_a}$$



Hình 1.4: Các tín hiệu bậc thang, tăng đều và xung vuông.

5) *Hàm xung dirac* (còn gọi là *hàm mở rộng delta*)

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \lim_{T_a \rightarrow 0} r_a(t) = \lim_{T_a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t - T_a)}{T_a} \quad (1.1)$$

Một tín hiệu  $x(t)$  tùy ý, liên tục với  $-\infty < t < \infty$  sẽ xấp xỉ thành (hình 1.5):

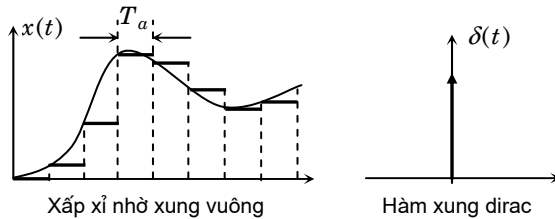
$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_a) r_a(t - kT_a) T_a$$

Bởi vậy với  $T_a \rightarrow 0$  ta sẽ có (dấu tổng  $\Sigma$  chuyển thành tích phân  $\int$  và  $T_a$  thành  $d\tau$ ):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) x(t - t_0) dt \quad (1.2)$$

Do hàm  $1(t)$  không liên tục tại 0, tức là tại đó không tồn tại đạo hàm, nên định nghĩa (1.1) không chặt chẽ. Bởi vậy nó thường được thay bằng (1.2) và khi đó người ta gọi nó là *hàm mở rộng delta*. **Chú ý:** hàm delta (hay xung dirac) không mang ý nghĩa vật lý, nên nó *không phải là tín hiệu*. Ngoài ra, từ công thức định nghĩa (1.2) ta dễ dàng thấy được:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{thay } x(t)=1) \quad \text{và do đó cũng có } x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t)$$



Hình 1.5: Xung dirac và xấp xỉ tín hiệu bất kỳ nhờ hàm xung vuông.

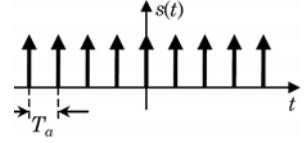
Bên cạnh (1.1), (1.2) người ta còn sử dụng hàm xung dirac dưới những dạng công thức định nghĩa khác nhau như sau (xem thêm mục 2.1.2 của chương 2, trang 42):

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \cos(\omega t) d\omega = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(at)}{\pi t}$$

Cũng như vậy, với  $a \neq 0$  thì từ  $x(0) = x\left(\frac{0}{a}\right)$  và

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(at) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t'}{a}\right) \delta(t') dt' = x\left(\frac{0}{a}\right)$$

ta có  $\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t)$ .



Hình 1.6: Đồ thị hàm trích mẫu

6) Hàm trích mẫu (hình 1.6):  $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a)$

Vì xung dirac là hàm mở rộng nên  $s(t)$  cũng là một hàm mở rộng. Hàm trích mẫu được sử dụng để mô tả quá trình trích mẫu tín hiệu liên tục  $x(t)$  thành tín hiệu không liên tục, biểu diễn thành dãy giá trị  $\{x_k\}$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  với  $x_k = x(kT_a)$ , trong đó  $T_a$  là chu kỳ trích mẫu. Nếu sử dụng định nghĩa (1.2) về hàm mở rộng cho xung dirac, cũng như hàm mở rộng trích mẫu  $s(t)$  trên thì tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$  này sẽ có dạng:

$$\{x_k\} = x(t)s(t) \stackrel{\text{d.n.}}{=} \hat{x}(t)$$

Như vậy  $\hat{x}(t) = \{x_k\}$  cũng là một hàm mở rộng.

### Chuẩn của tín hiệu (hay hàm số)

Để so sánh các tín hiệu với nhau (lớn hơn, nhỏ hơn ...), người ta sử dụng khái niệm chuẩn của tín hiệu. Mỗi tín hiệu (mà bản chất toán học chỉ là một hàm thời gian) sẽ được gắn với một số thực không âm phù hợp, gọi là chuẩn của tín hiệu đó. Khi cần phải so sánh các tín hiệu, người ta chỉ cần so sánh chuẩn của chúng với nhau.

Cho tập hợp  $X$  các tín hiệu, ký hiệu là  $x(t)$ . Định nghĩa phép tính cộng:

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$$

và phép tính nhân với một số thực  $a$  (không gian vector trên trường số thực):

$$(ax)(t) = ax(t).$$

Khi đó, không gian  $X$  sẽ là một không gian vector có phần tử không  $x(t) = 0$ .

Nếu trong không gian vector  $X$  ta định nghĩa thêm số thực  $d(x, y)$  để xác định khoảng cách giữa hai phần tử  $x(t)$ ,  $y(t)$  được gọi là metric, và số thực này thỏa mãn:

- $d(x, y) = 0$  khi và chỉ khi  $x(t) = y(t)$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

thì không gian vector  $X$  được gọi là *không gian metric*.

Xét không gian metric  $X$ . Nếu có dãy  $\{x_k(t)\}$  các tín hiệu thuộc  $X$  thỏa mãn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_k) = 0 \quad (n > k)$$

thì dãy hàm  $\{x_k(t)\}$  được gọi là *dãy Cauchy*.

Khác với trường số thực  $\mathbb{R}$ , mà ở đó mọi dãy Cauchy đều hội tụ (tới giá trị giới hạn  $\underline{x}$  nào đó cũng thuộc  $\mathbb{R}$ ), thì trong không gian metric  $X$  nói chung là chưa được đảm bảo. Nói cách khác, không phải mọi dãy Cauchy của các hàm số của một không gian metric  $X$  cũng hội tụ tới một hàm số nào đó thuộc  $X$ .

Một không gian metric  $X$  được gọi là *không gian đủ (complete)*, nếu mọi dãy Cauchy trong nó đều hội tụ (tới một phần tử cũng thuộc  $X$ ).

Một không gian metric  $X$  được gọi là *không gian compact*, nếu mọi dãy  $\{x_k(t)\}$  trong nó đều chứa một dãy con hội tụ.

Trong không gian vector  $X$  xác định trên trường số thực  $\mathbb{R}$ , nếu có thêm ánh xạ, không nhất thiết phải tuyến tính,  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn:

- $\|x\| \geq 0$  và  $\|x\| = 0$  khi và chỉ khi  $x=0$ ,
- $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$  đúng với mọi  $a \in \mathbb{R}$  và  $x \in X$ ,
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$  với mọi  $x, y \in X$ .

thì giá trị thực  $\|x\|$  được gọi là chuẩn của phần tử  $x$  và không gian vector  $X$  được gọi là *không gian chuẩn*. Do  $X$  là không gian vector nên từ chuẩn  $\|x\|$  ta cũng có được metric:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Ngược lại, một không gian metric cũng sẽ là không gian chuẩn với  $\|x\| = d(x, 0)$ , nếu metric của nó còn thỏa mãn thêm:

- $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ , tức là metric bất biến với phép dịch chuyển vector.
- $d(ax, ay) = |a| \cdot d(x, y)$ , tức là nó thuần nhất (*homogen*).

Trong một không gian  $X$  có thể có nhiều loại chuẩn. Hai chuẩn  $\|x\|_a$  và  $\|x\|_b$  của nó được gọi là *tương đương* nếu tồn tại hai số thực  $m$  và  $M$  để luôn có:

$$m\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq M\|x\|_b$$

Các không gian chuẩn thường gặp là:

- 1) Không gian  $L_p[a, b]$  gồm các tín hiệu  $x(t)$  thực, xác định trên khoảng kín  $[a, b]$ , có chuẩn được định nghĩa là:

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt} \quad , \quad \text{trong đó } 1 \leq p < \infty.$$

2) Không gian  $L_\infty[a,b]$  là tập hợp các tín hiệu  $x(t)$  thực, xác định trên khoảng kín  $[a,b]$ , có chuẩn được định nghĩa là:

$$\|x\|_\infty := \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

Đặc biệt, cả hai loại chuẩn trên với  $\|\cdot\|_p$  trong đó  $1 \leq p \leq \infty$  còn thỏa mãn:

- $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$  nếu  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (định lý Hölder)
- $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$  (định lý Minkovski)

Chuẩn bậc 1 của tín hiệu còn được gọi là công suất  $P$  và chuẩn bậc 2 được gọi là năng lượng  $E$  của tín hiệu. Với  $L_p[-\infty, \infty]$  người ta thường viết gọn thành  $L_p$ .

### 1.1.2 Bài toán có tín hiệu ngẫu nhiên (Điều khiển ngẫu nhiên)

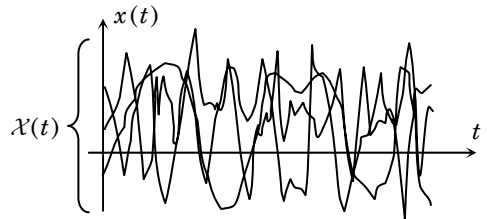
#### Khái niệm quá trình ngẫu nhiên

Các tín hiệu mà ta đã làm quen từ trước đến nay có chung một đặc điểm là chúng đều được mô tả bằng một hàm thời gian  $x(t)$  cụ thể. Những tín hiệu đó được gọi là *tín hiệu tiền định*. Việc chúng mô tả được chỉ bằng một hàm thời gian đã nói lên tính tường minh rằng trong các hoàn cảnh cũng như thời điểm giống nhau ta luôn xác định được cùng một giá trị như nhau cho tín hiệu.

Những tín hiệu không mô tả được tường minh bằng một hàm thời gian cụ thể mà thay vào đó là một tập hợp của nhiều hàm thời gian  $x_i(t)$ , có tên là *tín hiệu ngẫu nhiên*. Tùy vào từng hoàn cảnh, từng trường hợp, mà tín hiệu ngẫu nhiên sẽ nhận một trong các hàm  $x_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{R}$ , thuộc một tập hợp  $\mathcal{X}(t)$  nào đó làm mô hình và ngay cả hoàn cảnh nào, trường hợp nào nó sẽ có mô hình  $x_i(t)$  ta cũng không biết được trước. Nhiều nhất ta chỉ có thể biết được về xác suất nó được mô tả bởi  $x_i(t)$ .

Tập hợp  $\mathcal{X}(t)$  của tất cả các mô hình  $x_i(t)$  có thể có của tín hiệu ngẫu nhiên được gọi là *quá trình ngẫu nhiên* và để mô tả tín hiệu ngẫu nhiên một cách đầy đủ ta phải mô tả tập hợp  $\mathcal{X}(t)$ , bằng cách xác định các tham số đặc trưng về nó.

Có hai tham số thường được sử dụng để mô tả quá trình ngẫu nhiên  $\mathcal{X}(t)$ . Đó là:



**Hình 1.7:** Tín hiệu ngẫu nhiên được mô tả như là phần tử của một tập hợp các hàm thời gian có cùng tính chất.

- *Giá trị trung bình  $m_x(t)$* : Tại một điểm thời gian  $t_0$  cụ thể thì các hàm  $x_i(t_0)$  đều là những số thực. Giá trị trung bình của tất cả các phần tử  $x_i(t_0)$  là  $m_x(t_0)$ . Cho  $t_0$  chạy từ  $-\infty$  đến  $\infty$  thì  $m_x(t_0)$  sẽ trở thành hàm  $m_x(t)$  phụ thuộc thời gian. Sử dụng ký hiệu  $M\{\cdot\}$  để chỉ phép tính lấy giá trị trung bình thì  $m_x(t) = M\{\mathcal{X}(t)\}$ .
- *Hàm tương quan  $r_x(t, \tau)$* : Tại một điểm thời gian  $t_0$  cụ thể thì hàm tương quan  $r_x(t_0, \tau)$  là giá trị trung bình của tất cả các tích  $x_i(t_0)x_j(t_0 + \tau)$ . Cho  $t_0$  biến thiên như  $t$  thì hàm tương quan  $r_x(t, \tau)$  sẽ là một hàm của hai biến  $t$  và  $\tau$ . Như vậy, hàm tương quan sẽ là  $r_x(t, \tau) = M\{\mathcal{X}(t)\mathcal{X}(t + \tau)\}$ .

### Quá trình ngẫu nhiên dừng và ngẫu nhiên egodic

Những quá trình ngẫu nhiên  $\mathcal{X}(t)$  thường gặp trong thực tế là các *quá trình ngẫu nhiên dừng*. Đó là loại quá trình ngẫu nhiên mà cả hai tham số ngẫu nhiên  $m_x(t)$  và  $r_x(t, \tau)$  mô tả nó đều không phụ thuộc vào biến thời gian  $t$ . Như vậy, quá trình ngẫu nhiên dừng có:

- Giá trị trung bình  $m_x(t)$  của nó là một hằng số, ký hiệu là  $m_x \in \mathbb{R}$ .
- Hàm tương quan  $r_x(t, \tau)$  là hàm của một biến  $\tau$ , ký hiệu là  $r_x(\tau)$ .

Trong các loại quá trình ngẫu nhiên dừng, ta lại quan tâm nhiều tới *quá trình ngẫu nhiên egodic*. Đây là loại quá trình ngẫu nhiên dừng mà ở đó, các tham số  $m_x$  và  $r_x(\tau)$  chỉ cần được xác định từ một phần tử  $x(t)$  làm đại diện là đủ. Như vậy thì:

- Giá trị trung bình  $m_x$  của quá trình ngẫu nhiên egodic  $\mathcal{X}(t)$  sẽ là giá trị trung bình của một phần tử  $x(t)$ :

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.3)$$

- Hàm tự tương quan  $r_x(\tau)$  của quá trình ngẫu nhiên egodic  $\mathcal{X}(t)$  là giá trị trung bình của tích  $x(t)x(t + \tau)$  với  $x(t)$  là một phần tử tùy ý của tập hợp  $\mathcal{X}(t)$ :

$$r_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (1.4)$$

Trong điều khiển, ít khi ta chỉ làm việc với một tín hiệu ngẫu nhiên. Khi phải làm việc với nhiều tín hiệu ngẫu nhiên thì cần phải để ý tới mối liên quan giữa chúng.

Cho hai quá trình ngẫu nhiên egodic  $\mathcal{X}(t)$  và  $\mathcal{Y}(t)$ . Đặc trưng cho sự liên quan giữa  $\mathcal{X}(t)$  và  $\mathcal{Y}(t)$  là hàm hỗ tương quan:

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (1.5)$$

Hai quá trình ngẫu nhiên có kỳ vọng bằng không  $\mathcal{X}(t)$  và  $\mathcal{Y}(t)$  sẽ được gọi là *không tương quan* nếu  $r_{xy}(\tau)=0$ . Chẳng hạn như hai thiết bị phát tín hiệu ngẫu nhiên khác nhau, có cấu trúc khác nhau sẽ phát ra hai quá trình ngẫu nhiên  $\mathcal{X}(t)$ ,  $\mathcal{Y}(t)$  độc lập với nhau. Giữa chúng không có một sự liên quan nào và do đó phải có  $r_{xy}(\tau)=0$ .

Hàm tương quan  $r_x(\tau)$  và  $r_{xy}(\tau)$  của các quá trình ngẫu nhiên ergodic  $\mathcal{X}(t)$ ,  $\mathcal{Y}(t)$  luôn thỏa mãn:

- $r_x(\tau)$  là hàm chẵn và  $r_x(0) \geq |r_x(\tau)|$
- $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$
- $|r_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{r_x(0)r_y(0)} \leq \frac{r_x(0)+r_y(0)}{2}$

## 1.2 Những cấu trúc cơ bản của hệ thống điều khiển

**Định nghĩa 1.3** (Hệ thống): Hệ thống được hiểu là một tập hợp các phần tử (linh kiện, thiết bị, thuật toán ...), được kết nối với nhau để thực hiện một nhiệm vụ cụ thể. Hệ thống luôn được giao tiếp với môi trường bên ngoài bằng các tín hiệu vào và ra.

Như vậy có ba đặc điểm để nhận biết một hệ thống. Đó là:

- là tập hợp gồm nhiều phần tử thực hiện một nhiệm vụ chung,
- giữa các phần tử có quan hệ qua lại,
- có giao tiếp với môi trường xung quanh.

### 1.2.1 Phân loại hệ thống

Hình 1.8 minh họa cấu trúc một hệ thống gồm 4 phần tử với các đặc điểm nhận biết trên. Các tín hiệu đầu vào của hệ sẽ được viết chung lại thành vector  $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ . Tương tự các tín hiệu đầu ra cũng được viết chung lại thành  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_p)^T$ .

Dựa theo các đặc điểm nêu trong định nghĩa 1.3 mà hệ thống được phân loại thành:

- 1) Hệ SISO (single input–single output), nếu hệ có một tín hiệu vào và một tín hiệu ra.
- 2) Hệ MIMO (multi inputs–multi outputs), nếu số tín hiệu vào ra của nó nhiều vào–nhiều ra.
- 3) Theo nguyên lý như trên, một hệ thống còn có thể là MISO (nhiều vào–một ra) hoặc SIMO (một vào–nhiều ra).

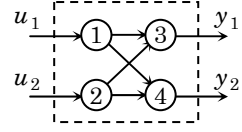
4) *Liên tục*, nếu các tín hiệu vào-ra  $\underline{u}(t), \underline{y}(t)$  là liên tục, ngược lại nếu các tín hiệu vào ra  $\{\underline{u}_k\}, \{\underline{y}_k\}$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  là không liên tục hệ sẽ được gọi là *không liên tục*.

5) *Tuyến tính*, nếu nhiệm vụ chung của nó, mô tả bởi mô hình toán:

$$T: \underline{u} \mapsto \underline{y} \quad \text{hay} \quad \underline{y} = T(\underline{u})$$

thỏa mãn *nguyên lý xếp chồng*, tức là ánh xạ  $T$  thỏa:

$$T\left(\sum_{i=1}^n a_i \underline{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i T(\underline{u}_i) = \sum_{i=1}^n y_i$$



Hình 1.8: Hệ thống

Ngược lại, hệ sẽ được gọi là *hệ phi tuyến*.

6) *Tham số hằng*, nếu mô hình toán  $T: \underline{u} \mapsto \underline{y}$  của nó không thay đổi (theo thời gian và theo không gian. Ngược lại hệ sẽ được gọi là *không dừng*, nếu mô hình của nó thay đổi theo thời gian (thường còn được gọi là *hệ nonautonom*), hoặc hệ *phân bố rải*, nếu mô hình của nó thay đổi theo không gian.

7) *Hệ nhân quả* (causal), nếu mô hình toán  $\underline{y} = T(\underline{u})$  của nó thỏa mãn:

$$\underline{y}(t) = T(\underline{u}(\tau)) \quad \text{với} \quad 0 \leq \tau \leq t$$

Như vậy, ở hệ nhân quả, tín hiệu ra  $\underline{y}(t)$  ở thời điểm  $t$  chỉ phụ thuộc tín hiệu vào  $\underline{u}(t)$  ở đúng thời điểm  $t$  và quá khứ của nó. Ngược lại, nếu tín hiệu ra  $\underline{y}(t)$  ở thời điểm  $t$  còn phụ thuộc tín hiệu vào  $\underline{u}(t)$  ở cả thời tương lai  $\tau > t$  thì nó được gọi là *hệ phi nhân quả* (uncausal).

8) *Hệ tĩnh* (static), nếu tín hiệu ra  $\underline{y}(t)$  ở thời điểm  $t$  được xác định chính xác chỉ cần qua tín hiệu vào  $\underline{u}(t)$  ở đúng thời điểm  $t$  đó. Ngược lại nó sẽ được gọi là *hệ động* (dynamic), nếu tín hiệu ra  $\underline{y}(t)$  ở thời điểm  $t$  chỉ có thể được xác định chính xác từ tín hiệu vào  $\underline{u}(t)$  ở cả thời điểm  $t$  và quá khứ (hoặc tương lai) của nó.

9) *Hồi tiếp* (hay hệ kín), nếu các quan hệ bên trong giữa các phần tử (được mô tả bằng những đường nối trong hình 1.8) tạo thành ít nhất là một vòng kín. Ngược lại nó được gọi là hệ hở.

## 1.2.2 Xác định tín hiệu điều khiển thích hợp

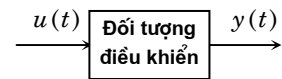
Đối tượng điều khiển cũng là một hệ thống. Hệ thống điều khiển là một hệ thống bao gồm đối tượng điều khiển và bộ điều khiển. Kết quả của bài toán điều khiển cho một đối tượng hay một hệ thống, tìm được theo trình tự các bước nêu trong hình 1.1. Nhiệm vụ điều khiển bao gồm:



- 1) *xác định tín hiệu điều khiển thích hợp* cho đối tượng (tín hiệu đầu vào, hay tín hiệu đặt trước), ký hiệu bằng  $u(t)$ ,
- 2) *thiết kế bộ điều khiển* tạo ra tín hiệu điều khiển thích hợp cho đối tượng. Như vậy, nếu xem bộ điều khiển như một hệ thống thì đầu ra của nó chính là  $u(t)$  được đưa tới đối tượng điều khiển, còn tín hiệu đầu vào của nó có thể là:
  - a) Một tín hiệu lệnh  $w(t)$  đặt trước cho bộ điều khiển (cấu trúc điều khiển hở).
  - b) Các tín hiệu trạng thái  $\underline{x}(t)$  của đối tượng (điều khiển phản hồi trạng thái).
  - c) Tín hiệu đầu ra  $y(t)$  của đối tượng (điều khiển phản hồi đầu ra).

Đây là kiểu bài toán điều khiển mà yêu cầu chỉ dừng lại ở việc xác định tín hiệu thích hợp áp đặt tại đầu vào của đối tượng sao cho *đối tượng có được chất lượng bên trong và tín hiệu đầu ra như mong muốn*. Chẳng hạn bài toán xác định quy tắc thay đổi điện áp đầu vào  $u(t)$  của động cơ (đối tượng điều khiển) sao cho tốc độ vòng quay của động cơ (tín hiệu đầu ra) thay đổi từ giá trị ban đầu  $y_0$  tới giá trị mong muốn  $y_T$  và năng lượng tổn hao cho quá trình thay đổi tốc độ vòng quay đó là ít nhất (chất lượng bên trong của đối tượng).

Đặc điểm của hình thức điều khiển này là *điều khiển một chiều* và trong quá trình điều khiển, hệ thống không có khả năng thay đổi hoặc hiệu chỉnh lại được. Như vậy, chất lượng điều khiển phụ thuộc hoàn toàn vào độ chính xác của mô hình toán học mô tả đối tượng cũng như phải có giả thiết rằng không có tác động nhiễu không mong muốn vào hệ thống trong suốt quá trình điều khiển.

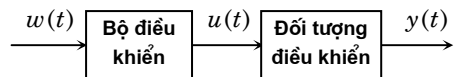


Hình 1.9: Xác định tín hiệu điều khiển

### 1.2.3 Sử dụng bộ điều khiển

#### Điều khiển hở

Về bản chất, hình thức điều khiển này cũng giống như bài toán tìm tín hiệu điều khiển thích hợp áp đặt ở đầu vào của đối tượng, nhưng được bổ sung thêm bộ điều khiển để tạo ra được tín hiệu điều khiển đó. Ví dụ để điều khiển tàu thủy đi được theo một quỹ đạo  $y(t)$  mong muốn (tín hiệu đầu ra), người ta phải tác động bằng lực  $w(t)$  vào tay lái để tạo ra được vị trí  $u(t)$  của bánh lái một cách thích hợp. Trong ví dụ này, hệ thống tay lái-bánh lái có vai trò của một bộ điều khiển.



Hình 1.10: Cấu trúc điều khiển hở.

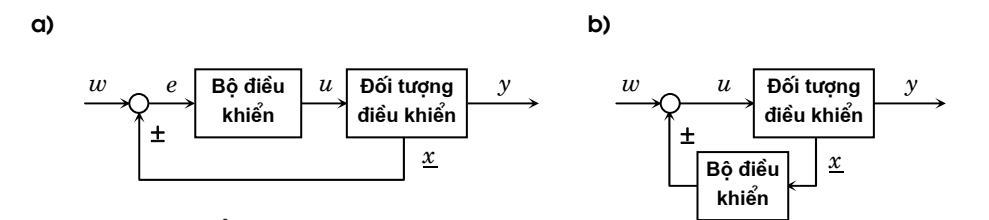
Hình thức điều khiển hở này (hình 1.10) là *điều khiển một chiều* và chất lượng điều khiển phụ thuộc vào độ chính xác của mô hình toán học mô tả đối tượng cũng như phải

có giả thiết rằng không có tác động nhiễu không mong muốn vào hệ thống trong suốt quá trình điều khiển.

### Điều khiển phản hồi trạng thái

Ở đối tượng điều khiển, các tín hiệu trạng thái  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , được viết chung dạng vector  $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ , là thành phần chứa đựng đầy đủ nhất các thông tin chất lượng động học hệ thống. Nó phản ánh nhanh nhất sự ảnh hưởng của những tác động bên ngoài vào hệ thống, kể cả những tác động nhiễu không mong muốn. Bởi vậy, để có thể tạo ra được cho đối tượng một chất lượng mong muốn, ổn định với các tác động nhiễu, cần phải có được một tín hiệu áp đặt ở đầu vào là  $u(t)$  phản ứng kịp theo những thay đổi trạng thái của đối tượng.

Hình 1.11 biểu diễn nguyên tắc *điều khiển phản hồi trạng thái*. Bộ điều khiển sử dụng tín hiệu trạng thái  $\underline{x}(t)$  của đối tượng để tạo ra được tín hiệu đầu vào  $u(t)$  cho đối tượng. Vị trí của bộ điều khiển có thể là ở mạch truyền thẳng (hình 1.11a) hoặc ở mạch hồi tiếp (hình 1.11b).



Hình 1.11: Điều khiển phản hồi trạng thái

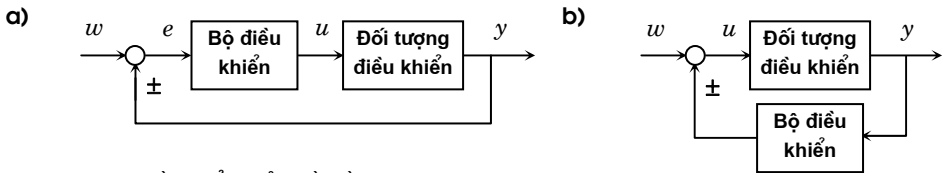
*Hệ thống điều khiển phản hồi trạng thái có khả năng giữ được ổn định chất lượng mong muốn cho đối tượng, mặc dù trong quá trình điều khiển luôn có những tác động nhiễu. Xét phản ứng của người lái xe làm ví dụ, trong đó người lái xe được xem như là bộ điều khiển và chiếc xe là đối tượng điều khiển. Nhiệm vụ của bộ điều khiển là giữ ổn định tốc độ xe và vị trí của xe phải luôn nằm trong phần đường bên phải vạch phân cách. Như vậy người lái xe (bộ điều khiển) đã:*

- Dựa vào khoảng cách của xe với vạch phân cách (trạng thái của đối tượng điều khiển) để đưa ra quyết định phải đánh tay lái sang phải mạnh hay nhẹ.
- Dựa vào tình trạng của mặt đường như lên dốc hay xuống dốc (tác động của tín hiệu nhiễu tới chất lượng hệ thống) để điều chỉnh số và bàn đạp ga.

### Điều khiển phản hồi tín hiệu ra

Tuy rằng vector trạng thái  $\underline{x}(t)$  cung cấp cho ta đầy đủ nhất các thông tin về chất lượng động học của đối tượng, song *không phải mọi trạng thái của đối tượng là đo được*

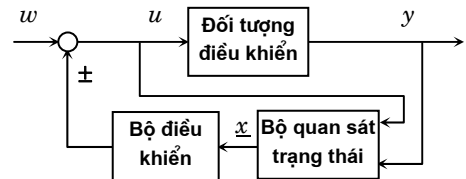
trực tiếp. Vì lẽ đó, trong nhiều trường hợp, người ta đành phải thay bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $\underline{x}(t)$  bằng bộ điều khiển phản hồi đầu ra  $y(t)$ .



Hình 1.12: Điều khiển phản hồi đầu ra.

Hình 1.12 mô tả nguyên tắc *điều khiển phản hồi đầu ra*. Bộ điều khiển sử dụng tín hiệu đầu ra  $y(t)$  của đối tượng để tạo ngược ra được tín hiệu đầu vào  $u(t)$  cho nó. Vị trí của bộ điều khiển có thể là ở mạch truyền thẳng (hình 1.12a) hoặc ở mạch hồi tiếp (hình 1.12b).

Cho tới nay, bài toán điều khiển phản hồi tín hiệu ra vẫn còn là một bài toán mở và chưa có lời giải tổng quát cuối cùng, vì tín hiệu đầu ra  $y(t)$  thường không mang được đầy đủ thông tin động học về đối tượng. Song riêng ở hệ tuyến tính, một điều may mắn lớn là do chúng thỏa mãn *nguyên lý tách được*, nên bài toán điều khiển phản hồi tín hiệu ra luôn thay được bằng hai bài toán: phản hồi trạng thái và quan sát trạng thái (hình 1.13) và như vậy, nó đã được giải quyết triệt để.



Hình 1.13: Điều khiển phản hồi đầu ra theo nguyên lý tách.

## Câu hỏi ôn tập và bài tập

- 1) Chứng minh rằng mọi tín hiệu liên tục  $x(t)$  có miền xác định là tập compact đều xấp xỉ được bằng tổng tuyến tính của tín hiệu bước nhảy đơn vị hoặc tín hiệu tăng đều với một sai lệch  $\varepsilon$  nhỏ tùy ý.
- 2) Chứng minh rằng không gian  $L_1$  là đóng với tích chập, tức là nếu có  $x(t) \in L_1$  và  $y(t) \in L_1$  thì cũng có  $z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \in L_1$
- 3) Cho tín hiệu  $x(t)$  xác định bởi:

$$x(t) = t^{-a} [1(t) - 1(t-b)], \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < \infty$$

Hãy chỉ rằng nó có công suất  $P = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$  là giá trị hữu hạn nhưng lại có năng

lượng  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$  là vô hạn.

- 4) Cho tín hiệu  $x(t)$  xác định bởi:

$$x(t) = t^{-a} 1(t-b), \quad \frac{1}{2} < a < 1, \quad 0 \leq b$$

Hãy chỉ rằng nó có công suất  $P$  vô hạn nhưng lại có năng lượng  $E$  hữu hạn.

- 5) Cho  $x(t)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T$ . Ký hiệu  $s(t)$  là hàm trích mẫu có cùng chu kỳ trích mẫu  $T$  và  $\hat{x}(t) = x(t)[1(t) - 1(t-T)]$  là hàm lấy từ  $x(t)$  chỉ trong một chu kỳ. Chứng minh rằng  $x(t) = \hat{x}(t) * s(t)$ , trong đó ký hiệu  $*$  là chỉ phép tính tích chập:

$$\hat{x}(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\tau) s(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t-\tau) s(\tau) d\tau = s(t) * \hat{x}(t)$$

- 6) Xét hệ SISO với tín hiệu vào là  $u(t)$ , tín hiệu ra là  $y(t)$ , mô tả bởi mô hình vào-ra có dạng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_m u \quad \text{với} \quad x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$$

- a) Hãy chỉ rằng hệ là tuyến tính dừng.  
b) Ký hiệu  $y(t)=g(t)$  là đáp ứng của hệ khi đầu vào là hàm xung dirac  $\delta(t)$  với trạng thái đầu bằng 0. Chứng minh rằng khi đó đáp ứng của hệ với trạng thái đầu bằng 0 và tín hiệu vào  $u(t)$  bất kỳ cho trước sẽ có dạng tích chập:

$$y(t)=u(t)*g(t)$$

## 2 ĐIỀU KHIỂN LIÊN TỤC TRONG MIỀN PHỨC

### 2.1 Các công cụ toán học

#### 2.1.1 Lý thuyết hàm biến phức

**Định nghĩa, khái niệm hàm liên tục, hàm giải tích**

Hàm số  $f(s)$ , biến đổi một số phức  $s = \sigma + j\omega$ , với  $\sigma, \omega$  là hai số thực,  $j = \sqrt{-1}$  thành một số phức khác:

$$f(s) = u(\sigma, \omega) + jw(\sigma, \omega), \quad (2.1)$$

trong đó các ký hiệu  $u(\sigma, \omega)$  chỉ phần thực và  $w(\sigma, \omega)$  chỉ phần ảo của nó, được gọi là *hàm biến phức* hay gọn hơn là *hàm phức*. Với các ký hiệu trên thì rõ ràng một hàm biến phức  $f(s)$  được biểu diễn thành hai hàm thực hai biến  $u(\sigma, \omega)$  và  $w(\sigma, \omega)$ .

Hình 2.1 minh họa hàm phức  $f(s)$  như một ánh xạ từ mặt phẳng phức  $s$  vào mặt phẳng phức  $z = f(s)$ . Một hàm phức  $f(s)$  được gọi là *liên tục* tại  $s_0$  có  $z_0 = f(s_0)$  nếu với mọi lân cận  $\mathcal{Z}$  đủ nhỏ cho trước của  $z_0$ , chẳng hạn như một mặt tròn có bán kính đủ nhỏ và tâm là  $z_0$ , luôn tồn tại một lân cận  $\mathcal{S}$  tương ứng của  $s_0$ , sao cho miền ảnh của nó là  $f(\mathcal{S})$  nằm trọn trong  $\mathcal{Z}$ , tức là (hình 2.1):

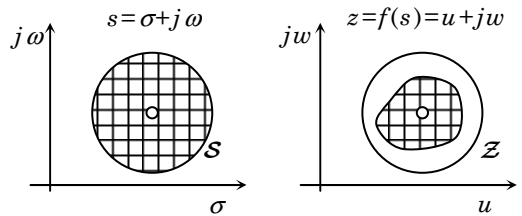
$$f(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{Z} \quad (2.2)$$

Khi đó người ta cũng viết:

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0) = z_0$$

Hàm phức  $f(s)$  liên tục tại mọi điểm  $s_0$  thuộc miền  $\mathcal{G}$  được gọi là *liên tục trên  $\mathcal{G}$* .

Xét một hàm  $f(s)$  liên tục trên  $\mathcal{G}$ . Nếu tại  $s \in \mathcal{G}$  tồn tại giới hạn:



**Hình 2.1:** Hàm biến phức là ánh xạ từ mặt phẳng phức vào mặt phẳng phức.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s} < \infty \quad (2.3)$$

và giới hạn này *không phụ thuộc vào kiểu của*  $\Delta s \rightarrow 0$ , thì hàm  $f(s)$  được gọi là *khả vi* tại  $s$ . Khi đó giá trị giới hạn (2.3) được gọi là đạo hàm của  $f(s)$  tại  $s$  và ký hiệu bằng  $\frac{df(s)}{ds}$ .

**Chú ý** rằng ở đây phải có điều kiện là giới hạn (2.3) không được phụ thuộc vào hình thức tiến về 0 của  $\Delta s$ .

### Ví dụ 2.1: Hàm biến phức không khả vi

Xét hàm phức:

$$f(s) = \operatorname{Re}(s) \quad \text{hàm lấy phần thực của biến phức } s.$$

Hàm này là *không khả vi*, vì nếu cho  $\Delta s \rightarrow 0$  dọc theo trục thực  $\sigma$  thì giới hạn (2.3) sẽ có giá trị bằng 1, nhưng nếu cho  $\Delta s \rightarrow 0$  dọc theo trục ảo  $j\omega$  thì nó lại có giá trị bằng 0.  $\square$

Nếu hàm  $f(s)$  khả vi tại mọi điểm  $s$  thuộc miền  $\mathcal{G}$  thì nó được gọi là *giải tích* (hay *holomorph*) trên  $\mathcal{G}$ . Theo *Cauchy* và *Riemann* thì cần và đủ để  $f(s)$  giải tích trên  $\mathcal{G}$  là:

$$\frac{\partial u(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} = \frac{\partial w(\sigma, \omega)}{\partial \omega} \quad \text{và} \quad \frac{\partial u(\sigma, \omega)}{\partial \omega} = -\frac{\partial w(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} \quad (2.4)$$

tức là phần thực  $u(\sigma, \omega)$  và phần ảo  $w(\sigma, \omega)$  của hàm  $f(s)$  phải thỏa mãn *phương trình vi phân Laplace*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} = 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \omega^2} = 0$$

Phép tính lấy đạo hàm của các hàm phức về cơ bản cũng được thực hiện giống như ở hàm thực. Ví dụ:

$$f(s) = s^n \quad \Rightarrow \quad \frac{df(s)}{ds} = ns^{n-1}$$

$$f(s) = \sin(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{df(s)}{ds} = \cos(s)$$

### Tích phân phức và nguyên lý cực đại modulus

Xét một hàm phức  $z=f(s)$  *liên tục* tại mọi điểm  $s=\sigma+j\omega$  thuộc miền  $\mathcal{S}$  với biên là  $C$  (hình 2.2). Gọi  $\overline{AB}$  là một đường cong nào đó nằm trong  $\mathcal{S}$ . Ta chia đường  $\overline{AB}$  thành  $n$  đoạn bằng các điểm phức  $s_1=A, s_2, \dots, s_n=B$  tùy ý và gọi:

$$\Delta_k = s_k - s_{k+1}$$

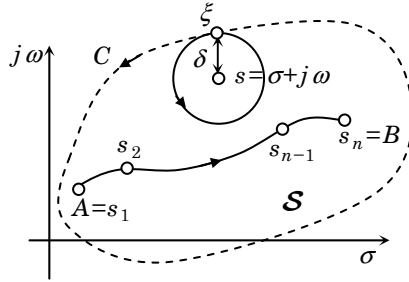
Nếu như tồn tại giá trị giới hạn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(s_k) \Delta_k$$

và giá trị giới hạn này không phụ thuộc vào cách chọn các điểm  $s_k$  trên đoạn  $\overline{AB}$ , thì nó sẽ được gọi là giá trị tích phân của hàm  $z=f(s)$  tính dọc theo đoạn  $\overline{AB}$  và ký hiệu bởi:

$$\int_A^B f(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(s_k) \Delta_k \quad (2.5)$$

**Hình 2.2:** Giải thích khái niệm tích phân phức.



Theo công thức định nghĩa (2.5) về tích phân như trên ta thấy giá trị tích phân còn phụ thuộc vào dạng của đường cong  $\overline{AB}$  trong miền  $\mathcal{S}$ .

Về phép tính tích phân phức ta có những kết luận cơ bản sau của Cauchy:

- 1) (Định lý tích phân của Cauchy) Nếu hàm  $z=f(s)$  không những liên tục mà còn *giải tích* trong  $\mathcal{S}$  thì với ký hiệu  $C$  chỉ đường biên của  $\mathcal{S}$ , ta luôn có:

$$\oint_C f(s)ds = 0 \quad (2.6)$$

Nói cách khác, giá trị tích phân của hàm  $z=f(s)$  tính dọc theo đoạn đường cong khép kín  $C$  là biên của miền  $\mathcal{S}$  mà  $f(s)$  giải tích trong đó, sẽ có giá trị bằng 0.

- 2) Định lý tích phân của Cauchy chỉ rằng giá trị tích phân:

$$\int_A^B f(s)ds$$

của hàm  $z=f(s)$  tính dọc theo đoạn  $\overline{AB}$  sẽ *không phụ thuộc* vào dạng đường cong  $\overline{AB}$  nếu như đoạn  $\overline{AB}$  này nằm trong một miền  $\mathcal{S}$  mà  $f(s)$  giải tích trong đó.

- 3) (Công thức tích phân Cauchy) Gọi  $\mathcal{S}$  là miền mà hàm  $z=f(s)$  giải tích trong nó và  $C$  là biên của miền  $\mathcal{S}$  có chiều ngược kim đồng hồ (miền  $\mathcal{S}$  luôn nằm phía bên trái nếu đi dọc trên  $C$  theo chiều này). Khi đó, tại một điểm  $s$  bất kỳ thuộc  $\mathcal{S}$  luôn có:

$$f(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - s} d\xi \quad (2.7)$$

$$\frac{d^k f(s)}{ds^k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - s)^{n+1}} d\xi \quad (2.8)$$

Phép tính tích phân của hàm phức được thực hiện giống như ở hàm thực. Ví dụ:

$$f(s) = \sin(s) \Rightarrow \int f(s)ds = -\cos(s) + k \quad (k \text{ là hằng số})$$

$$f(s) = e^s \Rightarrow \int f(s)ds = e^s + k \quad (k \text{ là hằng số})$$

Ngoài ra, nếu gọi  $f_{\max} = \sup_{\xi \in C} |f(\xi)|$  thì khi áp dụng tích phân Cauchy (2.7) và (2.8) với  $\xi$  chạy dọc biên của  $\mathcal{S}$  là  $C$  và điểm  $s$  nằm cố định bên trong, ta sẽ có với mọi  $n$  (hình 2.2):

$$|f(s)|^n = \left| \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(\xi)^n}{\xi - s} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(\xi)|^n}{|\xi - s|} d\xi \leq \frac{f_{\max}^n}{2\pi} \oint_C \frac{d\xi}{|\xi - s|} = \frac{f_{\max}^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\delta}$$

$$\Rightarrow |f(s)| \leq f_{\max} \left( \frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \Rightarrow |f(s)| \leq f_{\max} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} = f_{\max}$$

trong đó  $\delta$  là khoảng cách từ  $s$  tới đường biên  $C$  và sup là ký hiệu giá trị chặn trên nhỏ nhất (giống như giá trị lớn nhất, nếu nó tồn tại). Vậy:

**Định lý 2.1** (Nguyên lý cực đại modulus): Nếu hàm  $z=f(s)$  liên tục trong miền kín  $\mathcal{S}$ , giải tích bên trong miền đó thì  $|z| = |f(s)|$  sẽ có giá trị cực đại trên biên của  $\mathcal{S}$ .

### Hàm bảo giác (conform)

Một hàm phức  $f(s)$  giải tích trên  $\mathcal{G}$  và ở đó có  $\frac{df(s)}{ds} \neq 0$  được gọi là *hàm bảo giác* (conform). Ý nghĩa của tên gọi bảo giác được giải thích như sau:

Nếu gọi  $l_s^1$  và  $l_s^2$  là hai đường cong tạo với nhau một góc  $\varphi$  trong mặt phẳng phức  $s$ , cũng như  $l_z^1$  và  $l_z^2$  là hai đường ảnh của nó trong mặt phẳng phức  $z=f(s)$ , tức là:

$$l_z^1 = f(l_s^1), \quad l_z^2 = f(l_s^2)$$

thì khi đó hai đường ảnh  $l_z^1, l_z^2$  này cũng sẽ tạo với nhau một góc đúng bằng  $\varphi$  trong mặt phẳng phức  $z=f(s)$ —hình 2.3.

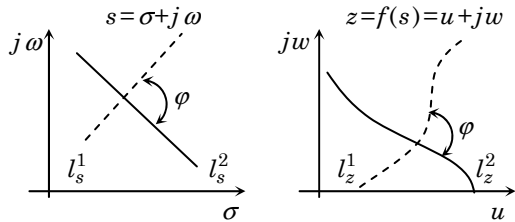
Xét một điểm  $s$  cụ thể và vector  $ds = \begin{pmatrix} d\sigma \\ d\omega \end{pmatrix}$  là tiếp tuyến tại đó với

một đường cong  $l_s$  nào đó. Khi đó, trong mặt phẳng phức  $z=f(s)$  của hàm bảo giác  $f(s)$ , vector  $ds$  sẽ được

biến đổi thành  $dz = \begin{pmatrix} du \\ dw \end{pmatrix}$  với:

$$du = \frac{\partial u}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial u}{\partial \omega} d\omega$$

$$\text{và} \quad dw = \frac{\partial w}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial w}{\partial \omega} d\omega$$



**Hình 2.3:** Giải thích khái niệm hàm bảo giác.

Nếu kết hợp thêm công thức (2.4) của Cauchy và Riemann thì:



$$dz = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \sigma} & \frac{\partial u}{\partial \omega} \\ \frac{\partial w}{\partial \sigma} & \frac{\partial w}{\partial \omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\sigma \\ d\omega \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\sigma \\ d\omega \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

trong đó:

$$\frac{df(s)}{ds} = Ze^{j\xi} \quad \text{hay} \quad Z = \left| \frac{df(s)}{ds} \right| \quad \text{và} \quad \xi = \arctan \frac{df(s)}{ds}$$

Công thức (2.9) cho thấy hàm bảo giác  $z=f(s)$  đã tạo ra  $dz = \begin{pmatrix} du \\ dw \end{pmatrix}$  từ  $ds = \begin{pmatrix} d\sigma \\ d\omega \end{pmatrix}$  bằng cách xoay vector  $ds$  đi một góc bằng  $\xi = \arctan \frac{df(s)}{ds}$  và kéo dài độ lớn của nó thêm ra một hệ số nhân là  $Z = \left| \frac{df(s)}{ds} \right|$ . Đặc biệt, nếu gọi  $l_z$  là ảnh của  $l_s$  trong mặt phẳng phức  $z=f(s)$ , tức là  $l_z=f(l_s)$  thì  $dz$  sẽ là vector tiếp tuyến của  $l_z$  giống như  $ds$  là vector tiếp tuyến của  $l_s$ .

#### Ví dụ 2.2: Một số hàm bảo giác đơn giản

- 1) *Hàm tuyến tính*  $z=f(s)=as+b$ , với  $a, b$  là hai hằng số phức. Đây là một ánh xạ tuyến tính, biến đổi một vector  $s$  bất kỳ sang mặt phẳng  $z$  bằng cách xoay nó đi một góc  $\varphi = \arctan(a)$ , kéo dài nó ra bằng một hệ số  $|a|$  và dịch chuyển song song một khoảng cách bằng  $b$ .

Như vậy, hàm này sẽ bảo toàn dạng một đường cong bất kỳ của mặt phẳng chứa  $s$  sang mặt phẳng chứa  $z$  (hình 2.4a).

- 2) *Hàm nghịch đảo*  $z = \frac{1}{s}$ . Hàm này biến đổi một vector  $s$  thành vector  $z$  bằng cách lấy đối xứng qua đường tròn đơn vị và sau đó lại lấy đối xứng tiếp qua trục thực (hình 2.4b). Như vậy, hàm này sẽ biến đổi toàn bộ phần bên trong đường tròn đơn vị của mặt phẳng  $s$  thành phần phía ngoài đường tròn đơn vị của mặt phẳng  $z$ .

- 3) *Hàm bình phương*  $z=s^2$ , tức là nếu có  $s=\sigma+j\omega$  thì cũng sẽ có:

$$z = f(s) = u+jw = \sigma^2 - \omega^2 + 2j\sigma\omega$$

nó biến đổi mọi đường hyperbol vuông góc với nhau trong mặt phẳng  $s=\sigma+j\omega$  là  $\sigma^2 - \omega^2 = \text{hằng số } k_1$  và  $2\sigma\omega = \text{hằng số } k_2$ , thành những đường thẳng song song với hai trục tọa độ trong mặt phẳng  $z=f(s)=u+jw$  là  $u=k_1$  và  $w=k_2$ , tức là chúng cũng vuông góc với nhau.

- 4) *Hàm lấy căn bậc hai*  $z = \sqrt{s}$ .

5) *Hàm phân thức*  $z = \frac{as+b}{cs+d}$  với  $a, b, c, d$  là những hằng số phức thỏa mãn  $ad-bc \neq 0$ .

Hàm này được tạo thành từ ba hàm bảo giác con là:

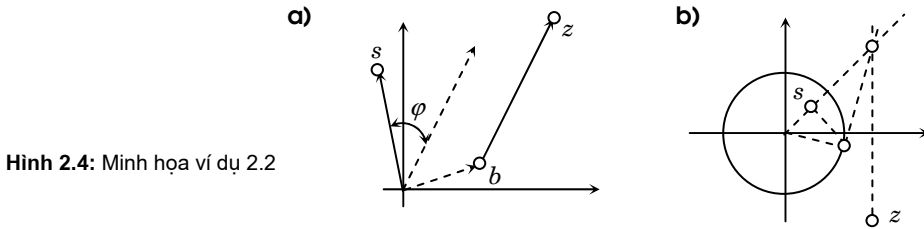
$$z_1 = cs+d, \quad z_2 = \frac{1}{z_1} \quad \text{và} \quad z = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} z_2$$

nên nó cũng là hàm bảo giác.

6) Tổng quát hóa tất cả những trường hợp trên, ta sẽ dễ dàng đi đến kết luận rằng hàm phức dạng thực-hữu tỷ, là hàm có cấu trúc dạng tỷ số của hai đa thức nguyên tố cùng nhau (hữu tỷ) với hệ số của các đa thức đó là những số thực:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n}, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ và } b_j \in \mathbb{R}$$

là một hàm bảo giác. □



Hình 2.4: Minh họa ví dụ 2.2

## 2.1.2 Chuỗi Fourier và phép biến đổi Fourier

### Chuỗi Fourier (cho tín hiệu tuần hoàn)

Bên cạnh việc khảo sát tín hiệu trực tiếp từ đặc tính của nó trong miền thời gian, chẳng hạn như tính liên tục, không liên tục, rời rạc hay tương tự ..., nhiều khi trong thực tế lại xuất hiện câu hỏi rằng tín hiệu đó có đặc tính tần số như thế nào và nó có dải tần số làm việc là bao nhiêu? Các câu hỏi đó dẫn ta đến bài toán phải phân tích tín hiệu liên tục  $x(t)$  thành dạng tổng tuyến tính của các hàm điều hòa có tần số làm việc xác định. Xét tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ  $T$ , tức là  $x(t+T)=x(t)$ ,  $\forall t$ . Chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn  $x(t)$  được hiểu là:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad \text{và} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.10)$$

với  $c_k = \bar{c}_k$  (số phức liên hợp) và  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$  (công thức Euler). Giá trị  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  được gọi là *tần số cơ bản* của tín hiệu. Khi đó lại xuất hiện tiếp các câu hỏi:

- Chuỗi vế phải có tồn tại không?
- Các hằng số của chuỗi được xác định từ  $x(t)$  như thế nào?

và toàn bộ câu trả lời là nội dung phương pháp phân tích chuỗi Fourier sau đây.

1) *Dirichlet*: Điều kiện đủ để chuỗi Fourier (2.10) ở vế phải hội tụ là:

Nếu khoảng  $(0, T)$  chia được thành hữu hạn các khoảng con sao cho hàm  $x(t)$  là liên tục, đơn điệu trong các khoảng con đó.

*Một cách nói khác*: Nếu hàm  $x(t)$  chỉ có hữu hạn các điểm không liên tục và cũng chỉ có hữu hạn các điểm cực trị.

**Chú ý**: Điều kiện Dirichlet chỉ là điều kiện đủ. Chẳng hạn vẫn có thể tồn tại hàm  $x(t)$  liên tục trong toàn khoảng  $(0, T)$  nhưng không khả vi tại mọi điểm trong đó, nhưng vẫn có chuỗi Fourier (2.10) hội tụ. Ví dụ hàm Weierstrass:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi t) \quad \text{với } 0 < a < 1, \quad b > 0, \quad ab > 1 + \frac{3\pi}{2} \quad \text{và } b \text{ là số nguyên.}$$

Hiện nay vẫn chưa có điều kiện cần và đủ.

2) Hàm  $x(t)$  phải liên tục từng đoạn và tại điểm không liên tục  $t_0$  phải có:

$$x(t_0) = \frac{1}{2} [x(t_0 - 0) + x(t_0 + 0)]$$

Đây là điều kiện để dấu bằng trong (2.10) cũng đúng tại  $t_0$ .

3) Giả sử rằng tồn tại chuỗi (2.10), khi đó phải có:

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - j b_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{và} \quad c_0 = a_0 \quad (2.11)$$

Ta có thể khẳng định tính đúng đắn của (2.11) qua phép biến đổi đơn giản sau:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k e^{-jk\omega t} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ((c_k + \bar{c}_k) \cos(k\omega t) + j(c_k - \bar{c}_k) \sin(k\omega t)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = c_0, \quad a_k = c_k + \bar{c}_k \quad \text{và} \quad b_k = j(c_k - \bar{c}_k) \quad \Rightarrow \quad c_0 = a_0 \quad \text{và} \quad c_k = \frac{1}{2} (a_k - j b_k)$$

$$4) \quad \begin{cases} c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots \\ a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.12)$$

Thật vậy, từ (2.10) ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega t} \Leftrightarrow \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt = \int_0^T \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega t} e^{-jk\omega t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_0^T e^{j\frac{2\pi}{T}(m-k)t} dt \\ &= T \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_0^1 e^{j2\pi(m-k)t'} dt' = T c_k, \quad (t = Tt') \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Các công thức còn lại trong (2.12) được suy ra từ (2.11).

Như vậy, với (2.10) và (2.12) ta luôn phân tích được một tín hiệu tuần hoàn  $x(t)$  thành tổng tuyến tính các tín hiệu điều hòa cơ bản. Điều đó có ý nghĩa lớn trong ứng dụng, chẳng hạn như:

- Thành phần:

$$a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) \text{ với } A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \text{ và } \varphi_1 = \arctan \frac{b_1}{a_1}$$

được gọi là đơn hài của  $x(t)$ . Các thành phần

$$a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = A_k \cos(k\omega t - \varphi_k) \text{ với } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}, k > 1$$

gọi là đa hài của  $x(t)$ . Phân tích đơn hài và đa hài được sử dụng nhiều trong các ngành thuộc lĩnh vực điều khiển truyền tải điện và điện tử công suất, cũng như phân tích các dao động điều hòa thành phần của tín hiệu tuần hoàn trong các quá trình vật lý âm học, nhiệt học, điện, cơ ...

- Tìm nghiệm tuần hoàn của một số phương trình vi phân đạo hàm riêng mô tả quá trình truyền sóng, truyền nhiệt, như:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ phương trình Laplace với nghiệm } u(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \lambda > 0 \text{ phương trình truyền sóng với nghiệm } u(x, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, c > 0 \text{ phương trình truyền nhiệt với nghiệm } u(x, t)$$

- Lọc nhiễu với tần số xác định có trong tín hiệu tuần hoàn  $x(t)$ .
- Phân tích sự giao thoa các đáp ứng xung trong hệ tuyến tính.
- Xấp xỉ một tín hiệu  $x(t)$  tuần hoàn, liên tục từng đoạn bằng tổng hữu hạn các hàm điều hòa:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

**Chú ý** rằng khi đó, xung quanh điểm không liên tục  $t_0$  của  $x(t)$ , tổng hữu hạn ở vế phải vẫn là một hàm liên tục với các thành phần dao động có biên độ lớn. Tổng các số hạng  $n$  càng lớn, biên độ dao động này càng lớn. Hiện tượng đó được gọi là hiện tượng Gibbs (hình 2.5).



**Hình 2.5:** Hiện tượng Gibbs

- Thiết kế tín hiệu tuần hoàn  $x(t)$  với dải tần số làm việc cho trước (bài toán ngược của việc phân tích chuỗi Fourier).

Ngoài ra, ta còn có thể dễ dàng kiểm chứng được các tính chất sau của phép phân tích chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn  $x(t)$  theo (2.10) và (2.12):

1) Nếu  $x(t)$  là hàm lẻ thì  $a_k=0, \forall k$  và nếu  $x(t)$  là hàm chẵn thì  $b_k=0, k=1,2,\dots$

2) Nếu có  $x(t+\frac{T}{2})=-x(t), \forall t$  thì  $a_0=a_2=a_4=\dots=b_2=b_4=\dots=0$

3) Bình phương sai lệch:

$$Q = \int_0^T (x(t) - y(t))^2 dt$$

giữa hàm  $x(t)$  cho trước và hàm  $y(t)$  xác định bởi:

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

sẽ là nhỏ nhất, nếu  $y(t)$  có các hệ số  $a_k, b_k$  được tính từ  $x(t)$  theo (2.12).

4) Chuỗi hàm theo  $t$  ở vế phải trong (2.10) sẽ hội tụ đều (uniformly) tới  $x(t)$  nếu có:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty$$

tức là khi đó giới hạn  $x(t)$  của chuỗi (2.10) cũng là hàm liên tục, khả vi, khả tích giống như các phần tử của chuỗi.

Cuối cùng, chuỗi Fourier còn áp dụng được cho cả tín hiệu tuần hoàn không liên tục, có mô hình dạng dãy giá trị  $\{x_k\}$ ,  $k=\dots,-1,0,1,\dots$ , trong đó  $x_k=x(kT_a)$  và  $T_a$  là chu kỳ trích mẫu từ tín hiệu liên tục  $x(t)$ . Vì là tín hiệu tuần hoàn nên phải có  $x_{k+N}=x_k, \forall k$ , trong đó  $N$  là chu kỳ tuần hoàn của dãy. Khi đó dãy trên, hay hàm mở rộng  $\hat{x}(t)=x(t)s(t)$  cũng có dạng chuỗi Fourier (2.10), nhưng với các hệ số  $c_k, a_k, b_k$  được tính theo:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i, \quad a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos(k \frac{2\pi i}{N}), \quad b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin(k \frac{2\pi i}{N}), \quad k=1,2,\dots$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j \frac{2\pi k i}{N}}$$

Các công thức này được suy ra từ (2.12) bằng cách thay dấu tích phân  $\int$  bằng dấu tổng  $\Sigma$ ,  $t$  bằng  $iT_a = \frac{iT}{N}$  và  $dt$  bởi  $T_a = \frac{T}{N}$ . Chúng thường được gọi là *chuỗi Fourier rời rạc* (DFS – Discret Fourier Series). Nói cách khác, bản chất của DFS chính là chuỗi Fourier (2.10) được áp dụng cho tín hiệu không liên tục.

**Chú ý:** Tên gọi *chuỗi Fourier rời rạc* ở đây không liên quan tới tính chất miền giá trị của ánh xạ như ta đã phân loại ở chương trước. Nói cách khác, tên gọi rời rạc ở đây không hàm ý rằng miền giá trị của các hệ số của chuỗi là tập điểm không liên thông. Tên gọi đó đơn giản chỉ muốn nói rằng chuỗi Fourier (2.10) được áp dụng riêng cho tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$ ,  $k=\dots,-1,0,1,\dots$ . Bởi vậy, để chặt chẽ về mặt ngôn từ, ta nên gọi nó là *chuỗi Fourier cho tín hiệu không liên tục* thay vì *chuỗi Fourier rời rạc*.

## Phép biến đổi Fourier

Chuỗi Fourier (2.10) có ý nghĩa ứng dụng lớn trong thực tế, song lại chỉ áp dụng được cho lớp các tín hiệu tuần hoàn. Nhằm mở rộng khả năng ứng dụng của chuỗi Fourier cho cả các tín hiệu không tuần hoàn  $x(t)$ , và được gợi ý từ công thức (2.12) tính hệ số  $c_k$ , người ta đã đưa ra khái niệm *phép biến đổi Fourier*, định nghĩa như sau: Cho tín hiệu  $x(t)$ , không phân biệt là tuần hoàn hay không tuần hoàn, cũng như là liên tục hay không liên tục. Ảnh Fourier của nó, ký hiệu bởi  $X(j\omega)$ , được hiểu là:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{với ánh xạ ngược} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.13)$$

Để tiện cho việc trình bày, sau đây ta sẽ sử dụng ký hiệu:

$$\mathcal{F} : x(t) \mapsto X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{với} \quad \mathcal{F}^{-1} : X(j\omega) \mapsto x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

để chỉ phép biến đổi Fourier, tức là:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) \quad \text{cũng như} \quad \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) \quad (2.14)$$

Tương tự như ở chuỗi Fourier, điều đầu tiên mà ta cần phải bàn ở đây là khả năng hội tụ của tích phân vô hạn trong (2.13).

- *Điều kiện đủ để tồn tại ảnh Fourier*: Hàm  $x(t)$  phải có chuẩn bậc 1, tức là tích phân vô hạn thứ nhất trong (2.13) phải hội tụ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty, \quad \text{hay} \quad x(t) \in L_1$$

vì khi đó cũng sẽ có:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-j\omega t}| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- Nếu  $x(t)$  không liên tục tại  $t_0$  thì để ảnh ngược ở công thức thứ hai trong (2.13) cũng đúng tại  $t_0$ , hàm  $x(t)$  phải có giá trị tại  $t_0$  là:

$$x(t_0) = \frac{1}{2} [x(t_0 - 0) + x(t_0 + 0)]$$

Tiếp theo, ta sẽ khảo sát một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier (2.13) để tiện cho việc sử dụng sau này.

- 1) Nếu  $x(t)$  là hàm chẵn thì  $X(j\omega)$  là hàm thuần thực (phần ảo bằng 0) và nếu  $x(t)$  là hàm lẻ thì  $X(j\omega)$  là hàm thuần ảo (phần thực bằng 0).

Khẳng định này được suy ra một cách đơn giản nhờ công thức Euler:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

và điều hiển nhiên rằng tích phân có cận đối xứng của hàm lẻ sẽ bằng 0.

- 2) Phép biến đổi Fourier là tuyến tính:  $\mathcal{F}\{\sum_{i=1}^n a_i x_i(t)\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{F}\{x_i(t)\}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$
- 3) Phép biến đổi Fourier là nội xạ (*injective*):  $x(t) \neq y(t) \Rightarrow \mathcal{F}\{x(t)\} \neq \mathcal{F}\{y(t)\}$
- 4) Nếu có  $x(t) = \overline{x(t)}$  thì cũng có  $X(-j\omega) = \overline{X(j\omega)}$ , trong đó  $\bar{a}$  là ký hiệu chỉ số phức liên hợp của  $a$ .
- 5) Nếu  $x(t)$  có ảnh Fourier  $X(j\omega)$  thì:

$$6) \quad y(t) = x(t - \tau) \text{ sẽ có ảnh } Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega\tau}$$

$$a) \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ sẽ có ảnh } Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

- 7) *Parseval*: Giữa năng lượng tín hiệu  $x(t)$  và ảnh Fourier  $X(j\omega)$  của nó có quan hệ:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{x(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(j\omega)} e^{-j\omega t} d\omega \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(j\omega)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(j\omega)} X(j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (2.15)$$

- 8) *Riemann-Lebesgue*: Ảnh Fourier  $X(j\omega)$  là hàm liên tục theo  $\omega$  và  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |X(j\omega)| = 0$ .

*Chứng minh*: Với  $\omega \neq 0$  thì:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = -e^{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega(t + \frac{\pi}{\omega})} dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \frac{\pi}{\omega}) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2|X(j\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \frac{\pi}{\omega}) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) - x(t - \frac{\pi}{\omega}) \right| e^{-j\omega t} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) - x(t - \frac{\pi}{\omega}) \right| dt \rightarrow 0 \text{ khi } |\omega| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Tính liên tục của  $X(j\omega)$  được xác nhận bằng cách với mọi  $\varepsilon > 0$  cho trước ta chọn hai hằng số dương  $a, b$  sao cho:

$$\int_{|t| > a} |x(t)| dt < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{và} \quad 2ab \int_{|t| < a} |x(t)| dt < \varepsilon$$

Hiển nhiên hai hằng số dương này luôn tồn tại do có  $x(t) \in L_1$ . Khi đó với mọi hằng số  $|\delta| < b$  thì:

$$\begin{aligned}
|X(j(\omega + \delta)) - X(j\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{-j(\omega+\delta)t} - x(t)e^{-j\omega t}) dt \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-j\omega t}(e^{-j\delta t} - 1)| dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot \left| \sin \frac{\delta t}{2} \right| dt \\
&= 2 \int_{|t|>a} |x(t)| \cdot \left| \sin \frac{\delta t}{2} \right| dt + 2 \int_{|t|<a} |x(t)| \cdot \left| \sin \frac{\delta t}{2} \right| dt \\
&\leq 2 \int_{|t|>a} |x(t)| dt + 2 \int_{|t|<a} |x(t)| \cdot \left| \frac{\delta t}{2} \right| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + ab \int_{|t|<a} |x(t)| dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

- 9) Ảnh của tích chập bằng tích của hai ảnh. Phép tính tích chập của hai tín hiệu  $x(t)$ ,  $y(t)$  định nghĩa bởi:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

và do có

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) * y(t)| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)y(t-\tau)| d\tau dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |y(t-\tau)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty
\end{aligned}$$

nên nó đóng trong không gian chuẩn  $L_1$ . Điều này chỉ rằng nếu  $x(t)$ ,  $y(t)$  đã có ảnh Fourier  $X(j\omega)$ ,  $Y(j\omega)$  thì tích chập  $z(t)$  của nó cũng có ảnh Fourier  $Z(j\omega)$  và

$$\begin{aligned}
Z(j\omega) &= \mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t')e^{-j\omega(t'+\tau)} d\tau dt' = \\
&= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(t')e^{-j\omega t'} dt' \right) = \mathcal{F}\{x(t)\} \mathcal{F}\{y(t)\} = X(j\omega)Y(j\omega)
\end{aligned}$$

- 10) Ảnh của một tích bằng tích chập của hai ảnh:

$$\begin{aligned}
Z(j\omega) &= \mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega')e^{j\omega't} d\omega' \right) y(t)e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega')y(t)e^{-j(\omega-\omega')t} dt d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega') \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j(\omega-\omega')t} dt \right) d\omega' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega')Y(j(\omega-\omega')) d\omega' = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{x(t)\} * \mathcal{F}\{y(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)
\end{aligned}$$

**Chú ý:** Do phép nhân  $x(t) \cdot y(t)$  không đóng trong  $L_1$ , nên mặc dù  $x(t)$ ,  $y(t)$  có ảnh Fourier  $X(j\omega)$ ,  $Y(j\omega)$  song có thể tích của nó lại không có ảnh Fourier. Ví dụ:



$$x(t) = \begin{cases} t^{-a} & \text{ khi } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{ khi } t \notin (0,1) \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} t^{-b} & \text{ khi } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{ khi } t \notin (0,1) \end{cases} \quad \text{với } 0 < a < 1, 0 < b < 1, a+b > 1$$

đều thuộc  $L_1$ , nhưng tích của chúng lại có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)y(t)| dt = \int_0^1 |t^{-(a+b)}| dt = \frac{t^{-(a+b)+1}}{-(a+b)+1} \Big|_0^1 = -\infty \Rightarrow x(t)y(t) \notin L_1$$

Cuối cùng, để kết thúc phần này, ta sẽ nêu lên một số ứng dụng điển hình của phép biến đổi Fourier (2.13) và những khẳng định được rút ra thêm từ đó.

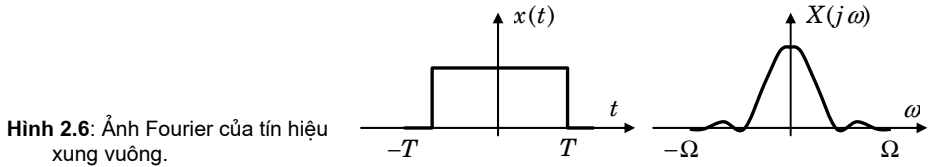
1) *Ảnh Fourier của tín hiệu xung vuông*: Xét tín hiệu xung vuông

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{ khi } |t| \leq T \\ 0 & \text{ khi } t \notin [-T, T] \end{cases}$$

Sử dụng công thức (2.13) ta có (hình 2.6):

$$X(j\omega) = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) = \frac{2 \sin \omega T}{\omega}$$

Để thấy ảnh này thỏa mãn tính chất 8) của Riemann–Lebesgue và khi  $|\omega| > \Omega$ , với  $\Omega$  là một giá trị đủ lớn, thì  $|X(j\omega)| \approx 0$ .



- 2) Với ảnh  $X(j\omega)$  của tín hiệu  $x(t)$  ta sẽ khảo sát đặc tính tần số của tín hiệu (không tuần hoàn). Từ đó biết được dải tần số làm việc của tín hiệu. Chẳng hạn nếu có  $|X(j\omega)| = 0$  khi  $\omega \notin \Omega$  thì tín hiệu  $x(t)$  sẽ không làm việc ở các tần số  $\omega \notin \Omega$ .
- 3) Thiết kế tín hiệu  $x(t)$  có dải tần số làm việc mong muốn (bài toán ngược của phép biến đổi Fourier).
- 4) Tìm nghiệm các phương trình vi phân đạo hàm riêng, như:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ phương trình Laplace với nghiệm } u(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \lambda > 0 \text{ phương trình truyền sóng với nghiệm } u(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, c > 0 \text{ phương trình truyền nhiệt với nghiệm } u(x,t)$$

- 5) Lọc nhiễu. Ví dụ nếu tín hiệu  $x(t)$  có dải tần số làm việc là  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$  và bị lẫn nhiễu  $n(t)$  làm việc ở các tần số  $\omega \notin [\omega_1, \omega_2]$  theo phép cộng  $\hat{x}(t) = x(t) + n(t)$  thì ta sẽ lọc được nhiễu  $n(t)$  ra khỏi  $\hat{x}(t)$  để có lại tín hiệu hữu dụng  $x(t)$  theo quy trình:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} \cdot [1(\omega - \omega_1) - 1(\omega - \omega_2)] \right\}$$

- 6) Áp dụng (2.13) để tính ảnh Fourier của hàm mở rộng delta  $\delta(t)$  ta có:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \cos(\omega t) d\omega \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(at)}{\pi t} \end{aligned}$$

- 7) *Papoulis*: Ảnh Fourier  $S(j\omega)$  của hàm trích mẫu  $s(t)$  trong miền thời gian cũng là hàm trích mẫu trong miền tần số (hình 2.7):

$$S(j\omega) = \frac{2\pi}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T_a}) \quad (2.16)$$

trong đó  $T_a$  là chu kỳ trích mẫu trong miền thời gian. Thật vậy, vì  $s(t)$  là hàm chẵn nên  $S(j\omega)$  là hàm thuần thực  $S(j\omega) = S(\omega)$ :

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT_a} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n e^{-j\omega kT_a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{jn\omega T_a} - e^{-j(n+1)\omega T_a}}{1 - e^{-j\omega T_a}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Do khi  $z \in \mathbb{R}$  và  $z = \frac{a + jb}{c + jd}$  thì  $z = \frac{a}{c}$  ta còn có từ tính chất 6) của hàm  $\delta(t)$ :

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n\omega T_a) - \cos((n+1)\omega T_a)}{1 - \cos(\omega T_a)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\omega T_a\right)}{\sin\left(\frac{\omega T_a}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi(\omega T_a)}{\sin\left(\frac{\omega T_a}{2}\right)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\omega T_a\right)}{\pi(\omega T_a)} = \frac{\pi(\omega T_a)}{\sin\left(\frac{\omega T_a}{2}\right)} \cdot \delta(\omega T_a) \end{aligned} \quad (2.17)$$

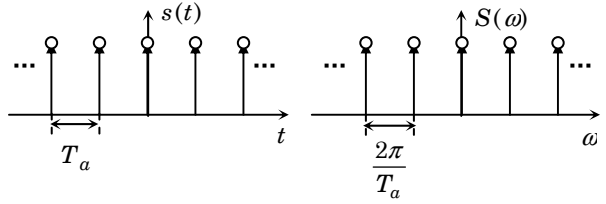
Hơn nữa, vì  $S(\omega)$  là hàm tuần hoàn theo  $\omega$  với chu kỳ  $\frac{2\pi}{T_a}$ , nên để chứng minh

(2.16) ta chỉ cần chỉ rằng trong chu kỳ thuộc lân cận  $\omega=0$  sẽ có  $S(\omega) = \frac{2\pi}{T_a} \delta(\omega)$ . Từ

(2.17) cũng như tính chất  $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$  ta được:

$$S(j\omega) = \delta(\omega T_a) \cdot \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\pi(\omega T_a)}{\sin\left(\frac{\omega T_a}{2}\right)} = 2\pi\delta(\omega T_a) = \frac{2\pi}{T_a}\delta(\omega) \quad \text{và đó là đ.p.c.m}$$

**Hình 2.7:** Ảnh Fourier của hàm trịch mẫu cũng là một hàm trịch mẫu.



8) *Chuỗi Fourier là trường hợp riêng của phép biến đổi Fourier:*

Nếu hàm  $x(t)$  là tuần hoàn với chu kỳ  $T$ , tức là  $x(t+T)=x(t)$ ,  $\forall t$ , thì ảnh Fourier  $X(j\omega)$  của nó sẽ là dãy các giá trị  $2\pi\{..., c_{-1}, c_0, c_1, ...\}$  xác định tại  $\omega = n\frac{2\pi}{T}$ ,  $n=..., -1, 0, 1, ...$ , trong đó  $c_n$  được tính theo công thức (2.12). Thật vậy, từ:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} x(t)e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} x(t-kT)e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T x(t)e^{-j\omega(t+kT)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} \cdot \int_0^T x(t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

ta sẽ có với công thức (2.16), (2.17) của hàm trịch mẫu  $s(t)$  chu kỳ  $T$ :

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) \cdot \int_0^T x(t)e^{-j\omega t} dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) \frac{1}{T} \int_0^T x(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \right) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}), \quad \text{đ.p.c.m.} \end{aligned}$$

Trong phép biến đổi trên ta đã sử dụng khái niệm hàm mở rộng  $\delta(t)$ . Ngoài ra, với tính chất này ta còn chỉ rằng giả thiết  $x(t) \in L_1$  chỉ là điều kiện đủ để có ảnh Fourier  $X(j\omega)$ . Chẳng hạn ở đây tín hiệu tuần hoàn  $x(t)$  không thỏa mãn điều kiện trên, song vẫn có ảnh Fourier.

9) *Ảnh Fourier của tín hiệu không liên tục:*

Xét tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$ ,  $k=..., -1, 0, 1, ...$ . Nếu xem tín hiệu này là dãy các giá trị trịch mẫu  $x_k = x(kT_a)$  của tín hiệu liên tục  $x(t)$ , trong đó  $T_a$  là chu kỳ trịch mẫu, thì từ (2.13) ta sẽ có ảnh  $X_a(j\omega)$  của  $\{x_k\}$ ,  $k=..., -1, 0, 1, ...$  thu được bằng cách thay dấu tích phân  $\int$  bằng dấu tổng  $\Sigma$ ,  $t$  bằng  $kT_a$  và  $dt$  bởi  $T_a$  trong (2.13) như sau:

$$X_a(j\omega) = T_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k T_a} \quad (2.18)$$

Công thức (2.18) được gọi là *phép biến đổi Fourier rời rạc* (DFT – Discret Fourier Transformation). Nói cách khác DFT là phép biến đổi Fourier (2.13) cho tín hiệu

không liên tục. **Chú ý** rằng tên gọi này không liên quan tới miền giá trị của phép biến đổi đó, tức là ảnh  $X_a(j\omega)$  của phép biến đổi Fourier rời rạc vẫn có thể có miền giá trị là các tập liên thông trên trường số phức. Để chặt chẽ, tên gọi đúng của *phép biến đổi Fourier rời rạc* phải là *phép biến đổi Fourier cho tín hiệu không liên tục*.

#### 10) Hiện tượng trùng phổ:

Trong thực tế ta thường gặp phải bài toán tìm ảnh Fourier  $X(j\omega)$  của tín hiệu liên tục  $x(t)$ , nhưng lại không có được hàm  $x(t)$  mô tả nó mà thay vào đó lại chỉ có dãy các giá trị trích mẫu  $\{x_k\}$ ,  $k=\dots, -1, 0, 1, \dots$  đo được của nó, với  $x_k = x(kT_a)$  và  $T_a$  là chu kỳ trích mẫu, tức là ta chỉ có được ảnh Fourier  $\hat{X}(j\omega)$  của hàm mở rộng  $\hat{x}(t) = x(t)s(t)$ . Bài toán đặt ra ở đây là làm thế nào để từ  $\hat{X}(j\omega)$  suy ra được  $X(j\omega)$ . Nói cách khác ta phải xác định quan hệ giữa  $X(j\omega)$  và  $\hat{X}(j\omega)$ .

Xuất phát từ  $\hat{x}(t) = x(t)s(t)$  và tính chất ảnh của một tích bằng tích chập của hai ảnh, ta sẽ có:

$$\begin{aligned}\hat{X}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \omega')) S(j\omega') d\omega' \\ &= \frac{1}{T_a} \int_{-\infty}^{\infty} \left( X(j(\omega - \omega')) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega' - n \frac{2\pi}{T_a}) \right) d\omega' \\ &= \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \omega')) \delta(\omega' - n \frac{2\pi}{T_a}) d\omega' \right) = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - n \frac{2\pi}{T_a}))\end{aligned}$$

Ngoài ra ta còn có:

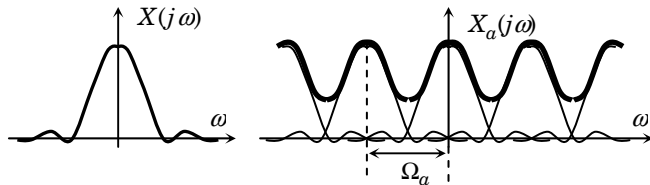
$$\begin{aligned}T_a \hat{X}(j\omega) &= T_a \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) e^{-j\omega t} dt = T_a \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s(t) e^{-j\omega t} dt = T_a \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) e^{-j\omega t} dt \\ &= T_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \delta(t - kT_a) dt = T_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k T_a}\end{aligned}$$

Vậy khi kết hợp thêm với (2.18) là ảnh Fourier của  $\{x_k\}$ ,  $k=\dots, -1, 0, 1, \dots$ , ta đi đến:

$$X_a(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - n\Omega_a)) \quad \text{với} \quad \Omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$$

Với công thức trùng phổ trên ta có câu trả lời cho bài toán như sau: Nếu có  $X(j\omega) = 0$  khi  $\omega \notin [-\Omega, \Omega]$  thì với  $T_a$  thỏa mãn  $T_a < \frac{\pi}{\Omega}$ , ta sẽ có  $X(j\omega) = X_a(j\omega)$ ,  $\omega \in [-\Omega, \Omega]$ . Nó được biết đến với tên gọi là *định lý Shannon-Katelnikov*.

**Hình 2.8:** Minh họa định lý Shannon-Katelnikov.



- 11) *Khôi phục tín hiệu*: Cho dãy vô hạn các giá trị đo được  $\{x_k\}$  của  $x(t)$ , trong đó  $x_k = x(kT_a)$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  và  $T_a$  là chu kỳ trích mẫu. Hãy xây dựng lại  $x(t)$  từ  $\{x_k\}$  sao cho  $x(t)$  đi qua được tất cả các cặp điểm  $(kT_a, x_k)$ . Đây chính là bài toán nội suy (interpolation). Bài toán nội suy này có vô số nghiệm và một trong các nghiệm đó được suy ra từ (2.18) như sau:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ T_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k T_a} \right\}$$

- 12) *Sai số rò rỉ*: Nếu thay vì dãy vô hạn  $\{x_k\}$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  các giá trị đo được (trích mẫu) của tín hiệu  $x(t)$  ta lại chỉ có dãy hữu hạn  $\{x_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  với  $N$  giá trị đo, thì công thức (2.18) tính ảnh Fourier  $X_a(j\omega)$  cho  $x(t)$  trở thành:

$$X_a(j\omega) \approx \hat{X}_a(j\omega) = T_a \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\omega k T_a}$$

và sai số  $|\hat{X}_a(j\omega) - X_a(j\omega)|$  được gọi là *sai số rò rỉ* (leakage). Trong khi sai số trung bình có thể được giảm thiểu thông qua việc chọn chu kỳ trích mẫu  $T_a$  thì nói chung sai số rò rỉ luôn tồn tại trong  $X_a(j\omega)$ , nếu  $x(t)$  không tuần hoàn.

- 13) Giữa tín hiệu  $x(t)$  và ảnh Fourier  $X(j\omega)$  của nó luôn có quan hệ:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} [x(t-0) + x(t+0)], \quad \forall t$$

Đây cũng chính là điều kiện thứ hai để có chuỗi và phép biến đổi Fourier. Để chứng minh khẳng định này, ta xét tín hiệu  $x_a(t)$  xấp xỉ của  $x(t)$  lấy từ ảnh ngược:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-a}^a e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right) x(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ja(t-\tau)} - e^{-ja(t-\tau)}}{j(t-\tau)} x(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} D(t-\tau) x(\tau) d\tau = D(t) * x(t) \quad \text{với} \quad D(t) = \frac{e^{ja(t)} - e^{-ja(t)}}{j2\pi(t-\tau)} = \frac{\sin at}{\pi t} \end{aligned}$$

Do đó, nếu ký hiệu:

$$e(t) = x_a(t) - \frac{1}{2} [x(t-0) + x(t+0)]$$

và để ý rằng tích chập là giao hoán, cũng như:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau = \frac{\pi}{2}$$

ta sẽ có:

$$\begin{aligned}
e(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau - \frac{1}{2} [x(t-0) + x(t+0)] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [x(t-\tau) - x(t-0)] \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 [x(t-\tau) - x(t+0)] \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [x(t-\tau) - x(t-0)] \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [x(t+\tau) - x(t+0)] \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau
\end{aligned}$$

Vì  $x(t) \notin L_1$  và tích phân  $\int_0^{\infty} \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau$  hội tụ nên với kết luận của *Riemann–Lebesgue*, hai tích phân về phải cùng phải tiến về 0 khi  $a \rightarrow \infty$  và đó cũng là đ.p.c.m.

### 2.1.3 Phép biến đổi Laplace

#### Phép biến đổi Laplace cho tín hiệu liên tục

Phép biến đổi Fourier (2.13) là một công cụ hữu hiệu giúp cho việc khảo sát đặc tính tần số của một tín hiệu  $x(t)$ , nhưng lại có nhược điểm là bị giới hạn trong một lớp các tín hiệu khá nhỏ  $x(t) \in L_1$ . Để mở rộng phép biến đổi Fourier cho cả các tín hiệu causal  $x(t)$ , không cần phải có chuẩn bậc 1, ta sẽ không tính trực tiếp ảnh Fourier của tín hiệu causal  $x(t)$  mà thay vào đó là của  $z(t) = x(t)e^{-\delta t}$ , với  $\delta$  là một số dương đủ lớn sao cho lại có được:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)| dt = \int_0^{\infty} |x(t)e^{-\delta t}| dt < \infty, \text{ tức là } z(t) = x(t)e^{-\delta t} \in L_1$$

Hằng số dương  $\delta$  này luôn tồn tại, vì không có hàm nào tiến về 0 nhanh như  $e^{-\delta t}$ . Khi đã có  $z(t) \in L_1$  và nếu hàm  $x(t)$  thỏa mãn thêm là tại điểm không liên tục  $t_0$  có:

$$x(t_0) = \frac{1}{2} [x(t_0-0) + x(t_0+0)] \Leftrightarrow z(t_0) = \frac{1}{2} [z(t_0-0) + z(t_0+0)]$$

ta sẽ lại có được ảnh Fourier  $Z(j\omega)$  của  $z(t)$ :

$$\begin{aligned}
Z(j\omega) &= \int_0^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-\delta t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-(\delta + j\omega)t} dt \\
&= \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(s), \text{ trong đó } s = \delta + j\omega
\end{aligned}$$

Hàm  $X(s)$  trên đây được gọi là ảnh Laplace của  $x(t)$ . Nói cách khác, ảnh Laplace  $X(s)$  của  $x(t)$  chính là ảnh Fourier của  $x(t)e^{-\delta t}$ . Ngoài ra:

$$x(t) = e^{\delta t} z(t) = e^{\delta t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega) e^{(\delta + j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Vậy ta có phép biến đổi Laplace, ký hiệu bởi  $\mathcal{L}\{\cdot\}$ , như sau:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad \text{với} \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (2.19)$$

trong đó  $s = \delta + j\omega$  và  $\delta$  là số thực dương đủ lớn để tồn tại tích phân vô hạn thứ nhất trong (2.19), nó được gọi là *bán kính hội tụ* của ảnh Laplace  $X(s)$ .

Vì phép biến đổi Laplace (2.19) thực chất là phép biến đổi Fourier cho tín hiệu causal không cần phải có chuẩn bậc 1 nên đương nhiên nó có đầy đủ mọi tính chất của phép biến đổi Fourier như:

- 1) Tuyến tính:  $\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}\{x_i(t)\}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$
- 2) Nội xạ:  $x(t) \neq y(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} \neq \mathcal{L}\{y(t)\}$
- 3) Ảnh của tích chập bằng tích của hai ảnh:  $\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \cdot \mathcal{L}\{y(t)\}$
- 4) Ảnh  $X(s)$  là hàm liên tục theo  $\text{Im}(s)$ , khi  $\text{Re}(s) > \delta$  (ký hiệu  $\text{Re}(s)$  là chỉ phần thực và  $\text{Im}(s)$  là chỉ phần ảo của số phức  $s$ ).
- 5) Gọi  $X(s)$  là ảnh Laplace của  $x(t)$ . Khi đó:
  - a)  $y(t) = x(t - \tau)$  có ảnh là  $Y(s) = X(s)e^{-s\tau}$
  - b)  $y(t) = e^{-at}x(t)$  có ảnh là  $Y(s) = X(s + a)$
  - c)  $y(t) = x(at)$  có ảnh là  $\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$  và  $y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$  có ảnh là  $Y(s) = aX(as)$
  - d)  $y(t) = \frac{dx}{dt}$  có ảnh là  $Y(s) = sX(s) - x(+0)$
  - e)  $y(t) = \int x(t)dt$  có ảnh là  $Y(s) = \frac{X(s)}{s}$
  - f)  $y(t) = \frac{x(t)}{t}$  có ảnh là  $Y(s) = \int_s^{\infty} X(s')ds'$
- 6) Nếu  $X(s)$  có bán kính hội tụ  $\delta = 0$  thì  $X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega)$  là ảnh Fourier của  $x(t)$ .
- 7) Nếu tồn tại giới hạn  $x(+0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t)$  thì  $x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ .
- 8) Nếu tồn tại giới hạn  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  thì  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ .

**Ví dụ 2.3:** Xác định ảnh Laplace của một số tín hiệu điển hình

- 1) Xung dirac có ảnh được suy ra từ định nghĩa hàm mở rộng của nó là:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s0} = 1$$

- 2) Tín hiệu bước nhảy đơn vị  $x(t) = k \cdot 1(t)$  có ảnh Laplace là:

$$X(s) = k \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \frac{k}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{k}{s}$$

3) Ảnh của  $x(t) = k e^{-at} \cdot 1(t)$  được suy ra từ kết quả trên và tính chất 5b) như sau:

$$X(s) = \frac{k}{s+a}$$

4) Ảnh của tín hiệu điều hòa  $x_1(t) = \sin(\omega t)$ ,  $x_2(t) = \cos(\omega t)$  được suy ra từ ảnh của  $e^{j\omega t}$  và  $e^{-j\omega t}$  có từ kết quả câu 3) ứng với  $a = \pm j\omega$  cũng như tính chất tuyến tính như sau:

$$\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{s+j\omega}, \quad \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = \frac{1}{s-j\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(s) = \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ X_2(s) = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{cases}$$

5) Tín hiệu tăng đều  $r(t) = t \cdot 1(t)$  có ảnh Laplace là:

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{1}{s^2}$$

6) Ảnh của tín hiệu tăng đều  $x(t) = t^n \cdot 1(t)$  được suy ra từ kết quả câu 5) và tính chất 5e) cũng như quan hệ  $t^n 1(t) = n \int t^{n-1} 1(t) dt$  như sau:

$$X(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

7) Từ kết quả câu 6) và tính chất 5b) ta có ngay:

$$\mathcal{L}\{t^n e^{-at} 1(t)\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

8) Từ kết quả câu 2), 3) và tính chất tuyến tính ta có ảnh của  $x(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})1(t)$  là:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{k 1(t)\} - \mathcal{L}\{k e^{-\frac{t}{T}} 1(t)\} = \frac{k}{s} - \frac{k}{s + \frac{1}{T}} = \frac{k}{s(1 + Ts)}$$

9) Sử dụng kết quả câu 8) để kiểm tra lại tính chất giới hạn, ta có:

$$x(+0) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{(1 + Ts)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = k \quad \text{và} \quad \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{(1 + Ts)} = k \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

### Phép biến đổi Laplace cho tín hiệu không liên tục (biến đổi Z)

Xét tín hiệu causal không liên tục  $\{x_k\}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ . Nếu xem nó như là dãy các giá trị trích mẫu của tín hiệu liên tục  $x(t)$  với chu kỳ trích mẫu  $T_a$  thì nó còn có dạng hàm mở rộng:



$$\{x_k\} = \hat{x}(t) = x(t)s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta(t - kT_a)$$

Thay hàm mở rộng trên vào công thức định nghĩa phép biến đổi Laplace (2.19) ta sẽ có cùng với ký hiệu  $z = e^{sT_a}$  cũng như điều hiển nhiên rằng  $x_k=0$ , khi  $k<0$ , ảnh Laplace của dãy vô hạn  $\{x_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$  như sau:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} \hat{x}(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta(t - kT_a) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-ksT_a} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \stackrel{\text{d.n.}}{=} X(z) \end{aligned}$$

Hàm  $X(z)$  định nghĩa trong công thức trên được gọi là ảnh Z của dãy  $\{x_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$  và phép biến đổi từ dãy  $\{x_k\}$  thành  $X(z)$  gọi là *phép biến đổi Z*, ký hiệu bởi  $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ , tức là:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\} \quad \text{và} \quad \{x_k\} = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

### 2.1.4 Phép biến đổi Laplace ngược

Việc biến đổi Laplace ngược được hiểu là xác định tín hiệu  $x(t)$  ngược từ ảnh Laplace  $X(s)$  của nó. Tất nhiên công việc này có thể được thực hiện trực tiếp với công thức định nghĩa (2.19). Song để tiện lợi hơn khi sử dụng, sau đây ta sẽ làm quen với hai phương pháp đơn giản thường dùng. Đó là:

- Phương pháp biến đổi ngược  $X(s)$  có dạng hàm hữu tỷ và
- Phương pháp *residue* cho  $X(s)$  khả vi ngoài hữu hạn các điểm cực.

#### Biến đổi ngược hàm hữu tỷ

Giả sử tín hiệu  $x(t)$  có ảnh Laplace  $X(s)$  dạng:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad \text{với} \quad m \leq n \quad (2.20)$$

Để tìm  $x(t)$  ta dựa vào tính đơn ánh, tính tuyến tính cũng như kết quả của các ví dụ cho trong mục trước và đi đến các bước thực hiện như sau:

- 1) Phân tích  $X(s)$  thành tổng các hàm phân thức tối giản:

$$X(s) = A + \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^{r_k} \frac{A_{ki}}{(s - a_k)^i} + \sum_{k=1}^q \frac{B_k(s - \sigma_k) + C_k \omega_k}{(s - \sigma_k)^2 + \omega_k^2}$$

trong đó  $A$ ,  $A_{ki}$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  là các hằng số,  $a_k$  là điểm cực thực bội  $r_k$  và  $\sigma_k + j\omega_k$  là điểm cực phức của  $X(s)$ , nói cách khác chúng là điểm mà tại đó có  $X(s) = \pm\infty$ .

- 2) Xác định hàm gốc cho từng phần tử trong tổng trên theo (ví dụ 2.3):

$$\text{a) } \mathcal{L}^{-1}\{A\} = A\delta(t)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_{ki}}{(s-a_k)^i}\right\} &= A_{ki} \frac{t^{i-1}e^{a_k t}}{(i-1)!}1(t) \\ \text{c) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B_k(s-\sigma_k)}{(s-\sigma_k)^2+\omega_k^2}\right\} &= B_k e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t)1(t) \\ \text{d) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_k\omega_k}{(s-\sigma_k)^2+\omega_k^2}\right\} &= C_k e^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t)1(t) \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.4:** Biến đổi ngược hàm hữu tỷ

1) Ảnh  $X(s) = \frac{1}{s^2(1+s)}$  có tín hiệu gốc là:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(1+s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = (e^{-t} - 1 + t)1(t) \end{aligned}$$

2) Ảnh  $X(s) = \frac{k(1+T_1s)}{s(1+T_2s)}$  có tín hiệu gốc là:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k(1+T_1s)}{s(1+T_2s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{T_2B}{T_2s+1}\right\} \text{ với } A=k \text{ và } B = \frac{k(T_1-T_2)}{T_2} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T_2B}{T_2s+1}\right\} = (A + Be^{-\frac{t}{T_2}})1(t) = k(1 - \frac{T_2-T_1}{T_2}e^{-\frac{t}{T_2}})1(t) \end{aligned}$$

3) Ảnh  $X(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ ,  $T_1 \neq T_2$ , có tín hiệu gốc là:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\frac{1}{T_1}} + \frac{B}{s+\frac{1}{T_2}}\right\} \text{ với } A = \frac{k}{T_1-T_2} \text{ và } B = -A \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\frac{1}{T_1}}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\frac{1}{T_2}}\right\} = A(e^{-\frac{t}{T_1}} - Be^{-\frac{t}{T_2}})1(t) = \frac{k}{T_1-T_2}(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}})1(t) \end{aligned}$$

4) Cho ảnh  $X(s) = \frac{k}{s^2(1+Ts)^n}$  của tín hiệu  $x(t)$ . Phân tích  $X(s)$  thành tổng các phân thức tối giản ta được:

$$X(s) = k \left( -\frac{nT}{s} + \frac{1}{s^2} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s+\frac{1}{T})^i} \right) \text{ với } A_i = \frac{(n+1-i)}{T^{i-2}}$$

Vậy (hình 2.9a):

$$x(t) = k \left( -nT + t + e^{-t/T} \sum_{i=1}^n \frac{A_i t^{i-1}}{(i-1)!} \right) 1(t)$$

- 5) Một tín hiệu  $x(t)$  có ảnh Laplace  $X(s) = \frac{k}{s(1+Ts)^n}$ . Phân tích  $X(s)$  thành tổng các phân thức tối giản ta được:

$$X(s) = \frac{k}{s} - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s + \frac{1}{T})^i} \quad \text{với} \quad A_i = \frac{k}{T^{i-1}}$$

Suy ra (hình 2.9b):

$$x(t) = \left( k - e^{-\frac{t}{T}} \sum_{i=1}^n \frac{A_i t^{i-1}}{(i-1)!} \right) 1(t)$$

- 6) Xét hàm phức:

$$X(s) = \frac{k}{1 + 2DTs + (Ts)^2}, \quad 0 < D < 1$$

Biến đổi  $X(s)$  thành:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{k}{(Ts + D)^2 + 1 - D^2} \\ &= \frac{k}{T\sqrt{1-D^2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{1-D^2}}{T}}{(s + \frac{D}{T})^2 + \frac{1-D^2}{T^2}} \end{aligned}$$

ta có được ngay:

$$x(t) = \frac{k}{T\sqrt{1-D^2}} e^{-\frac{D}{T}t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{T}t\right) 1(t)$$

- 7) Xét tín hiệu causal  $h(t)$  có ảnh Laplace là:

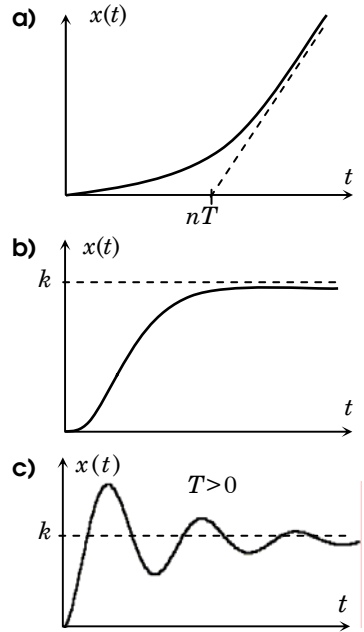
$$H(s) = \frac{k}{s(1 + 2DTs + T^2s^2)} \quad \text{với} \quad 0 < D < 1$$

Phân tích hàm  $H(s)$  thành:

$$H(s) = k \left( \frac{1}{s} - \frac{T^2s + 2TD}{1 + 2TDs + (Ts)^2} \right) = \frac{k}{s} - \frac{k(T^2s + 2TD)}{(Ts + D)^2 + 1 - D^2} = \frac{k}{s} - \frac{k}{T} \cdot \frac{T(s + \frac{D}{T}) + D}{(s + \frac{D}{T})^2 + \frac{1-D^2}{T^2}}$$

ta có (hình 2.9c):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = k - ke^{-\frac{D}{T}t} \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{T}t\right) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{T}t\right) \right], \quad t \geq 0 \quad \square$$



Hình 2.9: Minh họa ví dụ 2.4.

Xét riêng trường hợp, khi mà ảnh Laplace  $X(s)$  của tín hiệu  $x(t)$  có dạng thực hữu tỷ như công thức (2.20) mô tả. Giả sử rằng đa thức mẫu số  $A(s)$  và đa thức tử số  $B(s)$  là nguyên tố cùng nhau (chúng không có chung nghiệm). Khi đó điểm cực của  $X(s)$  sẽ chính là nghiệm của  $A(s)=0$ . Ký hiệu các điểm cực đó bằng  $s_1, s_2, \dots, s_n$  và giả thiết rằng chúng là những nghiệm đơn của  $A(s)=0$ . Do  $X(s)$  phân tích được thành tổng các phân thức tối giản:

$$X(s)=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\dots+\frac{A_n}{s-s_n}$$

nên sau khi nhân cả hai vế với  $(s-s_k)$  và cho  $s$  tiến tới  $s_k$  ta sẽ có công thức xác định nhanh những hệ số  $A_1, A_2, \dots, A_n$  như sau (công thức Heaviside):

$$A_k=\lim_{s\rightarrow s_k}(s-s_k)X(s)$$

### Phương pháp residue

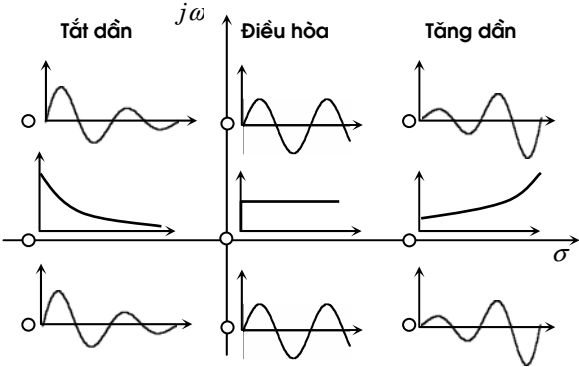
Trong phần biến đổi ngược  $X(s)$  có dạng hàm hữu tỷ (2.20) vừa trình bày, ta nhận thấy ngoài một số hữu hạn các điểm cực là nghiệm của  $A(s)=0$ , còn lại ở những điểm khác  $X(s)$  đều xác định và có đạo hàm vô hạn lần. Nói cách khác  $X(s)$  là một hàm giải tích ngoài hữu hạn các điểm cực đó. Dạng tín hiệu  $x(t)$  nhận được lại hoàn toàn được quyết định bởi vị trí của các điểm cực này trong mặt phẳng phức. Hình 2.10 biểu diễn minh họa trực quan cho dạng tín hiệu  $x(t)$  có ảnh Laplace:

$$X(s)=\frac{1}{s-s_k}$$

ứng với những vị trí khác nhau của điểm cực  $s_k=\delta_k+j\omega_k$ .

Mở rộng điều nhận xét trên ta có phương pháp *residue* để xác định ngược tín hiệu  $x(t)$  từ ảnh Laplace  $X(s)$  của nó, nếu như  $X(s)$  là hàm giải tích, trừ một vài các điểm cực rời nhau và hữu hạn, đồng thời  $\lim_{s\rightarrow\pm\infty}X(s)=\infty$ . Các

hàm có tính chất như vậy được gọi chung là hàm *phân hình* (*meromorph*).

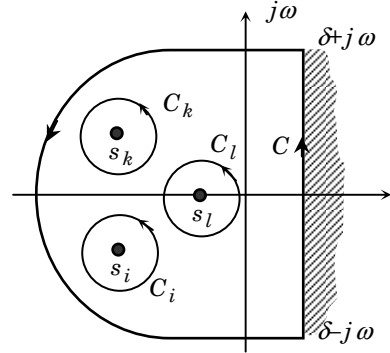


**Hình 2.10:** Dạng tín hiệu phụ thuộc vào vị trí điểm cực của ảnh Laplace của nó trong mặt phẳng phức.

Bản chất của phương pháp residue được lấy từ công thức tích phân Cauchy (2.7). Trước tiên ta đi từ công thức biến đổi Laplace ngược :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} X(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(s)e^{st} ds \quad (2.21)$$

trong đó  $C$  là một đường cong khép kín chứa đường thẳng  $\delta+j\omega$  với  $\omega$  chạy từ  $-\infty$  đến  $\infty$ , và  $\sigma$  là bán kính hội tụ của tích phân (hình 2.11). Chiều của  $C$  là chiều được chọn để phù hợp với chiều của  $\omega$  từ  $-\infty$  đến  $\infty$ .



**Hình 2.11:** Mô tả phương pháp residue.

Ký hiệu miền được bao bởi  $C$  theo chiều dương là  $\mathcal{D}$ , tức là miền sẽ luôn nằm phía trái khi ta đi dọc theo  $C$  và gọi  $s_1, s_2, \dots, s_m$  là các điểm cực của  $X(s)$ . Do  $\sigma$  là bán kính hội tụ nên tất cả  $m$  điểm cực này phải nằm trong  $\mathcal{D}$ . Mặt khác vì tích phân theo đường cong khép kín của một hàm có tính giải tích trong miền được bao bởi đường cong lấy tích phân đó, luôn có giá trị bằng 0, nên theo tính chất (2.6) về tích phân phức của Cauchy, công thức (2.21) sẽ được thay bằng:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^m \oint_{C_k} X(s)e^{st} ds, \quad (2.22)$$

trong đó  $C_k, k=1, 2, \dots, m$  là những đường cong khép kín bao quanh riêng một mình điểm cực  $s_k$  theo chiều dương ( $s_k$  luôn nằm bên trái khi ta đi dọc theo  $C_k$  theo chiều đó). Như vậy, đường cong  $C$  trong (2.21) nay đã được thay bởi họ các đường cong  $C_k$  với  $k=1, 2, \dots, m$  trong (2.22).

Ký hiệu tiếp:

$$\text{Res}_{s_k} X(s)e^{st} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_k} X(s)e^{st} ds$$

là giá trị *residue* của  $X(s)e^{st}$  tại  $s_k, k=1, 2, \dots, m$  thì (2.22) trở thành:

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \text{Res}_{s_k} X(s) e^{st} \quad (2.23)$$

và đó chính là công thức thực hiện biến đổi ngược  $X(s)$  theo phương pháp residue.

#### Ví dụ 2.5: Phương pháp residue

Cho  $X(s) = \frac{A_k}{s - s_k}$ . Hàm *phân hình (meromorph)* này có một điểm cực là  $s_k$  nên:

$$\text{Res}_{s_k} \frac{A_k}{s - s_k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{A_k}{s - s_k} ds$$

trong đó  $C$  là đường tròn bán kính  $\rho > 0$  bao quanh  $s_k$  theo chiều dương (hình 2.12). Như vậy dọc theo  $C$  biến  $s$  sẽ có phương trình:

$$|s - s_k| = \rho e^{j\varphi} \quad \text{với} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Thay phương trình của biến  $s$  vào công thức trên được:

$$\text{Res}_{s_k} \frac{A_k}{s - s_k} = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{A_k}{\rho e^{j\varphi}} d(\rho e^{j\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_k d\varphi = A_k$$

□

**Chú ý:** Một trong những đặc điểm của hàm *phân hình (meromorph)* là nó phân tích được thành chuỗi vô hạn (chuỗi Taylor, chuỗi Lorenz, ...). Gọi  $a_i$  là các hệ số khi phân tích hàm  $X(s)e^{st}$  thành chuỗi Lorenz trong lân cận điểm  $s_k$ , tức là:

$$X(s)e^{st} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i (s - s_k)^i$$

thì

$$\text{Res}_{s_k} X(s)e^{st} = a_{-1}$$

Theo công thức này, một hàm  $X(s)e^{st}$ , nếu có điểm cực  $s_k$  bội  $l_k$  thì giá trị residue của nó tại điểm cực đó sẽ là:

$$\text{Res}_{s_k} X(s)e^{st} = \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{l_k-1} [X(s)e^{st} (s - s_k)^{l_k}]}{ds^{l_k-1}} \quad (2.24)$$

và do đó việc tìm ngược tín hiệu gốc  $x(t)$  từ ảnh Laplace  $X(s)$  của nó theo phương pháp residue sẽ gồm hai bước:

- Xác định tất cả các điểm cực  $s_k$  của  $X(s)e^{st}$  cũng như bậc  $l_k$  của chúng.
- Tìm các giá trị residue của hàm  $X(s)e^{st}$  tại những điểm cực đó theo (2.24).
- Tính  $x(t)$  theo (2.23) từ các giá trị residue tìm được.

**Ví dụ 2.6:** Phương pháp residue

Hàm *phân hình*  $X(s) = \frac{1}{(s+a)^n}$  có điểm cực  $s=-a$  bội  $n$  nên hàm gốc  $x(t)$  của nó là

$$x(t) = \operatorname{Res}_a X(s)e^{st} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow -a} \frac{d^{n-1} e^{st}}{ds^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad \text{với } t \geq 0 \quad \square$$

Việc áp dụng phương pháp residue để tìm gốc  $x(t)$  của  $X(s)$  chỉ là một ứng dụng nhỏ của nó. Phương pháp này ngoài ra còn có ý nghĩa sử dụng lớn trong các bài toán xác định giá trị tích phân thường gặp của các công việc tổng hợp bộ điều khiển như tìm tham số tối ưu cho bộ điều khiển. Ta sẽ xét một ví dụ minh họa sau đây.

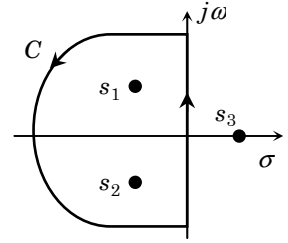
**Ví dụ 2.7:** Tính giá trị tích phân phức bằng phương pháp residue

Để tính tích phân:

$$Q = \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{5s^2 + 6s + 8}{\underbrace{(s^2 + 2s + 2)(s-1)}_{G(s)}} ds$$

ta thấy hàm *phân hình* (meromorph)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{5s^2 + 6s + 8}{(s^2 + 2s + 2)(s-1)} = \\ &= \frac{1}{s - (-1+j)} + \frac{1}{s - (-1-j)} + \frac{3}{s-1} \end{aligned}$$



**Hình 2.13:** Minh họa cho ví dụ 2.7

có 3 điểm cực là  $s_1 = -1+j$ ,  $s_2 = -1-j$  và  $s_3 = 1$ , trong đó chỉ có hai điểm cực nằm bên trái đường lấy tích phân là trục ảo. Bởi vậy nếu thay đường lấy tích phân đó bằng một đường cong  $C$  khép kín chứa trục ảo thì cũng chỉ có  $s_1, s_2$  thuộc miền  $\mathcal{D}$  được bao bởi  $C$  theo chiều dương (hình 2.13). Suy ra (theo kết quả ví dụ 2.5):

$$Q = 2\pi j \left( \operatorname{Res}_{s_1} G(s) + \operatorname{Res}_{s_2} G(s) \right) = 2\pi j(1+1) = 4\pi j \quad \square$$

### 2.1.5 Một ứng dụng của phép biến đổi Laplace: Giải phương trình vi phân

Cho phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng:

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m} \quad (2.25)$$

có các hệ số  $a_0, a_1, \dots, a_n$  và  $b_0, b_1, \dots, b_m$  là những số thực. Bài toán đặt ra là tìm nghiệm  $y(t)$  khi biết trước  $u(t)$  cũng như các sơ kiện  $y(+0), \frac{dy(+0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(+0)}{dt^{n-1}}$ .

Trước hết ta giả sử  $u(t)$  và  $y(t)$  là hai tín hiệu causal. Vậy thì khi lấy ảnh Laplace cả hai vế của phương trình đã cho:

$$\mathcal{L}\{a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dt^n}\} = \mathcal{L}\{b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}\}$$

thì áp dụng tính chất tuyến tính của toán tử Laplace sẽ được:

$$\sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}\{\frac{d^k y}{dt^k}\} = \sum_{k=0}^n b_k \mathcal{L}\{\frac{d^k u}{dt^k}\} \quad (2.26)$$

Tiếp tục, nếu gọi  $Y(s)$  là ảnh của  $y(t)$  thì từ công thức ảnh của đạo hàm:

$$\mathcal{L}\{\frac{dy}{dt}\} = sY(s) - y(+0)$$

ta có

$$\mathcal{L}\{\frac{d^2 y}{dt^2}\} = s \mathcal{L}\{\frac{dy}{dt}\} - \frac{dy(+0)}{dt} = s^2 Y(s) - sy(+0) - \frac{dy(+0)}{dt}$$

⋮

$$\mathcal{L}\{\frac{d^n y}{dt^n}\} = s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^k y(+0)}{dt^k}$$

Cũng tương tự, nếu gọi  $U(s)$  là ảnh Laplace của tín hiệu causal  $u(t)$  thì:

$$\mathcal{L}\{\frac{d^k u}{dt^k}\} = s^k U(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i} \frac{d^i u(+0)}{dt^i}, \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Thay tất cả các công thức tính đạo hàm đó vào (2.26) ta sẽ được:

$$Y(s)[a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n] - A = U(s)[b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m] - B$$

trong đó  $A$  là hàm xác định từ  $a_k$  và  $\frac{d^{k-1} y(+0)}{dt^{k-1}}$ ,  $k=1, 2, \dots, n$  theo:

$$A = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i} \frac{d^i y(+0)}{dt^i}$$

và  $B$  cũng là hàm được xác định từ  $b_k$  và  $\frac{d^{k-1} u(+0)}{dt^{k-1}}$ ,  $k=1, 2, \dots, m$  theo:

$$B = \sum_{k=1}^m b_k \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i} \frac{d^i u(+0)}{dt^i}$$

Như vậy ảnh Laplace của nghiệm  $y(t)$  sẽ là:

$$Y(s) = \frac{(b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m) \cdot U(s) + (A - B)}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad (2.27)$$

Chuyển ngược  $Y(s)$  cho trong (2.27) sang miền thời gian ta sẽ được nghiệm  $y(t)$  của phương trình (2.25), vì toán tử Laplace là đơn ánh.



**Ví dụ 2.7:** Giải phương trình vi phân bằng phép biến đổi Laplace

Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0, \text{ với sơ kiện } y(+0) = a \text{ và } \frac{dy(+0)}{dt} = b$$

Chuyển cả hai về phương trình sang miền phức nhờ toán tử Laplace được:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} + 3\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[s^2 Y(s) - sy(+0) - \frac{dy(+0)}{dt}\right] + 3[sY(s) - y(+0)] + 2Y(s) = 0 \\ \Leftrightarrow & (s^2 + 3s + 2)Y(s) = as + (3a + b) \\ \Leftrightarrow & Y(s) = \frac{as + (3a + b)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + (3a + b)}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{2a + b}{s + 1} - \frac{a + b}{s + 2} \end{aligned}$$

Vậy  $y(t) = (2a + b)e^{-t} - (a + b)e^{-2t}$  với  $t \geq 0$  □

**Ví dụ 2.8:** Giải phương trình vi phân bằng phép biến đổi Laplace

Giải phương trình vi phân:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 5y = 3 \text{ với sơ kiện } y(+0) = \frac{dy(+0)}{dt} = 0$$

Chuyển cả hai về phương trình sang miền phức nhờ toán tử Laplace được:

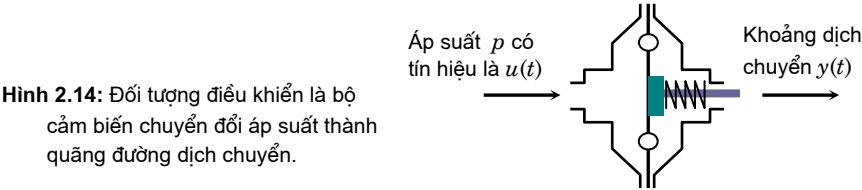
$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = \frac{3}{s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3}{5s} - \frac{3.2}{10[(s + 1)^2 + 2^2]} - \frac{3(s + 1)}{5[(s + 1)^2 + 2^2]}$$

Vậy:  $y(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}e^{-t} \sin(2t) - \frac{3}{5}e^{-t} \cos(2t)$  với  $t \geq 0$  □

## 2.2 Xây dựng mô hình toán học

Mô hình toán học là một hình thức biểu diễn lại những hiểu biết của ta về quan hệ giữa tín hiệu vào  $u(t)$  và ra  $y(t)$  của hệ thống nhằm phục vụ mục đích mô phỏng, phân tích và tổng hợp bộ điều khiển cho hệ thống sau này. Không thể điều khiển một hệ thống mà không hiểu biết gì về hệ thống. Ta hãy xét một bài toán điều khiển có sử dụng bộ chuyển đổi áp suất  $p$  mô tả bởi tín hiệu đầu vào là  $u(t)$  thành quãng đường dịch chuyển biểu diễn dưới dạng tín hiệu ra  $y(t)$  như hình 2.14 mô tả. Ta không thể tạo ra được một quãng đường dịch chuyển chẳng hạn như  $1mm$  trong khoảng thời gian, ví dụ  $0,5s$ , như mong muốn thông qua việc đặt một giá trị áp suất thích hợp  $u(t)$  tại đầu vào nếu như không biết rõ sự phụ thuộc của tín hiệu ra  $y(t)$  với tín hiệu vào  $u(t)$  của bộ chuyển đổi. Cũng như vậy ta không thể điều khiển một động cơ chuyển đổi từ vận tốc quay này sang

một vận tốc quay khác nếu như không biết được tốc độ động cơ phụ thuộc như thế nào vào tín hiệu đầu vào là điện áp hay dòng, hoặc không thể đầu tư vào một thị trường (tín hiệu vào) để đạt được chỉ tiêu có lãi (tín hiệu ra) như mong muốn nếu không hiểu rõ về thị trường đó (hệ thống điều khiển) ....

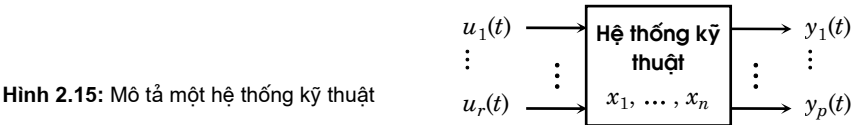


**Hình 2.14:** Đối tượng điều khiển là bộ cảm biến chuyển đổi áp suất thành quãng đường dịch chuyển.

Thông qua vô vàn các ví dụ nêu lên sự cần thiết phải có mô hình toán học mô tả hệ thống điều khiển để thực hiện bài toán điều khiển như vậy ta thấy rõ được chất lượng điều khiển phụ thuộc rất nhiều vào mô hình toán học mô tả hệ thống. Mô hình càng chính xác, hiệu suất công việc điều khiển càng cao.

Mặc dù đã có mô hình toán học, song cũng phải thừa nhận là không thể nói rằng trong mọi trường hợp mô hình đó mô tả hệ thống đúng 100%. Tất cả các bài toán điều khiển đều phải làm việc với những mô hình hệ thống có chứa một sai lệch nhất định hoặc ít ra là có những tham số thay đổi nhiều. Bởi vậy ở các bài toán điều khiển hiện nay người ta thường phải thực hiện thêm những nhiệm vụ theo dõi và chỉnh định lại mô hình cho phù hợp với hệ thống thực hoặc phải thiết kế bộ điều khiển đảm bảo được chất lượng đề ra cho dù mô hình có sai lệch.

Bài toán điều khiển mà ở đó có thêm khả năng nhận biết được sự thay đổi của hệ thống để tự chỉnh định lại mô hình cũng như luật điều khiển được gọi là *điều khiển thích nghi*. Ngược lại những bài toán điều khiển luôn đảm bảo chất lượng đề ra cho dù có sai lệch mô hình hay có sự thay đổi nào đó không biết trước trong hệ thống mà không cần phải giám sát, phải theo dõi hệ thống, được gọi là *điều khiển bền vững*.



**Hình 2.15:** Mô tả một hệ thống kỹ thuật

**Định nghĩa 2.1:** Xem một hệ thống kỹ thuật cần xây dựng mô hình như một khối kín với các tín hiệu đầu vào là  $u_1(t), \dots, u_r(t)$  và ra là  $y_1(t), \dots, y_p(t)$ , tức là hệ thống có  $r$  tín hiệu đầu vào và  $p$  tín hiệu đầu ra (hình 2.15). Mô hình mô tả hệ thống mà ta quan tâm là *mô hình toán học* biểu diễn sự phụ thuộc của  $p$  tín hiệu ra  $y_1(t), \dots, y_p(t)$  theo  $r$  tín hiệu vào  $u_1(t), \dots, u_r(t)$  sao cho nếu biết trước các tín hiệu

đầu vào  $u_1(t), \dots, u_r(t)$  cũng như những "sơ kiện" ban đầu của hệ thống  $x_1, \dots, x_n$  thì với mô hình đó ta có thể tính ra được các tín hiệu đầu ra  $y_1(t), \dots, y_p(t)$ .

Nếu ghép chung tất cả  $r$  tín hiệu đầu vào  $u_1(t), \dots, u_r(t)$  thành một vector tín

hiệu vào  $\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{pmatrix}$  và các tín hiệu ra  $y_1(t), \dots, y_p(t)$  thành  $\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$  thì bản

chất của mô hình toán học sẽ chính là ánh xạ:

$$T: \underline{u}(t) \mapsto \underline{y}(t) \quad \text{hay} \quad \underline{y}(t) = T\{\underline{u}(t)\}$$

Nhiều khi thay vì tên gọi tín hiệu vào, tín hiệu ra của một hệ thống người ta còn sử dụng khái niệm *kích thích* và *đáp ứng* với nghĩa như sau: Nếu kích thích hệ thống bằng (vector) tín hiệu  $\underline{u}(t)$  thì hệ thống sẽ có đáp ứng là  $\underline{y}(t)$ .

Hệ thống được phân loại theo từng nhóm như đã trình bày ở chương 1 (mục 1.2.1). Cụ thể, một hệ được gọi là *tuyến tính* nếu mô hình toán học mô tả hệ thống là ánh xạ tuyến tính, tức là khi phân tích vector tín hiệu đầu vào  $\underline{u}(t)$  thành tổng tuyến tính của các vector tín hiệu thành phần:

$$\underline{u}(t) = a_1 \underline{u}_1(t) + a_2 \underline{u}_2(t) + \dots + a_m \underline{u}_m(t)$$

và giả thiết là đã biết đáp ứng (tín hiệu ra) của hệ thống cho từng thành phần đó:

$$\underline{y}_1(t) = T\{\underline{u}_1(t)\}, \underline{y}_2(t) = T\{\underline{u}_2(t)\}, \dots, \underline{y}_m(t) = T\{\underline{u}_m(t)\},$$

thì đáp ứng  $\underline{y}(t)$  của hệ cho kích thích  $\underline{u}(t)$  sẽ cũng chính là tổ hợp tuyến tính từ các đáp ứng thành phần trên:

$$\underline{y}(t) = a_1 \underline{y}_1(t) + a_2 \underline{y}_2(t) + \dots + a_m \underline{y}_m(t)$$

Một cách ngắn gọn, bản chất tuyến tính nêu trên của mô hình  $T$  được viết thành:

$$T\left\{\sum_{i=1}^m a_i u_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^m a_i T\{u_i(t)\}$$

và còn có tên gọi khác là *nguyên lý xếp chồng*. Nhờ có bản chất tuyến tính này (thỏa mãn nguyên lý xếp chồng) mà việc khảo sát, phân tích hệ tuyến tính được trở nên đơn giản hơn nhiều. Để có được những tính chất về một hệ thống tuyến tính trên cơ sở phân tích mô hình toán học của nó thì người ta chỉ cần phân tích, khảo sát đáp ứng của hệ thống với một kích thích điển hình là đủ, chẳng hạn như đáp ứng của hệ với kích thích đầu vào là hàm xung dirac  $\delta(t)$  hoặc đáp ứng với đầu vào là tín hiệu Heaviside  $1(t)$ .

Tùy vào dạng tín hiệu của hệ thống là liên tục hay xung mà mô hình  $T$  của nó được gọi là mô hình *liên tục* hay mô hình *không liên tục*. Cũng như vậy nếu các tín hiệu được biểu diễn trong miền thời gian hoặc miền ảnh Fourier, Laplace thì mô hình sẽ có dạng là phương trình vi phân hoặc hàm truyền hay hàm đặc tính tần ....

Khi hệ thống chỉ có một tín hiệu vào và một tín hiệu ra, ta sẽ gọi mô hình  $T$  là SISO (chữ viết tắt của Single Input–Single Output). Ngược lại nếu hệ thống có nhiều tín hiệu vào và nhiều tín hiệu ra thì mô hình  $T$  được gọi là MIMO (Multi Input–Multi Output). Cải biên đi chút ít ta sẽ có thêm các mô hình MISO cho hệ có nhiều tín hiệu vào, một tín hiệu ra hoặc SIMO cho hệ có một tín hiệu vào nhưng nhiều tín hiệu ra.

Các loại mô hình toán học của hệ SISO được trình bày ở đây sẽ là:

- 1) Phương trình vi phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào  $u(t)$  và ra  $y(t)$ .
- 2) Hàm truyền  $G(s)$  hay là tỷ số giữa ảnh Laplace của tín hiệu ra và ảnh Laplace của tín hiệu vào. Nó cũng chính là ảnh Laplace của đáp ứng khi hệ được kích thích bởi hàm xung dirac  $\delta(t)$  ở đầu vào.
- 3) Hàm đặc tính tần  $G(j\omega)$  hay là tỷ số giữa  $Y(s)|_{s=j\omega}$  của tín hiệu ra và  $U(s)|_{s=j\omega}$  của tín hiệu vào.

### 2.2.1 Phương trình vi phân mô tả quan hệ vào-ra

Thể loại mô hình này rất thích hợp với hệ thống SISO. Ảnh xạ  $T$  mô tả hệ thống là phương trình vi phân biểu diễn mối quan hệ giữa tín hiệu vào  $u(t)$  và tín hiệu ra  $y(t)$ . Mô hình này được xây dựng theo phương pháp lý thuyết, tức là mô hình sẽ được thiết lập dựa trên các định luật có sẵn về quan hệ vật lý bên trong và quan hệ giao tiếp với môi trường bên ngoài của hệ thống. Các quan hệ này được mô tả theo quy luật lý-hóa, quy luật cân bằng, ... dưới dạng những phương trình toán học. Kết quả của công việc mô hình hóa để có mô hình  $T$  dạng phương trình vi phân mô tả quan hệ vào-ra là:

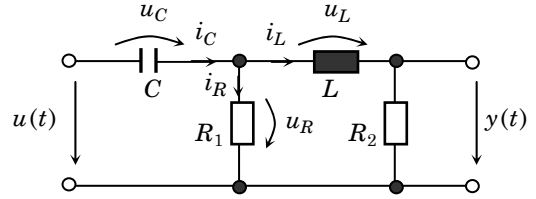
$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m} \quad (2.28)$$

trong đó các hệ số  $a_i$  cũng như  $b_j$  được xác định từ các phần tử (linh kiện, thiết bị) cấu thành trong hệ thống. Chúng có thể là hằng số, song cũng có thể là những tham số phụ thuộc thời gian  $t$  hoặc những đối số khác. Ví dụ như điện trở của một đường dây dẫn điện sẽ là tham số phụ thuộc vào độ dài đoạn dây hoặc nhiệt độ của vật được nung sẽ là tham số phân bố không đều từ bề ngoài vào tâm của vật ....

Nếu các hệ số  $a_i$  cũng như  $b_j$  phụ thuộc  $t$  thì người ta nói mô hình (2.28) là *tuyến tính không dừng*. Ngược lại nếu chúng phụ thuộc những đối số khác thì mô hình (2.28) là *tuyến tính với tham số rải*.

Mô hình (2.28) có tên là *phương trình vi phân*, hay *mô hình vào-ra*, vì khi biết trước kích thích  $u(t)$  và trạng thái đầu của hệ, ta luôn tìm được nghiệm  $y(t)$  là đáp ứng của hệ thống. Sau đây ta sẽ xét một số ví dụ minh họa cho việc xây dựng mô hình hệ thống có dạng phương trình vi phân giữa tín hiệu vào  $u(t)$  và tín hiệu ra  $y(t)$ .

**Ví dụ 2.8:** Mô hình toán học là phương trình vi phân



**Hình 2.16:** Minh họa cho ví dụ 2.8.

Cho một mạch điện trên hình 2.16. Biết trước giá trị  $C$  của tụ điện  $L$  của cuộn dây và  $R_1, R_2$  của điện trở là những phần tử trong mạch điện. Hãy xác định mô hình mạch điện dưới dạng phương trình vi phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào là điện áp  $u(t)$  và tín hiệu ra  $y(t)$  là điện áp trên  $R_2$ .

Các định luật Kirchoff sẽ được sử dụng phục vụ việc xây dựng mô hình mô tả  $T$  dưới dạng phương trình vi phân. Ta định nghĩa thêm các biến:

- Điện áp  $u_C$  trên tụ điện  $C$
- Điện áp  $u_L$  trên cuộn dây  $L$
- Điện áp  $u_R$  trên điện trở  $R_1$
- Dòng  $i_C$  đi qua tụ điện  $C$
- Dòng  $i_L$  đi qua cuộn dây  $L$
- Dòng  $i_R$  đi qua điện trở  $R_1$

Như vậy thì:

1) Theo các định luật của Kirchoff có:

$$a) \quad u_C(t) + u_R(t) = u(t) \quad (2.29)$$

$$b) \quad u_L(t) + y(t) = u_R(t) \quad (2.30)$$

$$c) \quad i_L(t) + i_R(t) = i_C(t) \quad (2.31)$$

2) Theo các định luật về các linh kiện có:

$$a) \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (2.32)$$

$$b) \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.33)$$

$$c) \quad R_1 i_R(t) = u_R(t) \quad (2.34)$$

$$d) \quad R_2 i_L(t) = y(t) \quad (2.35)$$

Từ những công thức trên, bước tiếp theo ta sẽ tìm cách loại các biến đã được định nghĩa thêm để cuối cùng phải đến được phương trình chỉ còn chứa hai biến là  $u(t)$  và  $y(t)$ . Đạo hàm hai vế của (2.29) rồi cùng với các quan hệ khác được:

$$\begin{aligned} \frac{i_c(t)}{C} &= \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{i_L(t) + i_R(t)}{C} + \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{C} \left( \frac{y(t)}{R_2} + \frac{u_R(t)}{R_1} \right) + \frac{du_R(t)}{dt} &= \frac{du(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Thay tiếp (2.30), (2.33) và (2.35) vào (2.36) có:

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{CR_2} + \frac{u_L(t) + y(t)}{CR_1} + \frac{d}{dt}(u_L(t) + y(t)) &= \frac{du(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \quad \left( \frac{1}{CR_1} + \frac{1}{CR_2} \right) y(t) + \frac{L}{CR_1} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} + L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} &= \frac{du(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \quad \left( \frac{1}{CR_1} + \frac{1}{CR_2} \right) y(t) + \left( \frac{L}{CR_1 R_2} + 1 \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{L}{R_2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \frac{du(t)}{dt} \end{aligned}$$

Suy ra

$$CLR_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (CR_1 R_2 + L) \frac{dy(t)}{dt} + (R_1 + R_2) y(t) = CR_1 R_2 \frac{du(t)}{dt}$$

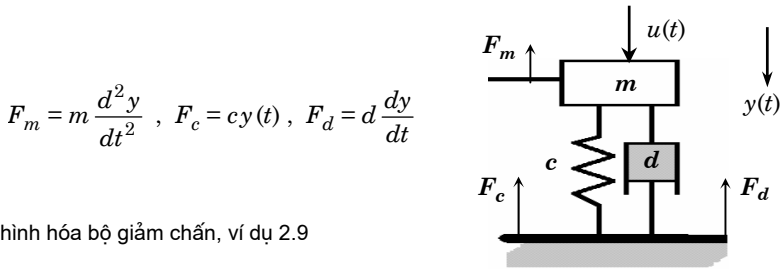
và ta có được mô hình mạch điện dưới dạng phương trình vi phân:

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = b_1 \frac{du(t)}{dt}$$

với

$$a_0 = R_1 + R_2, \quad a_1 = CR_1 R_2 + L, \quad a_2 = CLR_1 \quad \text{và} \quad b_1 = CR_1 R_2. \quad \square$$

**Ví dụ 2.9:** Xây dựng mô hình toán học là phương trình vi phân



**Hình 2.17:** Mô hình hóa bộ giảm chấn, ví dụ 2.9

Để nghiên cứu các bộ giảm chấn ở ô tô, thiết bị máy móc, người ta cần phải mô hình hóa chúng. Sơ đồ nguyên lý bộ giảm chấn được cho trong hình 2.17, trong đó  $c$  là hằng số lực của lò xo,  $d$  là hằng số đặc trưng phần giảm tốc và  $m$  là khối lượng tịnh của thiết bị đè lên bộ giảm chấn. Hãy xây dựng phương trình vi phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu đầu vào là lực  $u(t)$  ép lên bộ giảm chấn và tín hiệu ra  $y(t)$  là độ lún của nó.

Trên cơ sở sơ đồ nguyên lý ta có các lực cản trở độ lún  $y(t)$  của bộ giảm chấn:

- a)  $F_m = m \frac{d^2 y}{dt^2}$  (tiên đề về lực của Newton)
- b)  $F_c = cy(t)$  (lực cản của lò xo)
- c)  $F_d = d \frac{dy}{dt}$  (lực cản của bộ giảm tốc)
- d)  $F_m + F_c + F_d = u(t)$  (tiên đề cân bằng lực của Newton).

Suy ra phương trình vi phân mô tả bộ giảm chấn là:

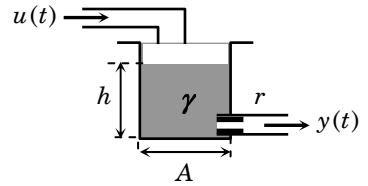
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + d \frac{dy}{dt} + cy(t) = u(t)$$

□

### Ví dụ 2.10: Mô hình toán học là phương trình vi phân

Cho một bình đựng chất lỏng mô tả ở hình 2.18. Biết trước các thông số về bình như diện tích đáy  $A$  của bình, hệ số chuyển đổi áp suất  $p(t)$  trong bình với lưu lượng ra  $y(t)$  là  $r$ , tức là:

$$y(t) = \frac{p(t)}{r}$$



Hình 2.18: Minh họa ví dụ 2.10

và hệ số chuyển đổi áp suất  $p(t)$  với độ cao cột chất lỏng trong bình là  $\gamma$ , tức là:

$$p(t) = \gamma h(t)$$

Gọi  $u(t)$  là lưu lượng chất lỏng chảy vào bình. Vậy thì:

$$y(t) = \frac{p(t)}{r} = \frac{\gamma}{r} h(t) \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{dh(t)}{dt} = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{u(t) - y(t)}{A}$$

và ta có được phương trình vi phân mô tả quan hệ lưu lượng vào  $u(t)$  với lưu lượng ra  $y(t)$  như sau:

$$rA \frac{dy(t)}{dt} + \gamma \cdot y(t) = \gamma \cdot u(t)$$

□

## 2.2.2 Hàm truyền, hàm trọng lượng và hàm quá độ

Xét hệ liên tục SISO có tín hiệu vào  $u(t)$  và tín hiệu ra  $y(t)$ . Hàm truyền  $G(s)$  được định nghĩa là tỷ số giữa ảnh Laplace  $Y(s)$  của đáp ứng  $y(t)$  và ảnh Laplace  $U(s)$  của kích thích  $u(t)$  khi hệ được kích thích từ trạng thái 0, tức là khi có các điều kiện đầu

$y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$  đồng nhất bằng 0. Nói cách khác:

$$G(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{\text{trạng thái đầu}=0}$$

Với công thức định nghĩa trên thì ở hệ tuyến tính tham số hằng, *hàm truyền là một mô hình*, vì từ tính chất xếp chồng  $u_1 \mapsto y_1, u_2 \mapsto y_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \mapsto y_1 + y_2$ , ta có ngay:

$$G(U_1 + U_2) = Y_1 + Y_2 = G_1 U_1 + G_2 U_2, \forall U_1, U_2 \Leftrightarrow G = G_1 = G_2$$

Tương tự như đã làm ở mục 2.1.5 khi áp dụng toán tử Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng, nhưng ở đây ta đi từ phương trình vi phân (2.25) mô tả quan hệ vào ra của hệ thống với các điều kiện đầu:

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = 0$$

thì khi chuyển sang miền phức bằng toán tử Laplace ta có:

$$(a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n)Y(s) = (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m)U(s)$$

và do đó được *hàm truyền*:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad (2.37)$$

**Chú ý:** Hàm truyền (2.37) là tỷ số giữa ảnh Laplace  $Y(s)$  của tín hiệu ra  $y(t)$  và ảnh Laplace  $U(s)$  của tín hiệu vào  $u(t)$  chỉ có nghĩa cho hệ tuyến tính tham số hằng và cũng chỉ được định nghĩa khi hệ có các trạng thái đầu bằng 0.

So với mô hình (2.28) dạng phương trình vi phân thì việc sử dụng hàm truyền làm mô hình có tính ưu việt hơn hẳn là quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra nay được mô tả bằng một phương trình đại số tuyến tính (2.37). Điều đó giúp cho công việc xác định đáp ứng  $y(t)$  của hệ thống ứng với một kích thích  $u(t)$  cho trước được đơn giản hơn nhiều. Với hàm truyền (2.37), việc khảo sát đặc tính động học của hệ thống cũng đơn giản và nhanh chóng như ta sẽ thấy sau này.

Tuy rằng hàm truyền (2.37) được dẫn từ phương trình vi phân mô tả quan hệ vào-ra (2.28) của hệ thống, song điều đó không nhất thiết là để có hàm truyền phải có mô hình dạng phương trình vi phân. Ta sẽ xét một vài ví dụ minh họa cho điều đó.

#### **Ví dụ 2.11:** Xác định hàm truyền

Quay lại ví dụ 2.8 với mô hình mạch điện cho trong hình 2.16. Sau khi đã định nghĩa thêm các biến mới là điện áp  $u_C$  trên tụ điện  $C$ , điện áp  $u_L$  trên cuộn dây  $L$ , điện áp  $u_R$  trên điện trở  $R_1$ , dòng  $i_C$  đi qua tụ điện  $C$ , dòng  $i_L$  đi qua cuộn dây  $L$  và dòng  $i_R$  đi qua điện trở  $R_1$  ta có các phương trình (2.29) ÷ (2.35) mô tả quan hệ giữa chúng. Gọi  $U_C(s)$  là ảnh của  $u_C$ ,  $U_L(s)$  là ảnh của  $u_L$ ,  $U_R(s)$  là ảnh của  $u_R$ ,  $I_C(s)$  là ảnh của  $i_C$ ,  $I_L(s)$  là ảnh của  $i_L$  và  $I_R(s)$  là ảnh của  $i_R$ , thì các quan hệ (2.32) + (2.35) trở thành:

$$\text{a) } I_C(s) = CsU_C(s)$$

$$\text{b) } U_L(s) = LsI_L(s)$$



$$c) \quad R_1 I_R(s) = U_R(s)$$

$$d) \quad R_2 I_L(s) = Y(s)$$

Khi đó thì từ những phương trình Kirchoff (2.29) + (2.31) ta có ngay được:

$$\begin{aligned} CR_1 R_2 s U(s) &= CR_1 R_2 s U_C(s) + CR_1 R_2 s U_R(s) \\ &= [CLR_1 s^2 + (CR_1 R_2 + L)s + (R_1 + R_2)] Y(s) \end{aligned}$$

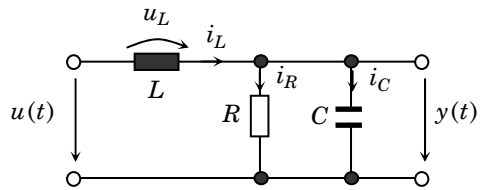
Suy ra hàm truyền của mạch điện hình 2.3 là:

$$G(s) = \frac{CR_1 R_2 s}{CLR_1 s^2 + (CR_1 R_2 + L)s + (R_1 + R_2)}$$



### Ví dụ 2.12: Xác định hàm truyền

Hãy xác định hàm truyền cho mạch điện có sơ đồ mô tả ở hình 2.19, trong đó trị số linh kiện  $L$  của cuộn dây,  $R$  của điện trở và  $C$  của tụ điện là cho trước.



**Hình 2.19:** Minh họa cho ví dụ 2.12 về việc xác định hàm truyền.

Ký hiệu ảnh Laplace cho những biến được định nghĩa thêm bằng các chữ in hoa (hình 2.19) ta sẽ có:

1) Theo Kirchoff

$$a) \quad U_L(s) + Y(s) = U(s)$$

$$b) \quad I_C(s) + I_R(s) = I_L(s)$$

2) Theo linh kiện

$$a) \quad I_L(s) = \frac{1}{Ls} U_L(s)$$

$$b) \quad I_R(s) = \frac{1}{R} Y(s)$$

$$c) \quad Y(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} U(s) &= U_L(s) + Y(s) = Ls I_L(s) + Y(s) = Ls [I_C(s) + I_R(s)] + Y(s) \\ &= Ls \left( Cs + \frac{1}{R} \right) Y(s) + Y(s) = \left( CLs^2 + \frac{Ls}{R} + 1 \right) Y(s) \end{aligned}$$

và ta được hàm truyền của mạch điện:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{CLs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

□

### Ví dụ 2.13: Xác định hàm truyền

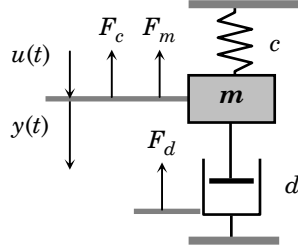
Cho hệ cơ gồm một lò xo có hệ số  $c$ , một vật với khối lượng  $m$  và bộ suy giảm tốc có hệ số  $d$  được nối với nhau như hình 2.20 mô tả. Hãy xác định hàm truyền cho hệ cơ đó nếu tín hiệu đầu vào  $u(t)$  được định nghĩa là lực bên ngoài tác động lên vật và tín hiệu ra  $y(t)$  là quãng đường mà vật đi được.

Gọi  $F_c$ ,  $F_m$ ,  $F_d$ , là những lực của lò xo, vật và bộ suy giảm tốc sinh ra khi vật dịch chuyển nhằm cân sự dịch chuyển đó thì:

$$F_c = c \cdot y(t)$$

$$F_m = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$$F_d = d \frac{dy(t)}{dt}$$



Hình 2.20: Cho ví dụ 2.13.

và do đó theo tiên đề cân bằng lực ta được:

$$u(t) = F_c + F_m + F_d = cy(t) + m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + d \frac{dy(t)}{dt} \Leftrightarrow U(s) = (c + ds + ms^2)Y(s)$$

Suy ra hàm truyền của hệ là:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + ds + c}$$

□

Gọi  $g(t)$  là hàm gốc (causal) của hàm truyền  $G(s)$ , tức là:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},$$

vậy thì theo tính chất của toán tử Laplace ta có:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.38)$$

Hàm  $g(t)$  được gọi là *hàm trọng lượng* của hệ thống. Với  $u(t) = \delta(t)$  thì do:

$$U(s) = 1$$

nên có:

$$y(t) = g(t)$$

và ta đi đến:

**Định lý 2.3:** Hàm trọng lượng  $g(t)$  là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 (có các giá trị ban đầu  $y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$  bằng 0) và được kích thích bởi xung dirac  $\delta(t)$  ở đầu vào. Với hàm trọng lượng  $g(t)$  ta luôn xác định được tín hiệu ra  $y(t)$  theo công thức (2.38), nếu biết trước tín hiệu vào  $u(t)$ .

Nhờ công thức (2.38), khi cho trước kích thích  $u(t)$  ta luôn xác định được đáp ứng  $y(t)$  của hệ thống với giả thiết rằng tại thời điểm bắt đầu được kích thích hệ đang ở trạng thái 0. Điều này nói rằng bản thân hàm trọng lượng cũng là một mô hình mô tả hệ thống và mô hình đó được xếp vào loại *mô hình không tham số*. Đó là những mô hình biểu diễn trực quan đặc tính động học của hệ thống dưới dạng bảng tra hoặc đồ thị. **Chú ý:** Vì xung dirac  $\delta(t)$  không phải là tín hiệu (không có ý nghĩa vật lý) nên hàm trọng lượng  $g(t)$  cũng không phải là tín hiệu. Người ta chỉ sử dụng  $g(t)$  làm mô hình mô tả hệ và để phân tích động học của hệ sau này.

Bên cạnh hàm trọng lượng  $g(t)$ , một thể loại mô hình không tham số khác cũng thường được sử dụng để khảo sát trực quan đặc tính động học hệ thống là *hàm quá độ*  $h(t)$  được định nghĩa như là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 và được kích thích bởi tín hiệu Heaviside  $1(t)$  ở đầu vào.

Với đầu vào  $u(t)$  là tín hiệu  $1(t)$  thì:

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

do đó hàm quá độ  $h(t)$  có ảnh Laplace  $H(s)$  được tính theo:

$$H(s) = Y(s) = \frac{G(s)}{s}$$

Bởi vậy, theo tính chất của toán tử Laplace (khi  $h(0)=0$ ) ta suy ra được:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (2.39)$$

Giả sử rằng một hệ thống có hàm truyền  $G(s)$  được kích thích bằng tín hiệu  $u(t)$  có ảnh Laplace  $U(s)$ . Tín hiệu ra  $y(t)$  của nó khi đó sẽ là:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{sH(s)U(s)\}$$

Nếu gọi  $\hat{h}(t)$  là tín hiệu có ảnh Laplace  $\hat{H}(s) = H(s)U(s)$  thì:

$$\hat{h}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{H}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\} = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

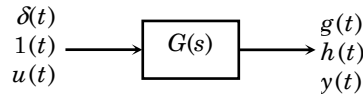
vì  $u(t)=0$  khi  $t<0$  cũng như  $h(t-\tau) = 0$  khi  $\tau>t$ , tức là chúng đều là các tín hiệu causal.

Áp dụng tính chất toán tử Laplace cho ảnh của đạo hàm với  $H(s) = s\hat{H}(s) - \hat{h}(0)$  thì:

$$y(t) = \hat{h}(0)\delta(t) + \frac{d}{dt}\hat{h}(t) = h(0)u(0)\delta(t) + \frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.40)$$

Điều đó nói rằng hàm quá độ  $h(t)$  cũng là một mô hình của hệ.

**Định lý 2.4:** Hàm quá độ  $h(t)$  là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 (có các giá trị ban đầu  $y(0)$ ,  $\frac{dy(0)}{dt}$ , ...,  $\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$  bằng 0) và được kích thích bởi tín hiệu Heaviside  $1(t)$  ở đầu vào. Với hàm quá độ  $h(t)$  ta có thể xác định được tín hiệu ra  $y(t)$  theo công thức (2.40), nếu biết trước tín hiệu vào  $u(t)$ .



**Hình 2.21:** Mô tả hệ thống bằng sơ đồ khối và hàm truyền.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}$$

Một hệ thống tuyến tính, sau khi đã được mô hình hóa và có hàm truyền  $G(s)$ , sẽ thường được biểu diễn đơn giản thành *một khối* có dạng như hình 2.21. Cách biểu diễn này rất tiện cho việc xây dựng mô hình cho một hệ phức tạp gồm nhiều khối mắc nối tiếp, song song hoặc phản hồi.

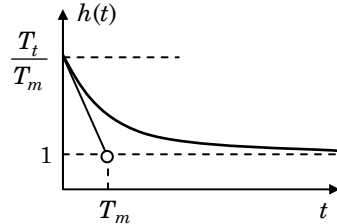
**Ví dụ 2.14:** Sử dụng mô hình là hàm quá độ

Cho hệ mô tả bởi hàm truyền:

$$G(s) = \frac{1 + T_t s}{1 + T_m s} \quad \text{với } T_t \neq T_m$$

Ảnh Laplace  $H(s)$  của hàm quá độ  $h(t)$  là:

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T_m - T_t}{T_m} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_m}}$$



**Hình 2.22:** Minh họa ví dụ 2.14.

Vậy 
$$h(t) = \left(1 - \frac{T_m - T_t}{T_m} e^{-\frac{t}{T_m}}\right) 1(t)$$



Do hàm quá độ  $h(t)$  có ảnh Laplace là  $\frac{G(s)}{s}$  nên từ dạng đường đồ thị của  $h(t)$  người ta có thể suy ra được nhiều tính chất cho  $G(s)$ . Định lý sau minh họa cho điều đó.

**Định lý 2.5:** Cho một hệ thống tuyến tính có hàm truyền  $G(s)$  dạng thực-hữu tỷ:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad (2.41)$$

- Nếu đường  $h(t)$  xuất phát từ 0, tức là  $h(+0)=0$ , thì  $n > m$ . Trong trường hợp ngược lại khi  $h(t)$  không đi từ điểm 0 ( $h(+0) \neq 0$ ) thì  $n \leq m$ .
- Nếu đường  $h(t)$  đi từ 0 và có đạo hàm tại 0 cũng bằng 0, tức là  $\frac{d}{dt}h(+0)=0$ , thì  $n-m > 1$ . Ngược lại nếu  $h(+0)=0$  và  $\frac{d}{dt}h(+0) \neq 0$  thì  $n = m+1$
- Nếu đường  $h(t)$  tiến tới vô hạn ( $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ ) thì  $a_0 = 0$
- Nếu đường  $h(t)$  tiến tới 0, tức là  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$  thì  $a_0 \neq 0$  và  $b_0 = 0$
- Nếu  $h(t)$  tiến tới một hằng số  $k$ , tức là  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = k$ , thì  $a_0 \neq 0$  và  $k = \frac{b_0}{a_0}$ .

*Chứng minh:*

- Do ảnh Laplace  $H(s)$  của  $h(t)$  là  $H(s) = \frac{G(s)}{s}$  nên từ tính chất toán tử Laplace ta có:

$$h(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} s^{m-n}$$

Bởi vậy nếu  $h(+0)=0$  thì cũng phải có  $n > m$ . Ngược lại khi  $h(+0) \neq 0$  thì hoặc  $n = m$ , nếu  $h(t)$  xuất phát từ hằng số  $\frac{b_m}{a_n}$ , hoặc  $n < m$  nếu  $h(t)$  xuất phát từ vô cùng.

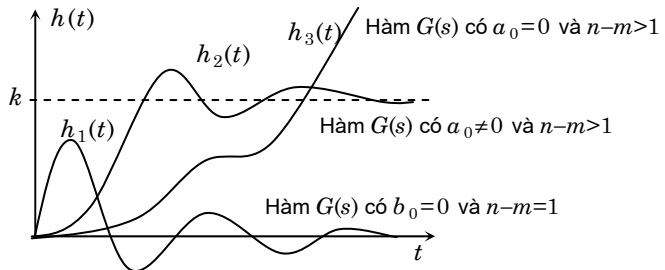
Tương tự ta cũng chứng minh được cho câu b) với sự trợ giúp thêm của tính chất toán tử Laplace, tức là với:

$$\frac{d}{dt}h(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[G(s) - h(+0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} s^{m+1-n}$$

Để chứng minh các câu c), d) và e) ta sử dụng các tính chất đã nêu của toán tử Laplace để có quan hệ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad \text{và} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s[G(s) - h(+0)]$$

□



**Hình 2.23:** Minh họa cho định lý 2.5.

Cuối cùng, trước khi kết thúc mục này, ta xét một trường hợp riêng song cũng cần phải bàn đến. Đó là những hệ thống tuyến tính có hàm truyền:

$$G(s) = ks.$$

Kích thích hệ này bởi  $u(t)$  với  $u(+0)=0$ , hệ sẽ có đáp ứng:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ksU(s)\} = k \frac{du(t)}{dt}$$

Điều này nói rằng tại một thời điểm  $t_0$ , muốn có được  $y(t_0)$  thì ta phải có được các giá trị của  $u(t)$  trong một lân cận thuộc  $t_0$  vì:

$$\frac{du(t_0)}{dt} = \lim_{T_a \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + T_a) - u(t_0)}{T_a} = \lim_{T_a \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + T_a) - u(t_0 - T_a)}{2T_a}$$

Nói cách khác phải có được các giá trị của  $u(t)$  trước và sau thời điểm  $t_0$ . Việc phải có những giá trị  $u(t)$  sau thời điểm  $t_0$  thì mới có được  $y(t_0)$  đã vi phạm tính nhân quả của hệ thống kỹ thuật rằng đáp ứng không bao giờ có trước kích thích, hay kết quả bao giờ cũng phải có sau nguyên nhân (tính causal của hệ thống kỹ thuật). Bởi vậy, không thể có một hệ thống kỹ thuật có hàm truyền  $G(s) = ks$ .

Tổng quát, các hàm truyền dạng (2.41) của một hệ tuyến tính, nếu có  $m > n$  thì do  $G(s)$  viết được thành:

$$G(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_{m-n} s^{m-n} + \frac{d_0 + d_1 s + \dots + d_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

Nên trong đáp ứng  $y(t)$  phải có thành phần không causal  $y_c(t)$  với ảnh Laplace:

$$Y_c(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_{m-n} s^{m-n}$$

Tổng kết lại, ta đi đến kết luận chung sau:

**Định lý 2.6:** Cho hệ SISO tuyến tính.

- a) Hệ luôn được mô tả bởi ba mô hình toán học tương đương là hàm truyền  $G(s)$ , hàm quá độ  $h(t)$  và hàm trọng lượng  $g(t)$  với các quan hệ

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \quad \text{và} \quad g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (2.42)$$

- b) Nếu hệ là causal thì hàm truyền  $G(s)$  dạng (2.41) của nó phải có bậc đa thức tử số không lớn hơn bậc đa thức mẫu số ( $m \leq n$ ). Các hàm truyền như vậy có tên là *hợp thức (proper)*. Nếu còn có  $m < n$  thì  $G(s)$  có tên gọi là *hợp thức chặt (strictly proper)*.

**Chú ý:** Khi sử dụng (2.42) để xác định  $g(t)$  từ  $h(t)$ , đặc biệt khi có  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \neq 0$ , ta phải luôn xem chúng là những hàm causal, tức là phải luôn xem chúng như một tích của hàm thường với hàm  $1(t)$ .

### Ví dụ 2.15: Biến đổi hàm quá độ thành hàm trọng lượng

Từ ví dụ 2.14 trước đây ta đã có cho hệ với hàm truyền:

$$G(s) = \frac{1 + T_t s}{1 + T_m s}, \quad T_t \neq T_m$$

hàm quá độ  $h(t)$  như sau:

$$h(t) = \left(1 - \frac{T_m - T_t}{T_m} e^{\frac{-t}{T_m}}\right) 1(t)$$

$$\text{Vậy } g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{T_m - T_t}{T_m^2} e^{\frac{-t}{T_m}} 1(t) + \left(1 - \frac{T_m - T_t}{T_m} e^{\frac{-t}{T_m}}\right) \delta(t)$$

vì có  $\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t)$ . Suy ra, theo tính chất của hàm mở rộng diract  $\delta(t)$  thì:

$$g(t) = \frac{T_m - T_t}{T_m^2} e^{\frac{-t}{T_m}} 1(t) + \frac{T_t}{T_m} \delta(t)$$

□

## 2.2.3 Phép biến đổi sơ đồ khối (đại số sơ đồ khối)

Việc biểu diễn một hệ thống qua hàm truyền, đặc biệt là mô tả trực quan dạng khối như ở hình 2.21, giúp cho ta dễ dàng xác định được hàm truyền cho một hệ thống lớn, phức tạp. Khi gặp một hệ thống lớn gồm nhiều khâu, nhiều công đoạn, người ta thường chia nhỏ hệ thống thành các hệ thống con là những khâu và công đoạn đó. Tiếp theo người ta xác định hàm truyền cho từng hệ con rồi từ các hàm truyền của những hệ con mới tính ra hàm truyền cho toàn bộ hệ thống lớn.

Mục này sẽ giới thiệu các phương pháp của đại số sơ đồ khối phục vụ việc xác định hàm truyền cho hệ lớn từ những hàm truyền của các hệ thành phần (hệ con) trong nó. Tên gọi của phương pháp là "*đại số sơ đồ khối*" cũng có nguyên nhân của nó:

- Thứ nhất là vì các phương pháp này làm việc với những phần tử là *khối* biểu diễn các hệ con như hình 2.21 mô tả.
- Thứ hai là vì nội dung của từng khối (phần tử) là hàm truyền hợp thức dạng (2.41), trong khi tập các hàm hợp thức ( $m \leq n$ ) kết hợp với phép cộng, nhân trong chúng và phép nhân với số thực (hoặc phức) lại tạo thành một *đại số* trên trường số thực  $\mathbb{R}$  (hoặc  $\mathbb{C}$ ).

### Hai khối song song

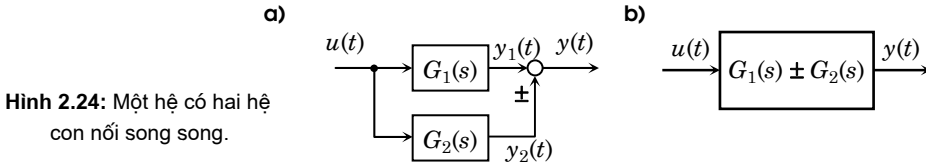
Hình 2.24a) mô tả một hệ gồm hai khối (hệ con) với hàm truyền của từng khối là  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ . Hai khối này được nối song song có cùng tín hiệu vào  $u(t)$ . Tín hiệu ra của từng khối là  $y_1(t)$  và  $y_2(t)$ . Tín hiệu ra  $y(t)$  của cả hệ là tổng/hiệu của chúng:

$$y(t) = y_1(t) \pm y_2(t)$$

Gọi  $G(s)$  là hàm truyền của toàn bộ hệ thống, vậy thì:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s) \pm Y_2(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s)}{U(s)} \pm \frac{Y_2(s)}{U(s)} = G_1(s) \pm G_2(s)$$

Vậy, hàm truyền  $G(s)$  của hệ nối song song là tổng/hiệu của các hàm truyền thành phần  $G_1(s)$  và  $G_2(s)$  – hình 2.24b).



### Hai khối nối tiếp

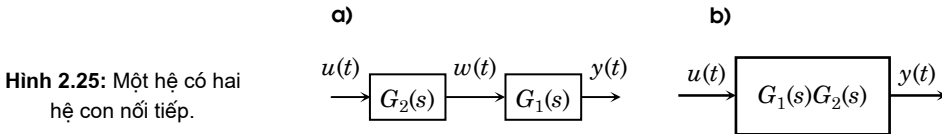
Xét hệ gồm hai khối con  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  mắc nối tiếp như hình 2.25a) mô tả. Tín hiệu vào  $u(t)$  của cả hệ cũng là tín hiệu vào của khối thứ nhất  $G_2(s)$ . Tín hiệu ra  $w(t)$  của  $G_2(s)$  là tín hiệu vào của khối thứ hai  $G_1(s)$ . Tín hiệu ra  $y(t)$  của  $G_1(s)$  là tín hiệu ra của hệ thống. Từ đó ta có được:

$$\begin{cases} Y(s) = G_1(s)W(s) \\ W(s) = G_2(s)U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)$$

hay

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

Vậy hàm truyền của hệ thống gồm hai khối nối tiếp là tích của hai hàm truyền của hai khối đó – hình 2.25b).



### Hệ có hai khối nối hồi tiếp

Khái niệm hai khối nối hồi tiếp được mô tả ở hình 2.26a). Tín hiệu đầu ra  $y(t)$  của hệ thống cũng là tín hiệu ra của khối thứ nhất  $G_1(s)$ . Nó được đưa tới đầu vào cho khối thứ hai  $G_2(s)$  để phản hồi ngược trở lại đầu vào cho  $G_1(s)$ . Đầu vào  $e(t)$  của  $G_1(s)$  là tín hiệu tạo bởi tín hiệu vào của hệ thống  $u(t)$  và tín hiệu ra  $w(t)$  của  $G_2(s)$ :

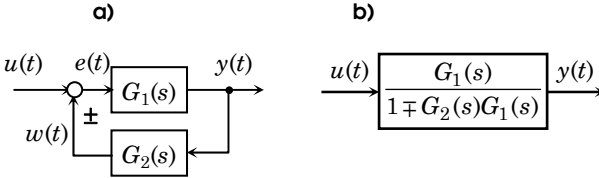


$$e(t) = u(t) \pm w(t)$$

Suy ra

$$Y(s) = G_1(s)E(s) = G_1(s)[U(s) \pm G_2(s)Y(s)] = G_1(s)U(s) \pm G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_2(s)G_1(s)}, \quad \text{xem hình 2.26b.}$$



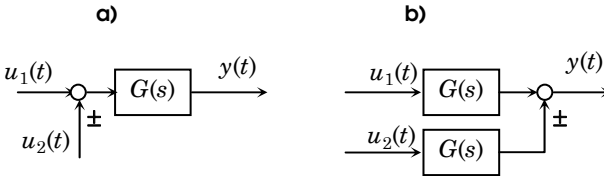
**Hình 2.26:** Một hệ có hai hệ con nối hồi tiếp.

### Chuyển nút nối tín hiệu từ trước ra sau một khối

Hình 2.27a) mô tả một khối  $G(s)$  có tín hiệu đầu vào là tổng/hiệu của hai tín hiệu thành phần  $u_1(t)$  và  $u_2(t)$ . Như vậy thì tín hiệu ra  $y(t)$  sẽ có ảnh Laplace là:

$$Y(s) = G(s)[U_1(s) \pm U_2(s)] = G(s)U_1(s) \pm G(s)U_2(s)$$

và do đó ta có được một sơ đồ tương đương như ở hình 2.27b, trong đó nút nối hai tín hiệu  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  đã được chuyển ra sau khối  $G(s)$ .



**Hình 2.27:** Chuyển nút nối tín hiệu từ trước ra sau một khối.

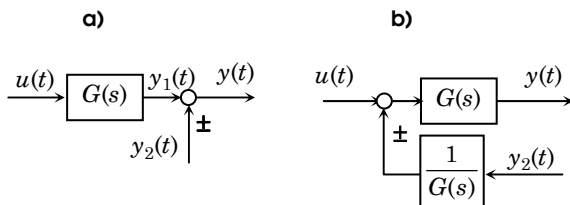
### Chuyển nút nối tín hiệu từ sau tới trước một khối

Cho hệ với hàm truyền  $G(s)$  có tín hiệu ra  $y(t)$  là tổng/hiệu của tín hiệu ra  $y_1(t)$  của  $G(s)$  và một tín hiệu  $y_2(t)$  khác – hình 2.28a. Như vậy thì:

$$Y(s) = Y_1(s) \pm Y_2(s) = G(s)\left[U(s) \pm \frac{1}{G(s)}Y_2(s)\right]$$

tức là tín hiệu đầu vào của khối  $G(s)$  này sẽ là tổng/hiệu của hai tín hiệu  $u(t)$  và tín hiệu đầu ra của khối  $\frac{1}{G(s)}$  có đầu vào là  $y_2(t)$ . Từ đó ta có được sơ đồ tương đương như ở

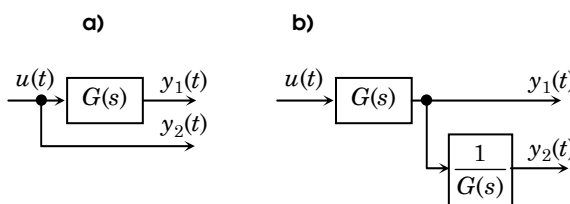
hình 2.28b mô tả. **Chú ý** là khối mới được tạo thành  $\frac{1}{G(s)}$  có thể không có được hàm truyền hợp thức (bậc đa thức tử số lớn hơn bậc đa thức mẫu số).



**Hình 2.28:** Chuyển nút nối từ sau ra trước một khối.

### Chuyển nút rẽ nhánh tín hiệu từ trước ra sau một khối

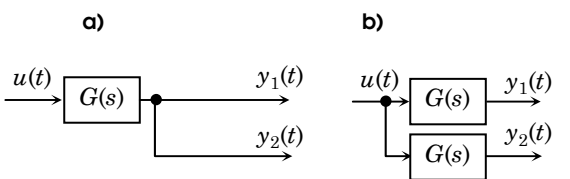
Nguyên tắc chuyển một nút rẽ nhánh tín hiệu từ trước khối  $G(s)$  ra sau khối đó được mô tả trong hình 2.29.



**Hình 2.30:** Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một khối.

### Chuyển nút rẽ nhánh tín hiệu từ sau tới trước một khối

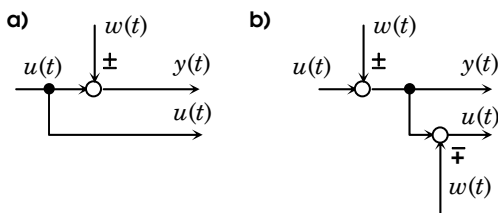
Hình 2.30 trình bày nguyên tắc chuyển một nút rẽ nhánh tín hiệu từ phía sau tới phía trước một khối có hàm truyền  $G(s)$ .



**Hình 2.30:** Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một khối.

### Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một nút nối

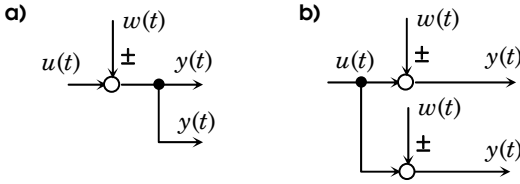
Hình 2.31 trình bày nguyên lý chuyển một nút rẽ nhánh tín hiệu từ trước một nút nối ra sau nút nối đó.



**Hình 2.31:** Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một nút nối.

## Chuyển nút rẽ nhánh từ sau tới trước một nút nối

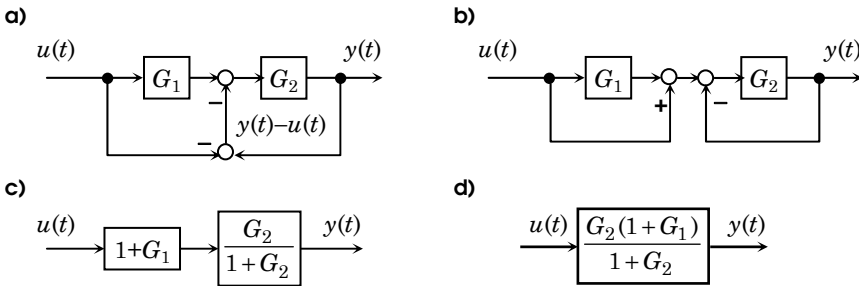
Nguyên tắc chuyển nút rẽ nhánh từ sau tới trước nút nối được mô tả ở hình 2.32.



**Hình 2.32:** Chuyển nút rẽ nhánh từ sau tới trước một nút nối.

Tiếp theo ta sẽ xét một vài ví dụ về việc sử dụng đại số sơ đồ khối để xác định hàm truyền cho một hệ thống tuyến tính gồm nhiều khối con.

### Ví dụ 2.16: Biến đổi sơ đồ khối



**Hình 2.33:** Sử dụng đại số sơ đồ khối để xác định hàm truyền cho hệ ở ví dụ 2.16.

Giả sử có một hệ thống gồm hai khối con là  $G_1$  và  $G_2$  với cấu trúc được mô tả như hình 2.33a). Ta sẽ áp dụng đại số sơ đồ khối để xác định hàm truyền của hệ thống. Trước hết tách hiệu  $y(t) - u(t)$  thành hai phần riêng biệt được hình 2.33b). Sau đó áp dụng nguyên lý ghép hai khối song song cũng như nguyên lý ghép hai khối nối tiếp thì có sơ đồ tương đương 2.33c). Cuối cùng sử dụng nguyên lý ghép hai khối nối tiếp để đi đến sơ đồ 2.33d). Từ đó ta đọc ra được hàm truyền:

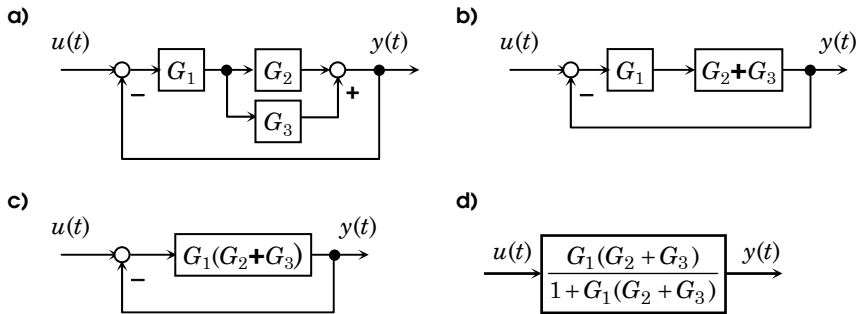
$$G(s) = \frac{G_2 + G_2 G_1}{1 + G_2}$$



### Ví dụ 2.17: Biến đổi sơ đồ khối

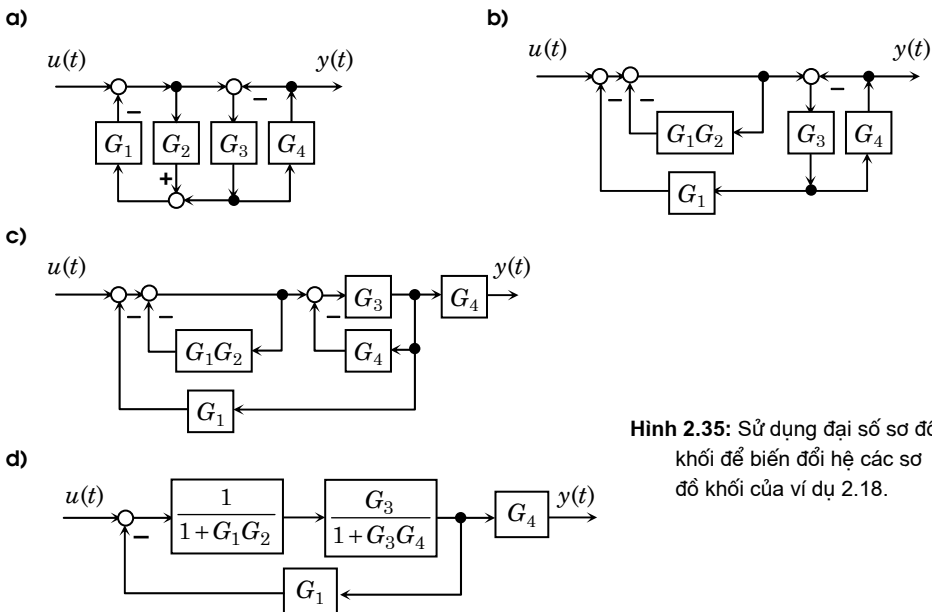
Cho hệ có sơ đồ khối mô tả ở hình 2.34a). Áp dụng nguyên lý ghép hai khối song song ta có sơ đồ tương đương như ở hình 2.34b). Tiếp tục, sử dụng nguyên lý ghép hai khối nối tiếp ta được sơ đồ như hình 2.34c) và cuối cùng với nguyên lý hai khối nối tiếp ta có sơ đồ tương đương cho cả hệ là hình 2.34d). Như vậy hệ có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 + G_1 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_1 G_3}$$



**Hình 2.34:** Minh họa cho hệ ở ví dụ 2.17

### Ví dụ 2.18: Biến đổi sơ đồ khối



**Hình 2.35:** Sử dụng đại số sơ đồ khối để biến đổi hệ các sơ đồ khối của ví dụ 2.18.

Cho một hệ có sơ đồ khối trong hình 2.35a. Chuyển nút nối tín hiệu từ trước khối  $G_1$  ra sau khối đó ta được hình 2.35b. Sơ đồ đó được vẽ lại ở hình 2.35c bằng cách đảo vị trí hai điểm rẽ nhánh trước và sau khối  $G_4$ . Tiếp theo áp dụng nguyên lý ghép hai khối hồi tiếp cho hai vòng hồi tiếp bên trong ta sẽ đi đến sơ đồ hình 2.35d và với nó dễ dàng đọc ra được hàm truyền  $G(s)$  cho toàn bộ hệ thống:

$$G(s) = G_4 \cdot \frac{\frac{1}{1+G_1G_2} \cdot \frac{G_3}{1+G_3G_4}}{1+G_1 \left[ \frac{1}{1+G_1G_2} \cdot \frac{G_3}{1+G_3G_4} \right]} = \frac{G_3G_4}{1+G_1G_2+G_1G_3+G_3G_4+G_1G_2G_3G_4}$$

□

## 2.2.4 Sơ đồ tín hiệu và công thức Mason

Việc biểu diễn một hệ thống lớn thông qua các hệ con của nó nhờ sơ đồ khối cho ta một cái nhìn trực quan một cách tổng quát về cấu trúc bên trong của hệ thống, song để sử dụng nó nhằm xác định hàm truyền lại có nhược điểm, như những ví dụ ở mục trước chỉ rõ, là phải biến đổi sơ đồ khối ban đầu về những dạng quen thuộc. Điều này gây không ít khó khăn trong ứng dụng cho người sử dụng và đòi hỏi người sử dụng phải có được *ít nhiều kinh nghiệm* trong việc biến đổi sơ đồ khối. Nhằm khắc phục nhược điểm trên, người ta đã thay sơ đồ khối bằng sơ đồ tín hiệu với mục đích phụ giúp cho công việc xác định hàm truyền cũng như phân tích một vài tích chất đặc biệt của hệ thống được thuận lợi hơn. Về nguồn gốc lịch sử, sơ đồ tín hiệu có xuất xứ từ *lý thuyết đồ thị (graph theory)* trước đây thường được dùng để minh họa các phương trình đại số tuyến tính.

Một sơ đồ tín hiệu được cấu tạo bởi các thành phần:

- *Các điểm nút (node)*. Nếu so sánh với sơ đồ khối thì các điểm nút chính là những đường tín hiệu, điểm rẽ nhánh và điểm nối tín hiệu.
- *Những đường nối các điểm nút (branch)*. Trong sơ đồ khối thì những đường nối này có vai trò giống như các khối. Mỗi đường nối có một giá trị đúng bằng hàm truyền của khối tương ứng. Đường nối không có khối được thể hiện trong sơ đồ tín hiệu bằng giá trị 1. Các đường nối phải có hướng chỉ chiều tín hiệu.

Với cấu trúc như vậy, một sơ đồ tín hiệu sẽ có:

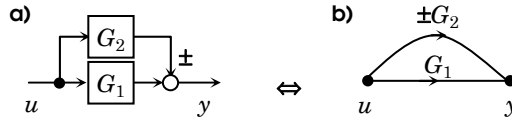
- a) Tín hiệu đầu vào  $u(t)$  là điểm nút chỉ có đường nối từ đó đi và không có đường nối dẫn đến nó nếu đó không phải là đường phản hồi. Điểm nút chỉ tín hiệu vào có tên gọi là điểm nút nguồn (*source*).
- b) Tín hiệu đầu ra  $y(t)$  là điểm nút chỉ có đường nối dẫn đến nó, không có đường nối từ đó đi nếu đó không phải là đường phản hồi. Điểm nút chỉ tín hiệu ra có tên gọi là điểm nút đích (*sink*).
- c) Tuyến thẳng (*forward path*) là những đường nối liên nhau đi từ điểm nút nguồn (*source*), tức là điểm đầu vào  $u(t)$ , tới điểm đích (*sink*), tức là điểm tín hiệu ra  $y(t)$  và chỉ đi qua mỗi điểm nút một lần.
- d) Các vòng lặp (*loops*) sẽ được thể hiện bằng tập những điểm nút có các đường nối với nhau tạo thành một vòng kín.
- e) Những vòng lặp không dính nhau (*nontouching loops*) là những vòng lặp không có chung một đoạn nối nào.

- f) Một *vòng lặp* và một *tuyến thẳng* sẽ là không dính nhau nếu chúng không có chung một *đoạn nối* nào.
- g) Tất cả các điểm nút của sơ đồ tín hiệu đều là điểm cộng tín hiệu.

**Chú ý:** Để xác định được *dính* hay *không dính* ta cần phải tuân thủ một quy tắc là *điểm cộng tín hiệu chỉ có một đầu ra* và *điểm tách tín hiệu chỉ có một đầu vào*.

**Ví dụ 2.19:** Chuyển sơ đồ khối thành sơ đồ tín hiệu

**Hình 2.36:** Sơ đồ tín hiệu tương đương cho hệ gồm hai khối song song.

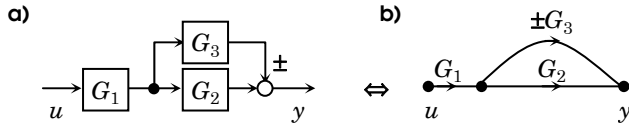


Hệ thống gồm hai khối nối song song như hình 2.36a sẽ có sơ đồ tín hiệu tương đương cho trong hình 2.36b. □

**Ví dụ 2.20:** Chuyển sơ đồ khối thành sơ đồ tín hiệu

Hệ gồm một khối  $G_1$  mắc nối tiếp với hai khối  $G_2$  và  $G_3$  nối song song như hình 2.37a sẽ có sơ đồ tín hiệu tương đương cho trong hình 2.37. □

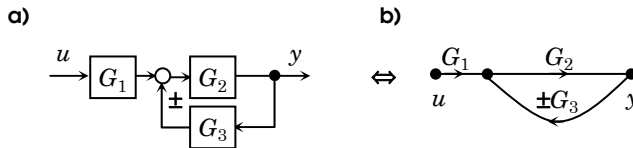
**Hình 2.37:** Sơ đồ tín hiệu tương đương của ví dụ 2.20.



**Ví dụ 2.21:** Chuyển sơ đồ khối thành sơ đồ tín hiệu

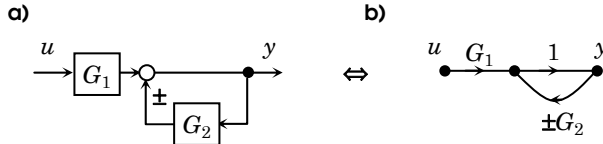
Hệ gồm một khối  $G_1$  mắc nối tiếp với hai khối  $G_2$  và  $G_3$  nối hồi tiếp như hình 2.39a) mô tả sẽ có sơ đồ tín hiệu tương đương cho trong hình 2.39b. □

**Hình 2.38:** Sơ đồ tín hiệu tương đương của ví dụ 2.21.



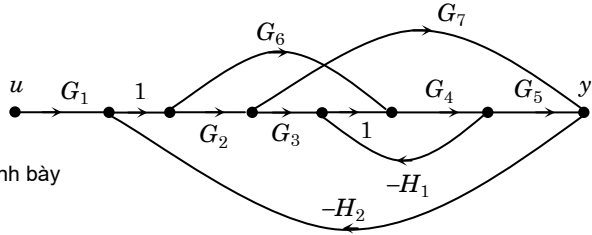
**Ví dụ 2.22:** Chuyển sơ đồ khối thành sơ đồ tín hiệu

Hệ gồm một khối  $G_1$  mắc nối tiếp với khối  $G_2$  dạng hồi tiếp như hình 2.39a) sẽ có sơ đồ tín hiệu tương đương cho trong hình 2.39b. □



**Hình 2.39:** Sơ đồ tín hiệu tương đương của ví dụ 2.22.

Bây giờ ta sẽ đi vào nội dung công thức Mason để xác định hàm truyền cho một hệ thống từ sơ đồ tín hiệu của nó. Về thực chất công thức Mason có dạng giống như một thuật toán gồm nhiều bước tính. Để tiện theo dõi các bước thực hiện công thức Mason ta sẽ sử dụng hệ có sơ đồ tín hiệu cho trong hình 2.40 làm ví dụ minh họa.



**Hình 2.40:** Minh họa cho việc trình bày công thức Mason.

- 1) *Bước 1:* Xác định tất cả những tuyến thẳng  $P_k$  có thể có của hệ thống. Đó là những đường nối liền nhau không chứa đường phản hồi đi từ điểm nút nguồn  $u(t)$  tới điểm nút đích  $y(t)$  và  $P_k$  là giá trị của nó bằng tích của tất cả các giá trị các đường nối có trong  $P_k$ . Với hình minh họa 2.40 thì hệ sẽ có ba tuyến thẳng là:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7$$

- 2) *Bước 2:* Xác định tất cả các vòng lặp  $L_k$  có thể có của hệ thống. Đó là những đường nối liền nhau tạo thành một vòng kín. Hệ với sơ đồ trong hình 2.40 có bốn vòng lặp bao gồm:

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

- 3) *Bước 3:* Tính

$$\Delta = 1 - \sum_k L_k + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{l,m,n} L_l L_m L_n + \dots, \quad (2.43)$$

trong đó  $L_i, L_j$  là những cặp hai vòng lặp không dính nhau (không có chung *một đoạn nối* nào),  $L_l, L_m, L_n$  là những bộ ba vòng lặp không dính nhau, .... Hệ với sơ đồ ở hình 2.40 chỉ có hai vòng lặp  $L_1$  và  $L_2$  là không dính nhau, do đó:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2 \\ &= 1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2\end{aligned}$$

4) *Bước 4*: Xác định  $\Delta_k$  từ bảng cách trong công thức (2.43) ta bỏ đi tất cả những vòng lặp có dính với  $P_k$  (có *đoạn nối* chung với  $P_k$  và điều này khác với khái niệm các vòng lặp dính nhau phải có *một đoạn chung*). Ví dụ như với hệ ở hình 2.40 thì:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 1 && \text{(tất cả vòng lặp đều dính tới } P_1), \\ \Delta_2 &= 1 && \text{(tất cả vòng lặp đều dính tới } P_2), \\ \Delta_3 &= 1 - L_1 = 1 + G_4 H_1 && \text{(vòng lặp } L_1 \text{ không dính vào } P_3).\end{aligned}$$

5) *Bước 5*: Xác định hàm truyền  $G(s)$  theo công thức Mason:

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_k (P_k \Delta_k) \quad (2.44)$$

Chẳng hạn hàm truyền của hệ có sơ đồ tín hiệu cho trong hình 2.40 là:

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2}\end{aligned}$$

### Ví dụ 2.23: Minh họa công thức Mason

Cho hệ với sơ đồ khối mô tả ở hình 2.41a). Những tín hiệu mà tại các điểm nối không được chỉ thị là cộng (+) hay trừ (−) đều được hiểu là cộng (+). Hình 2.41b) là sơ đồ tín hiệu tương đương của hệ.

Hệ chỉ có một tuyến thẳng và đó là:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3$$

Hệ có 3 vòng lặp dính nhau từng đôi một (từng đôi một có *đoạn nối* chung):

$$\begin{aligned}L_1 &= G_1 G_2 H_1 \\ L_2 &= - G_2 G_3 H_2 \\ L_3 &= - G_1 G_2 G_3\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3$$

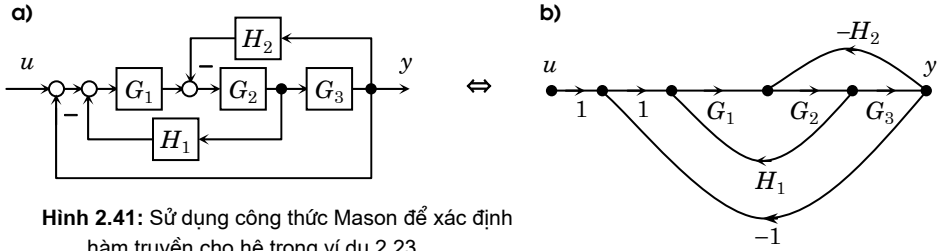
Do tất cả các vòng lặp cũng đều dính vào tuyến thẳng  $P_1$  (có *đoạn* chung) nên:



$$\Delta_1 = 1$$

Vậy theo (2.44) thì:

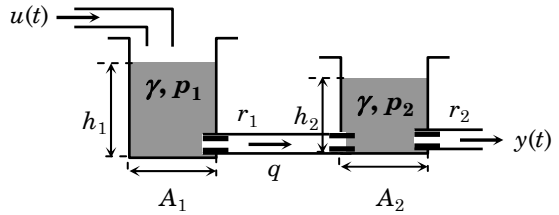
$$G(s) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$



**Hình 2.41:** Sử dụng công thức Mason để xác định hàm truyền cho hệ trong ví dụ 2.23.

#### Ví dụ 2.24: Minh họa công thức Mason

Xét một hệ thống gồm hai bình chứa chất lỏng như hình 2.42 mô tả.



**Hình 2.42:** Hệ thống gồm hai bình thông nhau.

Chất lỏng được bơm vào bình thứ nhất với lưu lượng là  $u(t)$ . Nếu chất lỏng trong bình thứ nhất có độ cao  $h_1$ , áp suất  $p_1$ , hệ số chuyển đổi áp suất/lưu lượng  $r_1$ , hệ số áp suất/độ cao  $\gamma$  lưu lượng chảy sang bình thứ hai là  $q$  và  $h_2, p_2, r_2$  là độ cao, áp suất, hệ số chuyển đổi áp suất/lưu lượng của chất lỏng trong bình thứ hai thì theo các định luật vật lý, giữa những thông số kỹ thuật đó có quan hệ xấp xỉ:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = u(t) - q \quad (2.45)$$

$$q = \frac{1}{r_1} (p_1 - p_2) \quad (2.46)$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q - y(t) \quad (2.47)$$

$$y(t) = \frac{1}{r_2} p_2 \quad (\text{áp suất tại đầu ra được xem là bằng } 0) \quad (2.48)$$

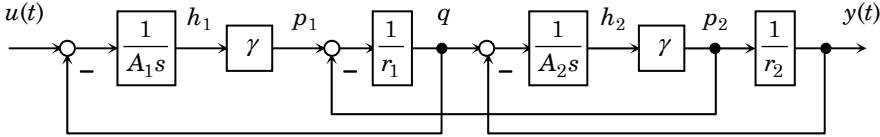
$$p_1 = \gamma h_1 \quad (2.49)$$

$$p_2 = \gamma h_2 \quad (2.50)$$

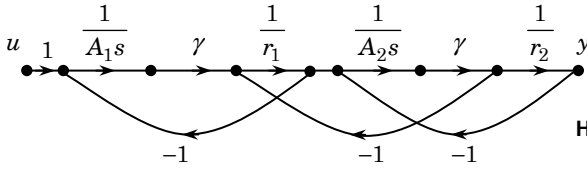
trong đó  $y(t)$  là lưu lượng chất lỏng chảy ra khỏi bình thứ hai.

Từ những hiểu biết lý thuyết ban đầu đó về hệ thống ta đi đến sơ đồ khối và sơ đồ tín hiệu mô tả hệ thống cho trong hình 2.43. Sơ đồ này được xây dựng trên cơ sở sao chép nguyên bản các đẳng thức (2.45) + (2.50).

a) Sơ đồ khối



b) Sơ đồ tín hiệu



**Hình 2.43:** Sơ đồ khối và sơ đồ tín hiệu của hệ thống trong ví dụ 2.24.

Từ sơ đồ tín hiệu trên ta thấy hệ chỉ có một tuyến thẳng:

$$P_1 = \frac{\gamma^2}{r_1 r_2 A_1 A_2 s^2}$$

Hệ có ba vòng lặp:

$$L_1 = -\frac{\gamma}{r_1 A_1 s}, \quad L_2 = -\frac{\gamma}{r_1 A_2 s}, \quad L_3 = -\frac{\gamma}{r_2 A_2 s}$$

trong đó có hai vòng lặp  $L_1$  và  $L_3$  không dính nhau (không có *đoạn nối* chung). Bởi vậy:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3 = \frac{r_1 r_2 A_1 A_2 s^2 + \gamma(r_1 A_1 + r_2 A_1 + r_2 A_2)s + \gamma^2}{r_1 r_2 A_1 A_2 s^2}$$

Vì cả ba vòng lặp đều dính vào  $P_1$  (có chung *đoạn* với  $P_1$ ) nên:

$$\Delta_1 = 1$$

Vậy

$$G(s) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\gamma^2}{r_1 r_2 A_1 A_2 s^2 + \gamma(r_1 A_1 + r_2 A_1 + r_2 A_2)s + \gamma^2}$$

□

## 2.2.5 Đồ thị đặc tính tần biên-pha

### Khái niệm hàm đặc tính tần

Xét hệ tuyến tính với mô hình phương trình vi phân (2.28). Hệ có hàm truyền  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad (m \leq n)$$

Hàm đặc tính tần  $G(j\omega)$  được hiểu là:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} \quad (2.51)$$

**Chú ý:** Hàm  $G(j\omega)$  trong (2.51) sẽ không phải là ảnh Fourier của hàm trọng lượng  $g(t)$ , nếu  $G(s)$  có bán kính hội tụ  $\sigma > 0$ . Từ mục 2.1.4 ta đã được biết rằng để  $G(j\omega)$  trong (2.51) là ảnh Fourier của  $g(t)$  thì  $G(s)$  phải có bán kính hội tụ bằng 0, tức là  $G(s)$  phải có tất cả các điểm cực nằm bên trái trục ảo, hay hàm truyền  $G(s)$  phải là một *hàm bên*.

Như vậy là ta đã định nghĩa xong hàm đặc tính tần. Nhưng hàm đặc tính tần đại diện cho tính chất gì của hệ thống?. Để trả lời câu hỏi này, ta xét ví dụ sau.

#### Ví dụ 2.25: Ý nghĩa của hàm đặc tính tần

Xét hệ có hàm truyền:

$$G(s) = -\frac{2(s+0,5)}{s+1}$$

Kích thích hệ từ trạng thái 0 bằng tín hiệu điều hòa  $u(t) = \sin(\omega t)$ , với ảnh Laplace

$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ , ta có đáp ứng:

$$Y(s) = -\frac{2(s+0,5)}{s+1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{1}{1 + \omega^2} \left[ \frac{\omega}{s+1} - \frac{\omega(1+2\omega^2)}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2} \right]$$

Suy ra

$$y(t) = \frac{1}{1 + \omega^2} \left[ \omega e^{-t} - (1 + 2\omega^2) \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) \right]$$

và khi  $t \rightarrow \infty$  thì do  $e^{-t} \rightarrow 0$  ta được:

$$y(t) = \frac{\sqrt{1+5\omega^2+4\omega^4}}{1+\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{với} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega}{1+2\omega^2} \quad (2.52)$$

Mặt khác hàm đặc tính tần của hệ là:

$$G(j\omega) = -\frac{2(j\omega+0,5)}{j\omega+1} = -\frac{1+2\omega^2}{1+\omega^2} - j \frac{\omega}{1+\omega^2} = \frac{\sqrt{1+5\omega^2+4\omega^4}}{1+\omega^2} \cdot e^{j\varphi} \quad (2.53)$$

với  $\varphi = \arctan \frac{\omega}{1+2\omega^2}$ . Do đó nếu so sánh (2.52) với (2.53) ta sẽ đi đến được kết luận cho trường hợp  $t \rightarrow \infty$ :

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{với } \varphi \text{ là góc pha của } G(j\omega).$$

□

Tổng quát hóa kết luận của ví dụ 2.25 ta có định lý sau:

**Định lý 2.7:** Nếu kích thích một hệ thống có hàm truyền *bền*  $G(s)$  từ trạng thái 0, tức là tại thời điểm kích thích hệ có

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = 0$$

bằng tín hiệu điều hòa  $u(t) = e^{j\omega t}$  thì khi  $t \rightarrow \infty$ , tức là hệ ở chế độ xác lập, sẽ có đáp ứng  $y(t)$  được xác định từ hàm đặc tính tần  $G(j\omega)$  như sau:

$$y(t) = |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad \text{với góc pha } \varphi = \arg G(j\omega) \quad (2.54)$$

Trong công thức (2.54) ta đã sử dụng ký hiệu  $\arg G(j\omega)$  để chỉ góc pha của  $G(j\omega)$ :

$$\arg G(j\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)}$$

và  $\operatorname{Re} G(j\omega)$  là phần thực,  $\operatorname{Im} G(j\omega)$  là phần ảo của  $G(j\omega)$ . Nói cách khác:

$$G(j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) + j \cdot \operatorname{Im} G(j\omega)$$

*Chứng minh:*

Do trong định lý 2.7 có giả thiết  $G(s)$  là hàm bền nên  $G(j\omega)$  là ảnh Fourier của hàm trọng lượng  $g(t)$ . Khi đó, cả hai tín hiệu vào và ra  $u(t)$ ,  $y(t)$  đều có ảnh Fourier  $U(j\omega)$ ,  $Y(j\omega)$  và hàm đặc tính tần định nghĩa bởi (2.51) cũng là:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \Big|_{\text{trạng thái đầu}=0}$$

Đó cũng là mô hình mô tả hệ khi  $t \rightarrow \infty$  theo nghĩa:

$$G(j\omega): u(t) \mapsto y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)U(j\omega)\}$$

Vì chỉ xét hệ ở chế độ xác lập với  $t \rightarrow \infty$  nên ta có thể xem các tín hiệu  $u(t)$ ,  $y(t)$  là xác định với  $-\infty \leq t \leq \infty$ . Bởi vậy, nếu kích thích hệ bằng tín hiệu tuần hoàn  $u(t)$  chu kỳ  $T$  ở đầu vào thì cùng với ảnh Fourier  $U(j\omega)$ :

$$U(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \quad \text{với } c_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} t} dt$$

tín hiệu  $y(t)$  ở đầu ra sẽ có ảnh  $Y(j\omega)$  là:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T}) G(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n G(jn \frac{2\pi}{T}) \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T}) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T}) \quad \text{trong đó } \hat{c}_n = c_n G(jn \frac{2\pi}{T}) \text{ và } c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Vậy: } y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T}) e^{j\omega t} d\omega \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n G(jn \frac{2\pi}{T}) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T}) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n G(jn \frac{2\pi}{T}) e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad \text{với } d_n = c_n G(jn \frac{2\pi}{T})
\end{aligned}$$

Điều đó khẳng định tính đúng đắn của định lý 2.7, rằng tín hiệu ra  $y(t)$  cũng tuần hoàn với chu kỳ  $T$  và  $d_n$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  là các hệ số chuỗi Fourier của nó, tức là:

$$d_n = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

□

### Xây dựng hàm đặc tính tần bằng thực nghiệm

Định lý 2.7, đặc biệt là phần chứng minh của nó, đưa ta đến thuật toán xác định hàm đặc tính tần (cũng là mô hình ở chế độ xác lập) cho hệ tuyến tính, tham số hằng, bằng phương pháp thực nghiệm chủ động gồm các bước như sau:

- 1) Thiết kế tín hiệu  $u(t)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T$  chọn trước có dải tần số làm việc đủ lớn và xác định các hệ số chuỗi Fourier  $c_n$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  của nó theo (2.12):

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Ta cũng có thể chọn trước hai dãy giá trị thực  $a_k$ ,  $k=0, 1, \dots$  và  $b_k$ ,  $k=1, 2, \dots$  rồi thiết kế  $u(t)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T$  theo:

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

Khi đó các hệ số phức  $c_n$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  sẽ là

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n + jb_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

- 2) Kích thích hệ ở đầu vào bằng tín hiệu  $u(t)$  vừa được thiết kế rồi đo tín hiệu  $y(t)$  cũng tuần hoàn với chu kỳ  $T$  ở đầu ra.
- 3) Tính các hệ số chuỗi Fourier  $d_n$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  của  $y(t)$ . Nếu kết quả đo được ở bước 2) chỉ là dãy gồm  $N$  giá trị  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$  trong một chu kỳ, thì các hệ số  $d_n$ ,  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  sẽ được tính xấp xỉ nhờ công thức DFS, tức là:

$$d_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i e^{-j \frac{2\pi n i}{N}}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

**Chú ý** rằng do  $d_n$  trong công thức trên là tuần hoàn với chu kỳ  $N$  nên ở đây ta chỉ cần tính  $N$  giá trị của nó trong một chu kỳ  $d_n$ ,  $n=0, 1, \dots, N-1$  là đủ.

4) Tính các giá trị của hàm đặc tính tần:

$$G(jn\omega_0) = \frac{d_n}{c_n}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

rồi biểu diễn chúng dưới dạng đồ thị (biên–pha hoặc Bode).

Cuối cùng, cũng từ các kết quả phân tích trên, ta còn nhận thấy là khi hệ được kích thích bằng tín hiệu điều hòa:

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

ở đầu vào, thì với  $a_k = 0$ ,  $\forall k$  và  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = b_3 = \dots = 0$ , tín hiệu ra khi  $t \rightarrow \infty$  sẽ là:

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \quad \text{với} \quad \varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$$

### Đồ thị đặc tính tần biên–pha

Đường biểu diễn hàm đặc tính tần  $G(j\omega)$  dưới dạng đồ thị theo tham số  $\omega$  khi  $\omega$  chạy từ 0 đến  $\infty$  trong hệ trục tọa độ có trục tung  $\text{Im}G(j\omega)$  và trục hoành  $\text{Re}G(j\omega)$  được gọi là *đường đồ thị đặc tính tần biên–pha*.

**Ví dụ 2.26:** Xây dựng hàm đặc tính tần

Cho một hệ thống có hàm truyền

$$G(s) = \frac{4}{1+s}$$

Hàm đặc tính tần của hệ là

$$G(j\omega) = \frac{4}{1+j\omega} = \underbrace{\frac{4}{1+\omega^2}}_{\text{Re}G(j\omega)} - j \underbrace{\frac{4\omega}{1+\omega^2}}_{\text{Im}G(j\omega)}$$

Do có

$$[\text{Re}G(j\omega) - 2]^2 + [\text{Im}G(j\omega)]^2 = 4$$

nên khi  $\omega$  chạy từ 0 đến  $\infty$ , đồ thị của nó sẽ là nửa đường tròn nằm dưới trục hoành (vì khi đó hàm  $G(j\omega)$  luôn có phần ảo nhỏ hơn 0) – hình 2.44.

Ngoài ra, vì  $G(s)$  còn là hàm bền, nên với đồ thị đặc tính tần cho trong hình 2.45 đó ta sẽ xác định được đáp ứng  $y(t)$  của hệ khi bị kích thích từ trạng thái 0 bởi tín hiệu điều hòa  $u(t) = \sin(t)$ . Theo định lý 2.7, đặc biệt từ ví dụ 2.25, thì đáp ứng đó là:

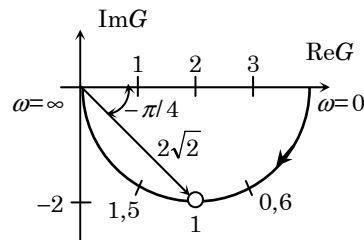
$$t \rightarrow \infty: y(t) = 2\sqrt{2} \sin(t - \frac{\pi}{4})$$

□

**Ví dụ 2.27:** Xây dựng hàm đặc tính tần

Xét hệ với hàm truyền

$$G(s) = \frac{3}{s(1+2s)}$$



**Hình 2.44:** Đồ thị đặc tính tần của ví dụ 2.26.

Hệ có hàm đặc tính tần

$$G(j\omega) = \frac{3}{j\omega(1+j\omega)} = -\underbrace{\frac{6}{1+4\omega^2}}_{\text{Re } G(j\omega)} - j\underbrace{\frac{3}{\omega(1+4\omega^2)}}_{\text{Im } G(j\omega)}$$

và từ đó ta được đường đặc tính tần của hệ cho trong hình 2.45a). Đường đặc tính tần này có một đường tiệm cận là

$$\text{Re } G = -6$$



#### Ví dụ 2.28: Xây dựng hàm đặc tính tần

Cho hệ với hàm truyền

$$G(s) = \frac{5}{1+5s+4s^2}$$

Từ  $G(s)$  ta có hàm đặc tính tần và đó cũng là ảnh Fourier  $G(j\omega)$  của hàm trọng lượng  $g(t)$ , vì  $G(s)$  là hàm bên (có hai điểm cực là  $s_1 = -\frac{1}{4}$  và  $s_2 = -1$ ):

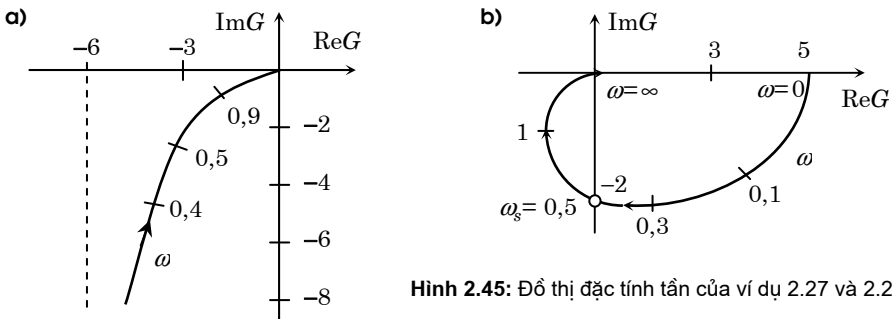
$$G(j\omega) = \frac{5}{1+5j\omega+4(j\omega)^2} = \frac{5-20\omega^2}{1+17\omega^2+16\omega^4} - j\frac{25\omega}{1+17\omega^2+16\omega^4}$$

Đồ thị hàm  $G(j\omega)$  cho trong hình 2.45b). Với đồ thị đó ta thấy khi  $\omega_s = 0,5$  thì

$$\text{Re}[G(j\omega)] = 0 \quad \text{và} \quad |G(j\omega)| = 2$$

Nói cách khác nếu kích thích hệ từ trạng thái 0 bằng tín hiệu  $u(t) = \sin(0,5t)$  thì sau một khoảng thời gian đủ lớn ( $t \rightarrow \infty$ ), đáp ứng của hệ sẽ là

$$y(t) = 2\sin\left(0,5t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Hình 2.45: Đồ thị đặc tính tần của ví dụ 2.27 và 2.28

#### Ví dụ 2.29: Sử dụng hàm đặc tính tần

Cho một hệ thống được mô tả bởi hàm truyền  $G(s) = \frac{5}{4s(1+0,5s)^2}$ . Hãy xác định điểm tần số  $\omega_0$  mà tại đó có  $|G(j\omega)| = 1$ . Hệ có hàm đặc tính tần:

$$G(j\omega) = \frac{5}{4j\omega(1+0,5j\omega)^2}$$

Từ hàm đặc tính tần ta có:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{5}{4j\omega_0(1+0,5j\omega_0)^2} \right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left| j\omega_0 \left( 1 + j\frac{\omega_0}{2} \right)^2 \right|^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \omega_0^6 + 8\omega_0^4 + 16\omega_0^2 - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 = 1$$

□

### Ví dụ 2.30: Xây dựng hàm đặc tính tần

Cho hệ với hàm truyền

$$G(s) = \frac{b}{1+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4}$$

và  $G(s)$  được giả thiết là hàm bền. Hãy xác định tín hiệu  $u(t)$  sao cho sau một khoảng thời gian  $t$  đủ lớn ( $t \rightarrow \infty$ ) đáp ứng  $y(t)$  của hệ cho trường hợp được kích thích từ trạng thái 0 bằng tín hiệu đó sẽ có một góc lệch pha với  $u(t)$  là  $\varphi = \pm 90^\circ$ .

Từ  $G(s)$  ta có hàm đặc tính tần  $G(j\omega)$  và đó cũng là ảnh Fourier của hàm trọng lượng  $g(t)$ , vì  $G(s)$  là hàm bền:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{bA}{\underbrace{A^2+B^2}_{\text{Re}G(j\omega)}} - j \frac{bB}{\underbrace{A^2+B^2}_{\text{Im}G(j\omega)}}$$

trong đó

$$A = 1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4, \quad B = a_1\omega - a_3\omega^3.$$

Hình 2.46 biểu diễn đường đặc tính tần của hệ. Theo định lý 2.7 và công thức (2.54), nếu có  $u(t) = e^{j\omega_s t}$  ở đầu vào thì đáp ứng của hệ khi  $t \rightarrow \infty$  sẽ là

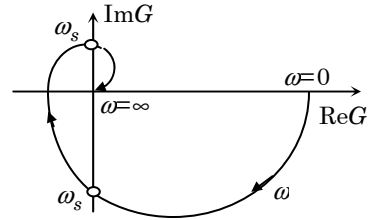
$$y(t) = |G(j\omega_s)| e^{j(\omega_s t + \text{arc}G(j\omega_s))}$$

Điều đó nói rằng để  $y(t)$  có một góc lệch pha với  $u(t)$  là  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  ta phải xác định điểm tần số  $\omega_s$  của  $u(t) = e^{j\omega_s t}$  sao cho:

$$\text{arc}G(j\omega_s) = \frac{\text{Im}G(j\omega_s)}{\text{Re}G(j\omega_s)} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}G(j\omega_s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{bA}{A^2+B^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_s = \sqrt{\frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4}}{2a_4}}$$

□



**Hình 2.46:** Đồ thị đặc tính tần biên -pha của ví dụ 2.30.



Trên đây là những ví dụ về việc xây dựng đường đặc tính tần biên–pha từ hàm truyền của hệ thống. Đặt ngược lại vấn đề là ta có bài toán phải tìm hàm truyền  $G(s)$  từ đường đồ thị của hàm đặc tính tần biên–pha  $G(j\omega)$ . Bài toán ngược này ta thường gặp khi phải thực hiện công việc mô hình hóa hệ thống tuyến tính bằng phương pháp thực nghiệm, tức là sau khi quan sát/đo các tín hiệu vào/ra của hệ thống ta có được đồ thị hàm  $G(j\omega)$  thì bước tiếp theo là từ đồ thị đó của  $G(j\omega)$  phải xác định bậc  $m, n$  cũng như các hệ số  $b_0, b_1, \dots, b_m$  và  $a_0, a_1, \dots, a_n$  cho hàm truyền (2.37).

Chìa khóa cho việc giải bài toán ngược là mối liên hệ giữa dạng của đồ thị  $G(j\omega)$  với  $G(s)$  tại những điểm tần số đặc biệt mà ở đây ta quan tâm hơn cả là hai điểm tần số  $\omega=0$  và  $\omega=\infty$ .

Trước hết ta xét mối liên hệ giữa chúng khi  $\omega=\infty$ . Từ  $G(s)$  cho trong công thức (2.37) ta có

$$G(j\omega) = (j\omega)^{m-n} \frac{b_0(j\omega)^{-m} + b_1(j\omega)^{1-m} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^{-n} + a_1(j\omega)^{1-n} + \dots + a_n} \quad (2.55)$$

Suy ra:

**Định lý 2.8:** Nếu một hệ thống tuyến tính có hàm truyền  $G(s)$  là hợp thức thì hàm  $G(j\omega)$  tại điểm tần số  $\omega=\infty$  sẽ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } m < n \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{nếu } m = n \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{nếu } m > n \end{cases} \\ \text{b) } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) &= -(n-m) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Theo định lý 2.8, nếu đồ thị của  $G(j\omega)$  kết thúc tại gốc tọa độ thì hàm truyền  $G(s)$  phải là một hàm hợp thức chặt.

Bước tiếp theo là ta tìm quan hệ của  $G(j\omega)$ ,  $G(s)$  khi  $\omega=0$  và để làm điều này ta biến đổi  $G(j\omega)$  từ (2.55) về dạng:

$$G(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^r} \cdot \frac{(1+T_1'j\omega)(1+T_2'j\omega) \dots}{(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega) \dots}, \quad (2.56)$$

trong đó  $r$  là hằng số phụ thuộc vào giá trị các tham số đầu  $b_0, b_1, \dots, a_0, a_1, \dots$  có bằng 0 hay không. Chẳng hạn như

- a)  $r < 0$  nếu  $b_0=b_1=\dots=b_{r-1}=0$  và  $a_0 \neq 0$
- b)  $r > 0$  nếu  $a_0=a_1=\dots=a_{r-1}=0$  và  $b_0 \neq 0$
- c)  $r=0$  nếu  $a_0 \neq 0$  và  $b_0 \neq 0$

Với (2.56) ta thấy:

**Định lý 2.9:** Đồ thị hàm đặc tính tần biên–pha  $G(j\omega)$  dạng (2.56) tại điểm tần số  $\omega=0$  và hàm truyền  $G(s)$  của nó có quan hệ:

- Nếu  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)$  là một số thực hữu hạn khác 0, tức là đồ thị của  $G(j\omega)$  bắt đầu từ một điểm trên trục thực, thì  $k = \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{G}(j\omega)$  và  $r=0$ . Hệ có hàm truyền với  $r=0$  được gọi là *hệ có khâu khuếch đại*.
- Nếu  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)=0$  thì  $r<0$  và  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{arc}G(j\omega) = |r| \cdot \frac{\pi}{2}$ . Hệ có hàm truyền với  $r<0$  được gọi là *hệ có khâu vi phân*.
- Nếu  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \infty$  thì  $r>0$  và  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{arc}G(j\omega) = -r \cdot \frac{\pi}{2}$ . Hệ có hàm truyền với  $r>0$  được gọi là *hệ có khâu tích phân*.

## 2.2.6 Đồ thị đặc tính tần logarith - Đồ thị Bode

Bên cạnh việc biểu diễn hàm đặc tính tần  $G(j\omega)$  trong mặt phẳng với hai trục tọa độ  $\text{Re}G(j\omega)$  và  $\text{Im}G(j\omega)$  như mục 2.2.5 vừa trình bày người ta còn có một phương pháp biểu diễn khác là đồ thị đặc tính logarith, hay còn gọi biểu đồ Bode. Đây là cách biểu diễn  $G(j\omega)$  thành hai đồ thị riêng biệt theo  $\omega$  cho:

- biên độ, hay giá trị logarith của  $|G(j\omega)|$  là  

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg |G(j\omega)|, \text{ có đơn vị là Dezibel (dB),}$$
- và pha, hay giá trị góc  $\varphi(\omega) = \text{arc}G(j\omega)$  có đơn vị là Grad.

Cả hai đồ thị này đều có trục hoành là  $\omega$  song không được chia đều theo giá trị của  $\omega$  mà lại theo  $\lg(\omega)$ . Lý do cho việc chia này là để trong một khoảng diện tích vẽ tương đối nhỏ, ta vẫn có được đồ thị minh họa đầy đủ cho hệ thống thống qua  $G(j\omega)$  cho một dải tần số rất lớn, cũng như công việc xây dựng đồ thị của

$$G(j\omega) = k \frac{(1+T_1'j\omega)(1+T_2'j\omega) \cdots (1+T_m'j\omega)}{(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega) \cdots (1+T_nj\omega)} \quad (2.57)$$

được thực hiện một cách đơn giản là cộng trừ các đồ thị thành phần:

$$L(\omega) = 20 \left[ \sum_{k=1}^m \lg |1+T_k'j\omega| - \sum_{k=1}^n \lg |1+T_kj\omega| \right] = 20 \lg k + \sum_{k=1}^m L_k'(\omega) - \sum_{k=1}^n L_k(\omega)$$

trong đó

$$L_k'(\omega) = 20 \lg |1+T_k'j\omega| \quad \text{và} \quad L_k(\omega) = 20 \lg |1+T_kj\omega|$$

**Ví dụ 2.31:** Xây dựng biểu đồ Bode của khâu khuếch đại

*Khâu khuếch đại* được hiểu là một *hệ động học cơ bản* có hàm truyền

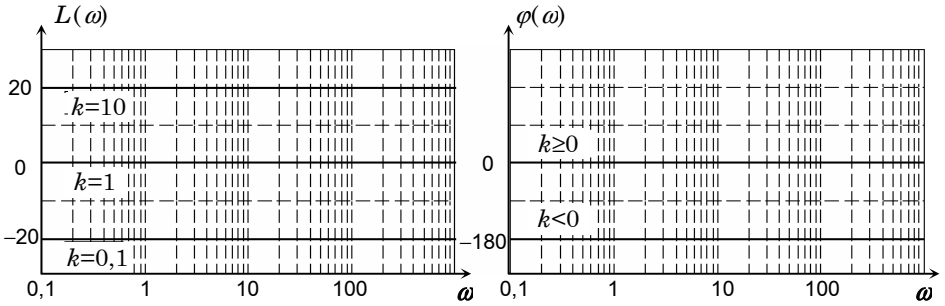
$$G(s) = k$$

Khâu này có hàm đặc tính tần:

$$G(j\omega) = k$$

Do đó (hình 2.47):

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg |k| \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \geq 0 \\ -180 & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$



**Hình 2.47:** Biểu đồ Bode của khâu khuếch đại.

**Ví dụ 2.32:** Xây dựng biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất

*Khâu quán tính bậc nhất* được hiểu là một hệ động học cơ bản có hàm truyền

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

Khâu này có hàm đặc tính tần

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + Tj\omega} = \frac{1}{1 + (T\omega)^2} - j \frac{T\omega}{1 + (T\omega)^2}$$

Nên

$$L(\omega) = -10 \cdot \lg(1 + T^2 \omega^2) \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = -\arctan T\omega.$$

Đường đồ thị của  $L(\omega)$  có hai tiệm cận ứng với khi  $\omega \rightarrow 0$  và khi  $\omega \rightarrow \infty$ :

$$L(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{khi } \omega \rightarrow 0 \\ -20(\lg \omega + \lg T) & \text{khi } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.58)$$

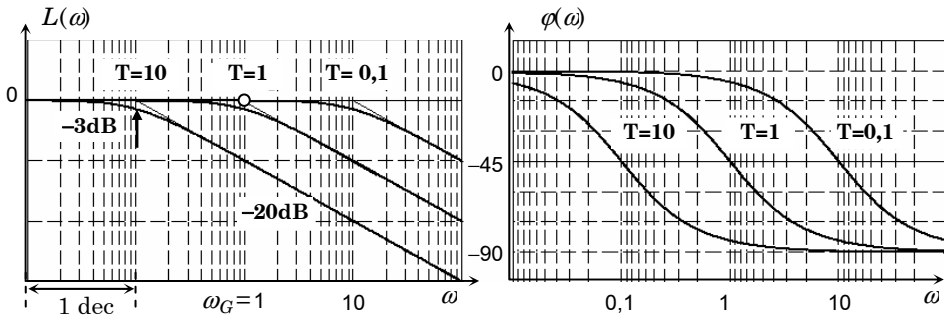
và hai đường tiệm cận này cắt nhau tại  $\omega_G = \frac{1}{T}$  được gọi là *tần số gãy* và ở đó có

$$L(\omega_G) = -10 \cdot \lg(2) \approx -3\text{dB}$$

Từ (2.58) ta thấy đường tiệm cận thứ hai ứng với trường hợp  $\omega \rightarrow \infty$  là đường thẳng có độ dốc:

$$-20 \text{ dB/dec}$$

trong đó 1 dec là độ dài khoảng  $[\omega, 10\omega]$  trên trục tung ( $\omega$  là tùy ý). Hình 2.48 biểu diễn biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất.



Hình 2.48: Biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất cho trong ví dụ 2.32.

**Ví dụ 2.33:** Xây dựng biểu đồ Bode của khâu khuếch đại-vi phân

Khâu *khuếch đại-vi phân* là một *hệ động học cơ bản* có hàm truyền

$$G(s) = 1 + Ts$$

Khâu này có hàm đặc tính tần:

$$G(j\omega) = 1 + Tj\omega$$

Suy ra

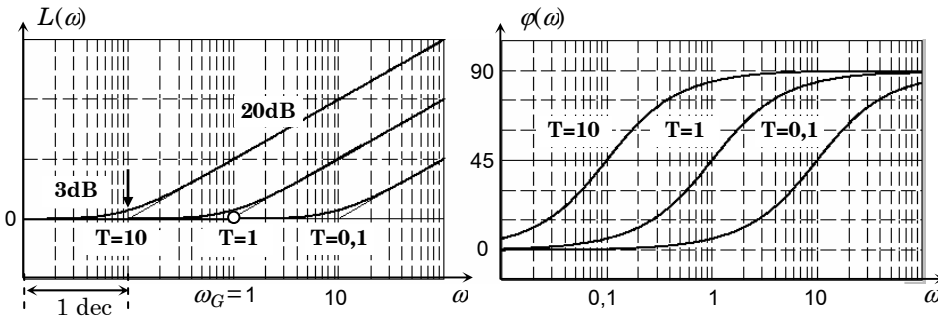
$$L(\omega) = 10 \cdot \lg(1 + T^2 \omega^2) \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = \arctan T\omega.$$

Như vậy, đồ thị  $L(\omega)$  có hai tiệm cận ứng với khi  $\omega \rightarrow 0$  và khi  $\omega \rightarrow \infty$  là

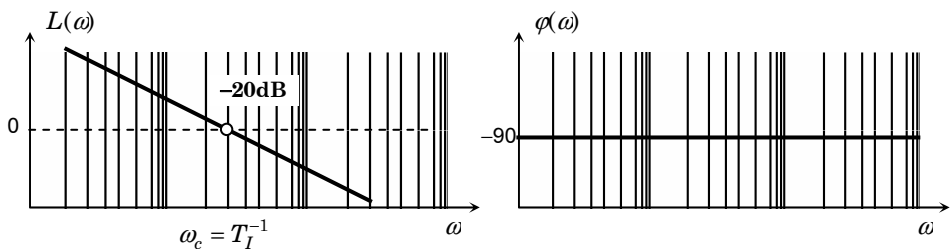
$$L(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{khi } \omega \rightarrow 0 \\ 20(\lg \omega + \lg T) & \text{khi } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Chúng cắt nhau tại điểm tần số  $\omega_G = \frac{1}{T}$  được gọi là *tần số gãy*. Đường tiệm cận thứ hai

ứng với trường hợp  $\omega \rightarrow \infty$  là đường thẳng có độ dốc 20 dB/dec. Hình 2.49 biểu diễn biểu đồ Bode của khâu đã cho. □



Hình 2.49: Biểu đồ Bode của khâu cho trong ví dụ 2.33.



**Hình 2.50:** Biểu đồ Bode của khâu tích phân cho trong ví dụ 2.34.

**Ví dụ 2.34:** Xây dựng biểu đồ Bode của khâu tích phân

*Khâu tích phân* là hệ động học cơ bản có hàm truyền  $G(s) = \frac{1}{T_I s}$ . Khâu này có

$$G(j\omega) = \frac{1}{T_I j\omega} = \frac{-j}{T_I \omega} \quad \Rightarrow \quad L(\omega) = -20 \left( \lg \omega - \lg \frac{1}{T_I} \right) \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

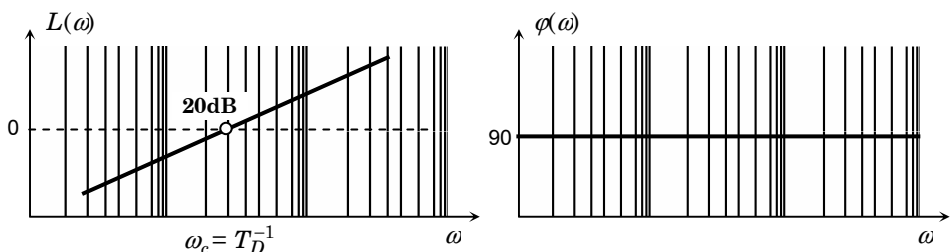
Suy ra biểu đồ Bode của nó có dạng như ở hình 2.50. Đường đồ thị  $L(\omega)$  là đường thẳng với độ dốc  $-20\text{dB/dec}$ . Nó sẽ cắt trục hoành (là trục mà tại đó  $L(\omega)$  có giá trị 0) tại điểm tần số  $\omega_c = T_I^{-1}$  và điểm tần số này được gọi là *tần số cắt*. □

**Ví dụ 2.35:** Xây dựng biểu đồ Bode của khâu vi phân

*Khâu vi phân* là một hệ động học cơ bản được mô tả bởi hàm truyền  $G(s) = T_D s$ . Khâu này có

$$G(j\omega) = T_D j\omega \quad \Rightarrow \quad L(\omega) = 20 \left( \lg \omega - \lg \frac{1}{T_D} \right) \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

Với phương trình của  $L(\omega)$  và  $\varphi(\omega)$  như vậy ta có biểu đồ Bode của khâu vi phân như hình 2.51 mô tả. Đồ thị  $L(\omega)$  là một đường thẳng có độ dốc  $20\text{dB/dec}$  và tại điểm tần số  $\omega_c = T_D^{-1}$  có giá trị 0. Điểm tần số này được gọi là *tần số cắt*. □



**Hình 2.51:** Biểu đồ Bode của khâu vi phân cho trong ví dụ 2.35.

**Ví dụ 2.36:** Xây dựng biểu đồ Bode của khâu dao động bậc hai

Khâu dao động bậc hai là một hệ động học cơ bản có hàm truyền

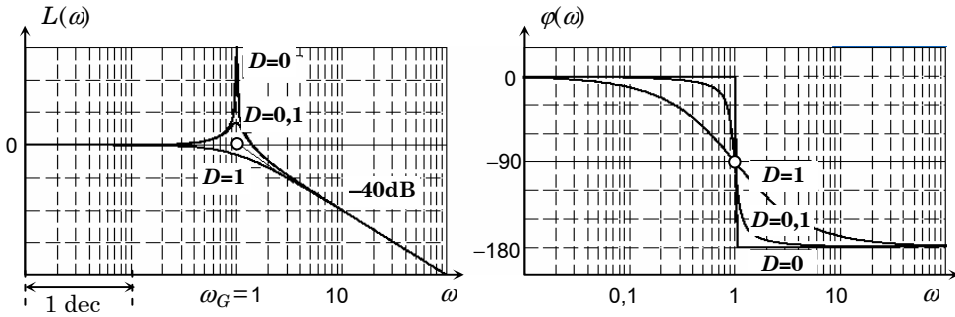
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2DTs + T^2s^2} \quad \text{với } 0 < D < 1$$

Nếu kích thích khâu này bằng tín hiệu  $1(t)$  ở đầu vào thì theo ví dụ 2.4, phần 7), đáp ứng đầu ra sẽ là hàm  $h(t)$  có dạng dao động. Dao động đó sẽ tắt dần khi  $T > 0$  (hình 2.9c) hoặc ngược lại không tắt nếu  $T < 0$ . Đó chính là lý do tại sao nó có tên là *khâu dao động bậc hai*. Khâu này có hàm đặc tính tần

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2DTj\omega - T^2\omega^2}$$

Suy ra

$$L(\omega) = -10 \lg \left( (1 - T^2\omega^2)^2 + 4D^2T^2\omega^2 \right) \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = -\arctan \frac{2DT\omega}{1 - T^2\omega^2}$$



**Hình 2.52:** Biểu đồ Bode của khâu dao động bậc hai tắt dần cho trong ví dụ 2.36.

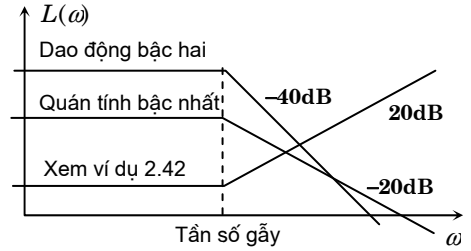
Đồ thị  $L(\omega)$  sẽ có hai đường tiệm cận ứng với hai trường hợp khác nhau là khi  $\omega \rightarrow 0$  và khi  $\omega \rightarrow \infty$  như sau

$$\omega \rightarrow 0: \quad L(\omega) \approx 0$$

$$\omega \rightarrow \infty: \quad L(\omega) \approx -40 \left( \lg \omega - \lg \frac{1}{T} \right) \quad \text{với độ dốc là } -40\text{dB/dec.}$$

Hai đường tiệm cận này cắt nhau tại điểm tần số gãy  $\omega_G = \frac{1}{T}$ . Hình 2.53 là đồ thị Bode của khâu dao động bậc hai tắt dần. □

Các ví dụ trên với biểu đồ Bode  $L(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  của *những khâu động học cơ bản* sẽ được sử dụng để thiết kế biểu đồ Bode cho một khâu tuyến tính bất kỳ có hàm đặc tính tần số theo cấu trúc (2.57), bằng cách cộng/trừ các đường  $L(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  cơ bản đó.



**Hình 2.53:** Xấp xỉ đồ thị Bode bằng đường gãy khúc

Thông thường, để đơn giản cho việc cộng/trừ đồ thị này người ta xấp xỉ  $L(\omega)$  bằng những đường thẳng tiệm cận của nó, tức là  $L(\omega)$  sẽ có dạng xấp xỉ như một đường gãy khúc (*polycon*). Sau này, như chúng ta sẽ thấy ở các chương tiếp theo, việc xấp xỉ đó hầu như không ảnh hưởng tới ứng dụng của biểu đồ Bode trong quá trình xét tính động học cơ bản của hệ thống. Hình 2.53 minh họa việc xấp xỉ  $L(\omega)$  thành đường gãy khúc thông qua các đường tiệm cận của nó.

#### **Ví dụ 2.37:** Xây dựng biểu đồ Bode

Cho hệ có hàm truyền

$$G(s) = \frac{110}{(s+1)(s+11)} = 10 \cdot \frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{11}s}$$

Gọi  $L(\omega)$  là phần đồ thị biên độ biểu đồ Bode của hệ. Vậy thì

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega)$$

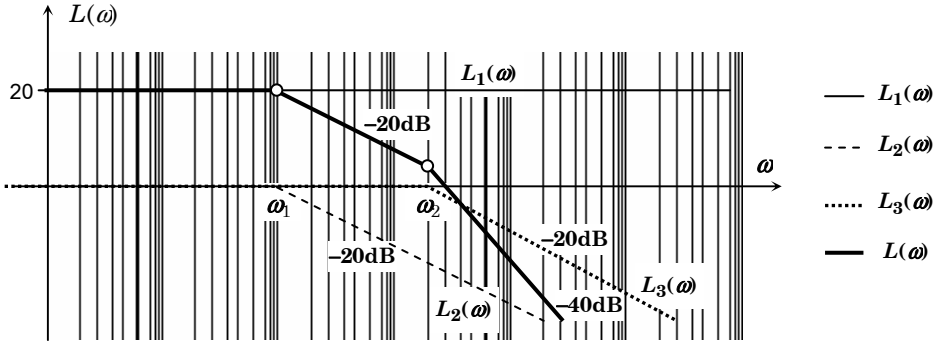
trong đó:

- $L_1(\omega)$  là phần đồ thị Bode của *khâu khuếch đại* (ví dụ 2.31) với  $G_1(s)=10$
- $L_2(\omega)$  là phần đồ thị biên độ biểu đồ Bode của *khâu quán tính bậc nhất* (ví dụ 2.32) với hàm truyền  $G_2(s) = \frac{1}{1+s}$ . Nó có tần số gãy  $\omega_1 = 1$ .
- $L_3(\omega)$  là phần đồ thị biên độ biểu đồ Bode của *khâu quán tính bậc nhất* có hàm truyền  $G_3(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{11}s}$ . Tần số gãy của  $L_3(\omega)$  là  $\omega_2 = 11$ .

Cộng các đường xấp xỉ dạng gãy khúc của  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$  lại với nhau ta có được đường gần đúng của  $L(\omega)$ . Đường này cũng có dạng gãy khúc gồm (hình 2.54):

- Phần ứng với  $\omega < \omega_1$  có độ nghiêng bằng 0 và giá trị là 20dB.
- Phần ứng với  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  có độ nghiêng bằng -20dB/dec.
- Phần ứng với  $\omega_2 < \omega$  có độ nghiêng bằng -40dB/dec.





Hình 2.54: Đường đồ thị Bode gần đúng của hệ cho trong ví dụ 2.37

### 2.2.7 Quan hệ giữa phần thực và ảo của hàm đặc tính tần-Toán tử Hilbert

Tại các mục 2.2.5 và 2.2.6 ta đã làm quen với hàm đặc tính tần

$$G(j\omega) = \text{Re}G(j\omega) + j\text{Im}G(j\omega)$$

của một hệ thống tuyến tính, cũng như những phương pháp biểu diễn trực quan  $G(j\omega)$  dưới dạng đồ thị. Tiếp theo, sẽ nghiên cứu mối quan hệ giữa phần thực và phần ảo

$$T(\omega) = \text{Re}G(j\omega), \quad A(\omega) = \text{Im}G(j\omega)$$

của  $G(j\omega)$  cho một hệ tuyến tính. Việc nghiên cứu đó là cần thiết, vì không phải cứ lấy hai hàm thực  $T(\omega)$ ,  $A(\omega)$  bất kỳ nào đó theo biến  $\omega$  rồi ghép chúng lại với nhau

$$T(\omega) + jA(\omega)$$

cũng sẽ có được hàm đặc tính tần của một hệ tuyến tính.

Xét hệ tuyến tính causal, tham số hằng, có hàm truyền  $G(s)$  dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền. Nói cách khác

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}, \quad (m \leq n)$$

có các hệ số  $b_0, b_1, \dots, a_0, a_1, \dots$  là những số thực và nghiệm của đa thức mẫu số (điểm cực) đều nằm bên trái trục ảo.

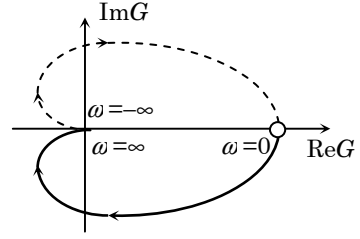
Do  $G(s)$  có hệ số là số thực nên nó sẽ có giá trị thực nếu  $s$  là số thực. Do đó

$$G(j\omega) = \overline{G(-j\omega)} \quad (2.59)$$

Điều này ta có thể thấy từ đồ thị đường đặc tính tần biên-pha khi  $\omega$  không phải chỉ đi từ 0 đến  $\infty$  mà từ  $-\infty$  đến  $\infty$  là nó sẽ có dạng đối xứng qua trục thực (hình 2.55).



**Hình 2.55:** Đường đặc tính tần biên pha của hệ tuyến tính tham số hằng với  $\omega$  đi từ  $-\infty$  đến  $\infty$  nằm đối xứng qua trục thực.



**Định lý 2.10:** Nếu hệ có hàm truyền  $G(s)$  dạng thực-hữu tỷ thì phần thực  $T(\omega)$  của hàm đặc tính tần biên-pha  $G(j\omega)$  của nó là hàm chẵn và phần ảo  $A(\omega)$  là hàm lẻ.

*Chứng minh:*

Điều khẳng định trên được suy ra từ (2.59) và hai công thức hiển nhiên đúng

$$T(\omega) = \frac{1}{2} [G(j\omega) + G(-j\omega)], \quad A(\omega) = \frac{1}{2j} [G(j\omega) - G(-j\omega)]$$

□

### Bài toán thứ nhất: Xác định hàm truyền từ phần thực hàm đặc tính tần

Giả sử là đã biết  $T(\omega)$  và phải tìm hàm truyền  $G(s)$  dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền sao cho hàm đặc tính tần biên-pha  $G(j\omega)$  của nó có phần thực là  $T(\omega)$ .

Trước tiên từ định lý 2.10 và nếu gọi

$$C(s) = \frac{1}{2} [G(s) + G(-s)]$$

sẽ được

$$C(j\omega) = T(\omega) \Rightarrow C(s) = T\left(\frac{s}{j}\right) \quad (2.60)$$

Mặt khác, vì  $G(s)$  là hàm bền nên tất cả các điểm cực  $s_1, s_2, \dots$  của  $G(s)$  phải nằm bên trái trục ảo. Suy ra các điểm cực của  $C(s)$  phân bố đối xứng qua trục ảo. Nếu có thêm giả thiết rằng tất cả các điểm cực của  $G(s)$  đều là nghiệm đơn của

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 0$$

thì  $G(s)$  phân tích được thành tổng các phân thức tối giản

$$G(s) = A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} \quad \text{với} \quad A_k = \text{Res}_{s_k} G(s)$$

Suy ra

$$C(s) = \frac{1}{2} \left[ A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} + A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{-A_k}{s + s_k} \right] \quad (2.61)$$

Để tính các hệ số  $A_k$  của (2.61) ta có thể sử dụng phương pháp residue đã giới thiệu ở mục 2.1.4. Song trong trường hợp  $s_k$  là nghiệm đơn của đa thức mẫu số, nó sẽ được xác định một cách đơn giản với công thức của Heaviside như sau

$$A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} 2(s - s_k)C(s) \quad (2.62)$$

Tổng kết lại, việc ta có thuật toán tìm lời giải cho bài toán thứ nhất:

- 1) Nếu  $T(\omega)$  không phải là hàm chẵn thì kết luận ngay là bài toán không có lời giải.
- 2) Xác định  $C(s)$  từ  $T(\omega)$  theo (2.60).
- 3) Tìm các điểm cực của  $C(s)$ . Nếu các điểm cực không phân bố đối xứng qua trục ảo thì kết luận rằng không có hàm truyền  $G(s)$  thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
- 4) Tính các hằng số  $A_k$  theo (2.62), trong đó  $s_k$  là điểm cực nằm bên trái trục ảo.
- 5) Đáp số:  $G(s) = A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k}$

**Ví dụ 2.38:** Xác định hàm truyền từ phần thực của hàm đặc tính tần

Hãy tìm hàm truyền  $G(s)$  dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền của một hệ tuyến tính để hàm đặc tính tần của nó có phần thực là

$$T(\omega) = \frac{2 + \omega^2 + \omega^4}{1 + \omega^4}$$

Theo (2.60) có

$$C(s) = T\left(\frac{s}{j}\right) = \frac{2 - s^2 + s^4}{1 + s^4} = 1 + \frac{1 - s^2}{1 + s^4}$$

Vậy  $A_0 = 1$

Hàm  $C(s)$  có bốn điểm cực nằm đối xứng qua trục ảo nên bài toán có lời giải (hình 2.56). Với hai điểm cực nằm bên trái trục ảo

$$s_1 = e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + j),$$

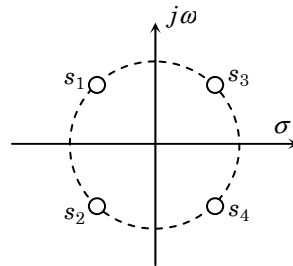
$$s_2 = e^{j\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - j)$$

ta có

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} 2(s - s_1)C(s) = \frac{1 - s_1^2}{2s_1^3} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} 2(s - s_2)C(s) = \frac{1 - s_2^2}{2s_2^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suy ra



**Hình 2.56:** Minh họa cho ví dụ 2.38

$$G(s) = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{s - e^{\frac{j.3\pi}{4}}}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{s - e^{\frac{j.5\pi}{4}}}} = \frac{s^2 + 2\sqrt{2}s + 2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$



### Bài toán thứ hai: Xác định hàm truyền từ phần ảo hàm đặc tính tần

Bài toán thứ hai phát biểu như sau: Cho trước  $A(\omega)$ . Hãy tìm hàm truyền  $G(s)$  dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền của một hệ tuyến tính sao cho hàm đặc tính tần biên-phá  $G(j\omega)$  của nó có phần ảo là  $A(\omega)$ .

Tương tự như ở bài toán thứ nhất, nếu gọi

$$D(s) = \frac{1}{2} [G(s) - G(-s)]$$

thì theo định lý 2.10 có

$$A(\omega) = \frac{1}{j} D(j\omega) \quad \Rightarrow \quad D(s) = jA\left(\frac{s}{j}\right) \quad (2.63)$$

Giả thiết thêm rằng  $G(s)$  chỉ có các điểm cực đơn. Vậy khi phân tích  $G(s)$  thành:

$$G(s) = B_0 + s \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{s - s_k}$$

hàm  $D(s)$  sẽ có dạng:

$$D(s) = \frac{1}{2} \left[ s \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{s - s_k} + s \sum_{k=1}^n \frac{-B_k}{s + s_k} \right]$$

Tương tự như ở bài toán thứ nhất, các hệ số  $B_k$  cũng được xác định một cách đơn giản nhờ công thức

$$B_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \frac{2D(s)}{s} \quad (2.64)$$

và ta có các bước giải bài toán thứ hai như sau:

- 1) Nếu  $A(\omega)$  không phải là hàm lẻ thì kết luận ngay là bài toán không có lời giải.
- 2) Xác định  $D(s)$  từ  $A(\omega)$  theo (2.63). Nếu các điểm cực của  $\frac{D(s)}{s}$  không nằm đối xứng qua trục ảo thì bài toán không có lời giải.
- 3) Tính  $B_k$  theo (2.64), trong đó  $s_k$  là những điểm cực của  $D(s)$  nằm bên trái trục ảo.
- 4) Đáp số:  $G(s) = B_0 + s \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{s - s_k}$ , với  $B_0$  là một số thực tùy ý.

### Ví dụ 2.39: Xác định hàm truyền từ phần ảo của hàm đặc tính tần

Hãy tìm hàm truyền  $G(s)$  dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền của một hệ tuyến tính để hàm đặc tính tần của nó có phần ảo là

$$A(\omega) = \frac{-\sqrt{2}\omega^3}{1+\omega^4}$$

Hàm  $A(\omega)$  là hàm lẻ. Với (2.63) có

$$D(s) = \frac{\sqrt{2}s^3}{1+s^4}$$

Giống như ví dụ 2.38, ở đây hàm  $\frac{D(s)}{s}$  cũng có bốn điểm cực nằm đối xứng qua trục ảo nên bài toán có lời giải. Từ hai điểm cực nằm bên trái trục ảo

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+j), \quad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-j)$$

ta có

$$B_1 = \frac{1-j}{2j}, \quad B_2 = \frac{1+j}{2j}$$

Suy ra

$$G(s) = B_0 + \frac{sB_1}{s-s_1} + \frac{sB_2}{s-s_2} = B_0 + \frac{-s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1},$$

trong đó  $B_0$  là một số thực tùy ý. □

### Toán tử Hilbert: Trường hợp tổng quát

Lời giải của hai bài toán trên đã ít nhiều sử dụng tới mối quan hệ giữa phần thực  $T(\omega)$  và ảo  $A(\omega)$  của hàm đặc tính tần  $\tilde{G}(j\omega)$ . Sau đây ta sẽ làm quen với công thức tổng quát mô tả mối quan hệ đó cho lớp hệ thống tuyến tính có hàm truyền  $G(s)$  dạng thực-hữu tỷ, bền và hợp thức thường vẫn được gọi là *toán tử Hilbert*.

**Định lý 2.11** (Toán tử Hilbert): Xét hàm truyền  $G(s)$  dạng thực-hữu tỷ, bền và hợp thức của một hệ tuyến tính. Giữa phần thực  $T(\omega)$  và phần ảo  $A(\omega)$  của hàm đặc tính tần  $G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) = T(\omega) + jA(\omega)$  có mối quan hệ:

$$a) \quad T(\omega) = T(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\eta)}{\omega - \eta} d\eta$$

$$b) \quad A(\omega) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\eta)}{\omega - \eta} d\eta$$

*Chứng minh:*

Trước hết ta thấy do có giả thiết là  $G(s)$  hợp thức nên theo định lý 2.8:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m < n \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{nếu } m = n \end{cases}$$

Điều này nói rằng

$$T(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} T(\omega) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m < n \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{nếu } m = n \end{cases} \quad (2.65)$$

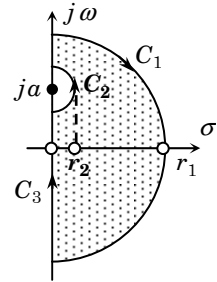
Bước tiếp theo ta tính tích phân

$$Q = \int_C \frac{G(s)}{s - ja} ds$$

trong đó  $C$  là đường lấy tích phân kín theo chiều kim đồng hồ gồm ba đường con:

- Đường  $C_1$  là nửa đường tròn nằm bên phải trục ảo có tâm là gốc tọa độ và bán kính  $r_1 \rightarrow \infty$ .
- Đường thứ hai  $C_2$  cũng là nửa đường tròn nằm bên phải trục ảo có tâm là điểm  $0 + ja$  và bán kính  $r_2 \rightarrow 0$  (hình 2.57).
- Đường thứ ba  $C_3$  là phần trục ảo trừ đoạn nằm trong đường tròn  $C_2$  với  $r_2 \rightarrow 0$ .

**Hình 2.57:** Minh họa cho phần chứng minh định lý 2.11.



Vì  $G(s)$  là hàm bên nên nó là hàm giải tích trong miền kín bao bởi đường lấy tích phân (phần nửa mặt phẳng bên phải trục ảo). Bởi vậy

$$Q = 0$$

Mặt khác

$$Q = \underbrace{\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{G(s)}{s - ja} ds}_{Q_1} + \underbrace{\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{G(s)}{s - ja} ds}_{Q_2} + \underbrace{\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{C_3} \frac{G(s)}{s - ja} ds}_{Q_3}$$

trong đó

$$Q_1 = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{G(s)}{s - ja} ds = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{1}{s - ja} ds = T(\infty) \cdot (-j\pi)$$

$$Q_2 = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{G(s)}{s - ja} ds = \lim_{s \rightarrow ja} G(s) \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \int_{C_2} \frac{1}{s - ja} ds = G(ja) \cdot (j\pi)$$

$$Q_3 = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{C_3} \frac{G(s)}{s - ja} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{G}(j\omega)}{\omega - a} d\omega$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
0 = Q &= T(\infty) \cdot (-j\pi) + G(ja) \cdot (j\pi) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{G}(j\omega)}{\omega - a} d\omega \\
&= -j\pi T(\infty) + j\pi [T(a) + jA(a)] + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\omega) + jA(\omega)}{\omega - a} d\omega
\end{aligned}$$

Cân bằng phần thực, ảo của hai vế rồi viết  $\omega$  thay cho  $a$  cũng như  $\eta$  thay cho  $\omega$  ta sẽ nhận được điều phải chứng minh.  $\square$

**Chú ý:** Nếu để ý rằng  $T(\omega)$  là hàm chẵn và  $A(\omega)$  là hàm lẻ (định lý 2.10) thì hai công thức cho trong định lý 2.11 của toán tử Hilbert còn có thể là

$$T(\omega) = T(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta A(\eta)}{\omega^2 - \eta^2} d\eta \quad \text{và} \quad A(\omega) = \frac{-2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{T(\eta)}{\omega^2 - \eta^2} d\eta$$

### 2.2.8 Xây dựng mô hình toán học của các khâu động học cơ bản bằng thực nghiệm chủ động

Trong rất nhiều trường hợp, khi mà sự hiểu biết về những quy luật giao tiếp bên trong hệ thống cũng như về mối quan hệ giữa hệ thống với môi trường bên ngoài không được đầy đủ để có thể xây dựng được một mô hình toán học hoàn chỉnh theo phương pháp lý thuyết, thì người ta thường phải áp dụng *phương pháp thực nghiệm*. Đây là phương pháp xác định mô hình toán học trên cơ sở *quan sát tín hiệu vào  $u(t)$  và ra  $y(t)$*  của hệ thống.

Phương pháp thực nghiệm xác định mô hình toán học cho hệ thống mà ở đó tín hiệu vào  $u(t)$  được chủ động chọn trước (do đó không cần phải quan sát) và chỉ cần quan sát một mình tín hiệu ra  $y(t)$ , gọi là *phương pháp thực nghiệm chủ động*.

Sau đây ta sẽ xét bài toán thực nghiệm chủ động xác định hàm truyền  $G(s)$  từ tín hiệu ra  $y(t)=h(t)$  đã quan sát được của hệ thống khi tín hiệu vào của nó là hàm Heaviside  $u(t)=1(t)$  cho những khâu động học cơ bản, bao gồm

- 1) Khâu quán tính bậc nhất hay còn gọi khâu PT<sub>1</sub> :  $G(s) = \frac{k}{1+Ts}$
- 2) Khâu tích phân-quán tính bậc nhất, hay IT<sub>1</sub> :  $G(s) = \frac{k}{s(1+Ts)}$
- 3) Khâu tích phân-quán tính bậc  $n$ , hay IT <sub>$n$</sub> :  $G(s) = \frac{k}{s(1+Ts)^n}$
- 4) Khâu quán tính bậc hai, hay còn gọi khâu PT<sub>2</sub>:  $G(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ ,  $T_1 \neq T_2$
- 5) Khâu Lead/Lag:  $G(s) = \frac{1+T_t s}{1+T_m s}$

6) Khâu dao động bậc hai:  $G(s) = \frac{k}{1 + 2DTs + T^2s^2}$ ,  $0 < D < 1$

7) Khâu chậm trễ (khâu trễ):  $G(s) = e^{-s\tau}$

### Khâu quán tính bậc nhất

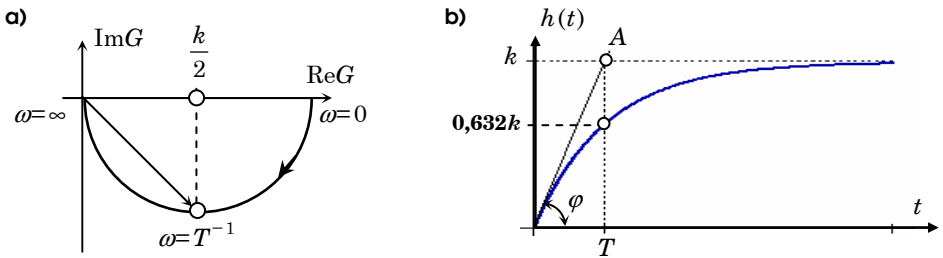
Khâu *quán tính bậc nhất* có hàm truyền

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} \quad \text{với } k, T > 0 \Rightarrow G(j\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2} \quad (2.66)$$

trong đó  $k$  được gọi là *hệ số khuếch đại* và  $T$  là *hằng số thời gian*. Ví dụ 2.4 và hình 2.9 đã cung cấp cho ta đồ thị Bode của nó. Khâu quán tính bậc nhất này có hàm quá độ

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad \text{với ảnh Laplace } H(s) = \frac{G(s)}{s}$$

Các dạng đồ thị đặc tính tần biên–pha  $G(j\omega)$  và  $h(t)$  cho ở hình 2.58.



**Hình 2.58:** Đồ thị hàm đặc tính tần biên–pha và hàm quá độ của khâu quán tính bậc nhất.

Bây giờ ta xét bài toán ngược là xác định tham số  $k, T$  của hàm truyền (2.66) từ đồ thị  $h(t)$  thu được bằng thực nghiệm chủ động.

Kẻ tiếp tuyến với  $h(t)$  tại điểm 0 và gọi góc của đường tiếp tuyến đó là  $\varphi$ . Khi đó có

$$\tan \varphi = \frac{dh(+0)}{dt} = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sH(s) - h(+0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{ks}{1 + Ts} = \frac{k}{T}$$

Ngoài ra, khi  $t \rightarrow \infty$  thì

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{1 + Ts} = k$$

Bởi vậy ta có thể xác định hai tham số  $k, T$  cho hàm truyền  $G(s)$  của khâu quán tính bậc nhất từ đồ thị hàm quá độ  $h(t)$  của nó như sau

- Hoành độ của đường tiệm cận với  $h(t)$  khi  $t \rightarrow \infty$  là giá trị  $k$
- Kẻ đường tiếp tuyến với  $h(t)$  tại  $t=0$

- Hoành độ của điểm  $A$  trên đường tiếp tuyến mà tại đó có tung độ bằng  $k$  sẽ chính là tham số  $T$  cần tìm (hình 2.58b).

Hơn nữa, cũng tại thời điểm  $T$  ta còn có

$$h(T) = k(1 - e^{-1}) \approx 0,632 \cdot k$$

do đó trong nhiều trường hợp, để tìm  $T$  một cách đơn giản, người ta đã xác định điểm trên  $h(t)$  mà tại đó có giá trị khoảng bằng 0,632 giá trị cực đại  $k$  của nó.

### Khâu tích phân-quán tính bậc nhất

Khâu tích phân-quán tính bậc nhất có hàm truyền

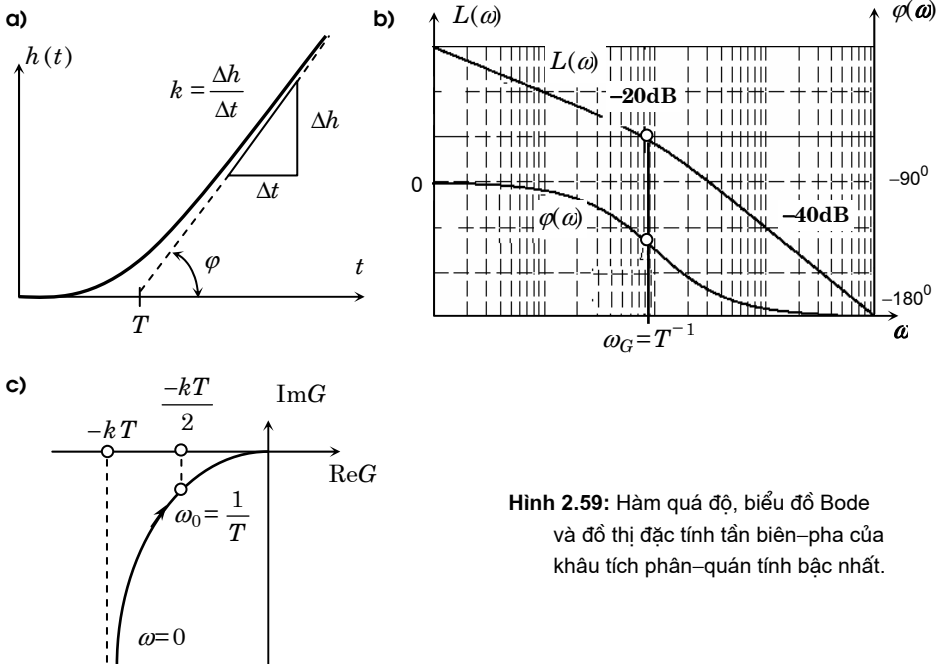
$$G(s) = \frac{k}{s(1+Ts)} \Rightarrow G(j\omega) = -\frac{kT}{1+(T\omega)^2} - j \frac{k}{\omega(1+T^2\omega^2)} \quad (2.67)$$

Gọi  $H(s)$  là ảnh Laplace của hàm quá độ  $h(t)$ . Khi đó sẽ có

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k}{s^2(1+Ts)} = k \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}} \right]$$

Suy ra

$$h(t) = k \left[ t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right]$$



**Hình 2.59:** Hàm quá độ, biểu đồ Bode và đồ thị đặc tính tần biên-pha của khâu tích phân-quán tính bậc nhất.



Hình 2.59 biểu diễn đồ thị hàm quá độ  $h(t)$ , đặc tính tần Bode  $L(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  và đặc tính tần biên–pha  $G(j\omega)$  của nó. Bây giờ ta xét bài toán ngược là xác định tham số  $k, T$  của hàm truyền (2.67) từ đồ thị  $h(t)$  thu được bằng thực nghiệm chủ động. Trước hết, do

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{-t}{T}} = 0$$

nên đồ thị đường  $h(t)$  sẽ tiến tới đường tiệm cận

$$h_{tc}(t) = k(t-T)$$

Đường tiệm cận này cắt trục hoành tại điểm  $t=T$  cũng như có góc nghiêng  $\varphi$  thỏa mãn

$$\tan \varphi = k.$$

Bởi vậy, để xác định tham số  $k, T$  cho hàm truyền  $G(s)$  từ đồ thị đường  $h(t)$  ta có thể làm như sau:

- Kẻ đường tiệm cận  $h_{tc}(t)$  với  $h(t)$  tại  $t=\infty$ .
- Xác định  $T$  là giao điểm của  $h_{tc}(t)$  với trục hoành.
- Xác định góc nghiêng  $\varphi$  của  $h_{tc}(t)$  với trục hoành rồi tính  $k=\tan \varphi$ .

Đường đặc tính tần biên–pha của khâu *tích phân–quán tính bậc nhất* có dạng như ở hình 2.59c với đường tiệm cận khi  $\omega \rightarrow 0$  là

$$\operatorname{Re} G(j\omega) \rightarrow -kT$$

### Khâu tích phân–quán tính bậc $n$

Khâu *tích phân–quán tính bậc  $n$*  có hàm truyền

$$G(s) = \frac{k}{s(1+Ts)^n} \quad (2.68)$$

Gọi  $H(s)$  là ảnh Laplace của hàm quá độ  $h(t)$ . Khi đó sẽ có

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k}{s^2(1+Ts)^n} = k \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{nT}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-i)T^2}{(1+Ts)^i} \right]$$

Suy ra

$$h(t) = k \left[ t - nT + \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-i)t^{i-1}e^{\frac{-t}{T}}}{T^{i-2}(i-1)!} \right]$$

Hình 2.60 biểu diễn dạng đồ thị của đường quá độ  $h(t)$  của khâu tích phân–quán tính bậc  $n$ . Bây giờ ta xét bài toán ngược là xác định tham số  $k, T$  và  $n$  (nếu chưa biết bậc  $n$ ) của hàm truyền (2.68) từ đồ thị  $h(t)$  thu được bằng thực nghiệm chủ động. Trước hết ta thấy, do có:

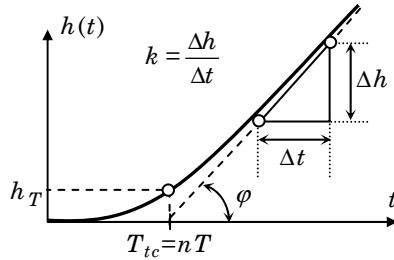
$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^i e^{\frac{-t}{T}} = 0 \quad \text{với } i = 0, 1, \dots, n$$

nên  $h(t)$  có đường tiệm cận (ứng với  $t \rightarrow \infty$ )

$$h_{tc}(t) = k(t-nT)$$

Đường tiệm cận này cắt trục hoành tại  $T_{tc}=nT$  và có góc nghiêng  $\varphi$  thỏa mãn  $\tan \varphi = k$ .

**Hình 2.60:** Hàm quá độ của tích phân-quán tính bậc  $n$ .



Do đó nếu bậc  $n$  của mô hình hàm truyền (2.68) là đã biết thì hai tham số  $k$  và  $T$  còn lại của nó sẽ được xác định từ đường đồ thị  $h(t)$  qua các bước sau

- Vẽ đường tiệm cận  $h_{tc}(t)$  với  $h(t)$  tại  $t \rightarrow \infty$
- Xác định góc nghiêng  $\varphi$  của  $h_{tc}(t)$  và tính  $k = \tan \varphi$
- Xác định giao điểm  $T_{tc}$  của  $h_{tc}(t)$  với trục hoành và tính  $T = \frac{T_{tc}}{n}$ .

Trường hợp  $n$  không biết trước thì ta cũng có thể xác định được bậc  $n$  của (2.68) từ đồ thị hàm quá độ  $h(t)$ , mà cụ thể là từ giao điểm  $T_{tc}$  và giá trị  $h_T=h(T_{tc})$  của nó tại điểm đó như sau (hình 2.60):

$$h_T = h(T_{tc}) = kTe^{-n} \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-i)n^{i-1}}{(i-1)!}$$

Sau đó lập tỷ số

$$\varphi = \frac{h_T}{kT_{tc}} = \frac{h_T}{knT} = \underbrace{\frac{e^{-n}}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-i)n^i}{(i-1)!}}_{f(n)} = f(n) \tag{2.69}$$

Hàm  $f(n)$  cho trong (2.69) được sử dụng để tính ngược  $n=f^{-1}(\varphi)$  bậc mô hình (2.68) từ tỷ số  $\varphi = \frac{h_T}{kT_{tc}}$ . Thông thường người ta hay biểu diễn hàm  $\varphi=f(n)$  dưới dạng bảng tra để công việc tính ngược  $n$  từ  $\varphi$  được thuận tiện, ví dụ như bảng sau

**Bảng 2.1:** Bảng giá trị hàm ngược để xác định bậc của mô hình

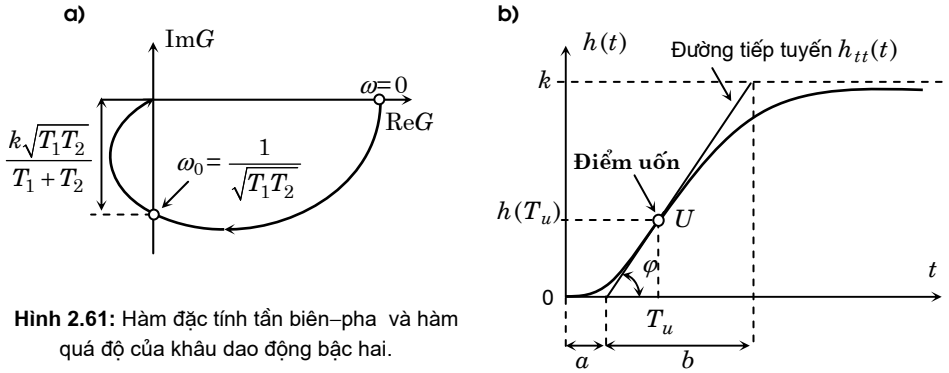
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi$	0,3679	0,2707	0,224	0,1954	0,1755	0,1606	0,149	0,1396	0,1318	0,1144

## Khâu quán tính bậc hai

Khâu quán tính bậc hai có hàm truyền

$$G(s) = \frac{k}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \quad T_1 > T_2 \quad (2.70)$$

Sau đây ta sẽ xét bài toán xác định tham số  $k, T_1, T_2$  của hàm truyền (2.70) từ đồ thị  $h(t)$  thu được bằng thực nghiệm chủ động (hình 2.61b).



**Hình 2.61:** Hàm đặc tính tần biên-pha và hàm quá độ của khâu dao động bậc hai.

Đường đồ thị  $h(t)$  có điểm uốn  $U$  với tọa độ  $h(T_u), T_u$  (hình 2.61b). Như vậy, trong khoảng thời gian  $0 \leq t < T_u$  nó sẽ có tốc độ tăng dần (gia tốc dương) và sau đó là giảm dần vận tốc về 0 khi  $t \rightarrow \infty$  (gia tốc âm). Nói cách khác  $h(t)$  có vận tốc cực đại  $v^*$  tại điểm uốn  $U$

$$v^* = \max_t \frac{dh(t)}{dt}$$

Kẻ đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  của  $h(t)$  tại điểm uốn  $U$  thì phương trình của đường tiếp tuyến đó sẽ là

$$h_{tt}(t) = (t - a) \tan \varphi$$

trong đó  $a$  được định nghĩa là hoành độ giao điểm của đường tiếp tuyến của  $h_{tt}(t)$  với trục hoành. Gọi  $b$  là khoảng thời gian để đường tiếp tuyến đó đi được từ 0 tới  $k$  ta có

$$v^* = \tan \varphi = \frac{k}{b} \quad \text{và} \quad a = T_u - \frac{h(T_u)}{\tan \varphi} = T_u - \frac{h(T_u)}{v^*} \quad (2.71)$$

và nếu  $H(s)$  là ảnh Laplace của hàm quá độ  $h(t)$  thì

$$H(s) = \frac{k}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = k \left[ 1 - \frac{T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2} \right]$$

Suy ra

$$\frac{dh(t)}{dt} = k \frac{e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2} \quad \text{và} \quad \frac{d^2h(t)}{dt^2} = k \left[ \frac{e^{-\frac{t}{T_1}}}{T_1(T_2 - T_1)} + \frac{e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_2(T_1 - T_2)} \right] \quad (2.72)$$

Bởi vậy để có  $T_u$  ta xác định thời điểm mà  $\frac{d^2h(t)}{dt^2}$  bị triệt tiêu, sẽ đi đến

$$T_u = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2.73)$$

Thay (2.73) vào (2.72) được

$$v^* = \frac{dh(T_u)}{dt} = \frac{k}{T_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_1 - T_2}} \Rightarrow T_1 = \frac{k}{v^*} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_1 - T_2}} = b \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_1 - T_2}}$$

$$\text{hay} \quad \frac{b}{T_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_2 - T_1}} = x^{\frac{x}{x-1}} = f_1(x) \quad (2.74)$$

trong đó

$$x = \frac{T_2}{T_1} \quad (0 < x < 1 \text{ vì } T_1 > T_2)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{a}{b} = \frac{v^*(kT_u - bv^*)}{k^2} = x^{\frac{x}{1-x}} \frac{x \ln x + x^2 - 1}{x - 1} - 1 = f_2(x) \quad (2.75)$$

Hai công thức (2.74) và (2.75) chính là công cụ để tìm  $T_1$ ,  $T_2$  từ  $a$  và  $b$ . Cụ thể là:

- Tìm  $x$  thỏa mãn  $0 < x < 1$  từ  $\frac{a}{b}$  bằng cách giải ngược (2.75), tức là  $x = f_2^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ .
- Tìm  $T_1$  từ  $x$  theo (2.74), tức là  $T_1 = \frac{b}{f_1(x)}$
- Tìm  $T_2$  theo  $T_2 = xT_1$

Nhưng phải chú ý rằng các bước xác định  $T_1$ ,  $T_2$  từ  $a$  và  $b$  trên đây không phải lúc nào cũng áp dụng được. Tại sao lại như vậy?. Câu trả lời nằm ở ngay điều kiện là giá trị  $x$  tìm được ở bước đầu tiên phải thỏa mãn  $0 < x < 1$ . Nếu như rằng giá trị  $x$  tìm được ở bước đầu tiên nằm ngoài khoảng  $(0, 1)$  thì ta có thể dừng ngay công việc tính toán và đưa ra kết luận rằng đối tượng không thể mô tả bởi mô hình quán tính bậc hai (2.70).

Hơn nữa, hàm  $f_2(x)$  định nghĩa theo (2.75) là hàm đồng biến trong khoảng  $0 < x < 1$  với giá trị giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( x^{\frac{x}{1-x}} \frac{x \ln x + x^2 - 1}{x - 1} - 1 \right) = 0,103648$$

nên ta có thể kiểm tra điều kiện thực hiện thuật toán mà không cần giải ngược phương trình (2.75) bằng cách kiểm tra xem tỷ số  $\frac{a}{b}$  có thỏa mãn

$$0 < \frac{a}{b} < 0,103648 \tag{2.76}$$

hay không.

Tổng kết lại tất cả các kết quả nêu trên, ta có được thuật toán xác định các tham số  $k, T_1, T_2$  của mô hình (2.70) từ đường thực nghiệm  $h(t)$  như sau

- Tìm hằng số  $k$  theo  $k = h(\infty)$
- Kẻ đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại điểm uốn. Sau đó xác định hai tham số  $a$  là hoành độ giao điểm của đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với trục thời gian và  $b$  là khoảng thời gian để đường tiếp tuyến đó đi được từ 0 tới  $k$ .
- Lập tỷ số  $\frac{a}{b}$ . Nếu tỷ số này không thỏa mãn (2.76), tức là  $\frac{a}{b} \geq 0,103648$ , thì dừng thuật toán với kết luận rằng hệ không mô tả được bằng mô hình (2.70).
- Tìm  $x$  thỏa mãn  $0 < x < 1$  từ  $\frac{a}{b}$  bằng cách giải ngược (2.75), tức là  $x = f_2^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ .
- Tìm  $T_1$  từ  $x$  theo (2.74), tức là  $T_1 = \frac{b}{f_1(x)}$
- Tính  $T_2 = xT_1$

Để tiện cho việc tính ngược hàm  $x = f_2^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$  người ta thường lập bảng tra, ví dụ:

**Bảng 2.2:** Bảng giá trị hàm ngược để xác định tham số mô hình

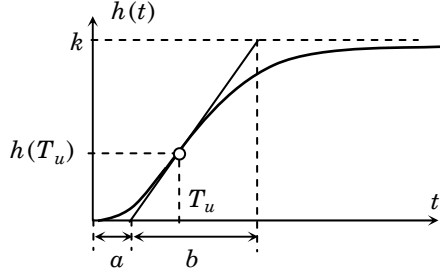
$\frac{a}{b}$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$x$	0,012	0,0275	0,0467	0,707	0,1008	0,1393	0,1904	0,2622	0,3740	0,6113

**Khâu quán tính bậc cao**

Mục trên chỉ rằng các hệ thống có đường thực nghiệm  $h(t)$ , tuy cũng có dạng hình chữ S như mô tả ở hình 2.61b), nhưng không thỏa mãn điều kiện (2.76), thì cũng sẽ không mô tả được bởi hàm truyền dạng dao động bậc hai (2.70). Trong những trường hợp như vậy, ta phải nghĩ ngay tới dạng hàm truyền của khâu quán tính bậc cao như sau

$$G(s) = \frac{k}{(1 + Ts)^n} \tag{2.77}$$

**Hình 2.62:** Đồ thị hàm quá độ của khâu quán tính bậc cao



Từ hàm truyền (2.77) ta có được

$$h(t) = k \left[ 1 - e^{-\frac{t}{T}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^i}{i!} \right] \quad (2.78)$$

Suy ra

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{ke^{-\frac{t}{T}}}{tT} \left[ t \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^i}{i!} - T \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^i}{(i-1)!} \right] \quad (2.79)$$

và

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} = \frac{ke^{-\frac{t}{T}}}{t^2T^2} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left(\frac{t}{T}\right)^i i T (T+2t) - \left(\frac{t}{T}\right)^i i^2 T^2 - \left(\frac{t}{T}\right)^i t^2 \right]}{i!} \quad (2.80)$$

Đặt  $\frac{d^2h(t)}{dt^2} = 0$  và giải ra để tìm  $T_u$  ta có

$$T_u = (n-1)T \quad (2.81)$$

Thay (2.81) vào (2.79) và vào (2.78) được

$$v^* = \frac{dh(T_u)}{dt} = k \cdot \frac{e^{1-n} (n-1)^{n-2}}{T(n-2)!} \quad (2.82)$$

$$h(T_u) = k \left[ e^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)^i}{i!} \right] \quad (2.83)$$

Thay tiếp (2.82) vào (2.71):

$$b = \frac{(n-2)!}{(n-1)^{n-2}} e^{n-1} T \quad (2.84)$$

và các phương trình (2.81), (2.82), (2.83) vào (2.71) ta đi đến

$$a = (n-1)T - \frac{T(n-2)!}{(n-1)^{n-2}} \left[ e^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)^i}{i!} \right]$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b} = e^{1-n} \left[ \frac{(n-1)^n}{(n-1)!} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)^i}{i!} \right] - 1 = f_3(n) \quad (2.85)$$

Công thức (2.85) chính là công thức xác định tham số  $n$  cho mô hình (2.77) bằng cách giải ngược hàm

$$n = \text{phần nguyên gần nhất của } f_3^{-1}\left(\frac{a}{b}\right). \quad (2.86)$$

và sau khi đã có  $n$  từ (2.86) ta cũng sẽ có nốt tham số  $T$  còn lại nhờ (2.84)

$$T = \frac{b(n-1)^{n-2}}{e^{n-1}(n-2)!} \quad (2.87)$$

Do  $n \in \mathbb{N}$  nên công thức tính hàm ngược (2.86) có thể được thay thế bằng bảng tra cho đơn giản, tức là sau khi đã có tỷ số  $\frac{a}{b}$  ta chỉ cần tra bảng để có  $n$  mà không cần giải ngược phương trình (2.86). Một bảng tra như vậy là bảng 2.3 cho dưới đây.

**Bảng 2.3:** Bảng tra giá trị hàm ngược

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{a}{b}$	0,1036	0,218	0,3194	0,4103	0,4933	0,57	0,6417	0,7092	0,7732	0,8341

Tổng kết lại ta có thuật toán sau phục vụ bài toán xác định các tham số  $k, T$  và  $n$  của mô hình (2.77) từ đồ thị thực nghiệm  $h(t)$  với các bước như sau

- Tìm hằng số  $k$  theo  $k = h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$
- Kẻ đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại điểm uốn. Sau đó xác định hai tham số  $a$  là hoành độ giao điểm của đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với trục thời gian và  $b$  là khoảng thời gian để đường tiếp tuyến đó đi từ 0 tới  $h_\infty$
- Lập tỷ số  $\frac{a}{b}$ . Nếu  $\frac{a}{b} < 0,103648$ , thì dừng thuật toán với kết luận rằng đối tượng phải được mô tả bằng mô hình quán tính bậc hai (2.70)
- Tìm  $n$  bằng cách tra bảng 2.3 hoặc giải ngược hàm (2.86)
- Tìm  $T$  từ  $n$  và  $b$  theo (2.87)

### Khâu (bù) Lead/Lag

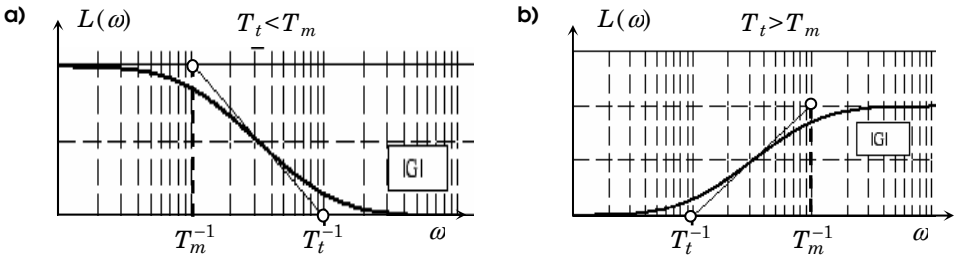
Khâu bù Lead/Lag là khâu động học cơ bản với hàm truyền

$$G(s) = k \frac{1 + T_t s}{1 + T_m s} \quad (2.88)$$

trong đó

- Nếu có  $T_t < T_m$  thì nó được gọi là khâu Lag (cắt bớt)
- Ngược lại, nếu có  $T_t > T_m$  thì nó được gọi là khâu Lead (dẫn qua)

Lý do cho cách gọi tên như vậy được lý giải bằng hình 2.63 mô tả biểu đồ Bode của chúng. Chẳng hạn từ hình 2.63a) với  $T_t < T_m$  ta thấy mô hình (2.88) không ưu tiên những thành phần tín hiệu có tần số cao khi đi qua nó, chính vì vậy mà nó có tên là mô hình Lag. Cũng như vậy, khi có  $T_t > T_m$  thì do (2.88) ưu tiên các tín hiệu có tần số cao nên nó được gọi là Lead (hình 2.63b).



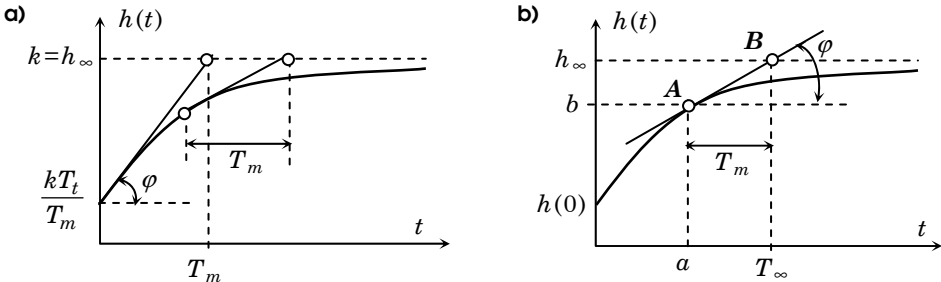
Hình 2.63: Đồ thị biên độ Bode của khâu Lead/Lag.

Sau đây ta sẽ xét bài toán xác định các tham số  $k$ ,  $T_t$  và  $T_m$  của mô hình (2.88) từ đồ thị  $h(t)$  thu được nhờ phương pháp thực nghiệm chủ động. Không mất tính tổng quát nếu ta chỉ chọn ở đây bài toán xác định  $k$ ,  $T_t$  và  $T_m$  cho khâu Lag ( $T_t < T_m$ ).

Trước hết ta thấy ngay rằng tham số  $k$  xác định được từ

$$k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} k \frac{1 + T_t s}{1 + T_m s} = h_{\infty} \tag{2.89}$$

tức là bằng hoành độ của tiệm cận  $h_{\infty}$  của  $h(t)$  khi  $t \rightarrow \infty$ . Như vậy còn lại hai tham số  $T_t$  và  $T_m$  là cần xác định.



Hình 2.64: Xác định tham số mô hình Lead/Lag từ đồ thị hàm quá độ.

Đi từ ảnh Laplace của  $h(t)$  là  $H(s)$  với

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{k(1 + T_t s)}{s(1 + T_m s)}$$



ta có

$$h(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{kT_t}{T_m} \quad (2.90)$$

Kẻ tiếp đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại điểm  $t=0$  và gọi  $\tan\varphi$  là hệ số góc của đường tiếp tuyến đó thì (hình 2.64a)

$$\tan\varphi = \frac{dh(0)}{dt} = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sH(s) - h(0)] = \frac{k - \frac{kT_t}{T_m}}{T_m} = \frac{h_\infty - h(0)}{T_m}$$

Bởi vậy  $T_m$  chính là hoành độ của giao điểm giữa đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với đường tiệm cận  $h_\infty$ . Từ  $T_m$  ta cũng có luôn  $T_t$  nhờ (2.90) như sau

$$T_t = \frac{h(0)T_m}{k} \quad (2.91)$$

Ta đi đến thuật toán thứ nhất xác định tham số cho mô hình Lag:

- Kẻ đường tiệm cận  $h_\infty$  với  $h(t)$  tại  $t=\infty$  rồi xác định  $k$  theo (2.89).
- Kẻ đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại điểm  $t=0$ , sau đó xác định  $T_m$  là hoành độ của giao điểm giữa đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với đường tiệm cận  $h_\infty$ .
- Xác định  $T_t$  theo (2.91).

Thuật toán trên vướng lại vấn đề là điểm  $h(0)$  nơi bắt đầu đặt đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  nằm khá xa đường tiệm cận  $h_\infty$ . Điều này dẫn tới nguy cơ kết quả sẽ bị sai số khá lớn khi mà chỉ cần có một sai lệch nhỏ trong việc dựng đường tiếp tuyến.

Để tránh nguy cơ này người ta sẽ không dựng đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  tại  $h(0)$  nữa mà thay vào đó là tại một điểm khác nằm tương đối gần hơn so với đường tiệm cận  $h_\infty$ , chẳng hạn điểm  $A$  có tọa độ  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  như mô tả ở hình 2.64b).

Đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại  $A$  này sẽ có phương trình

$$h_{tt}(t) = \tan\varphi(t-a)+b \quad (2.92)$$

Để xác định hệ số góc  $\tan\varphi$  tại  $A$  ta đi từ

$$h(t) = k(1 - \frac{T_m - T_t}{T_m} e^{-\frac{t}{T_m}})$$

và được

$$\tan\varphi = \frac{dh(a)}{dt} = k \frac{T_m - T_t}{T_m^2} e^{-\frac{a}{T_m}} \quad (2.93)$$

Gọi  $B$  là giao điểm của tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với đường tiệm cận  $h_\infty$  và  $T_\infty$  là hoành độ của  $B$  thì

$$h_{tt}(T_\infty) = \tan \varphi (T_\infty - a) + b = h_\infty = k$$

nên cùng với (2.92), (2.93) được

$$T_\infty - a = \frac{h_\infty - h(a)}{\tan \varphi} = \frac{kT_m^2}{k(T_m - T_t)e^{-\frac{a}{T_m}}} \left[ \frac{T_m - T_t}{T_m} e^{-\frac{a}{T_m}} \right] = T_m$$

hay  $T_m$  chính là khoảng thời gian cần thiết để  $h_{tt}(t)$  đi được từ điểm  $A$  tới điểm  $B$ .

Ta đi đến thuật toán thứ hai để xác định tham số cho mô hình Lag gồm:

- Kẻ đường tiệm cận  $h_\infty$  với  $h(t)$  tại  $t = \infty$  rồi xác định  $k$  theo (2.89).
- Lấy một điểm  $A$  bất kỳ trên  $h(t)$  và kẻ đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với  $h(t)$  tại  $A$ , sau đó xác định  $B$  là giao điểm giữa đường tiếp tuyến  $h_{tt}(t)$  với đường tiệm cận  $h_\infty$ .
- Chiều đoạn  $\overline{AB}$  lên trục thời gian (trục hoành) để có  $T_m$ .
- Xác định  $T_t$  từ  $T_m$  và  $k$  theo (2.91).

## Khâu dao động bậc hai

Khâu dao động bậc hai là khâu có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{k}{1 + 2DTs + T^2s^2} = \frac{k}{(Ts + D)^2 + 1 - D^2}, \quad 0 < D < 1 \quad (2.94)$$

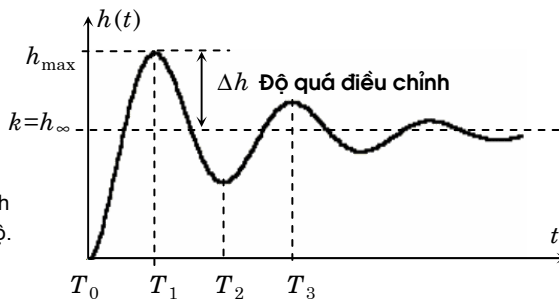
Từ hàm truyền này ta được (xem thêm ví dụ 2.4):

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{Dt}{T}}}{\sqrt{1 - D^2}} \sin \left( \frac{\sqrt{1 - D^2}}{T} t + \arccos D \right) \right] \quad (2.95)$$

cũng như

$$h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = k. \quad (2.96)$$

Hình 2.65 biểu diễn dạng đường đồ thị hàm quá độ  $h(t)$  của khâu dao động bậc hai. Còn đồ thị Bode của nó có dạng cho ở hình 2.9 của ví dụ 2.4 đã xét trước đây.



**Hình 2.65:** Xác định tham số mô hình dao động bậc hai từ hàm quá độ.

Bây giờ ta thực hiện bài toán ngược là xác định các tham số  $k, T$  và  $D$  của hàm truyền (2.94) từ đồ thị  $h(t)$  của nó đã có nhờ thực nghiệm chủ động. Trước hết, từ công thức (2.95) của hàm quá độ  $h(t)$  thì

$$\frac{dh(t)}{dt} = k \frac{e^{-\frac{Dt}{T}}}{T\sqrt{1-D^2}} \sin \frac{\sqrt{1-D^2} t}{T}$$

Bởi vậy, với  $\frac{dh(t)}{dt} = 0$  ta được các điểm cực trị  $T_i$  (kể cả tại điểm  $t=0$ ) là

$$T_i = \frac{i\pi T}{\sqrt{1-D^2}}, \quad i=0, 1, \dots \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_{\max} = h(T_1) &= k \left[ 1 - \frac{\sin(\pi + \arccos D)}{\sqrt{1-D^2}} \exp\left(\frac{-\pi D}{\sqrt{1-D^2}}\right) \right] \\ &= k \left[ 1 + \exp\left(\frac{-\pi D}{\sqrt{1-D^2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.98)$$

Trừ (2.98) cho (2.96) ta sẽ có độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  (hình 2.65):

$$\Delta h = h_{\max} - h_{\infty} = k \exp\left(\frac{-\pi D}{\sqrt{1-D^2}}\right) \quad (2.99)$$

Nếu chia (2.99) cho (2.96) theo từng vế thì

$$\left| \frac{\Delta h}{k} \right| = \exp\left(\frac{-\pi D}{\sqrt{1-D^2}}\right) \Leftrightarrow D = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\ln^2 \left| \frac{\Delta h}{k} \right|}}} \quad (2.100)$$

và đó chính là công thức cho phép xác định tham số  $D$  từ đường thực nghiệm  $h(t)$ . Tham số  $T$  còn lại sẽ được xác định từ  $D$  với sự trợ giúp của  $T_1$  theo (2.97) như sau:

$$T_1 = \frac{\pi T}{\sqrt{1-D^2}} \Leftrightarrow T = \frac{T_1 \sqrt{1-D^2}}{\pi} \quad (2.101)$$

Ba công thức (2.96), (2.100) và (2.101) đặt cơ sở cho việc xác định các tham số  $k, D, T$  của mô hình (2.94) từ đường thực nghiệm  $h(t)$ .

### Khâu chậm trễ (khâu trễ)

Khâu trễ là một hệ động học cơ bản có quan hệ giữa tín hiệu vào  $u(t)$  và ra  $y(t)$  là

$$y(t) = u(t-\tau) \quad (2.102)$$

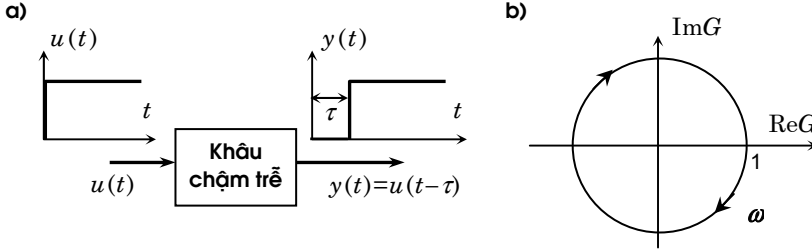
trong đó  $\tau$  được gọi là *thời gian trễ*. Trên cơ sở mối quan hệ đó ta có thể kiểm tra ngay được rằng khâu trễ là một khâu tuyến tính. Cũng từ quan hệ (2.102), khâu trễ có đáp ứng giống như kích thích nhưng được giữ chậm lại sau một khoảng thời gian trễ  $\tau$ .

Khâu trễ có hàm truyền

$$G(s) = e^{-s\tau} \quad (2.103)$$

và hàm đặc tính tần (hình 2.66b)

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)$$



**Hình 2.66:** Khâu trễ hay còn gọi là khâu chậm trễ và đường đặc tính tần biên–pha của nó.

Hàm truyền (2.103) mặc dù là chuẩn xác, song không được thông dụng chỉ vì những công cụ phân tích, khảo sát hệ SISO tuyến tính lại thường tập trung cho hàm truyền thực–hữu tỷ. Bởi vậy người ta hay thay (2.103) bằng một hàm thực–hữu tỷ xấp xỉ khác. Ý tưởng cho sự thay thế này là công thức quen biết trong giải tích cổ điển:

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s\tau}{k}\right)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s\tau)^k}{k!} \quad (2.104)$$

- 1) Xuất phát từ sự xấp xỉ thứ nhất ta thay khâu giữ trễ bằng  $n$  khâu quán tính bậc nhất nối tiếp

$$G(s) = e^{-\tau s} \approx \frac{1}{(1 + Ts)^n} \quad \text{trong đó } T = \frac{\tau}{n} \quad (2.105)$$

- 2) Từ sự xấp xỉ thứ hai ta có công thức thay thế khâu giữ trễ là hàm truyền thực–hữu có bậc tử số là  $m$  và mẫu số là  $n$  :

$$G(s) = e^{-\tau s} \approx \frac{1 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad (2.106)$$

sao cho nếu phân tích (2.106) thành chuỗi Taylor tại điểm  $s=0$  thì  $m+n$  phần tử đầu tiên của nó trùng với  $m+n$  phần tử đầu tiên của chuỗi trong (2.104). Hình thức xấp xỉ này có tên gọi là *công thức xấp xỉ Padé*.

**Ví dụ 2.40:** Minh họa công thức xấp xỉ khâu quán tính bậc cao cho khâu trễ

Công thức xấp xỉ hàm truyền của khâu trễ  $G(s)=e^{-s\tau}$  bằng khâu quán tính bậc 5 là

$$G(s) = e^{-s\tau} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s\tau}{5}\right)^5}$$

và khâu bằng khâu quán tính bậc 9 là

$$G(s) = e^{-s\tau} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s\tau}{9}\right)^9}$$

□

**Ví dụ 2.41:** Minh họa các công thức xấp xỉ của Padé

Công thức xấp xỉ hàm truyền của khâu giữ trễ  $G(s)=e^{-s\tau}$  theo Padé với  $m=n=2$  là

$$G(s) = e^{-s\tau} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}s\tau + \frac{1}{12}(s\tau)^2}{1 + \frac{1}{2}s\tau + \frac{1}{12}(s\tau)^2}$$

□

## 2.2.9 Ma trận hàm truyền cho hệ MIMO

Để mô tả hệ MIMO (hình 2.15) với vector  $\underline{u}(t)$  gồm  $r$  tín hiệu vào và vector  $\underline{y}(t)$  gồm  $p$  tín hiệu ra thì thay vì hàm truyền như đã xét từ trước cho tới nay, người ta sử dụng ma trận hàm truyền kiểu  $p \times r$  ( $p$  hàng,  $r$  cột) như sau:

$$\underline{Y}(s) = G(s)\underline{U}(s) \quad \text{với} \quad G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(s) & G_{p2}(s) & \cdots & G_{pr}(s) \end{pmatrix}$$

trong đó  $\underline{U}(s) = \mathcal{L}\{(u_1(t), \dots, u_r(t))\}^T$  và  $\underline{Y}(s) = \mathcal{L}\{(y_1(t), \dots, y_p(t))\}^T$ . Như vậy từng phần tử  $G_{ik}(s)$  của  $G(s)$  sẽ chính là hàm truyền giữa tín hiệu vào  $u_k(t)$  và tín hiệu ra  $y_i(t)$ . Các hàm gốc  $g_{ik}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_{ik}(s)\}$  là hàm trọng lượng của  $u_k(t) \mapsto y_i(t)$ .

Khi xác định ma trận hàm truyền tương đương cho hệ lớn gồm nhiều hệ con hợp thành, ta luôn phải để ý tới tính hợp lệ của kiểu (số hàng và cột) của các ma trận hệ con tham gia trong phép tính. Ví dụ:

- 1) Ma trận hàm truyền tương đương  $G$  của hệ gồm hai hệ  $G_1, G_2$  con mắc song song (hình 2.24) là:  $G=G_1 \pm G_2$ . Hai hệ con này phải có số tín hiệu vào bằng nhau và số tín hiệu ra cũng bằng nhau.
- 2) Với hai hệ  $G_1, G_2$  con mắc nối tiếp (hình 2.25) thì ma trận hàm truyền tương đương là:  $G=G_1 G_2$ . Số tín hiệu ra của khâu thứ nhất  $G_2$  phải bằng số tín hiệu vào của khâu thứ hai  $G_1$ .

- 3) Hệ hồi tiếp (hình 2.26) có ma trận hàm truyền tương đương là:  $G = (I \mp G_1 G_2)^{-1} G_1$ , với  $I$  là ma trận đơn vị. Số tín hiệu ra của khâu trong nhánh truyền thẳng  $G_1$  phải bằng số tín hiệu vào của khâu ở nhánh hồi tiếp  $G_2$  và số đầu ra của  $G_2$  phải bằng số đầu vào của  $G_1$ .

## 2.3 Phân tích hệ thống

### 2.3.1 Những nhiệm vụ cơ bản của công việc phân tích

Khi đã có một mô hình toán học mô tả hệ thống thì bước tiếp theo của bài toán điều khiển là từ mô hình này phải phân tích, phải rút ra được một số kết luận cơ bản về tính chất, về chất lượng động học của hệ thống cần thiết cho việc tổng hợp, thiết kế bộ điều khiển hay lập chương trình điều khiển sau này. Đây cũng là một nguyên lý mang tính triết học của môn học điều khiển tự động, tức là *trước tiên người ta phải bắt đầu với những hiểu biết sơ lược về hệ thống để có mô hình toán học, rồi từ mô hình toán học đó phải phân tích để có được những điều còn chưa biết về hệ thống* (giống như từ thực tiễn phải đúc kết thành lý luận và sau đó lại phải vận dụng lý luận ngược trở lại vào thực tiễn).

Do khó có thể phân tích để được tất cả những điều còn chưa biết về hệ thống, nên công việc phân tích sẽ được gọi là tạm hoàn thành nếu như ta đã có thêm được một vài điều bổ ích chưa biết về hệ thống mà những điều đó là đủ để ta bắt đầu được công việc tổng hợp, thiết kế bộ điều khiển. Nhưng những điều gì sẽ được gọi là cần thiết và tạm đủ cho công việc tổng hợp. Trước hết đó là:

- 1) Hiểu biết về *tính ổn định* của hệ thống. Một hệ thống được gọi là *ổn định* nếu khi kích thích hệ bằng tín hiệu  $u(t)$  bị chặn ở đầu vào, thì hệ sẽ có đáp ứng  $y(t)$  ở đầu ra cũng bị chặn. Khái niệm ổn định này thường còn được gọi là ổn định BIBO (viết tắt của Bound Inputs – Bound Outputs). **Chú ý** rằng ngoài khái niệm ổn định BIBO còn có nhiều định nghĩa khác nhau về tính ổn định của hệ thống, ví dụ như ổn định tiệm cận Lyapunov, ổn định tuyệt đối .... Tuy nhiên, nếu chỉ giới hạn ở hệ tuyến tính thì các khái niệm ổn định trên là tương đương nhau.
- 2) Hiểu biết về *sai lệch tĩnh*. Yêu cầu hệ ổn định mới chỉ xác định được là  $y(t)$  sẽ tiến đến một hằng số khi có tín hiệu vào  $u(t)=u_0$  cũng là hằng số. Song nếu xem  $u_0$  như một tín hiệu lệnh (tín hiệu đặt trước) mong muốn hệ phải có ở đầu ra  $y(t)$  sau một thời gian quá độ  $T_{qd}$  cần thiết thì việc xét tính ổn định của hệ là chưa đủ mà còn phải đánh giá xem sai lệch

$$e(t) = u(t) - y(t)$$

có tiến về 0 hay không. Giá trị giới hạn của sai lệch này

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{\infty}$$

được gọi là sai lệch tĩnh của hệ thống.

3) Hiểu biết về *thời gian quá độ* và *độ quá điều chỉnh*. Yêu cầu sai lệch tĩnh  $e_{\infty}=0$  mới chỉ giải quyết về *tính chất tĩnh* của hệ thống. Những yêu cầu chi tiết hơn của hệ thể hiện qua quá trình  $y(t)$  tiến tới giá trị mong muốn  $u_0$  hay sai lệch  $e(t)$  tiến về 0 như thế nào được gọi là các yêu cầu về *chất lượng động học*. Chúng có thể là:

- Yêu cầu về quán tính cần có của hệ thống, về thời gian  $T_{qd}$  của quá trình quá độ. Thời gian quá độ  $T_{qd}$  càng nhỏ, chất lượng động học của hệ càng tốt.
- Yêu cầu về *độ quá điều chỉnh*, về miền dao động của đầu ra  $y(t)$  xung quanh giá trị giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\infty}$$

mà hệ thống cần phải đạt đến được. Ở đây, độ quá điều chỉnh được hiểu là

$$|y_{max}(t) - y_{\infty}|$$

và giá trị này càng nhỏ, chất lượng động học của hệ càng cao.

4) Hiểu biết về *tính bền vững*. Hệ phải làm việc không những đạt được chất lượng tĩnh và động đã đề ra mà còn phải giữ được chất lượng đó cho dù:

- Có bất cứ một sự thay đổi nào không lường được trước xảy ra bên trong hệ thống (mô hình, tham số thay đổi ...). Điều này là cần thiết vì ta không thể hy vọng rằng sẽ có một mô hình mô tả đối tượng chính xác 100%.
- Có sự tác động của những tín hiệu nhiễu không mong muốn vào hệ thống.

Trong chương này ta sẽ phân tích chất lượng hệ thống SISO theo các tiêu chuẩn trên, từ mô hình toán học của nó là hàm truyền dạng thực-hữu tỷ và hợp thức

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (m \leq n) \quad (2.107)$$

với  $B(s)$  là ký hiệu chỉ đa thức tử số,  $A(s)$  là đa thức mẫu số.

Giả thiết rằng hai đa thức  $B(s)$  và  $A(s)$  là *nguyên tố cùng nhau* (chúng không có một nghiệm chung nào). Khi đó *điểm cực* của hệ thống, tức là những giá trị  $s_k$  thỏa mãn

$$G(s_k) = \pm \infty$$

sẽ chính là nghiệm của  $A(s)=0$ .

Đa thức mẫu số  $A(s)$  còn được gọi là *đa thức đặc tính* của hệ thống. Các nghiệm của  $B(s)=0$  được gọi là *điểm không hữu hạn* của hệ. Như sau này chỉ rõ, phần lớn các chất lượng nêu trên của hệ thống SISO đều xác định được từ vị trí của các điểm cực, cũng như điểm không của hàm truyền  $G(s)$  trong mặt phẳng phức.

### 2.3.2 Xác định tính ổn định từ đa thức đặc tính

#### Mối liên hệ giữa vị trí các điểm cực và tính ổn định của hệ thống

Trước hết ta xét hệ SISO với hàm truyền dạng thực-hữu tỷ (các hệ số là những số thực) và hợp thức (2.107). Với khái niệm ổn định BIBO vừa được đề cập thì rõ ràng Một hệ thống có (vector) tín hiệu vào  $u(t)$  và ra  $y(t)$  được gọi là ổn định BIBO nếu như  $\|u(t)\|_\infty < \infty$  (hữu hạn) thì  $\|y(t)\|_\infty$  cũng là số hữu hạn.

Trước hết ta chứng minh định lý sau.

**Định lý 2.12:** Các phát biểu sau là tương đương:

- Hệ ổn định BIBO
- Hàm trọng lượng  $g(t)$  có chuẩn bậc 1 hữu hạn:  $\|g(t)\|_1 < \infty$
- $G(s)$  là hàm bên (có tất cả các điểm cực nằm bên trái trục ảo)

*Chứng minh:*

b)  $\Rightarrow$  a): Ký hiệu  $u(t)$  là tín hiệu vào,  $y(t)$  là tín hiệu ra. Khi đó xuất phát từ công thức

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

với  $g(t)$  là hàm trọng lượng, ta được

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)|d\tau \leq \|u(t)\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|d\tau$$

vì có

$$|u(t)| \leq \sup_t |u(t)| = \|u(t)\|_\infty \quad \text{với mọi } t.$$

Như vậy, do  $g(t)$  có chuẩn bậc 1 hữu hạn, tức là  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|d\tau$  là một số hữu hạn với mọi  $t$

nên với mọi  $u(t)$  bị chặn ta cũng có  $|y(t)|$  bị chặn, hay chuẩn  $\|y(t)\|_\infty$  là một số hữu hạn. Vậy hệ là ổn định BIBO

a)  $\Rightarrow$  b): Để chứng minh ta sẽ chỉ ra một trường hợp rằng nếu không có a) thì cũng không có b). Chọn  $u(t)$  sao cho

$$u(\tau) = U \cdot \text{sgn}[g(t+\tau)]$$

trong đó  $U$  là một số dương hữu hạn,  $\text{sgn}(\cdot)$  là ký hiệu chỉ phép lấy dấu

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a > 0 \\ -1 & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

Với tín hiệu như vậy thì  $u(t)$  có chuẩn  $\|u(t)\|_\infty = U$  hữu hạn. Xét

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau = U \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\text{sgn}[g(\tau)]d\tau = U \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|d\tau$$



ta thấy nếu  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau$  không bị chặn thì tín hiệu ra  $y(t)$  cũng không bị chặn và điều đó trái với giả thiết là hệ ổn định BIBO.

b)  $\Leftrightarrow$  c): Do  $g(t)$  có ảnh Laplace  $G(s)$  nên phải tồn tại một số  $a$  dương đủ lớn để

$$\int_0^{\infty} |g(t)| e^{-at} dt < \infty$$

Hằng số  $a$  chính là bán kính hội tụ của tích phân Laplace

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \quad \text{với} \quad s = \delta + j\omega \quad \text{và} \quad \delta > a$$

Điều này chỉ rằng trong nửa mặt phẳng phức nằm bên phải đường thẳng  $\sigma = a$ , hàm  $G(s)$  có tính giải tích (không có điểm cực).

Nếu

$$\|g(t)\|_1 = \int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

thì ta có thể chọn  $a=0$  và khi đó  $G(s)$  sẽ giải tích trong toàn bộ nửa kín mặt phẳng phức bên phải trục ảo (kể cả trục ảo). Suy ra các điểm cực của  $G(s)$  phải nằm bên trái trục ảo.

Ngược lại, nếu tất cả các điểm cực của  $G(s)$  nằm bên trái trục ảo thì ảnh Fourier  $G(j\omega)$  sẽ là  $G(s)|_{s=j\omega}$  (mục 2.1.4). Nói cách khác tín hiệu  $g(t)$  có ảnh Fourier và do đó nó phải có  $\|g(t)\|_1 < \infty$ . □

Định lý 2.12 cho thấy để nhận biết được hệ có hàm truyền (2.107) với hai đa thức tử số  $B(s)$  và mẫu số  $A(s)$  *nguyên tố cùng nhau*, có ổn định hay không, ta chỉ cần kiểm tra xem tất cả các nghiệm của đa thức đặc tính

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n \quad (2.108)$$

với  $a_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n$  là những số thực, có nằm bên trái trục ảo hay không.

**Định nghĩa 2.2:** Đa thức  $A(s)$  cho trong (2.108) được gọi là *đa thức Hurwitz* nếu tất cả các nghiệm của nó đều nằm bên trái trục ảo (có phần thực âm và khác 0).

Về đa thức Hurwitz  $A(s)$  ta có một số phát biểu cơ bản sau:

**Định lý 2.13** (Điều kiện cần và đủ): Cho đa thức  $A(s)$  với cấu trúc (2.108). Khi đó, để  $A(s)$  là Hurwitz thì cần và đủ là *đa thức đối ngẫu* với nó

$$A_{dn}(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n \quad (2.109)$$

cũng là *đa thức Hurwitz*.

*Chứng minh:*

Vì có

$$A\left(\frac{1}{s}\right) = s^n A_{dn}(s) \quad \text{và} \quad A(s) = s^n A_{dn}\left(\frac{1}{s}\right)$$

cũng như số phức  $s_k$  có phần thực âm khi và chỉ khi  $\frac{1}{s_k}$  có phần thực âm, nên hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Định lý 2.14** (Điều kiện cần): Nếu đa thức  $A(s)$  cho trong (2.108) là Hurwitz thì tất cả các hệ số  $a_0, a_1, \dots, a_n$  của nó phải cùng dấu và khác 0. Nếu  $A(s)$  là đa thức có bậc không lớn hơn hai ( $n \leq 2$ ) thì điều kiện cần trên cũng là điều kiện đủ.

*Chứng minh:*

Xét đa thức Hurwitz  $A(s)$  cho trong (2.108) có  $a_i, i=0, 1, \dots, n$  là những số thực. Do  $A(s)$  là Hurwitz nên tất cả nghiệm của chúng phải có phần thực âm và cũng vì  $a_i$  là số thực nên nếu  $A(s)$  có một nghiệm phức  $-\sigma_k + j\omega_k$  với  $\sigma_k > 0$  thì nó cũng phải có nghiệm liên hợp với nó  $-\sigma_k - j\omega_k$ . Nói cách khác đa thức Hurwitz  $A(s)$  phải có dạng

$$\frac{1}{a_n} A(s) = \prod_{j,k} (s + \delta_j) [(s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2] \quad (2.110)$$

trong đó  $\delta_j, \sigma_k$  là những số thực dương. Viết lại (2.110) dưới dạng đa thức rồi so sánh với (2.108) ta có điều phải chứng minh.  $\square$

### Tiêu chuẩn đại số thứ nhất: Tiêu chuẩn Routh

Bài toán xác định sự phân bố nghiệm của  $A(s)$  trong mặt phẳng phức mà không phải giải phương trình  $A(s)=0$  được nêu lên lần đầu tiên bởi Maxwell. Từ đó dấy lên một trào lưu đi tìm lời giải cho bài toán với hàng loạt các kết quả có tính kế thừa lẫn nhau xuất hiện vào nửa cuối thế kỷ 19 và kết thúc ở điểm đỉnh bằng hai định lý của Routh và Hurwitz cho trường hợp nghiệm được phân bố về nửa trái mặt phẳng phức của bài toán Maxwell. Đây là hai định lý được xây dựng trên nền của hàng loạt những kết luận đi trước, trong đó chủ yếu là các định lý của Hermite–Biehler và của Schur phát biểu như sau:

**Định lý 2.15** (Hermite–Biehler): Nếu một hàm phức  $f(s)$  viết được dưới dạng

$$f(s) = A(s) + jB(s) \quad (2.111)$$

trong đó  $A(s), B(s)$  là đa thức có hệ số thực, thì hai phát biểu sau là tương đương:

- Tất cả các nghiệm của  $f(s)=0$  nằm cùng phía với trục thực (có các phần ảo cùng dấu và khác 0).
- Cả hai đa thức  $A(s), B(s)$  đều có nghiệm đơn. Toàn bộ các nghiệm của cả hai đa thức  $A(s), B(s)$  là những số thực và khác nhau từng đôi một.

**Định lý 2.16** (Schur): Cần và đủ để đa thức bậc  $n$

$$A_n(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n \quad (2.112)$$

trong đó  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ , là đa thức Hurwitz là

a)  $a_0$  và  $a_1$  cùng dấu và khác 0

b) đa thức bậc  $n-1$

$$A_{n-1}(s) = a_1 + (a_2a_1 - a_0a_3)s + a_3s^2 + (a_4a_1 - a_0a_5)s^3 + a_5s^4 + \dots$$

cũng là đa thức Hurwitz.

Có thể thấy định lý 2.16 có mối liên quan với định lý 2.15. Chẳng hạn như khi định nghĩa hai đa thức có cùng hệ số như của (2.112) nhưng với chỉ số chẵn và lẻ riêng biệt:

$$C_1(s) = a_0 + a_2s + a_4s^2 + \dots$$

$$L_1(s) = a_1 + a_3s + a_5s^2 + \dots$$

thì đa thức  $A(s)$  cho trong (2.112) sẽ trở thành

$$A_n(s) = C_1(s^2) + sL_1(s^2)$$

Xét hàm phức

$$f(s) = A_n(js) = C_1(-s^2) + jsL_1(-s^2)$$

ta thấy cần và đủ để  $A(s)$  là đa thức Hurwitz là toàn bộ nghiệm của  $f(s)$  phải nằm dưới trục thực. Theo định lý 2.16, khi đó các nghiệm của  $C_1(-s^2)$ ,  $sL_1(-s^2)$  phải là những số thực khác nhau từng đôi một. Điều này cũng đúng với các nghiệm của  $C_1(s)$ ,  $L_1(s)$ . Gọi  $-\gamma_k$  là nghiệm của  $C_1(s)$  và  $-\eta_k$  là nghiệm của  $L_1(s)$ . Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết

$$0 < \gamma_1 < \eta_1 < \gamma_2 < \eta_2 < \dots \quad (2.113)$$

Vậy thì do

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \dots$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \dots$$

ta sẽ có từ (2.113)

$$\frac{a_2}{a_0} > \frac{a_3}{a_1} \Leftrightarrow a_2a_1 - a_0a_3 > 0.$$

Tiếp tục lại xét những đa thức bậc thấp hơn thì ta sẽ chỉ ra được rằng các hệ số

$$a_1, (a_2a_1 - a_0a_3), a_3, (a_4a_1 - a_0a_5), a_5, \dots$$

đều dương và khác 0.

Cải tiến hai định lý 2.15 và 2.16, Routh đã thực hiện phép chia  $C_1(-s^2)$  cho  $L_1(-s^2)$  để có  $C_2(-s^2)$  rồi lại chia tiếp  $L_1(-s^2)$  cho  $C_2(-s^2)$  để có  $L_2(-s^2)$ , .... Cứ như vậy cuối cùng thu được dãy đa thức (còn gọi là dãy Sturm)

$$C_1(-s^2), L_1(-s^2), C_2(-s^2), L_2(-s^2), C_3(-s^2), L_3(-s^2), \dots$$

có bậc giảm dần cho tới 1, trong đó để đa thức bậc 1 là Hurwitz thì các hệ số của nó cùng dấu và khác 0 là đủ (định lý 2.14).

Công thức tính hệ số các đa thức  $C_k(-s^2), L_k(-s^2)$  đã được Routh biểu diễn dưới dạng bảng (còn gọi là *bảng Routh*) và nguyên tắc xét tính Hurwitz của đa thức đặc tính (2.108) dựa vào định lý 2.16 nhờ bảng đó cũng đã được Routh trình bày lại thành các bước tính rất tiện cho việc sử dụng. Ta sẽ gọi "thuật toán" gồm các bước tính đó của Routh là *tiêu chuẩn Routh*. Tiêu chuẩn Routh được phát biểu như sau:

1) Lập bảng Routh gồm  $n+1$  hàng từ các hệ số  $a_i \in \mathbb{R}, i=0,1, \dots, n$ , của  $A(s)$ :

$a_0$	$a_2$	$a_4$	...
$a_1$	$a_3$	$a_5$	...
$\gamma_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$\beta_1 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$\lambda_1 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	...
$\gamma_2 = \frac{\gamma_1 a_3 - a_1 \beta_1}{\gamma_1}$	$\beta_2 = \frac{\gamma_1 a_5 - a_1 \lambda_1}{\gamma_1}$	$\vdots$	...
$\vdots$			

- 2) Đa thức  $A(s)$  là một đa thức Hurwitz khi và chỉ khi các hệ số  $a_0, a_1, \gamma_1, \gamma_2 \dots$  trong cột đầu của bảng Routh cùng dấu và khác 0.
- 3) Số lần đổi dấu trong cột đầu bằng số các nghiệm của  $A(s)$  nằm bên nửa hỏ bên phải mặt phẳng phức (có phần thực dương).

Thoạt mới nhìn, bảng Routh có vẻ như phức tạp và khó nhớ. Song nếu để ý ta sẽ thấy ở đây việc lập bảng Routh có quy luật đơn giản:

- Bảng được lập theo từng hàng, sau khi kết thúc hàng trên thì mới lập hàng dưới. Hai hàng đầu tiên được lập từ các hệ số của đa thức, trong đó hàng đầu là các hệ số có chỉ số chẵn và hàng thứ hai là các hệ số có chỉ số lẻ.
- Các phần tử trong mỗi hàng tiếp theo được tính từ hai hàng nằm ngay trước nó. Muốn tính phần tử ở một cột nào đó trong hàng, ta lấy bốn phần tử ở hai hàng nằm trước bao gồm hai phần tử thuộc cột đầu tiên và hai phần tử thuộc cột chứa phần tử đang phải tính. Sắp xếp bốn phần tử theo thứ tự từ dưới lên trên và từ trái sang phải để được một ma trận rồi tính định thức ma trận đó.
- Quá trình lập bảng sẽ dừng khi gặp phần tử đầu tiên trong hàng bằng 0. Khi đó ta kết luận hệ không ổn định.

**Ví dụ 2.42:** Minh họa tiêu chuẩn Routh

Cho đa thức

$$A(s) = 5 + 16s + 18s^2 + 8s^3 + s^4$$

Lập bảng Routh (các ô không có phần tử được xem là bằng 0)

5	18	1
16	8	
15,5	1	
6,97		
1		

Do tất cả giá trị trong cột đầu đều dương nên tất cả các nghiệm của đa thức đã cho đều có phần thực âm. □

**Ví dụ 2.43:** Minh họa tiêu chuẩn Routh

Cho hệ có hàm truyền thực-hữu tỷ, hợp thức với đa thức mẫu số

$$A(s) = 5 + 16s + 2s^2 + 8s^3 + s^4$$

Lập bảng Routh (các ô không có phần tử được xem là bằng 0)

5	2	1
16	8	
-0,5	1	
40		
1		

Vì giá trị trong cột đầu không cùng dấu nên hệ không ổn định (tất cả các điểm cực không cùng nằm bên trái trục ảo). Hơn nữa chúng đổi dấu hai lần (từ 16 sang -0,5 và lần thứ hai từ -0,5 sang 40) nên sẽ có hai điểm cực có phần thực dương. □

**Ví dụ 2.44:** Minh họa tiêu chuẩn Routh

Xét hệ có cấu trúc như ở hình 2.67, trong đó

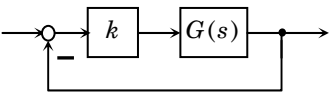
$$G(s) = \frac{s + 4}{s(s + 2)(s^2 + 0,5 + 1)}$$

Hãy tìm hệ số khuếch đại  $k$  để hệ được ổn định.

Trước hết ta xác định hàm truyền của hệ kín:

$$G_{\text{kín}}(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{2k(s + 4)}{2s^4 + 5s^3 + 4s^2 + (2k + 4)s + 8k}$$

Sau đó lập bảng Routh



**Hình 2.67:** Cho ví dụ 2.44

2	4	$8k$
5	$2k+4$	
$0,8 \cdot (3-k)$	$8k$	
$\frac{2(k^2 + 24k - 6)}{k-3}$		
$8k$		

Để hệ ổn định thì phải có các giá trị cột đầu đều dương, tức là

$$\begin{aligned} 3-k > 0 & \Leftrightarrow k < 3 \\ \frac{2(k^2 + 24k - 6)}{k-3} > 0 & \Leftrightarrow -24,3 < k < 0,247 \\ 8k > 0 & \Leftrightarrow 0 < k \end{aligned}$$

Kết hợp chung các điều kiện trên lại ta được

$$0 < k < 0,247 \quad \square$$

**Chú ý:** Bảng Routh trong ví dụ 2.44 được lập bằng cách đảo ngược vị trí thứ tự các hệ số của đa thức. Đó không phải là sự nhầm lẫn mà ở đây ta đã áp dụng định lý đối ngẫu 2.13 nhằm làm giảm số các phân tử có chứa tham số  $k$  ở cột đầu tiên, tức là giảm số các bất phương trình phải tính. Nói cách khác, bảng Routh còn có thể là:

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...
$\gamma_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$\beta_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$\lambda_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	...
$\gamma_2 = \frac{\gamma_1 a_3 - a_1 \beta_1}{\gamma_1}$	$\beta_2 = \frac{\gamma_1 a_5 - a_1 \lambda_1}{\gamma_1}$	$\vdots$	...
$\vdots$			

**Ví dụ 2.45:** Minh họa tiêu chuẩn Routh với đa thức đối ngẫu

Cho hệ với hàm truyền có đa thức đặc tính (đa thức mẫu số):

$$A(s) = 1+2s+3s^2+6s^3+s^4 \Rightarrow A_{dn}(s) = 1+6s+3s^2+2s^3+s^4$$

Ta lập hai bảng Routh cho  $A(s)$  và đa thức đối ngẫu của nó  $A_{dn}(s)$

1	3	1
2	6	
0		

1	3	1
6	2	
2,7	1	
-0,25		
1		

Cả hai bảng trên đều cho ra cùng một kết quả là hệ không ổn định. Tuy nhiên, trong khi bảng thứ nhất với đa thức  $A(s)$  không cho ta biết được hệ có bao nhiêu điểm cực nằm bên phải trục ảo thì từ bảng Routh thứ hai ta biết được đa thức đối ngẫu  $A_{dn}(s)$  có hai nghiệm  $s_1, s_2$  có phần thực dương. Suy ra được là hệ cũng sẽ có hai điểm cực  $\frac{1}{s_1}$  và  $\frac{1}{s_2}$  đều nằm bên phải trục ảo. □

**Ví dụ 2.46:** Mở rộng bảng Routh

Xét lại hệ với đa thức đặc tính đã cho ở ví dụ 2.45. Ở bảng thứ nhất xuất hiện phần tử 0 trong cột đầu. Điều đó không cho phép ta hoàn thiện được bảng Routh, do đó ta cũng chỉ có thể khẳng định được rằng hệ không ổn định chứ không biết được hệ không ổn định đó có bao nhiêu điểm cực nằm bên phải trục ảo. Để mở rộng, ta có thể thay phần tử 0 đó trong bảng Routh bằng giá trị  $\varepsilon$  với  $|\varepsilon| > 0$  nhỏ tùy ý rồi thực hiện tiếp với giá trị  $\varepsilon$  này. Sau đó xét số lần đổi dấu của các số hạng trong cột đầu cho cả hai trường hợp  $\varepsilon > 0$  và  $\varepsilon < 0$ . Nếu hai kết quả về số lần đổi dấu trùng nhau thì đó cũng sẽ chính là số các điểm cực của hệ nằm bên phải trục ảo. Chẳng hạn với hệ có đa thức đặc tính cho ở ví dụ 2.45 thì:

1	3	1	
2	6		
$\varepsilon$	1		Nếu $\varepsilon > 0$ thì đổi dấu 2 lần
$\frac{6\varepsilon - 2}{\varepsilon}$			Nếu $\varepsilon < 0$ thì cũng đổi dấu 2 lần
1			

Vì ở cả hai trường hợp  $\varepsilon > 0$  và  $\varepsilon < 0$  ( có  $|\varepsilon|$  rất nhỏ) số lần đổi dấu của các số hạng trong cột đầu trùng nhau là bằng 2, nên ta kết luận được rằng hệ có hai điểm cực nằm bên phải trục ảo. □

**Tiêu chuẩn đại số thứ hai: Tiêu chuẩn Hurwitz**

Một tiêu chuẩn khác có họ hàng gần với tiêu chuẩn Routh có tên là tiêu chuẩn Hurwitz. Hurwitz đã dựa vào định lý 2.15 của Hermite–Biehler để xét số lần thay đổi dấu trong dãy các nghiệm của đa thức đặc tính (2.108) thông qua giá trị tích phân đường bao kín nửa mặt phẳng phức bên phải của nó và đi đến kết luận như sau:

- 1) Dựng ma trận  $H$  kiểu  $(n \times n)$  từ các hệ số  $a_i, i = 0, 1, \dots, n$  của  $A(s)$

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.114}$$

- 2) Xác định các ma trận vuông  $H_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  lấy từ  $H$  sao cho  $H_i$  có đúng  $i$  phần tử trên đường chéo chính của  $H$

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 3) Tính định thức  $D_i = \det(H_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

- a) Đa thức  $A(s)$  cho trong đa thức đặc tính (2.108) sẽ là đa thức Hurwitz khi và chỉ khi các giá trị trong dãy:

$$a_0, D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}} \quad (2.115)$$

cùng dấu và khác 0.

- b) Số lần đổi dấu trong dãy (2.115) trên bằng số các nghiệm nằm bên phải trục ảo của đa thức  $A(s)$ .

**Ví dụ 2.47:** Minh họa tiêu chuẩn Hurwitz

Xét đa thức

$$A(s) = 0,5 + s + 2s^2 + 3s^3$$

Đa thức này có

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = 1, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$D_1 = 1, \quad D_2 = 0,5, \quad D_3 = 3D_2 = 1,5.$$

Do  $a_0 = 0,5$  và tất cả 3 định thức  $D_1, D_2, D_3$ , tức là dãy (2.115), là những số dương nên tất cả các nghiệm của  $A(s)$  đều nằm bên trái trục ảo.  $\square$

**Ví dụ 2.48:** Minh họa tiêu chuẩn Hurwitz

Xét đa thức

$$A(s) = 51 + 11s + s^2 + s^3$$

Ta lập các ma trận  $H_1, H_2, H_3$  của đa thức:

$$H = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 51 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = 11, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 51 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 51 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

và từ đó có:



$$a_0=51, \quad D_1=11, \quad D_2=-40, \quad D_3=D_2=-40.$$

Điều này nói rằng không phải tất cả các nghiệm của đa thức đều nằm bên trái trục ảo. Xét tiếp dãy (2.115) với:

$$a_0=51, \quad D_1=11, \quad \frac{D_2}{D_1}=-3,63, \quad \frac{D_3}{D_2}=1$$

Vì các số hạng của dãy đổi dấu hai lần (một lần từ 11 sang -3,63, lần thứ hai từ -3,63 sang 1) nên đa thức  $A(s)$  có hai nghiệm nằm bên phải trục ảo.  $\square$

#### Ví dụ 2.49: Minh họa tiêu chuẩn Hurwitz

Tìm điều kiện cho tham số  $k$  để hệ có hàm truyền

$$G(s) = \frac{1}{3+2s+(k+2)s^2+ks^3}$$

được ổn định. Áp dụng tiêu chuẩn Hurwitz với  $A(s)=3+2s+(k+2)s^2+ks^3$ , tức là

$$H = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 3 & k+2 & 0 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = 2, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 3 & k+2 & 0 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$$

ta được dãy (2.115) với:

$$a_0=3, \quad D_1=2, \quad D_2=-k+4, \quad D_3=kD_2=k(-k+4)$$

Vậy để hệ ổn định thì phải có:

$$\begin{cases} -k+4 > 0 \\ k(-k+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 4 \\ 0 < k < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k < 4. \quad \square$$

**Chú ý:** Nếu để ý đến tính chất đối ngẫu của đa thức Hurwitz (định lý 2.13) thì ma trận  $H$  cho trong (2.114) cũng có thể được lập với các tham số  $a_i$ ,  $i=0,1, \dots, n$  của đa thức  $A(s)$  nhưng theo thứ tự ngược lại như sau:

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

#### Tiêu chuẩn đại số thứ ba: Tiêu chuẩn Lienard–Chipart

Thực chất, tiêu chuẩn Lienard–Chipart là một hệ quả của tiêu chuẩn Hurwitz. Nó giúp cho người sử dụng giảm bớt được số lượng các định thức  $D_i = \det(H_i)$ ,  $i=1,2, \dots, n$  phải tính khi kiểm tra tính ổn định của một hệ thống.

Xét đa thức (2.108) có  $a_i > 0, i=0, 1, \dots, n$ . Lập ma trận  $H$  theo (2.114). Vì

$$D_n = a_n D_{n-1}$$

nên khi đã có  $a_n > 0, D_{n-1} > 0$  thì đương nhiên ta cũng có  $D_n > 0$ . Do đó việc kiểm tra điều kiện tiếp theo  $D_n > 0$  có được thỏa mãn hay không là không cần thiết.

Viết lại tiêu chuẩn Hurwitz cho các đa thức  $A(s)$  với những bậc cụ thể:

- 1)  $n=1$ :  $A(s)$  là Hurwitz  $\Leftrightarrow a_0, a_1 > 0$
- 2)  $n=2$ :  $A(s)$  là Hurwitz  $\Leftrightarrow a_0, a_1, a_2 > 0$
- 3)  $n=3$ :  $A(s)$  là Hurwitz  $\Leftrightarrow a_0, a_1, a_2 > 0$  và  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$
- 4)  $n=4$ :  $A(s)$  là Hurwitz  $\Leftrightarrow a_0, a_1, a_2 > 0$  và  $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0$
- $\vdots$

Lienard–Chipart đã xây dựng được mối quan hệ tổng quát giữa  $H_{2i}$  (ma trận có chỉ số chẵn) và  $H_{2i+1}$  (ma trận có chỉ số lẻ) rồi từ đó đi đến kết luận như sau:

**Định lý 2.17** (Lienard–Chipart): Đa thức

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n, \quad (a_0 > 0)$$

là Hurwitz khi và chỉ khi:

- a) hoặc  $a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$  và  $\det(H_{2i}) > 0, i=1, 2, \dots,$
- b) hoặc  $a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$  và  $\det(H_{2i+1}) > 0, i=1, 2, \dots.$

Rõ ràng là với tiêu chuẩn Lienard–Chipart, số lượng các phép tính phải thực hiện chỉ bằng một nửa so với khi sử dụng trực tiếp tiêu chuẩn Hurwitz.

**Ví dụ 2.50:** Minh họa tiêu chuẩn Lienard–Chipart

Tìm điều kiện cho tham số  $k$  để hệ có hàm truyền

$$G(s) = \frac{1}{4 + ks + (k+3)s^2 + s^3}$$

được ổn định. Áp dụng tiêu chuẩn Lienard–Chipart với  $A(s) = 4 + ks + (k+3)s^2 + s^3$  ta có  $k > 0, k+3 > 0$

và (chỉ cần xét  $D_2 = \det(H_2)$  thay vì tất cả  $D_1, D_2$  và  $D_3$ )

$$H = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 4 & k+3 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_2 = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 4 & k+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_2) = k(k+3) - 4 > 0$$

Vậy để hệ ổn định thì  $k$  phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} k > 0 \\ (k-1)(k+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < -4 \text{ hoặc } k > 1 \end{cases} \Leftrightarrow k > 1$$

□

### Tiêu chuẩn hình học: Tiêu chuẩn Michailov

Khác với tiêu chuẩn Routh–Hurwitz, tiêu chuẩn Michailov dựa vào hàm  $A(j\omega)$ , thu được từ  $A(s)$  bằng cách thay  $s$  bởi  $j\omega$ , để xét tính Hurwitz của  $A(s)$ . Chính xác hơn nữa, nó xét tính Hurwitz của  $A(s)$  trên cơ sở dạng đồ thị của  $A(j\omega)$ , bởi vậy tiêu chuẩn Michailov được xếp vào nhóm các tiêu chuẩn hình học.

Xét đa thức hệ số thực

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n, \quad (a_n > 0).$$

Gọi các nghiệm của  $A(s)$  là  $s_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ . Khi đó  $A(s)$  sẽ viết được thành:

$$A(s) = a_n(s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_n)$$

$$\Leftrightarrow A(j\omega) = a_n(j\omega-s_1)(j\omega-s_2) \dots (j\omega-s_n)$$

Ký hiệu  $\varphi = \arg A(j\omega)$  là góc pha của  $A(j\omega)$ , tức là  $A(j\omega) = |A(j\omega)|e^{j\varphi}$  thì

$$\varphi = \arg A(j\omega) = \arg a_n + \sum_{k=1}^n \underbrace{\arg(j\omega-s_k)}_{\varphi_k} \quad (2.116)$$

Xét sự thay đổi của riêng thành phần

$$\varphi_k = \arg(j\omega-s_k)$$

trong công thức (2.116) khi  $\omega$  đi từ  $-\infty$  đến  $\infty$ , ký hiệu bởi  $\Delta\varphi_k = \Delta \arg(j\omega-s_k)$ , bằng cách hình dung như ta đã

đứng tại điểm  $s_k$  và nhìn theo điểm  $\omega$  chạy trên trục tung từ  $-\infty$  đến  $\infty$ , sẽ thấy (hình 2.68):

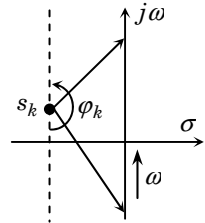
1) Nếu  $s_k$  nằm bên trái trục ảo (trục tung) thì góc nhìn của ta có độ rộng là  $\Delta\varphi_k = \pi$ .

2) Ngược lại nếu  $s_k$  nằm bên phải trục ảo (trục tung) thì góc nhìn là  $\Delta\varphi_k = -\pi$ .

Bởi vậy, nếu như có giả thiết rằng đa thức  $A(s)$  không có nghiệm nào nằm trên trục ảo và số nghiệm nằm bên phải trục ảo là  $n^+$  thì số nghiệm nằm bên trái trục ảo sẽ phải là  $n-n^+$ . Điều này dẫn đến:

$$\Delta_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \arg A(j\omega) = \begin{cases} (n-n^+)\pi & \text{nếu } \operatorname{Re}(s_k) < 0 \\ -n^+\pi & \text{nếu } \operatorname{Re}(s_k) > 0 \end{cases}$$

Suy ra



Hình 2.68: Tính góc pha.

$$\Delta_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \text{arc } A(j\omega) = n\pi$$

khi và chỉ khi tất cả  $n$  nghiệm  $s_k$ ,  $k=1,2, \dots, n$  của  $A(s)$  đều nằm bên trái trục ảo. Diễn tả điều đó bằng lời ta được:  $A(s)$  là đa thức Hurwitz khi và chỉ khi với sự thay đổi của  $\omega$  từ  $-\infty$  đến  $+\infty$ , đường đồ thị  $A(j\omega)$  bao gốc tọa độ một góc đúng bằng  $n\pi$ .

Nhưng nếu để ý thêm điều kiện  $A(s)$  là đa thức hệ số thực, tức là  $a_i$ ,  $i=0,1, \dots, n$  là những số thực thì do đường  $A(j\omega)$  với  $\omega$  từ  $-\infty$  đến  $+\infty$  có dạng đối xứng qua trục thực, phát biểu trên sẽ có dạng tương đương sau:

**Định lý 2.18** (Michailov): Đa thức hệ số thực

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n,$$

là Hurwitz khi và chỉ khi đường đồ thị  $A(j\omega)$  với  $\omega$  đi từ 0 đến  $+\infty$  bao quanh gốc tọa độ một góc đúng bằng  $\frac{n\pi}{2}$ . Nói cách khác

$$A(s) \text{ là Hurwitz} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \text{arc } A(j\omega) = \frac{n\pi}{2}$$

**Ví dụ 2.51:** Minh họa tiêu chuẩn Michailov

Xét đa thức bậc 3 là

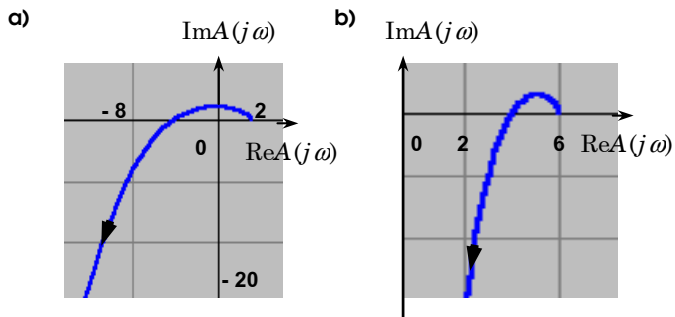
$$A(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 2$$

Đa thức này có

$$A(j\omega) = (2 - 3\omega^2) + j(3\omega - \omega^3)$$

Hình 2.69a) biểu diễn đồ thị của  $A(j\omega)$  và từ đồ thị đó ta nhận thấy  $A(j\omega)$  đi qua 3 góc phần tư của mặt phẳng phức theo chiều ngược kim đồng hồ, tức là bao gốc tọa độ một góc đúng bằng  $\frac{3\pi}{2}$ .

Vậy theo tiêu chuẩn Michailov thì  $A(s)$  là đa thức Hurwitz. □



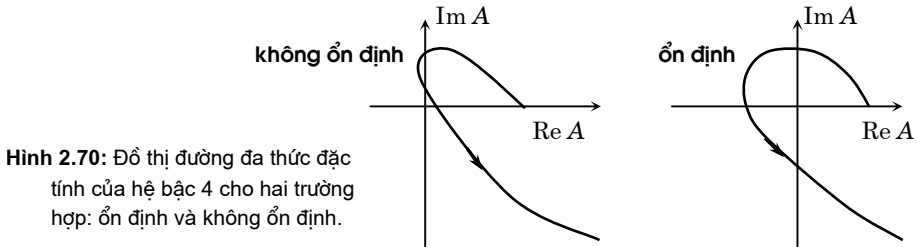
**Hình 2.69:** Minh họa ví dụ 2.51

**Ví dụ 2.52:** Minh họa tiêu chuẩn Michailov

Hệ với hàm truyền  $G(s) = \frac{3}{s^3 + s^2 + s + 6}$  có đa thức đặc tính

$$A(s) = s^3 + s^2 + s + 6 \Leftrightarrow A(j\omega) = (6 - \omega^2) + j(\omega - \omega^3)$$

Hình 2.69b) là đồ thị của  $A(j\omega)$ . Đường đồ thị đó không bao gốc tọa độ, góc nhìn  $A(j\omega)$  từ gốc tọa độ khi  $\omega$  đi từ 0 đến  $+\infty$  là  $-\frac{\pi}{2}$  (nhỏ hơn  $\frac{3\pi}{2}$ ). Bởi vậy  $A(s)$  không phải là đa thức Hurwitz, hay hệ đã cho không ổn định. □



**Hình 2.70:** Đồ thị đường đa thức đặc tính của hệ bậc 4 cho hai trường hợp: ổn định và không ổn định.

Trong khi việc xây dựng đồ thị cho hàm  $A(j\omega)$  của những đa thức  $A(s)$  có bậc tương đối nhỏ khá đơn giản thì ở những đa thức bậc cao (từ 5 trở lên) là rất khó thực hiện nếu như không sử dụng những công cụ mô phỏng. Chính vì hạn chế này mà tiêu chuẩn Michailov ít có ý nghĩa thực tế. Song bù lại, tiêu chuẩn Michailov lại có ý nghĩa như một gợi ý cho các tiêu chuẩn khác như Nyquist, Kharitonov ...

Hình 2.70 là dạng đồ thị của hàm  $A(j\omega)$  cho hệ có đa thức đặc tính bậc 4

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4$$

Tổng quát từ dạng đường đồ thị đó ta rút ra được một số hệ quả sau của tiêu chuẩn Michailov:

**Định lý 2.19** (Hệ quả của tiêu chuẩn Michailov):

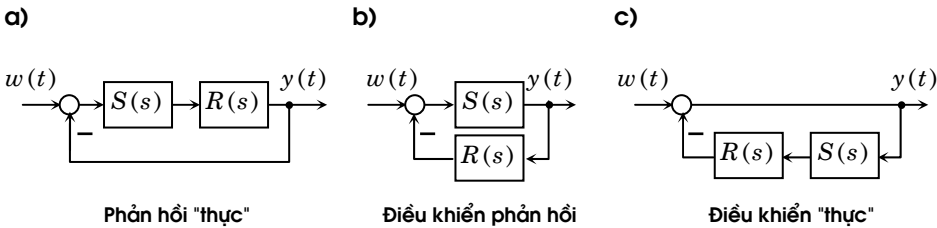
- Giao điểm của đường quỹ đạo biên pha  $A(j\omega)$  của đa thức Hurwitz  $A(s)$  với trục thực phải nằm xen kẽ giữa những giao điểm của nó với trục ảo.
- Giá trị tại hai giao điểm kế nhau của  $A(j\omega)$  với trục thực của đa thức Hurwitz  $A(s)$  phải trái dấu nhau.
- Giá trị tại hai giao điểm kế nhau của  $A(j\omega)$  với trục ảo của đa thức Hurwitz  $A(s)$  phải trái dấu nhau.

**Chú ý:** Trong một số tài liệu, ví dụ như [10], tiêu chuẩn Michailov còn được gọi là tiêu chuẩn Michailov–Cremer–Leonhard.

### 2.3.3 Phân tích chất lượng hệ kín từ hàm truyền của hệ hở

Khái niệm hệ kín (phản hồi âm) được mô tả trực quan ở hình 2.71 với hai khâu tuyến tính có hàm truyền hợp thức là  $R(s)$  và  $S(s)$ . Khi đó hệ kín sẽ được có hàm truyền  $G(s)$  cho các trường hợp phản hồi khác nhau như sau:

- Phản hồi thực (phản hồi đơn vị):  $G(s) = \frac{R(s)S(s)}{1 + R(s)S(s)}$
- Điều khiển phản hồi:  $G(s) = \frac{S(s)}{1 + R(s)S(s)}$
- Điều khiển thực (truyền thẳng đơn vị):  $G(s) = \frac{1}{1 + R(s)S(s)}$



Hình 2.71: Một số dạng hệ hồi tiếp thường gặp.

Như vậy tất cả các dạng hồi tiếp đã xét ở trên đều có hàm truyền với một mẫu số chung là *hàm sai lệch phản hồi*

$$F(s) = 1 + R(s)S(s) = 1 + G_h(s) \tag{2.117}$$

trong đó tích

$$G_h(s) = R(s)S(s)$$

được gọi là *hàm truyền của hệ hở*. Mục này sẽ trình bày các phương pháp phân tích hệ kín với cấu trúc cơ bản cho ở hình 2.71 trên cơ sở hàm truyền  $G_h(s)$  của hệ hở.

#### Xét tính ổn định: Tiêu chuẩn Nyquist

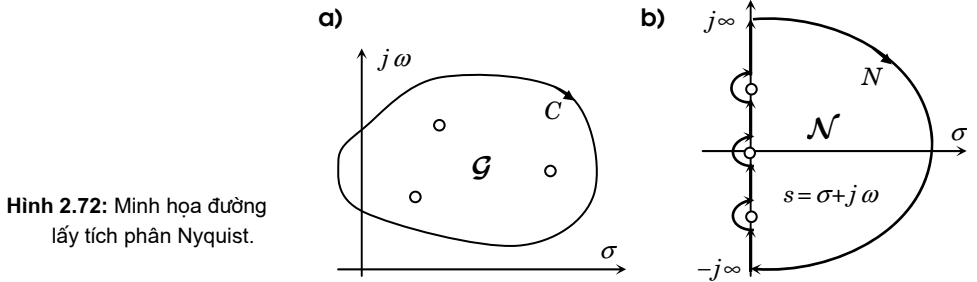
Hiên nhiên rằng các hệ kín ở hình 2.71 sẽ ổn định khi và chỉ khi tất mọi nghiệm của  $F(s)$  cho trong (2.117) đều có phần thực âm (nằm bên trái trục ảo).

Ký hiệu  $A(s)$  là đa thức mẫu số có bậc  $n$ ,  $B(s)$  là đa thức tử số của hàm truyền hệ hở  $G_h(s)$ , tức là của tích  $G_h(s) = R(s)S(s)$ :

$$G_h(s) = R(s)S(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = c \frac{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_m)}{(s - q_1)(s - q_2) \cdots (s - q_n)}$$

trong đó  $c$  là hằng số. Khi đó sẽ có:

$$\text{arc}G_h(s) = \sum_{k=1}^m \text{arc}(s - p_k) - \sum_{k=1}^n \text{arc}(s - q_k)$$



**Hình 2.72:** Minh họa đường lấy tích phân Nyquist.

Từ đây ta suy ra được:

**Định lý 2.20:** Nếu một miền  $\mathcal{G}$  chứa  $P$  điểm không và  $Q$  điểm cực của của  $G_h(s)$  thì:

$$\oint_C \text{darc}G_h(s) = -2\pi(P-Q)$$

trong đó  $C$  là đường biên của  $\mathcal{G}$  có chiều thuận kim đồng hồ, tức là chiều mà đi dọc theo nó, miền  $\mathcal{G}$  luôn nằm phía phải như hình 2.72a) mô tả.

Bây giờ ta xét đường cong khép kín  $N$  bao gồm trục ảo và nửa đường tròn nằm bên phải trục ảo có bán kính bằng  $\infty$ , trong đó khi đi trên trục ảo, mỗi khi gặp một nghiệm của  $A(s)$ , thì nó được thay bằng nửa đường tròn có bán kính đủ nhỏ bao phía trái điểm đó như hình 2.71b) mô tả. Đường cong  $N$  này có tên gọi là *đường cong Nyquist*. Nó chính là đường biên của miền  $\mathcal{N}$  chứa tất cả  $m$  nghiệm không nằm bên trái trục ảo của  $A(s)$ , bao gồm tất cả  $n^0$  nghiệm nằm trên trục ảo và  $n^+$  nghiệm nằm bên phải trục ảo của  $A(s)$ . Theo nội dung định lý 2.20, thì:

$$\oint_N \text{darc}A(s) = -2\pi(n^+ + n^0) = -2\pi m \quad (2.118)$$

Quay lại hệ kín với hàm sai lệch phản hồi:

$$F(s) = 1 + G_h(s) = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)}$$

Công thức này chỉ rằng:

$$\oint_N \text{darc}[1 + G_h(s)] = \oint_N \text{darc}[A(s) + B(s)] - \oint_N \text{darc}A(s) \quad (2.119)$$

Nhưng vì nghiệm của  $F(s)$ , tức là nghiệm của:

$$A(s) + B(s) = 0$$

cũng chính là điểm cực của hệ kín, nên theo định lý 2.20, hệ kín ổn định khi và chỉ khi:

$$\oint_N \operatorname{darc}[A(s) + B(s)] = 0$$

Bởi vậy, khi kết hợp cùng với (2.118) và (2.119) sẽ đến được:

**Định lý 2.21:** Gọi  $G_h(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  là hàm truyền của hệ hở. Giả sử rằng  $m$  là số điểm cực không nằm bên trái trục ảo của  $G_h(s)$ . Khi đó để hệ kín ổn định thì cần và đủ là:

$$\oint_N \operatorname{darc}[1 + G_h(s)] = 2\pi m \quad (2.120)$$

Ký hiệu tiếp  $G_h(N)$  là đường quỹ đạo của  $G_h(s)$  khi  $s$  chạy dọc trên  $N$ , được gọi là *đường đồ thị Nyquist*, khi đó định lý 2.21 trên còn có dạng phát biểu khác như sau:

**Định lý 2.22** (Nyquist): Nếu hàm truyền  $G_h(s)$  của hệ hở có  $m$  điểm cực không nằm bên trái trục ảo (nằm trên trục ảo hoặc nằm bên phải trục ảo), thì cần và đủ để hệ kín ổn định là *đường đồ thị Nyquist* của hệ hở, ký hiệu bằng  $G_h(N)$ , bao điểm  $-1 + 0j$  của mặt phẳng phức đúng  $m$  lần theo chiều ngược kim đồng hồ.

**Ví dụ 2.53:** Minh họa tiêu chuẩn Nyquist

Xét hệ phản hồi âm có hàm truyền của hệ hở là khâu tích phân-quán tính bậc nhất

$$G_h(s) = \frac{k}{s(1 + Ts)}, \quad k, T > 0$$

Có thể thấy ngay được  $G_h(s)$  chỉ có một điểm cực  $s_1 = 0$  không nằm bên trái trục ảo, tức là có  $m = 1$ . Hình 2.73a) là đường cong Nyquist  $N$ , gồm ba đoạn:

- $N_1$  nằm trên trục ảo có  $\omega$  đi từ  $-\infty$  tới  $-0$
- $N_2$  là nửa đường tròn phải trái trục ảo, có bán kính vô cùng nhỏ và tâm là gốc tọa độ
- $N_3$  nằm trên trục ảo có  $\omega$  đi từ  $+0$  tới  $+\infty$

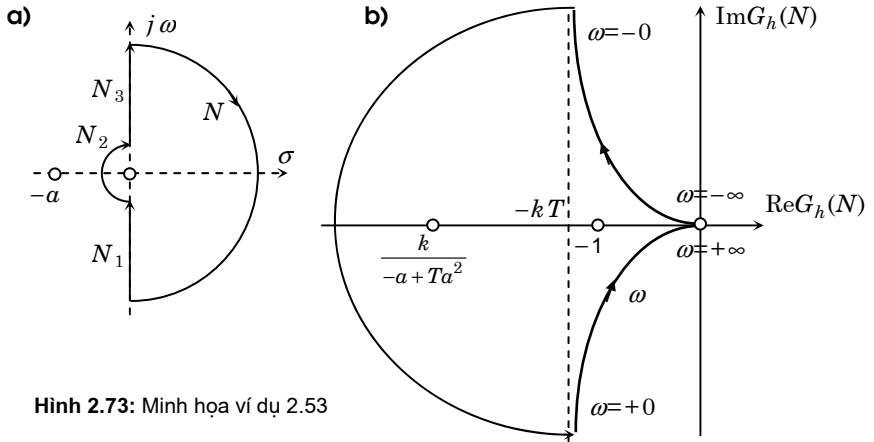
Hình 2.73b) là đồ thị Nyquist  $G_h(N)$  cũng gồm ba nhánh:

- $G_h(N_1)$  là đường cong phía trên trục thực, có đường tiệm cận  $\operatorname{Re} G_h = -kT$  khi  $\omega$  tiến tới  $-0$ .
- $G_h(N_2)$  là phần đường tròn phía trái đường tiệm cận  $\operatorname{Re} G_h = -kT$  với tâm 0 và bán kính bằng  $\infty$ . Lý do  $G_h(N_2)$  phải là phần đường tròn nằm bên trái đường tiệm cận  $\operatorname{Re} G_h = -kT$  (chứ không nằm bên phải), là vì ứng với một giá trị  $s = -a$ ,  $1 \gg a > 0$  nằm gần gốc tọa độ sẽ có  $G(-a) = \frac{k}{-a + Ta^2} \ll -1$  là một số âm nằm rất xa gốc 0.



- $G_h(N_3)$  là đường cong phía dưới trục thực, có đường tiệm cận  $\text{Re}G_h = -kT$  khi  $\omega$  tiến tới  $+\infty$ .

Từ đường đồ thị  $G_h(N)$  thu được ta thấy, do nó bao điểm  $-1+0j$  đúng một góc bằng  $2\pi=2\pi m$ , nên theo định lý 2.22, hệ kín ổn định.  $\square$



Hình 2.73: Minh họa ví dụ 2.53

Tuy nhiên, dạng thường hay gặp trong ứng dụng của tiêu chuẩn Nyquist là hệ hở ổn định hoặc chỉ có  $s=0$  là điểm cực duy nhất không nằm bên trái trục ảo. Trong trường hợp như vậy thì do:

$$G_h(N) = G_h(j\omega)$$

và  $G_h(j\omega)$ ,  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  có dạng đối xứng qua trục thực, nên:

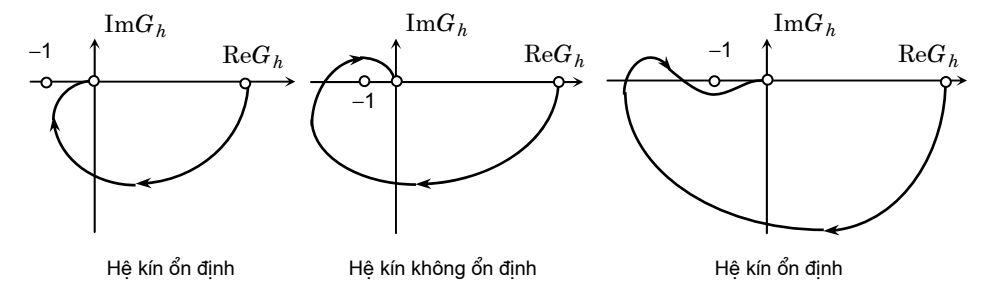
**Định lý 2.23:** Nếu hệ hở ổn định hoặc chỉ có  $s=0$  là điểm cực duy nhất không nằm bên trái trục ảo thì hệ kín sẽ ổn định khi và chỉ khi đường đồ thị đặc tính tần biên-phá  $G_h(j\omega)$ ,  $0 \leq \omega \leq \infty$  của hệ hở không đi qua và không bao điểm  $-1+0j$ .

Để thuận tiện cho việc kiểm tra xem đường quỹ đạo  $G_h(j\omega)$  có đi qua hay bao điểm  $-1+0j$  hay không, ta có thể chỉ cho  $\omega$  chạy từ 0 đến  $+\infty$  (vì  $G_h(j\omega)$  có dạng đối xứng qua trục thực) và sử dụng quy tắc bàn tay trái như sau:

**Định lý 2.24** (Quy tắc bàn tay trái): Nếu hệ hở ổn định hoặc chỉ có  $s=0$  là điểm cực duy nhất không nằm bên trái trục ảo, thì hệ kín sẽ ổn định khi và chỉ khi điểm  $-1+0j$  luôn nằm bên trái đường đồ thị biên pha  $G_h(j\omega)$  của hệ hở nếu ta đi dọc trên  $G_h(j\omega)$  theo chiều tăng của  $\omega$ .

Hình 2.74 minh họa cho tiêu chuẩn Nyquist ở trường hợp hệ hở ổn định. Hệ kín sẽ ổn định nếu như góc nhìn từ điểm  $-1+0j$  lên đường quỹ đạo  $G_h(j\omega)$  khi  $\omega$  đi từ 0 đến  $+\infty$  bằng 0.

Bên cạnh việc kiểm tra tính ổn định của hệ kín thông qua dạng quỹ đạo đường đặc tính tần số biên pha của hệ hở, tiêu chuẩn Nyquist còn thường được sử dụng để xác định tham số bộ điều khiển sao cho hệ kín ổn định.



**Hình 2.74:** Minh họa tiêu chuẩn Nyquist.

Tổng quát hóa định lý 2.22 của Nyquist cho việc xác định hằng số khuếch đại  $k$  của bộ điều khiển để hệ kín có hàm truyền hệ hở là  $G_h(s)=kS(s)$  được ổn định, ta có định lý sau:

**Định lý 2.25:** Xét hệ kín có hàm truyền của hệ hở là

$$G_h(s) = kS(s)$$

Giả sử rằng  $S(s)$  có  $m$  điểm cực không nằm bên trái trục ảo (nằm trên hoặc nằm bên phải trục ảo). Khi đó để hệ kín ổn định thì cần và đủ là đường đồ thị Nyquist  $S(N)$  của khâu  $S(s)$  bao điểm  $-\frac{1}{k}+0j$  trong mặt phẳng phức đúng  $m$  lần theo chiều ngược kim đồng hồ.

**Ví dụ 2.54:** Minh họa tiêu chuẩn Nyquist

Xét hệ phản hồi âm với cấu trúc cho ở hình 2.75a) có 
$$S(s)=\frac{s^2-1}{1+2s+3s^2+6s^3+s^4}.$$

Như vậy hàm truyền của hệ hở sẽ là  $G_h(s)=kS(s)$ . Từ ví dụ 2.45 ta đã được biết rằng  $S(s)$  có hai điểm cực nằm bên phải trục ảo. Hơn thế nữa, do đa thức đặc tính của hàm truyền hệ hở là bậc 4 (hệ có 4 điểm cực) với tất cả các hệ số đều khác 0, nên trong số hai điểm cực còn lại không thể có điểm cực nào nằm trên trục ảo. Suy ra  $S(s)$  có  $m=2$  và đường Nyquist  $N$  của nó là toàn bộ trục ảo  $j\omega$  với  $-\infty\leq\omega\leq\infty$  và nửa đường tròn  $N_1$  nằm bên phải trục ảo có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng  $\infty$  và có chiều theo chiều kim đồng hồ (hình 2.75b). Hơn thế nữa, do  $S(s)$  là hàm hợp thức nên khi  $s$  chạy dọc theo  $N_1$  nó sẽ chỉ có một giá trị hằng:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} S(s) = 0$$

Vậy đồ thị Nyquist của  $S(s)$  sẽ chính là đường đồ thị đặc tính tần biên–pha:

$$S(N) = S(j\omega) \quad \text{với} \quad -\infty \leq \omega \leq \infty$$

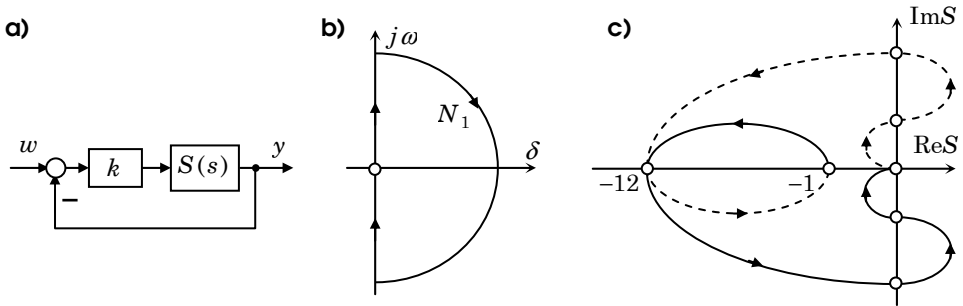
và do đó, vì  $S(s)$  là hàm thực hữu tỷ, tức là đồ thị đặc tính tần biên–pha của nó có dạng đối xứng qua trục thực, nên ta chỉ cần vẽ  $S(j\omega)$ ,  $0 \leq \omega \leq \infty$  là đủ. Xét:

$$S(j\omega) = \frac{-(1+\omega^2)}{(1-3\omega^2+\omega^4)+j\omega(2-6\omega^2)} = \text{Re } S + j \text{Im } S$$

thì từ tính liên tục của  $S(s)$  trên trục ảo ta có bảng giá trị của  $S(j\omega)$ ,  $0 \leq \omega \leq \infty$  như sau:

$\omega$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	$\infty$
ReS	-1	-	-12	-	0
ImS	0	+	0	-	0

Suy ra, đồ thị  $S(j\omega)$ ,  $0 \leq \omega \leq \infty$  có dạng như đường nét liền ở hình 2.75c). Lấy thêm phần đối xứng qua trục thực là đường nét rời ở hình 2.75c) ta có đầy đủ Nyquist  $S(N)$ .



**Hình 2.75:** Minh họa ví dụ 2.54.

Từ đây, theo định lý 2.25, ta có được điều kiện để  $k$  làm hệ kín ổn định là điểm  $-\frac{1}{k}$  trên trục thực mà đồ thị Nyquist  $S(N)$  bao  $m=2$  lần ngược chiều kim đồng hồ:

$$-12 < -\frac{1}{k} < -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{12} < k < 1$$



**Ví dụ 2.55 ([17]):** Minh họa tiêu chuẩn Nyquist

Xét một hệ phản hồi âm có hàm truyền hệ hở là  $G_h(s)=kS(s)$ , trong đó

$$S(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s^2+4s+20)}$$

Có thể thấy ngay được hàm truyền  $S(s)$  có một điểm cực  $s_1=0$  nằm trên trục ảo và một điểm cực  $s_2=1$  nằm bên phải trục ảo, tức là có  $m=2$ . Cho  $s$  chạy dọc theo đường *đường cong Nyquist N* (hình 2.76a), khi đó *đồ thị Nyquist S(N)* của đối tượng sẽ có dạng cho ở hình 2.76b). Đồ thị này chỉ rằng

$$|S(j\omega)| \rightarrow \infty \text{ khi } |\omega| \rightarrow 0$$

Ngoài ra, khi  $s$  đi dọc theo trục ảo, tới gần  $s_1=0$ , thì nó lại đi theo nửa đường tròn  $N_2$  có bán kính vô cùng nhỏ bao phía trái điểm đó (hình 2.76a). Điều này được phản ánh ở *đồ thị Nyquist S(N)* trong hình 2.76b) bằng nửa đường tròn *phía phải trục ảo* với chiều ngược chiều kim đồng hồ và bán kính bằng  $\infty$ . Lý do cho điều đó là vì  $S(s)$  là hàm bảo giác và cũng là vì, chẳng hạn tại điểm  $s=-0,1$  hàm  $S(s)$  có giá trị là

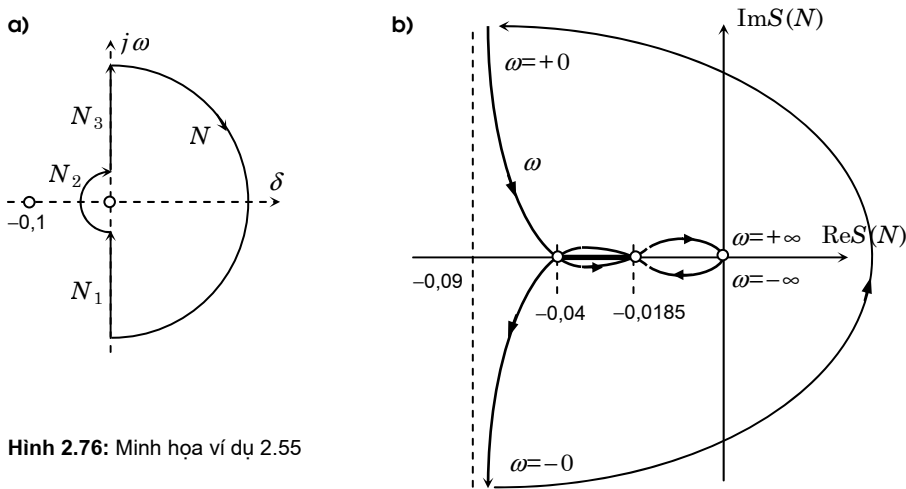
$$S(-0,1) \approx 0,4 > 0$$

Từ hình 2.76b) ta thấy ngay, đồ thị Nyquist  $S(N)$  bao đoạn

$$-0,04 < -\frac{1}{k} < -0,0185$$

được tô đậm trong hình 2.76b), một góc đúng bằng  $2\pi m=4\pi$  (theo chiều ngược chiều kim đồng hồ). Điều này chỉ rằng hệ kín sẽ ổn định với mọi giá trị  $k$  thuộc khoảng:

$$25 < k < 54. \qquad \square$$



**Hình 2.76:** Minh họa ví dụ 2.55

### Kiểm tra tính ổn định hệ kín nhờ biểu đồ Bode

Điều đặc biệt của tiêu chuẩn Nyquist phát biểu ở định lý 2.22 cũng như 2.23 là nó áp dụng được cho cả những trường hợp hàm truyền hệ hở  $G_h(s)=R(s)S(s)$  có chứa cả thành phần giữ trễ.

Nếu như bên cạnh điều kiện hệ hở ổn định, tức  $G_h(s)$  là hàm bên, còn có giả thiết thêm rằng  $|G_h(j\omega)| < 1$  với mọi  $0 \leq \omega \leq \infty$  thì do đường quỹ đạo  $G_h(j\omega)$  khi đó luôn nằm trong đường tròn đơn vị nên nó không thể đi qua hay bao điểm  $-1+0j$  và vì vậy hệ kín ổn định.

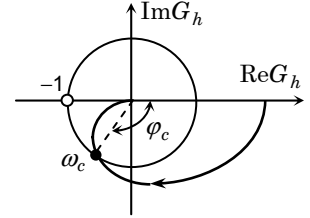
**Định lý 2.26:** Nếu hàm truyền  $G_h(s)$  của hệ hở là hàm bên, tức là hệ hở ổn định, và  $\|G_h(j\omega)\|_\infty = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G_h(j\omega)| < 1$  thì hệ kín cũng ổn định.

Bây giờ ta xét một hệ hồi tiếp phản hồi âm như ở hình 2.77 mô tả, có hàm truyền hệ hở  $G_h(s)=R(s)S(s)$  là hàm bên và

$$\|G_h(j\omega)\|_\infty = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G_h(j\omega)| \geq 1$$

Nếu như có giả thiết thêm rằng đường quỹ đạo tần số  $G_h(j\omega)$  chỉ cắt đường tròn đơn vị một lần tại điểm tần số  $\omega_c$  thì hệ kín sẽ ổn định khi và chỉ khi tại tần số  $\omega_c$  đó hàm  $G_h(j\omega)$  có góc pha lớn hơn  $-\pi$

$$\varphi_c = \arg G_h(j\omega_c) > -\pi,$$



Hình 2.77: Giải thích tần số cắt.

trong đó tần số  $\omega_c$  được gọi là *tần số cắt*. Điều khẳng định trên cũng là dễ hiểu vì khi đó  $G_h(j\omega)$  không thể đi qua cũng như không thể bao điểm  $-1+0j$  (hình 2.77).

**Định lý 2.27:** Nếu hàm truyền  $G_h(s)$  của hệ hở là hàm bên, có  $\sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G_h(j\omega)| \geq 1$  nhưng đường quỹ đạo tần số  $G_h(j\omega)$  chỉ cắt đường tròn đơn vị một lần tại điểm tần số cắt  $\omega_c$  và tại đó có  $\varphi_c = \arg G_h(j\omega_c) > -\pi$  thì hệ kín sẽ ổn định.

Với nội dung định lý 2.27 ta có thể dễ dàng kiểm tra tính ổn định của hệ kín khi đã biết được rằng hàm truyền  $G_h(s)$  của hệ hở là hàm bên nhờ biểu đồ Bode

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg |G_h(j\omega)| \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = \arg G_h(j\omega)$$

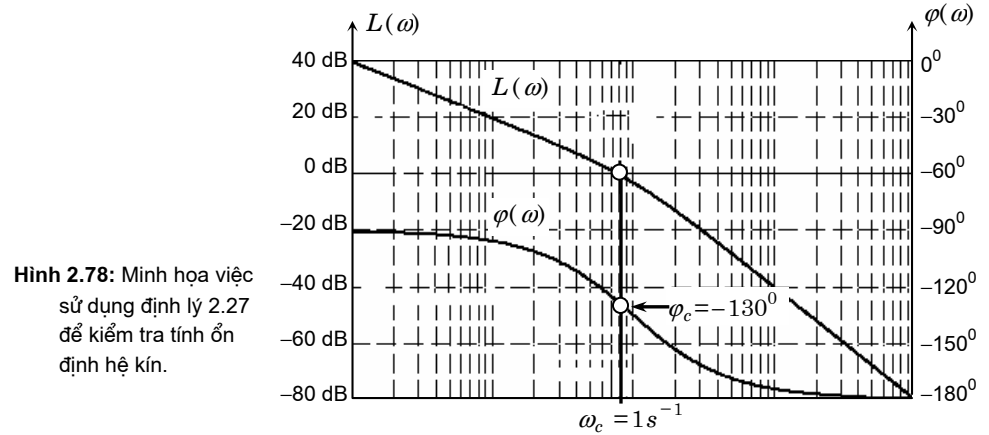
của  $G_h(s)$ . Nguyên tắc kiểm tra như sau:

- Nếu  $L(\omega)$  có đoạn nằm phía trên trục hoành thì  $\sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G_h(j\omega)| > 1$
- Điểm cắt của  $G_h(j\omega)$  với đường tròn đơn vị là giao điểm của  $L(\omega)$  với trục hoành.
- Tần số cắt  $\omega_c$  là hoành độ giao điểm của  $L(\omega)$  với trục hoành.
- Góc  $\varphi_c = \arg G_h(j\omega_c)$  là tung độ của  $\varphi(\omega)$  tại tần số cắt  $\omega_c$
- Hệ kín sẽ ổn định nếu  $\varphi_c$  nằm phía bên trên đường  $\varphi(\omega) = -\pi$ .

**Ví dụ 2.56:** Sử dụng tiêu chuẩn Nyquist dưới dạng biểu đồ Bode

Hình 2.78 dưới đây minh họa lại các bước thực hiện việc sử dụng định lý 3.22 để kiểm tra tính ổn định của hệ hồi tiếp (phản hồi âm) theo các nguyên tắc vừa trình bày. Chẳng hạn bằng các phương pháp thực nghiệm (đo giá trị hàm đặc tính tần) ta đã xây dựng được biểu đồ Bode của hệ hở được giả thiết là ổn định như ở hình 2.78.

Từ giao điểm đường  $L(\omega)$  của biểu đồ Bode đó với trục hoành (đường ngang tại 0 dB) ta xác định được tần số cắt  $\omega_c=1s^{-1}$ . Tiếp tục, với tần số cắt đó ta đọc ra được từ đường  $\varphi(\omega)$  góc pha  $\varphi_c=-130^0$ . Vì  $\varphi_c=-130^0 > -180^0 = -\pi$  nên theo định lý 2.27 hệ kín là ổn định. □



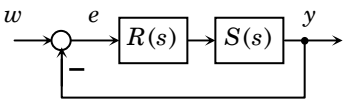
**Đánh giá sai lệch tĩnh**

Xét hệ kín với sơ đồ cấu trúc cho ở hình 2.79. Trong mục trước ta đã đề cập tới tiêu chuẩn Nyquist để xét tính ổn định của nó trên cơ sở phân tích hàm truyền của hệ hở là  $G_h(s)=R(s)S(s)$ . Hiển nhiên rằng khi hệ kín ổn định và tín hiệu vào  $w(t)=w_0$  là hằng số thì sau một khoảng thời gian cần thiết (thời gian quá độ), tín hiệu ra  $y(t)$  cũng sẽ là một hằng số. Song việc hằng số đó có bằng giá trị mong muốn  $w_0$  đã được đặt ở đầu vào hay không thì lại chưa được đảm bảo.

Giá trị sai lệch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{\infty}$$

gọi là *sai lệch tĩnh* của hệ kín. Một trong các chất lượng hệ thống thường được quan tâm là giá trị sai lệch tĩnh  $e_{\infty}$ . Hệ được gọi là có *chất lượng tốt* nếu như có  $e_{\infty}=0$ . Cũng cần phải



**Hình 2.79:** Một cấu trúc cơ bản của hệ kín.

nói thêm rằng việc đánh giá sai lệch tĩnh thường được thực hiện với một dạng cụ thể của tín hiệu vào  $w(t)$ , chẳng hạn như với:

- $w(t) = 1(t)$
- $w(t) = t$

Nếu hệ kín (hình 2.79) là ổn định, khi đó điều kiện  $e_\infty=0$  sẽ tương đương với  $w=y$  ở chế độ xác lập ( $t \rightarrow \infty$ ), tức là:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{R(s)S(s)}{1 + R(s)S(s)} \bigg|_{s=0} = G(0)=1 \quad (\text{cần phải có giả thiết là tồn tại giới hạn } e_\infty)$$

Ở những trường hợp rộng mở hơn thì thay cho sai lệch tĩnh  $e_\infty$ , chất lượng hệ thống sẽ được đánh giá bằng *chuẩn của sai lệch*

$$\|y(t)-u(t)\|$$

Ý nghĩa chuẩn sai lệch trong công thức trên có thể là chuẩn bậc 2 hoặc chuẩn vô cùng tùy theo từng yêu cầu cụ thể của bài toán. Nếu hệ kín có giá trị *chuẩn của sai lệch* tương đối nhỏ thì người ta nói tín hiệu ra  $y(t)$  là bám được theo tín hiệu lệnh đầu vào  $w(t)$ . Bài toán thiết kế bộ điều khiển  $R(s)$  để hệ kín có giá trị  $\|y(t)-u(t)\|$  nhỏ như mong muốn có tên gọi là *điều khiển bám (tracking control)*.

Quay lại vấn đề đánh giá sai lệch tĩnh  $e_\infty$ . Định lý sau là tiêu chuẩn đánh giá sai lệch tĩnh khi tín hiệu đầu vào là hàm Heaviside hoặc tăng đều.

**Định lý 2.28:** Cho hệ kín ổn định, không có nhiễu tác động, với sơ đồ cấu trúc cho trong hình 2.79. Hệ sẽ có *sai lệch tĩnh bằng 0*, tức là có  $e_\infty=0$ , nếu

- a) Khi  $w(t)=1(t)$  và hàm truyền hệ hở  $G_h(s)$  có ít nhất một điểm cực là gốc tọa độ, tức là hệ hở có chứa ít nhất *một khâu tích phân*.
- b) Khi  $w(t)=t$  và hàm truyền hệ hở  $G_h(s)$  có ít nhất hai điểm cực là gốc tọa độ (điểm cực  $s=0$  bội hai), tức là hệ hở có chứa ít nhất *hai khâu tích phân*.

*Chứng minh:*

Trước hết ta thấy được ngay  $e(t)$  có ảnh Laplace

$$E(s) = \frac{W(s)}{1+S(s)R(s)} = \frac{W(s)}{1+G_h(s)}$$

trong đó  $W(s)$  là ảnh Laplace của  $w(t)$ .

Vì có giả thiết hệ kín ổn định, nên theo công thức về giới hạn thứ nhất của toán tử Laplace, ta có

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} sW(s)}{1+G_h(0)}$$

Lần lượt thay  $W(s)=\frac{1}{s}$  cho trường hợp  $w(t)=1(t)$  và  $W(s)=\frac{1}{s^2}$  khi  $w(t)=t$  vào công thức trên ta thu được điều phải chứng minh. □

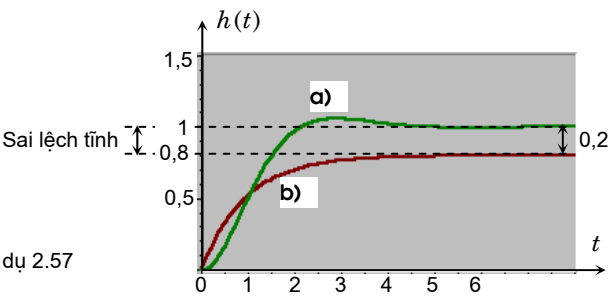
**Ví dụ 2.57:** Đánh giá sai lệch tĩnh

Hình 2.80 biểu diễn hàm quá độ (đáp ứng của hệ với kích thích  $w(t)=1(t)$  ở đầu vào) của hệ hồi tiếp có cấu trúc sơ đồ khối cho trong hình 2.79 với hàm truyền hệ hở

a)  $G_h(s) = \frac{1}{s(1 + 0,5s)}$

b)  $G_h(s) = \frac{4}{1 + 5s}$

Ta thấy ở trường hợp a) hệ không có sai lệch tĩnh vì  $G_h(s)$  có chứa thành phần tích phân, nhưng với b) thì hệ có sai lệch tĩnh và sai lệch đó bằng 0,2. □



Hình 2.80: Minh họa ví dụ 2.57

**Thông số đặc trưng của quá trình quá độ: Độ quá điều chỉnh và thời gian quá độ**

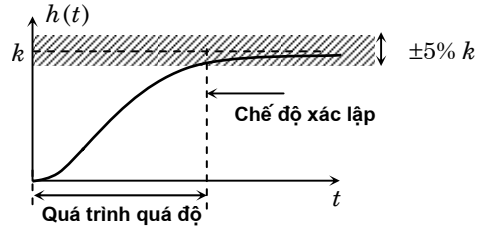
Khi phân tích hệ thống người ta thường sử dụng hai khái niệm *quá trình quá độ* và *chế độ xác lập*. Quá trình quá độ là giai đoạn hệ thống đang chuyển đổi từ trạng thái cũ sang một trạng thái mong muốn khác. Chế độ xác lập là giai đoạn hệ thống đã đạt được đến trạng thái mới mong muốn (hoặc đã gần đến). Chẳng hạn khi đóng điện áp nguồn cung cấp cho một động cơ, quá trình động cơ tăng tốc độ vòng quay từ 0 đến một giá trị xác định được gọi là quá trình quá độ. Khi động cơ đã ổn định được vận tốc và chạy đều thì ta nói động cơ đang ở chế độ xác lập.

Cả hai quá trình quá độ và chế độ xác lập cùng có trong đáp ứng của hệ thống. Tại một thời điểm nhất định, hệ thống chỉ có thể hoặc đang ở quá trình quá độ hoặc đã ở chế độ xác lập chứ không bao giờ có cả hai trong cùng một thời điểm.

Theo định nghĩa như vậy về chế độ xác lập thì rõ ràng chỉ ở hệ ổn định mới có chế độ xác lập. Sẽ không có một điểm thời gian cụ thể phân chia quá trình quá độ với chế độ xác lập mà nó phụ thuộc vào quan niệm thế nào là đã đến "*gần trạng thái mới mong muốn*" của bài toán điều khiển. Thông thường, ở bài toán tuyến tính người ta hay cho rằng thời điểm bắt đầu chế độ xác lập là khi hệ thống vào được tới vùng có sai lệch 5% (hoặc 2%) so với giá trị mong muốn và không ra khỏi vùng đó nữa (hình 2.81).



**Hình 2.81:** Điểm phân chia quá trình quá độ và chế độ xác lập.



Để phân tích chất lượng động học của một hệ thống, người ta cần phải phân tích quá trình quá độ của nó. Trước hết có hai thông số cơ bản đặc trưng cho quá trình quá độ, đó là:

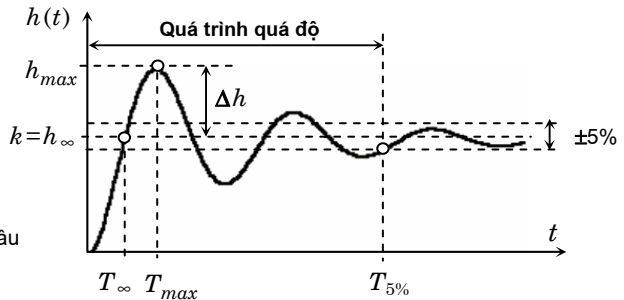
- Thời gian quá độ  $T_{5\%}$ . Đây là điểm thời gian mà kể từ sau đó  $h(t)$  nằm trong khoảng  $\pm 5\%$  của giá trị xác lập  $h_{\infty}$  của nó.
- Độ quá điều chỉnh  $\Delta h$ , được định nghĩa là

$$\Delta h = \max_t h(t) - h_{\infty} = h_{\max} - h_{\infty} > 0$$

Trước tiên ta phân tích quá trình quá độ của hệ dao động bậc hai

$$G(s) = \frac{k}{1 + 2DTs + (Ts)^2} \quad \text{với} \quad 0 < D < 1 \quad (2.121)$$

bằng cách xác định hai thông số  $T_{5\%}$  và  $\Delta h$ .



**Hình 2.82:** Hàm quá độ của khâu dao động bậc hai.

Hình 2.82 biểu diễn đồ thị hàm quá độ của khâu dao động bậc hai. Từ mục 2.2.8 ta đã được biết là hệ này có hàm quá độ (2.95), độ quá điều chỉnh (2.99) và thời gian  $T_{\max}$  (2.97) như sau

$$h(t) = k - ke^{-\frac{D}{T}t} \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{T}t\right) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{T}t\right) \right], \quad t \geq 0$$

$$\Delta h = k \exp\left(\frac{-\pi D}{\sqrt{1-D^2}}\right) \quad \text{và} \quad T_{max} = \frac{\pi T}{\sqrt{1-D^2}} \quad (2.122)$$

Suy ra

$$k \exp\left(\frac{DT_{5\%}}{T}\right) \approx 0,05k \quad \Leftrightarrow \quad T_{5\%} \approx \frac{T \ln 20}{D} \approx \frac{3T}{D} \quad (2.123)$$

Vậy hai công thức (2.122) và (2.123) đã cho ta thông số đặc trưng  $T_{5\%}$  và  $\Delta h$  của quá trình quá độ hệ dao động bậc hai từ hàm truyền (2.121) của nó.

**Ví dụ 2.58:** Xác định thời gian quá độ và độ quá điều chỉnh

Xét hệ kín cho ở hình 2.79 với hàm truyền của hệ hở

$$G_h(s) = R(s)S(s) = \frac{1}{T_1 s(1+T_2 s)}, \quad T_1, T_2 > 0$$

Khi đó, hàm truyền của hệ kín sẽ là

$$G(s) = \frac{1}{1+G_h(s)} = \frac{1}{1+T_1 s+T_1 T_2 s^2} = \frac{1}{1+2DTs+(Ts)^2}$$

trong đó

$$T = \sqrt{T_1 T_2} \quad \text{và} \quad D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Vậy trong trường hợp  $T_1 < 4T_2$  hệ kín với  $D < 1$  là một khâu dao động bậc hai. Suy ra

$$\Delta h = \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{T_1}{4T_2 - T_1}}\right) \quad \text{và} \quad T_{5\%} \approx \frac{3T}{D} = 6T_2 \quad \square$$

Để xác định thời gian quá độ  $T_{5\%}$  và độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  của những hệ khác, người ta thường xấp xỉ chúng trong miền tần số đặc trưng của quá trình quá độ thành khâu dao động bậc hai, rồi mới sử dụng các công thức (2.122) và (2.123).

**Ví dụ 2.59:** Xác định xấp xỉ thời gian quá độ và độ quá điều chỉnh

Xét hệ kín cho ở hình 2.83a) với hàm truyền hệ hở  $G_h(s)$  có dạng đồ thị Bode cho ở hình 2.83b) bằng đường nét liền, tức là có cấu trúc

$$G_h(s) = \frac{1+T_1 s}{(Ts)^2(1+T_2 s)} \quad \text{với} \quad T_2 < T_1$$

Biểu đồ Bode của  $G_h(s)$  cắt trục hoành tại điểm tần số  $\omega_c$ . Gọi hằng số thời gian cắt  $T_c$  là  $T_c^{-1} = \omega_c$ . Do độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  và thời gian quá độ  $T_{5\%}$  chỉ xuất hiện trong quá trình quá độ, tức là ở dải tần số cao (vùng tần số II trong hình 2.83b) nên trong vùng

tần số I ta hoàn toàn có thể xấp xỉ biểu đồ Bode của  $G_h(s)$  bằng một đường nét rời có độ nghiêng  $-20\text{dB}$ , thay cho đường cũ là đường nét liền có độ nghiêng  $-40\text{dB}$ . Với sự xấp xỉ này thì hệ hở sẽ có hàm truyền gần đúng trong miền tần số cao II như sau

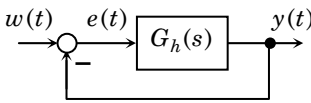
$$G_h(s) \approx \frac{1}{T_c s(1 + T_2 s)} \quad \text{và} \quad T_2 < T_c$$

Suy ra, theo kết quả của ví dụ 2.58, trong trường hợp  $T_c < 4T_2$ , hệ kín sẽ có độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  và thời gian quá độ  $T_{5\%}$  tính bằng

$$\Delta h \approx \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{T_c}{4T_2 - T_c}}\right) \quad \text{và} \quad T_{5\%} \approx 6T_2$$

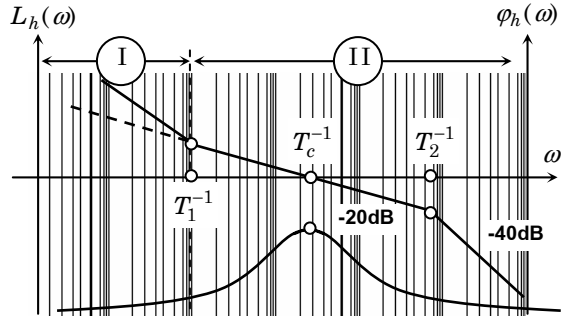
□

a)



Hình 2.83: Xác định xấp xỉ độ quá điều chỉnh và thời gian quá độ.

b)



### Thông số đặc trưng của quá trình quá độ: Sai lệch bám

Để đánh giá chất lượng động học của hệ kín, người ta cũng thường tính sai lệch bám (*tracking error*), được định nghĩa là  $\|y(t) - u(t)\|$ . Sai lệch bám càng nhỏ, hệ sẽ có chất lượng động học càng tốt. Nếu độ sai lệch được quan tâm là chuẩn bậc 2 (hình 2.84):

$$Q = \|y(t) - u(t)\|_2 = \|e(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty e^2(t) dt} \quad (2.124)$$

thì để tính  $Q$  người ta có thể sử dụng định lý Parseval, hoặc công thức Krasowski.

1) *Sử dụng công thức Krasowski:*

Giả sử ảnh Laplace của sai lệch  $e(t)$  có dạng

$$E(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (2.125)$$

Vậy thì

$$Q^2 = \frac{B_1 \Delta_1 + B_2 \Delta_2 + \dots + B_n \Delta_n - 2A_1 A_2 \Delta}{2a_0^2 \Delta}$$

trong đó

$$a) \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad a_n = 1 \quad (2.126)$$

b)  $\Delta_k$ ,  $k=1, \dots, n$  được tính giống như  $\Delta$  nhưng vector cột thứ  $k$  của ma trận trong (2.126) được thay bằng cột  $(a_1, a_0, 0, \dots, 0)^T$ .

$$c) \quad A_1 = -b_{n-1}a_0$$

$$A_2 = b_0 - b_{n-1}a_1$$

$\vdots$

$$A_n = b_{n-2} - b_{n-1}a_{n-1}$$

$$d) \quad B_1 = A_1^2$$

$$B_2 = A_2^2 - 2A_1A_3$$

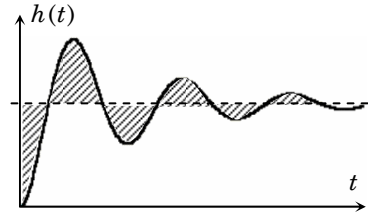
$$B_3 = A_3^2 - 2A_2A_4 + 2A_1A_5$$

$\vdots$

$$B_k = A_k^2 - 2A_{k-1}A_{k+1} + 2A_{k-2}A_{k+2} - 2A_{k-3}A_{k+3} + \dots$$

$\vdots$

$$B_n = A_n^2$$



**Hình 2.84:** Đánh giá chất lượng động qua sai lệch bám.

**Ví dụ 2.60:** Tính sai lệch bám theo Krasowski

Tính giá trị bình phương sai lệch  $Q$  của hệ kín có hàm truyền hệ hở là

$$G_h(s) = S(s)R(s) = \frac{1+2Ts}{s^2}$$

khi hệ được kích thích bởi  $1(t)$  ở đầu vào.

Hàm sai lệch bám  $e(t)$  có ảnh Laplace

$$E(s) = \frac{1}{1+SR} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{1+2Ts+s^2}$$

tức là ảnh (2.125) với

$$b_0=0, \quad b_1=1, \quad a_0=1, \quad a_1=2T \quad \text{và} \quad a_2=1$$

Suy ra:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_0 & -a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2T \end{pmatrix} = 2T$$

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2T & -1 \\ 1 & 2T \end{pmatrix} = 4T^2 + 1$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_1 = -b_1 a_0 = -1, \quad A_2 = b_0 - b_1 a_1 = -2T, \quad B_1 = A_1^2 = 1, \quad B_2 = A_2^2 = 4T^2$$

Vậy

$$Q^2 = \frac{B_1 \Delta_1 + B_2 \Delta_2 - 2A_1 A_2 \Delta}{2a_0^2 \Delta} = \frac{(4T^2 + 1) + 4T^2 - 8T^2}{4T} = \frac{1}{4T}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2\sqrt{T}}$$

□

2) *Sử dụng công thức Parseval (2.15):*

Để xác định sai lệch bám (2.124) ta cũng có thể sử dụng công thức Parseval:

$$Q = \int_0^\infty e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |E(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^\infty E(s)E(-s) ds \quad (2.127)$$

và phương pháp tích phân phức thông qua giá trị residue đã được giới thiệu ở mục 2.1.4 cũng như ví dụ 2.13. Để tiện cho việc ứng dụng, cho những hàm  $E(s)$  có dạng theo công thức (2.125), tài liệu [12] đã đưa một ra bảng tra khá tiện ích như sau.

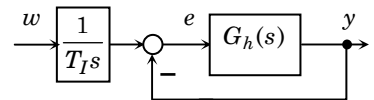
**Bảng 2.4:** Bảng tra giá trị công thức tính sai lệch bám

$n$	$Q$
1	$\frac{b_0^2}{2a_0}$
2	$\frac{b_1^2 a_0 + b_0^2}{2a_0 a_1}$
3	$\frac{b_2^2 a_0 a_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 + b_0^2 a_2}{2a_0 (a_1 a_2 - a_0)}$
4	$\frac{b_3^2 (a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3) + (b_2^2 - 2b_1 b_3) a_0 a_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_0^2 (a_2 a_3 - a_1)}{2a_0 (a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2)}$

**Ví dụ 2.61:** Tính sai lệch bám theo Parseval

Cho hệ kín cho ở hình 2.85 với

$$G_h(s) = \frac{1}{2T_I s(1+2s)^2}$$



**Hình 2.85:** Cho ví dụ 2.61

Nhiệm vụ đặt ra là phải xác định tham số  $T_I$  sao cho hệ kín có được sai lệch bám thỏa mãn

$$Q = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \rightarrow \min$$

Trước hết, để có ảnh Laplace  $E(s)$  của sai lệch  $e(t)$ , ta xác định hàm truyền từ tín hiệu  $w(t)$  tới sai lệch  $e(t)$ :

$$G_{we}(s) = \frac{1}{T_I s [1 + G_h(s)]} = \frac{0,5 T_I s}{4 T_I s^3 + 4 T_I s^2 + T_I s + 0,5}$$

Từ đây, với  $w(t)=1(t)$ , tức là  $W(s)=\frac{1}{s}$  ta có ảnh Laplace của sai lệch  $e(t)$ :

$$E(s) = G_{we}(s)W(s) = \frac{0,5 T_I}{4 T_I s^3 + 4 T_I s^2 + T_I s + 0,5}$$

Tra bảng 2.4 cho trường hợp  $n=3$  với

$$b_0 = -0,5 T_I, \quad b_1 = b_2 = 0, \quad \text{cũng như với} \quad a_0 = 0,5, \quad a_1 = T_I, \quad a_2 = 4 T_I,$$

ta đi đến:

$$Q = \frac{T_I^2}{4 T_I - 2} \rightarrow \min \Leftrightarrow T_I = 1.$$

□

### 2.3.4 Quan hệ giữa chất lượng hệ thống với vị trí điểm cực và điểm không của hàm truyền

#### Một số kết luận chung

Như đã biết, nếu một hệ SISO được mô tả bởi hàm truyền

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k \frac{(s-p_1)(s-p_2) \cdots (s-p_m)}{(s-q_1)(s-q_2) \cdots (s-q_n)} \quad (2.128)$$

trong đó  $B(s)$  là ký hiệu chỉ đa thức tử số,  $A(s)$  là đa thức mẫu số, và hai đa thức này được giả thiết là nguyên tố cùng nhau, thì nghiệm của phương trình  $A(s)=0$  sẽ chính là *điểm cực hữu hạn* và nghiệm của  $B(s)=0$  sẽ là *điểm không hữu hạn* của hệ. Do hàm truyền là hợp thức nên mọi điểm cực của hệ sẽ chỉ là hữu hạn.

Các mục trước đã cho ta được một số sự liên hệ giữa vị trí điểm cực, điểm không, bậc mô hình với đặc tính động học của hệ thống. Chẳng hạn:

- Nếu tất cả các điểm cực đều nằm bên trái trục ảo thì  $G(s)$  là hàm bền. Khi đó hệ là ổn định, đa thức mẫu số  $A(s)$  là đa thức Hurwitz.
- Các điểm cực nằm càng xa trục ảo về phía trái, quá trình quá độ của hệ càng ngắn, tức là quán tính của hệ càng nhỏ.
- Nếu  $G(s)$  có một điểm cực không nằm trên trục thực (có phần ảo khác 0) thì quá trình quá độ  $h(t)$  có dạng dao động với vô số các điểm cực trị. Các điểm cực nằm càng xa trục thực, tần số của dao động càng lớn.

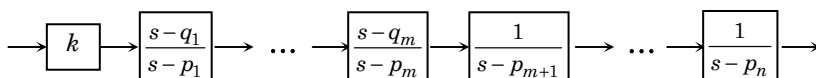
- Nếu  $G(s)$  có ít nhất một điểm cực là gốc tọa độ thì hệ sẽ có chứa thành phần tích phân và do đó tín hiệu ra luôn thay đổi khi tín hiệu vào còn khác 0.
- Những hệ có điểm không là gốc tọa độ đều mang đặc tính vi phân. Các hệ này sẽ phản ứng rất nhanh với sự thay đổi của tín hiệu đầu vào.
- Nếu  $G(s)$  là hàm hợp thức không chặt ( $m=n$ ) thì hàm quá độ  $h(t)$  của hệ thống sẽ không xuất phát từ gốc tọa độ, tức là  $h(+0) \neq 0$ .
- Nếu  $G(s)$  là hàm hợp thức chặt ( $m < n$ ) thì hàm quá độ  $h(t)$  của hệ thống sẽ xuất phát từ gốc tọa độ, tức là có  $h(+0) = 0$ .
- Nếu  $G(s)$  có  $m = n - 1$  thì hàm quá độ  $h(t)$  của hệ thống sẽ xuất phát từ 0, nhưng có đạo hàm  $\frac{dh(+0)}{dt}$  tại đó khác 0, chẳng hạn như khâu quán tính bậc nhất.
- Nếu  $G(s)$  có  $m < n - 1$  thì hàm quá độ  $h(t)$  của hệ thống sẽ xuất phát từ 0, đồng thời đạo hàm của nó tại đó cũng bằng 0, ví dụ như khâu quán tính bậc hai.

Sau đây, ta sẽ nghiên cứu thêm những mối quan hệ khác giữa vị trí điểm cực, điểm không của  $G(s)$  và tính động học của hệ.

### Điều kiện tồn tại độ quá điều chỉnh

Xét hệ có hàm truyền hợp thức ( $m \leq n$ ) cho ở công thức (2.128). Như vậy, rõ ràng hệ có  $m$  điểm không  $q_1, q_2, \dots, q_m$  và  $n$  điểm cực  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Hệ có thể được xem như gồm những khâu sau mắc nối tiếp (hình 2.86)

- khuếch đại  $k$
- khâu  $G_k^1(s) = \frac{s - q_k}{s - p_k}, k = 1, \dots, m$
- và các khâu  $G_i^0(s) = \frac{1}{s - p_i}, i = m + 1, \dots, n$



Hình 2.86: Sơ đồ khối tương đương của hệ có hàm truyền (2.128).

**Định lý 2.29:** Xét hệ pha ổn định SISO có hàm truyền (2.128) và  $k > 0$ . Nếu tất cả các điểm không  $q_k, k = 1, \dots, m$  và điểm cực  $p_i, i = 1, \dots, n$  đều là những số thực âm thì không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết

$$0 > q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_m \quad \text{và} \quad 0 > p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \quad (2.129)$$

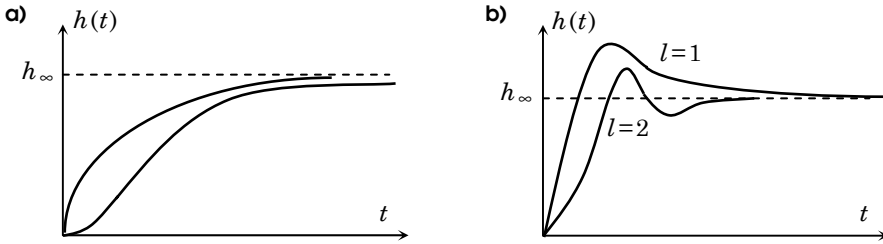
Khi đó sẽ có:

- a) Nếu đồng thời tất cả  $m$  bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$q_1 < p_1, \quad q_2 < p_2, \quad \dots, \quad q_m < p_m \quad (2.130)$$

thì hàm quá độ  $h(t)$  của hệ sẽ đơn điệu tăng, nói cách khác hệ không có độ quá điều chỉnh (hình 2.87a).

- b) Nếu có  $l$  bất đẳng thức trong số  $m$  bất đẳng thức (2.130) không được thỏa mãn thì hàm quá độ  $h(t)$  của hệ sẽ có đúng  $l$  điểm cực trị (cực đại và cực tiểu), và do đó hệ có độ quá điều chỉnh (hình 2.87b).



**Hình 2.87:** Minh họa cho định lý 2.29.

### Chứng minh:

Hệ có hàm trọng lượng  $g(t)$  là tích chập của tất cả các hàm trọng lượng của các khâu thành phần, tức là

$$g(t) = k [g_1^1(t) * \dots * g_m^1(t) * g_{m+1}^0(t) * \dots * g_n^0(t)]$$

trong đó

$$g_k^1(t) = k \delta(t) + (p_k - q_k) e^{-p_k t}, \quad k=1, \dots, m$$

$$g_i^0(t) = e^{-p_i t}, \quad i=m+1, \dots, n$$

- a) Các hàm  $g_i^0(t)$  là không âm. Do có điều kiện (2.130) nên các hàm  $g_k^1(t)$  cũng không âm. Suy ra tích chập  $g(t)$  của chúng cũng không âm. Vì  $h(t)$  có đạo hàm  $g(t)$  không âm nên  $h(t)$  là hàm không giảm.

- b) Trước hết ta thấy tích chập của một hàm không âm với một hàm không dương sẽ đổi dấu một lần. Nếu như có  $l$  bất đẳng thức (2.130) không được thỏa mãn thì sẽ có  $l$  hàm trong số các hàm  $g_k^1(t)$  không dương. Suy ra tích chập  $g(t)$  của tất cả các hàm  $g_k^1(t)$ ,  $g_i^0(t)$  sẽ đổi dấu  $l$  lần và do đó  $h(t)$  có  $l$  điểm cực trị. □

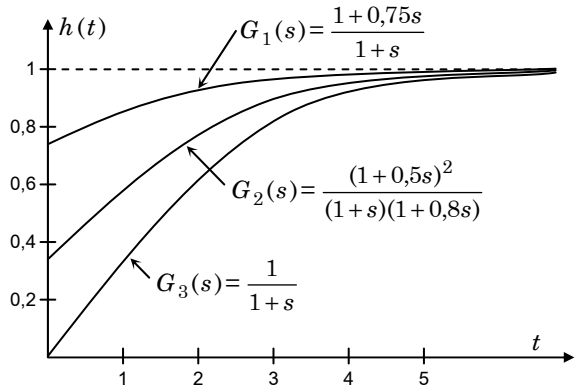
### Ví dụ 2.62: Minh họa định lý 2.29

Cho những hệ SISO với hàm truyền sau



$$G_1(s) = \frac{1+0,75s}{1+s}, \quad G_2(s) = \frac{(1+0,5s)^2}{(1+s)(1+0,8s)} \quad \text{và} \quad G_3(s) = \frac{1}{1+s}$$

Tất cả các hệ này đều có điểm cực, điểm không nằm bên trái trục ảo và thỏa mãn điều kiện (2.130). Chẳng hạn như hệ  $G_2(s)$  có hai điểm cực được sắp xếp theo thứ tự (2.129) là  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -\frac{5}{4}$  và hai điểm không  $q_1 = q_2 = -2$  cũng sắp xếp theo thứ tự đó. Chúng đều thỏa mãn  $q_1 < p_1$ ,  $q_2 < p_2$ . Bởi vậy theo định lý 2.29, cả ba hàm quá độ  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$ ,  $h_3(t)$  sẽ đơn điệu tăng (hình 2.88).  $\square$



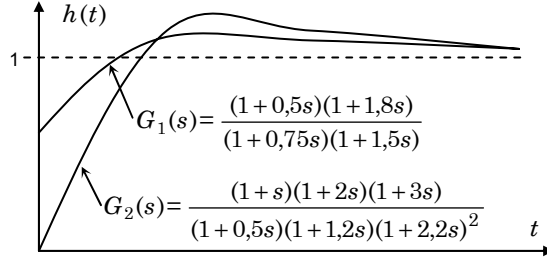
**Hình 2.88:** Các hàm quá độ minh họa cho ví dụ 2.70.

#### Ví dụ 2.63: Minh họa định lý 2.29

Cho các hệ pha cực tiểu SISO với hàm truyền sau

$$G_1(s) = \frac{(1+0,5s)(1+1,8s)}{(1+0,75s)(1+1,5s)} \quad \text{và} \quad G_2(s) = \frac{(1+s)(1+2s)(1+3s)}{(1+0,5s)(1+1,2s)(1+2,2s)^2}$$

Hệ  $G_1(s)$  có hai điểm không theo thứ tự (2.129) là  $q_1 = -\frac{5}{9}$ ,  $q_2 = -2$  và hai điểm cực  $p_1 = -\frac{2}{3}$ ,  $p_2 = -\frac{4}{3}$  cũng được sắp xếp theo thứ tự đó. Do có một bất đẳng thức trong số các bất đẳng thức (2.130) không được thỏa mãn là  $q_1 > p_1$  nên đồ thị  $h_1(t)$  của nó sẽ có một điểm cực trị và đó phải là điểm cực đại (hình 2.89). Tương tự, hệ  $G_2(s)$  có ba điểm không  $q_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $q_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $q_3 = -1$  được sắp xếp theo thứ tự (2.129) và bốn điểm cực  $p_1 = -\frac{5}{11}$ ,  $p_2 = -\frac{5}{11}$ ,  $p_3 = -\frac{5}{6}$ ,  $p_4 = -2$  cũng sắp xếp theo thứ tự đó. Vì có một bất đẳng thức  $q_1 > p_1$  không thỏa mãn (2.130) nên đồ thị  $h(t)$  của nó có một điểm cực đại (hình 2.89).  $\square$



**Hình 2.89:** Các hàm quá độ minh họa cho ví dụ 2.63.

### Khâu thông tần và hệ pha cực tiểu

Khâu động học có hàm truyền

$$G_a(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}, \quad T > 0 \quad (2.131)$$

được gọi là *khâu thông tần* (*all-pass*). Lý do cho tên gọi này là vì nó có hàm đặc tính tần biên–pha (cũng là ảnh Fourier của hàm trọng lượng)

$$G_a(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T} \Rightarrow |G_a(j\omega)| = 1$$

với độ khuếch đại bằng 1 ở mọi tần số, tức là nó không lọc bất kỳ một tần số nào của tín hiệu đầu vào.

Đường đặc tính tần Bode của khâu thông tần là:

$$L_a(\omega) = 0$$

$$\varphi_a(\omega) = \arctan \frac{2\omega T}{(\omega T)^2 - 1} = \begin{cases} \arctan 2\omega T & \text{nếu } \omega T \ll 1 \\ \arctan \frac{2}{\omega T} & \text{nếu } \omega T \gg 1 \end{cases}$$

Bây giờ ta xét hệ có hàm truyền

$$G(s) = G_0(s)G_a(s) \quad (2.132)$$

trong đó  $G_a(s)$  là một khâu thông tần.

Nếu  $G_0(s)$  là hàm bền thì  $G(s)$  cũng là hàm bền và do đó đường đặc tính tần biên–pha của hệ cũng là ảnh Fourier  $G(j\omega)$  của hàm trọng lượng của hệ thống. Do  $G_a(s)$  là khâu thông tần nên

$$|G(j\omega)| = |G_0(j\omega)|$$

**Định nghĩa 2.3:** Trong số tất cả các hệ có cùng biên độ  $|G(j\omega)|$  của hàm đặc tính tần thì hệ có góc lệch pha  $\varphi(\omega)$  nhỏ nhất được gọi là *hệ pha cực tiểu*.

Giả sử ta có hệ pha cực tiểu với hàm truyền:

$$G(s) = k \frac{(1 + T_1' s)(1 + T_2' s) \cdots (1 + T_m' s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_n s)}$$

trong đó  $T_1'$  là số âm, còn lại các hằng số khác  $T_2', T_3', \dots, T_m'$  là những số dương. Khi đó, nếu viết lại  $G(s)$  thành dạng (2.132)

$$G(s) = \frac{k(1 + T_1' s)^2(1 + T_2' s) \cdots (1 + T_m' s)}{(1 - T_1' s)(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_n s)} \cdot \frac{1 - T_1' s}{\frac{1 + T_1' s}{G_a(s)}}$$

ta sẽ được

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \varphi_a(\omega)$$

với

$$\varphi_0(\omega) = \arctan G_0(j\omega) \quad \text{và} \quad \varphi_a(\omega) = \arctan G_a(j\omega) = -2\arctan(\omega T_1').$$

Nhưng vì

$$|G_a(j\omega)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |G(j\omega)| = |G_0(j\omega)|$$

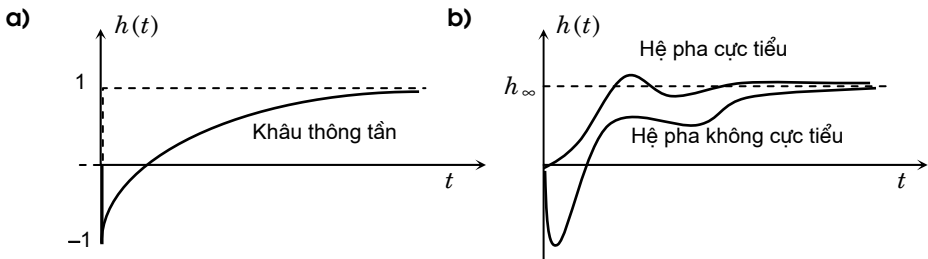
nên với tính pha cực tiểu của  $G(s)$  ta phải có

$$\varphi(\omega) < \varphi_0(\omega) \Leftrightarrow \varphi_a(\omega) < 0$$

Song điều này không thể, vì  $T_1' < 0$ . Vậy:

**Định lý 2.30:** Hệ pha cực tiểu có hàm truyền  $G(s)$  thực-hữu tỷ, phải có tất cả các điểm không (hữu hạn) nằm bên trái trục ảo.

Đồ thị hàm quá độ  $h(t)$  của khâu thông tần với hàm truyền (2.131) được biểu diễn minh họa trong hình 2.90a). Hình 2.90b) là đồ thị hàm quá độ  $h(t)$  của một hệ pha cực tiểu và của một hệ pha không cực tiểu để so sánh. Ta có thể thấy được đặc điểm của hệ pha không cực tiểu là trong khoảng thời gian nhỏ ngay sau khi bị kích thích, hệ có đáp ứng ngược với hướng của tín hiệu kích thích đầu vào  $1(t)$ .



**Hình 2.90:** Hàm quá độ của khâu thông tần và của hệ pha không cực tiểu.

### Phân tích bằng phương pháp quỹ đạo nghiệm số

Xét hệ kín có sơ đồ cấu trúc cho ở hình 2.91a), trong đó tham số  $k$  là chưa biết, hàm truyền  $S(s)$  là đã cho. Như vậy hàm truyền của hệ hở sẽ là

$$G_h(s) = kS(s) \tag{2.133}$$

và hệ kín có hàm truyền

$$G(s) = \frac{G_h(s)}{1 + G_h(s)}$$

Hệ kín có các điểm cực là nghiệm của *hàm sai lệch phản hồi*

$$F(s) = 1 + G_h(s) = 1 + kS(s) \tag{2.134}$$

và tất nhiên vị trí các điểm cực này trong mặt phẳng phức, nhân tố quyết định chất lượng của hệ kín, phụ thuộc vào giá trị của tham số  $k$ .

**Định nghĩa 2.4:** Phương pháp *quỹ đạo nghiệm số* là một phương pháp phân tích chất lượng *hệ kín* trên cơ sở đường đồ thị biểu diễn nghiệm số của hàm sai lệch phản hồi (2.134) theo tham số  $k$  của hàm truyền *hệ hở* (2.133).

### Ví dụ 2.64: Giới thiệu phương pháp quỹ đạo nghiệm số

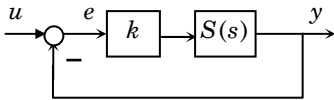
Xét hệ kín có cấu trúc sơ đồ khối cho trong hình 2.91a) với

$$S(s) = \frac{10(s + 4)}{s(s^2 + 6s + 10)(0,15s + 1)}$$

Như vậy hàm sai lệch phản hồi của hệ là

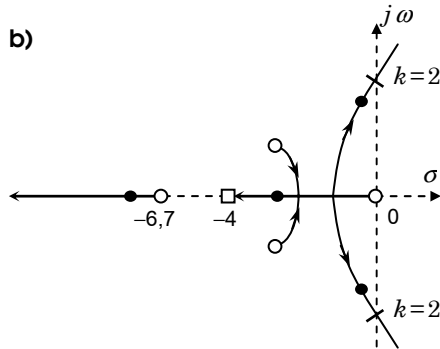
$$F(s) = 1 + k \frac{10(s + 4)}{s(s^2 + 6s + 10)(0,15s + 1)} = 0 \tag{2.135}$$

a)



**Hình 2.91:** Giới thiệu phương pháp quỹ đạo nghiệm số qua ví dụ 2.64.

b)



Giải phương trình (2.135) phụ thuộc tham số  $k$  ta có được điểm cực của hệ kín. Biểu diễn các điểm cực đó trong mặt phẳng phức dưới dạng đồ thị phụ thuộc tham số  $k$  ta được quỹ đạo nghiệm số của hệ kín. Hình 2.91b) là đồ thị quỹ đạo nghiệm số ứng với dải

biến thiên  $0 \leq k \leq \infty$  của tham số  $k$ . Chiều tăng của  $k$  được thể hiện bằng chiều mũi tên trên đồ thị quỹ đạo nghiệm số. Các dấu  $\bullet$  trên đồ thị là nghiệm của (2.135) khi  $k = \frac{1}{4}$ .

Quỹ đạo nghiệm số của hệ gồm bốn nhánh ứng với bậc đa thức mẫu số của hàm truyền  $S(s)$  là bốn. Cả bốn nhánh này đều xuất phát (khi  $k=0$ ) từ các điểm cực của hàm truyền  $S(s)$ . Chúng được đánh dấu bằng ký hiệu O trong hình 2.91b). Điểm không của hàm  $S(s)$  được ký hiệu bởi  $\bullet$  và cũng là điểm kết thúc (khi  $k=\infty$ ) của một trong các nhánh quỹ đạo nghiệm số.

Với đường quỹ đạo nghiệm số này ta có được một cái nhìn trực quan về sự phụ thuộc của chất lượng hệ kín vào tham số  $k$ . Chẳng hạn như do quỹ đạo nghiệm cắt trục ảo tại  $k=2$  và nằm bên phải trục ảo khi  $k>2$  nên hệ sẽ không ổn định với  $k \geq 2$ .  $\square$

Xét trường hợp tổng quát cho hệ ở hình 2.91a) với

$$G_h(s) = kS(s) = k \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}, \quad (m \leq n)$$

Gọi  $p_i, i=1, \dots, n$  là các điểm cực và  $q_k, k=1, \dots, m$  là những điểm không của  $S(s)$ . Khi đó  $G_h(s)$  sẽ viết được thành

$$G_h(s) = k \frac{(s-q_1)(s-q_2) \dots (s-q_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)}$$

Hiển nhiên hệ kín ổn định nếu như các điểm cực của hàm truyền hệ kín, tức là nghiệm của hàm sai lệch phản hồi  $F(s)$  xác định theo (2.134) nằm bên trái trục ảo. Suy ra

$$1 + G_h(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (2.136)$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{\prod_{i=1}^n |s-p_i|}{\prod_{k=1}^m |s-q_k|} \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^n \arg(s-p_i) - \sum_{k=1}^m \arg(s-q_k) = (2l+1)\pi \quad \text{với} \quad l \in \mathbb{Z} \quad (2.137)$$

Nhưng do nghiệm của (2.136) và (2.137) phụ thuộc  $k$  nên khi  $k$  thay đổi, các nghiệm đó cũng có thể sẽ dịch chuyển từ nửa mặt phẳng bên trái trục ảo sang nửa phải hoặc ngược lại tạo thành các đường quỹ đạo nghiệm số.

Để xây dựng đường quỹ đạo nghiệm số ta có *tám quy tắc của Evans* phát biểu như sau:

1) **Quy tắc 1:** Quỹ đạo nghiệm số có dạng đối xứng qua trục thực.

Điều này là hiển nhiên, vì phương trình (2.136) có các hệ số là số thực nên nghiệm của nó phải hoặc là số thực, hoặc là các số phức liên hợp. Nói cách khác, nghiệm của (2.136) nằm đối xứng qua trục thực.

2) Quy tắc 2: Quỹ đạo nghiệm số có  $n$  nhánh. Các nhánh này đều bắt đầu khi  $k=0$  ở những điểm  $p_i$ ,  $i=1, \dots, n$  là điểm cực của  $S(s)$ . Sẽ có  $m$  nhánh kết thúc khi  $k \rightarrow \infty$  tại  $q_k$ ,  $k=1, \dots, m$  là điểm không của  $S(s)$ .

Quỹ đạo nghiệm có  $n$  đường vì (2.136) có  $n$  nghiệm ứng với số bậc của  $A(s)$ . Khi  $k=0$ , phương trình (2.136) sẽ là  $A(s)=0$ , nên nghiệm của nó chính là điểm cực của  $S(s)$ . Vậy tất cả  $n$  nhánh này đều phải bắt đầu từ các điểm cực  $p_i$ ,  $i=1, \dots, n$ .

Trường hợp  $k \rightarrow \infty$  thì do (2.136) tương đương với

$$\frac{A(s)}{k} + B(s) = 0$$

nên nghiệm của nó cũng sẽ bao gồm  $m$  nghiệm của  $B(s)=0$ . Do đó trong số  $n$  nhánh sẽ có  $m$  nhánh kết thúc tại các điểm không  $q_k$ ,  $k=1, \dots, m$ .

3) Quy tắc 3: Quỹ đạo nghiệm số có  $n-m$  nhánh kéo ra xa tận vô cùng khi  $k \rightarrow \infty$ .

Từ phần phương trình (2.137) với

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{k=1}^m |s - q_k|} = \infty$$

thì rõ ràng phải có  $n-m$  nhánh kéo ra xa tận vô cùng khi  $k \rightarrow \infty$ .

4) Quy tắc 4: Góc xuất phát của các nhánh tại điểm cực  $p_i$ ,  $i=1, \dots, n$  là:

$$\alpha_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \arccos(p_i - p_j) + \sum_{k=1}^m \arccos(p_i - q_k) + (2l+1)\pi \quad \text{với } l \in \mathbb{Z} \quad (2.138)$$

và góc kết thúc tại các điểm không  $q_k$ ,  $k=1, \dots, m$  là:

$$\beta_k = \sum_{i=1}^n \arccos(q_k - p_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \arccos(q_k - q_j) + (2l+1)\pi \quad \text{với } l \in \mathbb{Z} \quad (2.139)$$

Tính đúng đắn của hai công thức (2.138) và (2.139) được kiểm chứng một cách dễ dàng nhờ (2.137) bằng cách cho nghiệm  $s$  tiến tới  $p_i$  để có góc xuất phát  $\alpha_i$  ( $s \rightarrow p_i$ ) hoặc tới  $q_k$  để có góc kết thúc  $\beta_k$  ( $s \rightarrow q_k$ ).

5) Quy tắc 5:  $n-m$  nhánh kéo ra xa vô cùng đều có đường tiệm cận. Các đường tiệm cận đó cùng cắt trục thực tại một điểm:

$$r_0 = \frac{1}{n-m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^m q_k \right)$$

và hợp với trục thực một góc

$$\gamma_l = \frac{2l+1}{n-m} \pi, \quad l=0, 1, \dots, n-m+1$$

Để xác định phương trình đường tiệm cận của những nhánh quỹ đạo nghiệm số kéo ra tận vô cùng ta sẽ sử dụng công thức (2.136). Từ đó và với giả thiết  $p_i, i=1, \dots, n$  là các điểm cực và  $q_k, k=1, \dots, m$  là những điểm không của  $S(s)$  ta được

$$-k = \frac{\prod_{i=1}^n (s-p_i)}{\prod_{k=1}^m (s-q_k)} = \frac{s^n - \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)s^{n-1} + \dots}{s^m - \left(\sum_{k=1}^m q_k\right)s^{m-1} + \dots}.$$

Chia đa thức tử số cho đa thức mẫu số, sau đó cho  $s \rightarrow \infty$  rồi chỉ giữ lại hai giá trị đầu tiên (vì thực chất ta chỉ cần có phương trình đường thẳng khi  $s$  đủ lớn):

$$-k = s^{n-m} - \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^m q_k\right)s^{n-m-1} \quad (\text{với } s \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow (-k)^{\frac{1}{n-m}} = s \left[ 1 - \frac{1}{s} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^m q_k \right) \right]^{\frac{1}{n-m}}$$

Khai triển về phải bằng công thức khai triển nhị thức Newton và cho  $s \rightarrow \infty$  ta có

$$(-k)^{\frac{1}{n-m}} = s - \underbrace{\frac{1}{n-m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^m q_k \right)}_{r_0} = s - r_0 \quad (2.140)$$

Rõ ràng  $r_0$  là một số thực vì  $p_i, i=1, \dots, n$  cũng như  $q_k, k=1, \dots, m$  hoặc là các số thực, hoặc là các số phức liên hợp.

Từ (2.140) ta suy ra được tiếp

$$s = (-k)^{\frac{1}{n-m}} + r_0$$

Nhưng vì

$$-k = k [\cos(2l+1)\pi - j \sin(2l+1)\pi] = k e^{j(2l+1)\pi}$$

nên

$$s = k^{\frac{1}{n-m}} e^{j \frac{2l+1}{n-m} \pi} + r_0$$

Như vậy, tất cả các đường tiệm cận đều có chung một giao điểm với trục thực là  $r_0$  và hợp với trục thực một góc

$$\gamma_l = \frac{2l+1}{n-m} \pi, \quad l=0, 1, \dots, n-m+1$$

Tổng cộng có tất cả  $n-m$  đường tiệm cận đồng quy tại  $r_0$  trên trục thực tạo thành một hình sao có  $n-m$  tia xung quanh  $r_0$ .

6) Quy tắc 6: Tất cả các điểm trên trục thực nằm bên trái tổng số lẻ các điểm  $p_i$  và  $q_k$  đều thuộc quỹ đạo nghiệm số.

Điều này ta có thể thấy được ngay từ phương trình về góc pha (2.137) cho các nghiệm thực  $s$  với  $p_i$  và  $q_k$  cũng là những số thực

$$\sum_{i=1}^n \arccos(s - p_i) - \sum_{k=1}^m \arccos(s - q_k) = (2l+1)\pi$$

Nhưng do các điểm phức  $p_i$ ,  $q_k$  đều đối xứng qua trục thực nên số các điểm  $p_i$  và  $q_k$  nằm bên phải nghiệm của (2.136) cũng sẽ vẫn là số lẻ.

7) **Quy tắc 7:** Các nhánh của quỹ đạo nghiệm số cắt nhau tại những điểm thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{s - q_k} \quad (2.141)$$

và nếu tại giao điểm đó có  $r$  nhánh thì các nhánh đó hợp với nhau một góc là  $\frac{2\pi}{r}$

Từ phương trình (2.136) ta có

$$\ln G_h(s) = \ln k + \sum_{i=1}^n \ln(s - p_i) - \sum_{k=1}^m \ln(s - q_k)$$

suy ra

$$\frac{d}{ds} \ln G_h(s) = \frac{1}{G_h(s)} \cdot \frac{dG_h(s)}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{s - q_k} \quad (2.142)$$

Gọi  $s$  là giao điểm của các nhánh của quỹ đạo nghiệm số. Vậy thì  $s$  phải là nghiệm bội của phương trình (2.136), tức là nó phải thỏa mãn

$$1 + G_h(s) = 0 \quad \text{và} \quad \frac{dG_h(s)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{G_h(s)} \cdot \frac{dG_h(s)}{ds} = 0 \quad (2.143)$$

Thay (2.143) vào (2.142) ta có điều khẳng định (2.141). Chú ý rằng (2.141) chỉ là điều kiện cần chứ không đủ, tức là không phải tất cả các nghiệm của (2.141) đều là điểm giao nhau giữa các nhánh quỹ đạo nghiệm số.

8) **Quy tắc 8:** Giao điểm  $s_c = j\omega_c$  của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo là nghiệm của:

$$A(j\omega_c) + k_c B(j\omega_c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[A(j\omega_c)] + k_c \operatorname{Re}[B(j\omega_c)] = 0 \\ \operatorname{Im}[A(j\omega_c)] + k_c \operatorname{Im}[B(j\omega_c)] = 0 \end{cases} \quad (2.144)$$

Tính đúng đắn của (2.144) được suy trực tiếp từ (2.136).

**Ví dụ 2.65:** Minh họa phương pháp quỹ đạo nghiệm số

Cho hệ kín có cấu trúc sơ đồ khối như trong hình 2.91a) và

$$S(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

Trước hết ta thấy  $S(s)$  có 3 điểm cực là  $p_1=0$ ,  $p_2=-2$  và  $p_3=-4$ . Ngoài ra  $S(s)$  không có điểm không. Do đó quỹ đạo nghiệm số mô tả hệ kín sẽ gồm ba nhánh và cả ba



nhánh này đều kéo ra xa vô cùng khi  $k \rightarrow \infty$ . Ba nhánh quỹ đạo nghiệm đều có chứa những đoạn trên trục thực gồm đoạn thẳng giữa các điểm  $p_1=0$ ,  $p_2=-2$  và nửa đường thẳng bên trái điểm  $p_3=-4$  (hình 2.92).

Đường tiệm cận của các nhánh đồng quy tại

$$r_0 = \frac{1}{3}(0-2-4) = -2$$

và hợp với trục thực các góc

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma_1 = \pi, \quad \gamma_2 = \frac{5\pi}{3}$$

Các nhánh có giao điểm với nhau tại

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3s^2 + 12s + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow s_1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad s_2 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

trong đó chỉ có thực sự

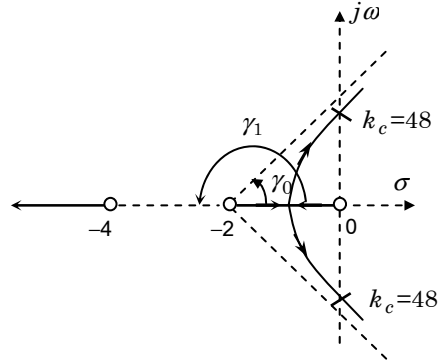
$$s_1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx -0,85$$

là giao điểm vì "điểm tương là giao nhau"  $s_2$  lại không thuộc về quỹ đạo nghiệm số (không trên một nhánh nào) nên bị loại.

Tại giao điểm  $s_1$  có  $r=4$  nhánh nên các nhánh đó hợp với nhau một góc bằng  $\frac{\pi}{2}$ .

Cuối cùng, quỹ đạo nghiệm số cắt trục ảo tại

$$j\omega_c(j\omega_c+2)(j\omega_c+4)+k_c = 0 \Rightarrow \omega_c = 2\sqrt{2} \quad \text{và} \quad k_c = 48.$$



Hình 2.92: Minh họa ví dụ 2.65

### 2.3.5 Phân tích tính bền vững

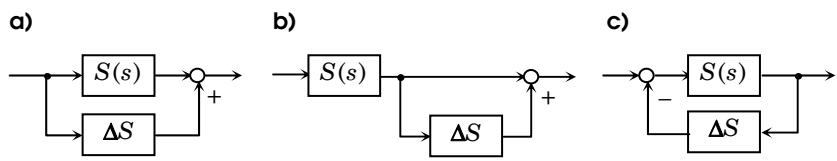
Một hệ thống điều khiển luôn chứa đựng trong nó các yếu tố bất định (*uncertain*) về đối tượng. Nguồn gốc của các yếu tố bất định này có thể là:

- Đối tượng đã được mô tả một cách không đầy đủ, mô hình mô tả đối tượng không chính xác.
- Mô hình đối tượng mà ta sử dụng là một mô hình đơn giản, được xấp xỉ từ mô hình phức tạp mô tả chính xác đối tượng. Chẳng hạn như đối tượng có mô hình chính xác là phi tuyến, song để đơn giản hóa cho công việc phân tích và thiết kế bộ điều khiển ta đã xấp xỉ mô hình phi tuyến đó bằng một mô hình tuyến tính.

Những bài toán điều khiển có yếu tố bất định  $\Delta S$  của đối tượng điều khiển được thể hiện qua sự thay đổi của tham số trong mô hình đối tượng (hệ số của hàm truyền) sẽ được gọi là bài toán bền vững với sai lệch mô hình có cấu trúc. Ngược lại, nếu các yếu tố

bất định lại nằm ở cấu trúc mô hình (chẳng hạn bậc của mô hình đối tượng bị thay đổi) thì bài toán có tên gọi là *bài toán bền vững với sai lệch mô hình không có cấu trúc*.

Hình 2.93 biểu diễn một số dạng điển hình của sai lệch mô hình  $\Delta S$  không có cấu trúc.



**Hình 2.93:** a) Sai lệch mô hình theo quan hệ bù cộng.  
 b) Sai lệch mô hình theo quan hệ bù nhân.  
 c) Sai lệch mô hình theo quan hệ bù phối hợp.

### Đánh giá chất lượng bền vững nhờ hàm nhạy

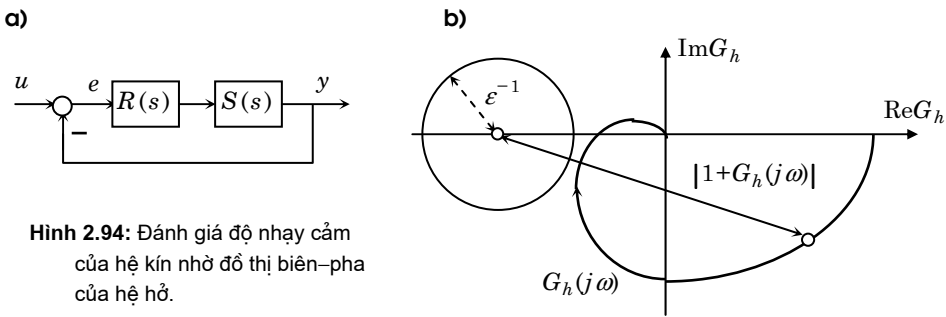
Xét hệ kín cho ở hình 2.94a). Hàm  $K(s)$  định nghĩa theo

$$K(s) = \frac{1}{1 + RS}$$

có tên gọi là *hàm nhạy (sensivity function)* của hệ. Tên gọi này được bắt nguồn từ bản chất của nó là đại lượng đo sự nhạy cảm của hàm truyền hệ kín

$$G(s) = \frac{SR}{1 + SR}$$

tương ứng với một thay đổi nhỏ  $\Delta S$  trong mô hình hàm truyền của đối tượng.



**Hình 2.94:** Đánh giá độ nhạy cảm của hệ kín nhờ đồ thị biên–pha của hệ hở.

Nếu gọi  $\Delta G$  là sự thay đổi trong  $G(s)$  ứng với sai lệch  $\Delta S$  của đối tượng thì độ nhạy  $K(s)$  được định nghĩa là tỷ số sai lệch tương đối  $\frac{\Delta G}{G}$  trong  $G(s)$  của cả hệ kín với  $\frac{\Delta S}{S}$  trong riêng đối tượng  $S(s)$ . Suy ra

$$K(s) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta G}{\Delta S}}{\frac{G}{S}} = \frac{dG}{dS} \cdot \frac{S}{G}$$

và đó chính là *hàm nhạy* của hệ mà ta đã định nghĩa

$$K(s) = \frac{R(1+SR) - SR^2}{(1+SR)^2} \cdot \frac{S(1+SR)}{SR} = \frac{1}{1+SR}$$

Hệ có *chất lượng tốt* là hệ ít nhạy cảm với sai lệch mô hình đối tượng, tức là hệ có

$$|K(j\omega)| < \varepsilon \quad \text{với mọi } \omega \quad (2.145)$$

trong đó  $\varepsilon$  là một số dương đủ nhỏ. Từ đây, và cùng với công thức của hàm nhạy  $K(s)$ , *chất lượng ít nhạy cảm* của hệ kín được đánh giá bằng

$$\frac{1}{\varepsilon} < |1 + R(j\omega)S(j\omega)| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < |1 + G_h(j\omega)|$$

với  $G_h(s) = R(s)S(s)$ . Suy ra

**Định lý 2.31:** Hệ kín ở hình 2.94 sẽ có độ nhạy cảm  $K(s)$  thỏa mãn (2.145), trong đó  $\varepsilon$  là một số dương đủ nhỏ, nếu đường đồ thị đặc tính tần biên pha  $G_h(j\omega) = R(j\omega)S(j\omega)$  của nó luôn nằm ngoài đường tròn với tâm  $-1 + 0j$  và bán kính  $\frac{1}{\varepsilon}$  (hình 2.94b).

### Đánh giá tính ổn định bền vững với sai lệch mô hình không có cấu trúc

Thường gặp nhất trong thực tế là bài toán điều khiển có yếu tố bất định của đối tượng thể hiện dưới dạng quan hệ bù cộng (hình 2.93a và 2.94a), tức là đối tượng sẽ có hàm truyền thuộc tập hợp

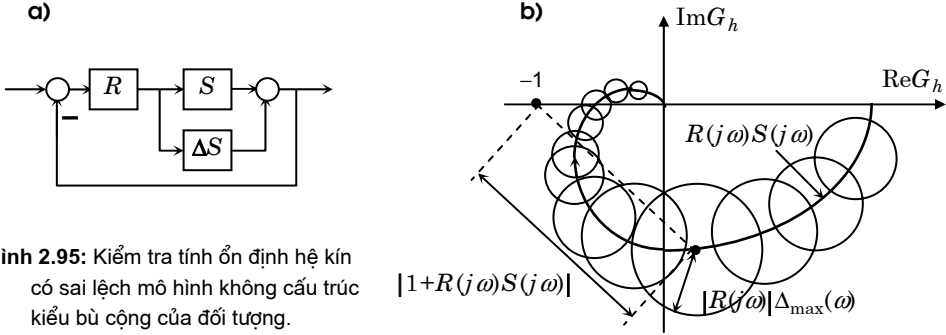
$$\tilde{S}(s) = S(s) + \Delta S \quad \text{với} \quad |\Delta S(j\omega)| \leq \Delta_{\max}(\omega)$$

Giả sử rằng hàm truyền hệ hở  $R(s)$   $\tilde{S}(s)$  là hàm bền với mọi  $|\Delta S| \leq \Delta_{\max}$ . Vậy thì theo tiêu chuẩn Nyquist (định lý 2.23), hệ kín sẽ ổn định nếu như quỹ đạo hàm đặc tính tần biên–pha  $R(j\omega)\tilde{S}(j\omega)$  không đi qua và không bao điểm  $-1$ . Nhưng do

$$|R(j\omega)\tilde{S}(j\omega) - R(j\omega)S(j\omega)| \leq |R(j\omega)|\Delta_{\max}(\omega)$$

nên đường đặc tính tần  $R(j\omega)\tilde{S}(j\omega)$  chính là tập các điểm trong mặt phẳng phức nằm trong đường tròn tâm  $R(j\omega)S(j\omega)$  bán kính  $|R(j\omega)|\Delta_{\max}(\omega)$ . Bởi vậy, trong trường hợp đường quỹ đạo  $R(j\omega)S(j\omega)$  đã không bao điểm  $-1$  thì cần và đủ để đường  $R(j\omega)\tilde{S}(j\omega)$  cũng không bao điểm  $-1$  là bán kính  $|R(j\omega)|\Delta_{\max}(\omega)$  phải nhỏ hơn khoảng cách từ tâm đường tròn  $R(j\omega)S(j\omega)$  tới điểm  $-1$  (hình 2.95b). Nói cách khác:

$$|R(j\omega)|\Delta_{\max}(\omega) < |1 + R(j\omega)S(j\omega)|$$



**Hình 2.95:** Kiểm tra tính ổn định hệ kín có sai lệch mô hình không cấu trúc kiểu bù cộng của đối tượng.

**Định lý 2.32:** Nếu hệ kín với  $R(s)$  và  $S(s)$  là ổn định và hàm truyền  $R(s)\tilde{S}(s)$  là hàm bên với mọi  $|\Delta S(s)| \leq \Delta_{\max}(s)$  thì cần và đủ để hệ kín ổn định bền vững với mọi yếu tố bất định kiểu bù cộng của đối tượng là

$$\Delta_{\max}(\omega) < \left| \frac{1 + R(j\omega)S(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \left| \frac{1 + G_h(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \quad \text{với mọi } \omega$$

Khi hệ kín đã ổn định (bền vững) thì định lý 2.28 lại có thể được sử dụng để khảo sát sai lệch tĩnh  $e_\infty$ . Do định lý 2.28 không có yêu cầu gì về tính bất định của đối tượng nên hệ kín với những yếu tố bất định  $\Delta S$  về đối tượng là ổn định bền vững và  $S(s)R(s)$  có chứa thành phần tích phân (với mọi  $\Delta S$ ) thì khi được kích thích bởi  $1(t)$ , nó sẽ có sai lệch tĩnh bằng 0 ( $e_\infty = 0$ ).

### Hệ vừa có tính ổn định bền vững vừa có độ nhạy nhỏ

Tiếp theo ta xét lại hệ có cấu trúc cho ở hình 2.97a) với sai lệch mô hình không có cấu trúc  $\Delta S$  kiểu bù cộng thỏa mãn  $|\Delta S| \leq \Delta_{\max}$  và sẽ bàn về điều kiện để nó vừa ổn định bền vững, vừa có độ nhạy thỏa mãn  $|K(j\omega)| < \varepsilon$ .

Ký hiệu

$$G_h(j\omega) = R(j\omega)S(j\omega)$$

Khi đó, giống như đã có ở phần trước, hàm đặc tính tần biên–pha của hệ kín

$$R(j\omega)[S(j\omega) + \Delta S(j\omega)] = G_h(j\omega) + R(j\omega)\Delta S(j\omega)$$

là tập tất cả các điểm nằm bên trong các đường tròn có tâm là  $G_h(j\omega)$  và bán kính là  $|R(j\omega)|\Delta_{\max}(\omega)$ .

Giả sử hệ hở ổn định với mọi sai lệch  $\Delta S$ , tức là hàm  $R(S + \Delta S)$  là hàm bên. Khi đó, theo tiêu chuẩn Nyquist (định lý 2.23), để hệ kín ổn định với mọi sai lệch  $\Delta S$ , cũng như

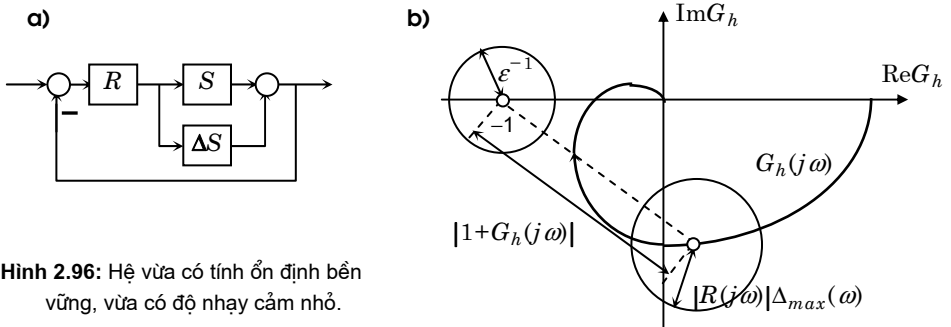
có độ nhạy nhỏ  $|K(j\omega)| < \varepsilon$ , trong đó hàm nhạy được định nghĩa là  $K = \frac{1}{1+SR}$ , thì cần và đủ là (hình 2.96b):

$$|R(j\omega)|\Delta_{\max}(\omega) + \frac{1}{\varepsilon} < |1 + G_h(j\omega)| \quad \text{với mọi } \omega$$

Từ đây và kết hợp với các định lý 2.31, 2.32, ta đi đến được kết luận:

**Định lý 2.33:** Nếu hệ với cấu trúc mô tả ở hình 2.97a) có hàm truyền của hệ hở là hàm bền với mọi sai lệch  $\Delta S$ , thì nó sẽ vừa ổn định bền vững, vừa có độ nhạy cảm nhỏ theo nghĩa  $|K(j\omega)| < \varepsilon$ , khi và chỉ khi

$$\|KR\Delta_{\max}\|_{\infty} + \frac{1}{\varepsilon} \|K\|_{\infty} < 1$$



**Hình 2.96:** Hệ vừa có tính ổn định bền vững, vừa có độ nhạy cảm nhỏ.

### Tính ổn định bền vững của hệ bất định có cấu trúc: Tiêu chuẩn Kharitonov

Năm 1978 Kharitonov đã đưa ra một tiêu chuẩn dựa theo nguyên tắc đa thức Hurwitz quen biết, cho phép khảo sát được tính ổn định của một lớp các mô hình tuyến tính cùng cấu trúc

$$G(s) = \frac{1 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.146)$$

trong đó các tham số  $b_i, i=0, 1, \dots, m$  và  $a_k, k=0, 1, \dots, n$  là các giá trị bất định.

Theo định lý 2.12, hệ bất định có hàm truyền (2.146) ổn định khi và chỉ khi  $G(s)$  là một hàm bền, tức là khi và chỉ khi

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n \quad (2.147)$$

là đa thức Hurwitz với mọi giá trị tham số  $a_k, k=0, 1, \dots, n$ .

Đa thức  $A(s)$  cho trong (2.147) được gọi là *đa thức Hurwitz chặt (strictly Hurwitz)*, nếu nó là Hurwitz với mọi giá trị tham số  $a_k$  thuộc khoảng

$$a_k^- \leq a_k \leq a_k^+ \quad , \quad k=0, 1, \dots, n \quad (2.148)$$

**Định lý 2.34** (Kharitonov): Để đa thức  $A(s)$  cho trong (2.147) là *Hurwitz chặt* thì cần và đủ là cả bốn đa thức hệ số hằng sau đây (được gọi là các *đa thức Kharitonov*):

$$K_1(s) = a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + a_5^- s^5 + a_6^+ s^6 + \dots$$

$$K_2(s) = a_0^- + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5 + a_6^+ s^6 + \dots$$

$$K_3(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5 + a_6^- s^6 + \dots$$

$$K_4(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5 + a_6^- s^6 + \dots$$

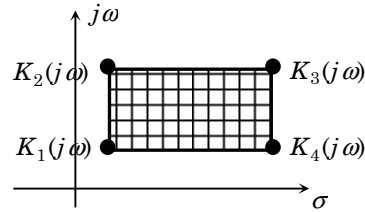
là những *đa thức Hurwitz* (có nghiệm nằm bên trái trục ảo). Cách xác định bốn đa thức Kharitonov từ đa thức (2.147) với tính bất định (2.148) đã cho cũng tương đối dễ nhớ theo quy luật “địch trái 1 bit” như sau:

- - + + - - + + ...

- + + - - + + - ...

+ + - - + + - - ...

+ - - + + - - + ...



**Hình 2.97:** Minh họa định lý 2.34

*Chứng minh:*

Trước tiên, ta nhận thấy:

$$A(j\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots)$$

Bởi vậy từ (2.147) ta sẽ được:

$$a_0^- - a_2^+ \omega^2 + a_4^- \omega^4 - \dots \leq \text{Re}[A(j\omega)] \leq a_0^+ - a_2^- \omega^2 + a_4^+ \omega^4 - \dots$$

$$a_1^- \omega - a_3^+ \omega^3 + a_5^- \omega^5 - \dots \leq \text{Im}[A(j\omega)] \leq a_1^+ \omega - a_3^- \omega^3 + a_5^+ \omega^5 - \dots$$

trong đó ký hiệu  $\text{Re}[A(j\omega)]$  chỉ phần thực và  $\text{Im}[A(j\omega)]$  chỉ phần ảo của  $A(j\omega)$ .

Tương tự, với:

$$K_1(j\omega) = (a_0^- - a_2^+ \omega^2 + a_4^- \omega^4 - \dots) + j(a_1^- \omega - a_3^+ \omega^3 + a_5^- \omega^5 - \dots)$$

$$K_2(j\omega) = (a_0^- - a_2^+ \omega^2 + a_4^- \omega^4 - \dots) + j(a_1^+ \omega - a_3^- \omega^3 + a_5^+ \omega^5 - \dots)$$

$$K_3(j\omega) = (a_0^+ - a_2^- \omega^2 + a_4^+ \omega^4 - \dots) + j(a_1^+ \omega - a_3^- \omega^3 + a_5^+ \omega^5 - \dots)$$

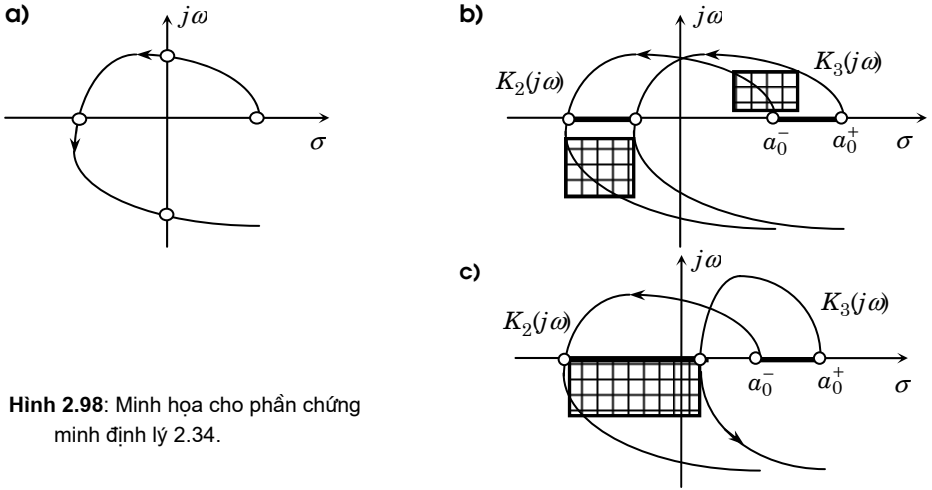
$$K_4(j\omega) = (a_0^+ - a_2^- \omega^2 + a_4^+ \omega^4 - \dots) + j(a_1^- \omega - a_3^+ \omega^3 + a_5^- \omega^5 - \dots)$$

ta đi đến:

$$\text{Re}[K_1(j\omega)] = \text{Re}[K_2(j\omega)] \leq \text{Re}[A(j\omega)] \leq \text{Re}[K_3(j\omega)] = \text{Re}[K_4(j\omega)]$$

$$\text{Im}[K_1(j\omega)] = \text{Im}[K_4(j\omega)] \leq \text{Im}[A(j\omega)] \leq \text{Im}[K_2(j\omega)] = \text{Im}[K_3(j\omega)]$$

Điều này chỉ rằng với một giá trị  $\omega$  cố định, hàm  $A(j\omega)$  có giá trị nằm trong hình chữ nhật với bốn đỉnh là các giá trị của bốn đa thức Kharitonov (hình 2.98).



**Hình 2.98:** Minh họa cho phần chứng minh định lý 2.34.

Chuyển sang phần chứng minh định lý. Ta thấy điều kiện cần là hiển nhiên vì khi  $A(s)$  là Hurwitz với mọi tham số  $a_k^- \leq a_k \leq a_k^+$  thì nó cũng là Hurwitz với  $a_k = a_k^-$  hoặc  $a_k = a_k^+$  và do đó cả bốn đa thức Kharitonov cũng sẽ là Hurwitz. Vậy chỉ còn lại điều kiện đủ là phải được chứng minh. Giả thiết cho rằng bốn đa thức Kharitonov là những đa thức Hurwitz. Vậy theo tiêu chuẩn Mikhailov (định lý 2.18), các đường quỹ đạo tần số biên pha của chúng với  $0 \leq \omega \leq \infty$  sẽ phải xuất phát từ một điểm trên trục thực và đi qua  $n$  góc một phần tư trong mặt phẳng phức theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, tức là góc quay của chúng (nhìn từ gốc tọa độ) đúng bằng  $\frac{n\pi}{2}$ .

Cũng từ tiêu chuẩn Michailov ta còn có:

- Giao điểm của đường đồ thị  $K_i(j\omega)$ ,  $i=1,2,3,4$  với trục thực phải nằm xen kẽ giữa những giao điểm của nó với trục ảo.
- Giá trị tại hai giao điểm của  $K_i(j\omega)$ ,  $i=1,2,3,4$  với trục thực nằm kế nhau phải trái dấu nhau. Cũng như vậy, giá trị tại hai giao điểm của  $K_i(j\omega)$ ,  $i=1,2,3,4$  với trục ảo nằm kế nhau phải trái dấu nhau.

Bây giờ ta sẽ chứng minh là khi  $\omega$  biến thiên từ 0 đến  $\infty$ , nếu bốn đỉnh của hình chữ nhật bao gốc tọa độ một góc  $\frac{n\pi}{2}$  thì mọi điểm thuộc hình chữ nhật đó cũng bao gốc tọa độ một góc đúng bằng  $\frac{n\pi}{2}$  và như vậy chúng cũng thỏa mãn tiêu chuẩn Michailov.

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử hình chữ nhật với bốn đỉnh có cùng góc quay  $\frac{n\pi}{2}$  nhưng bản thân nó lại bao gốc tọa độ một góc nhỏ hơn  $\frac{n\pi}{2}$ .

Như vậy phải có lúc hình chữ nhật chứa điểm gốc tọa độ. Nhưng vì khi  $\omega=0$ , gốc tọa độ đã nằm ngoài hình chữ nhật (thực ra lúc đó chỉ là một đoạn thẳng nằm trên trục hoành với hai đầu là  $a_0^-$  và  $a_0^+$ ) nên khi  $\omega \rightarrow \infty$  điểm gốc đã đi từ ngoài vào trong hình chữ nhật và do đó phải tồn tại một giá trị  $\omega^*$  mà tại đó gốc tọa độ sẽ nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát ta giả sử đó là cạnh trên như hình 2.100c minh họa, tức là có đỉnh thuộc  $K_3(j\omega)$  với phần thực dương. Vậy thì đường đặc tính tần  $K_3(j\omega)$  phải có hai giao điểm với trục thực nằm kề nhau cùng dấu với nhau (dương) và điều này ngược lại với hệ quả của tiêu chuẩn Mikhailov. Tức là điều giả sử là sai.

Vậy, nếu hình chữ nhật chứa các giá trị của  $A(j\omega)$  đã quay quanh gốc tọa độ một góc  $\frac{n\pi}{2}$ , thì tất cả các đường đặc tính tần biên pha của  $A(j\omega)$  cũng phải tạo ra góc quay  $\frac{n\pi}{2}$  và do đó  $A(s)$  cũng là một đa thức Hurwitz (chặt). □

Để giảm bớt công việc phải làm khi kiểm tra tính Hurwitz chặt của  $A(s)$ , tức là giảm bớt số các đa thức Kharitonov phải kiểm tra của nó, Anderson, Jury, Mansor đã cải tiến định lý 2.34 của Kharitonov thành:

**Định lý 2.35** (Anderson, Jury, Mansor): Để  $A(s)$ , cho trong (2.147) có bậc  $n$  không lớn hơn 5 với các tham số bất định (2.148), là đa thức Hurwitz chặt thì cần và đủ là:

a) Nếu  $n=3$  thì:

$$K_4(s) = a_0^+ + a_1^-s + a_2^-s^2 + a_3^+s^3$$

là đa thức Hurwitz.

b) Nếu  $n=4$  thì:

$$K_3(s) = a_0^+ + a_1^+s + a_2^-s^2 + a_3^-s^3 + a_4^+s^4$$

$$K_4(s) = a_0^+ + a_1^-s + a_2^-s^2 + a_3^+s^3 + a_4^+s^4$$

là các đa thức Hurwitz.

c) Nếu  $n=5$  thì:

$$K_2(s) = a_0^- + a_1^+s + a_2^+s^2 + a_3^-s^3 + a_4^-s^4 + a_5^+s^5$$

$$K_3(s) = a_0^+ + a_1^+s + a_2^-s^2 + a_3^-s^3 + a_4^+s^4 + a_5^+s^5$$

$$K_4(s) = a_0^+ + a_1^-s + a_2^-s^2 + a_3^+s^3 + a_4^+s^4 + a_5^-s^5$$

là các đa thức Hurwitz.

*Chứng minh:*

Ta sẽ chứng minh cho trường hợp  $n=3$ . Điều kiện cần là hiển nhiên vì khi  $A(s)$  là Hurwitz chặt thì bốn đa thức Kharitonov của nó là các đa thức Hurwitz, trong đó có  $K_4(s)$ . Để chứng minh điều kiện đủ ta lập bảng Routh của bốn đa thức Kharitonov:



$$K_1(s) \begin{array}{|c|c|} \hline a_0^- & a_2^+ \\ \hline a_1^- & a_3^+ \\ \hline a_2^+ - \frac{a_0^- a_3^+}{a_1^-} & \\ \hline a_3^+ & \\ \hline \end{array}$$

$$K_2(s) \begin{array}{|c|c|} \hline a_0^- & a_2^+ \\ \hline a_1^+ & a_3^- \\ \hline a_2^+ - \frac{a_0^- a_3^-}{a_1^+} & \\ \hline a_3^- & \\ \hline \end{array}$$

$$K_3(s) \begin{array}{|c|c|} \hline a_0^+ & a_2^- \\ \hline a_1^+ & a_3^- \\ \hline a_2^- - \frac{a_0^+ a_3^-}{a_1^+} & \\ \hline a_3^- & \\ \hline \end{array}$$

$$K_4(s) \begin{array}{|c|c|} \hline a_0^+ & a_2^- \\ \hline a_1^- & a_3^+ \\ \hline a_2^- - \frac{a_0^+ a_3^+}{a_1^-} & \\ \hline a_3^+ & \\ \hline \end{array}$$

Theo giả thiết về tính Hurwitz của  $K_4(s)$  thì giá trị trong cột đầu bảng Routh của nó là những số dương. Do đó  $a_2^- - \frac{a_0^+ a_3^+}{a_1^-} > 0$ . Từ đây ta suy ra thêm:

- 1)  $a_2^- - \frac{a_0^+ a_3^-}{a_1^+} > 0$ , vì  $\frac{a_0^+ a_3^-}{a_1^+} < \frac{a_0^+ a_3^+}{a_1^-}$ . Kết hợp với điều kiện  $a_i > 0, \forall i$  đã cho thì theo tiêu chuẩn Routh–Hurwitz,  $K_3(s)$  là Hurwitz.
- 2)  $a_2^+ - \frac{a_0^- a_3^-}{a_1^+} > 0$ , vì  $\frac{a_0^- a_3^-}{a_1^+} < \frac{a_0^- a_3^+}{a_1^-}$ . Cộng thêm điều kiện  $a_i > 0, \forall i$  đã có thì  $K_2(s)$  là Hurwitz.
- 3)  $a_2^+ - \frac{a_0^- a_3^+}{a_1^-} > 0$ , vì  $\frac{a_0^- a_3^+}{a_1^-} < \frac{a_0^+ a_3^+}{a_1^-}$ . Thêm điều kiện  $a_i > 0, \forall i$  đã biết thì  $K_1(s)$  là Hurwitz. □

### Bài toán mở

Trước tiên ta quay lại đa thức Hurwitz chặt (2.147) với 4 đa thức Kharitonov tương ứng cho trong định lý 2.34, trong đó các hệ số  $a_k, k=0, 1, \dots, n$  của đa thức (2.147) được giả thiết là chạy trong khoảng kín  $a_k^- \leq a_k \leq a_k^+, k=0, 1, \dots, n$ . Do tất cả 4 đa thức Kharitonov:

$$K_1(s) = a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + a_5^- s^5 + a_6^+ s^6 + \dots$$

$$K_2(s) = a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5 + a_6^+ s^6 + \dots$$

$$K_3(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5 + a_6^- s^6 + \dots$$

$$K_4(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5 + a_6^- s^6 + \dots$$

đều phải là đa thức Hurwitz nên không mất tính tổng quát ta có thể xem tất cả các hệ số của chúng là những số dương, tức là  $a_k^- > 0, k=0, 1, \dots, n$ . Như vậy các hệ số của đa thức Hurwitz chặt (2.147) biểu diễn được bởi giá trị của đa thức  $p(\lambda)$  hệ số dương:

$$a_k = (1-\lambda)a_k^- + \lambda a_k^+ = (a_k^+ - a_k^-)\lambda + a_k^- = p(\lambda) \quad \text{với } 0 \leq \lambda \leq 1$$

Từ đây, người ta đã đi đến một kết luận phỏng đoán cho trường hợp tổng quát như sau, *nhưng chưa chứng minh được*:

**Định lý 2.36** (Bài toán mở): Cho đa thức Hurwitz:

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n$$

Khi đó với mọi đa thức  $p(\lambda)$  hệ số dương, đa thức *nhúng*:

$$\hat{A}(s) = p(a_0) + p(a_1)s + p(a_2)s^2 + \dots + p(a_n)s^n$$

cũng là một đa thức Hurwitz.

**Ví dụ 2.66:** Minh họa bài toán mở–định lý phỏng đoán

Xét đa thức Hurwitz  $A(s)$  bậc 4 ở ví dụ 2.42:

$$A(s) = 5 + 16s + 18s^2 + 8s^3 + s^4$$

và một đa thức  $p(\lambda)$  có hệ số dương:

$$p(\lambda) = 1 + 2\lambda + \lambda^2 = (1 + \lambda)^2$$

Khi đó đa thức *nhúng*  $\hat{A}(s)$  sẽ là:

$$\hat{A}(s) = 36 + 289s + 6859s^2 + 81s^3 + 4s^4$$

và có bảng Routh cho ở hình bên (hình 2.99). Do tất cả các hệ số ở cột đầu của bảng Routh đều là những số dương nên theo tiêu chuẩn Routh, đa thức nhúng  $\hat{A}(s)$  này cũng là một đa thức Hurwitz. □

36	6859	4
289	81	
6849	4	
80.8		
4		

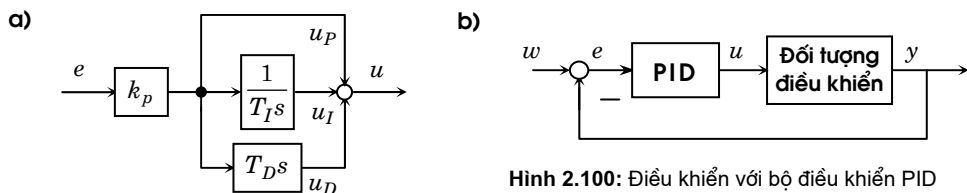
**Hình 2.99:** Minh họa ví dụ 2.66

## 2.4 Thiết kế bộ điều khiển

### 2.4.1 Chọn tham số cho bộ điều khiển PID

Tên gọi PID là chữ viết tắt của ba thành phần cơ bản có trong bộ điều khiển (hình 2.100a) gồm *khâu khuếch đại* (P), *khâu tích phân* (I) và *khâu vi phân* (D). Người ta vẫn thường nói rằng PID là một tập thể hoàn hảo bao gồm ba tính cách khác nhau:

- phục tùng và thực hiện chính xác nhiệm vụ được giao (tỷ lệ),
- làm việc và có tích lũy kinh nghiệm để thực hiện tốt nhiệm vụ (tích phân),
- luôn có sáng kiến và phản ứng nhanh nhạy với sự thay đổi tình huống trong quá trình thực hiện nhiệm vụ (vi phân).



**Hình 2.100:** Điều khiển với bộ điều khiển PID

Bộ điều khiển PID được sử dụng khá rộng rãi để điều khiển đối tượng SISO theo nguyên lý hồi tiếp (hình 2.100b). Lý do bộ PID được sử dụng rộng rãi là tính đơn giản của nó cả về cấu trúc lẫn nguyên lý làm việc. Bộ PID có nhiệm vụ đưa sai lệch  $e(t)$  của hệ thống về 0 sao cho quá trình quá độ thỏa mãn các yêu cầu cơ bản về chất lượng:

- Nếu sai lệch  $e(t)$  càng lớn thì thông qua thành phần  $u_P(t)$ , tín hiệu điều chỉnh  $u(t)$  càng lớn (vai trò của khuếch đại  $k_p$ ).
- Nếu sai lệch  $e(t)$  chưa bằng 0 thì thông qua thành phần  $u_I(t)$ , PID vẫn còn tạo tín hiệu điều chỉnh (vai trò của tích phân  $T_I$ ).
- Nếu sự thay đổi của sai lệch  $e(t)$  càng lớn thì thông qua thành phần  $u_D(t)$ , phản ứng thích hợp của  $u(t)$  sẽ càng nhanh (vai trò của vi phân  $T_D$ ).

Bộ điều khiển PID được mô tả bằng mô hình vào-ra:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

trong đó  $e(t)$  là tín hiệu đầu vào,  $u(t)$  là tín hiệu đầu ra,  $k_p$  được gọi là hệ số khuếch đại,  $T_I$  là hằng số tích phân và  $T_D$  là hằng số vi phân.

Từ mô hình vào-ra trên ta có được hàm truyền của bộ điều khiển PID:

$$R(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

Chất lượng hệ thống phụ thuộc vào các tham số  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ . Muốn hệ thống có được chất lượng như mong muốn thì phải phân tích đối tượng rồi trên cơ sở đó chọn các tham số đó cho phù hợp. Hiện có khá nhiều các phương pháp xác định các tham số  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  cho bộ điều khiển PID, song tiện ích hơn cả trong ứng dụng vẫn là:

- Phương pháp Ziegler–Nichols
- Phương pháp Chien–Hrones–Reswick
- Phương pháp tổng  $T$  của Kuhn
- Phương pháp tối ưu độ lớn và phương pháp tối ưu đối xứng
- Phương pháp tối ưu theo sai lệch bám

Một điều cần nói thêm là không phải mọi trường hợp ứng dụng đều phải xác định cả ba tham số  $k_p$ ,  $T_I$  và  $T_D$ . Chẳng hạn, khi bản thân đối tượng đã có thành phần tích phân thì trong bộ điều khiển ta không cần phải có thêm khâu tích phân mới làm cho sai lệch tĩnh bằng 0, hay nói cách khác, khi đó ta chỉ cần sử dụng bộ điều khiển PD

$$R(s) = k_p(1 + T_D s)$$

là đủ ( $T_I = \infty$ ). Hoặc khi tín hiệu trong hệ thống thay đổi tương đối chậm và bản thân bộ điều khiển không cần phải có phản ứng thật nhanh với sự thay đổi của sai lệch  $e(t)$  thì ta có thể chỉ cần sử dụng bộ điều khiển PI ( $T_D = 0$ ) có hàm truyền:

$$R(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

## Hai phương pháp xác định tham số PID của Ziegler-Nichols

Ziegler và Nichols đã đưa ra hai *phương pháp thực nghiệm* để xác định tham số bộ điều khiển PID. Trong khi phương pháp thứ nhất sử dụng dạng mô hình xấp xỉ quán tính bậc nhất có trễ của đối tượng điều khiển:

$$S(s) = \frac{ke^{-Ls}}{1 + Ts} \quad (2.149)$$

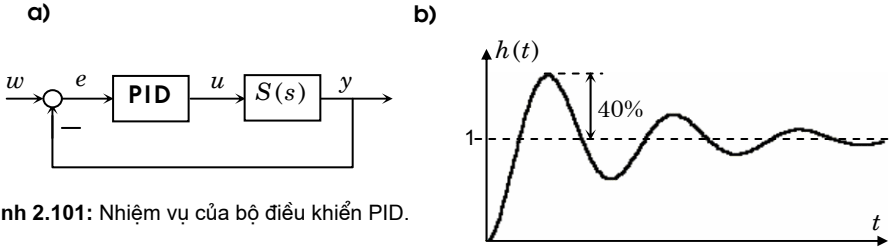
thì phương pháp thứ hai nổi trội hơn ở chỗ hoàn toàn không cần đến mô hình toán học. Tuy nhiên nó có hạn chế là chỉ áp dụng được cho một lớp các đối tượng nhất định.

### 1) Phương pháp Ziegler–Nichols thứ nhất:

Phương pháp thực nghiệm này có nhiệm vụ xác định các tham số  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  cho bộ điều khiển PID trên cơ sở xấp xỉ hàm truyền  $S(s)$  của đối tượng thành dạng (2.149), để hệ kín nhanh chóng trở về chế độ xác lập và độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  không vượt quá một giới hạn cho phép, khoảng 40% so với  $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ , tức là có  $\left| \frac{\Delta h}{h_\infty} \right| \leq 0,4$  (hình 2.101).

Ba tham số  $L$  (hằng số thời gian trễ),  $k$  (hệ số khuếch đại) và  $T$  (hằng số thời gian quán tính) của mô hình xấp xỉ (2.149) có thể được xác định gần đúng từ đồ thị hàm quá độ  $h(t)$  của đối tượng. Nếu đối tượng có hàm quá độ dạng như hình 2.102a) mô tả thì từ đồ thị hàm  $h(t)$  đó ta đọc ra được ngay

- $L$  là khoảng thời gian đầu ra  $h(t)$  chưa có phản ứng ngay với kích thích  $1(t)$  tại đầu vào,
- $k$  là giá trị giới hạn  $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$
- Gọi  $A$  là điểm kết thúc khoảng thời gian trễ, tức là điểm trên trục hoành có hoành độ bằng  $L$ . Khi đó  $T$  là khoảng thời gian cần thiết sau  $L$  để tiếp tuyến của  $h(t)$  tại  $A$  đạt được giá trị  $k$ .



Hình 2.101: Nhiệm vụ của bộ điều khiển PID.

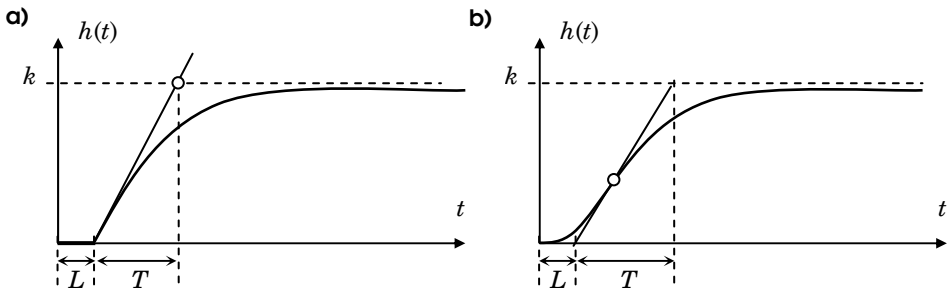
Trường hợp hàm quá độ  $h(t)$  không có dạng lý tưởng như ở hình 2.102a, song có dạng gần giống là hình chữ S của khâu quán tính bậc 2 hoặc bậc  $n$  như hình 2.102b) mô tả, thì ba tham số  $k, L, T$  của mô hình (2.149) được xác định xấp xỉ như sau:

- $k$  là giá trị giới hạn  $h_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ .
- Kẻ đường tiếp tuyến của  $h(t)$  tại điểm uốn của nó. Khi đó  $L$  sẽ là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và  $T$  là khoảng thời gian cần thiết để đường tiếp tuyến đi được từ giá trị 0 tới được giá trị  $k$ .

Như vậy ta có thể thấy là để áp dụng được phương pháp xấp xỉ mô hình bậc nhất có trễ, đối tượng đã phải ổn định và ít nhất hàm quá độ của nó phải có dạng hình chữ S.

Sau khi đã có các tham số cho mô hình xấp xỉ (2.149) của đối tượng, Ziegler–Nichols đã đề nghị sử dụng các tham số  $k_p, T_I, T_D$  cho bộ điều khiển như sau [12]:

- Nếu chỉ sử dụng bộ điều khiển khuếch đại  $R(s) = k_p$  thì chọn  $k_p = \frac{T}{kL}$
- Nếu sử dụng bộ PI với  $R(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$  thì chọn  $k_p = \frac{0,9T}{kL}$  và  $T_I = \frac{10}{3}L$
- Nếu sử dụng PID có  $R(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$  thì  $k_p = \frac{1,2T}{kL}$ ,  $T_I = 2L$ ,  $T_D = \frac{L}{2}$



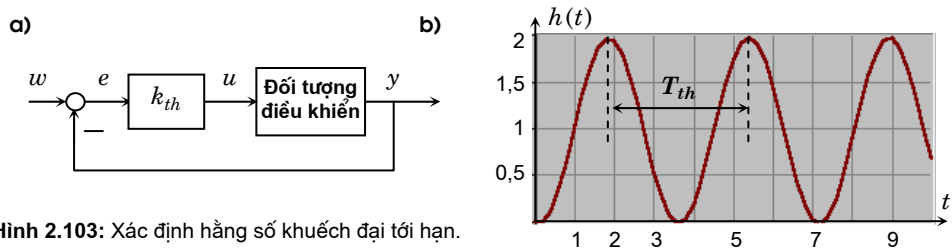
Hình 2.102: Xác định tham số cho mô hình xấp xỉ (2.149) của đối tượng.

2) Phương pháp Ziegler–Nichols thứ hai:

Phương pháp thực nghiệm thứ hai này có đặc điểm là không sử dụng mô hình toán học của đối tượng, ngay cả mô hình xấp xỉ gần đúng (2.149). Nội dung của phương pháp thứ hai như sau [12]:

- Thay bộ điều khiển PID trong hệ kín (hình 2.103a) bằng khâu khuếch đại. Sau đó tăng hệ số khuếch đại tới giá trị tới hạn  $k_{th}$  để hệ kín ở chế độ biên giới ổn định, tức là  $h(t)$  có dạng dao động điều hòa (hình 2.103b). Xác định chu kỳ  $T_{th}$  của dao động.
- Xác định tham số cho bộ điều khiển P, PI hay PID từ  $k_{th}$  và  $T_{th}$  như sau:
  - a) Nếu sử dụng  $R(s)=k_p$  thì chọn  $k_p = \frac{1}{2} k_{th}$
  - b) Nếu sử dụng  $R(s)=k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$  thì chọn  $k_p=0,45k_{th}$  và  $T_I=0,85T_{th}$
  - c) Nếu sử dụng PID thì chọn  $k_p=0,6k_{th}$  ,  $T_I=0,5T_{th}$  và  $T_D=0,12T_{th}$

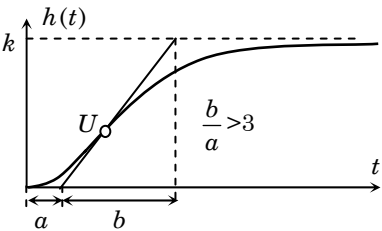
Phương pháp thực nghiệm thứ hai này có một nhược điểm là chỉ áp dụng được cho những đối tượng có được chế độ biên giới ổn định khi hiệu chỉnh hằng số khuếch đại trong hệ kín.



Hình 2.103: Xác định hằng số khuếch đại tới hạn.

Phương pháp Chien–Hrones–Reswick

Đây là phương pháp gần giống với phương pháp thứ nhất của Ziegler–Nichols, song nó không sử dụng mô hình tham số (2.149) gần đúng dạng quán tính bậc nhất có trễ cho đối tượng mà thay vào đó là trực tiếp dạng hàm quá độ  $h(t)$  của nó.



Hình 2.104: Hàm quá độ đối tượng thích hợp cho phương pháp Chien–Hrones–Reswick.

Phương pháp Chien–Hrones–Reswick cũng cần giả thiết đối tượng ổn định, hàm quá độ  $h(t)$  có dạng hình chữ S (hình 2.104), tức là luôn có đạo hàm không âm:

$$\frac{dh(t)}{dt} = g(t) \geq 0$$

Tuy nhiên phương pháp này thích ứng với những đối tượng bậc cao như quán tính bậc  $n$

$$S(s) = \frac{k}{(1+sT)^n}$$

và có hàm quá độ  $h(t)$  thỏa mãn:

$$\frac{b}{a} > 3 \quad (2.150)$$

trong đó  $a$  là hoành độ giao điểm tiếp tuyến của  $h(t)$  tại điểm uốn  $U$  với trục thời gian (hình 2.104) và  $b$  là khoảng thời gian cần thiết để tiếp tuyến đó đi được từ 0 tới giá trị xác lập  $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ .

Từ dạng hàm quá độ  $h(t)$  đối tượng với hai tham số  $a, b$  thỏa mãn, Chien–Hrones–Reswick đã đưa bốn cách xác định tham số bộ điều khiển cho bốn yêu cầu chất lượng khác nhau như sau [12]:

- Tối ưu theo nhiễu (giảm ảnh hưởng nhiễu) và hệ kín không có độ quá điều chỉnh:
  - a) Bộ điều khiển P: Chọn  $k_p = \frac{3b}{10ak}$
  - b) Bộ điều khiển PI: Chọn  $k_p = \frac{6b}{10ak}$  và  $T_I = 4a$
  - c) Bộ điều khiển PID: Chọn  $k_p = \frac{19b}{20ak}$ ,  $T_I = \frac{12a}{5}$  và  $T_D = \frac{21a}{50}$
- Tối ưu theo nhiễu và hệ kín có độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  không vượt quá 20% so với  $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ :
  - a) Bộ điều khiển P: Chọn  $k_p = \frac{7b}{10ak}$
  - b) Bộ điều khiển PI: Chọn  $k_p = \frac{7b}{10ak}$  và  $T_I = \frac{23a}{10}$
  - c) Bộ điều khiển PID: Chọn  $k_p = \frac{6b}{5ak}$ ,  $T_I = 2a$  và  $T_D = \frac{21a}{50}$
- Tối ưu theo tín hiệu đặt trước (giảm sai lệch bám) và hệ kín không có độ quá điều chỉnh  $\Delta h$ :
  - a) Bộ điều khiển P: Chọn  $k_p = \frac{3b}{10ak}$
  - b) Bộ điều khiển PI: Chọn  $k_p = \frac{7b}{20ak}$  và  $T_I = \frac{6b}{5}$
  - c) Bộ điều khiển PID: Chọn  $k_p = \frac{3b}{5ak}$ ,  $T_I = b$  và  $T_D = \frac{a}{2}$ .

- Tối ưu theo tín hiệu đặt trước (giảm sai lệch bám) và hệ kín có độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  không vượt quá 20% so với  $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ :

a) Bộ điều khiển P: Chọn  $k_p = \frac{7b}{10ak}$

b) Bộ điều khiển PI: Chọn  $k_p = \frac{6b}{5ak}$  và  $T_I = b$

c) Bộ điều khiển PID: Chọn  $k_p = \frac{19b}{20ak}$ ,  $T_I = \frac{27b}{20}$  và  $T_D = \frac{47a}{100}$

## Phương pháp tổng T của Kuhn

Cho đối tượng có hàm truyền

$$S(s) = k \frac{(1 + T_1^t s)(1 + T_2^t s) \cdots (1 + T_m^t s)}{(1 + T_1^m s)(1 + T_2^m s) \cdots (1 + T_n^m s)} e^{-sT}, \quad (m < n) \quad (2.151)$$

Giả thiết rằng hàm quá độ  $h(t)$  của nó có dạng hình chữ S như mô tả ở hình 2.105, vậy thì (2.151) phải thỏa mãn định lý 2.29, tức là các hằng số thời gian ở tử số  $T_i^t$  phải được giả thiết là nhỏ hơn hằng số thời gian tương ứng với nó ở mẫu số  $T_j^m$ . Nói cách khác, nếu như đã có sự sắp xếp:

$$T_1^t \geq T_2^t \geq \cdots \geq T_m^t \quad \text{và} \quad T_1^m \geq T_2^m \geq \cdots \geq T_n^m$$

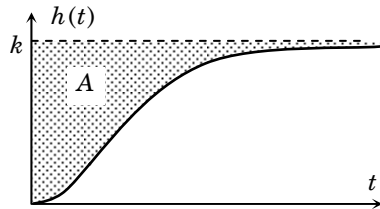
thì cũng phải có

$$T_1^t < T_1^m, \quad T_2^t < T_2^m, \quad \cdots, \quad T_m^t < T_m^m$$

**Chú ý** là các chữ cái  $t$  và  $m$  trong  $T_i^t$ ,  $T_j^m$

không có ý nghĩa lũy thừa mà chỉ là ký hiệu nói rằng nó thuộc về đa thức tử số hay mẫu số trong hàm truyền  $S(s)$ .

Gọi  $A$  là diện tích bao bởi đường cong  $h(t)$  và  $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ . Vậy thì:



**Hình 2.105:** Quan hệ giữa diện tích và tổng các hằng số thời gian.

**Định lý 2.37:** Giữa diện tích  $A$  và các hằng số thời gian  $T_i^t$ ,  $T_j^m$ ,  $T$  của (2.151) có mối quan hệ:

$$A = kT_\Sigma = k \left( \underbrace{\sum_{j=1}^n T_j^m - \sum_{i=1}^m T_i^t + T}_{T_\Sigma} \right)$$

**Chứng minh:**

Theo khái niệm về diện tích  $A$  thì

$$A = \int_0^\infty [k - h(t)] dt.$$



Chuyển hai vế đẳng thức trên sang miền phức nhờ toán tử Laplace và gọi  $A(s)$  là ảnh Laplace của  $A$  cũng như  $H(s)$  là ảnh của  $h(t)$ , ta có:

$$A(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{k}{s} - H(s) \right]$$

Vì  $A$  là hằng số nên nó có giới hạn  $A = \lim_{t \rightarrow \infty} A$ . Do đó nếu áp dụng định lý về giới hạn thứ nhất của toán tử Laplace, sẽ đi đến:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{k}{s} - H(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k - S(s)}{s} \\ &= k \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 + T_1^m s)(1 + T_2^m s) \cdots (1 + T_n^m s) - (1 + T_1^t s)(1 + T_2^t s) \cdots (1 + T_m^t s)e^{-sT}}{s(1 + T_1^m s)(1 + T_2^m s) \cdots (1 + T_n^m s)} \\ &= k \lim_{s \rightarrow 0} \left[ (T_1^m + T_2^m + \cdots + T_n^m) - (T_1^t + T_2^t + \cdots + T_m^t) + \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right] \end{aligned}$$

Suy ra

$$A = k \left( \sum_{j=1}^n T_j^m - \sum_{i=1}^m T_i^t + T \right) = k T_\Sigma \quad \text{với} \quad T_\Sigma = \sum_{j=1}^n T_j^m - \sum_{i=1}^m T_i^t + T \quad \square$$

Định lý 2.35 chỉ rằng  $T_\Sigma$  có thể dễ dàng được xác định từ hàm quá độ  $h(t)$  dạng hình chữ  $S$  và đi từ 0 của đối tượng ổn định, không dao động, bằng cách ước lượng diện tích  $A$  cũng như

$$k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t), \quad T_\Sigma = \frac{A}{k} \quad (2.152)$$

Trên cơ sở hai giá trị  $k$ ,  $T_\Sigma$  đã có của đối tượng, Kuhn đề ra phương pháp tổng  $T$  xác định tham số  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  cho bộ điều khiển PID sao cho hệ hồi tiếp có quá trình quá độ ngắn hơn và độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  không vượt quá 25%.

Phương pháp tổng  $T$  của Kuhn bao gồm hai bước như sau [12]:

- 1) Xác định  $k$ ,  $T_\Sigma$  có thể từ hàm truyền  $S(s)$  cho trong (2.151) nhờ định lý 2.35 và công thức (2.152) hoặc bằng thực nghiệm từ hàm quá độ  $h(t)$  đi từ 0 và có dạng hình chữ  $S$  của đối tượng theo (2.152).
- 2) Xác định tham số:
  - Nếu sử dụng bộ điều khiển PI: Chọn  $k_p = \frac{1}{2k}$  và  $T_I = \frac{T_\Sigma}{2}$
  - Nếu sử dụng bộ điều khiển PID: Chọn  $k_p = \frac{1}{k}$ ,  $T_I = \frac{2T_\Sigma}{3}$  và  $T_D = 0,167T_\Sigma$

### Phương pháp tối ưu độ lớn

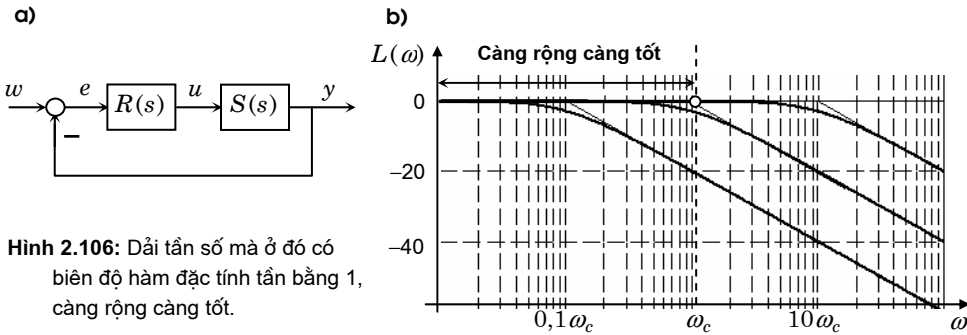
Yêu cầu chất lượng đối với hệ thống điều khiển kín ở hình 2.107a) có đối tượng  $S(s)$  và bộ điều khiển phải tìm  $R(s)$ , mô tả bởi hàm truyền tương đương:

$$G(s) = \frac{SR}{1+SR}$$

là hệ thống luôn phải có được đáp ứng  $y(t)$  giống như tín hiệu lệnh được đưa ở đầu vào  $w(t)$  tại mọi điểm tần số hoặc ít ra thời gian quá độ để  $y(t)$  bám được vào  $w(t)$  càng ngắn càng tốt. Nói cách khác, bộ điều khiển lý tưởng  $R(s)$  cần phải mang đến cho hệ thống khả năng

$$|G(j\omega)| = 1 \quad \text{với mọi } \omega \quad (2.153)$$

Nhưng trong thực tế, vì nhiều lý do mà yêu cầu  $R(s)$  thỏa mãn (2.153) khó được đáp ứng, chẳng hạn như vì hệ thống thực luôn chứa trong nó bản chất quán tính, tính "cưỡng lại lệnh" tác động từ ngoài vào. Song "tính xấu" đó của hệ thống lại được giảm bớt một cách tự nhiên ở chế độ làm việc có tần số lớn, nên người ta thường đã thỏa mãn với bộ điều khiển  $R(s)$  khi nó mang lại được cho hệ thống tính chất (2.153) trong một dải tần số rộng lân cận 0 (hình 2.106b). *Dải tần số này càng rộng, hệ sẽ càng đi nhanh vào chế độ xác lập, tức là quá trình quá độ của hệ sẽ càng ngắn.*



**Hình 2.106:** Dải tần số mà ở đó có biên độ hàm đặc tính tần bằng 1, càng rộng càng tốt.

Bộ điều khiển  $R(s)$  thỏa mãn:

$$|G(j\omega)| \approx 1 \quad (2.154)$$

trong dải tần số thấp có độ rộng lớn được gọi là *bộ điều khiển tối ưu độ lớn*. Hình 2.106b) là ví dụ minh họa cho nguyên tắc điều khiển tối ưu độ lớn. Bộ điều khiển  $R(s)$  cần phải được chọn sao cho miền tần số của biểu đồ Bode hàm truyền hệ kín  $G(s)$  thỏa mãn:

$$L(\omega) = 20\lg |G(j\omega)| \approx 0$$

là lớn nhất. Dải tần số này càng lớn, chất lượng hệ kín theo nghĩa (2.154) càng cao.

Một điều cần nói thêm là tên gọi *tối ưu độ lớn* được dùng ở đây không mang ý nghĩa chặt chẽ về mặt toán học cho một bài toán tối ưu, tức là ở đây không có phiếm hàm đánh giá chất lượng nào được sử dụng do đó cũng không xác định cụ thể là với bộ điều khiển  $R(s)$  phiếm hàm đó có giá trị lớn nhất hay không. Thuần túy, tên gọi này chỉ mang tính định tính rằng dải tần số  $\omega$ , mà ở đó  $G(s)$  thỏa mãn (2.154), càng rộng càng tốt.

Phương pháp tối ưu độ lớn được xây dựng chủ yếu chỉ phục vụ việc chọn tham số bộ điều khiển PID để điều khiển các đối tượng  $S(s)$  có hàm truyền dạng

- Quán tính bậc nhất:  $S(s) = \frac{k}{1+Ts}$
- Quán tính bậc hai:  $S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$
- Quán tính bậc ba:  $S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$

Tuy nhiên, cho lớp các đối tượng có dạng hàm truyền phức tạp hơn, chẳng hạn như (2.151), ta vẫn có thể sử dụng được phương pháp chọn tham số PID theo tối ưu độ lớn bằng cách xấp xỉ chúng về một trong ba dạng cơ bản trên nhờ *phương pháp tổng T của Kuhn* hoặc *phương pháp tổng các hằng số thời gian nhỏ* sẽ được trình bày dưới đây.

1) Điều khiển đối tượng quán tính bậc nhất:

Xét hệ kín có sơ đồ khối cho trong hình 2.107a), trong đó:

- Bộ điều khiển là khâu tích phân:  $R(s) = \frac{k_p}{T_I s}$  (2.155)

- Đối tượng là khâu quán tính bậc nhất:  $S(s) = \frac{k}{1+Ts}$  (2.156)

Như vậy sẽ có:

- Hàm truyền hệ kín:  $G(s) = \frac{k}{T_R s(1+Ts) + k}$  với  $T_R = \frac{T_I}{k_p}$

- Hàm truyền hệ hở:  $G_h(s) = R(s)S(s) = \frac{k k_p}{T_I s(1+Ts)} = \frac{k}{T_R s(1+Ts)}$  (2.157)

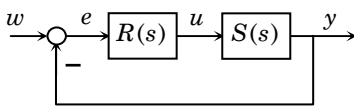
Suy ra:

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(k - T_R T \omega^2)^2 + (\omega T_R)^2}} \Leftrightarrow |G(j\omega)|^2 = \frac{k^2}{k^2 + (T_R^2 - 2kT_R T)\omega^2 + T_R^2 T^2 \omega^4}$$

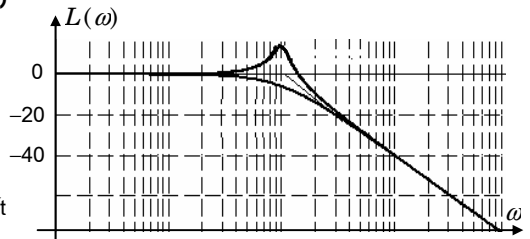
và để điều kiện (2.154) được thỏa mãn trong một dải tần số thấp có độ rộng lớn, tất nhiên người ta có thể chọn  $T_R$  sao cho:

$$T_R^2 - 2kT_R T = 0 \Leftrightarrow T_R = \frac{T_I}{k_p} = 2kT$$

a)



b)



Hình 2.107: Điều khiển khâu quán tính bậc nhất

Khi đó hệ kín có biểu đồ Bode cho ở hình 2.107b) với hàm truyền:

$$G(s) = \frac{k}{2kTs(1+Ts) + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D\omega_n s + \omega_n^2}, \text{ trong đó } \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2T}} \text{ và } D = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Định lý 2.38:** Nếu đối tượng điều khiển là khâu quán tính bậc nhất (2.156), thì bộ điều khiển tích phân (2.155) với tham số  $\frac{T_I}{k_p} = 2kT$  sẽ là bộ điều khiển tối ưu độ lớn.

Tiếp theo ta bàn về trường hợp đối tượng  $S(s)$  có dạng:

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s) \cdots (1+T_ns)} \quad (2.158)$$

Tất nhiên để áp dụng được định lý 2.38 với bộ điều khiển tối ưu độ lớn là khâu tích phân (2.155) thì trước tiên ta phải tìm cách chuyển mô hình (2.158) về dạng xấp xỉ khâu quán tính bậc nhất (2.156).

Phương pháp xấp xỉ mô hình (2.158) thành (2.156) sau đây là *phương pháp tổng các hằng số thời gian nhỏ*. Nó được sử dụng chủ yếu cho các hàm truyền  $S(s)$  kiểu (2.158) có  $T_1, T_2, \dots, T_n$  rất nhỏ. Sử dụng công thức khai triển Vieta cho đa thức mẫu số trong (2.158) được

$$S(s) = \frac{k}{1 + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n)s + (T_1T_2 + T_1T_3 + \cdots)s^2 + \cdots}$$

Do đó, ở những điểm tần số thấp, tức là khi  $s$  nhỏ, ta có thể bỏ qua những thành phần bậc cao của  $s$  và thu được công thức xấp xỉ (2.156) có  $T = \sum_{i=1}^n T_i$ . Suy ra:

**Định lý 2.39:** Nếu đối tượng điều khiển (2.158) có các hằng số thời gian  $T_1, T_2, \dots, T_n$  rất nhỏ, thì bộ điều khiển tích phân (2.155) với tham số  $\frac{T_I}{k_p} = 2k \sum_{i=1}^n T_i$  sẽ là bộ điều khiển tối ưu độ lớn.

**Ví dụ 2.67:** Minh họa định lý 2.39

Giả sử đối tượng điều khiển có dạng

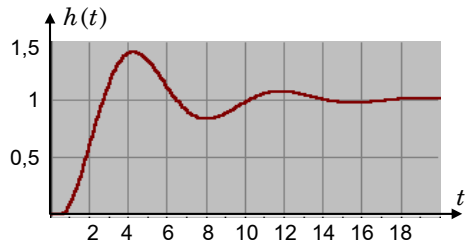
$$S(s) = \frac{2}{(1+0,1s)^6}$$

Vậy thì

$$k=2 \quad \text{và} \quad T=0,6.$$

Do đó bộ điều khiển  $I$  được sử dụng sẽ có:

$$T_I = 2,4 \Rightarrow R(s) = \frac{1}{2,4s}$$



Hình 2.108: Minh họa ví dụ 2.67

Hình 2.108 là đồ thị hàm quá độ của hệ kín gồm bộ điều khiển  $I$  thiết kế được và đối tượng quán tính bậc cao đã cho. □

2) Điều khiển đối tượng quán tính bậc hai:

Xét bài toán chọn tham số bộ điều khiển PID cho đối tượng quán tính bậc hai

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad (2.159)$$

Khi đó, để hàm truyền hệ hở  $G_h(s)$  lại có dạng (2.157), và do đó sẽ sử dụng được định lý 2.37, ta chọn bộ điều khiển PI thay vì bộ điều khiển I như đã làm với đối tượng quán tính bậc nhất:

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{k_p(1+T_I s)}{T_I s} = \frac{(1+T_I s)}{T_R s}, \quad T_R = \frac{T_I}{k_p} \quad (2.160)$$

$$\Rightarrow G_h(s) = R(s)S(s) = \frac{k(1+T_I s)}{T_R s(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad (2.161)$$

nhằm thực hiện việc bù hằng số thời gian  $T_1$  của (2.159), theo nghĩa  $T_I = T_1$ . Với cách chọn tham số  $T_I$  này, hàm truyền hệ hở (2.161) trở thành:

$$G_h(s) = \frac{k}{T_R s(1+T_2 s)}$$

và nó hoàn toàn giống như (2.157), tức là ta lại có được  $T_R$  theo định lý 2.37:

$$T_R = \frac{T_I}{k_p} = 2kT_2 \Leftrightarrow k_p = \frac{T_I}{2kT_2} = \frac{T_1}{2kT_2}$$

Vậy:

**Định lý 2.40:** Nếu đối tượng điều khiển là khâu quán tính bậc hai (2.159), thì bộ điều khiển PI (2.160) tối ưu độ lớn phải có các tham số  $T_I = T_1$ ,  $k_p = \frac{T_1}{2kT_2}$ .

Mở rộng ra, nếu đối tượng không phải là khâu quán tính bậc hai mà lại có hàm truyền  $S(s)$  dạng (2.158) với các hằng số thời gian  $T_2, T_3, \dots, T_n$  rất nhỏ so với  $T_1$ , thì do nó có thể xấp xỉ bằng:

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+Ts)}, \quad \text{trong đó } T = \sum_{i=2}^n T_i$$

nhờ phương pháp tổng các hằng số thời gian nhỏ, ta còn có:

**Định lý 2.41:** Nếu đối tượng điều khiển (2.158) có một hằng số thời gian  $T_1$  lớn vượt trội và các hằng số thời gian còn lại  $T_2, T_3, \dots, T_n$  là rất nhỏ, thì bộ điều khiển PI (2.160) có các tham số  $T_I = T_1$ ,  $k_p = \frac{T_1}{2k \sum_{i=2}^n T_i}$  sẽ là bộ điều khiển tối ưu độ lớn.

**Ví dụ 2.68:** Minh họa định lý 2.41

Giả sử đối tượng điều khiển có dạng

$$S(s) = \frac{3}{(1+2s)(1+0,1s)^5}$$

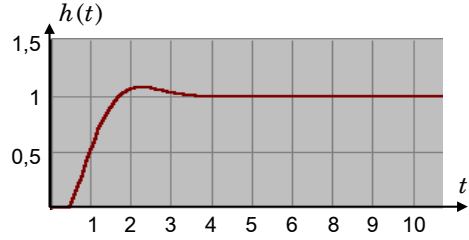
có  $k=3$ ,  $T_1=2$  và  $T=0,5$

Chọn các tham số cho PI

$$R(s) = 0,67\left(1 + \frac{1}{2s}\right)$$

là  $T_I = 2$  và  $k_p = 0,67$

ta sẽ được chất lượng hệ kín mô tả bởi hàm quá độ của nó ở hình 2.109. □



**Hình 2.109:** Minh họa cho ví dụ 2.68

3) Điều khiển đối tượng quán tính bậc ba:

Tương tự như đã làm với đối tượng là khâu quán tính bậc hai, nếu đối tượng là khâu quán tính bậc ba có hàm truyền:

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} \quad (2.162)$$

ta sẽ sử dụng bộ điều khiển PID:

$$R(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = \frac{(1+T_A s)(1+T_A s)}{T_R s}, \quad T_R = \frac{T_I}{k_p} \quad (2.163)$$

với

$$T_A + T_B = T_I \quad \text{và} \quad T_A T_B = T_I T_D$$

Khi đó, hàm truyền hệ hở sẽ lại trở về dạng (2.157), nếu ta chọn

$$T_A = T_1, \quad T_B = T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_I = T_1 + T_2, \quad T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

Suy ra

$$T_R = \frac{T_I}{k_p} = 2kT_3 \quad \Leftrightarrow \quad k_p = \frac{T_I}{2kT_3} = \frac{T_1 + T_2}{2kT_3}$$

Vậy:

**Định lý 2.42:** Nếu đối tượng điều khiển là khâu quán tính bậc ba (2.162), thì bộ điều khiển PID (2.163) với các tham số  $T_I = T_1 + T_2$ ,  $T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ ,  $k_p = \frac{T_1 + T_2}{2kT_3}$  sẽ là bộ điều khiển tối ưu độ lớn.

Trong trường hợp đối tượng lại có dạng hàm truyền (2.158), nhưng các hằng số thời gian  $T_3, T_4, \dots, T_n$  rất nhỏ so với hai hằng số còn lại  $T_1, T_2$  thì khi sử dụng *phương pháp tổng các hằng số thời gian nhỏ*, để xấp xỉ nó về dạng quán tính bậc ba:

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+Ts)} \quad \text{trong đó} \quad T = \sum_{i=3}^n T_i$$

ta sẽ áp dụng được định lý 2.42 với

$$T_I = T_1 + T_2, \quad T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}, \quad k_p = \frac{T_1 + T_2}{2k \sum_{i=3}^n T_i}$$

**Ví dụ 2.69:** Minh họa định lý 2.42

Giả sử đối tượng điều khiển có dạng

$$S(s) = \frac{4}{(1+5s)(1+2s)(1+0,1s)^4}$$

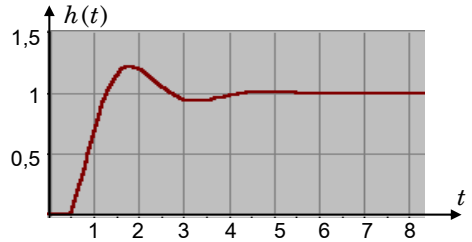
Vậy thì

$$k=4, \quad T_1=5, \quad T_2=2, \quad T=0,4$$

Sử dụng PID (2.163) với

$$T_I = 7, \quad T_D = 1,43 \quad \text{và} \quad k_p = 2,2$$

ta sẽ được chất lượng hệ kín mô tả bởi hàm quá độ của nó cho ở hình 2.110. □



**Hình 2.110:** Minh họa cho ví dụ 2.69

### Phương pháp tối ưu đối xứng

Có thể thấy ngay được sự hạn chế của phương pháp thiết kế PID tối ưu độ lớn là đối tượng  $S(s)$  phải ổn định, hàm quá độ  $h(t)$  của nó phải đi từ 0 và có dạng hình chữ S.

Phương pháp chọn tham số PID theo nguyên tắc tối ưu đối xứng được xem như là một sự bù đắp cho điều khiển khuyết trên của tối ưu độ lớn. Trước tiên, ta xét hệ kín cho ở hình 2.111a). Gọi  $G_h(s) = R(s)S(s)$  là hàm truyền của hệ hở. Khi đó hệ kín có hàm truyền

$$G(s) = \frac{G_h(s)}{1 + G_h(s)} \quad \Leftrightarrow \quad G_h(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)}$$

và, giống như ở phương pháp tối ưu độ lớn, để có  $|G(j\omega)| \approx 1$  trong dải tần số thấp thì phải có

$$|G_h(j\omega)| \gg 1 \quad \text{trong dải tần } \omega \text{ nhỏ} \quad (2.164)$$

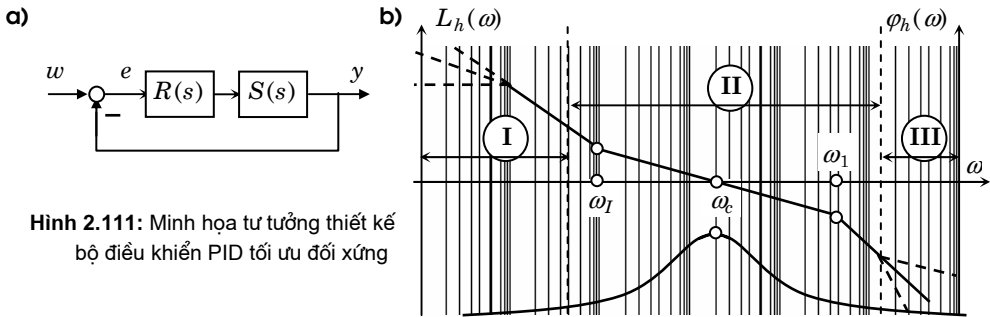
Hình 2.111b) là biểu đồ Bode mong muốn của hàm truyền hệ hở  $G_h(s)$  gồm  $L_h(\omega)$  và  $\varphi_h(\omega)$ . Dải tần số  $\omega$  trong biểu đồ Bode được chia ra làm ba vùng:

- **Vùng I là vùng tần số thấp.** Điều kiện (2.164) được thể hiện rõ nét ở vùng I là hàm đặc tính tần hệ hở  $G_h(j\omega)$  phải có biên độ rất lớn, hay  $L_h(\omega) \gg 0$ . Vùng này đại diện cho chất lượng hệ thống ở chế độ xác lập hoặc tĩnh (tần số nhỏ). Sự ảnh hưởng của nó tới tính động học của hệ kín là có thể bỏ qua.

- *Vùng II là vùng tần số trung bình và cao.* Vùng này mang thông tin đặc trưng của tính động học hệ kín. Sự ảnh hưởng của vùng này tới tính chất hệ kín ở dải tần số thấp (tĩnh) hoặc rất cao là có thể bỏ qua. Vùng II được đặc trưng bởi điểm tần số cắt  $L_h(\omega_c)=0$  hay  $|G_h(j\omega_c)|=1$ . Mong muốn rằng hệ kín không có cấu trúc phức tạp nên hàm  $G_h(j\omega)$  cũng được giả thiết chỉ có một tần số cắt  $\omega_c$ .

Đường đồ thị biên độ Bode  $L_h(\omega)$  sẽ thay đổi độ nghiêng một giá trị 20db/dec tại điểm tần số gãy  $\omega_I$  của đa thức tử số và -20db/dec tại điểm tần số gãy  $\omega_1$  của đa thức mẫu số. Nếu khoảng cách độ nghiêng đủ dài thì đường  $\varphi_h(\omega)$  sẽ thay đổi một giá trị là  $90^0$  tại  $\omega_I$  và  $-90^0$  tại  $\omega_1$ . Ngoài ra, hệ kín sẽ ổn định nếu tại tần số cắt đó hệ hở có góc pha  $\varphi_h(\omega_c)$  lớn hơn  $-\pi$  (định lý 2.27). Bởi vậy, tính ổn định hệ kín được đảm bảo nếu trong vùng I đã có  $|G_h(j\omega)| \gg 1$  và ở vùng II này, xung quanh điểm tần số cắt, biểu đồ Bode  $L_h(\omega)$  có độ dốc là -20dB/dec cũng như khoảng cách độ dốc đó là đủ lớn.

- *Vùng III là vùng tần số rất cao.* Vùng này mang ít, có thể bỏ qua được, những thông tin về chất lượng kỹ thuật của hệ thống. Để hệ không bị ảnh hưởng bởi nhiễu tần số rất cao, tức là khi ở tần số rất cao  $G(s)$  cần có biên độ rất nhỏ, thì trong vùng này hàm  $G_h(j\omega)$  nên có giá trị tiến đến 0.



**Hình 2.111:** Minh họa tư tưởng thiết kế bộ điều khiển PID tối ưu đối xứng

Có thể thấy ngay được rằng, nếu ký hiệu:

$$T_I = \omega_I^{-1}, \quad T_c = \omega_c^{-1}, \quad T_1 = \omega_1^{-1}$$

thì hệ hở  $G_h(s)$  mong muốn với biểu đồ Bode cho trong hình 2.111b) phải là:

$$G_h(s) = R(s)S(s) = \frac{k_h(1+T_I s)}{s^2(1+sT_1)} \quad (2.165)$$

#### 1) Điều khiển đối tượng tích phân-quán tính bậc nhất:

Từ (2.165) thấy được, khi đối tượng  $S(s)$  có hàm truyền dạng khâu tích phân-quán tính bậc nhất:



$$S(s) = \frac{k}{s(1+T_1s)} \quad (2.166)$$

thì với bộ điều khiển PI:

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \quad (2.167)$$

hệ hở sẽ có hàm truyền giống như (2.165) là:

$$G_h(s) = R(s)S(s) = \frac{k_p k(1+T_I s)}{T_I s^2(1+T_1 s)} \quad (2.168)$$

Rõ ràng là trong vùng I, hàm  $G_h(s)$  theo (2.168) thỏa mãn (2.164). Để ở vùng II, biểu đồ biên độ Bode của  $G_h(s)$  có độ nghiêng  $-20\text{dB/dec}$  xung quanh điểm tần số cắt  $\omega_c$  thì phải có

$$\omega_I = \frac{1}{T_I} < \omega_1 = \frac{1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_I > T_1 \quad (2.169)$$

và

$$|G_h(j\omega_I)| > |G_h(j\omega_c)| = 1 > |G_h(j\omega_1)| \quad (2.170)$$

Từ mô hình (2.168) của hệ hở, ta có góc pha

$$\varphi_h(\omega) = \arctan(\omega T_I) - \arctan(\omega T_1) - \pi$$

Nhằm nâng cao *độ dự trữ ổn định* cho hệ kín, các tham số bộ điều khiển cần phải được chọn sao cho tại tần số cắt  $\omega_c$  góc pha  $\varphi_h(\omega_c)$  là *lớn nhất*. Điều này dẫn đến:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_h(\omega_c)}{d\omega} = 0 & \Rightarrow \frac{T_I}{1+(\omega_c T_I)^2} - \frac{T_1}{1+(\omega_c T_1)^2} = 0 \\ & \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{T_I T_1}} \Rightarrow \lg(\omega_c) = \frac{\lg(\omega_I) + \lg(\omega_1)}{2} \end{aligned} \quad (2.171)$$

Kết quả (2.171) này nói rằng trong biểu đồ Bode, điểm tần số cắt  $\omega_c$  cần phải nằm giữa hai điểm tần số gãy  $\omega_I$  và  $\omega_1$  (hình 2.111b). Đó cũng là lý do tại sao phương pháp có tên là *đối xứng*.

Gọi khoảng cách giữa  $\omega_I$  và  $\omega_1$  đo trong hệ trục tọa độ biểu đồ Bode là  $a$ , ta có

$$\lg a = \lg \omega_1 - \lg \omega_I = \lg \frac{T_I}{T_1} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T_I}{T_1} \quad (2.172)$$

Như vậy, rõ ràng sẽ có (2.169) nếu có  $a > 1$ . Thay  $\omega_c$  cho trong (2.171) vào (2.170), ta sẽ có với (2.168) và (2.172)

$$|G_h(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \frac{k_p k \sqrt{1+(T_I \omega_c)^2}}{T_I \omega_c^2 \sqrt{1+(T_1 \omega_c)^2}} = 1 \Leftrightarrow k_p = \frac{1}{k T_1 \sqrt{a}} \quad (2.173)$$

Nói cách khác nếu đã có  $a > 1$  và (2.173) thì cũng có (2.170).

Khoảng cách  $a$  giữa  $\omega_I$  và  $\omega_1$  còn là một đại lượng đặc trưng cho độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  của hệ kín nếu hệ có dao động. Cụ thể là  $a$  càng lớn, độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  càng nhỏ. Điều này ta thấy được như sau. Trong vùng II, hàm truyền hệ hở  $G_h(s)$  được thay thế gần đúng bằng (xem lại ví dụ 2.59):

$$G_h(s) \approx \frac{1}{T_c s(1 + T_1 s)} \quad \text{với} \quad T_c = \frac{1}{\omega_c}$$

Khi đó hệ kín sẽ có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{G_h(s)}{1 + G_h(s)} \approx \frac{1}{1 + T_c s + T_c T_1 s^2} = \frac{1}{1 + 2DTs + (Ts)^2}$$

$$\text{với} \quad T = \sqrt{T_c T_1} \quad \text{và} \quad 2D = \sqrt{\frac{T_c}{T_1}}$$

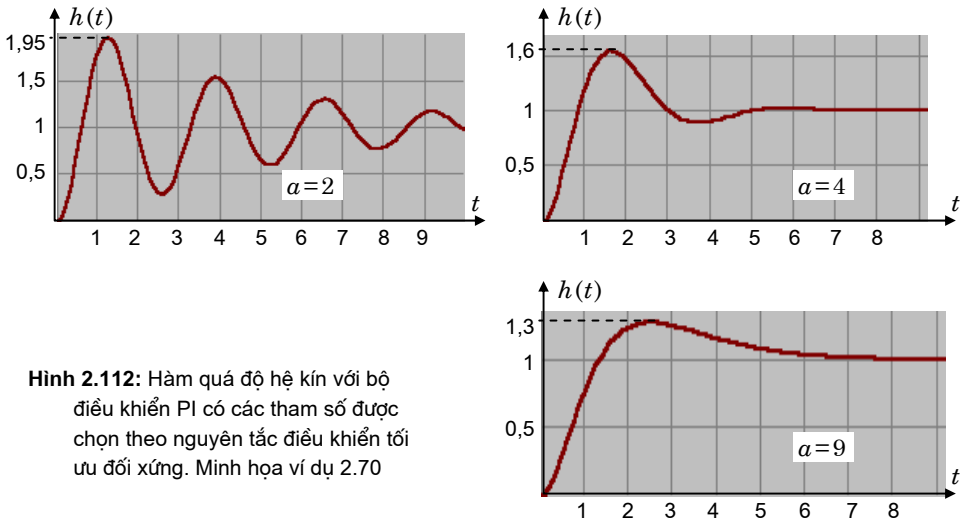
$$\Rightarrow \lg 2D = \frac{\lg T_c - \lg T_1}{2} = \frac{1}{4} \lg a \quad (\text{vì tính chất đối xứng của } \omega_c)$$

$$\Rightarrow D = \frac{\sqrt[4]{a}}{2} < 1 \quad \text{nếu} \quad 16 > a > 1$$

Vậy trong vùng II, hàm quá độ hệ kín có dạng dao động tắt dần khi  $16 > a > 1$ . Theo (2.99), độ quá điều chỉnh của hàm quá độ hệ kín sẽ là:

$$\Delta h = \exp\left(\frac{-\pi D}{\sqrt{1 - D^2}}\right) = \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{4 - \sqrt{a}}}\right) \quad (2.174)$$

Công thức (2.174) xác nhận điều khẳng định là  $\Delta h$  nghịch biến với  $16 > a > 1$ . Khi  $a > 16$  mô hình xấp xỉ không dao động, song vẫn có độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  phụ thuộc  $a$ , do đó khoảng cách  $a$  sẽ được lựa chọn từ yêu cầu chất lượng hệ kín về độ quá điều chỉnh.



**Hình 2.112:** Hàm quá độ hệ kín với bộ điều khiển PI có các tham số được chọn theo nguyên tắc điều khiển tối ưu đối xứng. Minh họa ví dụ 2.70

Tóm lại, nếu đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc nhất (2.166) thì bộ điều khiển tối ưu đối xứng sẽ là bộ điều khiển PI (2.167) với các tham số xác định như sau:

- Xác định  $a$  từ độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  cần có của hệ kín theo (2.174), hoặc tự chọn  $a > 1$  từ yêu cầu chất lượng đề ra. Giá trị  $a$  được chọn càng lớn, độ quá điều chỉnh càng nhỏ. Nếu  $a \leq 1$ , hệ kín sẽ không ổn định.
- Tính  $T_I$  theo (2.172), tức là  $T_I = aT_1$
- Tính  $k_p$  theo (2.173), tức là  $k_p = \frac{1}{kT_1\sqrt{a}}$

**Ví dụ 2.70:** Xác định tham số tối ưu đối xứng cho bộ điều khiển PI

Xét đối tượng tích phân-quán tính bậc nhất mô tả bởi

$$S(s) = \frac{2}{s(1+0,3s)}, \quad k=2, \quad T_1=0,3$$

Chọn bộ điều khiển PI để điều khiển theo nguyên tắc tối ưu đối xứng

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{k_p(1 + T_I s)}{T_I s}$$

ta sẽ có các tham số sau được chọn theo (2.172) và (2.173):

- Khi  $a=2$ :  $k_p=1,18$ ,  $T_I=0,6$
- Khi  $a=4$ :  $k_p=0,83$ ,  $T_I=1,2$
- Khi  $a=9$ :  $k_p=0,56$ ,  $T_I=2,7$

Hình 2.112 là đồ thị hàm quá độ hệ kín ứng với các tham số bộ điều khiển đã được chọn cho cả ba trường hợp nêu trên. □

## 2) Điều khiển đối tượng tích phân-quán tính bậc hai:

Để điều khiển đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc hai:

$$S(s) = \frac{k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad (2.175)$$

ta sử dụng bộ điều khiển PID

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = \frac{k_p(1 + T_A s)(1 + T_B s)}{T_I s} \quad (2.176)$$

có các tham số:

$$T_A + T_B = T_I, \quad T_A T_B = T_I T_D \quad \text{và} \quad T_A = T_1 \quad (2.177)$$

vì với nó, hệ hở cũng sẽ có hàm truyền dạng (2.165) và (2.168):

$$G_h(s) = R(s)S(s) = \frac{k_p k(1 + T_B s)}{T_I s^2(1 + T_2 s)} = \hat{k}_p \cdot \frac{k(1 + T_B s)}{T_B s^2(1 + T_2 s)} \quad \text{với} \quad \hat{k}_p = \frac{k_p T_B}{T_I} \quad (2.178)$$

Do hàm truyền (2.178) giống gần như hoàn toàn so với (2.168) của bài toán điều khiển đối tượng tích phân-quán tính bậc nhất (chỉ có một điểm khác biệt duy nhất là  $k_p$  được thay bởi  $\hat{k}_p$ ), nên ta cũng có ngay được các tham số tối ưu đối xứng của bộ điều khiển PID (2.176):

$$T_B = aT_2 \quad \text{và} \quad \hat{k}_p = \frac{1}{kT_2\sqrt{a}}$$

Suy ra, các tham số tối ưu đối xứng của bộ điều khiển PID (2.176) sẽ được chọn như sau:

- Chọn  $T_A = T_1$
- Xác định  $4 > a > 1$  từ độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  cần có của hệ kín, hoặc chọn  $a > 1$  từ yêu cầu chất lượng đề ra. Giá trị  $a$  được chọn càng lớn, độ quá điều chỉnh càng nhỏ. Để hệ kín không có dao động thì chọn  $a \geq 4$ . Hệ kín sẽ không ổn định với  $a \leq 1$ .
- Tính  $T_B = aT_2$ . Từ đó suy ra  $T_I = T_A + T_B$  và  $T_D = \frac{T_A T_B}{T_I}$
- Tính  $\hat{k}_p = \frac{1}{kT_2\sqrt{a}}$  rồi suy ra  $k_p = \frac{\hat{k}_p T_I}{T_B}$

**Ví dụ 2.71:** Thiết kế bộ điều khiển PID tối ưu đối xứng

Xét đối tượng tích phân-quán tính bậc hai

$$S(s) = \frac{2}{s(1+3s)(1+5s)}$$

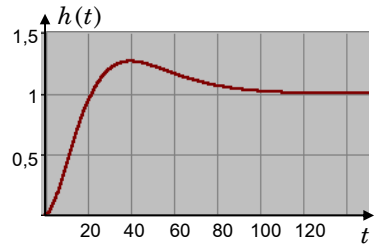
Từ

$$k=2 ; T_1=3 ; T_2=5$$

ta có với  $a=8$

$$k_p=0,04 ; T_I=43 ; T_D=2,8$$

cho bộ điều khiển PID. Hình 2.113 biểu diễn hàm quá độ hệ kín.



**Hình 2.113:** Minh họa cho ví dụ 2.71

3) Giảm độ quá điều chỉnh bằng bộ điều khiển tiên xử lý:

Quy tụ chung lại ở phương pháp thiết kế bộ điều khiển PID tối ưu đối xứng là từ hàm truyền  $S(s)$  của đối tượng, bộ điều khiển  $R(s)$  phải được chọn sao cho cùng với nó, hệ hở của hệ thống có hàm truyền

$$G_h(s) = R(s)S(s) = \hat{k}_p \frac{k(1+Ts)}{Ts^2(1+T_2s)}$$

trong đó

- Nếu đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc nhất (2.166) thì:

$$\hat{k}_p = k_p \quad \text{và} \quad T = T_I \quad \text{với} \quad k_p, T_I \text{ là hai tham số của bộ điều khiển PI (2.167).}$$

- Nếu đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc hai (2.175) thì:

$$\hat{k}_p = \frac{k_p T_B}{T_I} \text{ và } T = T_B \text{ với } k_p, T_B \text{ là hai tham số của bộ điều khiển PID (2.176).}$$

Ở cả hai trường hợp này, các tham số của bộ điều khiển tối ưu đối xứng luôn được chọn để hàm truyền hệ hở trở thành:

$$G_h(s) = \frac{1 + aTs}{a\sqrt{a}T^2s^2(1 + Ts)}$$

Tham số  $a$  được chọn từ yêu cầu chất lượng cần có của hệ kín. Cụ thể là:

- Hệ kín có dao động (tắt dần) khi  $16 > a > 1$ . Nếu  $a \geq 16$  hệ kín sẽ không có dao động.
- Hệ kín sẽ không ổn định với  $a \leq 1$ .
- Độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  của hệ kín và  $a$  tỷ lệ nghịch với nhau theo (2.174).
- Khi  $a$  được chọn càng lớn, vùng I sẽ càng hẹp làm cho miền tần số mà tại đó chất lượng hệ thống được đánh giá theo biên độ hàm đặc tính tần hệ kín  $|G(j\omega)| \approx 1$  càng thấp.

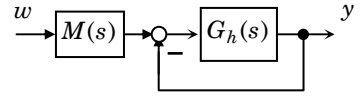
Vậy làm thế nào nâng cao được chất lượng hệ thống theo nghĩa mở rộng miền tần số mà ở đó có  $|G(j\omega)| \approx 1$  nhưng lại không làm tăng độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  của hệ kín?. Để trả lời ta hãy xác định hàm truyền hệ kín

$$G(s) = \frac{G_h(s)}{1 + G_h(s)} = \frac{1 + aTs}{1 + aTs + a\sqrt{a}T^2s^2 + a\sqrt{a}T^3s^3}$$

sẽ thấy nguyên nhân làm tăng độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  chính là thành phần vi phân có trong đa thức tử số của  $G(s)$ . Nhận xét này đưa đến suy nghĩ là để giảm độ quá điều chỉnh này ta nên nối hệ kín với khâu tiền xử lý:

$$M(s) = \frac{1}{1 + aTs}$$

để loại bỏ thành phần vi phân này ra khỏi đa thức tử số (hình 2.114).



**Hình 2.114:** Giảm độ quá điều chỉnh bằng bộ tiền xử lý.

Vấn đề còn lại là xác định tham số  $a$  để hệ mới với hàm truyền  $\hat{G}(s) = M(s)G(s)$  có dải tần số thấp thỏa mãn  $|\hat{G}(j\omega)| \approx 1$  là rộng nhất, giống như ở phương pháp tối ưu độ lớn. Để thực hiện được điều đó, ta đi từ:

$$|\hat{G}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + a\sqrt{a}T^2(\sqrt{a} - 2)\omega^2 + a^2\sqrt{a}T^4(\sqrt{a} - 2)\omega^4 + a^3T^6\omega^6}$$

và thấy, để có  $|\hat{G}(j\omega)| \approx 1$  trong miền tần số thấp có độ rộng lớn nhất thì:

$$\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

Cuối cùng, ta đi đến kết luận:

- Nếu đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc nhất (2.166) thì
  - a) Chọn bộ điều khiển PI (2.167) với  $k_p = \frac{1}{2kT_1}$ ,  $T_I = 4T_1$
  - b) Chọn bộ tiền xử lý  $M(s) = \frac{1}{1 + 4T_1s}$
- Nếu đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc hai (2.175) thì:
  - a) Chọn bộ điều khiển PID (2.176) với:  $T_I = T_1 + 4T_2$ ,  $T_D = \frac{4T_1T_2}{T_1 + 4T_2}$ ,  $k_p = \frac{T_I}{8kT_2^2}$
  - b) Chọn bộ tiền xử lý  $M(s) = \frac{1}{1 + 4T_2s}$

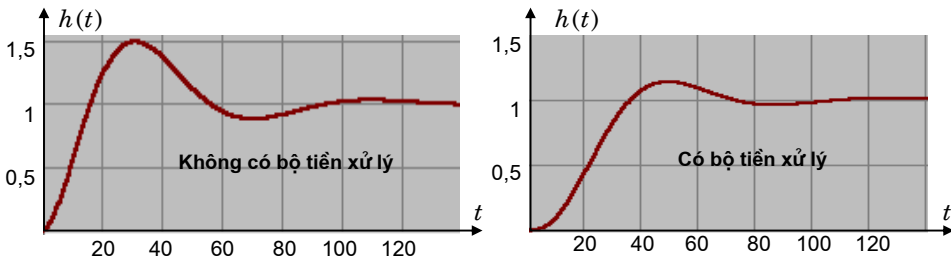
**Ví dụ 2.72:** Nâng cao chất lượng hệ thống điều khiển tối ưu đối xứng

Xét lại đối tượng đã cho trong ví dụ 2.71. Với  $a=4$  ta có các tham số tương ứng

$$T_I = 23, \quad T_D = 2,6, \quad k_p = 0,0125$$

cho bộ điều khiển PID. Hình 2.115 biểu diễn hàm quá độ  $h(t)$  của hệ kín cho hai trường hợp không có và có bộ điều khiển tiền xử lý

$$M(s) = \frac{1}{1 + 20s}$$



**Hình 2.115:** Minh họa ví dụ 2.72.

4) Khả năng ứng dụng cho đối tượng tích phân-quán tính bậc cao:

Với nội dung trình bày ở trên thì phương pháp chọn tham số tối ưu đối xứng cho bộ điều khiển PID chỉ dừng lại ở hai lớp đối tượng:

- Tích phân-quán tính bậc nhất với hàm truyền (2.166)
- Tích phân-quán tính bậc hai với hàm truyền (2.175)

Tuy nhiên, nó vẫn có thể áp dụng cho cả lớp đối tượng tích phân-quán tính bậc cao  $S(s)$  có hàm truyền

$$S(s) = \frac{k}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s) \cdots (1 + T_ns)} \quad (2.179)$$

nhờ *phương pháp tổng các hằng số thời gian nhỏ*, đã được áp dụng trong phương pháp tối ưu độ lớn, giúp chuyển hàm truyền (2.179) về một trong hai dạng cơ bản đã xét. Cụ thể là:

- Nếu tất cả các hằng số thời gian  $T_1, T_2, \dots, T_n$  của (2.179) là rất nhỏ thì nó sẽ được xấp xỉ về dạng tích phân–quán tính bậc nhất

$$S(s) \approx \frac{k}{s(1+Ts)}, \quad \text{trong đó } T = \sum_{i=1}^n T_i \quad (2.180)$$

- Nếu chỉ có một hằng số thời gian lớn vượt trội, chẳng hạn là  $T_1$ , và các hằng số thời gian còn lại  $T_2, T_3, \dots, T_n$  của (2.179) rất nhỏ, thì nó sẽ được xấp xỉ về dạng tích phân–quán tính bậc hai

$$S(s) \approx \frac{k}{s(1+T_1s)(1+Ts)}, \quad \text{trong đó } T = \sum_{i=2}^n T_i \quad (2.181)$$

Song một điều cần phải chú ý khi sử dụng phương pháp xấp xỉ hàm truyền nêu trên là sự xấp xỉ đó chỉ thỏa mãn về mặt biên độ (nên nó chủ yếu được áp dụng cho bộ điều khiển tối ưu độ lớn) chứ không xấp xỉ được góc pha, trong khi bộ điều khiển tối ưu đối xứng lại rất để ý đến góc pha  $\varphi_h(\omega_c)$  của hệ hở để đảm bảo tính ổn định cho hệ kín. Việc xấp xỉ các hằng số thời gian  $T_1, T_2, \dots, T_n$  cũng như  $T_2, T_3, \dots, T_n$  bởi  $T$  nhờ (2.180) hoặc (2.181) đã vô hình chung xấp xỉ quá thô sự thay đổi góc pha từ  $-n\frac{\pi}{2}$  thành  $-\frac{\pi}{2}$ .

Điều này rất dễ đưa đến sự vi phạm điều kiện về góc pha  $\varphi_h(\omega_c)$  và làm cho *hệ kín mất ổn định*.

### Chọn tham số PID tối ưu theo sai lệch bám

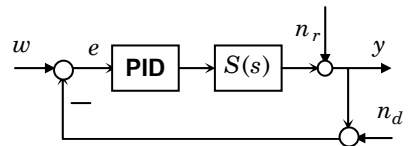
Xét hệ SISO, làm việc theo nguyên lý hồi tiếp, gồm đối tượng  $S(s)$  và bộ điều khiển PID (hoặc PI) như hình 2.116 mô tả. Bài toán có nhiệm vụ xác định các tham số của bộ điều khiển PI, gồm  $k_p, T_I$  trong công thức (2.167) hoặc  $k_p, T_I, T_D$  trong (2.176) sao cho tín hiệu ra  $y(t)$  "bám" được vào tín hiệu lệnh  $w(t)$  một cách tốt nhất theo nghĩa

$$Q = \|w(t) - y(t)\|_2 = \|e(t)\|_2 \rightarrow \min!$$

Gọi  $E(s)$  là ảnh Laplace của  $e(t)$  với cấu trúc (2.125), tức là

$$E(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

Khi đó, rõ ràng tất cả các tham số  $b_i, a_k$  với  $i=0,1,\dots, m, k=0,1,\dots, n$  của  $E(s)$  là phụ thuộc vào bộ tham số  $k_p, T_I, T_D$  cần xác định của bộ điều khiển.



**Hình 2.116:** Nhiệm vụ bài toán xác định tham số tối ưu cho bộ điều khiển PID.

Sử dụng phương pháp tìm  $Q$  theo Krasowski hoặc theo bảng 2.4 đã được trình bày ở mục 2.3.3, ta đến được  $Q^2$  dưới dạng hàm tường minh:

$$Q^2 = f(k_p, T_I, T_D) = f(\underline{p}), \quad \text{trong đó} \quad \underline{p} = (k_p, T_I, T_D)^T$$

và bài toán thiết kế bộ điều khiển PID tối ưu trở thành:

$$\underline{p}^* = \arg \min_{\underline{p}} f(\underline{p}) \quad (2.182)$$

Các phương pháp số tìm nghiệm bài toán tối ưu tĩnh (2.182), chẳng hạn như phương pháp gradient, phương pháp Gauss–Seidel, phương pháp Newton–Raphson ..., bạn đọc có thể tìm thấy trong tài liệu [15] và [16], hoặc phương pháp giải tích, như xác định điểm cực trị của  $f(\underline{p})$  bằng cách giải hệ phương trình  $\frac{\partial f}{\partial \underline{p}} = \underline{0}^T$ , trong đó  $\frac{\partial f}{\partial \underline{p}}$  là ký hiệu chỉ đạo hàm Jacobi của  $f(\underline{p})$  và  $\underline{0}^T$  là vector hàng có tất cả các phần tử bằng 0.

**Ví dụ 2.73:** Xác định tham số tối ưu cho bộ điều khiển PI

Cho hệ kín gồm đối tượng quán tính bậc 3 và bộ điều khiển PI (hình 2.117). Hãy xác định các tham số  $k_p$  và  $T_I$  của bộ điều khiển PI theo nguyên lý tối ưu (2.182) ứng với kích thích  $w(t)=1(t)$ . Hệ hở có hàm truyền:

$$G_h(s) = \frac{k_p k (1 + T_I s)}{s T_I (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}$$

Chọn  $T_I = T_3$  để bù một hằng số thời gian của đối tượng. Khi đó  $G_h(s)$  trở thành:

$$G_h(s) = \frac{\hat{k}}{s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3} \quad \text{với} \quad \hat{k} = \frac{k_p k}{T_I}$$

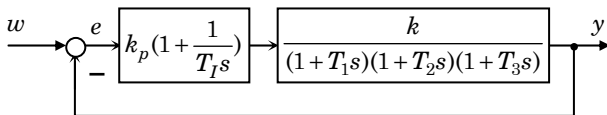
$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G_h(s)} \frac{1}{s} = \frac{1 + (T_1 + T_2)s + T_1 T_2 s^2}{\hat{k} + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3}$$

Sử dụng bảng tra 2.4 với

$$b_0 = 1, \quad b_1 = (T_1 + T_2), \quad b_2 = T_1 T_2, \\ a_0 = \hat{k}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = (T_1 + T_2) \quad \text{và} \quad a_3 = T_1 T_2$$

ta được

$$Q^2 = \frac{(A^2 - B)\hat{k} + A}{2(A - B\hat{k})\hat{k}} \quad \text{với} \quad A = T_1 + T_2, \quad B = T_1 T_2$$



Hình 2.117: Minh họa ví dụ 2.73



Sử dụng phương pháp giải tích để tìm  $\hat{k}$  ta được:

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{k}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{k}^2 + \frac{2A}{A^2 - B} \hat{k} - \frac{A^2}{(A^2 - B)B} = 0$$

Suy ra (chỉ lấy nghiệm  $\hat{k}$  dương)

$$\hat{k} = \frac{A}{A^2 - B} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{A^2 - B}{B}} \right] = \frac{T_1 + T_2}{(T_1 + T_2)\sqrt{T_1 T_2} + T_1 T_2}$$

□

## 2.4.2 Phương pháp điều khiển cân bằng mô hình

Trong nhiều tài liệu, ví dụ như [10] và [12], phương pháp thiết kế bộ điều khiển cân bằng mô hình (*model matching*) còn được gọi là phương pháp điều khiển bù.

### Thiết kế bộ điều khiển cân bằng hàm truyền của hệ hở (loop shaping)

Như đã lý luận ở phần chọn tham số tối ưu đối xứng cho bộ điều khiển PID, một hệ kín (hình 2.118a) có chất lượng tốt là hệ có hàm truyền hệ hở dạng:

$$G_h(s) = R(s)S(s) = \frac{k_h(1 + T_1 s)}{(Ts)^2(1 + sT_2)} \quad (2.183)$$

với (hình 2.118b)

- $T_1 > T_2$
- Tần số cắt  $\omega_c \approx \frac{T}{\sqrt{k_h}}$  nằm ở giữa hai điểm tần số gãy  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$  trong biểu đồ Bode (xung quanh tần số cắt  $\omega_c$  có độ nghiêng  $-20\text{dB/dec}$ ).
- Khoảng cách  $a$  giữa hai điểm tần số gãy  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  là đủ lớn.

Như vậy, nếu như đường đồ thị Bode mong muốn  $L_h(\omega)$  của hàm truyền hệ hở là đã có (được gọi là *desired shape*—*đường mong muốn*), cũng như hàm truyền của đối tượng  $S(s)$  là đã cho, tức là ta cũng đã có đồ thị Bode  $L_S(\omega)$ , thì từ công thức (2.183) ta có ngay được đồ thị Bode  $L_R(\omega)$  của bộ điều khiển  $R(s)$  bằng việc trừ hai đồ thị

$$L_R(\omega) = L_h(\omega) - L_S(\omega) \quad (2.184)$$

Hiển nhiên khi đã có  $L_R(\omega)$  ta cũng có được hàm truyền  $R(s)$  của bộ điều khiển.

Do bộ điều khiển phản hồi  $R(s)$  trên được thiết kế từ đường đồ thị mong muốn  $L_h(\omega)$  cho hệ hở (*desired shape*), nên nó còn có tên gọi là *bộ điều khiển loop shaping*, mà ta tạm dịch là *bộ điều khiển cân bằng hàm truyền hệ hở*.

### Ví dụ 2.74: Thiết kế bộ điều khiển bù hàm truyền hệ hở (loop shaping)

Xét đối tượng có hàm truyền

$$\hat{S}(s) = S(s) = \frac{(1+T_3s)(1+T_4s)(1+T_5s)}{(T_1s)^2(1+T_2s)}, \quad \text{trong đó } T_1 > T_3 > T_4 > T_5 > T_2$$

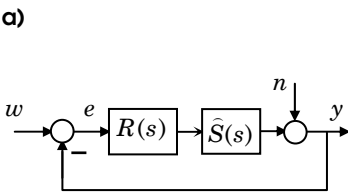
Đồ thị biên độ Bode  $L_S(\omega)$  của đối tượng cho trong hình 2.118b). Giả sử từ yêu cầu chất lượng cần có cho hệ kín ta có  $L_h(\omega)$  của hệ hở với điểm tần số cắt  $\omega_s$  là điểm giữa của hai tần số gẫy  $\omega_3 = \frac{1}{T_3}$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ .

Thực hiện phép trừ (2.184) ngay trên đồ thị Bode ta được  $L_R(\omega)$  cho bộ điều khiển. Với đồ thị  $L_R(\omega)$  này thì:

$$R(s) = \frac{k}{(1+T_4s)(1+T_5s)}, \quad T_4 = \frac{1}{\omega_4}, \quad T_5 = \frac{1}{\omega_5}.$$

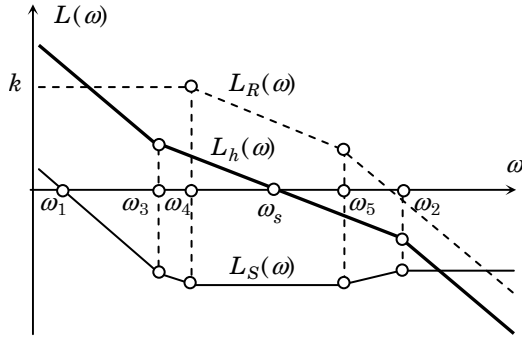
□

a)



Hình 2.118: Thiết kế bộ điều khiển cân bằng hàm truyền của hệ hở.

b)



Mở rộng hơn, phương pháp thiết kế loop shaping trên còn chủ yếu được áp dụng cho những bài toán điều khiển bền vững khi mà hệ bị tác động bởi nhiễu  $n(t)$  và mô hình hàm truyền  $S(s)$  của đối tượng có sai lệch  $\Delta S$  bất định theo kiểu bù cộng (hình 2.118a), tức là hàm truyền thực sự của đối tượng lúc này phải là:

$$\hat{S}(s) = S(s) + \Delta S$$

Tại mục 2.3.5 trước đây ta đã được biết sự phụ thuộc của chất lượng hệ kín vào nhiễu và sai lệch mô hình  $\Delta S$  được đánh giá bởi hàm nhạy:

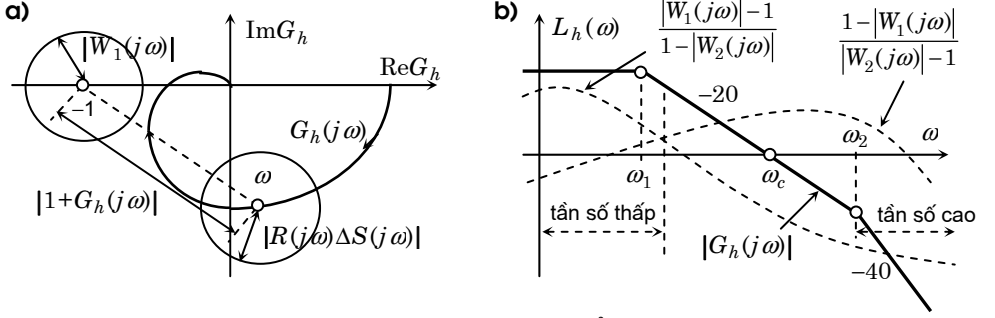
$$K(s) = \frac{1}{1+R(s)S(s)} = \frac{1}{1+G_h(s)} \quad \text{với } G_h(s) = R(s)S(s)$$

theo nghĩa khi  $K(s)$  có giá trị càng nhỏ, hệ càng ít bị ảnh hưởng bởi nhiễu và bởi  $\Delta S$ . Nếu viết lại hàm nhạy này dưới dạng ước lượng:

$$|K(j\omega)| \leq \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \Leftrightarrow |W_1(j\omega)| \leq |1+G_h(j\omega)| \quad (2.185)$$

thì  $|W_1(j\omega)|$  chính là đại lượng đo tính bền vững của hệ. Giá trị  $|W_1(j\omega)|$  càng lớn, khả năng bền vững của hệ với tác động của nhiễu  $n(t)$  và sai lệch mô hình  $\Delta S$  của đối tượng

càng cao. Hình 2.119a) minh họa điều kiện bền vững (2.185) này. Nó chỉ rằng hệ sẽ có độ đo bền vững  $W_1(j\omega)$  nếu tại mọi điểm  $0 \leq \omega \leq \infty$  cố định cho trước, điểm  $G_h(j\omega)$  của đồ thị biên pha của hàm truyền hệ hở  $G_h(s)$  luôn nằm ngoài đường tròn có tâm là  $-1+j0$  và bán kính là  $|W_1(j\omega)|$ . Độ đo bền vững  $|W_1(j\omega)|$  là hàm phụ thuộc  $\omega$  và từ hình minh họa 2.119a) người ta hoàn toàn có thể giả thiết nó là hàm đơn điệu giảm theo  $\omega$ .



**Hình 2.119:** Xây dựng đồ thị Bode mong muốn cho hệ vừa ổn định bền vững, vừa có độ nhạy nhỏ

Tiếp tục, nếu ta ước lượng sai lệch tương đối  $\frac{\Delta S}{S(s)}$  của mô hình đối tượng là:

$$\left| \frac{\Delta S(j\omega)}{S(j\omega)} \right| \leq |W_2(j\omega)|, \forall \omega \quad (2.186)$$

thì với ký hiệu hàm bù nhạy:

$$T(s) = \frac{G_h(s)}{1 + G_h(s)} \Leftrightarrow K(s) + T(s) = 1$$

và

$$\begin{aligned} \hat{G}_h(j\omega) &= R(j\omega)\hat{S}(j\omega) = R(j\omega)[S(j\omega) + \Delta S(j\omega)] \\ &= G_h(j\omega) + R(j\omega)\Delta S(j\omega) \end{aligned}$$

sẽ thấy, đủ để đường đồ thị biên pha  $\hat{G}(j\omega)$  không bao điểm  $-1+j0$  (hình 2.119a), cũng là điều kiện để hệ kín ổn định bền vững, nếu có bất đẳng thức sau:

$$1 \geq |W_2(j\omega)T(j\omega)| = \left| W_2(j\omega) \frac{G_h(j\omega)}{1 + G_h(j\omega)} \right| \geq \left| \frac{R(j\omega)\Delta S(j\omega)}{1 + G_h(j\omega)} \right|, \forall \omega \quad (2.187)$$

Ngoài ra, vì sai lệch tuyệt đối  $\Delta S$  luôn bị chặn theo  $\omega$  nên hoàn toàn ta có thể giả thiết hàm ước lượng sai lệch tương đối  $|W_2(j\omega)|$  trong (2.186) là đơn điệu tăng theo  $\omega$ .

Như vậy, sẽ đủ để hệ kín vừa có độ nhạy nhỏ, vừa có tính ổn định bền vững, nếu:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega)G_h(j\omega)| &= |W_1(j\omega)| + |R(j\omega)\Delta S(j\omega)| \leq |1 + G_h(j\omega)| \\ &\leq 1 + |G_h(j\omega)| \end{aligned} \quad (2.188)$$

vì khi đó ta cũng sẽ có cả hai bất đẳng thức (2.185) và (2.187). Hơn nữa, nếu ta chọn hai hàm  $|W_1(j\omega)|$  đơn điệu giảm theo  $\omega$  và  $|W_2(j\omega)|$  đơn điệu tăng theo  $\omega$  thỏa mãn thêm:

$$|W_2| < 1 < |W_1| \text{ ở tần số thấp và } |W_1| < 1 < |W_2| \text{ ở tần số cao} \quad (2.189)$$

thì từ điều kiện (2.188) sẽ còn có được:

$$|G_h(j\omega)| > \frac{|W_1(j\omega)| - 1}{1 - |W_2(j\omega)|} \text{ ở tần số thấp và } |G_h(j\omega)| < \frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)| - 1} \text{ ở tần số cao}$$

Suy ra, bộ điều khiển loop shaping bền vững được thiết kế qua các bước như sau:

- 1) Từ yêu cầu bền vững của hệ, xác định hàm  $|W_1(j\omega)|$  đơn điệu giảm theo  $\omega$  để đo độ nhạy và  $|W_2(j\omega)|$  đơn điệu tăng theo  $\omega$  để đo sai lệch mô hình, thỏa mãn (2.189).
- 2) Xây dựng đường đồ thị Bode của  $\frac{|W_1(j\omega)| - 1}{1 - |W_2(j\omega)|}$  và của  $\frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)| - 1}$
- 3) Xác định đường đồ thị Bode mẫu (*desired shape*) cho hàm truyền hệ hở  $|G_h(j\omega)|$  theo quy tắc (hình 2.119b):

- a) Nằm trên đường  $\frac{|W_1(j\omega)| - 1}{1 - |W_2(j\omega)|}$  ở tần số thấp và nằm dưới đường  $\frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)| - 1}$  ở tần số cao.
- b) Ở dải tần số cao, đường đồ thị Bode của  $|G_h(j\omega)|$  nên có độ dốc càng nhỏ càng tốt, thường là nhỏ hơn  $-40\text{db/dec}$ . Ở dải tần số trung bình, đường đồ thị Bode của  $|G_h(j\omega)|$  phải chứa điểm tần số  $\omega_c$  cắt trục hoành, tức là tại đó có  $|G_h(j\omega_c)| = 1$ . Xung quanh điểm cắt này, đồ thị Bode của  $|G_h(j\omega)|$  cần có độ dốc âm và không nhỏ hơn  $-20\text{db/dec}$ .
- 4) Xác định  $G_h(s)$  từ đồ thị Bode  $|G_h(j\omega)|$  và với nó là bộ điều khiển  $R(s) = \frac{G_h(s)}{S(s)}$

### Thiết kế bộ điều khiển cân bằng hàm truyền của hệ kín

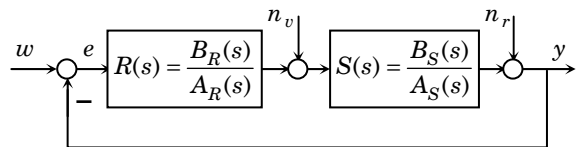
Phương pháp này có nhiệm vụ xác định bộ điều khiển  $R(s)$  trên cơ sở đã biết trước hàm truyền  $S(s)$  của đối tượng và hàm truyền cần có  $G(s)$  của hệ thống kín (hình 2.120), trong đó hàm truyền  $G(s)$  của hệ kín được giả thiết là đã có từ những yêu cầu chất lượng đề ra của bài toán thiết kế bộ điều khiển.

Nếu gọi

$$S(s) = \frac{B_S(s)}{A_S(s)}$$

và  $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$

thì từ



**Hình 2.120:** Minh họa phương pháp cân bằng hàm truyền của hệ kín.

$$G(s) = \frac{S(s)R(s)}{1 + S(s)R(s)}$$

ta sẽ có hàm truyền của bộ điều khiển

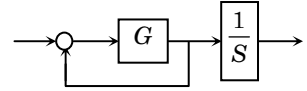
$$R(s) = \frac{G(s)}{S(s) - S(s)G(s)} = \frac{1}{S(s)} \cdot \frac{G(s)}{1 - G(s)} = \frac{A_S(s)}{B_S(s)} \cdot \frac{B(s)}{A(s) - B(s)} \quad (2.190)$$

Công thức (2.190) cho thấy bộ điều khiển  $R(s)$  chính là sự mắc nối tiếp của khâu nghịch đảo đối tượng  $\frac{1}{S(s)}$  với khâu hồi tiếp phản hồi dương có hàm truyền hệ hở là

$G(s)$  – hình 2.121. Do đó điều kiện đầu tiên để có được bộ điều khiển ổn định là tất cả các điểm không của  $S(s)$  phải nằm bên trái trục ảo.

Mặt khác, từ mong muốn rằng hệ kín ổn định nội, tức là tất cả các hàm truyền tính từ những tín hiệu tác động vào hệ, gồm có tín hiệu đặt trước  $w(t)$ , tín hiệu nhiễu  $n_v(t)$ ,  $n_r(t)$ , cho tới các tín hiệu ra, gồm có  $e(t)$ ,  $y(t)$

- Từ  $w(t)$  tới  $y(t)$  là  $G(s)$
- Từ  $n_r(t)$  tới  $y(t)$  là  $\frac{1}{1 + SR}$
- Từ  $n_v(t)$  tới  $y(t)$  là  $\frac{S}{1 + SR}$
- Từ  $w(t)$  tới  $e(t)$  và từ  $n_r(t)$  tới  $y(t)$  là  $\frac{1}{1 + SR}$



**Hình 2.121:** Cấu trúc bộ điều khiển cân bằng hệ kín.

phải là những hàm bên, thì đối tượng phải ổn định. Kết hợp với kết quả trước ta có được điều kiện đầu tiên:

- 1) Muốn có được bộ điều khiển  $R(s)$  ổn định và cùng với nó hệ kín ổn định nội thì đối tượng  $S(s)$  phải là một khâu pha cực tiểu.

Tiếp tục, nếu  $S(s)$  là pha cực tiểu thì từ sơ đồ cấu trúc ở hình 2.121 cho bộ điều khiển, phần hồi tiếp phản hồi dương với  $G(s)$  có hàm truyền  $\frac{G}{1 - G}$  phải ổn định thì bộ điều khiển mới ổn định. Bởi vậy:

- 2) Để bộ điều khiển  $R(s)$  ổn định khi đối tượng là pha cực tiểu thì  $\frac{G}{1 - G}$  phải là hàm bên, hay hiệu  $A(s) - B(s)$  phải là đa thức Hurwitz.

Muốn sử dụng bộ điều khiển  $R(s)$  xác định theo công thức (2.190) thì nó phải tích hợp được trên các thiết bị thực tế, nói cách khác  $R(s)$  phải là hàm hợp thức. Điều này dẫn đến bậc của tích  $A_S(s)B(s)$  không được lớn hơn bậc của  $B_S(s)[A(s) - B(s)]$ . Nếu gọi  $n_{A_S}$  là bậc của  $A_S(s)$ ,  $n_B$  là bậc của  $B(s)$ ,  $n_{B_S}$  là bậc của  $B_S(s)$ ,  $n_A$  là bậc của  $A(s)$  thì do  $n_A \geq n_B$  nên điều kiện trên được biểu diễn thành:

$$n_{A_S} + n_B \leq n_{B_S} + n_A \quad \Leftrightarrow \quad n_{A_S} - n_{B_S} \leq n_A - n_B$$

Suy ra

- 3) *Muốn tích hợp được bộ điều khiển cân bằng mô hình thì bậc tương đối của hệ kín không được nhỏ hơn bậc tương đối của đối tượng.*

Trong khi hai tính chất 1 và 2 là thứ yếu, chỉ có tác dụng để bộ điều khiển  $R(s)$  được ổn định thì tính chất thứ 3 có vai trò quyết định giúp cho người thiết kế, ngoài các chỉ tiêu chất lượng mong muốn của hệ, có thêm thông tin về bậc tương đối giúp xác định được đúng cấu trúc hàm truyền  $G(s)$  cần phải có. Ta xét một ví dụ minh họa:

**Ví dụ 2.75:** Thiết kế bộ điều khiển bù hàm truyền hệ kín

Cho đối tượng:

$$S(s) = \frac{0,5}{1 + 3s + 2s^2}$$

Do đối tượng có bậc tương đối là hai nên bậc tương đối của hàm truyền hệ kín là  $G(s)$  cũng phải ít nhất là hai. Cấu trúc  $G(s)$  đơn giản nhất có bậc tương đối bằng hai và làm cho hệ kín ổn định, không có sai lệch tĩnh khi được kích thích bởi  $1(t)$ , là:

$$G(s) = \frac{ab}{(s+a)(s+b)} \quad \text{với} \quad a, b > 0$$

Từ đây ta suy ra được theo (2.190):

$$R(s) = \frac{1 + 3s + 2s^2}{0,5} \cdot \frac{ab}{s^2 + (a+b)s} = \frac{2ab(1 + 3s + 2s^2)}{s[s + (a+b)]}$$

□

Kết quả của ví dụ 2.81 cho thấy bộ điều khiển  $R(s)$  có chứa thành phần tích phân và điều này là phù hợp với nội dung định lý 2.28 để hệ có sai lệch tĩnh bằng 0. Một cách tổng quát, nếu ta giả sử:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n}$$

thì để hệ có sai lệch tĩnh bằng 0, hàm  $G(s)$  phải có  $G(0)=1$  và do đó  $a_0=b_0$ . Tức là đa thức  $A(s)-B(s)$  phải có một nghiệm 0. Nếu  $A_S(s)$  không có nghiệm 0, bộ điều khiển  $R(s)$  xác định theo (2.190) sẽ có điểm cực là gốc tọa độ. Ngược lại nếu  $A_S(s)$  có nghiệm 0, tức là đối tượng đã có thành phần tích phân, thì nghiệm 0 đó được giản ước với nghiệm 0 của  $A(s)-B(s)$  làm cho  $R(s)$  không còn chứa thành phần tích phân. Vậy:

- 4) *Để hệ kín có sai lệch tĩnh bằng 0 thì bộ điều khiển (2.190) thiết kế theo phương pháp cân bằng mô hình phải chứa thành phần tích phân nếu đối tượng không có thành phần đó. Ngược lại khi đối tượng đã có thành phần tích phân trong nó thì bộ điều khiển sẽ không cần có thành phần này.*

## Điều khiển theo nguyên lý mô hình nội (IMC)

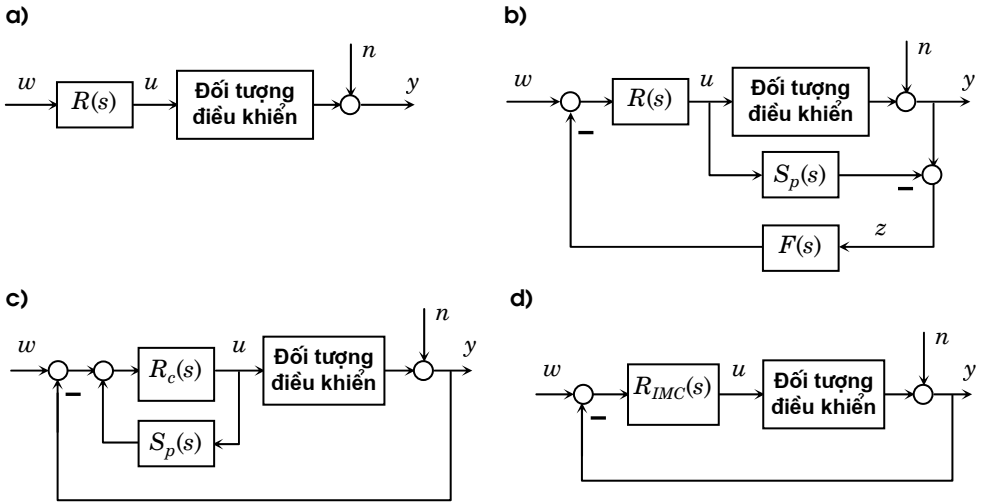
Xét một đối tượng điều khiển tuyến tính như ở trong hình 2.122a). Giả thiết rằng đối tượng đó mô tả được bởi hàm truyền  $S_p(s)$ . Hiển nhiên rằng nếu sử dụng bộ điều khiển cân bằng mô hình, mô tả bởi:

$$R(s) = \frac{1}{S_p(s)} \quad (2.191)$$

thì hệ điều khiển hở trong hình 2.122a) sẽ có hàm truyền:

$$G(s) = 1 \Leftrightarrow y(t) = w(t), \forall t \geq 0$$

đảm bảo những chất lượng cơ bản mong muốn như ổn định, sai lệch tĩnh bằng 0 .... Tuy nhiên, vì nhiều lý do, bộ điều khiển  $R(s)$  là không thể thực thi cũng như không sử dụng được, chẳng hạn như vì nó là không nhân quả, hệ bị nhiễu  $n(t)$  tác động thêm ở đầu ra hay mô hình hàm truyền  $S_p(s)$  của đối tượng là không chính xác.



Hình 2.122: Cấu trúc điều khiển theo nguyên lý mô hình nội (IMC).

Từ những lý do thực tế nêu trên, người ta đành phải chuyển sang một cấu trúc điều khiển khác có khả năng thực thi hơn, mô tả ở hình 2.122b). Cấu trúc điều khiển này có tên gọi là *cấu trúc điều khiển mô hình nội (internal model control – IMC)*. Trong cấu trúc điều khiển này người ta vẫn sử dụng mô hình hàm truyền xấp xỉ của đối tượng là  $S_p(s)$ . Nếu ký hiệu  $S(s)$  là mô hình chính xác của nó, cũng như bộ lọc các tín hiệu nhiễu tần số cao là  $F(s)$ , thì có thể thấy ngay được rằng với cấu trúc điều khiển IMC ở hình 2.122b), quan hệ vào-ra của hệ kín sẽ là:

$$\begin{aligned}
Y &= N + SU = N + SR(W - FZ) = N + SR[W - F(Y - S_p U)] \\
&= N + SR \left[ W - F \left( Y - S_p \frac{Y - N}{S} \right) \right] \\
&= \frac{R(s)S(s)W(s) + [1 - R(s)S_p(s)F(s)]N(s)}{1 + [S(s) - S_p(s)]R(s)F(s)}
\end{aligned}$$

trong đó  $W=W(s)$ ,  $Y=Y(s)$ ,  $N=N(s)$ ,  $Z=Z(s)$  lần lượt là ký hiệu ảnh Laplace của các tín hiệu  $w(t)$ ,  $y(t)$ ,  $n(t)$  và  $z(t)$ . Do đó, trong trường hợp lý tưởng  $n(t)=0$  và  $S_p(s)=S(s)$  ta vẫn sẽ có với mọi bộ lọc  $F(s)$ :

$$y(t)=w(t), \forall t \geq 0 \quad \text{khi} \quad R(s) = \frac{1}{S(s)} = \frac{1}{S_p(s)}$$

giống như ở (2.191).

Tiếp tục, nếu hệ có các tín hiệu đặt  $w(t)$  chỉ làm việc ở dải tần số thấp thì khi sử dụng bộ lọc tần số cao:

$$F(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^m} \quad \text{với } T \text{ hằng số thời gian và } m \text{ là bậc của bộ lọc} \quad (2.192)$$

ta có thể ghép chung bộ điều khiển  $R(s)$  xác định theo (2.191) và bộ lọc  $F(s)$  lại với nhau thành (hình 2.122c):

$$R_c(s) = R(s)F(s)$$

Suy ra, bộ điều khiển mô hình nội là (hình 2.122d):

$$R_{IMC}(s) = \frac{R_c(s)}{1 - R_c(s)S_p(s)} = \frac{F(s)R(s)}{1 - F(s)R(s)S_p(s)} \quad (2.193)$$

Tóm lại, bộ điều khiển IMC với hàm truyền  $R_{IMC}(s)$  trong sơ đồ cấu trúc ở hình 2.122d) có nhiều tần số cao  $n(t)$  tác động ở đầu ra, được thiết kế theo các bước như sau:

- 1) Xác định hàm truyền  $S_p(s)$  của đối tượng điều khiển.
- 2) Xác định bộ điều khiển  $R(s)$  theo công thức nghịch đảo (2.191). Trong trường hợp không nghịch đảo được, người ta có thể viết tách  $S_p(s)$  thành hai phần:

$$S_p(s) = S_p^+(s)S_p^-(s)$$

với  $S_p^+(s)$  là thành phần nghịch đảo được,  $S_p^-(s)$  là thành phần không nghịch đảo được thỏa mãn  $|S_p^-(j\omega)| = 1$ ,  $\forall \omega$ , chẳng hạn như thành phần trễ. Khi đó (2.191) sẽ được thay bởi:

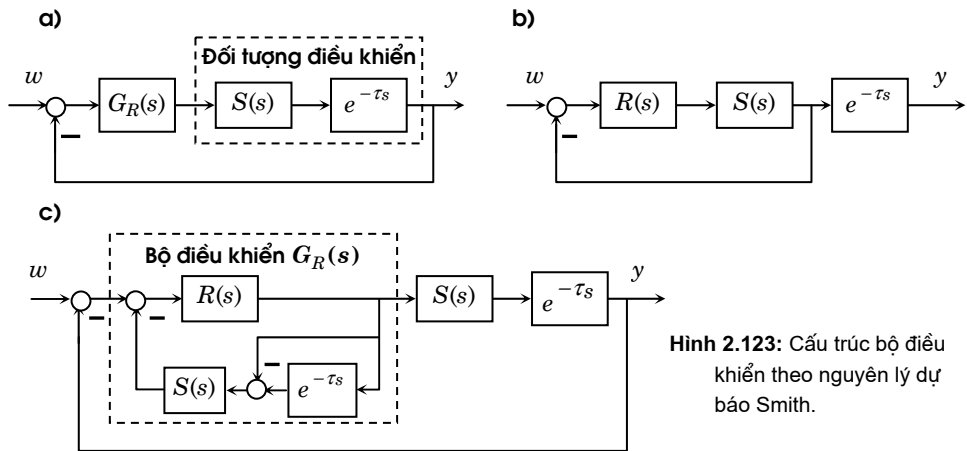
$$R(s) = \frac{1}{S_p^+(s)}$$



- 3) Chọn bộ lọc (2.192) với hằng số thời gian  $T$  thích hợp (theo tần số tín hiệu được lọc) và bậc  $m$  sao cho bộ điều khiển  $R_{IMC}(s)$  thu được sau này theo (2.193) là nhân quả (causal). **Chú ý:** Bậc  $m$  càng lớn, tín hiệu nhiễu sẽ được lọc càng tốt về mặt biên độ, song sai lệch pha ở chế độ xác lập khi tín hiệu vào  $w(t)$  có dạng điều hòa sẽ càng cao.
- 4) Xác định bộ điều khiển mô hình nội  $R_{IMC}(s)$  theo (2.193).

### Thiết kế bộ điều khiển dự báo Smith cho đối tượng có trễ

Phương pháp cân bằng mô hình nói riêng và những phương pháp thiết kế bộ điều khiển đã được giới thiệu trên đây nói chung đều có giả thiết rằng đối tượng không có thành phần trễ  $e^{-\tau s}$ . Trong khi ở các phương pháp sử dụng bộ PID trực tiếp (xác định tham số PID theo Ziegler–Nichols, theo tổng  $T$  của Kuhn, ...) hay thiết kế theo tối ưu độ lớn, ta có thể thay xấp xỉ thành phần trễ đó bằng khâu quán tính bậc cao (2.105), hoặc theo công thức Padé (2.106) thì với phương pháp tối ưu đối xứng hoặc cân bằng mô hình là không thể được. Nó thường đưa đến hàm truyền đối tượng có bậc quá cao làm cho mô hình xấp xỉ có sai lệch góc pha lớn hoặc dẫn đến trường hợp không tích hợp được bộ điều khiển do vi phạm tính nhân quả.



**Hình 2.123:** Cấu trúc bộ điều khiển theo nguyên lý dự báo Smith.

Để vẫn sử dụng được các phương pháp thiết kế đã giới thiệu cho những đối tượng có thành phần trễ  $e^{-\tau s}$ , Smith đã đưa ra nguyên tắc dự báo (*Smith-predictor*) khá đơn giản song lại có một ý nghĩa ứng dụng lớn.

Nguyên tắc dự báo Smith như sau. Để thiết kế bộ điều khiển  $G_R(s)$  cho đối tượng

$$G_S(s) = e^{-\tau s} S(s)$$

(hình 2.123a), Smith đề nghị thiết kế bộ điều khiển  $R(s)$  riêng cho đối tượng  $S(s)$  không có thành phần trễ (hình 2.123b). Việc thiết kế  $R(s)$  được thực hiện một cách đơn giản theo những phương pháp phổ thông (mục 2.4.1, 2.4.2 trước đây và 2.4.3, 2.4.4 sau đây).

Do hàm truyền  $G(s)$  ở hình 2.123a) và  $R(s)$  ở hình 2.123b) có dạng

$$G(s) = \frac{G_S G_R}{1 + G_S G_R} = \frac{G_R S e^{-\tau s}}{1 + G_R S e^{-\tau s}} = \frac{R S}{1 + R S} e^{-\tau s}$$

nên giữa  $R(s)$  đã tìm được và  $G_R(s)$  phải đi tìm có mối quan hệ

$$G_R(s) = \frac{R}{1 + R S (1 - e^{-\tau s})}$$

Mối quan hệ trên được thể hiện trong hình 2.123c). Như vậy công việc thiết kế bộ điều khiển dự báo Smith cho đối tượng có trễ:

$$G_S(s) = e^{-\tau s} S(s)$$

sẽ gồm các bước sau:

- Thiết kế bộ điều khiển  $R(s)$  cho riêng phần  $S(s)$  của đối tượng theo các phương pháp đã biết (ví dụ theo tối ưu đối xứng hay cân bằng mô hình).
- Xây dựng bộ điều khiển

$$G_R(s) = \frac{R}{1 + R S (1 - e^{-\tau s})}$$

với cấu trúc cho trong hình 2.123c).

**Chú ý** rằng do bộ điều khiển  $G_R(s)$  tìm được có chứa mô hình đối tượng ở mạch hồi tiếp nên nó khá nhạy cảm với những sai lệch mô hình đối tượng. Bởi vậy yêu cầu sử dụng được một cách có hiệu quả *phương pháp dự báo Smith* là hàm truyền của đối tượng phải đủ chính xác.

### 2.4.3 Thiết kế bộ điều khiển theo mô hình mẫu

Xét bài toán thiết kế hai bộ điều khiển:

- Tiên xử lý  $T(s) = \frac{C(s)}{E(s)}$
- Phản hồi đầu ra  $R(s) = \frac{D(s)}{E(s)}$

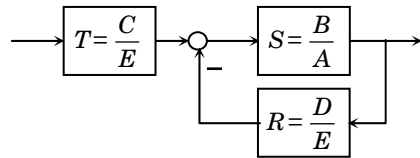
để điều khiển đối tượng có hàm truyền

$$S(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

cho trước, sao cho hệ kín (hình 2.124) có được hàm truyền mẫu mong muốn

$$G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)}$$

trong đó  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $C(s)$ ,  $D(s)$ ,  $E(s)$  là các đa thức và  $A(s)$ ,  $B(s)$  được giả thiết là nguyên tố cùng nhau.



**Hình 2.124:** Bài toán thiết kế bộ điều khiển theo mô hình mẫu.

Như vậy nhiệm vụ của bài toán thiết kế này là phải tìm ba đa thức  $C$ ,  $D$ ,  $E$  thỏa mãn phương trình:

$$G(s) = \frac{TS}{1+RS} = \frac{BC}{AE+BD} = G_m(s) = \frac{B_m}{A_m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{AE+BD} = \frac{B_m}{A_m} \quad (2.194)$$

từ bốn đa thức đã cho là  $A$ ,  $B$ ,  $A_m$  và  $B_m$ . Vì các hàm truyền đều hợp thức nên để có được (2.194) thì trước hết phải có:

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B \geq 0 \quad (2.195)$$

trong đó  $\deg$  là ký hiệu chỉ bậc của đa thức (viết tắt của degree).

Vì là mô hình mẫu, có bậc cực tiểu, nên hai đa thức  $B_m$ ,  $A_m$  của hàm truyền  $G_m(s)$  phải nguyên tố cùng nhau. Bởi vậy, theo (2.194), nếu như  $BC$  và  $AE+BD$  không nguyên tố cùng nhau, thì chúng phải có chung một đa thức thừa số  $F$ :

$$BC = FB_m \quad \text{và} \quad AE + BD = FA_m \quad (2.196)$$

Nhìn vào (2.196) thì rõ ràng một nghiệm  $s_k$  nào đó của  $F(s)$  cũng phải là nghiệm của  $B(s)$  hoặc của  $C(s)$ . Nếu mong muốn  $F(s)$  là đa thức Hurwitz, chứa tất cả các nghiệm nằm bên trái trục ảo của  $B(s)$ , thì khi phân tích  $B(s)$  thành

$$B = B^- B^+ \quad (2.197)$$

với  $B^-$  là đa thức Hurwitz,  $B^+$  là đa thức phản Hurwitz (không có nghiệm nào nằm bên trái trục ảo), ta sẽ có

$$F = HB^- \quad \text{và} \quad B_m = B^+ \hat{B}_m$$

Ngoài ra, từ quan hệ (2.196) ta còn có thêm:

$$AE + BD = HB^- A_m$$

Suy ra đa thức  $E$  cũng phải chứa thừa số  $B^-$ , tức là

$$E = B^- \hat{E} \quad (2.198)$$

và như vậy thì

$$A \hat{E} + B^+ D = H A_m \quad (2.199)$$

$$C = H \hat{B}_m \quad (2.200)$$

Phương trình (2.199) có tên gọi là *phương trình Diophantine* với ba ẩn số là các đa thức  $\hat{E}$ ,  $D, H$  mà thực chất là một dạng tổng quát của *phương trình Euclid*

$$\begin{cases} AX + B^+ Y = H \\ AU + B^+ V = 0 \end{cases} \quad (2.201)$$

Hiển nhiên khi đã có các nghiệm  $X, Y, U, V, H$  của phương trình Euclid (2.201), ta cũng có luôn nghiệm  $\hat{E}$  và  $D$  cho phương trình Diophantine (2.199) như sau:

$$\begin{cases} \hat{E} = XA_m + UQ \\ D = YA_m + VQ \end{cases} \quad (2.202)$$

với  $Q$  là một đa thức bất kỳ. Như vậy phương trình Diophantine (2.199) có vô số nghiệm. Để được nghiệm với bậc thấp nhất, ta chọn

$$Q = -(YA_m) \operatorname{div} V \quad (2.203)$$

trong đó “div” là ký hiệu chỉ phép chia lấy phần nguyên của hai đa thức. Khi đó sẽ có

$$D = (YA_m) \bmod V$$

với “mod” là ký hiệu phép tính lấy phần dư.

Khi đã có nghiệm (2.202) của phương trình Diophantine (2.199), ta cũng có luôn hai bội điều khiển  $T(s)$ ,  $R(s)$  nhờ các công thức (2.198) và (2.200).

Như vậy vấn đề còn lại chỉ là tìm nghiệm phương trình Euclid (2.201).

### Thuật toán tìm nghiệm phương trình Euclid

Trong chương trình phổ thông ta đã được biết tới thuật toán Euclid nhằm xác định ước số chung lớn nhất của hai số nguyên  $a$  và  $b^+$ , ký hiệu là  $\text{USCLN}(a, b^+)$ . Đặc biệt thuật toán vừa là lời chứng minh, vừa là công cụ để xác định thêm hai số nguyên  $x$ ,  $y$  khác thỏa mãn:

$$ax + b^+y = \text{USCLN}(a, b^+) = h$$

Thuật toán Euclid bao gồm các bước sau đây:

- 1) Đặt  $r_0 = a$  và  $r_1 = b^+$
- 2) Đặt  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$  và  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$
- 3) Chia  $r_0$  cho  $r_1$  được thương  $q_1$  và số dư  $r_2$  tức là  $r_0 = r_1q_1 + r_2$
- 4) Thực hiện lần lượt các bước sau với  $k = 2, 3, \dots$ 
  - a) Nếu  $r_k = 0$  thì dừng với đáp số  $x = x_{k-1}$ ,  $y = y_{k-1}$  và  $\text{USCLN}(n, m) = r_{k-1}$
  - b) Chia  $r_{k-1}$  cho  $r_k$  được thương  $q_k$  và số dư  $r_{k+1}$  tức là  $r_{k-1} = r_kq_k + r_{k+1}$
  - c) Tính  $x_k = x_{k-2} - x_{k-1}q_{k-1}$
  - d) Tính  $y_k = y_{k-2} - y_{k-1}q_{k-1}$

Khi đã có  $\text{USCLN}(a, b^+) = h$  ta cũng có luôn bội số chung nhỏ nhất của chúng, ký hiệu bằng  $\text{BSCNN}(a, b^+)$  theo công thức

$$\text{BSCNN}(a, b^+) = \frac{ab^+}{h}$$

tức là cũng có hai số nguyên  $u, v$  khác thỏa mãn

$$u = -v = \text{BSCNN}(a, b^+) \Rightarrow au + b^+v = 0$$

Thuật toán trên hoàn toàn chuyển thể được sang cho các đa thức  $A$  và  $B^+$  vì trong không gian hàm số, đa thức có vai trò giống như số nguyên trong trường số thực.

Để thuận lợi hơn trong ứng dụng, thuật toán trên còn được chuyển đổi thành dạng tương đương khác như sau:

1) Bắt đầu từ ma trận:

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & 1 & 0 \\ B^+ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ta tính  $Q_1 = A \text{ div } B^+$ . Như vậy  $Q_1$  cũng sẽ là một đa thức và  $A_1 = A - Q_1 B^+$  là phần dư của phép chia đó. Tiếp theo ta thay hàng thứ nhất của  $M$  bằng hiệu của nó với tích của hàng thứ hai và  $Q_1$ . Khi đó  $M_1$  trở thành:

$$M_2 = \left( \begin{array}{c|c|c} A_1 & 1 & -Q_1 \\ \hline B^+ & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2) Thực hiện lại bước trên, nhưng hoán đổi vai trò của hai hàng cho nhau, tức là tính  $Q_2 = B^+ \text{ div } A_1$ , sau đó thay hàng thứ hai bằng hiệu của nó với tích của hàng thứ nhất và  $Q_2$ :

$$M_3 = \left( \begin{array}{c|c|c} A_1 & 1 & -Q_1 \\ \hline B_1 & -Q_2 & 1 + Q_1 Q_2 \end{array} \right) \quad \text{trong đó} \quad B_1 = B^+ - Q_2 A_1 = B^+ \bmod A_1$$

3) Cứ thực hiện lần lượt hai bước trên xen kẽ nhau cho tới khi thu được ma trận có một phần tử của cột đầu tiên bằng 0 thì dừng. Khi đó kết quả sẽ là:

$$\begin{pmatrix} H & X & Y \\ 0 & U & V \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad \begin{pmatrix} 0 & U & V \\ H & X & Y \end{pmatrix}$$

Nếu hai đa thức  $A, B^+$  là nguyên tố cùng nhau thì  $H$  là hằng số.

### Thuật toán thiết kế hai bộ điều khiển theo mô hình mẫu

Tổng kết lại, ta có thuật toán thiết kế hai bộ điều khiển  $T(s)$  và  $R(s)$  để điều khiển đối tượng có hàm truyền  $S(s)$  cho trước, sao cho hệ kín với cấu trúc ở hình 2.124 có được hàm truyền mẫu  $G_m(s)$  cũng cho trước, bao gồm các bước sau:

- Kiểm tra điều kiện (2.195).

- Phân tích đa thức  $B$  theo (2.197) thành  $B=B^-B^+$  với  $B^-$  là đa thức Hurwitz,  $B^+$  là đa thức phản Hurwitz.
- Phân tích đa thức  $B_m=B^+\hat{B}_m$
- Giải phương trình Euclid (2.201) để có các nghiệm  $X, Y, U, V, H$  từ  $A$  và  $B^+$
- Tìm đa thức  $Q$  theo (2.203)
- Tính các đa thức  $\hat{E}$  và  $D$  theo (2.202)
- Tính đa thức  $E$  theo (2.198) và đa thức  $C$  theo (2.200).

**Ví dụ 2.76:** Thiết kế bộ điều khiển theo mô hình mẫu

Cho đối tượng có hàm truyền:

$$S(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2}{(s+2)(s-1)}$$

và mô hình mẫu

$$G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2}$$

Trước hết ta thấy điều kiện (2.195) là được thỏa mãn. Tiếp theo, khi phân tích:

$$B=B^-B^+, \quad \text{với } B^-=2 \quad \text{và } B^+=1$$

thì được

$$B_m=B^+\hat{B}_m \quad \text{có } \hat{B}_m=1$$

Bây giờ ta áp dụng thuật toán Euclid mở rộng để tìm các đa thức  $H, X, Y, U, V$  thỏa mãn (2.201):

$$M_1 = \left( \begin{array}{c|c|c} s^2+s-2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow M_2 = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & -(s^2+s-2) \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow H=1, \quad X=0, \quad Y=1, \quad U=1, \quad V=-(s^2+s-2).$$

Từ đây suy ra được theo (2.203)

$$YA_m = (s+2)^2 \quad \text{và} \quad Q = -(YA_m) \operatorname{div} V = s+3$$

cũng như theo (2.202), (2.198) và (2.200):

$$\hat{E}=s+3, \quad E=2(s+3), \quad D=4(s+2) \quad \text{và} \quad C=1$$

Vậy các bộ điều khiển  $R(s), T(s)$  cần tìm là:

$$R(s) = \frac{D(s)}{E(s)} = \frac{2(s+2)}{s+3}, \quad T(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{1}{2(s+3)}$$

□

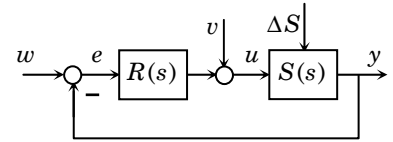
## 2.4.4 Tập các bộ điều khiển làm ổn định đối tượng và khái niệm ổn định mạnh, ổn định song hành

Xét hệ kín có các khâu SISO với cấu trúc cho ở hình 2.125. Hàm truyền của đối tượng là  $S(s)$ . Bài toán đặt ra là xác định tập hợp  $\mathcal{O}$  gồm các bộ điều khiển  $R(s)$  làm hệ kín ổn định nội, tức là tất cả các hàm truyền từ  $w(t)$ ,  $v(t)$  tới các tín hiệu nội  $e(t)$ ,  $u(t)$  và tín hiệu ra  $y(t)$  là những hàm bền (hình 2.125). Đây là công việc nền tảng của bài toán thiết kế bộ điều khiển bền vững  $\text{RH}_\infty$  sau này (xem thêm [20]).

### Một số khái niệm cơ bản

**Định nghĩa 2.5:** Các khái niệm cơ bản của không gian  $\text{RH}_\infty$  gồm có:

- Không gian  $\text{RH}_\infty$  là không gian tuyến tính của các hàm phức  $G(s)$  thực-hữu tỷ, hợp thức và bền.
- Một hàm  $G(s) \in \text{RH}_\infty$ , hợp thức không chặt (bậc tử số bằng bậc mẫu số) và pha cực tiểu sẽ được gọi là *phần tử đơn vị* (với phép nhân) của  $\text{RH}_\infty$ . Các phần tử đơn vị  $G(s) \in \text{RH}_\infty$  đều thỏa mãn  $\frac{1}{G(s)} \in \text{RH}_\infty$ .
- Hàm  $T \in \text{RH}_\infty$  được gọi là *nhân tử* của  $G \in \text{RH}_\infty$  nếu tồn tại  $S \in \text{RH}_\infty$  thỏa mãn  $TS = G$ .
- Hai hàm  $G_1 \in \text{RH}_\infty$  và  $G_2 \in \text{RH}_\infty$  được gọi là *nguyên tố cùng nhau* nếu tất cả các nhân tử chung của chúng đều là phần tử đơn vị của  $\text{RH}_\infty$ .



**Hình 2.125:** Nhiệm vụ bài toán tham số hóa bộ điều khiển của Youla.

Như vậy, một hệ thống sẽ ổn định khi và chỉ khi nó có hàm truyền  $G(s)$  thuộc không gian  $\text{RH}_\infty$ . Ngoài ra, nếu đã có  $G_1 \in \text{RH}_\infty$  và  $G_2 \in \text{RH}_\infty$  thì cũng có:

$$G_1(s) + G_2(s) \in \text{RH}_\infty \quad \text{và} \quad G_1(s)G_2(s) \in \text{RH}_\infty$$

**Ví dụ 2.77:** Phần tử đơn vị của  $\text{RH}_\infty$

Các hàm sau đều là phần tử đơn vị của  $\text{RH}_\infty$

$G(s)$  = hằng số thực,

$$G(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s^2+3s+5}$$



**Ví dụ 2.78:** Những hàm nguyên tố cùng nhau

Hai hàm

$$G_1(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s-1}{s+3} \frac{s+1}{s+2} \quad \text{và} \quad G_2(s) = \frac{s^2 - s - 2}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{s-2}{(s+2)(s+3)} \frac{s+1}{s+2}$$

là nguyên tố cùng nhau, vì có nhân tử chung

$$S = \frac{s+1}{s+2}$$

là phân tử đơn vị của  $\text{RH}_\infty$ . □

### Nội dung phương pháp tham số hóa Youla

Quay lại bài toán thiết kế bộ điều khiển  $R(s)$  để hệ kín *ổn định nội*, tức là mọi hàm truyền từ các tín hiệu vào  $w(t)$ ,  $v(t)$  tới các tín hiệu nội  $e(t)$ ,  $u(t)$  đều là những hàm bền. Ký hiệu  $W(s)$ ,  $V(s)$ ,  $E(s)$ ,  $U(s)$  là ảnh Laplace của  $w(t)$ ,  $v(t)$ ,  $e(t)$ ,  $u(t)$ . Khi đó, từ hình 2.125 sẽ có

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U \\ E \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta & R \\ -S & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ E \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -R \\ S & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ E \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} U \\ E \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -R \\ S & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \frac{1}{1+RS} \begin{pmatrix} 1 & R \\ -S & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.204)$$

Trước tiên ta chứng minh điều kiện cần và đủ sau:

**Định lý 2.43:** Nếu viết lại hàm truyền  $S(s)$ ,  $R(s)$  thành

$$S = \frac{N_S}{M_S}, \quad R = \frac{N_R}{M_R}$$

trong đó  $N_S$ ,  $M_S \in \text{RH}_\infty$  và  $N_R$ ,  $M_R \in \text{RH}_\infty$  là những cặp hàm nguyên tố cùng nhau. Khi đó, để hệ kín cho ở hình 2.125 ổn định nội thì cần và đủ là:

$$F = \frac{1}{N_S N_R + M_S M_R} \in \text{RH}_\infty$$

*Chứng minh:*

Với (2.204), ma trận hàm truyền của hệ với hai vào  $w(t)$ ,  $v(t)$  và hai ra  $e(t)$ ,  $u(t)$  là:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{1+RS} \begin{pmatrix} 1 & R \\ -S & 1 \end{pmatrix} = \frac{M_S M_R}{N_S N_R + M_S M_R} \begin{pmatrix} 1 & \frac{N_R}{M_R} \\ -\frac{N_S}{M_S} & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad G(s) &= \frac{1}{N_S N_R + M_S M_R} \begin{pmatrix} M_S M_R & N_S M_R \\ -M_S N_R & M_S M_R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Từ đây ta có được điều phải chứng minh. □

Bây giờ ta đi vào nội dung phương pháp tham số hóa Youla:



**Định lý 2.44** (Youla): Nếu viết lại hàm truyền  $S(s)$  của đối tượng thành

$$S(s) = \frac{N_S}{M_S} \quad \text{trong đó} \quad N_S, M_S \in \text{RH}_\infty \quad \text{nguyên tố cùng nhau}$$

thì tập hợp  $\mathcal{O}$  gồm tất cả các bộ điều khiển  $R(s)$  làm hệ kín có cấu trúc cho ở hình 2.125, được ổn định nội là:

$$\mathcal{O} = \left\{ R = \frac{X + M_S Q}{Y - N_S Q} \mid X, Y, Q \in \text{RH}_\infty \text{ và } N_S X + M_S Y = 1 \right\} \quad (2.205)$$

trong đó  $Q \in \text{RH}_\infty$  là tham số tự do. **Chú ý rằng** do có  $N_S X + M_S Y = 1$  nên  $X, Y \in \text{RH}_\infty$  cũng phải nguyên tố cùng nhau.

*Chứng minh:*

Trước tiên ta thấy hệ kín ổn định với  $R$  cho trong (2.205) vì nó có hàm truyền

$$G(s) = \frac{RS}{1+RS} = N_S(X + M_S Q) \in \text{RH}_\infty$$

Ngược lại, nếu bộ điều khiển  $R = \frac{N_R}{M_R}$  với  $N_R, M_R \in \text{RH}_\infty$  nguyên tố cùng nhau đã làm ổn định đối tượng thì do có (định lý 2.43)

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{N_S N_R + M_S M_R} \in \text{RH}_\infty & \Leftrightarrow F(N_S N_R + M_S M_R) = 1 \\ & \Leftrightarrow N_S F N_R + M_S F M_R = 1 \end{aligned}$$

nhên khi so sánh với

$$N_S X + M_S Y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad N_S(X + M_S Q) + M_S(Y - N_S Q) = 1$$

trong đó  $Q$  là tùy ý, ta được

$$F N_R = X + M_S Q \quad \text{và} \quad F M_R = Y - N_S Q$$

Suy ra

$$R = \frac{N_R}{M_R} = \frac{F N_R}{F M_R} = \frac{X + M_S Q}{Y - N_S Q}$$

Chọn

$$Q = (N_S X + M_S Y) Q = X(Y + F M_R) + Y(F N_R - X) \in \text{RH}_\infty$$

ta được điều phải chứng minh. □

Theo định lý 2.43 thì việc xác định tập  $\mathcal{O}$  gồm các bộ điều khiển  $R(s)$  làm hệ kín ở hình 2.125 ổn định nội chỉ còn là:

- 1) Phân tích  $S(s)$  thành  $S = \frac{N_S}{M_S}$  với  $N_S, M_S \in \text{RH}_\infty$  nguyên tố cùng nhau.
- 2) Tìm nghiệm  $X, Y \in \text{RH}_\infty$  từ phương trình Bezout  $N_S X + M_S Y = 1$ .

Trước tiên ta thực hiện bước thứ nhất. Có thể thấy ngay, nếu  $S(s)$  có dạng

$$S(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n}, \quad m \leq n$$

thì với mọi đa thức Hurwitz

$$C(s) = (s-a)^n$$

trong đó số thực  $a < 0$  không phải là điểm không cũng như điểm cực của  $S(s)$ , tức là

$$B(a) \neq 0 \quad \text{và} \quad A(a) \neq 0$$

ta sẽ được  $S = \frac{N_S}{M_S}$  với

$$N_S(s) = \frac{B(s)}{C(s)} \in \text{RH}_\infty \quad \text{và} \quad M_S(s) = \frac{A(s)}{C(s)} \in \text{RH}_\infty \quad (2.206)$$

Công thức (2.206) cho thấy việc phân tích  $S(s)$  thành  $S = \frac{N_S}{M_S}$  có  $N_S, M_S \in \text{RH}_\infty$  sẽ được thực hiện qua hai bước như sau:

- Sử dụng ánh xạ ngược  $s = \frac{1+a\lambda}{\lambda}$  của  $\lambda = \frac{1}{s-a}$  và tính

$$S(s) = S\left(\frac{1+a\lambda}{\lambda}\right) = \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

với  $a < 0$  không phải là điểm cực cũng như điểm không của  $S(s)$ .

- Chuyển ngược hai đa thức  $n(\lambda)$  và  $m(\lambda)$  về biến  $s$  nhờ ánh xạ  $\lambda = \frac{1}{s-a}$

$$N_S(s) = n\left(\frac{1}{s-a}\right), \quad M_S(s) = m\left(\frac{1}{s-a}\right)$$

Bây giờ ta sẽ thực hiện bước thứ hai là tìm nghiệm phương trình Bezout

$$N_S X + M_S Y = 1 \quad (\text{hằng số})$$

Nếu so sánh với phương trình Euclid (2.201) đã được đề cập thì sự khác biệt duy nhất ở đây là  $N_S, M_S, X, Y$  không phải là các đa thức mà lại là hàm thực-hữu tỷ và  $h$  là hằng số thực. Song sự khác biệt này hoàn toàn không hạn chế việc ta sử dụng thuật toán Euclid, vì với ánh xạ  $\lambda = \frac{1}{s-a}$  ta đã chuyển được các hàm thực-hữu tỷ  $N_S, M_S, X, Y$  thành các đa thức  $n(\lambda), m(\lambda), \tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)$ . Nói cách khác, ta sẽ áp dụng thuật toán Euclid cho phương trình

$$n(\lambda) \tilde{x}(\lambda) + m(\lambda) \tilde{y}(\lambda) = h \quad (2.207)$$

để có hai đa thức  $\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda)$  và hằng số  $h$  từ hai đa thức đã có là  $n(\lambda)$  và  $m(\lambda)$ . Từ đây ta sẽ suy ra được:

$$x(\lambda) = \frac{\tilde{x}(\lambda)}{h} \quad \text{và} \quad y(\lambda) = \frac{\tilde{y}(\lambda)}{h} \quad (2.208)$$

Phương trình (2.207) luôn có  $h$  = hằng số nếu  $n(\lambda)$ ,  $m(\lambda)$  là nguyên tố cùng nhau và điều này sẽ được thỏa mãn với giả thiết hàm truyền  $S = \frac{B}{A}$  đã cho của đối tượng có hai đa thức  $B(s)$ ,  $A(s)$  nguyên tố cùng nhau. Hiển nhiên rằng khi đó cũng có hai đa thức  $x(\lambda)$ ,  $y(\lambda)$  nguyên tố cùng nhau.

Cuối cùng, tổng kết lại, ta có thuật toán xác định  $\mathcal{O}$  gồm các bộ điều khiển  $R(s)$  làm hệ kín ở hình 2.125 ổn định nội, gồm các bước như sau:

1) Biến đổi  $S(s)$  đã cho thành:

$$S(s) = S \left( \frac{1+a\lambda}{\lambda} \right) = \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

với hằng số  $a < 0$  là tùy ý và không phải là điểm cực cũng như điểm không của  $S(s)$ .

2) Sử dụng thuật toán Euclid để tìm  $\tilde{x}(\lambda)$ ,  $\tilde{y}(\lambda)$  và  $h$  thỏa mãn (2.207).

3) Xác định  $x(\lambda)$  và  $y(\lambda)$  từ  $\tilde{x}(\lambda)$ ,  $\tilde{y}(\lambda)$  theo (2.208).

4) Chuyển ngược  $n(\lambda)$ ,  $m(\lambda)$ ,  $x(\lambda)$ ,  $y(\lambda)$  thành các hàm  $N_S(s)$ ,  $M_S(s)$ ,  $X(s)$ ,  $Y(s)$  thuộc  $\text{RH}_\infty$  bằng cách:

$$N_S(s) = n \left( \frac{1}{s-a} \right), \quad M_S(s) = m \left( \frac{1}{s-a} \right)$$

$$X(s) = x \left( \frac{1}{s-a} \right), \quad Y(s) = y \left( \frac{1}{s-a} \right)$$

**Ví dụ 2.79:** Minh họa phương pháp tham số hóa Youla

Cho đối tượng với hàm truyền:

$$S(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$$

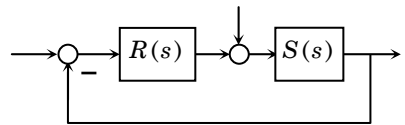
Sử dụng ánh xạ  $s = \frac{1-\lambda}{\lambda}$  được

$$\tilde{S}(\lambda) = S \left( \frac{1-\lambda}{\lambda} \right) = \frac{-2\lambda^2 + \lambda}{3\lambda^2 - 4\lambda + 1} = \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

Vậy  $n(\lambda) = -2\lambda^2 + \lambda$  và  $m(\lambda) = 3\lambda^2 - 4\lambda + 1$ .

Áp dụng thuật toán Euclid, ta có

$$\left( \begin{array}{c|c|c} -\frac{5}{3}\lambda + \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{3}{3\lambda^2 - 4\lambda + 1} & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c|c|c} -\frac{5}{3}\lambda + \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \hline -\frac{3}{25} & \frac{9}{5}\lambda - \frac{42}{25} & \frac{18}{15}\lambda - \frac{3}{25} \end{array} \right)$$



**Hình 2.126:** Minh họa ví dụ 2.79

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & -75\lambda^2 + \frac{76}{3}\lambda - \frac{25}{3} & -\frac{50}{3}\lambda^2 + \frac{25}{3}\lambda \\ \hline -\frac{3}{25} & \frac{9}{5}\lambda - \frac{42}{25} & \frac{18}{15}\lambda - \frac{3}{25} \end{array} \right)$$

và với nó thì

$$h = -\frac{3}{25}, \quad \tilde{x}(\lambda) = \frac{9}{5}\lambda - \frac{42}{25}, \quad \tilde{y}(\lambda) = \frac{18}{15}\lambda - \frac{3}{25}$$

$$\Rightarrow x(\lambda) = \frac{\tilde{x}(\lambda)}{h} = -15\lambda + 14, \quad y(\lambda) = \frac{\tilde{y}(\lambda)}{h} = -10\lambda + 1$$

Chuyển ngược sang miền  $s$  với ánh xạ  $\lambda = \frac{1}{s+1}$  được

$$N_S(s) = n\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{s-1}{(s+1)^2}, \quad M_S(s) = m\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{s(s-2)}{(s+1)^2}$$

$$X(s) = x\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{14s-1}{s+1}, \quad Y(s) = y\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{s-9}{s+1}$$

Do đó tập các bộ điều khiển làm hệ kín cho ở hình 2.126 ổn định là:

$$\mathcal{O} = \left\{ R = \frac{X + MQ}{Y - NQ} = \frac{(14s-1)(s+1) + s(s-2)Q}{(s-9)(s+1) - (s-1)Q} \mid Q \in \text{RH}_\infty \right\}$$

□

### Khả năng điều khiển ổn định mạnh (strongly stable)

Định lý 2.44 của Youla cho thấy sẽ có rất nhiều bộ điều khiển làm đối tượng  $S(s)$  ổn định nội, thậm chí là vô số, và một bộ điều khiển  $R(s)$  làm ổn định đối tượng  $S(s)$  không bắt buộc bản thân nó phải ổn định. Mong muốn có được một bộ điều khiển ổn định để làm ổn định nội đối tượng  $S(s)$  người ta đã đưa ra khái niệm bộ điều khiển *ổn định mạnh* (strongly stable) như sau: Một đối tượng  $S(s)$  được gọi là *ổn định mạnh được*, nếu tồn tại ít nhất một bộ điều khiển ổn định  $R(s)$  làm hệ kín ổn định nội.

Xét đối tượng có hàm truyền:

$$S(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad (m \leq n)$$

Có thể thấy nếu đối tượng có bậc tương đối  $r = n - m > 0$  thì nó sẽ có điểm không  $s = \infty$  bội  $r$  vì tại đó có  $S(\infty) = 0$ . Giả sử rằng trên trục thực dương kể cả điểm 0, đối tượng có hai điểm không  $s_1, s_2$  và giữa chúng có số lẻ các điểm cực. Tất nhiên các điểm cực này là các số thực dương.

Nếu hàm truyền của đối tượng được viết lại thành  $S = \frac{N_S}{M_S}$  với  $N_S, M_S \in \text{RH}_\infty$

nguyên tố cùng nhau, thì theo nội dung định lý 2.44, bộ điều khiển  $R(s)$  làm nó ổn định nội phải có cấu trúc:

$$R = \frac{N_R}{M_R} = \frac{X + M_S Q}{Y - N_S Q}, \quad X, Y, Q \in \text{RH}_\infty \text{ và } N_S X + M_S Y = 1$$

Do đối tượng có hai điểm không  $s_1, s_2$  là số thực không âm và giữa chúng có số lẻ các điểm cực, nên  $M_S(s_1)$  và  $M_S(s_2)$  phải trái dấu với nhau. Ngoài ra, từ phương trình Bezout ta còn có

$$M_S(s_1)Y(s_1)=1 \quad \text{và} \quad M_S(s_2)Y(s_2)=1$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \text{sgn} Y(s_1) = -\text{sgn} Y(s_2) &\Rightarrow \text{sgn}[Y(s_1) - N_S(s_1)Q(s_1)] = \text{sgn} Y(s_1) = -\text{sgn} Y(s_2) \\ &= -\text{sgn}[Y(s_2) - N_S(s_2)Q(s_2)] \end{aligned}$$

Điều này chỉ rằng tại  $s_1$  và  $s_2$ , mẫu số

$$M_R(s) = Y(s) - N_S(s)Q(s)$$

của bộ điều khiển có giá trị trái dấu nhau. Do đó, từ tính liên tục của  $M_R(s)$ , nó phải có nghiệm thực dương (và đó cũng là điểm cực của bộ điều khiển) thuộc khoảng hở  $(s_1, s_2)$  nên không thể là một bộ điều khiển ổn định.

Một cách tổng quát, người ta còn chỉ ra được rằng:

**Định lý 2.45:** Đối tượng  $S(s)$  là *không điều khiển mạnh được* khi và chỉ khi nó có hai điểm không nằm trên nửa trục thực dương (kể cả điểm 0 và điểm  $+\infty$ ) và giữa chúng có số lẻ các điểm cực (tính cả số lần bội của chúng).

**Chú ý:** Định lý trên mới chỉ khẳng định sự tồn tại của bộ điều khiển ổn định mạnh chứ chưa chỉ ra được phương pháp xác định nó.

**Ví dụ 2.80:** Minh họa định lý 2.45

Đối tượng

$$S(s) = \frac{s}{(s+1)(s-2)}$$

có hai điểm không  $s=0, s=\infty$  và một điểm cực  $s=2$  nằm giữa chúng nên không thể ổn định mạnh được. Ngược lại, đối tượng

$$S(s) = \frac{s}{(s-2)^2}$$

với hai điểm không  $s=0, s=\infty$  và hai điểm cực  $s=2$  (điểm cực bội hai) nằm giữa chúng nên nó sẽ *ổn định mạnh được*. □

### Bộ điều khiển ổn định song hành (simultane stable)

Trong điều khiển bền vững, người ta thường gặp phải bài toán là một đối tượng được mô tả không phải chỉ bằng một mô hình (hàm truyền) mà bằng nhiều mô hình

(nhiều hàm truyền). Chẳng hạn một đối tượng phi tuyến, qua việc tuyến tính hóa nó xung quanh điểm làm việc, người ta có được một mô hình tuyến tính tương đương mô tả xấp xỉ đối tượng trong lân cận điểm làm việc đó. Ứng với các điểm làm việc khác nhau, người ta sẽ có những hàm truyền khác nhau. Bài toán điều khiển ổn định được đặt ra ở đây là phải tìm một bộ điều khiển chung  $R_{sh}(s)$  để *điều khiển ổn định nội* cho đối tượng được mô tả bằng hai hàm truyền khác nhau  $S_1(s)$ ,  $S_2(s)$ . Bộ điều khiển  $R_{sh}(s)$  khi đó được gọi là bộ điều khiển ổn định song hành (*simultane stable*).

Xét đối tượng được mô tả bằng hai hàm truyền (tại hai điểm làm việc khác nhau):

$$S_1(s) = \frac{N_{S_1}(s)}{M_{S_1}(s)} \quad \text{và} \quad S_2(s) = \frac{N_{S_2}(s)}{M_{S_2}(s)} \quad (2.209)$$

trong đó tất cả  $N_{S_1}, M_{S_1}, N_{S_2}, M_{S_2}$  đều là phân tử của  $RH_\infty$  (hợp thức, bền) và từng cặp tương ứng  $N_{S_1}, M_{S_1}$  và  $N_{S_2}, M_{S_2}$  là nguyên tố cùng nhau. Gọi:

$$R_1(s) = \frac{X_1 + Q_1 M_{S_1}}{Y_1 - Q_1 N_{S_1}} \quad \text{và} \quad R_2(s) = \frac{X_2 + Q_2 M_{S_2}}{Y_2 - Q_2 N_{S_2}}$$

là tập các bộ điều khiển làm chúng ổn định nội (theo phương pháp tham số hóa Youla – định lý 2.44), tức là có:

$$X_1 N_{S_1} + Y_1 M_{S_1} = 1, \quad X_2 N_{S_2} + Y_2 M_{S_2} = 1 \quad (2.210)$$

$$X_1, Y_1, X_2, Y_2 \in RH_\infty \quad \text{và} \quad Q_1, Q_2 \in RH_\infty \quad \text{tùy ý}$$

Khi đó ta sẽ được:

**Định lý 2.46:** Cho hai mô hình  $S_1(s)$ ,  $S_2(s)$  xác định theo (2.209). Ký hiệu:

$$S(s) = \frac{N_S(s)}{M_S(s)}$$

với

$$N_S = M_{S_1} N_{S_2} - N_{S_1} M_{S_2} \quad \text{và} \quad M_S = X_1 N_{S_2} + Y_1 M_{S_2} \quad (2.211)$$

a) Để  $S_1(s)$ ,  $S_2(s)$  ổn định song hành thì cần và đủ là  $S(s)$  ổn định mạnh được.

b) Nếu  $R(s) \in RH_\infty$  là bộ điều khiển mạnh cho  $S(s)$  thì bộ điều khiển song hành cho  $S_1(s)$ ,  $S_2(s)$  sẽ là:

$$R_{sh}(s) = \frac{X_1 + R M_{S_1}}{Y_1 - R N_{S_1}} \quad (2.212)$$

*Chứng minh:*

Trước tiên ta chứng minh điều kiện cần, tức là khi  $S_1(s)$ ,  $S_2(s)$  ổn định song hành được thì  $S(s)$  cũng ổn định mạnh được. Do  $S_1(s)$ ,  $S_2(s)$  là ổn định song hành được nên phải tồn tại  $Q_1, Q_2 \in RH_\infty$  để có:

$$\frac{X_1 + Q_1 M_{S_1}}{Y_1 - Q_1 N_{S_1}} = \frac{X_2 + Q_2 M_{S_2}}{Y_2 - Q_2 N_{S_2}}$$

Nhưng vì tử số và mẫu số của mỗi vế đều tạo thành các cặp nguyên tố cùng nhau trong  $\text{RH}_\infty$  nên phải tồn tại một phân tử đơn vị  $U$  của  $\text{RH}_\infty$ , tức là  $U^{-1} \in \text{RH}_\infty$ , sao cho:

$$X_1 + Q_1 M_{S_1} = U(X_2 + Q_2 M_{S_2}) \quad \text{và} \quad Y_1 - Q_1 N_{S_1} = U(Y_2 - Q_2 N_{S_2})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_1 & M_{S_1} \\ Y_1 & -N_{S_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 & M_{S_2} \\ Y_2 & -N_{S_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Q_2 \end{pmatrix} U$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} N_{S_2} & M_{S_2} \\ Y_2 & -X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & M_{S_1} \\ Y_1 & -N_{S_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{S_2} & M_{S_2} \\ Y_2 & -X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & M_{S_2} \\ Y_2 & -N_{S_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Q_2 \end{pmatrix} U$$

Kết hợp với (2.211), mà cụ thể là:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{S_2} & M_{S_2} \\ Y_2 & -X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & M_{S_1} \\ Y_1 & -N_{S_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} N_{S_2} X_1 + M_{S_2} Y_1 & N_{S_2} M_{S_1} - M_{S_2} N_{S_1} \\ Y_2 X_1 - X_2 Y_1 & Y_2 M_{S_1} + X_2 N_{S_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_S & N_S \\ Y_2 X_1 - X_2 Y_1 & Y_2 M_{S_1} + X_2 N_{S_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

và với (2.210), tức là:

$$\begin{pmatrix} N_{S_2} & M_{S_2} \\ Y_2 & -X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & M_{S_2} \\ Y_2 & -N_{S_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{S_2} X_2 + M_{S_2} Y_2 & N_{S_2} M_{S_2} - M_{S_2} N_{S_2} \\ Y_2 X_2 - X_2 Y_2 & Y_2 M_{S_2} + X_2 N_{S_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ta được:

$$\begin{pmatrix} M_S & N_S \\ Y_2 X_1 - X_2 Y_1 & Y_2 M_{S_1} + X_2 N_{S_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Q_2 \end{pmatrix} U$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_S U^{-1} + N_S Q_1 U^{-1} = 1 \\ [(Y_2 X_1 - X_2 Y_1) + (Y_2 M_{S_1} + X_2 N_{S_1}) Q_1] U^{-1} = Q_2 \end{cases} \quad (2.213)$$

Công thức thứ nhất (2.213) chỉ rằng  $S = \frac{N_S}{M_S}$  sẽ được điều khiển ổn định nội bằng bộ điều khiển:

$$R = \frac{Q_1 U^{-1}}{U^{-1}} = Q_1 \in \text{RH}_\infty$$

nên nó là ổn định mạnh được.

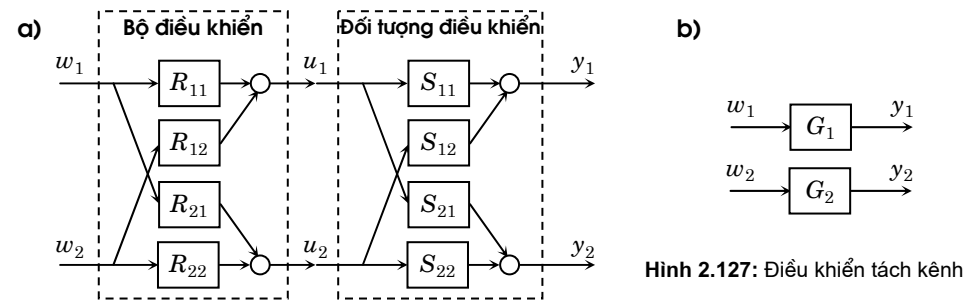
Chuyển sang điều kiện đủ. Giả sử  $S = \frac{N_S}{M_S}$  được điều khiển ổn định mạnh bằng bộ

điều khiển  $R \in \text{RH}_\infty$ . Khi đó, với cách chọn  $Q_1 = R$  và  $Q_2$  được xác định từ  $Q_1$  bằng công thức (2.214) ta sẽ có ngay  $R_1 = R_2$ .

Cuối cùng, ta có thể thấy thêm rằng khẳng định b) chỉ là hệ quả trực tiếp của khẳng định a). □

### 2.4.5 Điều khiển tách kênh

Ngoài phương pháp tham số hóa Youla là còn mở rộng được cho hệ MIMO, các phương pháp thiết kế bộ điều khiển vừa trình bày trên chủ yếu chỉ áp dụng cho đối tượng SISO. Để bổ sung thêm trường hợp còn thiếu là điều khiển hệ MIMO, mục này sẽ giới thiệu phương pháp tách kênh hệ MIMO, tức là phương pháp thiết kế bộ điều khiển  $R(s)$  cho đối tượng có  $m$  tín hiệu vào-ra  $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ ,  $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$  sao cho với nó hệ được tách thành  $m$  kênh riêng biệt, tức là tách được thành  $m$  hệ SISO con, như minh họa ở hình 2.127 cho đối tượng 2 tín hiệu vào, 2 tín hiệu ra. Hiển nhiên rằng khi đã tách được thành các hệ SISO như vậy, ta lại áp dụng được các phương pháp thiết kế bộ điều khiển đã trình bày ở trên cho từng kênh để toàn bộ hệ thống đạt được những chỉ tiêu chất lượng đặt ra.



Hình 2.127: Điều khiển tách kênh

#### Tách kênh trong toàn bộ miền thời gian

Ký hiệu ma trận hàm truyền gồm  $m$  hàng,  $m$  cột ( $m \times m$ ) của đối tượng điều khiển  $S(s)$  và của bộ điều khiển  $R(s)$  có cùng kiểu  $m \times m$  là:

$$S(s) = \begin{pmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) & \cdots & S_{1m}(s) \\ S_{21}(s) & S_{22}(s) & \cdots & S_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}(s) & S_{m2}(s) & \cdots & S_{mm}(s) \end{pmatrix}, \quad R(s) = \begin{pmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) & \cdots & R_{1m}(s) \\ R_{21}(s) & R_{22}(s) & \cdots & R_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1}(s) & R_{m2}(s) & \cdots & R_{mm}(s) \end{pmatrix}$$

thì nhiệm vụ tách kênh của  $R(s)$  chính là làm cho toàn bộ hệ thu được có ma trận hàm truyền  $G(s)$  dạng đường chéo:

$$\underline{Y}(s) = S(s)\underline{U}(s) = S(s)R(s)\underline{W}(s) = G(s)\underline{W}(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_m(s) \end{pmatrix} \underline{W}(s)$$

trong đó  $\underline{W}(s)$  là ảnh Laplace của vector các tín hiệu đầu vào  $\underline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$  của hệ và  $\underline{U}(s), \underline{Y}(s)$  là ảnh Laplace của  $\underline{u}(t), \underline{y}(t)$ . Từ quan hệ:



$$S(s)R(s) = G(s)$$

ta thấy ngay rằng nếu ma trận  $S(s)$  không suy biến với mọi  $s$  thì bộ điều khiển  $R(s)$  cần tìm sẽ là:

$$R(s) = S(s)^{-1}G(s) \quad (2.215)$$

**Ví dụ 2.81:** Tách kênh đối tượng 2 vào 2 ra

Đối tượng với 2 tín hiệu vào, 2 tín hiệu ra có ma trận hàm truyền:

$$S(s) = \begin{pmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) \\ S_{21}(s) & S_{22}(s) \end{pmatrix} \Leftrightarrow S(s)^{-1} = \frac{1}{S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12}} \begin{pmatrix} S_{22} & -S_{12} \\ -S_{21} & S_{11} \end{pmatrix}$$

Chọn trước ma trận hàm truyền cho hệ đã được tách kênh là khâu khếch đại:

$$G(s) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

ta sẽ có bộ điều khiển xác định theo (2.215):

$$\begin{aligned} R(s) = S(s)^{-1}G(s) &= \frac{1}{S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12}} \begin{pmatrix} S_{22} & -S_{12} \\ -S_{21} & S_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12}} \begin{pmatrix} S_{22}k_1 & -S_{12}k_2 \\ -S_{21}k_1 & S_{11}k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

### Tách kênh trong chế độ xác lập

Vì nhiều lý do, chẳng hạn như ma trận  $S(s)$  bị suy biến ở những dải tần số làm việc, hay thực tế không cho phép hoặc không đủ điều kiện để ta thực thi được bộ điều khiển  $R(s)$  thu được theo (2.215), nên bắt buộc ta phải chuyển sang bài toán tách kênh gần đúng, tức là chỉ điều khiển tách kênh trong những dải tần số được quan tâm đặc biệt, ví dụ như chỉ tách kênh ở chế độ xác lập khi  $t \rightarrow \infty$ , tức là khi  $s \rightarrow 0$ . Khi đó, từ công thức thiết kế (2.215) ta được:

$$R(s) = S(0)^{-1}G(s) \quad (2.216)$$

Áp dụng riêng cho đối tượng 2 vào 2 ra và ma trận hàm truyền của hệ sau khi tách:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & G_2(s) \end{pmatrix}$$

thì với kết quả của ví dụ 2.81 ta có:

$$R(s) = \frac{1}{S_{11}(0)S_{22}(0) - S_{21}(0)S_{12}(0)} \begin{pmatrix} S_{22}(0)G_1(s) & -S_{12}(0)G_2(s) \\ -S_{21}(0)G_1(s) & S_{11}(0)G_2(s) \end{pmatrix}$$

## Câu hỏi ôn tập và bài tập

1. Xác định ảnh Fourier của các tín hiệu sau:

a)  $x(t) = at$  khi  $0 < t < T$

b)  $x(t) = at^2$  khi  $0 < t < T$

c)  $x(t) = |u|$  với  $u = U_0 \sin \omega t$

d)  $x(t) = \frac{\sin[\Omega(t-t_0)]}{\pi(t-t_0)}$

e)  $x(t) = \left(1 - 2\frac{|t|}{T}\right)x_0$  khi  $0 < t < \frac{T}{2}$  và  $x(t+T) = x(t)$

2. Cho hai tín hiệu  $x_1(t) = t^{-a}[1(t) - 1(t-b)]$  và  $x_2(t) = t^{-c}1(t-d)$ , trong đó  $0 < b < \infty$ ,  $\frac{1}{2} < a = c < 1$  và  $0 \leq d$ . Hãy chỉ rằng  $x_1(t)$  có công suất  $P$  hữu hạn (chuẩn bậc 1 hữu hạn),  $E$  vô hạn (chuẩn bậc 2 vô hạn) và  $x_2(t)$  có  $P$  vô hạn nhưng lại có  $E$  hữu hạn.

3. Cho một tín hiệu tuần hoàn  $x(t)$  chu kỳ  $T$ . Gọi  $\hat{x}(t)$  là phần tín hiệu lấy từ  $x(t)$  trong một chu kỳ, tức là:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{khi } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{khi } t \notin (0, T] \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $x(t) = \hat{x}(t) * s(t)$ , trong đó  $s(t)$  là hàm trích mẫu với tần số trích mẫu  $T$ .

4. Hãy xác định chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn  $x(t)$  với chu kỳ  $T = 2\pi$  và

a)  $x(t) = \text{sgn}(t - \pi)$ ,  $0 < t < 2\pi$

b)  $x(t) = |\sin t|$

c)  $x(t) = \text{sat}\left(\frac{t - \pi}{\pi}\right)$ ,  $0 < t < 2\pi$

d)  $x(t) = \cos^2 t$

5. Chứng minh bất đẳng thức Bessel:  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$ .

Gợi ý: Đặt  $z_n(t) = x(t) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t}$  và đi từ  $0 \leq |z_n(t)|^2 = z_n(t) \cdot \overline{z_n(t)}$

6. Cho một tín hiệu tuần hoàn  $x(t)$  chu kỳ  $T$ . Tín hiệu này được xấp xỉ bởi hàm điều hòa biểu diễn dưới dạng tổng hữu hạn:

$$x(t) \approx \sum_{n=-N}^N a_n e^{jn\omega t} \quad \text{với } \bar{a}_n = a_n \text{ và } \omega T = 2\pi$$

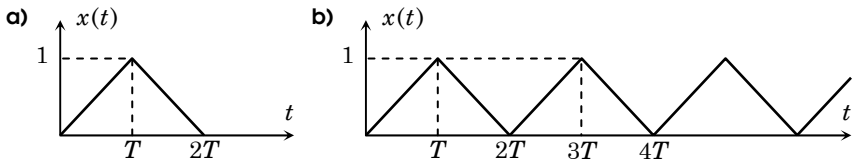
bằng cách xác định những hệ số  $a_n$  sao cho bình phương sai lệch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) - \sum_{n=-N}^N a_n e^{jn\omega t} \right|^2 dt$$

có giá trị nhỏ nhất. Hãy chỉ rằng khi đó  $a_n$  chính là hệ số chuỗi Fourier của  $x(t)$ :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt$$

7. Chứng minh rằng ảnh Fourier của một hàm  $x(t)$  có miền xác định giới nội  $[a, b]$ , tức là  $x(t) \equiv 0$  khi  $t \notin [a, b]$ , xác định trên toàn bộ trục số  $-\infty < \omega < \infty$ .
8. Cho  $x(t) = 1(t+T) - 1(t-T)$ . Tìm ảnh  $X(j\omega)$  và
- kiểm tra tính chất của nó nêu trong định lý Riemann–Lebesgue,
  - kiểm tra quan hệ Parseval.
9. Tìm tín hiệu  $x(t)$  có ảnh Laplace
- $X(s) = \frac{2s^2 + 13s + 17}{s^2 + 4s + 3}$
  - $X(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$
  - $X(s) = \frac{5s^2 + 19s + 20}{s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 17s + 6}$
  - $X(s) = \frac{7s^2 - 20s - 75}{s^3 + 6s^2 + 25s}$
10. Tìm ảnh Laplace của các tín hiệu ở hình 2.128



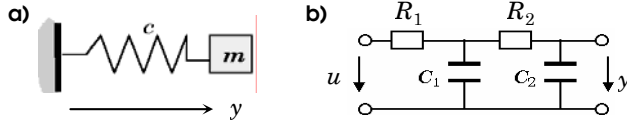
Hình 2.128: Cho bài tập số 10

11. Xác định các giá trị đầu  $x(+0)$ ,  $\frac{dx(+0)}{dt}$ ,  $\frac{d^2x(+0)}{dt^2}$  của tín hiệu causal  $x(t)$  có ảnh Laplace
- $X(s) = \frac{1}{sT_1(1+sT_1)(1+sT_2)}$
  - $X(s) = \frac{1+sT}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$
  - $X(s) = \frac{s+1}{2s^2+3s+4}$
  - $X(s) = \frac{1}{(1+sT)^n}$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$
12. Xác định điều kiện để tín hiệu  $x(t)$  với ảnh Laplace:
- $$X(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}$$
- thỏa mãn
- $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) \neq 0$
  - $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$
13. Giải các phương trình vi phân sau
- $\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} = 0$  với  $y(+0) = 5$ ,  $\frac{dy(+0)}{dt} = -8$  và  $\frac{d^2y(+0)}{dt^2} = 28$
  - $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 20 \cos 2t$  với  $y(+0) = 1$  và  $\frac{dy(+0)}{dt} = 5$

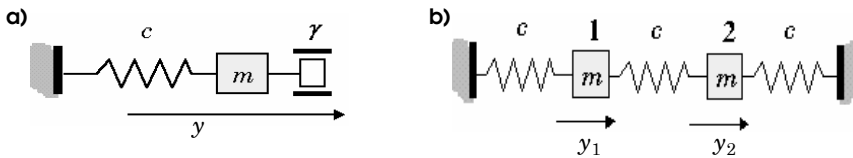
c)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$  với  $y(+0) = a$  và  $\frac{dy(+0)}{dt} = b$

14. Cho một hệ gồm 1 lò xo có hệ số đàn hồi  $c$  và một vật khối lượng  $m$  như hình 2.129a) mô tả. Tại thời điểm  $t=0$  vật bị một lực tác động tức thời làm bật ra khỏi vị trí cân bằng  $y(+0)=0$  và có vận tốc ban đầu là  $\frac{dy(+0)}{dt} = v_0$ . Bỏ qua lực ma sát, hãy xác định phương trình dao động sau đó của vật xung quanh điểm cân bằng. Biên độ dao động lớn nhất của vật là bao nhiêu?

Hình 2.129: Cho bài tập 14 và 15.



15. Hình 2.129b) mô tả một mạch điện gồm hai điện trở  $R_1$ ,  $R_2$  và hai tụ điện  $C_1$ ,  $C_2$ . Hãy xác định điện áp đầu ra  $y(t)$  của mạch điện nếu tại đầu vào có  $u(t) = u_0 1(t)$ , biết rằng tại thời điểm  $t=0$  cả hai tụ cùng chưa được nạp điện.
16. Cho hệ gồm một lò xo có hệ số đàn hồi  $c$ , một vật có khối lượng  $m$  như hình 2.130a) mô tả. Xác định phương trình mô tả chuyển động của vật dưới tác động của lực  $u(t)$  vào vật có để ý đến lực ma sát tĩnh với hệ số  $\gamma$ . Hệ có tuyến tính không và tại sao?



Hình 2.130: Cho bài tập 16 và bài tập 17.

17. Hình 2.130b) mô tả hệ gồm ba lò xo có cùng hệ số đàn hồi  $c$  và hai vật với cùng khối lượng  $m$  đang ở vị trí cân bằng. Tại thời điểm  $t=+0$  vật thứ hai bị một lực tức thời đánh bật ra khỏi vị trí cân bằng với vận tốc  $v_0$ . Bỏ qua lực ma sát, hãy xác định phương trình chuyển động của vật thứ nhất. Hệ có tuyến tính không và tại sao?
18. Xác định xem những hệ nào trong số các hệ sau là tuyến tính, tuyến tính không dừng và tuyến tính tham số rải

a)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = \frac{du}{dt} + 5u$

b)  $t^4 \frac{dy}{dt} + \cos(t^2)y = 5\frac{du}{dt} + 2u$

c)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2y\frac{dy}{dt} + 2y = u$

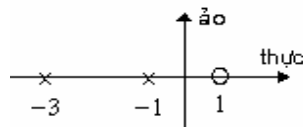
19. Hãy xác định hàm trọng lượng  $g(t)$  và hàm quá độ  $h(t)$  của những hệ tuyến tính có hàm truyền  $G(s)$  như sau

a)  $\frac{s+1}{2s^2+3s+4}$

b)  $\frac{1+2s}{(1+3s)(1+5s)}$

c)  $\frac{1}{0,2s(1+s)(1+3s)}$

20. Xác định hàm truyền của hệ thống có sơ đồ điểm cực (được đánh dấu bởi  $\times$ ) và điểm không (được đánh dấu bởi  $\circ$ ) cho trong hình 2.131, biết rằng  $G(0)=2$ . Tìm và vẽ đồ thị hàm trọng lượng, hàm quá độ. Có nhận xét gì về hệ thống qua các đồ thị đó.



Hình 2.131: Cho bài tập 20

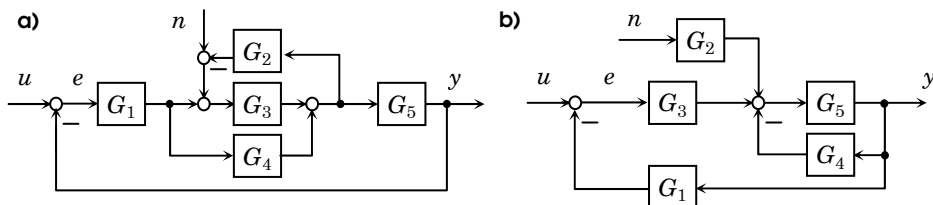
21. Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình 2.132. Hệ có tín hiệu vào  $u(t)$ , gọi là *tín hiệu chủ đạo* và ra  $y(t)$ . Tín hiệu  $n(t)$  là nhiễu tác động vào hệ. Tín hiệu  $e(t)$  là sai lệch giữa tín hiệu chủ đạo  $u(t)$  so với thực tế hệ có được  $y(t)$ . Ký hiệu ảnh Laplace của  $u(t)$  là  $U(s)$ , của  $y(t)$  là  $Y(s)$ , của  $n(t)$  là  $N(s)$  và của  $e(t)$  là  $E(s)$ . Hãy

a) Xác định hàm truyền  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Big|_{n(t)=0}$  của hệ khi không có nhiễu.

b) Xác định hàm nhạy của hệ (*sensitivity function*)  $S(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} \Big|_{u(t)=0}$  (hàm nhạy có tác dụng đo thành phần nhiễu có lẫn trong tín hiệu ra).

c) Xác định hàm truyền biểu diễn sai lệch theo đầu vào  $E_1(s) = \frac{E(s)}{U(s)} \Big|_{n(t)=0}$

d) Xác định hàm truyền biểu diễn sai lệch theo nhiễu  $E_2(s) = \frac{E(s)}{N(s)} \Big|_{u(t)=0}$



Hình 2.132: Cho bài tập 21

22. Sử dụng công thức định nghĩa hàm đặc tính tần, hãy xác định hàm trọng lượng  $g(t)$  cho các hệ có hàm đặc tính tần như sau:

a)  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

b)  $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(1+2j\omega)}$

c)  $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2}$

d)  $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2(1+2j\omega)}$

23. Hãy vẽ đồ thị đặc tính tần biên–pha và đồ thị Bode cho các hệ có hàm đặc tính tần cho trong bài 22.

24. Sử dụng kết quả bài 23, hãy xác định đáp ứng đầu ra của những hệ đó, khi đầu vào là tín hiệu điều hoà:

a)  $u(t)=\sin(t)$

b)  $u(t)=\sin(t)+\sin(2t)$

c)  $u(t)=x(t)*s(t)$  với  $x(t)=\begin{cases} 1-t & \text{ khi } |t|\leq 1 \\ 0 & \text{ khi } |t|>1 \end{cases}$  và  $s(t)$  là hàm trích mẫu chu kỳ 1.

25. Hãy vẽ đường đặc tính tần biên–pha, đường đặc tính tần logarith (biểu đồ Bode) của những hệ thống có hàm truyền cho như sau

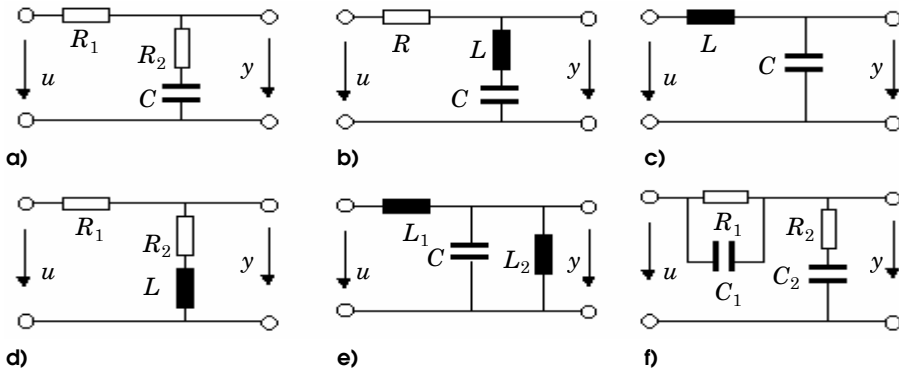
a)  $G(s)=\frac{1}{1+sT}$

b)  $G(s)=\frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

c)  $G(s)=\frac{k}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$

d)  $G(s)=k\left(1+\frac{1}{sT_I}+sT_D\right)$

26. Hãy xác định hàm truyền cũng như các thành phần khuếch đại, tích phân, vi phân của các hệ cho ở hình sau:



Hình 2.133: Cho bài tập 26

27. Chứng minh rằng đường đặc tính tần số biên–pha của hệ có hàm truyền:

$$G(s)=\frac{b_0+b_1s+b_2s^2}{a_0+a_1s+a_2s^2} \quad \text{có } a_0a_2>0, \quad a_1\neq 0 \quad \text{và} \quad \det\begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{pmatrix}=0$$

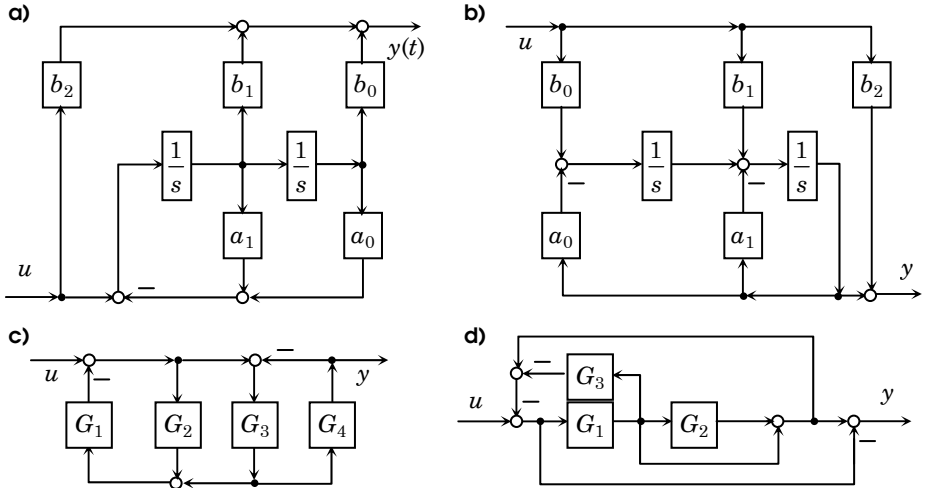
là một đường tròn. Hãy xác định tâm và bán kính của đường tròn.

28. Cho hệ thống SISO mô tả bởi:

$$G(s)=\frac{4}{(s+3)^2(s+2)(s+1)}$$

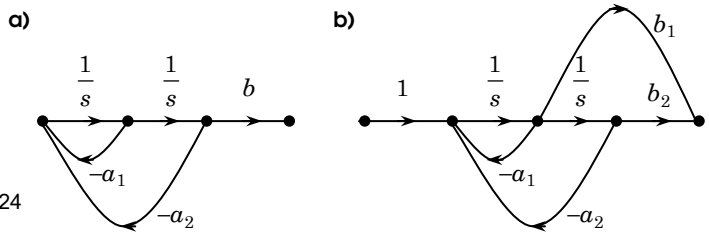
Hãy xác định tín hiệu  $u(t)$  sao cho khi kích thích hệ từ trạng thái 0 bằng  $u(t)$  ở đầu vào thì sau một khoảng thời gian đủ lớn hệ sẽ có đáp ứng  $y(t)$  có góc lệch pha với  $u(t)$  là  $\pm 90^\circ$ .

29. Tìm hàm truyền của những hệ thống có sơ đồ khối sau



Hình 2.134: Cho bài tập 29

30. Xác định hàm truyền của những hệ thống có sơ đồ tín hiệu cho trong hình 2.135



Hình 2.135: Cho bài tập 24

31. Hãy tìm hàm truyền  $G(s)$  hợp thức và bền cho hệ tuyến tính, biết rằng phần thực  $T(\omega)$  của hàm đặc tính tần  $G(j\omega)$  của hệ là:

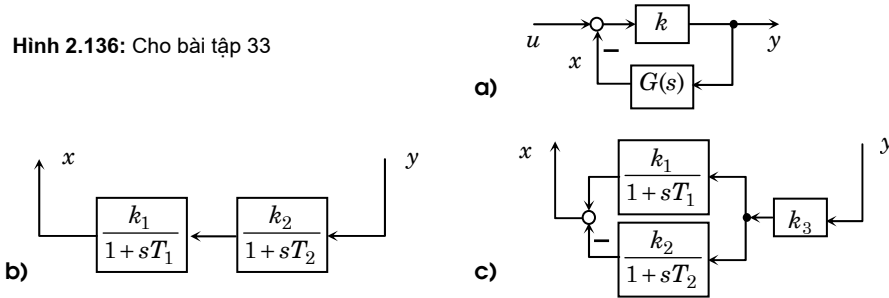
$$\text{a) } T(\omega) = \operatorname{Re}G(j\omega) = \frac{5 - 20\omega^2}{1 + 17\omega^2 + 16\omega^4} \quad \text{b) } T(\omega) = \operatorname{Re}G(j\omega) = \frac{\omega^4 - 2\omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$$

32. Hãy tìm hàm truyền  $G(s)$  hợp thức và bền cho hệ tuyến tính, nếu  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$  và phần ảo  $A(\omega)$  của hàm đặc tính tần  $G(j\omega)$  của hệ là

$$\text{a) } A(\omega) = \operatorname{Im}G(j\omega) = \frac{25\omega}{1 + 17\omega^2 + 16\omega^4} \quad \text{b) } A(\omega) = \operatorname{Im}G(j\omega) = \frac{-3\omega^3 - \omega}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$$

33. Cho hệ thống phản hồi tín hiệu ra có sơ đồ khối mô tả ở hình 2.136a). Hãy tìm hàm truyền của hệ thống khi  $G(s)$  có cấu trúc cho trong các hình 2.136b) và 2.132c). Trong trường hợp nào thì hệ sẽ là hệ pha cực tiểu?

Hình 2.136: Cho bài tập 33



34. Kiểm tra xem hàm đặc tính tần của khâu  $IT_1$  có thỏa mãn định lý 2.11 về toán tử Hilbert không và giải thích tại sao?.
35. Xác định hàm truyền  $G(s)$  cho các hệ có hàm trọng lượng sau:
- a)  $g(t)=2+t+3t^2$       b)  $g(t)=t^2 \sin t$       c)  $g(t)=(t+t^2) \cos t$
36. Không tìm nghiệm, hãy chỉ ra rằng tất cả nghiệm của đa thức sau đều có phần thực nhỏ hơn  $-1$
- a)  $A(s) = s^3 + 8s^2 + 22s + 20$       b)  $A(s) = s^4 + 10s^3 + 38s^2 + 64s + 40$
37. Sử dụng tiêu chuẩn Routh, hoặc Hurwitz để kiểm tra tính ổn định hệ thống có đa thức đặc tính sau
- a)  $A(s) = 1,15s^6 + 7,25s^5 + 18,60s^4 + 24,84s^3 + 18,20s^2 + 6,69s + 1,08$
- b)  $A(s) = 5s^5 + 47s^4 + 140,55s^3 + 168,67s^2 + 82,63s + 13,8$
- c)  $A(s) = 25s^5 + 87,5s^4 + 80s^3 + 5,5s^2 - 8,64s + 0,72$
- Có bao nhiêu điểm cực  $s_k$  của hệ thỏa mãn  $0 < \text{Re}(s_k) < 1$  và  $-1 < \text{Re}(s_k) < 0$ .
38. Sử dụng tiêu chuẩn Michailov để kiểm tra tính ổn định hệ thống có phương trình đặc tính
- a)  $A(s) = s^5 + s^4 + 20s^3 + 10s^2 + 64s + 9$
- b)  $A(s) = s^5 + s^4 + 25s^3 + 5s^2 + 144s + 4$
39. Xác định có tồn tại hay không tham số  $a > 0$  để hàm quá độ của những hệ thống có hàm truyền  $G(s)$  như sau không có độ quá điều chỉnh:

a)  $\frac{(1+as)^2}{(1+s)(1+0,8s)}$       b)  $\frac{(1+0,5s)(1+as)}{(1+0,75s)(1+a^2s)}$       c)  $\frac{(1+s)(1+2s)(1+3s)}{(1+0,5s)(1+a^2s)(1+as)^2}$



40. Cho hệ tuyến tính tham số hằng. Gọi  $g(t)$ ,  $h(t)$  lần lượt là hàm trọng lượng và hàm quá độ của hệ. Chứng minh rằng:

$$\frac{dh(t)}{dt} + h(t)\delta(t) = g(t)$$

41. Cho hệ có hàm truyền  $G(s) = \frac{1}{1 + 2DTs + (Ts)^2}$ ,  $0 < D < 1$

a) Giữ  $T$  cố định, hãy xác định  $D$  để  $Q = \int_0^\infty [h(t) - h_\infty]^2 dt \rightarrow \min$ , trong đó  $h(t)$  là

hàm quá độ của hệ và  $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$

b) Tại sao đối với việc tối ưu  $Q \rightarrow \min$  thì tham số  $T$  lại không có ý nghĩa.

c) Xác định độ quá điều chỉnh  $\Delta h_{\max} = h_{\max}(t) - h_\infty$ .

d) Tính các giá trị  $T_\infty$ ,  $T_{\max}$  và  $T_{5\%}$ .

42. Hãy chỉ rằng hệ kín có hàm truyền hệ hở  $G_h(s) = \frac{k}{s} e^{-s\tau}$  sẽ ổn định nếu  $\tau < \frac{\pi}{2k}$ .

43. Xét hệ hồi tiếp với hệ hở có hàm truyền

$$G_h(s) = k \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

Giả sử rằng hệ hồi tiếp là ổn định. Chứng minh rằng khi được kích thích bởi tín hiệu  $1(t)$  ở đầu vào, hệ sẽ có sai lệch tĩnh  $e_\infty$  là

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + G_h(0)} = \frac{a_0}{a_0 + k b_0}$$

Từ đó rút ra được điều kiện cần phải có như thế nào của  $G_h(s)$  để sai lệch tĩnh  $e_\infty$  của hệ hồi tiếp bằng không.

44. Cho hệ kín có hàm truyền của hệ hở là  $G_h(s) = \frac{2}{s(s+2)}$

- a) Vẽ đồ thị đường đặc tính tần biên pha của hệ hở  
b) Vẽ đồ thị Nyquist của hệ hở và từ đó kết luận về tính ổn định của hệ kín  
c) Hai đồ thị trên khác nhau ở điểm nào?

45. Hãy sử dụng tiêu chuẩn Nyquist để biện luận tính ổn định hệ kín có hàm truyền của hệ hở  $G_h(s)$  là

$$\text{a) } G_h(s) = \frac{k(1+2s)}{(1+s)(1+3s)} \quad \text{b) } G_h(s) = \frac{k(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+1)(s+3)}$$

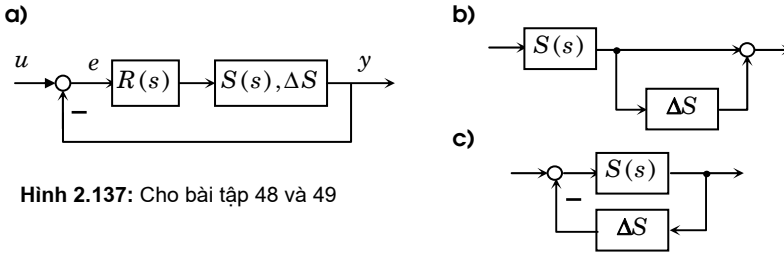
46. Cho hệ kín có hàm truyền của hệ hở là  $G_h(s) = \frac{k}{1 + 3s + 2s^2 + 6s^3 + 2s^4}$

- a) Có bao nhiêu điểm cực của hệ hở  $G_h(s)$  không nằm bên trái trục ảo?
- b) Vẽ đồ thị Nyquist của hệ hở  $G_h(s)$  ứng với  $k=1$ .
- c) Hãy sử dụng tiêu chuẩn Nyquist để xác định hằng số  $k$  làm hệ kín ổn định.
- d) Hãy kiểm tra lại kết quả của câu c) nhờ tiêu chuẩn Routh.

47. Hãy xây dựng quỹ đạo nghiệm số cho hệ kín có hàm truyền của hệ hở cho sau đây và biện luận chất lượng hệ kín từ dạng quỹ đạo nghiệm số thu được

- a)  $\frac{k(s+2)}{(s+1)(s+3)}$       b)  $\frac{k(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)(s+5)}$
- c)  $\frac{k(1+0,2s)}{6s(1+0,5s)(1+0,33s)}$       d)  $\frac{k(1+0,2s)}{6s(1+0,5s)(1+0,33s)}$
- e)  $\frac{k(s+7)}{s^2+6s+18}$       f)  $\frac{k}{s(s+20)(s^2+20s+200)}$
- g)  $\frac{(1+3s)(1+s)}{(1+ks)(1+2s)(1+4s)}$       h)  $\frac{k}{(1+0,5s)(1+1,32s+(0,33s)^2)}$
- i)  $\frac{2,7}{(1+0,5s)(1+0,66ks+(0,33s)^2)}$

48. Xét hệ kín cho ở hình 2.137a), trong đó đối tượng  $S(s)$  có chứa thành phần bất định không cấu trúc  $\Delta S$  thỏa mãn  $|\Delta S(j\omega)| \leq \Delta_{max}(\omega)$  với mọi  $\omega$ . Giả thiết rằng hệ có hàm truyền hệ hở  $R(s)[S(s), \Delta S]$  bên với mọi  $\Delta S$ .



Hình 2.137: Cho bài tập 48 và 49

Chứng minh rằng hệ kín sẽ ổn định bền vững khi và chỉ khi

- a)  $\|T\Delta_{max}\|_{\infty} < 1$  nếu kiểu sai lệch mô hình đối tượng là bù nhân (hình 2.137b), trong đó  $T(s) = \frac{RS}{1+RS}$  là ký hiệu của hàm bù nhạy.

3  $\|RS\Delta_{max}\|_{\infty} < 1$  nếu kiểu sai lệch mô hình đối tượng là bù phối hợp (hình 2.137c).

49. Xét hệ cho ở hình 2.137a) với kiểu bất định  $\Delta S$  của đối tượng cho ở hình 2.136b) thỏa mãn  $|\Delta S(j\omega)| \leq \Delta_{max}(\omega)$  với mọi  $\omega$ . Giả thiết rằng hệ có hàm truyền hệ hở  $R(s)[S(s), \Delta S]$  bền với mọi  $\Delta S$ . Chứng minh rằng để hệ vừa ổn định bền vững, vừa có độ nhạy  $K(s) = \frac{1}{1+RS}$  thỏa mãn  $\|K(j\omega)\|_{\infty} < \varepsilon$  thì cần thiết phải có

$$\min\left\{\frac{1}{\varepsilon}, \Delta_{max}\right\} < 1 \quad \text{với mọi } \omega$$

50. Sử dụng tiêu chuẩn Kharitonov để kiểm tra tính Hurwitz chặt của các đa thức sau:

a)  $A(s) = s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$

với  $6 \leq a_0 \leq 30, 20 \leq a_1 \leq 100, 20 \leq a_2 \leq 70, 7 \leq a_3 \leq 16$

b)  $A(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$

với  $0 \leq a_0 \leq 30, 30 \leq a_1 \leq 50, 20 \leq a_2 \leq 60, 10 \leq a_3 \leq 15$

51. Hãy xác định các tham số bộ điều khiển I hoặc PI hoặc PID nếu đối tượng có hàm truyền:

a)  $\frac{1}{1+4s}$

b)  $\frac{2}{(1+0,2s)(1+3s)}$

c)  $\frac{2}{(1+3s)(1+2s)(1+s)}$

d)  $\frac{2}{(1+3s)(1+5s)(1+0,3s)^5}$

52. Giống như bài tập 51) nhưng cho trường hợp đối tượng có thêm khâu giữ trễ  $e^{-0,5s}$ .

53. Hãy xác định tham số tối ưu đối xứng cho bộ điều khiển PID (ứng với  $a=2, a=4$  và  $a=9$ ) để điều khiển các đối tượng có hàm truyền như sau

a)  $\frac{2}{s(1+1,5s)}$

b)  $\frac{3}{2s(1+s)(1+3s)}$

c)  $\frac{2}{s(1+2s)(1+6s)}$

Hãy ước lượng độ quá điều chỉnh  $\Delta h$  của hệ với những bộ điều khiển tìm được, đồng thời so sánh với độ quá điều chỉnh của hệ cho trường hợp  $a=4$  và hệ được nối thêm bộ tiền xử lý để giảm độ quá điều chỉnh.

54. Giống như bài tập 53) nhưng cho trường hợp đối tượng có thêm khâu giữ trễ  $e^{-2s}$ .

55. Hãy thiết kế bộ điều khiển cho những đối tượng có hàm truyền:

a)  $S(s) = \frac{2(s-2)}{s^2-1}$

b)  $S(s) = \frac{2}{s^2-4}$

c)  $S(s) = \frac{s+2}{s(s-1)}$

sao cho hệ kín của chúng có hàm truyền giống như hàm mẫu:

$$G_m(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

56. Hãy xác định tập  $\mathcal{O}$  gồm những bộ điều khiển làm ổn định nội cho đối tượng có hàm truyền sau:

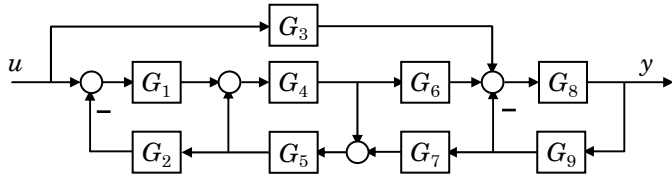
a)  $S(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$

b)  $S(s) = \frac{s+1}{s(s-2)}$

c)  $S(s) = \frac{s-1}{s(s+2)}$

57. Cho đối tượng mô tả bằng hai hàm truyền  $S_1, S_2$  (tại hai điểm làm việc khác nhau), trong đó  $S_1$  là hàm bền. Chứng minh rằng  $S_1, S_2$  sẽ ổn định song hành được khi và chỉ khi  $S = S_2 - S_1$  là ổn định mạnh được.

58. Cho hệ có sơ đồ khối ở hình 2.138.



Hình 2.138: Cho bài tập 58

a) Hãy xác định hàm truyền tương đương của hệ.

b) Biết  $G_1=G_4=G_6=1$ ,  $G_3=G_5=G_7=0$ ,  $G_9=k$  và  $G_2=G_8 = \frac{1+s}{1+s+2s^2+s^3+s^4}$ . Hãy xác định hằng số  $k$  để hệ ổn định.

c) Biết  $G_1=G_4=G_5=G_6=1$ ,  $G_2=G_7=0$ ,  $G_3=k_1$ ,  $G_9=k_2$  và  $G_8 = \frac{1+s^2}{1+2s+s^2+s^3+s^4}$ . Hãy xác định hai hằng số  $k_1, k_2$  để hệ ổn định và có sai lệch tĩnh bằng 0, tức là có  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - u(t)) = 0$ , khi hệ được kích thích bằng tín hiệu hằng ở đầu vào.

d) Với các điều kiện như ở câu c) và hai hằng số  $k_1, k_2$  tìm được ở đó, hãy xác định sai lệch tĩnh (ở chế độ xác lập) khi tín hiệu vào là  $u=\sin 2t$ .

### 3 ĐIỀU KHIỂN LIÊN TỤC TRONG MIỀN THỜI GIAN

#### 3.1 Công cụ toán học

##### 3.1.1 Những cấu trúc đại số cơ bản

###### Nhóm

Nhóm bao gồm một tập hợp  $V$  và ánh xạ  $*$ :  $V^2 \rightarrow V$ , thỏa mãn các tính chất sau:

- Nếu  $\underline{x}, \underline{y} \in V$  thì  $\underline{z} = \underline{x} * \underline{y}$  cũng thuộc  $V$ , tức là  $V$  kín (hay đóng) với  $*$ .
- Với mọi  $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$  bao giờ cũng có  $(\underline{x} * \underline{y}) * \underline{z} = \underline{x} * (\underline{y} * \underline{z})$ , nói cách khác  $*$  có tính kết hợp.
- Tồn tại trong  $V$  một phần tử  $\underline{e}$  sao cho  $\underline{x} * \underline{e} = \underline{e} * \underline{x} = \underline{x}$  đúng với mọi  $\underline{x} \in V$ . Phần tử  $\underline{e}$  được gọi là *phần tử đơn vị* của  $V$ .
- Với mọi  $\underline{x} \in V$  bao giờ cũng tồn tại một phần tử  $\underline{x}^{-1}$  cũng thuộc  $V$  sao cho  $\underline{x}^{-1} * \underline{x} = \underline{x} * \underline{x}^{-1} = \underline{e}$ . Phần tử  $\underline{x}^{-1}$  được gọi là *phần tử nghịch đảo* của  $\underline{x}$ .

Phần tử đơn vị  $\underline{e}$  là duy nhất. Thật vậy, nếu có  $\underline{x} * \underline{e}_1 = \underline{e}_1 * \underline{x} = \underline{x}$  và  $\underline{x} * \underline{e}_2 = \underline{e}_2 * \underline{x} = \underline{x}$  đúng với mọi  $\underline{x} \in V$  thì cũng phải có  $\underline{e}_1 = \underline{e}_2$  vì:

$$\underline{e}_1 = \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = \underline{e}_2$$

Cũng tương tự như vậy, nếu có hai phần tử nghịch đảo  $\underline{x}^{-1}$ ,  $\hat{\underline{x}}^{-1}$  của  $\underline{x}$  thì do có:

$$\underline{x}^{-1} = \underline{x}^{-1} * \underline{e} = \underline{x}^{-1} * (\underline{x} * \hat{\underline{x}}^{-1}) = (\underline{x}^{-1} * \underline{x}) * \hat{\underline{x}}^{-1} = \underline{e} * \hat{\underline{x}}^{-1} = \hat{\underline{x}}^{-1}$$

tức là  $\underline{x}^{-1} = \hat{\underline{x}}^{-1}$  nên phần tử nghịch đảo  $\underline{x}^{-1}$  cũng phải là duy nhất.

Nếu tập hợp  $V$  và ánh xạ  $*$ :  $V^2 \rightarrow V$  chỉ thỏa mãn có hai tính chất 1) và 2) thì  $V$  được gọi là *nửa nhóm*. Nửa nhóm có chứa phần tử đơn vị  $\underline{e}$  được gọi là *Monoid*.

Để nhấn mạnh ánh xạ  $*$  tạo với tập  $V$  thành được một nhóm, ta sẽ sử dụng ký hiệu  $(V, *)$ . Tùy thuộc vào bản chất của  $*$  mà nhóm  $(V, *)$  còn có các tên khác nhau. Ví dụ như *nhóm cộng*, nếu ánh xạ  $*$  là phép cộng  $+$ , hoặc *nhóm nhân* nếu  $*$  là phép nhân  $\bullet$ . Riêng đối với nhóm nhân, thay vì  $\underline{x} \bullet \underline{y}$  ta sẽ viết đơn giản hơn là  $\underline{x}\underline{y}$ . Phần tử đơn vị  $\underline{e}$

trong nhóm cộng có tên gọi là *phần tử không*, còn trong nhóm nhân thì nó là *phần tử một*. Nếu ánh xạ  $*$  trong  $(V, *)$  còn có tính giao hoán  $\underline{x} * \underline{y} = \underline{y} * \underline{x}$  với mọi  $\underline{x}, \underline{y} \in V$  thì  $(V, *)$  được gọi là *nhóm giao hoán* hay *nhóm Abel*.

- Một tập con  $W$  của  $V$  sẽ là một nhóm con trong  $(V, *)$  nếu:
- $W$  chứa phần tử đơn vị  $\underline{e}$  của  $(V, *)$ .
  - Nếu có  $\underline{x}, \underline{y} \in W$  thì cũng có  $\underline{x} * \underline{y}^{-1} \in W$ .

**Ví dụ 3.1:** Một số nhóm thường gặp

- Tập tất cả các số nguyên  $\mathbb{Z}$  với phép cộng là một nhóm Abel.
- Tập tất cả các số hữu tỷ  $\mathbb{Q}$  với phép cộng trên nó tạo thành nhóm Abel.
- Tập các số hữu tỷ khác 0 cùng phép nhân tạo thành nhóm Abel.
- Tập các đa thức cùng bậc của biến  $x$  với phép cộng đa thức là một nhóm Abel.
- Tập các số thực khác 0 với phép nhân là một nhóm Abel. □

**Vành**

- Vành là tập hợp  $V$  với hai ánh xạ  $+, \bullet: V^2 \rightarrow V$ , thỏa mãn:
- Với  $+$  thì  $V$  là một *nhóm*  $(V, +)$ .
  - Gọi phần tử đơn vị của  $(V, +)$  là 0 thì cùng với  $\bullet$  tập  $V \setminus \{0\}$  tạo thành nửa nhóm.

**Ví dụ 3.2:** Một số vành thường gặp

- Tập các số nguyên  $\mathbb{Z}$  hay hữu tỷ  $\mathbb{Q}$  với phép cộng và nhân tạo thành vành.
- Tập các số thực  $\mathbb{R}$  với phép cộng và nhân là một vành.
- Tập các vector cùng phép tính cộng vector và phép nhân có hướng tạo thành một vành.
- Tập tất cả các ma trận vuông cùng số hàng/cột với phép cộng và nhân ma trận tạo thành một vành. □

**Trường**

- Trường (*field*) là một tập hợp  $F$  với hai ánh xạ  $+, \bullet: F^2 \rightarrow F$ , thỏa mãn:
- Với  $+$  thì  $F$  là một nhóm Abel  $(F, +)$ .
  - Gọi phần tử đơn vị của  $(F, +)$  là 0 thì cùng với  $\bullet$  tập  $F \setminus \{0\}$  cũng tạo thành nhóm Abel  $(F \setminus \{0\}, \bullet)$ . Phần tử đơn vị của  $(F \setminus \{0\}, \bullet)$  thường được viết là 1.
  - Với mọi  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in F$  có  $\underline{a} \bullet (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \bullet \underline{b} + \underline{a} \bullet \underline{c}$ .

Ta sẽ ký hiệu trường gồm tập hợp  $F$  và hai ánh xạ  $+, \bullet$  là  $(F, +, \bullet)$ . Hai phần tử 0 và 1 được gọi là các *phần tử không, phần tử một* của trường  $(F, +, \bullet)$ . Tuy nhiên, khi hai phép tính  $+, \bullet$  đã xác định mà không sợ bị nhầm lẫn thì có thể ký hiệu ngắn gọn là  $F$ .

**Ví dụ 3.3: Một số trường thường gặp**

- Tập các số hữu tỷ  $\mathbb{Q}$  với phép cộng và nhân tạo thành một trường.
- Tập các số thực  $\mathbb{R}$  cùng phép cộng và nhân tạo thành một trường.
- Tập các số phức  $\mathbb{C}$  cùng phép cộng và nhân tạo thành một trường. □

**Không gian vector**

Cho một nhóm Abel  $(V, +)$  và một trường  $(F, +, \cdot)$ . Nếu có ánh xạ  $\circ$  được định nghĩa cho  $F \times V \rightarrow V$ , tức là giữa một phần tử  $\underline{x}$  của  $V$  với một phần tử  $a$  của  $F$ , thỏa mãn:

- $a \circ \underline{x} \in V$  với mọi  $\underline{x} \in V$  và  $a \in F$ .
- $a \circ (b \circ \underline{x}) = (a \cdot b) \circ \underline{x}$  với mọi  $\underline{x} \in V$  và  $a, b \in F$ .
- $1 \circ \underline{x} = \underline{x}$  với mọi  $\underline{x} \in V$ .
- $(a+b) \circ \underline{x} = a \circ \underline{x} + b \circ \underline{x}$  với mọi  $\underline{x} \in V$  và  $a, b \in F$ .
- $a \circ (\underline{x} + \underline{y}) = a \circ \underline{x} + a \circ \underline{y}$  với mọi  $\underline{x}, \underline{y} \in V$  và  $a \in F$ .

thì  $(V, +)$  được gọi là *không gian vector* trên trường  $(F, +, \cdot)$ .

Ta sẽ sử dụng ký hiệu  $(V, +, F)$  để chỉ không gian vector  $V$  trên trường  $F$ . Không gian vector  $(V, +, F)$  có tính kín với các phép biến đổi tuyến tính, tức là nếu  $\underline{x}, \underline{y} \in V$  và  $a, b \in F$  thì  $a\underline{x} + b\underline{y} \in V$ . Bởi vậy nó còn có tên gọi là *không gian tuyến tính*. Phần tử của  $V$  được gọi là *vector*. Phần tử không của  $V$  được ký hiệu bằng  $\underline{0}$ .

Ở nhiều trường hợp, và cũng để đơn giản trong cách viết, khi mà trường  $F$  cùng các phép tính  $+, \cdot, \circ$  đã xác định và không sợ bị nhầm lẫn thì thay cho ký hiệu  $(V, +, F)$  để chỉ không gian vector  $V$  trên trường  $F$  ta sẽ viết ngắn gọn là  $V$ .

Một tập các vector  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  thuộc không gian vector  $V$  trên trường  $F$  được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu:

$$a_1 \underline{x}_1 + a_2 \underline{x}_2 + \dots + a_n \underline{x}_n = \underline{0}, \text{ trong đó } a_1, a_2, \dots, a_n \in F$$

chỉ đúng khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , với  $0$  là phần tử không của trường  $F$ .

Cho tập  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  là  $n$  vector tùy ý của  $V$  (chưa cần phải là độc lập tuyến tính). Một vector  $\underline{y}$  tạo bởi:

$$\underline{y} = a_1 \underline{x}_1 + a_2 \underline{x}_2 + \dots + a_n \underline{x}_n \quad \text{với} \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in F$$

cũng thuộc  $V$  và gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ .

Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  khi  $a_1, a_2, \dots, a_n$  chạy khắp trên  $F$  là một không gian vector định nghĩa trên cùng trường  $F$  (giống như  $V$ ) và được ký hiệu bởi:

$$\text{span}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n).$$

Nó được gọi là *bao tuyến tính* của  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ . Do có thể bao tuyến tính không chứa tất cả các phần tử của  $V$  nên nó chỉ là một không gian vector con nằm trong  $V$ .

Nếu  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  là  $n$  các vector độc lập tuyến tính thuộc  $V$  và thỏa mãn:

$$\text{span}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) = V$$

thì tập  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  được gọi là *một cơ sở* của  $V$ . Số các vector  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  trong một cơ sở của  $V$  được gọi là số chiều (*dimension*) của  $V$  và ký hiệu bằng:

$$\dim V = n.$$

Như vậy, bất cứ  $n$  vector độc lập tuyến tính nào của một không gian vector  $V$  với số chiều  $n$  đều có thể là một cơ sở của  $V$ .

Cũng từ đây ta thấy số chiều của một bao tuyến tính tạo bởi  $n$  vector  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  (không bắt buộc phải độc lập tuyến tính) sẽ bằng số các vector độc lập tuyến tính trong  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  và do đó:

$$\dim \text{span}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) \leq n.$$

Một tập con  $W$  của không gian vector  $V$  xác định trên trường  $F$  sẽ là một không gian vector con trong  $V$  nếu:

- $\underline{0} \in W$  và nếu có  $\underline{x}, \underline{y} \in W$  thì cũng có  $\underline{x} + \underline{y} \in W$ .
- Nếu có  $a \in F$  và  $\underline{x} \in W$  thì cũng có  $a\underline{x} \in W$ .

Không gian vector còn có tên gọi khác là *không gian tuyến tính*.

### Không gian vector con

Một tập con  $W$  của không gian vector  $V$  xác định trên trường  $F$  sẽ là một không gian vector con trong  $V$  nếu:

- a)  $\underline{0} \in W$ .
- b) Nếu có  $\underline{x}, \underline{y} \in W$  thì cũng có  $\underline{x} + \underline{y} \in W$ .
- c) Nếu có  $a \in F$  và  $\underline{x} \in W$  thì cũng có  $a\underline{x} \in W$ .

Cho một không gian vector  $V$  xác định trên trường  $F$  và hai không gian vector con  $W_1, W_2$  của nó. Vậy thì:

- 1)  $a\underline{0} = 0\underline{x} = \underline{0}$ , trong đó  $\underline{0}$  là phần tử không của  $V$  và  $0$  là phần tử không của  $F$ .
- 2)  $(-1)\underline{x} = -\underline{x}$ , trong đó  $-1$  là phần tử đơn vị của  $F$  và  $-\underline{x}$  là phần tử nghịch đảo của  $\underline{x}$ .
- 3) Từ  $a\underline{x} = \underline{0}$  suy ra hoặc  $a = 0$  hoặc  $\underline{x} = \underline{0}$ , trong đó  $\underline{0}$  là phần tử không của  $V$  và  $0$  là phần tử  $0$  của  $F$ .



- 4) Tổng  $S=W_1+W_2=\{\underline{w}_1+\underline{w}_2 \mid \underline{w}_1 \in W_1 \text{ và } \underline{w}_2 \in W_2\}$  là không gian vector con nhỏ nhất của  $V$  chứa cả hai không gian con  $W_1$  và  $W_2$ .
- 5) Nếu có  $S=W_1+W_2$  và  $W_1 \cap W_2=\{\underline{0}\}$  thì  $S$  được gọi là *tổng trực tiếp* của  $W_1$  và  $W_2$ . Tổng trực tiếp được ký hiệu là  $S=W_1 \oplus W_2$ . Nếu  $S$  là tổng trực tiếp của  $W_1$  và  $W_2$  thì mọi phần tử  $\underline{s} \in S$  đều phân tích được thành  $\underline{s}=\underline{w}_1+\underline{w}_2$  với  $\underline{w}_1 \in W_1$ ,  $\underline{w}_2 \in W_2$ . Cách phân tích đó cũng là duy nhất. Khi đó  $\underline{w}_1$  được gọi là *hình chiếu* của  $\underline{s}$  lên  $W_1$  và  $\underline{w}_2$  là *hình chiếu* của  $\underline{s}$  lên  $W_2$ .
- 6)  $\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1 \cap W_2)$ .
- 7) Nếu  $S=W_1 \oplus W_2$  thì  $\dim(S)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$ .

### Đa tạp tuyến tính

Xét không gian vector  $V$  xác định trên trường  $F$  và một không gian vector con  $W$  của  $V$ . Ký hiệu  $\underline{v}$  là một phần tử của  $V$  (không bắt buộc phải thuộc  $W$ ). Khi đó tập  $D$ :

$$D=\{\underline{v}+\underline{w} \mid \underline{w} \in W\}$$

được gọi là *đa tạp* được sinh ra từ  $W$ . Như vậy đa tạp tuyến tính  $D$  có thể không chứa phần tử  $\underline{0}$  (nếu  $\underline{v} \neq \underline{0}$ ) và có dạng *song song* với không gian vector con  $W$ .

### Đại số

Cho một không gian vector  $(V, +, F)$  trên trường  $(F, +, \bullet)$  và  $\circ$  là ánh xạ giữa một phần tử  $\underline{x}$  của  $V$  với một phần tử  $a$  của  $F$ . Nếu:

- Ngoài phép tính  $+$ , còn có phép tính  $\times$  trên  $V$  làm cho tập  $V$  trở thành một vành.
- $a \circ (\underline{x} \times \underline{y}) = (a \circ \underline{x}) \times \underline{y}$  với mọi  $\underline{x}, \underline{y} \in V$  và  $a \in F$ .

thì  $(V, +, F)$  được gọi là *đại số  $V$*  xác định trên trường  $F$ .

Ngoài ra, nếu phép tính  $\times$  trên  $V$  còn là giao hoán:

$$\underline{x} \times \underline{y} = \underline{y} \times \underline{x} \quad \text{với mọi } \underline{x}, \underline{y} \in V$$

thì đại số  $V$  được gọi là *đại số giao hoán*.

Nếu đại số  $V$  chứa phần tử đơn vị của phép tính  $\times$  thì nó được gọi là *đại số có phần tử đơn vị*. Tất nhiên nếu tồn tại thì phần tử đơn vị này là duy nhất.

### Ideale

Cho một *đại số giao hoán*  $V$  xác định trên trường  $F$  với hai phép  $+$  và  $\times$  trên  $V$ . Một *Ideale* được hiểu là một không gian vector con  $M$  của  $V$  thỏa mãn: “Nếu có  $\underline{x} \in V$  và  $\underline{y} \in M$  thì cũng có  $\underline{x} \times \underline{y} = \underline{y} \times \underline{x} \in M$ ”.

### 3.1.2 Đại số ma trận

Ma trận là một tập hợp  $A$  gồm hữu hạn  $m \times n$  các số thực ( $\mathbb{R}$ ), hoặc phức ( $\mathbb{C}$ ) ký hiệu là  $a_{ij}$ ,  $i=1,2, \dots, m$ ;  $j=1,2, \dots, n$ , được sắp xếp theo hàng/cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{hàng thứ } i \\ \uparrow \text{cột thứ } j \end{matrix}$$

Theo cách sắp xếp như vậy thì phần tử  $a_{ij}$  của  $A$  sẽ nằm ở hàng thứ  $i$  và cột thứ  $j$ .

Do  $A$  có  $m \times n$  phần tử thuộc  $\mathbb{R}$  (hoặc  $\mathbb{C}$ ) như vậy mà nhiều khi người ta còn dùng ký hiệu  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (hoặc  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ) để chỉ một ma trận  $A$  có  $m$  hàng,  $n$  cột (có kiểu  $m \times n$ ).

Nếu như cách biểu diễn hàng/cột ở trên đã được thống nhất và không sợ bị nhầm ta có thể viết một ma trận  $A$  ngắn gọn hơn:

$$A = (a_{ij}), \quad i=1,2, \dots, m \quad \text{và} \quad j=1,2, \dots, n.$$

Một ma trận  $A=(a_{ij})$  có số hàng bằng số cột được gọi là *ma trận vuông*. Đường chéo nối các phần tử  $a_{ii}$  (chỉ số hàng bằng chỉ số cột) trong ma trận vuông được gọi là đường chéo chính. Đường chéo còn lại được gọi là *đường chéo phụ*.

Một ma trận vuông  $A=(a_{ij})$  có  $a_{ij}=0$  khi  $i \neq j$ , tức là các phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng 0, được gọi là *ma trận đường chéo*. Ma trận đường chéo được ký hiệu bởi  $A = \text{diag}(a_{ii})$ .

Ma trận đường chéo  $I = \text{diag}(1)$  được gọi là *ma trận đơn vị*.

Một vector có  $n$  phần tử:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

được xem là ma trận có  $n$  hàng và 1 cột. Nếu ghép chung các phần tử trên cột thứ  $j$  của ma trận  $A=(a_{ij})$ ,  $i=1,2, \dots, m$ ;  $j=1,2, \dots, n$  lại với nhau để thành vector:

$$\underline{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

gọi là *vector cột*, thì  $A$  sẽ có dạng:

$$A = (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n).$$

## Các phép tính với ma trận

- 1) *Phép cộng / trừ*: Cho hai ma trận  $A=(a_{ij})$  và  $B=(b_{ij})$  cùng có  $m$  hàng  $n$  cột. Tổng hay hiệu của chúng được định nghĩa là  $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$ .

Rõ ràng là phép cộng/trừ chỉ thực hiện được với những ma trận có cùng số hàng và cùng số cột. Những ma trận như vậy được gọi là ma trận cùng kiểu.

- 2) *Phép nhân với số thực (phức)*: Cho ma trận  $A=(a_{ij})$  có  $m$  hàng,  $n$  cột và một số vô hướng thực (phức)  $x$  tùy ý. Tích  $xA$  được hiểu là ma trận  $xA=(xa_{ij})$  và  $Ax$  được hiểu là  $Ax=(a_{ij}x)$ . Hiển nhiên có  $xA=Ax$ .

- 3) *Phép chuyển vị*: Ma trận chuyển vị của ma trận  $A=(a_{ij})$  với  $m$  hàng,  $n$  cột là ma trận  $A^T=(a_{ji})$  có  $n$  hàng,  $m$  cột, được tạo từ  $A$  qua việc hoán chuyển hàng thành cột và ngược lại cột thành hàng. Như vậy ta luôn có  $(A^T)^T=A$ .

Một ma trận  $A$  thỏa mãn  $A=A^T$  được gọi là *ma trận đối xứng*. Một ma trận đối xứng phải là ma trận vuông.

Nếu ghép chung các phần tử trên hàng thứ  $i$  của ma trận  $A=(a_{ij})$  lại với nhau thành vector  $\underline{h}_i^T=(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ , gọi là *vector hàng*, thì ma trận  $A$  sẽ viết được

$$\text{thành } A = \begin{pmatrix} \underline{h}_1^T \\ \vdots \\ \underline{h}_m^T \end{pmatrix} \text{ hay } A^T = (\underline{h}_1, \underline{h}_2, \dots, \underline{h}_m).$$

$$\text{Phép chuyển vị của ma trận khối: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

- 4) *Phép nhân*: Cho ma trận  $A=(a_{ik})$  có  $m$  hàng  $p$  cột và ma trận  $B=(b_{kj})$  có  $p$  hàng  $n$  cột. Tích  $AB=C=(c_{ij})$  của chúng là một ma trận có  $m$  hàng,  $n$  cột với các phần tử

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} = \underline{a}_i^T \underline{b}_j$$

trong đó  $\underline{a}_i$  là vector hàng thứ  $i$  của  $A$  và  $\underline{b}_j$  là vector cột thứ  $j$  của  $B$  (hàng thứ  $i$  của  $A$  nhân với cột thứ  $j$  của  $B$ ). Hai ma trận  $A, B$  chỉ có thể được nhân với nhau thành  $AB$  nếu số cột của ma trận  $A$  bằng số hàng của ma trận  $B$ .

Có thể thấy ngay được tập các ma trận, kết hợp với phép cộng / nhân ma trận và phép nhân với số thực (phức) tạo thành một *đại số*. Đó cũng là lý do tại sao người ta gọi là *đại số ma trận*.

Một ma trận vuông  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  được gọi là *ma trận trực giao* nếu  $A^T A = A A^T = I$ . Hai vector  $\underline{a}$  và  $\underline{b}$  được gọi là *trực giao với nhau* nếu  $\underline{a}^T \underline{b} = 0$ . Vector  $\underline{e}_i$  chỉ có phần tử thứ  $i$  bằng 1, các phần tử khác bằng 0, được gọi là *vector đơn vị*.

Phép nhân ma trận thường không giao hoán ( $AB \neq BA$ ). Nó có tính chất:

- a)  $(AB)^T = B^T A^T$ .
- b)  $A(B+C) = AB+AC$  và  $(A+B)C = AC+BC$ .
- c)  $A=AI=IA$ , với  $I$  là ma trận đơn vị.
- d)  $\underline{e}_i^T A \underline{e}_j = a_{ij}$ , tức là bằng phần tử thứ  $ij$  của  $A$ .
- e)  $A \underline{e}_j = \underline{c}_j$ , tức là bằng vector cột thứ  $j$  của  $A$ .
- f)  $\underline{e}_i^T A = \underline{h}_i^T$ , tức là bằng vector hàng thứ  $i$  của  $A$ .
- g)  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}$

**Chú ý:** Với hai ma trận  $A, B$  giao hoán, tức là thỏa mãn  $AB=BA$  sẽ còn có:

- a)  $A^{m+n} = A^m A^n$
- b)  $(AB)^n = A^m B^n$
- c)  $A^m B^n = B^n A^m$
- d)  $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^k B^{n-k}$  với  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- e)  $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

### Định thức của ma trận

Cho ma trận vuông  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  kiểu  $(n \times n)$ . Giá trị thực (phức):

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(A_{1n}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \end{aligned}$$

được gọi là *định thức* của ma trận  $A$ , trong đó  $A_{ij}$  là ma trận kiểu  $(n-1 \times n-1)$  thu được từ  $A$  bằng cách bỏ đi hàng thứ  $i$  và cột thứ  $j$ , tức là bỏ đi hàng và cột chứa phần tử  $a_{ij}$ . Ví dụ:

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \Rightarrow A_{11} = \left( \begin{array}{ccc} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right).$$

Công thức tính định thức trên được gọi là *công thức tổng quát*. Chỉ có ma trận vuông mới có định thức. Theo công thức tổng quát thì định thức của ma trận vuông có  $n$  hàng và cột được xác định truy hồi từ định thức các ma trận có số hàng cột ít hơn là  $n-1$ . Bắt đầu từ ma trận kiểu  $(1 \times 1)$  ta có:

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

Định thức của một ma trận vuông  $A=(a_{ij})$  thuộc kiểu  $(n \times n)$  có các tính chất sau:

- $A$  là ma trận suy biến khi và chỉ khi  $\det(A) = 0$ . Như vậy, nếu  $A$  có hai hàng hoặc hai cột phụ thuộc tuyến tính (ví dụ giống nhau) thì  $\det(A) = 0$ . Từ đây và cùng với công thức tính định thức tổng quát, ta có:

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} \det(A_{ij}) = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k=i \\ 0 & \text{nếu } k \neq i \end{cases}$$

- Một ma trận vuông  $A=(a_{ij})$ ,  $i, j=1, 2, \dots, n$  có  $a_{ij} = 0$  khi  $i > j$  (hoặc  $i < j$ ) được gọi là ma trận tam giác, vì có các phần tử nằm dưới (hoặc trên) đường chéo chính đều bằng 0. Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.
- Gọi  $A''$  là ma trận thu được từ  $A$  bằng cách nhân các phần tử của một cột hoặc một hàng với số thực (hoặc phức)  $\lambda$  thì  $\det(A'') = \lambda \det(A)$ .
- Cho ma trận vuông  $A$  có kiểu  $(n \times n)$  và một số thực (phức)  $\lambda$ . Vậy thì:  
 $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .
- Định thức của ma trận không bị thay đổi khi ta thay một cột (hàng) bằng tổng của nó với một cột (hay hàng) bất kỳ khác:

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \pm A_2 & A_2 \\ A_3 \pm A_4 & A_4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \pm A_3 & A_2 \pm A_4 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

- (Công thức của Schur): Nếu  $A_1, A_2, A_3, A_4$  là các ma trận là những ma trận có kiểu phù hợp và  $\Theta$  là ma trận có các phần tử 0, thì:

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \Theta & A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix} = \det(A_1) \det(A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2),$$

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- Gọi  $A'$  là ma trận thu được từ  $A$  bằng cách đổi chỗ hai vector hàng hoặc hai vector cột thì  $\det(A) = -\det(A')$ .

Về ý nghĩa hình học thì định thức của ma trận  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}, \text{ tức là } \det(A) = p_1 q_2 - q_1 p_2$$

chính là phần diện tích tam giác có ba đỉnh là điểm  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$  và gốc tọa độ 0, trong đó chiều quay của vector từ  $P$  tới  $Q$  là ngược kim đồng hồ.

## Hạng của ma trận

Xét ma trận  $A=(a_{ij})$ ,  $i=1,2, \dots, m$ ;  $j=1,2, \dots, n$  bất kỳ (có kiểu  $m \times n$ ) và gọi  $\underline{h}_i$ ,  $i=1,2, \dots, m$  là các vector hàng cũng như  $\underline{c}_j$ ,  $j=1,2, \dots, n$  là các vector cột của  $A$ . Nếu trong số  $m$  vector hàng  $\underline{h}_i$  có nhiều nhất  $p \leq m$  vector độc lập tuyến tính và trong số  $n$  vector cột  $\underline{c}_j$  có nhiều nhất  $q \leq n$  vector độc lập tuyến tính thì *hạng của ma trận* được hiểu là:

$$\text{Rank}(A) = \min \{p, q\}.$$

Một ma trận vuông  $A$  kiểu  $(n \times n)$  sẽ được gọi là không suy biến nếu  $\text{Rank}(A)=n$ . Ngược lại nếu  $\text{Rank}(A)<n$  thì  $A$  được nói là *ma trận suy biến*.

Hạng của ma trận có các tính chất sau:

- $\text{Rank}(A) = \min \{p, q\} = p = q$ .
- $\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(A)$  và  $\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(B)$ .
- $\text{Rank}(A+B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$ .
- Nếu  $A$  không suy biến thì  $\text{Rank}(AB) = \text{Rank}(B)$ .
- Nếu  $A$  thuộc kiểu  $(m \times n)$  với  $m \leq n$  và  $\text{Rank}(A)=m$  thì tích  $AA^T$  là ma trận vuông kiểu  $(m \times m)$  không suy biến với  $\text{Rank}(AA^T)=m$ .

## Ma trận nghịch đảo

Cho ma trận  $A=(a_{ij})$ ,  $i=1,2, \dots, m$ ;  $j=1,2, \dots, n$ , trong đó  $a_{ij}$  là những số thực (hoặc phức), nói cách khác  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (hoặc  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ). Nếu tồn tại một ma trận  $B$  thỏa mãn:

$$AB = BA = I \quad (\text{ma trận đơn vị}),$$

thì ma trận  $B$  được gọi là *ma trận nghịch đảo* của  $A$  và ký hiệu là  $B = A^{-1}$ .

Do phải tồn tại cả hai phép nhân  $AA^{-1}$  và  $A^{-1}A$  cho ra kết quả có cùng kiểu nên ma trận  $A$  phải là một ma trận vuông, tức là phải có  $m=n$ . Hơn nữa do  $\det(I)=1 \neq 0$  nên  $A$  phải là ma trận không suy biến.

Ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$  của  $A$  có các tính chất sau:

- $A^{-1}$  là phần tử nghịch đảo duy nhất của  $A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  và  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $A^{-1} = \frac{A_{adj}}{\det(A)}$ , với *ma trận bù*  $A_{adj}$  là ma trận có các phần tử  $\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$

và  $A_{ji}$  là ma trận thu được từ  $A$  bằng cách bỏ đi hàng thứ  $j$  và như cột thứ  $i$  (phần tử ở vị trí đối xứng với  $\hat{a}_{ij}$ ).

- Nếu  $A = \text{diag}(a_i)$  và không suy biến thì  $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_i}\right)$
- Với  $E_{ij}$  là ma trận lấy từ  $I$  sau khi đổi chỗ hai hàng  $i$  và  $j$  thì  $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$
- Ký hiệu  $E_k(a)$  là ma trận lấy từ  $I$  sau khi nhân hàng thứ  $k$  của  $I$  với  $a$ . Khi đó sẽ có  $E_k^{-1}(a) = E_k(-a)$
- (Công thức Frobenius) Cho ma trận vuông  $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$  không suy biến, trong đó  $A_1, A_2, A_3, A_4$  cũng là các ma trận. Khi đó sẽ có:

a) Nếu  $A_1$  không suy biến và  $B = A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2$  cũng không suy biến thì

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 B^{-1} A_3 A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 B^{-1} \\ -B^{-1} A_3 A_1^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

b) Nếu  $A_4$  không suy biến và  $C = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$  cũng không suy biến thì

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & -C^{-1} A_2 A_4^{-1} \\ -A_4^{-1} A_3 C^{-1} & A_4^{-1} + A_4^{-1} A_3 C^{-1} A_2 A_4^{-1} \end{pmatrix}$$

$$5) \text{ (Công thức Sherman-Morrison) } (A + \underline{b}\underline{c}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\underline{b}\underline{c}^T A^{-1}}{1 + \underline{c}^T A^{-1}\underline{b}}$$

$$6) \text{ (Công thức Sherman-Morrison-Woodbury) } (A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

$$7) \text{ (Công thức Hemes) } (A + BC^{-1}D)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

Ma trận vuông  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  không suy biến được gọi là *trực giao* nếu  $A^T = A^{-1}$ . Ở ma trận trực giao, các vector cột vuông góc với nhau và cũng như vậy, các vector hàng là vuông góc với nhau.

### Vết của ma trận

Cho ma trận vuông  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  kiểu  $(n \times n)$ . Vết của  $A$  được hiểu là tổng giá trị các phần tử trên đường chéo chính của  $A$  và được ký hiệu bằng  $\text{trace}(A)$ :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Vết của ma trận có các tính chất:

- $\text{trace}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \text{trace}(BA)$
- $\text{trace}(S^{-1}AS) = \text{trace}(A)$ , với  $S$  là ma trận vuông không suy biến bất kỳ.

## Ma trận là một ánh xạ tuyến tính

Xét hệ phương trình tuyến tính gồm  $m$  phương trình và  $n$  ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

Sử dụng ký hiệu:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

hệ phương trình trên viết được thành:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{\underline{y}} \quad \Leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{y}$$

Như vậy ma trận  $A$  chính là một ánh xạ  $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x}) = A\underline{x}$  và ánh xạ  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  này thỏa mãn tính chất tuyến tính:

$$\underline{f}(a_1\underline{x}_1 + a_2\underline{x}_2 + \dots + a_p\underline{x}_p) = a_1\underline{f}(\underline{x}_1) + a_2\underline{f}(\underline{x}_2) + \dots + a_p\underline{f}(\underline{x}_p)$$

trong đó  $a_1, a_2, \dots, a_p$  là những số thực/phức (hoặc phần tử của một trường  $F$ ) nên nó được gọi là ánh xạ tuyến tính.

## Phép biến đổi tương đương

Ta đã được biết ma trận  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là một hình thức biểu diễn ánh xạ tuyến tính  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tuy nhiên cách biểu diễn đó phụ thuộc vào bộ các vector cơ sở  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  được chọn. Giả sử  $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$  là một cơ sở khác của  $\mathbb{R}^n$  ngoài  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ . Mỗi vector  $\underline{s}_i$  lại có dạng biểu diễn theo cơ sở cũ  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  như sau:

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{s}_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}$$

Vì  $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$  là  $n$  vector độc lập tuyến tính trong  $\mathbb{R}^n$  nên mọi vector  $\underline{x}$  trong  $\mathbb{R}^n$  đều có dạng phụ thuộc tuyến tính theo chúng, tức là:



$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = r_1 \underline{s}_1 + r_2 \underline{s}_2 + \dots + r_n \underline{s}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{s}_1 & \underline{s}_2 & \dots & \underline{s}_n \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Bộ số thực  $r_1, r_2, \dots, r_n$  được gọi là tọa độ của  $\underline{x}$  theo cơ sở mới  $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ . Vậy muốn biểu diễn  $\underline{x}$  theo tọa độ mới ta có phép biến đổi:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Với cách biểu diễn  $\underline{x}$  theo cơ sở mới này, ánh xạ  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  cũng có dạng mới:

$$\underline{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(\underline{e}_1) & f(\underline{e}_2) & \dots & f(\underline{e}_n) \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AS \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},$$

nói cách khác  $AS$  cũng là ma trận mô tả  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nhưng theo cơ sở  $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$  trong  $\mathbb{R}^n$  cho  $\underline{x}$ .

Tuy  $\underline{x}$  đã được biểu diễn theo cơ sở mới  $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$  nhưng ảnh  $\underline{y}$  của nó lại vẫn theo cơ sở cũ  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ . Để chuyển  $\underline{y}$  theo cơ sở  $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$  ta lại làm giống như đã làm với  $\underline{x}$  và đi đến dạng tương đương cho  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  theo cơ sở mới  $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$  như sau:

$$S^{-1}AS.$$

Các phép biến đổi ma trận  $A$  thành  $S^{-1}AS$ , trong đó  $S$  là một ma trận vuông không suy biến bất kỳ, được gọi là *phép biến đổi tương đương*.

### Không gian nhân và không gian ảnh của ma trận

Cho ma trận  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  biểu diễn ánh xạ:

$$\underline{y} = A\underline{x} \quad \text{với } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{và} \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^m$$

Khi đó:

- Tập hợp  $\text{Ker}\{A\} = \{\underline{x} \in X \mid \underline{y} = A\underline{x} = \underline{0} \in \mathbb{R}^m\}$  được gọi là *nhân* của ma trận  $A$ .
- Tập hợp  $\text{Im}\{f\} = \{\underline{y} \in Y \mid \exists \underline{x} \in X : \underline{y} = A\underline{x}\}$  được gọi là *tập ảnh* của  $A$ .
- $\text{Im}(A)$  là một không gian vector con trong  $\mathbb{R}^m$ . Nói cách khác nếu có  $\underline{y}_1 \in \text{Im}(A)$  và  $\underline{y}_2 \in \text{Im}(A)$  thì cũng phải có  $a\underline{y}_1 + b\underline{y}_2 \in \text{Im}(A)$ , với  $a, b$  là hai số thực bất kỳ.
- $\text{Rank}(A) = \dim \text{Im}(A)$ .
- $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = n$ .

- Với ma trận vuông  $A$  kiểu  $(n \times n)$ , thì  $\text{Im}(A)$  và  $\text{Ker}(A)$  sẽ là hai không gian con của  $\mathbb{R}^n$ . Mọi phần tử  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  đều phân tích được thành tổng  $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$ , trong đó  $\underline{x}_1 \in \text{Im}(A)$  và  $\underline{x}_2 \in \text{Ker}(A)$ . Hơn nữa việc phân tích đó là duy nhất.
- Nếu ma trận vuông  $A$  có kiểu  $(n \times n)$  là đối xứng thì  $\text{Im}(A)$  và  $\text{Ker}(A)$  là hai không gian trực giao với nhau, tức là với mọi phần tử  $\underline{y} \in \text{Im}(A)$ ,  $\underline{x} \in \text{Ker}(A)$  ta luôn có  $\underline{y}^T \underline{x} = \underline{x}^T \underline{y} = 0$ .

## Giá trị riêng và vector riêng

Cho ma trận  $A$ . Một số thực (phức)  $\lambda$  được gọi là *giá trị riêng* và vector  $\underline{x}$  được gọi là *vector riêng bên phải* ứng với giá trị riêng  $\lambda$  của  $A$ , nếu chúng thỏa mãn:

$$\lambda \underline{x} = A \underline{x} \quad \text{đúng với mọi } \underline{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda I - A) \underline{x} = \underline{0}$$

Để cho phương trình trên có nghiệm  $\underline{x} \neq \underline{0}$  thì  $(\lambda I - A)$  phải là ma trận suy biến, tức là  $\lambda$  phải làm cho định thức của ma trận  $(\lambda I - A)$  bằng 0. Định thức

$$\det(\lambda I - A)$$

của ma trận  $(\lambda I - A)$  được gọi là *đa thức đặc tính* của ma trận  $A$ .

Giá trị riêng và vector riêng của ma trận  $A$  có những tính chất sau:

- (Cayley-Hamilton) Nếu đa thức đặc tính của ma trận  $A$  có dạng:

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

thì cũng có

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = \Theta,$$

trong đó  $\Theta$  là ký hiệu chỉ ma trận có tất cả các phần tử bằng 0.

- Nếu khai triển đa thức đặc tính thành:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

thì

$$a_0 = (-1)^n \det(A) \quad \text{và} \quad a_{n-1} = -\text{trace}(A).$$

Điều này cũng nói rằng  $\det(A)$  và  $\text{trace}(A)$  là hai đại lượng bất biến với việc chọn cơ sở nên chúng là những đại lượng đặc trưng cho ánh xạ  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

- Hai ma trận tương đương  $A$  và  $S^{-1}AS$  luôn có cùng các giá trị riêng, nói cách khác giá trị riêng của ma trận bất biến với phép biến đổi tương đương.
- Các giá trị riêng của ma trận bất biến với phép chuyển vị.  

$$\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I).$$
- Vector riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính với nhau.
- Nếu  $A$  không suy biến thì  $AB$  và  $BA$  có cùng các giá trị riêng.

- Nếu  $A$  là ma trận đối xứng ( $A^T = A$ ) thì các vector riêng ứng với những giá trị riêng khác nhau sẽ trực giao với nhau.
- Gọi  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$  là các vector riêng bên phải của ma trận vuông  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ứng với các giá trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , tức là:

$$(\lambda_k I - A)\underline{a}_k = \underline{0}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

Khi đó ma trận:

$$M = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$$

được gọi là *ma trận modal*.

- Giả sử *ma trận modal*  $M$  của  $A$  không suy biến. Vậy thì các vector hàng của ma trận nghịch đảo  $M^{-1}$ :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_n^T \end{pmatrix}$$

sẽ là các vector riêng bên trái của  $A$ , tức là cũng có:

$$\underline{b}_k^T (\lambda_k I - A) = \underline{0}^T, \quad k=1, 2, \dots, n$$

- Cho ma trận vuông  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Giả thiết rằng  $A$  có  $n$  giá trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  khác nhau đôi một. Khi đó các vector riêng bên phải  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$  sẽ độc lập tuyến tính với nhau và ma trận modal  $M$  của nó không suy biến. Khi đó sẽ có:

$$M^{-1}AM = \text{diag}(\lambda_i)$$

Do ứng với một giá trị riêng  $\lambda_i$  có nhiều vector riêng bên phải  $\underline{a}_i$  (chúng phụ thuộc tuyến tính với nhau) nên cũng sẽ có nhiều ma trận modal và một trong các ma trận modal  $M$  đó là:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

- Cho ma trận vuông  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Khi đó các phát biểu sau là tương đương:
  - $A^H = A$  và các giá trị riêng  $\lambda_k, k=1, \dots, n$  của  $A$  là những số thực dương (gọi là *ma trận xác định dương*), trong đó  $H$  là phép tính chuyển vị và lấy liên hợp.
  - $\underline{x}^H A \underline{x} > 0$  với mọi  $\underline{x} \neq \underline{0}$ .
  - $0 < \lambda_{\min} |\underline{x}|^2 \leq \underline{x}^H A \underline{x} \leq \lambda_{\max} |\underline{x}|^2, \forall \underline{x} \neq \underline{0}$ , trong đó  $\lambda_{\max} = \max_k \lambda_k, \lambda_{\min} = \min_k \lambda_k$  và các giá trị riêng  $\lambda_k, k=1, \dots, n$  của  $A$  là những số thực.

- Ma trận  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  với  $A^H = A$  được gọi *bán xác định dương* nếu các giá trị riêng  $\lambda_k$ ,  $k=1, \dots, n$  của  $A$  là những số thực không âm.

### Chuẩn của vector và ma trận

Để so sánh (lớn hơn, nhỏ hơn) hay đánh giá sai lệch giữa các vector hoặc giữa ánh xạ tuyến tính (ma trận), người ta đưa thêm vào không gian vector phép tính xác định chuẩn. Chuẩn của vector

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

được hiểu là một số thực không âm, ký hiệu bởi  $\|\underline{x}\|$ , thỏa mãn các tính chất sau:

- $\|\underline{x}\| = 0$  khi và chỉ khi  $\underline{x} = \underline{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$
- $\|a\underline{x}\| = |a| \|\underline{x}\|$  với mọi  $a \in \mathbb{R}$
- $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$

Các chuẩn  $\|\underline{x}\|$  khác nhau của vector  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  thường được dùng là:

$$\|\underline{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, p = 1, 2, \dots$$

Khi  $p=2$ , thì  $\|\underline{x}\|_2$  chính là modul  $|\underline{x}|$  của vector  $\underline{x}$  và được gọi là chuẩn Euclid, ký hiệu bởi  $\|\underline{x}\|_E$ . Nếu  $p \rightarrow \infty$  thì  $\|\underline{x}\|_\infty$  được gọi là *chuẩn vô cùng* và

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Trong không gian vector hữu hạn chiều thì các chuẩn vector  $\|\underline{x}\|_p$  và  $\|\underline{x}\|_q$  luôn tương đương với nhau, tức là luôn tồn tại hai số thực dương  $a, b$  để có:

$$a \|\underline{x}\|_p \leq \|\underline{x}\|_q \leq b \|\underline{x}\|_p$$

Ngoài ra, chúng còn thỏa mãn bất đẳng thức Hölder:

$$|\underline{x}^T \underline{y}| \leq \|\underline{x}\|_p \|\underline{y}\|_q \quad \text{với} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_E \leq \|\underline{x}\|_1 \leq n \|\underline{x}\|_\infty$$

Chuẩn của ma trận  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tức là của ánh xạ:  $\underline{y} = A\underline{x}$ , được hiểu là:

$$\|A\|_p = \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|\underline{y}\|_p}{\|\underline{x}\|_p} = \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p}$$

và các chuẩn này trong không gian hữu hạn chiều là tương đương, chẳng hạn như:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$$

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn} \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}|$$

Với ma trận vuông  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ta còn có:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \quad \text{và} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

Nếu ký hiệu  $\lambda_k(A)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$  là các giá trị riêng của ma trận  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  thì:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}, \text{ trong đó } \lambda_{\max}(A^T A) = \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k(A^T A)$$

và các giá trị  $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k(A^T A)}$ ,  $k=1, 2, \dots, n$  này còn được gọi là các *giá trị suy biến* của ma trận  $A$ .

### Ma trận có các phần tử phụ thuộc thời gian

Nếu ma trận vuông  $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n \times t}$  với các phần tử  $a_{ij}(t)$  là những hàm phụ thuộc thời gian, có  $\det(A) \neq 0$  tại lân cận  $t$  thì trong lân cận đó cũng có ma trận nghịch đảo  $A(t)^{-1}$ . Khi đó từ  $A(t)^{-1}A(t) = I$ , ta còn có:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{d}{dt} (A(t)^{-1}A(t)) = \frac{dA(t)^{-1}}{dt} A(t) + A(t)^{-1} \frac{dA(t)}{dt} \\ \Rightarrow \quad \frac{dA(t)^{-1}}{dt} &= -A(t)^{-1} \frac{dA(t)}{dt} A(t)^{-1} \end{aligned}$$

trong đó đạo hàm của ma trận hàm  $A(t)$  được hiểu là  $\frac{dA(t)}{dt} = \left( \frac{da_{ij}(t)}{dt} \right)$ .

## 3.2 Xây dựng mô hình toán học

### 3.2.1 Phương trình trạng thái

#### Cấu trúc chung

Ngay ở mục 2.2, khi nói về mô hình toán học (của điều khiển trong miền phức), hình 2.16 đã cho ta một khái niệm khác về mô hình toán học. Đây là loại mô hình mà tính động học của nó được thể hiện qua các biến trạng thái  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(t)$  nằm bên trong hệ thống.

Nhưng trạng thái của hệ thống là gì và tại sao ta phải quan tâm. Lấy ví dụ về điều khiển động cơ. Bên cạnh tín hiệu ra của động cơ là tốc độ quay còn có nhiều những thông số thay đổi khác của động cơ cần phải được quan tâm trong khi thiết kế bộ điều khiển như gia tốc động cơ, sự tổn hao năng lượng ... , hoặc như điều khiển cần cầu thì bên cạnh quãng đường mà hàng được cầu đã đi được ta còn phải quan tâm tới tốc độ vận chuyển, độ lắc của hàng trong quá trình vận chuyển ...

Nếu khái niệm trạng thái hệ thống được miêu tả như vậy thì có sự khác biệt gì giữa trạng thái với tín hiệu đầu ra và tại sao không xem luôn trạng thái như những tín hiệu ra được bổ sung thêm. Câu trả lời là khái niệm biến trạng thái phải được hiểu rộng hơn khái niệm tín hiệu ra. Nếu đã là tín hiệu ra thì người ta phải trực tiếp đo được nó (nhờ các bộ cảm biến) còn ở biến trạng thái thì không như vậy. Có thể người ta chỉ xác định được một số biến trạng thái thông qua các tín hiệu đo được khác.

Xét một hệ thống với cấu trúc cho ở hình 2.16 và:

- $m$  tín hiệu vào  $u_1(t), \dots, u_m(t)$ , được viết chung lại thành vector  $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^m$
- $r$  tín hiệu ra  $y_1(t), \dots, y_r(t)$ , viết chung lại thành vector  $\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^r$
- $n$  biến trạng thái  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , viết chung lại thành  $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$

*Mô hình trạng thái* mà ta quan tâm ở đây là loại mô hình toán học có dạng:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u} \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó:

- Ma trận  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là *ma trận hệ thống*.
- Ma trận  $\underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  là *ma trận điều khiển*.
- Hai ma trận  $\underline{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  và  $\underline{D} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  là *các ma trận đầu ra*.

Trường hợp mô hình (3.1) có các ma trận  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$  đều là những ma trận hằng (các phần tử là hằng số thực) thì nó được gọi là *mô hình trạng tham số hằng*. Ngược lại, nó được gọi là *mô hình trạng thái tham số biến đổi*. Mô hình trạng thái có tham số biến đổi được dùng để mô tả hệ có tham số thay đổi theo thời gian (hệ không dừng) hoặc thay đổi theo không gian (hệ tham số rải).

Có thể thấy được ngay ưu điểm nổi bật của loại mô hình (3.1) này so với hàm truyền ở chương 2 là nó dùng được cho cả những *hệ có nhiều tín hiệu vào và ra* (hệ MIMO, Multi Input – Multi Output) mà không phải thay đổi cấu trúc, cũng như không cần phải có giả thiết rằng hệ có tất cả các trạng thái đầu bằng 0. Ngoài ra, mô hình trạng thái (3.1) còn giúp ta khả năng khảo sát trực tiếp được trạng thái bên trong của hệ thống  $\underline{x}(t)$ , do đó hiểu kỹ, hiểu sâu hơn bản chất động học của hệ thống, điều mà với mô hình hàm truyền, ta chỉ có thể thực hiện gián tiếp thông qua việc quan sát các tín hiệu vào ra. Tuy nhiên bằng việc rời bỏ hàm truyền và sử dụng mô hình trạng thái, ta cũng đã rời bỏ

một môi trường toán học đơn giản với các phép tính toán đại số để chấp nhận sử dụng một môi trường khác phức tạp hơn với các phép tính vi phân và tích phân.

Một cách tổng quát, sau khi đưa thêm  $n$  biến trạng thái  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  vào mô hình *hệ tuyến tính* MIMO có  $m$  tín hiệu vào  $u_1(t), \dots, u_m(t)$ , và  $r$  tín hiệu ra  $y_1(t), \dots, y_r(t)$ , thì bao giờ hệ tuyến tính cũng mô tả được bằng phương trình trạng thái ở một trong ba dạng cơ bản sau:

- 1) Tham số hằng (3.1) có phần tử các ma trận  $A, B, C, D$  là hằng số
- 2) Hoặc *tham số phụ thuộc  $t$* , có phần tử các ma trận  $A, B, C, D$  là hàm số phụ thuộc thời gian:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad (3.2)$$

- 3) Hoặc *tham số rải*, có phần tử các ma trận  $A, B, C, D$  là hàm số phụ thuộc biến không gian (phụ thuộc vector tham số  $\mathbf{v}$ )

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(\mathbf{v})\mathbf{x} + B(\mathbf{v})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C(\mathbf{v})\mathbf{x} + D(\mathbf{v})\mathbf{u} \end{cases} \quad (3.3)$$

trong đó:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{vector tham số } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

**Ví dụ 3.4:** Xây dựng mô hình trạng thái từ phương trình vi phân mô tả quan hệ vào–ra

Xét một hệ thống tuyến tính SISO có một tín hiệu vào là  $u(t)$  và một tín hiệu ra  $y(t)$ . Giả sử hệ được mô tả bởi phương trình vi phân giữa tín hiệu vào–ra như sau:

$$a_0 y + a_1 y^{(1)} + a_2 y^{(2)} + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)} = b_0 u + b_1 u^{(1)} + \dots + b_n u^{(n)} \quad (3.5)$$

trong đó  $y^{(q)} = \frac{d^q y}{dt^q}$  và  $u^{(q)} = \frac{d^q u}{dt^q}$  là ký hiệu của phép tính đạo hàm. Nếu như rằng bên cạnh tín hiệu ra  $y(t)$ , bài toán thiết kế điều khiển của ta còn cần phải để ý đến những sự thay đổi của  $y(t)$  như  $y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}$  và nhất là sự ảnh hưởng của các giá trị ban đầu của chúng tới đáp ứng  $y(t)$  của hệ thì các mô hình đã biết như hàm truyền, hàm quá độ ... không còn được phù hợp. Ta cần tới một mô hình mô tả được không riêng quan hệ vào/ra mà cả những sự thay đổi đó của trạng thái.

Ký hiệu phép tính đạo hàm là  $p^k = \frac{d^k}{dt^k}$  thì mô hình (3.5) viết lại được thành:

$$G(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}{a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Đặt biến trạng thái

$$x_1 = \frac{u}{A(p)}, x_2 = p \frac{u}{A(p)}, \dots, x_n = p^{n-1} \frac{u}{A(p)} \quad (3.6)$$

ta có:

$$p x_1 = x_2, \dots, p x_{n-1} = x_n \text{ và } A(p) x_1 = a_0 x_1 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_n + p x_n = u \quad (3.7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx_1}{dt} = x_2, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \text{ và } \frac{dx_n}{dt} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u$$

Vậy mô hình trạng thái (3.1) tương đương của nó là:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \text{ với } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

và

$$\begin{aligned} y &= \frac{u(b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n)}{A(p)} = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{n-1} x_n + b_n p x_n \\ &= (b_0 - a_0 b_n) x_1 + (b_1 - a_1 b_n) x_2 + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) x_n + b_n u \\ &= (b_0 - a_0 b_n, b_1 - a_1 b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} b_n) \mathbf{x} + b_n u = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{aligned}$$

trong đó, nếu so sánh với về dạng (3.1) thì:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (b_0 - a_0 b_n, b_1 - a_1 b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} b_n) \text{ và } \mathbf{D} = b_n$$

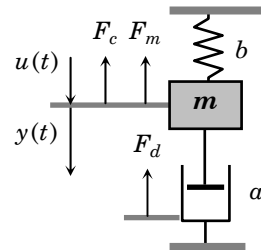
□

### Ví dụ 3.5: Xây dựng mô hình trạng thái

Cho hệ cơ gồm một lò xo có hệ số  $c$ , một vật với khối lượng  $m$  và bộ suy giảm tốc có hệ số  $d$  được nối với nhau như hình 3.1 mô tả. Gọi  $u(t)$  là tín hiệu vào được định nghĩa là lực bên ngoài tác động lên vật và tín hiệu ra  $y(t)$  là quãng đường mà vật đi được.

Ký hiệu:

$$x_1(t) = y(t) \text{ và } x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt}$$



Hình 3.1: Cho ví dụ 3.5.



là hai biến trạng thái của hệ, cũng như  $F_c$ ,  $F_m$ ,  $F_d$ , là những lực của lò xo, vật và bộ suy giảm tốc sinh ra khi vật chuyển động. Khi đó ta được:

$$F_c = b \cdot y(t) = bx_1, \quad F_m = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = m \frac{dx_2}{dt} \quad \text{và} \quad F_d = a \frac{dy(t)}{dt} = ax_2$$

Suy ra:

$$F_c + F_m + F_d = bx_1 + m \frac{dx_2}{dt} + ax_2 = u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{b}{m}x_1 - \frac{a}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

và từ đó là mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m^{-1}b & -m^{-1}a \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} u \\ y = \mathbf{x}_1 = (1, 0)\mathbf{x} \end{cases}$$

□

### Quan hệ giữa mô hình trạng thái và hàm truyền

Một hệ thống tuyến tính SISO cũng được mô tả bởi phương trình trạng thái (3.1) và hàm truyền  $G(s)$ . Vậy thì giữa hai mô hình này phải có những mối liên hệ với nhau. Sau đây chúng ta sẽ bàn về các mối quan hệ đó, mà cụ thể là:

- Xác định hàm truyền từ mô hình trạng thái.
- Xác định mô hình trạng thái từ hàm truyền.
- Xác định bậc tương đối của hàm truyền từ mô hình trạng thái.

#### 1) Xác định hàm truyền từ mô hình trạng thái:

Do hàm truyền trước hết chỉ định nghĩa cho hệ tuyến tính SISO nên đầu tiên, ta sẽ xét hệ SISO tham số hằng với mô hình trạng thái dạng (3.1), được viết lại cho phù hợp với tính chất SISO, tức là với  $m=r=1$  như sau:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \end{cases} \quad (3.8)$$

Nói cách khác, do có  $m=r=1$  nên ma trận  $B$  trở thành vector  $\mathbf{b}$ , ma trận  $C$  thành vector hàng  $\mathbf{c}^T$  và ma trận  $D$  trở thành số thực  $d$ .

**Định lý 3.1:** Hệ SISO tuyến tính, với mô hình trạng thái (3.8), có hàm truyền

$$a) \quad G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (3.9)$$

- b) Gọi  $A(s)$  là đa thức đặc tính của hệ (đa thức mẫu số) và  $B(s)$  là đa thức tử số của  $G(s)$ , tức là  $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ . Khi đó, nếu mô hình trạng thái (3.8) không có

biến trạng thái thừa (loại biến trạng thái hoàn toàn suy ra được bằng công thức đại số từ những biến trạng thái còn lại), thì:

$$A(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n = \det(sI - A)$$

$$B(s) = b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m = \underline{c}^T \hat{A}_{adj} \underline{b} + d \det(sI - A)$$

với  $\hat{A}_{adj}$  là ma trận bù của ma trận  $(sI - A)$ .

- c) Hàm truyền  $G(s)$  luôn hợp thức và nếu mô hình trạng thái (3.8) có  $d=0$  thì  $G(s)$  còn là hợp thức chặt (bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc đa thức mẫu số).

*Chứng minh:*

Chuyển hai vế của phương trình thứ nhất của (3.8) sang miền phức nhờ toán tử Laplace và để ý rằng các giá trị đầu  $x_i(0)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  đều bằng 0, sẽ có:

$$s\underline{X}(s) = A\underline{X}(s) + \underline{b}U(s) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{X}(s) = (sI - A)^{-1} \underline{b}U(s)$$

Tương tự, ảnh Laplace của phương trình thứ hai là:

$$Y(s) = \underline{c}^T \underline{X}(s) + dU(s)$$

Với hai kết quả trên ta suy ra được điều phải chứng minh thứ nhất:

$$Y(s) = [\underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d] U(s)$$

Tiếp tục, do:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\hat{A}_{adj}}{\det(sI - A)}$$

với  $\hat{A}_{adj}$  là ma trận có các phần tử  $\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \hat{A}_{ji}$ , trong đó ma trận  $\hat{A}_{ji}$  thu được từ  $(sI - A)$  bằng cách bỏ đi hàng thứ  $j$  và cột thứ  $i$  (bỏ đi hàng và cột chứa phần tử đối xứng với  $\hat{a}_{ij}$ ), nên:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d = \frac{\underline{c}^T \hat{A}_{adj} \underline{b}}{\det(sI - A)} + d \quad (3.10)$$

và đó điều phải chứng minh thứ hai.

Cuối cùng, do  $\hat{A}_{adj}$  có các phần tử là định thức của ma trận  $(n-1)$  hàng  $(n-1)$  cột lấy từ  $(sI - A)$ , tức là đa thức có bậc không quá  $n-1$ , nên  $\underline{c}^T \hat{A}_{adj} \underline{b}$  có bậc cao nhất cũng chỉ là  $n-1$ . Bởi vậy từ (3.10) ta thu ngay được điều phải chứng minh thứ ba.  $\square$

**Chú ý:** Nếu tương tự như hàm truyền cho hệ SISO, ta định nghĩa *ma trận hàm truyền*  $G(s)$  cho cho hệ MIMO là loại ma trận phức thỏa mãn:

$$\underline{Y}(s) = G(s) \underline{U}(s)$$

trong đó  $\underline{U}(s)$  là ký hiệu chỉ ảnh Laplace của vector tín hiệu vào  $\underline{u}(t)$  và  $\underline{Y}(s)$  là ảnh Laplace của vector tín hiệu ra  $\underline{y}(t)$  khi hệ có tất cả các trạng thái đầu bằng 0, thì ma trận  $G(s)$  cũng được xác định từ mô hình trạng thái (3.1) của nó như sau:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.11)$$

2) Xác định mô hình trạng thái chuẩn điều khiển từ hàm truyền:

Xét hệ SISO có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ns^n}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3.12)$$

Gọi  $U(s)$  là ảnh Laplace của  $u(t)$ ,  $Y(s)$  là ảnh của  $y(t)$  thì từ hàm truyền đã cho ta có:

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ns^n}{A(s)} U(s) = b_0 \frac{U(s)}{A(s)} + b_1 \frac{sU(s)}{A(s)} + \dots + b_n \frac{s^n U(s)}{A(s)}$$

Đặt  $n$  biến trạng thái  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , ghép chung lại thành  $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  có ảnh Laplace:

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{A(s)}, \quad X_2(s) = \frac{sU(s)}{A(s)}, \quad \dots, \quad X_n(s) = \frac{s^{n-1}U(s)}{A(s)}$$

sẽ được:

$$sX_1(s) = X_2(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$sX_2(s) = X_3(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3$$

$\vdots$

$$sX_{n-1}(s) = X_n(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n$$

cũng như:

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{A(s)}$$

$$\Leftrightarrow a_0X_1 + a_1sX_1 + \dots + a_{n-1}s^{n-1}X_1 + s^nX_1 = U$$

$$\Leftrightarrow a_0X_1 + a_1X_2 + \dots + a_{n-1}X_n + sX_n = U$$

$$\Leftrightarrow a_0x_1 + a_1x_2 + \dots + a_{n-1}x_n + \frac{dx_n}{dt} = u$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx_n}{dt} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u$$

Suy ra:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Mặt khác, từ:

$$Y = b_0X_1 + b_1X_2 + \dots + b_{n-1}X_{n-1} + b_n sX_n$$

còn có:

$$y = b_0x_1 + b_1x_2 + \dots + b_{n-1}x_n + b_n \frac{dx_n(t)}{dt}$$

$$y = (b_0 - a_0b_n)x_1 + (b_1 - a_1b_n)x_2 + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x_n + b_n u$$

Và ta đi đến:

**Định lý 3.2:** Hệ SISO với hàm truyền (3.12) có mô hình trạng thái *dạng chuẩn điều khiển* như sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} u \\ y = \underbrace{(b_0 - a_0b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1}b_n)}_{\underline{c}^T} \underline{x} + b_n u \end{array} \right.$$

3) Xác định mô hình trạng thái chuẩn quan sát từ hàm truyền:

Tương tự như định lý 3.2, ở đây ta cũng có:

**Định lý 3.3:** Hệ SISO với hàm truyền (3.12) có mô hình trạng thái *chuẩn quan sát*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 - a_0b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_n \end{pmatrix}}_{\underline{b}} u \\ y = \underbrace{(0, \dots, 0, 1)}_{\underline{c}^T} \underline{x} + b_n u \end{array} \right.$$

*Chứng minh:* (Bài tập ôn luyện).

4) Xác định bậc tương đối của hàm truyền từ mô hình trạng thái:

Xét hệ SISO có hàm truyền hợp thức chặt:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}, \quad (m < n) \quad (3.13)$$

Bậc tương đối của nó được hiểu là hiệu  $r = n - m \geq 1$ . Bài toán được đặt ra ở đây là làm thế nào để xác định được bậc tương đối  $r$  của nó từ mô hình trạng thái hợp thức chặt tương ứng là:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + bu \\ y = \underline{c}^T x \end{cases} \quad (3.14)$$

Trước hết ta đi từ (3.9) với  $d=0$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^r G(s) = \frac{b_m}{a_n} \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s^r \left[ \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} \right] = \frac{b_m}{a_n} \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{c}^T A^k \underline{b}}{s^{k+1-r}} = \frac{b_m}{a_n}$$

Nhưng vì:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{k+1-r}} = 0 \quad \text{khi } k > r-1$$

nên chuỗi trên trở thành tổng của hữu hạn  $r$  phân tử đầu tiên:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\underline{c}^T A^k \underline{b}}{s^{k+1-r}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\underline{c}^T A^k \underline{b}}{s^{k+1-r}} = \frac{b_m}{a_n}$$

Từ đây, để vế trái bằng giá trị hữu hạn  $\frac{b_m}{a_n}$  thì cần và đủ là:

$$\begin{cases} \underline{c}^T A^k \underline{b} = 0 & \text{khi } 0 \leq k < r-1 \\ \underline{c}^T A^{r-1} \underline{b} \neq 0 \end{cases}$$

và ta đi đến:

**Định lý 3.4:** Bậc tương đối  $r=n-m$  của hệ SISO có hàm truyền (3.13) được xác định từ mô hình trạng thái (3.14) tương ứng của nó bằng công thức sau:

$$\underline{c}^T A^k \underline{b} = \begin{cases} = 0 & \text{khi } 0 \leq k \leq r-2 \\ \neq 0 & \text{khi } k = r-1 \end{cases} \quad (3.15)$$

**Ví dụ 3.6:** Xác định bậc tương đối

Cho hệ SISO với hai biến trạng thái được mô tả bởi:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} u, \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y = (2, 1) \underline{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{c}^T = (2, 1)$$

Theo định lý 3.1 hệ có hàm truyền:

$$\begin{aligned} G(s) &= \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d = (2, 1) \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-2)(s-3)} (2, 1) \begin{pmatrix} s-3 & 1 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6}{s^2 - 5s + 6} \end{aligned}$$

Như vậy, ta thấy hệ có bậc tương đối là  $r=2$ . Giá trị này cũng có thể trực tiếp tính được từ mô hình trạng thái như sau:

$$\underline{c}^T \underline{b} = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{c}^T A \underline{b} = (2, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2, 5) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

tức là  $r-1=1$ , hay  $r=2$ . □

Mở rộng ra, sau đây ta sẽ xét bài toán tương tự cho hệ MIMO có  $m$  tín hiệu vào  $u_1(t), \dots, u_m(t)$  và  $m$  tín hiệu ra  $y_1(t), \dots, y_m(t)$  với mô hình (3.1) hợp thức chặt:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ y = C\underline{x} \end{cases} \quad (3.16)$$

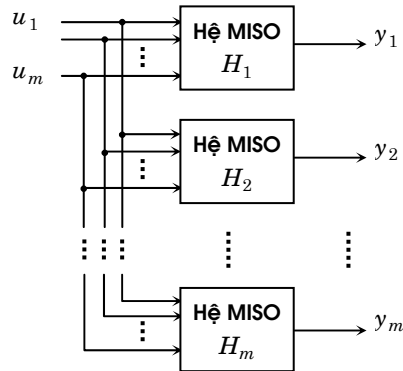
Như vậy thì theo (3.11), hệ có ma trận hàm truyền:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mm}(s) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Từng phần tử  $G_{ik}(s)$  của ma trận  $G(s)$  chính là hàm truyền giữa tín hiệu vào  $u_k(t)$  và tín hiệu ra  $y_i(t)$ . Nó được xác định nhờ công thức (3.9) như sau:

$$G_{ik}(s) = \underline{c}_i^T (sI - A)^{-1} \underline{b}_k$$

trong đó  $\underline{c}_i^T$  là vector hàng thứ  $i$  của  $C$  và  $\underline{b}_k$  là vector cột thứ  $k$  của  $B$ .



**Hình 3.2:** Xem hệ MIMO như các hệ MISO nối song song với nhau.

Viết lại hệ (3.16) trên thành  $m$  hệ MISO con (nhiều đầu vào, một đầu ra) với mô hình trạng thái của từng hệ con là (hình 3.2):

$$H_i: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ y_i = \underline{c}_i^T \underline{x} \end{cases} \quad (3.18)$$

Khi đó, trong miền phức, các hệ này cũng có ma trận hàm truyền dạng vector hàng:

$$Y_i(s) = (G_{i1}(s), \dots, G_{im}(s)) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{pmatrix}$$

Nếu ký hiệu  $r_{i1}, \dots, r_{im}$  là các bậc tương đối của các hàm truyền  $G_{i1}(s), \dots, G_{im}(s)$  của hệ con  $H_i$ , xác định theo (3.15) và gọi:

$$r_i = \min \{r_{i1}, \dots, r_{im}\}$$

là *bậc tương đối tối thiểu* của  $H_i$ , ta có thể thấy ngay rằng  $r_i$  được xác định từ mô hình trạng thái (3.18) của  $H_i$  như sau:

$$\underline{c}_i^T A^k B = \begin{cases} = \underline{0}^T & \text{khi } 0 \leq k \leq r_i - 2 \\ \neq \underline{0}^T & \text{khi } k = r_i - 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

Suy ra:

**Định lý 3.5:** Từng phần tử của vector hàng  $(r_1, \dots, r_m)$ , gọi là *vector bậc tương đối tối thiểu* của hệ MIMO (3.16) có  $m$  tín hiệu vào  $u_1(t), \dots, u_m(t)$  và  $m$  tín hiệu ra  $y_1(t), \dots, y_m(t)$ , mô tả bởi ma trận hàm truyền (3.17), sẽ được xác định từ mô hình trạng thái (3.16) của nó bằng công thức (3.19), trong đó  $\underline{c}_i^T$  là vector hàng thứ  $i$  của ma trận  $C$ .

### 3.2.2 Quỹ đạo trạng thái

*Quỹ đạo trạng thái* được hiểu là *nghiệm* của hệ phương trình vi phân:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad (3.20)$$

trong mô hình trạng thái (3.1), hoặc (3.2), hoặc (3.3), ứng với một kích thích  $\underline{u}(t)$  và trạng thái đầu  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  cho trước. Tập hợp của tất cả các quỹ đạo trạng thái của hệ thống được gọi là *không gian trạng thái*. Vì quỹ đạo trạng thái là tập điểm trong  $\mathbb{R}^n$  nên tên gọi "không gian" là có nghĩa (không chỉ là một tập hợp bình thường).

Quay lại ký hiệu (3.4) về vector trạng thái  $\underline{x}(t)$ . Tại một thời điểm  $t_0$  cố định, vector trạng thái  $\underline{x}(t_0)$  sẽ có các phần tử  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  là những số thực, bởi vậy

$\underline{x}(t_0)$  cũng là một phần tử thuộc không gian Euclid  $\mathbb{R}^n$  quen thuộc. Khi cho  $t_0$  chạy từ 0 đến  $\infty$ , điểm  $\underline{x}(t_0)$  sẽ vẽ lên một đường cong phụ thuộc tham số trong  $\mathbb{R}^n$ . Đường cong này phải có chiều chỉ chiều tăng theo  $t$  và có tên gọi là *đồ thị quỹ đạo trạng thái*.

Hình 3.3 mô tả một quỹ đạo trạng thái cho một hệ thống có ba biến trạng thái. Quỹ đạo trạng thái  *mang đầy đủ tính chất động học của hệ thống*, bởi vậy để phân tích hệ thống, người ta thường phải khảo sát dạng quỹ đạo trạng thái của nó. Bài toán đặt ra ở mục này là xác định nghiệm  $\underline{x}(t)$  của (3.20) khi đã biết trước kích thích  $\underline{u}(t)$  và trạng thái đầu  $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ .

Ở những điều kiện đầu  $\underline{x}_0$  như nhau thì với một hàm  $\underline{u}(t)$  cho trước, ta có một nghiệm  $\underline{x}(t)$  của phương trình vi phân (3.20). Vì vậy, để chỉ rõ tính phụ thuộc  $\underline{u}(t)$  của nghiệm  $\underline{x}(t)$  đôi khi người ta còn viết thành  $\underline{x}(t,\underline{u})$ .

### Ma trận hàm mũ và cách xác định

Do việc xác định nghiệm  $\underline{x}(t)$  của hệ phương trình vi phân bậc nhất (3.20) sử dụng đến ma trận hàm mũ  $E(t)=e^{At}$  nên trước tiên, ta cần phải biết đến công thức định nghĩa và các phương pháp xác định nó. Trước tiên đã được biết rằng:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Tương tự như vậy, ở đây ta xét chuỗi:

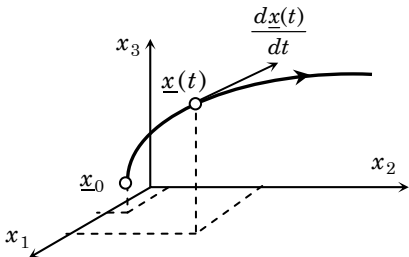
$$E(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \tag{3.21}$$

trong đó  $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i,j=1,2, \dots, n$  là một ma trận vuông kiểu  $(n \times n)$  và ký hiệu  $A^k$  chỉ một tích gồm  $k$  ma trận  $A$  nhân với nhau ( $A^0=I$ ). Theo định nghĩa về phép cộng, nhân ma trận vừa được nhắc lại ở mục trước thì rõ ràng  $E(t)$ , nếu tồn tại, cũng phải là một ma trận vuông kiểu  $(n \times n)$ . Xét:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|At\|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k t^k}{k!} = e^{\|A\|t}$$

ta thấy với  $e^{\|A\|t}$  vế phải luôn là một số thực hữu hạn, vì  $\|A\|$  là số thực không âm. Bởi vậy chuỗi (3.21) hội tụ, tức là tồn tại  $E(t)$ .

**Định nghĩa 3.1:** Ma trận hàm mũ  $e^{At}$  là giá trị giới hạn của chuỗi (3.21), trong đó  $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i,j=1,2, \dots, n$  là một ma trận vuông  $(n \times n)$  và  $A^0=I$ .



Hình 3.3: Quỹ đạo trạng thái.



**Định lý 3.6:** Ma trận hàm  $e^{At}$  thỏa mãn:

- a)  $e^{At_1}e^{At_2} = e^{At_2}e^{At_1} = e^{A(t_1+t_2)}$  và  $e^{At}e^{-At} = e^{A(t-t)} = I$
- b)  $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At}A$
- c) Nếu  $A$  là ma trận đường chéo  $A = \text{diag}(a_i)$  thì  $e^{At} = \text{diag}(e^{a_it})$ .
- d)  $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

*Chứng minh:*

a) Ta có đ.p.c.m. qua vài bước biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} e^{At_1}e^{At_2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} A^k \frac{t_1^i}{i!} \cdot \frac{t_2^{k-i}}{(k-i)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{A^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k!}{i!(k-i)!} \cdot t_1^i t_2^{k-i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{A^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} C_k^i t_1^i t_2^{k-i} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{A^k}{k!} (t_1 + t_2)^k \right) = e^{A(t_1+t_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{de^{At}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{A^k t^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = Ae^{At} \end{aligned}$$

Ngoài ra, cũng với các bước biến đổi trên ta thấy được ngay  $Ae^{At} = e^{At}A$ .

c) Nếu  $A = \text{diag}(a_i)$  thì  $A^k = \text{diag}(a_i^k)$  nên ta có điều phải chứng minh.

d) Vì  $t^{k-1}(t)$  có ảnh  $\frac{k!}{s^{k+1}}$  nên ảnh của  $e^{At}$  là  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{s^{k+1}}$ . Suy ra:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{s^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1}}{s^{k+1}} = (sI - A) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{s^{k+1}} = I \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{s^{k+1}} = (sI - A)^{-1} \quad \square$$

Như vậy là ma trận hàm  $e^{At}$  đã được định nghĩa xong và ta cũng đã được biết một số tính chất cơ bản của nó. Sau đây ta sẽ làm quen với ba phương pháp thường được sử dụng để xác định  $e^{At}$  khi biết trước  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Đó là:

- Sử dụng toán tử Laplace.
- Xác định theo phương pháp modal.
- Xác định nhờ định lý Cayley-Hamilton.

#### 1) Sử dụng toán tử Laplace:

Nếu ta chỉ quan tâm đến  $e^{At}$  khi  $t \geq 0$  thì để tính  $e^{At}$  ta có thể sử dụng ngay tính chất d) của  $e^{At}$  đã được nêu trong định lý 3.6 như sau:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

**Ví dụ 3.7:** Xác định ma trận hàm mũ bằng toán tử Laplace

Với  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  thì

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{pmatrix}^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s-3)}\begin{pmatrix} s-3 & 1 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-2)(s-3)} \\ 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}^{-1}\right\} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

2) Xác định nhờ phương pháp modal:

Xét trường hợp đơn giản là ma trận  $A$  có  $n$  giá trị riêng  $s_1, s_2, \dots, s_n$  khác nhau đôi một. Khi đó  $n$  vector riêng bên phải  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$  của nó sẽ độc lập tuyến tính, hay ma trận modal:

$$M = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$$

là không suy biến và

$$M^{-1}AM = \text{diag}(s_i) = S \Leftrightarrow A = MSM^{-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(MSM^{-1})^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{MS^k M^{-1} t^k}{k!} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k t^k}{k!} M^{-1} = M \text{diag}(e^{s_i t}) M^{-1}$$

Bây giờ ta chuyển sang trường hợp tổng quát hơn với  $A$  có giá trị riêng  $s_k$  bội  $q$ , song ứng với giá trị riêng đó lại có  $q$  vector riêng độc lập tuyến tính  $\underline{a}_{k1}, \underline{a}_{k2}, \dots, \underline{a}_{kq}$ . Không mất tính tổng quát nếu ta giả sử ma trận  $A$  chỉ có giá trị riêng  $s_1$  bội  $q$  thì sẽ phải còn lại  $n-q$  các giá trị riêng khác  $s_{q+1}, s_{q+2}, \dots, s_n$  và những giá trị riêng còn lại đó khác nhau từng đôi một.

Ứng với  $n-q$  giá trị riêng  $s_{q+1}, s_{q+2}, \dots, s_n$  là các vector riêng  $\underline{a}_{q+1}, \underline{a}_{q+2}, \dots, \underline{a}_n$ . Tất nhiên rằng  $n-q$  vector riêng đó là độc lập tuyến tính với nhau. Nếu như rằng ma trận  $A$  có  $\dim \text{Ker}(A - s_1 I) = q$  thì ứng với giá trị riêng  $s_1$  cũng có  $q$  vector riêng  $\underline{a}_{11}, \underline{a}_{12}, \dots, \underline{a}_{1q}$  độc lập tuyến tính với nhau. Chúng chính là một cơ sở của không gian vector  $\text{Ker}(A - s_1 I)$ . Kết hợp  $q$  vector riêng  $\underline{a}_{11}, \underline{a}_{12}, \dots, \underline{a}_{1q}$  của  $s_1$  với  $n-q$  các vector riêng  $\underline{a}_{q+1}, \underline{a}_{q+2}, \dots, \underline{a}_n$  của  $s_{q+1}, s_{q+2}, \dots, s_n$  ta lại có tất cả  $n$  vector độc lập tuyến tính trong  $\mathbb{R}^n$  và

$$M = (\underline{a}_{11}, \underline{a}_{12}, \dots, \underline{a}_{1q}, \underline{a}_{q+1}, \underline{a}_{q+2}, \dots, \underline{a}_n)$$

là ma trận vuông kiểu  $(n \times n)$  không suy biến. Tương tự như ở trường hợp trước, ở đây phép biến đổi tương đương  $M^{-1}AM$  của  $A$  cũng sẽ cho ta ma trận đường chéo:

$$S = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_{q+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & s_n \end{pmatrix}$$

Suy ra:

$$e^{At} = Me^{St}M^{-1} = M \begin{pmatrix} e^{s_1 t} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{s_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{s_{q+1} t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & e^{s_n t} \end{pmatrix} M^{-1}$$

Cuối cùng, tổng kết lại, ta đi đến:

**Định lý 3.7:** Gọi  $s_1, s_2, \dots, s_n$  là các giá trị riêng của ma trận  $A$ , trong đó những giá trị riêng  $s_k$  bội  $q_k$  sẽ được viết lại  $q_k$  lần. Nếu có  $\text{Ker}(s_k I - A) = q_k$  thì cũng sẽ có:

$$e^{At} = M \text{diag}(e^{s_i t}) M^{-1}$$

với  $M = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$  là ma trận modal của  $A$  và  $\underline{a}_k$  là vector riêng bên phải ứng với giá trị riêng  $s_k$ .

### 3) Xác định nhờ Cayley–Hamilton:

Phương pháp modal vừa trình bày có một hạn chế là nó chỉ áp dụng được cho lớp các ma trận vuông  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tương đương với ma trận đường chéo  $S$ , được gọi là *ma trận giống đường chéo*. Với những ma trận  $A$  mà với nó không tồn tại ma trận  $M$  không suy biến để phép biến đổi tương đương  $M^{-1}AM$  là ma trận đường chéo thì ta không sử dụng được phương pháp modal.

Ngược lại, phương pháp sau đây áp dụng được cho mọi ma trận vuông  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Nó được xây dựng dựa theo định lý Cayley–Hamilton có nội dung như sau:

**Định lý 3.8:** Cho ma trận vuông  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Nếu  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  là những hệ số của *đa thức đặc tính* của ma trận:

$$p(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

thì

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = \Theta$$

*Chứng minh:*

Từ hai đẳng thức trên của định lý thì:

$$p(s)I - p(A) = (s^n I - A^n) + a_{n-1}(s^{n-1} I - A^{n-1}) + \dots + a_1(sI - A)$$

Song do có:

$$s^k I - A^k = (sI - A) \cdot (s^{k-1} I + s^{k-2} A + s^{k-3} A^2 + \dots + A^{k-1})$$

nên vế phải là một biểu thức chia hết cho  $(sI - A)$ . Suy ra vế trái cũng phải chia hết cho  $(sI - A)$ . Nhưng vì  $p(s)I$  thỏa mãn  $p(s)(sI - A)^{-1} = (sI - A)_{adj}$  có các phần tử là đa thức theo  $s$ , tức là đã chia hết cho  $(sI - A)$ , nên  $p(A)$  cũng phải chia hết cho  $(sI - A)$ . Do  $p(A)$  không phụ thuộc  $s$  nhưng lại chia hết cho  $(sI - A)$  có chứa  $s$  nên để  $p(A)$  chia hết được cho  $(sI - A)$  thì  $p(A)$  phải bằng  $\Theta$ .  $\square$

**Định lý 3.9:** Với mọi ma trận  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bao giờ ta cũng có  $n$  hàm phụ thuộc thời gian

$a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$  để:

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A + \dots + a_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (3.22)$$

*Chứng minh:*

Xuất phát từ định lý Cayley–Hamilton thì  $A^n$  sẽ phụ thuộc vào  $A^{n-1}, \dots, A^2, A$ , nói cách khác  $A^n$  tính được từ  $A^{n-1}, \dots, A^2, A$  như sau:

$$A^n = -(a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I)$$

Tương tự,  $A^{n+1} = AA^n$  cũng tính được từ  $A^{n-1}, \dots, A^2, A$ :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = -(a_{n-1}A^n + a_{n-2}A^{n-1} + \dots + a_1A^2 + a_0A) \\ &= -[(a_{n-1}^2 + a_{n-2})A^{n-1} + \dots + (a_{n-1}a_1 + a_0)A + a_{n-1}a_0I] \end{aligned}$$

Cứ tiếp tục như vậy thì tất cả các ma trận  $A^k$  có  $k \geq n$  đều tính được từ  $A^{n-1}, \dots, A^2, A$ .

Điều này dẫn tới chuỗi  $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$  chỉ còn phụ thuộc vào  $A^{n-1}, \dots, A^2, A$  và đó chính là điều phải chứng minh.  $\square$

Theo định lý 3.9 thì công việc tính  $e^{At}$  sẽ được hoàn tất khi ta xác định được  $n$  hàm  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ . Để làm được điều này, ta nhìn lại phần chứng minh sẽ thấy nó được dẫn từ định lý 3.8. Bởi vậy cũng có:

**Định lý 3.10:** Nếu các hàm  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$  của ma trận  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  thỏa mãn

(3.22) của định lý 3.9 thì cũng thỏa mãn đẳng thức sau cho tất cả giá trị riêng  $s_k$

$$e^{s_k t} = a_0(t) + a_1(t)s_k + \dots + a_{n-1}(t)s_k^{n-1} \quad (3.23)$$

*Chứng minh:* (Bài tập).

Với định lý 3.10 thì từ  $n$  giá trị riêng  $s_k$  khác nhau ta sẽ có  $n$  phương trình dạng (3.23) cho  $n$  ẩn số  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$  độc lập tuyến tính với nhau. Trường hợp  $A$  có giá trị riêng bội  $q$ , ví dụ như  $s_1$  bội  $q$  thì cùng với  $n-q$  các giá trị riêng còn lại  $s_{q+1}, s_{q+2}, \dots, s_n$  ta mới chỉ có được  $n-q+1$  phương trình cho  $n$  ẩn  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ . Số các phương trình còn thiếu là  $q-1$  sẽ được bổ sung thêm bằng cách từ phương trình ứng với  $s_1$  ta đạo hàm  $q-1$  lần theo  $s_1$  như sau:

$$\begin{cases} te^{s_1 t} = a_1(t) + 2s_1 \cdot a_2(t) + \dots + (n-1)s_1^{n-2}a_{n-1}(t) \\ t^2 e^{s_1 t} = 2a_2(t) + 6s_1 \cdot a_3(t) + \dots + (n-1)(n-2)s_1^{n-3}a_{n-1}(t) \\ \vdots \\ t^{q-1} e^{s_1 t} = (q-1)!a_{q-1}(t) + \frac{q!}{1!}s_1 \cdot a_q(t) + \dots + \frac{(n-1)!}{(n-q)!}s_1^{n-q}a_{n-1}(t) \end{cases} \quad (3.24)$$

Rõ ràng rằng  $q-1$  phương trình được bổ sung thêm này là độc lập với nhau. Tổng kết lại thì phương pháp Cayley–Hamilton gồm hai bước:

- Tính tất cả  $n$  giá trị riêng của ma trận  $A$ . Mỗi một giá trị riêng sẽ có một phương trình (3.23) cho trong định lý 3.10. Với giá trị riêng  $s_k$  bội  $q_k$  ta có thêm  $q_k-1$  phương trình bằng cách đạo hàm phương trình tương ứng của nó  $q_k-1$  lần theo  $s_k$  giống như (3.24) mô tả. Như vậy, tổng cộng ta sẽ có  $n$  phương trình độc lập tuyến tính cho  $n$  ẩn  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ .
- Giải hệ phương trình đó để có  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ .

**Ví dụ 3.8:** Xác định ma trận hàm mũ nhờ Cayley–Hamilton

Xét lại ma trận  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  đã cho ở ví dụ 3.7 với hai giá trị riêng  $s_1 = -1$  và  $s_2 = -2$ .

Để tính hai hàm  $a_0(t), a_1(t)$  cho:

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A$$

ta thay hai giá trị riêng đó vào công thức (3.23) ở định lý 3.10 và được:

$$\begin{cases} e^{-t} = a_0(t) - a_1(t) \\ e^{-2t} = a_0(t) - 2a_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ a_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} e^{At} &= a_0(t)I + a_1(t) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ - & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0(t) - 2a_1(t) & a_1(t) \\ 0 & a_0(t) - a_1(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 3.9:** Xác định ma trận hàm mũ nhờ Cayley–Hamilton

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận này có giá trị riêng  $s_1 = -3$  bội 2 và  $s_3 = 5$ . Theo định lý 3.9 thì:

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A + a_2(t)A^2$$

Để tìm các hàm  $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$  trước hết từ công thức (3.23) ta có:

$$e^{-3t} = a_0(t) - 3a_1(t) + 9a_2(t)$$

$$e^{5t} = a_0(t) + 5a_1(t) + 25a_2(t)$$

Một phương trình nữa có dạng (3.24) sẽ nhận được bằng cách đạo hàm phương trình tương ứng của giá trị riêng  $s_1 = -3$  bội 2 theo  $s_1$  là:

$$te^{-3t} = a_1(t) - 6a_2(t)$$

Cuối cùng, giải ba phương trình trên được:

$$a_0(t) = \frac{9}{64}e^{5t} - e^{-3t}\left(-5t + \frac{5}{64}\right), \quad a_1(t) = \frac{3}{32}e^{5t} - e^{-3t}\left(-\frac{1}{4}t + \frac{3}{32}\right)$$

$$a_2(t) = \frac{1}{64}\left[e^{5t} - e^{-3t}(8t + 1)\right]$$

□

### Nghiệm của phương trình trạng thái có tham số không phụ thuộc thời gian

Bây giờ, sau khi đã có công thức xác định ma trận hàm mũ  $e^{At}$  ta đã có thể bắt đầu công việc tìm nghiệm  $\underline{x}(t)$  của phương trình trạng thái. Phương trình trạng thái được quan tâm ở đây là:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.25)$$

trong đó  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\underline{y} \in \mathbb{R}^r$ , và các ma trận  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$  hoặc là hằng (phần tử của chúng là những hằng số) hoặc phụ thuộc vào các tham số khác được ghép chung lại thành vector tham số  $\underline{v}$  (không phụ thuộc  $t$ ).

Bài toán đặt ra là phải xác định đáp ứng  $\underline{y}(t)$  cho hệ thống có mô hình (3.25) khi hệ được kích thích bởi vector tín hiệu  $\underline{u}(t)$  ở đầu vào và tại thời điểm bắt đầu kích thích  $t=0$  hệ có các trạng thái đầu  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  biết trước.

**Định lý 3.11:** Phương trình trạng thái (3.25) có nghiệm:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \\ \underline{y}(t) = C \left[ e^{At} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \right] + D \underline{u} \end{cases} \quad (3.26)$$

và ma trận hàm  $e^{At}$  có vector cột thứ  $k$  là đáp ứng trạng thái của hệ (3.25) từ trạng thái ban đầu  $\underline{x}_0 = \underline{e}_k$  khi hệ không bị kích thích, tức là khi có  $\underline{u}(t) = \underline{0}$ , trong đó  $\underline{e}_k$  là vector đơn vị (vector có phần tử thứ  $k$  bằng 1).

*Chứng minh:*

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất trong (3.25) với hàm  $e^{-At}$  được:

$$\begin{aligned} e^{-At} \frac{d\underline{x}}{dt} &= e^{-At} A \underline{x} + e^{-At} B \underline{u} & \Leftrightarrow & e^{-At} \frac{d\underline{x}}{dt} - e^{-At} A \underline{x} = e^{-At} B \underline{u} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (e^{-At} \underline{x}) &= e^{-At} B \underline{u} & \Leftrightarrow & \int_0^t \frac{d}{d\tau} (e^{-A\tau} \underline{x}) d\tau = \int_0^t e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau \\ \Leftrightarrow e^{-At} \underline{x}(t) - \underline{x}_0 &= \int_0^t e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau & \Leftrightarrow & \underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Để có đáp ứng  $\underline{y}(t)$  ta chỉ cần thay  $\underline{x}(t)$  vào phương trình thứ hai trong (3.25). Kết luận cuối cùng là hiển nhiên, vì khi  $\underline{u}(t) = \underline{0}$ ,  $\underline{x}_0 = \underline{e}_k$  thì  $\underline{x}(t) = e^{At} \underline{e}_k$  và đó chính là vector cột thứ  $k$  của ma trận hàm  $e^{At}$ .  $\square$

**Ví dụ 3.10:** Xác định quỹ đạo trạng thái có tham số không phụ thuộc thời gian

Hãy xác định  $y(t)$  khi hệ được kích thích bởi  $u(t) = 1(t)$  từ trạng thái đầu  $\underline{x}_0 = \underline{0}$  cho hệ thống SISO có hai biến trạng thái được mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u, \quad y = x_1$$

Hệ có ma trận  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Khi đó:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Vậy:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

và

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}$$

$\square$

## Nghiệm của phương trình trạng thái phụ thuộc thời gian

Bài toán đặt ra ở đây là xác định đáp ứng  $\underline{y}(t)$  cho hệ thống không dừng:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x} + B(t)\underline{u} \\ \underline{y} = C(t)\underline{x} + D(t)\underline{u} \end{cases} \quad (3.27)$$

Giống như với mô hình (3.25) không phụ thuộc thời gian, nghiệm của (3.27) sẽ là:

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\underline{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau \quad (3.28)$$

Tuy nhiên có một sự khác nhau là ma trận hàm  $\Phi(t)$  trong (3.28) không phải là hàm mũ  $e^{At}$  mà thay vào đó nó được định lý sau:

**Định lý 3.12 (Peano–Baker):** Ma trận hàm  $\Phi(t)$  trong (3.28) là ma trận thỏa mãn:

- $\Phi(t) = I + \int_0^t A(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau_1) \int_0^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots$
- $\Phi(t-t_1) \cdot \Phi(t_1-t_0) = \Phi(t-t_0)$
- $\Phi^{-1}(t-t_0) = \Phi(t_0-t)$ , như vậy ma trận  $\Phi(t)$  là không suy biến.
- $\Phi(0) = I$  ( $I$  là ma trận đơn vị).

Định lý 3.12 có thể được sử dụng trực tiếp để xác định  $\Phi(t)$ , tuy nhiên đơn giản hơn cả vẫn là nhờ một dạng khác của nó phát biểu như sau:

**Định lý 3.13 (Picard):** Nếu có dãy ma trận hàm  $\{P_k(t)\}$  được định nghĩa với:

- $P_0(t) = I$ ,
- $P_k(t) = \int_0^t A(\tau)P_{k-1}(\tau)d\tau, \quad k = 1, 2, \dots$

thì:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t). \quad (3.30)$$

Ma trận hàm  $P_k(t)$  có tên là *ma trận Picard* thứ  $k$ . Từ định lý 3.13 ta có thuật toán xác định  $\Phi(t)$  gồm những bước sau:

- Chọn một số nguyên dương  $N$  đủ lớn,  $N$  càng lớn sai số của kết quả sẽ càng nhỏ.
- Đặt  $P_0(t) = I$ .
- Tính  $P_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  theo (3.29).
- Tính  $\Phi(t)$  theo (3.30).

Trong các công thức (3.29), (3.30) nếu  $A$  là ma trận hằng thì do:



$$P_1(t) = At, \quad P_2(t) = A^2 \frac{t^2}{2}, \quad \dots, \quad P_k(t) = A^k \frac{t^k}{k!}, \quad \dots$$

nên ma trận  $\Phi(t)$  sẽ chính là  $e^{At}$ .

Tương tự như định lý 3.11, ở đây ta cũng có:

**Định lý 3.14:** Nếu gọi  $\varphi_k(t)$ ,  $k=1,2, \dots, n$  là một vector cột của  $\Phi(t)$  thì  $\varphi_k(t)$  sẽ là nghiệm của (3.27) với  $\underline{u}(t)=\underline{0}$  và điều kiện đầu  $\underline{x}(0)=\underline{x}_0=\underline{e}_k$ , trong đó  $\underline{e}_k$  là vector đơn vị có phần tử thứ  $k$  bằng 1, còn lại các phần tử khác bằng 0.

**Ví dụ 3.11:** Xác định quỹ đạo trạng thái có tham số phụ thuộc thời gian

Xét hệ thống SISO có hai biến trạng thái được mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{u}$$

Trước tiên ta ký hiệu:

$$P_k(t) = \begin{pmatrix} p_{11}^k(t) & p_{12}^k(t) \\ p_{21}^k(t) & p_{22}^k(t) \end{pmatrix}$$

trong đó số mũ  $k$  của các phần tử ma trận  $P_k(t)$  không có nghĩa lũy thừa mà chỉ xác định rằng nó thuộc ma trận Picard thứ  $k$ . Với ký hiệu này thì:

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \int_0^t A(\tau) P_{k-1}(\tau, t_0) d\tau = \int_0^t \left[ I + \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} p_{11}^{k-1} & p_{12}^{k-1} \\ p_{21}^{k-1} & p_{22}^{k-1} \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} p_{11}^{k-1} & p_{12}^{k-1} \\ p_{21}^{k-1} & p_{22}^{k-1} \end{pmatrix} d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} \tau p_{21}^{k-1} & \tau p_{22}^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\tau \end{aligned} \quad (3.31)$$

Để ý rằng khi  $k=0$  thì với:

$$P_0(t) = I, \quad p_{12}^0(t) = p_{21}^0(t) = 0 \quad \text{và} \quad p_{11}^0(t) = p_{22}^0(t) = 1 \quad (3.32)$$

sẽ có được từ biểu thức thứ hai trong (3.31):

$$p_{21}^k = \int_0^t p_{21}^{k-1}(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad p_{21}^k(t) \equiv 0 \quad \text{với mọi } k \quad (3.33)$$

Suy ra:

$$P_k(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} p_{11}^{k-1} & p_{12}^{k-1} \\ 0 & p_{22}^{k-1} \end{pmatrix} d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & \tau p_{22}^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\tau, \quad (k \geq 1)$$

nói cách khác, với  $k \geq 1$  thì:

$$p_{ii}^k(t) = \int_0^t p_{ii}^{k-1}(\tau) d\tau, \quad p_{12}^k(t) = \int_0^t (p_{12}^{k-1} + \tau p_{22}^{k-1}) d\tau \quad (3.34)$$

Từ (3.32) và (3.34) ta đi đến:

$$p_{ii}^k = \int_0^t \int_0^t p_{ii}^{k-2}(d\tau)^2 = \dots = \int_0^t \dots \int_0^t p_{ii}^0(d\tau)^k = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} t^k = \frac{t^k}{k!} \quad (3.35)$$

Thay (3.35) vào (3.34) ta có tiếp với  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} p_{12}^k(t) &= \frac{t^{k+2}}{k!(k+2)} + \int_0^t p_{12}^{k-1} d\tau = \frac{t^{k+2}}{k!(k+2)} + \int_0^t \left( \frac{t^{k+1}}{(k-1)!(k+1)} + \int_0^t p_{12}^{k-2} d\tau \right) d\tau \\ &= \frac{t^{k+2}}{k!(k+2)} + \frac{t^{k+2}}{(k-1)!(k+1)(k+2)} + \int_0^t \int_0^t p_{12}^{k-2}(d\tau)^2 \\ &\vdots \\ &= \frac{t^{k+2}}{k!(k+2)} + \frac{t^{k+2}}{(k-1)!(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{t^{k+2}}{(k+2)!}, \text{ vì } p_{12}^0(t) = 0 \\ &= \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} ((k+1) + k + \dots + 1) = \frac{t^{k+2}}{2 \cdot k!} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Thay các kết quả (3.33), (3.35), (3.36) vào (3.30) để tính  $\Phi(t)$  sẽ thu được:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \frac{t^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \square$$

### Quá trình cưỡng bức và quá trình tự do

Trong khi phân tích ta thường sử dụng khái niệm *quá trình cưỡng bức* và *quá trình tự do* của một hệ thống. Khi kích thích hệ bằng tín hiệu vào  $\underline{u}(t)$ , do tính chất tuyến tính của hệ, tức là của mô hình trạng thái (3.25), đáp ứng  $\underline{y}(t)$  sẽ có hai thành phần xếp

chồng  $\underline{y}(t) = \underline{y}_c(t) + \underline{y}_t(t)$ , trong đó:

- Thành phần  $\underline{y}_c(t)$  là nghiệm của phương trình trạng thái (3.25) với  $\underline{u}(t)$  cho trước và trạng thái đầu  $\underline{x}(0) = \underline{0}$ . Đó là phương trình mô tả *quá trình cưỡng bức*.
- Thành phần  $\underline{y}_t(t)$  là nghiệm của (3.25) ứng với  $\underline{u}(t) = \underline{0}$  và trạng thái đầu  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  cho trước. Đó là phương trình mô tả *quá trình tự do*.

Từ đây, cùng với định lý 3.11, ta đi đến kết luận:

**Định lý 3.15:** Khi hệ thống được mô tả bởi mô hình trạng thái (3.25) thì nó sẽ có:

- a) Quá trình tự do  $\underline{y}_t(t) = C e^{At} \underline{x}_0$
- b) Quá trình cưỡng bức  $\underline{y}_c(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau + D \underline{u}$

*Chứng minh:* (Bài tập).

### 3.3 Phân tích hệ thống

#### 3.3.1 Những nhiệm vụ cơ bản của công việc phân tích

Các nhiệm vụ cơ bản của công việc phân tích chất lượng động học của một hệ thống đã được ta đề cập ở mục 2.3.1 thuộc chương 2. Chúng bao gồm:

- Tính ổn định.
- Sai lệch tĩnh, độ quá điều chỉnh, thời gian quá độ.
- Chất lượng bền vững.

Tuy nhiên, do đặc thù là được mô tả trong không gian trạng thái với mô hình:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.37)$$

mà ở đó rất có thể có những biến trạng thái thừa, nên công việc phân tích hệ thống trong không gian trạng thái còn cần phải làm rõ thêm:

- 1) Hiểu biết về sự *phân bố các điểm cân bằng* của hệ thống. Một điểm trạng thái  $\underline{x}_e$  được gọi là điểm cân bằng nếu như khi hệ đang ở điểm trạng thái  $\underline{x}_e$  và không có một tác động nào từ bên ngoài thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó. Theo định nghĩa như vậy thì điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  của hệ thống phải là nghiệm của:

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} = 0 \quad (3.38)$$

Điều này cũng dễ hiểu, vì theo định nghĩa, điểm cân bằng là điểm mà hệ thống sẽ nằm im tại đó, tức là trạng thái của nó không bị thay đổi ( $\frac{dx}{dt} = 0$ ) khi không có sự tác động từ bên ngoài ( $u=0$ ).

Ta có thể thấy ngay được từ (3.38) là hệ tuyến tính cân bằng tại mọi điểm trạng thái thuộc không gian  $\text{Ker}(A)$  và nếu ma trận  $A$  của mô hình trạng thái (3.37) không suy biến thì hệ (3.37) chỉ có một điểm cân bằng duy nhất là gốc tọa độ  $0$ .

- 2) Hiểu biết về *tính ổn định Lyapunov* của hệ thống. Một hệ thống được gọi là *ổn định Lyapunov tại điểm cân bằng  $\underline{x}_e$*  nếu sau khi có một tác động tức thời (chẳng hạn như nhiễu tức thời) đánh bật hệ ra khỏi điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  thì sau đó hệ có khả năng *tự quay về được lân cận* điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  ban đầu (không cần có tín hiệu điều khiển  $u$ ) và trong quá trình quay về đó, quỹ đạo trạng thái tự do  $\underline{x}(t)$  của hệ là bị chặn. Nếu hệ không những tự quay về được lân cận của  $\underline{x}_e$  mà còn tiến tới  $\underline{x}_e$  thì nó được gọi là *ổn định tiệm cận Lyapunov tại  $\underline{x}_e$* .

Ở hệ tuyến tính, *khái niệm ổn định tiệm cận Lyapunov hoàn toàn đồng nhất với khái niệm ổn định BIBO* đã được biết tới trước đây (mục 2.3.2).

3) Hiểu biết về tính điều khiển được của hệ thống tại một điểm trạng thái cho trước.

Tại sao lại cần phải hiểu biết về tính điều khiển được?. Nhiệm vụ chính của điều khiển là tìm được tín hiệu điều khiển mang lại cho hệ thống một chất lượng mong muốn, tức là phải tìm ra được một tín hiệu thỏa mãn chất lượng đề ra trong số các tín hiệu có khả năng đưa hệ thống từ điểm trạng thái  $\underline{x}_0$  ban đầu tới được điểm trạng thái đích  $\underline{x}_T$ . Nếu như không tồn tại bất cứ một tín hiệu điều khiển nào đưa được hệ từ  $\underline{x}_0$  tới  $\underline{x}_T$  thì sự cố gắng tổng hợp hay đi tìm tín hiệu điều khiển như trên sẽ trở nên vô nghĩa (bài toán không có lời giải). Bởi vậy, để công việc điều khiển có thể có kết quả ta phải biết được rằng có tồn tại hay không ít nhất một tín hiệu điều khiển đưa được hệ thống từ  $\underline{x}_0$  về  $\underline{x}_T$  trong khoảng thời gian  $T$  hữu hạn. Nếu như tồn tại một tín hiệu điều khiển làm được việc đó thì ta nói hệ thống là điều khiển được tại điểm trạng thái  $\underline{x}_0$ .

4) Hiểu biết về tính quan sát được của hệ thống tại một điểm trạng thái cho trước.

Trong quá trình điều khiển, nhiều khi người ta cần phải xác định trạng thái  $\underline{x}$  của hệ. Công việc xác định điểm trạng thái  $\underline{x}$  có thể được tiến hành bằng cách đo trực tiếp (nhờ các bộ cảm biến, sensor) nhưng có khi phải tính toán, phải quan sát khi không thể đo được trực tiếp, chẳng hạn như gia tốc không thể đo được trực tiếp mà phải được suy ra từ việc đo tốc độ trong một khoảng thời gian cho phép. Trong trường hợp phải quan sát, người ta nói điểm trạng thái  $\underline{x}$  của một hệ là quan sát được nếu ta có thể xác định được nó thông qua việc đo các tín hiệu vào/ra trong một khoảng thời gian hữu hạn.

### 3.3.2 Phân tích tính ổn định

#### Phân tích tính ổn định BIBO

Trước hết, từ mối quan hệ giữa mô hình trạng thái (3.37) không có trạng thái thừa và ma trận hàm truyền  $G(s)$  của hệ thống:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B+D = C \frac{(sI-A)_{adj}}{\det(sI-A)} B+D \quad (3.39)$$

trong đó ký hiệu  $(sI-A)_{adj}$  là ma trận bù của  $(sI-A)$ , ta thấy rằng giá trị riêng của ma trận  $A$  trong mô hình (3.37) chính là *điểm cực* của hệ thống. Mở rộng ra, nếu sử dụng công thức tính định thức ma trận khối của Schur cho ma trận  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = \det \begin{pmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(sI-A) \det(D+C(sI-A)^{-1}B)$$

ta còn thấy được thêm rằng *điểm không* của hệ chính là nghiệm của  $\det(P)=0$ .

Kết hợp chung với định lý 2.12 thì những điều nhận xét trên dẫn đến:

**Định lý 3.16:** Hệ (3.37) không có trạng thái thừa ổn định BIBO khi và chỉ khi ma trận  $A$  có tất cả các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo, tức là khi và chỉ khi:

$$p(s) = \det(sI - A) \quad (3.40)$$

là đa thức Hurwitz.

Như vậy, các tiêu chuẩn đã biết ở mục 2.3.2 như Routh, Hurwitz, Michailov, Lienard–Chipart, ... đều sử dụng được để kiểm tra tính ổn định hệ (3.37). Vấn đề hạn chế chính có lẽ còn làm cho ta không được thoải mái khi sử dụng chúng là phải xây dựng được đa thức đặc tính  $p(s) = \det(sI - A)$ , đặc biệt khi  $A$  có số chiều khá lớn.

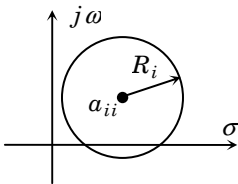
Định lý Gerschgorin trình bày sau đây và hệ quả của nó sẽ là một tiêu chuẩn bổ sung, giúp cho ta xét được tính ổn định của hệ (3.37) mà không cần phải có đa thức đặc tính (3.40). *Tuy nhiên định lý này chỉ là một điều kiện đủ.* Điều đó nói rằng nếu như ma trận  $A$  không thỏa mãn định lý thì hệ (3.37) vẫn có thể ổn định.

**Định lý 3.17** (Gerschgorin): Với mỗi giá trị riêng  $s_k$  của ma trận phức:

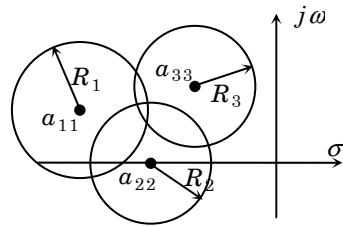
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

luôn tồn tại một chỉ số  $i=1, 2, \dots, n$  sao cho  $s_k$  nằm trong đường tròn tâm  $a_{ii}$  bán kính  $R_i = |a_{i1}| + \dots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \dots + |a_{in}|$  (hình 3.4), tức là:

$$|s_k - a_{ii}| \leq R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$



Hình 3.4: Minh họa định lý 3.17



Hình 3.5: Định vị miền các giá trị riêng của ma trận.

*Chứng minh:*

Vì  $s_k$  là giá trị riêng của  $A$  nên phải tồn tại một vector  $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq \underline{0}$  sao cho:

$$(s_k I - A)\underline{v} = \underline{0}$$

trong đó  $\underline{0}$  là ký hiệu chỉ vector có các phần tử đều bằng 0. Suy ra:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}v_j + (a_{ii}-s_k)v_i = 0 \Rightarrow (s_k - a_{ii})v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}v_j$$

với  $i=1, 2, \dots, n$ . Chọn chỉ số  $i$  sao cho:

$$|v_i| = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$$

sẽ có:

$$|(s_k - a_{ii})v_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}v_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \cdot |v_j| \Leftrightarrow |s_k - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (\text{đ.p.c.m}) \quad \square$$

Theo định lý 3.17, mỗi giá trị riêng  $s_i$  của  $A$  đều được bao bởi một đường tròn có tâm là  $a_{ii}$  và bán kính là  $R_i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Do đó nếu các đường tròn đó đều nằm bên trái trục ảo thì chắc chắn tất cả các giá trị riêng  $s_i$ ,  $i=1, \dots, n$  đều phải có phần thực âm (hình 3.5).

Ta đi đến điều kiện đủ cho tính ổn định của hệ như sau:

**Định lý 3.18** (Hệ quả Gerschgorin): Ký hiệu  $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ . Vậy thì hệ (3.37) với  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  sẽ ổn định nếu  $a_{ii} + R_i < 0$  với mọi  $i=1, 2, \dots, n$ .

**Ví dụ 3.12:** Minh họa ý nghĩa định lý Gerschgorin

Cho hệ mô tả bởi:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Từ ma trận hệ thống có:

$$a_{11} + R_1 = -3 + 1 = -2 < 0$$

$$a_{22} + R_2 = -3 + 2 = -1 < 0$$

$$a_{33} + R_3 = -4 + (2+1) = -1 < 0$$

Do đó theo định lý 3.18 thì hệ ổn định. Ta có thể kiểm tra lại kết luận trên nhờ đa thức đặc tính của hệ thống:

$$p(s) = \det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s+3 & 1 & 0 \\ -2 & s+3 & 0 \\ 2 & -1 & s+4 \end{pmatrix} = (s+4)[(s+3)^2 + 2]$$

và thấy đa thức đó là Hurwitz. □

**Ví dụ 3.13:** Minh họa ý nghĩa định lý Gerschgorin

Định lý 3.18 chỉ là điều kiện đủ, bởi vậy nếu hệ không thỏa mãn định lý 3.18 thì có thể nó vẫn ổn định. Để minh họa ta xét hệ sau:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Hệ có đa thức đặc tính:

$$p(s) = \det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s+2 & 1 & 0 \\ -4 & s+2 & 0 \\ 2 & -1 & s+1 \end{pmatrix} = (s+1)[(s+2)^2 + 4]$$

với ba nghiệm:

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -2 + 2j, \quad s_3 = -2 - 2j$$

đều nằm bên trái trục ảo nên nó ổn định. Nhưng hệ lại không thỏa mãn định lý 3.18:

$$a_{11} + R_1 = -2 + 1 = -1 < 0$$

$$a_{22} + R_2 = -2 + 4 = 2 > 0$$

$$a_{33} + R_3 = -1 + (2 + 1) = 2 > 0$$

**Tiêu chuẩn ổn định Lyapunov - Hàm Lyapunov**

Giống như định lý của Gerschgorin, tiêu chuẩn Lyapunov trình bày sau đây là phương pháp xét tính ổn định một cách trực tiếp trong không gian trạng thái rất thích hợp cho những hệ thống mô tả bởi mô hình trạng thái. Xuất phát điểm của tiêu chuẩn Lyapunov là định lý sau:

**Định lý 3.19:** Hệ (3.37) ổn định BIBO khi và chỉ khi nó ổn định tiệm cận Lyapunov, tức là khi và chỉ khi các quỹ đạo trạng thái tự do có hướng tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó.

*Chứng minh:*

Theo định lý 3.16 thì hệ (3.37) ổn định BIBO khi và chỉ khi ma trận  $A$  có các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo. Lúc đó, ảnh Laplace  $\underline{X}(s)$  của quỹ đạo trạng thái tự do  $\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0$  tính theo:

$$\mathcal{L}\{\underline{x}(t)\} = (sI - A)^{-1} \underline{x}_0 = \frac{(sI - A)_{adj}}{\det(sI - A)} \underline{x}_0$$

là hàm bền. Vậy  $\underline{x}(t)$  phải tiến về  $\underline{0}$  và kết thúc tại đó.



Như vậy, để kiểm tra tính ổn định tiệm cận Lyapunov (và cũng là tính ổn định BIBO), ta chỉ cần kiểm tra xem quỹ đạo trạng thái của hệ thống ở quá trình tự do có hướng tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó không.

Từ phương diện năng lượng ta có thể xem như phương pháp Lyapunov được xây dựng trên cơ sở bảo tồn năng lượng của một hệ vật lý. Năng lượng còn tồn tại bên trong hệ vật lý do tác động tức thời bên ngoài đưa vào được đo bởi một hàm không âm. Hệ sẽ ổn định (tiệm cận) ở trạng thái cân bằng của nó nếu như trong lân cận điểm cân bằng đó hàm đo năng lượng này của hệ luôn có xu hướng giảm dần về 0.

Bản chất phương pháp Lyapunov được giải thích như sau: Giả sử rằng bao quanh gốc tọa độ  $\underline{0}$  có họ các đường cong khép kín  $v$  (hình 3.6). Các đường cong này có thể được xem như biên của các lân cận của điểm gốc  $\underline{0}$ . Để kiểm tra xem quỹ đạo trạng thái  $\underline{x}(t)$  (ứng với  $\underline{u}=\underline{0}$  và đi từ điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0$  cho trước nhưng tùy ý) mô tả quá trình tự do của hệ có tiến về gốc tọa độ  $\underline{0}$  hay không, ta chỉ cần xét xem quỹ đạo trạng thái  $\underline{x}(t)$  có cắt tất cả các đường cong thuộc họ  $v$  từ bên ngoài vào bên trong hay không và nếu điều đó xảy ra thì chắc chắn  $\underline{x}(t)$  phải có hướng tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó.

Như vậy phương pháp Lyapunov sẽ gồm hai bước:

- Xây dựng họ các đường cong  $v$  khép kín chứa điểm gốc tọa độ  $\underline{0}$  bên trong.
- Kiểm tra xem quỹ đạo trạng thái  $\underline{x}(t)$  mô tả quá trình tự do của hệ có cắt mọi đường cong thuộc họ  $v$  theo chiều từ ngoài vào trong hay không. Hiển nhiên, để  $\underline{x}(t)$  cắt một đường cong thuộc họ  $v$  theo chiều từ ngoài vào trong là tại điểm cắt đó, tiếp tuyến của quỹ đạo tự do  $\underline{x}(t)$  phải tạo với vector  $\nabla_v$  vuông góc với đường cong đó theo hướng từ trong ra ngoài một góc lớn hơn  $90^\circ$  (hình 3.6).

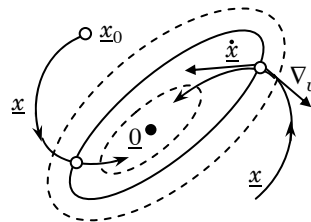
**Định lý 3.20** (Lyapunov): Nếu tồn tại hàm  $V(\underline{x})$ , thỏa mãn các điều kiện:

- Khả vi, xác định dương, tức là  $V(\underline{x}) > 0$  với  $\underline{x} \neq 0$  và  $V(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$
- $\frac{dV}{dt} < 0$ , với  $\frac{dV}{dt}$  là đạo hàm của  $V(\underline{x})$  dọc theo quỹ đạo trạng thái tự do.

thì hệ sẽ ổn định tiệm cận Lyapunov tại  $\underline{0}$  (ổn định BIBO). Hàm  $V(\underline{x})$  khi đó được gọi là *hàm Lyapunov*. Nói cách khác, hệ ổn định tiệm cận tại  $\underline{0}$  nếu nó có hàm Lyapunov.

*Chứng minh:*

Hàm khả vi, xác định dương  $V(\underline{x})$  có tính chất là khi ta cắt nó bằng một mặt phẳng  $V=k$  song song với đáy (không gian trạng thái) và chiếu thiết diện xuống đáy thì ta sẽ được một đường cong khép kín  $v_k$  chứa điểm gốc tọa độ  $\underline{0}$ . Đường cong  $v_k$  ứng với  $k$  nhỏ hơn thì nằm bên trong đường cong  $v_k$  ứng với  $k$  lớn hơn (hình 3.7a). Nói cách khác:



**Hình 3.6:** Giải thích xuất phát điểm của tư tưởng phương pháp Lyapunov.



$$k_1 < k_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_{k_1} \text{ nằm bên trong } v_{k_2}$$

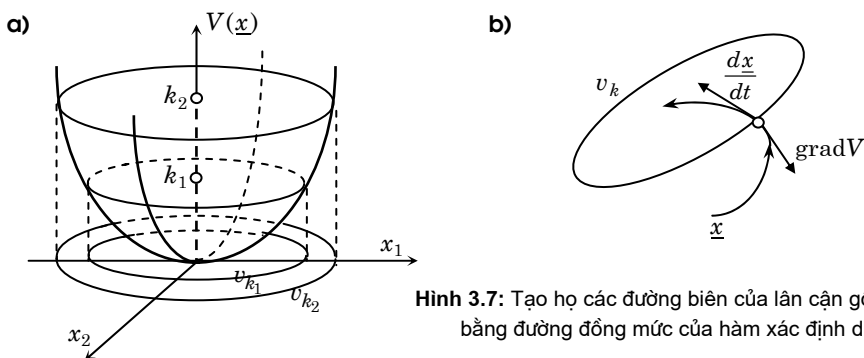
Do đó vector vuông góc với đường cong  $v_k$  và chỉ chiều tăng theo  $k$  là:

$$\nabla_v = \text{grad}V = \left( \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \right)^T = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T$$

sẽ có hướng chỉ từ trong ra ngoài đường cong  $v_k$  (hình 3.7b). Tiếp theo, do có:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = (\text{grad}V)^T \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = |\text{grad}V| \cdot \left| \frac{d\underline{x}}{dt} \right| \cdot \cos \varphi$$

mà  $\frac{d\underline{x}}{dt}$  lại chính là tiếp tuyến của quỹ đạo trạng thái  $\underline{x}(t)$ , nên với điều kiện  $\frac{dV}{dt} < 0$ , góc  $\varphi$  tạo bởi hai vector  $\text{grad}V$  và  $\frac{d\underline{x}}{dt}$  phải là một góc tù (lớn hơn  $90^\circ$ ), tức là quỹ đạo trạng thái  $\underline{x}(t)$  sẽ cắt tất cả các đường cong  $v_k$  theo hướng từ ngoài vào trong.  $\square$



**Hình 3.7:** Tạo họ các đường biên của lân cận gốc bằng đường đồng mức của hàm xác định dương.

**Chú ý:** Do trong phần chứng minh định lý 3.20 ta đã không sử dụng giả thiết rằng hệ đang xét là hệ tuyến tính. Bởi vậy định lý 3.20 còn áp dụng cho cả hệ phi tuyến chứ không riêng cho hệ tuyến tính. Đây là điều đặc biệt của tiêu chuẩn Lyapunov so với các tiêu chuẩn đã biết khác.

Theo tinh thần nội dung của định lý 3.20, để kiểm tra tính ổn định hệ thống nhờ tiêu chuẩn Lyapunov thì ta phải tìm hàm Lyapunov  $V(\underline{x})$  khả vi, xác định dương và đạo hàm của nó tính trên cơ sở mô hình trạng thái hệ thống phải xác định âm. Cũng theo định lý 3.20, nếu như ta không tìm được một hàm Lyapunov nào như vậy thì vẫn không thể khẳng định được hệ không ổn định. Nói cách khác, định lý 3.20 được xem như một điều kiện đủ để xét tính ổn định của hệ thống.

#### Ví dụ 3.14: Minh họa tiêu chuẩn Lyapunov

Cho hệ mô tả bởi:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 + 2u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Sử dụng hàm khả vi, xác định dương:

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

cùng với quỹ đạo  $\mathbf{x}(t)$  của quá trình tự do của hệ ( $u_1 = u_2 = 0$ ) ta có:

$$\frac{dV}{dt} = (2x_1, 2x_2, 2x_3) \cdot \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = -8x_1^2 - 10x_2^2 - 4x_3^2 < 0$$

với mọi vector  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  (hàm  $\frac{dV}{dt}$  xác định âm). Bởi vậy, hệ ổn định theo định lý 3.20.  $\square$

Thông thường với hệ tuyến tính có mô hình trạng thái (3.37), người ta hay sử dụng hàm tròn, xác định dương  $V(\mathbf{x})$  có dạng toàn phương:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \quad (3.41)$$

trong đó  $P$  là ma trận đối xứng kiểu  $n \times n$  với  $n$  là số biến trạng thái của hệ thống (số chiều của không gian trạng thái). Chẳng hạn như ở ví dụ 3.14 ta đã sử dụng ma trận  $P$  là ma trận đơn vị.

Ma trận đối xứng  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  có các giá trị riêng là số thực dương (gọi là *ma trận xác định dương*), sẽ làm cho:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \text{ và } \mathbf{x}^T P \mathbf{x} = 0 \text{ khi và chỉ khi } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Sử dụng mô hình trạng thái (3.37) của hệ thống thì với quỹ đạo trạng thái tự do ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) ta được:

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{x}^T P \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (PA + A^T P) \mathbf{x}$$

Bởi vậy hệ tuyến tính (3.37) sẽ ổn định nếu tồn tại ma trận  $Q$  xác định dương sao cho:

$$\mathbf{x}^T (PA + A^T P) \mathbf{x} = -Q \quad \text{với mọi } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Ma trận  $(PA + A^T P)$  khi đó được gọi là *xác định âm*. Ta đi đến hệ quả:

**Định lý 3.21** (Hệ quả Lyapunov): Cho một hệ tuyến tính với mô hình trạng thái (3.37). Hệ sẽ ổn định khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- Tồn tại ma trận vuông  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  xác định dương sao cho ma trận  $(PA + A^T P)$  xác định âm, tức là  $-(PA + A^T P)$  xác định dương.

b) Tồn tại một ma trận đối xứng xác định dương  $Q$  sao cho phương trình

$$PA + A^T P = -Q \quad (3.42)$$

có nghiệm  $P$  cũng đối xứng, xác định dương. Hơn nữa nghiệm  $P$  đó là duy nhất. Phương trình (3.42) có tên gọi là *phương trình Lyapunov*.

*Chứng minh:*

Chỉ còn lại điều kiện đủ của b) là phải chứng minh, tức là phải chỉ rằng khi  $A$  là ma trận bền thì phương trình Lyapunov (3.42) với  $Q$  xác định dương sẽ có nghiệm  $P$  duy nhất cũng xác định dương. Trước tiên ta đặt:

$$\frac{dJ(t)}{dt} = A^T J + JA$$

thỏa mãn điều kiện đầu  $J(0) = Q$ . Khi đó, từ lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng thì phương trình trên có nghiệm:

$$J(t) = e^{A^T t} Q e^{At}$$

Tích phân hai vế theo  $t$  và để ý tới tính bền của ma trận  $A$ , tức là  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = \Theta$ , trong đó  $\Theta$  là ký hiệu chỉ ma trận có tất cả các phần tử bằng 0, sẽ được

$$\int_0^\infty \frac{dJ}{dt} dt = -Q = A^T \int_0^\infty \frac{dJ}{dt} dt + \int_0^\infty \frac{dJ}{dt} dt \cdot A$$

Bởi vậy, qua so sánh với phương trình Lyapunov (3.42), ta có nghiệm  $P$  xác định dương:

$$P = \int_0^\infty \frac{dJ}{dt} dt = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

Để chứng minh nghiệm  $P$  là duy nhất, ta giả sử ngoài nó ra còn có một nghiệm  $P_0$  khác. Khi đó, với:

$$A^T P_0 + P_0 A = -Q$$

ta cũng có được từ cũng như tính giao hoán được của  $Ae^{At} = e^{At}A$ :

$$\begin{aligned} P &= - \int_0^\infty e^{A^T t} (A^T P_0 + P_0 A) e^{At} dt = - \int_0^\infty (e^{A^T t} A^T P_0 e^{At} + e^{A^T t} P_0 A e^{At}) dt \\ \Leftrightarrow P &= - \int_0^\infty (A^T e^{A^T t} P_0 e^{At} + e^{A^T t} P_0 A e^{At}) dt = - \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^T t} P_0 e^{At}) dt = P_0 \end{aligned}$$

và đó chính là điều phải chứng minh. □

Cuối cùng, và cũng để việc sử dụng định lý 3.21 được thuận tiện, ta sẽ làm quen với định lý của Sylvester cho sau đây như một công cụ xác định tính xác định dương của một ma trận đối xứng cho trước.

**Định lý 3.22 (Sylvester):** Cần và đủ để ma trận vuông, đối xứng:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}, \quad q_{ik} = q_{ki}$$

xác định dương là các ma trận đường chéo của nó có định thức dương, tức là:

$$\det(q_{11})=q_{11}>0, \quad \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}, \dots, \det(Q)>0$$

Tất nhiên rằng định lý Sylvester nêu trên cũng được sử dụng để xác định tính xác định âm của một ma trận  $Q$  bằng cách kiểm tra xem ma trận  $-Q$  có xác định dương hay không. Nếu  $-Q$  xác định dương thì  $Q$  xác định âm.

**Ví dụ 3.15:** Minh họa tiêu chuẩn Lyapunov

Xét hệ mô tả bởi:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

Chọn ma trận  $Q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$  xác định dương, tức là chọn  $q>0$  rồi thay vào (3.42) được:

$$P \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P = - \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow P = -\frac{q}{2a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theo định lý 3.21 thì hệ sẽ ổn định nếu như  $P$  xác định dương, tức là khi:

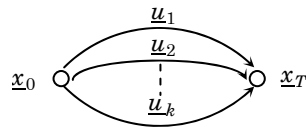
$$-\frac{q}{2a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 0$$



### 3.3.3 Phân tích tính điều khiển được

**Khái niệm điều khiển được và điều khiển được hoàn toàn**

Một nguyên tắc luôn phải tuân thủ khi đi tìm lời giải cho một bài toán, có thể là một bài toán thuộc lĩnh vực kỹ thuật, nhưng cũng có thể thuộc các lĩnh vực khác như xã hội, kinh tế hay tự nhiên, là trước khi bắt tay vào công việc tìm kiếm lời giải ta phải xác định xem có thực sự tồn tại hay không lời giải của bài toán đó. Ở bài toán điều khiển cũng vậy. Nói chung, một bài toán điều khiển có hai phần:



**Hình 3.8:** Những tín hiệu thích hợp.

- Xác định những tín hiệu điều khiển  $\underline{u}(t)$  để đưa hệ từ một điểm trạng thái ban đầu không mong muốn tới một điểm trạng thái mong muốn khác. Ví dụ, hệ đang làm việc ổn định ở trạng thái cân bằng  $\underline{x}_T$  thì có một tín hiệu nhiễu tác động vào hệ làm cho hệ ra khỏi điểm làm việc cân bằng đó và chuyển tới một điểm trạng thái  $\underline{x}_0$  không mong muốn nào đó. Nhiệm vụ của điều khiển là phải tìm tín hiệu điều khiển  $\underline{u}(t)$  đưa được hệ từ  $\underline{x}_0$  quay trở về điểm trạng thái cân bằng  $\underline{x}_T$  ban đầu trong một khoảng thời gian hữu hạn (hình 3.8).
- Tìm trong số những tín hiệu  $\underline{u}(t)$  đã xác định được một (hoặc nhiều) tín hiệu mang đến cho quá trình chuyển đổi đó một chất lượng như đã yêu cầu. Chẳng hạn trong số các tín hiệu có khả năng đưa hệ từ  $\underline{x}_0$  về lại được  $\underline{x}_T$  thì phải xác định một tín hiệu sao cho với nó, chi phí cho quá trình chuyển đổi là thấp nhất.

Như vậy, rõ ràng ta chỉ có thể thực sự điều khiển được hệ thống nếu như đã tìm được ít nhất một tín hiệu điều khiển  $\underline{u}(t)$  đưa được hệ từ điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0$  tới được điểm trạng thái đích  $\underline{x}_T$  trong khoảng thời gian hữu hạn. Không phải mọi hệ thống hay đối tượng tồn tại trong tự nhiên có khả năng động học là đưa được về trạng thái mong muốn. Một hệ thống có khả năng đưa được từ điểm trạng thái  $\underline{x}_0$  về điểm trạng thái  $\underline{x}_T$  được gọi là *hệ điều khiển được (hoàn toàn)* tại  $\underline{x}_0$ .

**Định nghĩa 3.2:** Một hệ thống tuyến tính, liên tục được gọi là *điều khiển được* nếu tồn tại ít nhất một tín hiệu điều khiển đưa được nó từ một điểm trạng thái ban đầu  $\underline{x}_0$  (tùy ý) về được gốc tọa độ  $\underline{0}$  trong khoảng thời gian hữu hạn.

Ta cần phải lưu ý tới ba điểm trong định nghĩa vừa nêu:

1) *Thứ nhất là về khoảng thời gian hữu hạn.*

Đây là yêu cầu mà sự cần thiết của nó gần như là hiển nhiên, vì nếu hệ có thể đưa được về gốc tọa độ nhưng phải trong khoảng thời gian vô cùng lớn thì cũng chẳng có ý nghĩa gì cho bài toán điều khiển. Thậm chí nhiều hệ có khả năng tự quay được về gốc tọa độ (hệ ổn định) nhưng không điều khiển được. Để minh họa ta xét một ví dụ.

**Ví dụ 3.16:** Minh họa khái niệm điều khiển được

Xét hệ thống có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 + u(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng tín hiệu điều khiển  $u(t)$  không có tác dụng gì đối với biến trạng thái  $x_1(t)$  và do đó mọi tín hiệu  $u(t)$  không đưa được hệ từ điểm trạng thái ban đầu  $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$  có  $x_1^0 \neq 0$  về được gốc tọa độ trong khoảng thời gian hữu hạn, mặc dù với:

$$x_1(t) = e^{at} x_1^0$$

thì  $x_1(t)$  cũng vẫn tiến tới 0 khi  $a$  có phần thực âm, tức là hệ cũng có thể tự về được gốc tọa độ, nhưng trong một khoảng thời gian vô hạn.  $\square$

## 2) Thứ hai là điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0$ tùy ý.

Một câu hỏi đặt ra cho ta là có hay không trường hợp tuy hệ thống có thể được đưa từ  $\underline{x}_0$  về gốc tọa độ (bằng một hoặc nhiều tín hiệu điều khiển  $\underline{u}(t)$  thích hợp) nhưng từ một điểm trạng thái  $\hat{\underline{x}}_0$  nào đó khác thì không thể (không tồn tại một tín hiệu  $\underline{u}(t)$  nào làm được việc đó). Câu hỏi đó là hoàn toàn có lý và người ta đã thấy rằng điều đó có thể xảy ra ở một hệ thống bất kỳ, đặc biệt là hệ thống điều khiển phi tuyến. Chính vì vậy, xuất xứ ban đầu, khái niệm điều khiển được luôn được nêu cùng với điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0$ . Chẳng hạn như thay vì "*hệ thống điều khiển được*" người ta lại nói "*hệ thống điều khiển được tại điểm trạng thái  $\underline{x}_0$* ". Tuy nhiên, như sau này ta sẽ chỉ rõ, riêng đối với hệ tuyến tính, nếu đã tồn tại một tín hiệu  $u_1(t)$  đưa hệ từ  $\underline{x}_0$  về được gốc tọa độ  $\underline{0}$  thì cũng tồn tại (ít nhất) một tín hiệu  $u_2(t)$  đưa được hệ từ  $\hat{\underline{x}}_0$  về  $\underline{0}$ . Nói cách khác, khi hệ tuyến tính đã điều khiển được tại một điểm trạng thái  $\underline{x}_0$  thì nó cũng điều khiển được tại các điểm trạng thái khác trong không gian trạng thái. Vì lẽ đó, trong định nghĩa 3.2 ta đã ghi thêm chữ "tùy ý" về yêu cầu điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0$  và cũng chỉ nói ngắn gọn "hệ điều khiển được" thay cho "hệ điều khiển được tại  $\underline{x}_0$ ".

## 3) Thứ ba là điểm trạng thái đích là gốc tọa độ.

Trong định nghĩa 3.2, điểm trạng thái đích  $\underline{x}_T$  được thay cụ thể là điểm gốc tọa độ  $\underline{0}$ . Nếu như không có thêm câu chỉ rõ là đối tượng đề cập trong định nghĩa chỉ là đối tượng tuyến tính, liên tục thì việc thay thế đó sẽ là một hạn chế phạm vi ứng dụng lớn của định nghĩa vì rất có thể là hệ tuy đưa được về gốc  $\underline{0}$  song lại không đưa được tới  $\underline{x}_T$ . Do đó, với đối tượng quan tâm là một hệ thống điều khiển nói chung (kể cả hệ phi tuyến) thì để chặt chẽ người ta đã đưa thêm các khái niệm sau vào định nghĩa:

- Hệ được gọi là *đạt tới được* điểm trạng thái  $\underline{x}_T$  nếu tồn tại một tín hiệu điều khiển  $\underline{u}(t)$  đưa được hệ từ gốc tọa độ  $\underline{0}$  tới  $\underline{x}_T$  trong khoảng thời gian hữu hạn.
- Hệ được gọi là *điều khiển được hoàn toàn* tại  $\underline{x}_0$  nếu với một điểm trạng thái đích  $\underline{x}_T$  tùy ý, nhưng cho trước, luôn tồn tại một tín hiệu điều khiển  $\underline{u}(t)$  đưa hệ từ  $\underline{x}_0$  tới được  $\underline{x}_T$  trong khoảng thời gian hữu hạn.

Sau đây ta sẽ chỉ ra rằng riêng với hệ tuyến tính liên tục như trong định nghĩa 3.2 đã giới hạn thì hai khái niệm vừa nêu là không cần thiết. Tức là *nếu hệ tuyến tính đã điều khiển được thì nó cũng điều khiển được hoàn toàn*. Xét hệ tuyến tính tham số hằng, mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad \text{với } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (3.43)$$

Gọi  $\underline{x}_0$  và  $\underline{x}_T$  là hai điểm trạng thái bất kỳ trong không gian trạng thái. Giả thiết rằng hệ điều khiển được tại  $\underline{x}_0$ . Vậy thì nó cũng điều khiển được tại  $\underline{x}_T$ . Điều này nói rằng tồn tại tín hiệu  $u_1(t)$  đưa hệ từ  $\underline{x}_0$  về được gốc tọa độ  $\underline{0}$  trong khoảng thời gian hữu hạn  $T_1$  và tín hiệu  $u_2(t)$  đưa được hệ từ  $\underline{x}_T$  về  $\underline{0}$  trong khoảng thời gian hữu hạn  $T_2$ .

Sử dụng công thức (3.26) đã cho trong định lý 3.11 để xác định nghiệm của hệ phương trình vi phân (3.43) thì điều giả thiết trên sẽ viết được thành:

$$\underline{0} = e^{AT_1} \underline{x}_0 + \int_0^{T_1} e^{A(T_1-\tau)} B \underline{u}_1(\tau) d\tau = e^{AT_1} \left[ \underline{x}_0 + \int_0^{T_1} e^{-A\tau} B \underline{u}_1(\tau) d\tau \right]$$

và

$$\underline{0} = e^{AT_2} \underline{x}_T + \int_0^{T_2} e^{A(T_2-\tau)} B \underline{u}_2(\tau) d\tau = e^{AT_2} \left[ \underline{x}_T + \int_0^{T_2} e^{-A\tau} B \underline{u}_2(\tau) d\tau \right]$$

Suy ra

$$\underline{0} = \underline{x}_0 + \int_0^{T_1} e^{-A\tau} B \underline{u}_1(\tau) d\tau \quad \text{và} \quad \underline{0} = \underline{x}_T + \int_0^{T_2} e^{-A\tau} B \underline{u}_2(\tau) d\tau \quad (3.44)$$

vì  $e^{AT_1}, e^{AT_2}$  là những ma trận không suy biến, hay:

$$\underline{u}_2(t) = -B^T e^{-A^T t} \left( \int_0^{T_2} e^{-A\tau} B^T B e^{-A^T \tau} d\tau \right)^{-1} \underline{x}_T \quad (3.45)$$

Tiếp theo ta định nghĩa tín hiệu điều khiển mới:

$$\underline{u}(t) = \begin{cases} \underline{u}_1(t) & \text{nếu } 0 < t \leq T_1 \\ -\underline{u}_2(t - T_1) & \text{nếu } T_1 < t \end{cases} \quad (3.46)$$

Khi đang ở tại điểm trạng thái  $\underline{x}_0$  và dưới sự tác động của tín hiệu  $\underline{u}(t)$  này, sau một khoảng thời gian  $t > T_1$  quá trình biến đổi trạng thái của hệ sẽ được mô tả bởi công thức (3.26) của định lý 3.11, có dạng:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{At} \left[ \underline{x}_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau \right] \\ &= e^{At} \left[ \underline{x}_0 + \int_0^{T_1} e^{-A\tau} B \underline{u}_1(\tau) d\tau - e^{-AT_2} \int_{T_1}^t e^{-A\tau} B \underline{u}_2(\tau - T_1) d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

Thay (3.44) vào (3.47) ta được:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= -e^{A(t-T_2)} \int_{T_1}^t e^{-A\tau} B \underline{u}_2(\tau - T_1) d\tau = -e^{A(t-T_2)} \int_0^{t-T_1} e^{-A(\tau'+T_1)} B \underline{u}_2(\tau') d\tau' \\ &= -e^{A(t-T_1-T_2)} \int_0^{t-T_1} e^{-A\tau'} B \underline{u}_2(\tau') d\tau' \quad \text{với } \tau' = t - T_1 \end{aligned}$$

Bởi vậy tại thời điểm  $t=T_1+T_2$  thì với (3.45) ta có:

$$\begin{aligned} \underline{x}(T_1+T_2) &= \int_0^{T_2} e^{-A(\tau')} BB^T e^{-A^T(\tau')} d\tau' \left( \int_0^{T_2} e^{-A(\tau)} BB^T e^{-A^T(\tau)} d\tau \right)^{-1} \underline{x}_T \\ &= I \underline{x}_T = \underline{x}_T \end{aligned}$$

Nói cách khác, tín hiệu điều khiển  $\underline{u}(t)$  định nghĩa theo (3.46) đã đưa hệ từ  $\underline{x}_0$  về tới  $\underline{x}_T$  và đó chính là điều phải chứng minh.

### Các tiêu chuẩn xét tính điều khiển được cho hệ tham số hằng

Năm 1969 Hautus đưa một tiêu chuẩn xét tính điều khiển được của một hệ tuyến tính tham số hằng từ mô hình trạng thái (3.43), phát biểu như sau:

**Định lý 3.23 (Hautus):** Cần và đủ để hệ tuyến tính không có trạng thái thừa (3.43) điều khiển được là:

$$\text{Rank}(sI-A, B) = n \quad \text{với mọi } s \in \mathbb{C}$$

*Chứng minh:*

Trước hết ta thấy vì  $e^{At}$  là ma trận không suy biến nên khi phương trình:

$$\underline{0} = e^{At} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau$$

với  $\underline{x}_0$  cho trước có nghiệm  $\underline{u}(t)$  thì phương trình:

$$\underline{x}_0 = \int_0^t e^{-\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau$$

cũng có nghiệm  $\underline{u}(t)$  và ngược lại. Điều này cũng phù hợp với nội dung của phần giải thích thứ ba cho định nghĩa 3.2 ở mục trước rằng hệ điều khiển được tại  $\underline{x}_0$ , khi và chỉ khi nó đạt tới được  $\underline{x}_0$ . Do đó để chứng minh định lý ta sẽ chỉ rằng:

$$\text{Rank}(sI-A, B) = n, \quad \forall s$$

là điều kiện cần và đủ để mọi điểm  $\underline{x}_0$  trong không gian trạng thái đạt tới được.

Gọi  $\underline{X}(s)$  là ảnh Laplace của  $\underline{x}(t)$  và  $\underline{U}(s)$  là ảnh của  $\underline{u}(t)$ . Chuyển hai vế của (3.43) sang miền phức với toán tử Laplace, trong đó giá trị đầu của  $\underline{x}(t)$  được giả thiết là bằng  $\underline{0}$  và giá trị cuối  $\underline{x}_0$  của nó là tùy ý, ta được:

$$(sI-A)\underline{X}(s) = B\underline{U}(s) \tag{3.48}$$

Vì  $\underline{x}_0$  là tùy ý nên  $\underline{X}(s)$  cũng là tùy ý. Xem các ma trận  $(sI-A)$  và  $B$  như những ánh xạ tuyến tính thì rõ ràng (3.48) có nghiệm  $\underline{U}$  khi và chỉ khi:

$$(sI-A)\underline{X}(s) \in \text{Im}(B)$$

và để điều đó không phụ thuộc  $s$  thì ta phải có  $\text{Rank}(sI-A, B) = n$  với mọi  $s \in \mathbb{C}$ . □



**Ví dụ 3.17:** Minh họa tiêu chuẩn Hautus

Xét lại hệ không điều khiển được đã cho ở ví dụ 3.16. Tính không điều khiển được của hệ được nhận biết trực quan từ chỗ  $x_1(t)$  không phụ thuộc  $u(t)$  và do đó  $u(t)$  không điều khiển được  $x_1(t)$ . Ma trận  $A$  và  $B$  của hệ có dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra:

$$\text{Rank}(sI - A, B) = \text{Rank} \begin{pmatrix} s-a & 0 & 0 \\ 0 & s-b & 1 \end{pmatrix}$$

Như vậy nếu  $s=a$  thì:

$$\text{Rank}(sI - A, B) = 1 < 2$$

và do đó hệ không điều khiển được. □

**Ví dụ 3.18:** Minh họa tiêu chuẩn Hautus

Cho hệ có mô hình:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Khác với hệ trong ví dụ 3.17, ở đây  $x_1(t)$  thông qua  $x_2(t)$  mà phụ thuộc gián tiếp vào  $u(t)$  và do đó hệ có thể điều khiển được. Xét ma trận:

$$(sI - A, B) = \begin{pmatrix} s-a & 1 & 0 \\ 0 & s-b & 1 \end{pmatrix}$$

Như vậy:

$$\text{Rank}(sI - A, B) = 2$$

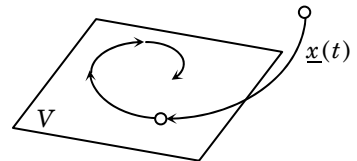
với mọi giá trị  $s$  nên hệ điều khiển được. □

Bên cạnh tiêu chuẩn Hautus, một tiêu chuẩn khác cũng rất được ưa dùng là *tiêu chuẩn Kalman*. Khái niệm điều khiển cũng được Kalman định nghĩa năm 1960 và cùng với định nghĩa đó ông đã đưa ra tiêu chuẩn xét tính điều khiển được của hệ tuyến tính tham số hằng như sau:

**Định lý 3.24 (Kalman):** Cần và đủ để hệ tuyến tính không có trạng thái thừa (3.43) điều khiển được là:

$$\text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

*Chứng minh:*



**Hình 3.9:** Giải thích tiêu chuẩn Kalman bằng không gian bất biến.

Trước hết ta định nghĩa không gian vector con  $V$  trong  $\mathbb{R}^n$  *bất biến* với  $B$  là:

$$B\underline{u} \in V \quad \text{với mọi } \underline{u} \in \mathbb{R}^m$$

hay  $\text{Im}(B) \subseteq V$ . Tương tự, không gian con  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  sẽ được gọi là bất biến với  $A$  nếu:

$$\underline{x} \in V \Rightarrow A\underline{x} \in V$$

Rõ ràng để  $V$  vừa bất biến với  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  và với  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  thì:

$$B\underline{u} \in V \Rightarrow AB\underline{u} \in V \Rightarrow A^2B\underline{u} \in V \Rightarrow \dots \Rightarrow A^k B\underline{u} \in V \Rightarrow \dots \quad (3.49)$$

Theo Cayley–Hamilton thì trong dãy (3.49) ta chỉ cần cho  $k$  chạy đến giá trị  $n-1$  là đủ và do đó không gian con  $V$  bất biến với  $A$  và  $B$  có kích thước nhỏ nhất sẽ là:

$$V = \text{span}(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

Do ở hệ (3.43) với mọi  $\underline{x} \in V$  và  $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$  luôn có  $A\underline{x} \in V$  cũng như  $B\underline{u} \in V$  nên cũng có:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \in V$$

Điều này chỉ mọi rằng quỹ đạo trạng thái  $\underline{x}(t)$ , tức là nghiệm của (3.43), có điều kiện đầu  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  thuộc  $V$  sẽ luôn có vector tiếp tuyến nằm trong  $V$ . Như vậy bản thân  $\underline{x}(t)$  cũng phải nằm trong  $V$ . Mở rộng ra, *mọi quỹ đạo trạng thái  $\underline{x}(t)$  của hệ (3.43), khi đã gặp  $V$  thì kể từ lúc đó sẽ ở lại luôn trong  $V$*  (hình 3.9).

Với không gian  $V$  bất biến này, ta có thể thấy ngay được điều kiện cần và đủ để hệ tuyến tính (3.43) *điều khiển được*, tức là để với mọi  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  cho trước luôn tồn tại một tín hiệu điều khiển  $\underline{u}(t)$  đưa hệ từ  $\underline{x}_0$  về gốc tọa độ *trong khoảng thời gian hữu hạn*, phải là:

$$V = \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n \quad \square$$

Tiêu chuẩn Kalman còn được suy ra từ định lý Cayley–Hamilton như sau. Do có:

$$-\underline{x}_0 = \int_0^t e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau \quad (3.50)$$

nên hệ sẽ điều khiển được khi và chỉ khi phương trình trên với  $\underline{x}_0$  tùy ý cho trước luôn có ít nhất một nghiệm  $\underline{u}(t)$ . Theo định lý 3.9, cụ thể là công thức (3.22) được suy ra từ định lý Cayley–Hamilton thì:

$$\begin{aligned} e^{-At} B &= \left[ a_0(-t)I + a_1(-t)A + \dots + a_{n-1}(-t)A^{n-1} \right] B \\ &= \left( B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \right) \begin{pmatrix} a_0(-t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(-t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Thay (3.51) vào (3.50) có:

$$-\underline{x}_0 = \left( B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \right) \underbrace{\begin{pmatrix} \int_0^t a_0(-\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t a_{n-1}(-\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \end{pmatrix}}_{\underline{z}(t)} \quad (3.52)$$

ta thấy (3.52) có nghiệm  $\underline{u}(t)$ , tức là có nghiệm  $\underline{z}(t)$ , với mọi  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  khi và chỉ khi:

$$\text{Im}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

### Ví dụ 3.19: Minh họa tiêu chuẩn Kalman

Cũng lại với hệ đã xét ở ví dụ 3.16:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u$$

ta có:

$$\text{Rank}(B, AB) = \text{Rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} < 2$$

nên hệ là không điều khiển được. □

### Ví dụ 3.20: Minh họa tiêu chuẩn Kalman

Cho hệ với mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u$$

trong đó  $s_1 \neq s_2$  và  $b_i \neq 0$ ,  $i=2,3$ . Xét ma trận:

$$(B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & b_2 & 2s_1b_2 \\ b_2 & s_1b_2 & s_1^2b_2 \\ b_3 & s_2b_3 & s_2^2b_3 \end{pmatrix}$$

Ma trận vuông này có định thức:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b_2 & 2s_1b_2 \\ b_2 & s_1b_2 & s_1^2b_2 \\ b_3 & s_2b_3 & s_2^2b_3 \end{pmatrix} = -b_2^2b_3(s_1 - s_2)^2 \neq 0$$

nên

$$\text{Rank}(B, AB, A^2B) = 3$$

Vậy hệ là điều khiển được □

**Chú ý:** Trong cả hai định lý 3.23 của Hautus và 3.24 của Kalman đều cần đến giả thiết hệ (3.43) phải không có các biến trạng thái thừa, tức là giữa các biến trạng thái của chúng không có một quan hệ đại số nào. Những hệ như vậy còn được biết đến dưới tên gọi là hệ có *bậc nhỏ nhất* (*minimum order*). Giả thiết này là cần thiết, nó đảm bảo cho sự tương đương của khái niệm điều khiển được nêu trong định lý là đúng với định nghĩa 3.2 về tính điều khiển được của hệ (3.43). Nếu không có giả thiết về bậc cực tiểu, rất có thể hệ (3.43), tuy rằng không thỏa mãn tiêu chuẩn tiêu chuẩn Hautus hay tiêu chuẩn Kalman, song lại vẫn điều khiển được theo nội dung định nghĩa 3.2. Để minh họa trường hợp này, ta xét ví dụ sau.

**Ví dụ 3.21:** Hệ điều khiển được có bậc không nhỏ nhất sẽ không thỏa mãn Kalman–Hautus

Xét hệ tuyến tính tham số hằng không có biến trạng thái thừa (bậc nhỏ nhất):

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ thỏa mãn } \text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

Vậy theo tiêu chuẩn Kalman thì hệ là điều khiển được, tức là luôn tồn tại các tín hiệu điều khiển đưa hệ từ  $\underline{x}_{10}$  và  $\underline{x}_{20}$  tùy ý về gốc trong khoảng thời gian hữu hạn. Điều này chỉ rằng với *hệ ghép*:

$$\frac{d\hat{\underline{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} A & \Theta \\ \Theta & A \end{pmatrix} \hat{\underline{x}} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \underline{u} = \hat{A}\hat{\underline{x}} + \hat{B}\underline{u}, \quad \hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix}$$

được tạo ra bằng cách ghép hai hệ đã cho song song với nhau, cũng sẽ luôn tồn tại tín hiệu điều khiển đưa hệ từ trạng thái đầu  $\hat{\underline{x}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{x}_{10} \\ \underline{x}_{20} \end{pmatrix}$  bất kỳ về gốc trong khoảng thời gian hữu hạn. Vậy hệ ghép này là điều khiển được. Tuy nhiên ở hệ ghép đó lại có:

$$\begin{aligned} \text{Rank}(\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{2n-1}\hat{B}) &= \text{Rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{2n-1}B \\ B & AB & \dots & A^{2n-1}B \end{pmatrix} \\ &= \text{Rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \\ B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}, \text{ định lý 3.8} \\ &= n < 2n \end{aligned}$$

nên không thỏa mãn tiêu chuẩn Kalman. □

### Tiêu chuẩn xét tính điều khiển được cho hệ tham số phụ thuộc thời gian

Với những hệ tuyến tính không dừng, tức là có tham số thay đổi theo  $t$ , thì việc sử dụng hai tiêu chuẩn Hautus và Kalman để kiểm tra tính điều khiển được là không thể. Bù đắp phần thiếu sót đó, mục này sẽ giới thiệu một tiêu chuẩn tổng quát ứng dụng được cho cả lớp các mô hình tuyến tính không dừng:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\underline{x} + B(t)\underline{u}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^m \quad (3.53)$$

trong đó  $A(t)$  và  $B(t)$  là hai ma trận có các tham số phụ thuộc thời gian  $t$ . Ta đã biết từ mục 3.2.2, cụ thể là công thức (3.28) thì hệ phương trình vi phân (3.53) có nghiệm:

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\underline{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau$$

với  $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$  là giá trị đầu đã biết trước của nghiệm và  $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận hàm không suy biến được xác định theo công thức Peano–Backer (định lý 3.12) hoặc theo (3.29), (3.30) của Picard (định lý 3.13).

Giả sử rằng hệ (3.53) điều khiển được tại  $\underline{x}_0$ . Vậy thì phải tồn tại khoảng thời gian  $T$  hữu hạn và tín hiệu  $\underline{u}(t)$  sao cho có  $\underline{x}(T)=0$ , tức là:

$$-\Phi(T)\underline{x}_0 = \int_0^T \Phi(T-\tau)B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau$$

Đặt  $\hat{\underline{x}}_0 = -\Phi(T)\underline{x}_0$ . Do  $\Phi(T)$  là không suy biến nên  $\hat{\underline{x}}_0$  cũng sẽ chạy khắp trên không gian trạng thái giống như  $\underline{x}_0$  và:

$$\int_0^T \Phi(T-\tau)B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau = \hat{\underline{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Ký hiệu phép biến đổi:

$$P_T(\underline{u}) = \int_0^T \Phi(T-\tau)B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau$$

thì  $P_T$  là ánh xạ tuyến tính từ không gian các tín hiệu điều khiển  $\mathbb{R}^m$  vào không gian trạng thái  $\mathbb{R}^n$ :

$$P_T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Tương tự, ta ký hiệu:

$$Q_T(\underline{x}) = Q_T(\underline{x}) = \int_0^T \Phi(T-\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(T-\tau) \cdot \underline{x} \cdot d\tau$$

thì  $Q_T$  cũng là ánh xạ tuyến tính từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $\mathbb{R}^n$ :

$$Q_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

**Định lý 3.25:** Những phát biểu sau đây cho hệ không có trạng thái thừa (3.53) là tương đương:

- Hệ điều khiển được.
- Tồn tại một số hữu hạn  $T^*$  sao cho:

$$\text{Im}(P_{T^*}) = \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \dim \text{Im}(P_{T^*}) = n$$

trong đó  $\text{Im}(P_T)$  là ký hiệu chỉ không gian ảnh của ánh xạ  $P_T$ .

c) Tồn tại một số hữu hạn  $T^*$  sao cho:

$$\text{Im}(Q_{T^*}) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim \text{Im}(Q_{T^*}) = n$$

trong đó  $\text{Im}(Q_T)$  là ký hiệu chỉ không gian ảnh của ánh xạ  $Q_T$

d) Tồn tại một số hữu hạn  $T^*$  sao cho các vector hàng của ma trận  $\Phi(T^* - \tau)B(\tau)$  độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian  $0 \leq \tau < T^*$ .

*Chứng minh:*

a)  $\Leftrightarrow$  b): Hệ (3.53) sẽ điều khiển được nếu ứng với mọi điểm  $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  bao giờ cũng tồn tại ít nhất một tín hiệu  $\underline{u}$  và khoảng thời gian  $t$  hữu hạn để có  $P_t(\underline{u}) = \hat{x}_0$ . Điều này tương đương với:

$$\bigcup_t \text{Im}(P_t) = \mathbb{R}^n$$

Giả sử  $\hat{x}_0 \in \text{Im}(P_T)$ . Lấy một giá trị  $\tau \geq T$  tùy ý nhưng cố định. Do  $\text{Ker}(P_{\tau-T})$  không rỗng nên tồn tại ít nhất một phân tử  $\tilde{u}$  thỏa mãn  $P_{\tau-T}(\tilde{u}) = \underline{0}$ . Gọi  $\underline{u}$  là phân tử tùy ý của  $\text{Im}(P_T)$ , vậy thì với:

$$\underline{u} = \begin{cases} \hat{u} & \text{khi } 0 \leq t \leq T \\ \tilde{u} & \text{khi } T < t \leq \tau \end{cases}$$

sẽ được:

$$\begin{aligned} P_\tau &= \int_0^\tau \Phi(T - \tau_1)B(\tau_1) \cdot \underline{u} \cdot d\tau_1 = \int_0^T \Phi(T - \tau_1)B(\tau_1) \cdot \hat{u} \cdot d\tau_1 + \int_T^\tau \Phi(T - \tau_1)B(\tau_1) \cdot \underline{u} \cdot d\tau_1 \\ &= \hat{x}_0 + \int_0^{\tau-T} \Phi(T - (\tau_1 - T))B(\tau_1 - T) \cdot \tilde{u} \cdot d(\tau_1 - T) = \hat{x}_0 \end{aligned}$$

Suy ra  $\hat{x}_0 \in \text{Im}(P_\tau)$ , hay:

$$\text{Im}(P_T) \subseteq \text{Im}(P_\tau)$$

và do đó  $\dim \text{Im}(P_T)$  là một hàm không giảm theo  $T$ . Hơn thế nữa:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Im}(P_T) = \bigcup_t \text{Im}(P_t)$$

Do đó, cần và đủ để hệ (3.53) điều khiển được là:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \dim \text{Im}(P_T) = n \quad (3.54)$$

Theo tính chất về giới hạn thì từ (3.54) với  $\varepsilon > 0$  phải tồn tại một số  $T^*$  hữu hạn để có  $|\dim \text{Im}(P_T) - n| < \varepsilon$  với mọi  $T > T^*$ . Chọn  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  sẽ được:

$$|\dim \text{Im}(P_{T^*}) - n| < \frac{1}{2}$$

Nhưng vì  $\dim \text{Im}(P_{T^*})$  là một số tự nhiên nên cuối cùng:

$$\dim \operatorname{Im}(P_{T*}) = n \quad (\text{đ.p.c.m}).$$

b)  $\Leftrightarrow$  c): Để chứng minh ta chỉ cần chỉ ra  $\operatorname{Im}(P_T) = \operatorname{Im}(Q_T)$  đúng với mọi  $T$ . Giả sử  $\underline{\tilde{x}} \in \operatorname{Im}(Q_T)$ . Vậy thì với tín hiệu:

$$\underline{\tilde{u}} = B^T(\tau)\Phi^T(T-\tau)$$

ta sẽ có:

$$\underline{\tilde{x}} = P_T(\underline{\tilde{u}}) \in \operatorname{Im}(P_T)$$

Điều này chỉ rằng:

$$\operatorname{Im}(Q_T) \subseteq \operatorname{Im}(P_T) \quad (3.55)$$

Ngược lại, ta gọi  $\underline{x}$  là phần tử tùy ý của  $\operatorname{Im}(P_T)$ . Từ công thức định nghĩa của  $Q_T$  ta thấy  $Q_T$  là ma trận đối xứng. Bởi vậy  $\operatorname{Ker}(Q_T)$  và  $\operatorname{Im}(Q_T)$  là hai không gian vector trực giao, hay vector  $\underline{x}$  luôn phân tích được thành:

$$\underline{x} = \underline{x}_{\operatorname{Ker}} + \underline{x}_{\operatorname{Im}},$$

trong đó  $\underline{x}_{\operatorname{Ker}} \in \operatorname{Ker}(Q_T)$ ,  $\underline{x}_{\operatorname{Im}} \in \operatorname{Im}(Q_T)$  và phép phân tích đó là duy nhất. Giả sử rằng:

$$\underline{x} \notin \operatorname{Im}(Q_T)$$

Vậy thì  $\underline{x}_{\operatorname{Ker}} \neq \underline{0}$ . Suy ra:

$$\begin{aligned} \underline{x}^T \cdot \underline{x}_{\operatorname{Ker}} &= \underline{x}_{\operatorname{Im}}^T \cdot \underline{x}_{\operatorname{Ker}} + \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T \cdot \underline{x}_{\operatorname{Ker}} = \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T \cdot \underline{x}_{\operatorname{Ker}} \neq 0 \\ \Rightarrow \int_0^T \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T \Phi(T-\tau)B(\tau) \cdot \underline{u} \cdot d\tau &= \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T P_T(\underline{u}) = \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T \cdot \underline{x} \neq 0 \end{aligned}$$

đúng với mọi  $\underline{u}(t) \neq \underline{0}$ . Chọn:

$$\underline{u} = \left[ \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T \Phi(T-\tau)B(\tau) \right]^T \neq \underline{0}$$

thì do  $Q_T(\underline{x}_{\operatorname{Ker}}) \in \operatorname{Im}(Q_T)$  sẽ có:

$$\begin{aligned} 0 &\neq \int_0^T \left[ \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T \Phi(T-\tau)B(\tau) \right] \cdot \left[ \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T \Phi(T-\tau)B(\tau) \right]^T d\tau = \\ &= \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T \left( \int_0^T \Phi(T-\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(T-\tau)d\tau \right) \underline{x}_{\operatorname{Ker}} = \underline{x}_{\operatorname{Ker}}^T Q_T(\underline{x}_{\operatorname{Ker}}) = 0 \end{aligned}$$

và đó là điều phi lý. Vậy  $\underline{x} \in \operatorname{Im}(Q_T)$ . Nói cách khác:

$$\operatorname{Im}(P_T) \subseteq \operatorname{Im}(Q_T) \quad (3.56)$$

So sánh (3.55), (3.56) ta đến được điều phải chứng minh.

c)  $\Leftrightarrow$  d): Khẳng định  $\dim \operatorname{Im}(Q_{T*}) = n$ , tương đương với ma trận mô tả ánh xạ  $Q_{T*}$  là ma trận không suy biến. Cần và đủ để ma trận vuông  $Q_{T*}$  không suy biến là:

$$\underline{a}^T Q_{T^*} \underline{a} \neq 0$$

với mọi  $\underline{a} \neq 0$ . Suy ra:

$$\int_0^{T^*} \left[ \underline{a}^T \Phi(T^* - \tau) B(\tau) \right] \cdot \left[ \underline{a}^T \Phi(T^* - \tau) B(\tau) \right]^T d\tau \neq 0, \quad \forall \underline{a} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{a}^T \Phi(T^* - \tau) B(\tau) \neq 0, \quad \forall \underline{a} \neq 0 \text{ và } 0 \leq \tau < T^*$$

hay các vector hàng của ma trận  $\Phi(T^* - \tau) B(\tau)$  là độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian  $0 \leq \tau < T^*$ .  $\square$

**Ví dụ 3.22:** Minh họa định lý 3.25

Xét hệ tuyến tính có tham số phụ thuộc  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} u$$

Với một số  $T^*$  hữu hạn tùy ý hệ sẽ có:

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Phi(T^* - \tau) = \begin{pmatrix} 1 & T^* - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(T^* - \tau) B(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & T^* - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(T^* - \tau) \\ \tau \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\tau(T^* - \tau)}{\tau} = T^* - \tau \neq \text{hằng số},$$

tức là hai vector hàng của  $\Phi(T^* - \tau) B(\tau)$  độc lập tuyến tính khi  $\tau \neq T^*$  (và do đó cũng trong khoảng  $0 \leq \tau < T^*$ ). Vậy hệ là điều khiển được.  $\square$

**Ví dụ 3.23:** Minh họa định lý 3.25

Cho hệ một đầu vào mô tả bởi:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Hệ có:

$$\Phi(\tau) = e^{A\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Phi(T - \tau) = e^{A(T - \tau)} = \begin{pmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^T e^{-A^T(T-\tau)} d\tau = \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} (T - \tau)^2 & T - \tau \\ T - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} T^3 & \frac{1}{2} T^2 \\ \frac{1}{2} T^2 & T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(Q_T) = \frac{T^4}{12} \neq 0 \quad \text{với } T > 0.$$



Do có định thức khác 0 nên  $\dim \text{Im}(Q_T) = 2$ . Vậy là hệ điều khiển được.  $\square$

Cũng từ định lý 3.25 ta có thể dẫn ngược lại các tiêu chuẩn khác đã biết như tiêu chuẩn Hautus, tiêu chuẩn Kalman khi hệ thống đang xét là hệ thống dừng. Chẳng hạn như với:

$$\Phi(T-\tau) = e^{A(T-\tau)}$$

của một hệ dừng có ma trận hệ thống là  $A$ , ta đi từ điều kiện d) của định lý 3.25:

$$\begin{aligned} \Phi(T-\tau)B &= e^{A(T-\tau)}B = [a_0(T-\tau)I + a_1(T-\tau)A + \dots + a_{n-1}(T-\tau)A^{n-1}]B \\ &= (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \begin{pmatrix} a_0(T-\tau) \\ \vdots \\ a_{n-1}(T-\tau) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sẽ thấy để các vector hàng của  $\Phi(T-\tau)B$  độc lập tuyến tính trong khoảng  $0 \leq \tau < T$  thì cần và đủ là:

$$\text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

và đó cũng chính là tiêu chuẩn Kalman.

### 3.3.4 Phân tích tính quan sát được

#### Khái niệm quan sát được và quan sát được hoàn toàn

Trong bài toán điều khiển người ta thường đề cập đến việc thiết kế bộ điều khiển phản hồi các biến trạng thái hoặc các tín hiệu ra. Vấn đề muốn nói ở đây không phải là sự cần thiết của việc phản hồi mà phải làm thế nào để thực hiện được việc phản hồi những đại lượng đó. Tất nhiên rằng ta phải đo chúng, phải xác định được giá trị của các đại lượng cần phản hồi.

Thông thường, việc xác định giá trị các đại lượng hay tín hiệu một cách đơn giản nhất là đo trực tiếp nhờ các thiết bị cảm biến (sensor). Song không phải mọi đại lượng trạng thái hoặc đều có thể đo được một cách trực tiếp. Rất nhiều các biến trạng thái hay tín hiệu chỉ có thể có được một cách gián tiếp thông qua những tín hiệu đo được khác .... Hơn nữa, nhiều biến trạng thái lại không mang bản chất vật lý (không phải là tín hiệu) nên không thể đo được chúng. Chẳng hạn:

- Gia tốc không thể đo được trực tiếp mà phải được suy ra từ việc đo tốc độ trong một khoảng thời gian.
- Giá trị công suất có được nhờ việc đo dòng điện và điện áp.

Để thống nhất chung, người ta sử dụng khái niệm *quan sát một biến trạng thái* để chỉ công việc xác định nó gián tiếp thông qua các tín hiệu đo được khác.

**Định nghĩa 3.3:** Một hệ thống có tín hiệu vào  $\underline{u}(t)$  và tín hiệu ra  $\underline{y}(t)$  được gọi là:

- Quan sát được tại thời điểm  $t_0$* , nếu tồn tại ít nhất một giá trị hữu hạn  $T > t_0$  để điểm trạng thái  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$  xác định được một cách chính xác thông qua vector các tín hiệu vào ra  $\underline{u}(t)$ ,  $\underline{y}(t)$  trong khoảng thời gian  $[t_0, T]$ .
- Quan sát được hoàn toàn tại thời điểm  $t_0$* , nếu với mọi  $T > t_0$ , điểm trạng thái  $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0)$  luôn xác định được một cách chính xác từ vector các tín hiệu vào ra  $\underline{u}(t)$ ,  $\underline{y}(t)$  trong khoảng thời gian  $[t_0, T]$ .

**Chú ý:** Yêu cầu phải đo trong *khoảng thời gian  $T$  hữu hạn* là rất quan trọng. Khoảng thời gian quan sát càng ngắn sẽ càng tốt cho công việc điều khiển sau này. Nếu thời gian quan sát quá lớn, điểm trạng thái  $\underline{x}_0$  vừa xác định được sẽ mất ý nghĩa ứng dụng cho bài toán điều khiển, ví dụ khi có được  $\underline{x}_0$  thì có thể hệ đã chuyển đến một điểm trạng thái mới cách rất xa điểm trạng thái  $\underline{x}_0$ .

### Một số kết luận chung về tính quan sát được của hệ tuyến tính

Một cách tổng quát, sau đây ta sẽ xét hệ tuyến tính có thể không dừng với:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x} + B(t)\underline{u} \\ \underline{y} = C(t)\underline{x} + D(t)\underline{u} \end{cases} \quad (3.57)$$

trong đó  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{r \times m}$  là những ma trận có phần tử là hàm số phụ thuộc  $t$ .

**Định lý 3.26:** Hệ không dừng (3.57) không có trạng thái thừa sẽ

- Quan sát được tại  $t_0$  khi và chỉ khi *tồn tại ít nhất* một giá trị  $T > t_0$  hữu hạn sao cho các vector cột của ma trận  $C(t)\Phi(t-t_0)$  độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian  $t_0 \leq t < T$ .
- Quan sát được hoàn toàn tại  $t_0$  khi và chỉ khi *với mọi* giá trị  $T > t_0$ , các vector cột của ma trận  $C(t)\Phi(t-t_0)$  độc lập tuyến tính trong khoảng  $t_0 \leq t < T$ .

*Chứng minh:*

Phương trình vi phân của (3.57) với điều kiện đầu  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$  có nghiệm:

$$\underline{x}(t) = \Phi(t-t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)B(\tau) \cdot \underline{u} \cdot d\tau$$

Thay vào phương trình thứ hai được:

$$\underline{y}(t) = C(t)\Phi(t-t_0)\underline{x}_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)B(\tau) \cdot \underline{u} \cdot d\tau + D(t) \cdot \underline{u}$$

$$\Leftrightarrow C(t)\Phi(t-t_0)\underline{x}_0 = C(t) \int_0^t \Phi(t-\tau)B(\tau) \cdot \underline{u} \cdot d\tau + D(t) \cdot \underline{u} - \underline{y}(t) \quad (3.58)$$

Theo định nghĩa 3.3, hệ (3.57) quan sát được tại  $t_0$  nếu tồn tại một khoảng thời gian hữu hạn  $[t_0, T]$  để  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$  xác định được từ  $\underline{u}(t)$  và  $\underline{y}(t)$  khi  $t_0 \leq t < T$ . Điều này đồng nghĩa với việc phương trình (3.58) có nghiệm  $\underline{x}_0$  duy nhất.

Do chỉ có thành phần  $C(t)\Phi(t-t_0)\underline{x}_0$  chứa  $\underline{x}_0$  nên (3.58) sẽ có nghiệm  $\underline{x}_0$  duy nhất nếu tồn tại ít nhất một giá trị hữu hạn  $T > t_0$  sao cho các vector cột của  $C(t)\Phi(t-t_0)$  không phụ thuộc tuyến tính trong toàn bộ khoảng  $[t_0, T]$  và đó chính là điều phải chứng minh.  $\square$

### Ví dụ 3.24: Minh họa định lý 3.26

Xét hệ tuyến tính, có tham số phụ thuộc  $t$  với mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + B\underline{u} \\ y = (1, 1 - |t-1|) \underline{x} + D\underline{u} \end{cases}$$

trong đó  $B, D$  là hai ma trận tùy ý. Hệ có:

$$\Phi(t-t_0) = \begin{pmatrix} 1 & t_0 - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1, 1 - |t-1|)$$

Bởi vậy:

$$C(t)\Phi(t-t_0) = (1, 1 - |t-1|) \begin{pmatrix} 1 & t_0 - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, t_0 - (t-1) - |t-1|)$$

$$\Rightarrow t_0 - (t-1) - |t-1| = \begin{cases} t_0 & \text{(hằng số) khi } t \leq 1 \\ t_0 - 2(t-1) & \text{khi } t > 1 \end{cases}$$

Khi  $t_0$  là tùy ý, ta chọn  $T > t_0$  và  $T > 1$ . Hai (vector) cột của  $C(t)\Phi(t-t_0)$  sẽ độc lập tuyến tính trong khoảng  $1 < t < T$ , tức là sẽ không phụ thuộc tuyến tính trên toàn bộ khoảng  $[t_0, T]$ , bởi vậy hệ quan sát được tại  $t_0$ . Khi  $t_0 > 1$  hai cột của  $C(t)\Phi(t-t_0)$  sẽ độc lập tuyến tính trong mọi khoảng  $[t_0, T]$  có  $t_0 < T$ , nên tại  $t_0 > 1$  hệ không những quan sát được mà còn quan sát được hoàn toàn.  $\square$

**Định lý 3.27:** Nếu hệ không dừng (3.57) có  $C$  là ma trận hằng (không phụ thuộc  $t$ ) quan sát được tại  $t_0$  thì nó cũng quan sát được hoàn toàn tại  $t_0$  và ngược lại.

*Chứng minh:*

Theo định lý 3.26, hệ (3.57) quan sát được tại thời điểm  $t_0$  nếu tồn tại  $T_1 > t_0$  hữu hạn sao cho các vector cột của  $C\Phi(t-t_0)$  không phụ thuộc tuyến tính trên toàn khoảng

$[t_0, T_1]$ . Vì  $C$  là ma trận hằng nên  $\Phi(t-t_0)$  là thành phần duy nhất phụ thuộc  $t$  trong tích  $C\Phi(t-t_0)$ . Do  $\Phi(t-t_0)$  không suy biến với mọi  $t$  (định lý 3.12) nên điều này cũng đúng với mọi khoảng  $[t_0, T_1]$ , trong đó  $T$  là số tùy ý lớn hơn  $t_0$ .  $\square$

**Ví dụ 3.25:** Minh họa định lý 3.27

Cho hệ không dừng mô tả bởi:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1, 1) \underline{x} \end{cases}$$

Theo kết quả của ví dụ 3.11 thì hệ này có:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Vậy:

$$C\Phi(t-t_0) = (1, 1) \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & \frac{(t-t_0)^2}{2} e^{t-t_0} \\ 0 & e^{t-t_0} \end{pmatrix} = \left( e^{t-t_0}, \frac{(t-t_0)^2}{2} e^{t-t_0} + e^{t-t_0} \right)$$

và  $C\Phi(t-t_0)$  có tỷ số giữa hai cột của nó:

$$\frac{\frac{(t-t_0)^2}{2} e^{t-t_0} + e^{t-t_0}}{e^{t-t_0}} = \frac{(t-t_0)^2}{2} + 1 \neq \text{hằng số}$$

với mọi  $t$  nên chúng độc lập tuyến tính với nhau trong khoảng  $[t_0, T]$ . Suy ra hai cột của  $C\Phi(t-t_0)$  là độc lập tuyến tính với mọi  $t \in [t_0, T]$ . Do đó hệ quan sát được hoàn toàn.  $\square$

**Định lý 3.28:** Nếu hệ không dừng (3.57) quan sát được tại thời điểm  $t_0$  thì nó cũng quan sát được tại mọi thời điểm  $t \neq 0$ .

*Chứng minh:*

Khi hệ (3.57) quan sát được tại  $t_0$  thì sẽ tồn tại một giá trị hữu hạn  $T > t_0$  để các vector cột của ma trận  $C(t)\Phi(t-t_0)$  độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian  $t_0 \leq t < T$ .

Xét tại một thời điểm  $t_1 \neq 0$  bất kỳ, từ định lý 3.12 về tính chất của  $\Phi(t)$ , ta có:

$$C(t)\Phi(t-t_1) = C(t)\Phi(t-t_0)\Phi(t_0-t_1)$$

Nhưng do  $\Phi(t_0-t_1)$  là ma trận hằng không suy biến nên các vector cột của ma trận hàm  $C(t)\Phi(t-t_1)$  cũng vì thế mà độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian  $t_1 \leq t < T$ . Bởi vậy theo định lý 3.26, hệ quan sát được tại thời điểm  $t_1$  (đ.p.c.m).  $\square$

Trên cơ sở định lý 3.28 thì riêng đối với hệ tuyến tính, từ nay về sau ta sẽ nói ngắn gọn là *hệ quan sát được* thay vì hệ quan sát được tại điểm thời gian  $t_0$ .

### Tính đối ngẫu và các tiêu chuẩn xét tính quan sát được của hệ tham số hằng

Cho hệ tuyến tính, tham số hằng mô tả bởi:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad \text{với} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{r \times n}, D \in \mathbb{R}^{r \times m} \quad (3.59)$$

Một hệ tuyến tính khác được suy ra từ hệ trên với mô hình:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A^T \underline{x} + C^T \underline{u} \\ \underline{y} = B^T \underline{x} + D^T \underline{u} \end{cases} \quad (3.60)$$

được gọi là *hệ đối ngẫu* với hệ (3.59) đã cho. Có thể thấy ngay được là từ là ma trận hàm truyền của hệ (3.59):

$$G(s) = C(sI - A)B + D$$

ta cũng có ma trận hàm truyền  $G^T(s)$  cho hệ đối ngẫu (3.60) với nó.

**Định lý 3.29:** Hệ tham số hằng (3.59) quan sát được khi và chỉ khi hệ (3.60) đối ngẫu với nó điều khiển được.

*Chứng minh:*

Nếu hệ (3.59) quan sát được tại  $T^*$  thì theo định lý 3.26, các vector cột của

$$C\Phi(t - T^*) = Ce^{A(t - T^*)}$$

là độc lập tuyến tính với mọi  $t$ . Điều này dẫn đến các vector cột của  $Ce^{A(T^* - t)}$  cũng độc lập tuyến tính vì  $e^{A(t - T^*)}e^{A(T^* - t)} = I$ . Suy ra các vector hàng của:

$$(Ce^{A(t - T^*)})^T = e^{A^T(t - T^*)}C^T$$

là độc lập tuyến tính. Vậy theo định lý 3.26, hệ (3.60) điều khiển được.

Chứng minh tương tự ta có điều ngược lại là khi hệ (3.59) điều khiển được thì hệ (3.60) sẽ quan sát được.  $\square$

Dựa vào nội dung định lý 3.29 và cùng với các tiêu chuẩn xét tính điều khiển được của hệ tuyến tính tham số hằng đã biết, ta sẽ có:

**Định lý 3.30:** Cho hệ tham số hằng (3.59) không có trạng thái thừa. Các phát biểu sau là tương đương:

a) Hệ quan sát được

b)  $\text{Rank} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n$  với mọi  $s$ , và  $I$  là ma trận đơn vị (Hautus, 1969).

c)  $\text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$  (Kalman, 1961).

**Chứng minh:**

a)  $\Leftrightarrow$  b): Theo định lý 3.29, để hệ (3.59) quan sát được thì cần và đủ là hệ (3.60) điều khiển được. Tiếp tục, với định lý 3.23 về tiêu chuẩn Hautus thì hệ (3.60) điều khiển được khi và chỉ khi:

$$\text{Rank}(sI - A^T, C^T) = n \text{ với mọi } s$$

Suy ra:

$$\text{Rank}(sI - A^T, C^T)^T = \text{Rank} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n$$

a)  $\Leftrightarrow$  c): Để hệ (3.59) quan sát được thì cần và đủ là hệ (3.60) điều khiển được và theo định lý 3.24 của Kalman, điều đó tương đương với:

$$\text{Rank}(C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T) = n$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}(C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T)^T = \text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad \square$$

**Ví dụ 3.26:** Minh họa định lý 3.30

Cho hệ tham số hằng mô tả bởi:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{u} \quad \text{và} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

Sử dụng tiêu chuẩn Kalman để kiểm tra tính quan sát được ta thấy:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{và} \quad CA^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 15 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{hệ là quan sát được.} \quad \square$$

### 3.3.5 Phân tích tính động học không

Xét hệ tuyến tính với tín hiệu vào  $u(t)$ , tín hiệu ra  $y(t)$  có hàm truyền:

$$G(s) = k \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (m < n)$$

Rõ ràng nếu có  $m > 0$  hay có bậc tương đối  $r = n - m < n$  thì  $G(s)$  sẽ có điểm không. Theo định lý 3.2, hệ cũng mô tả được bởi mô hình trạng thái chuẩn điều khiển:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \end{pmatrix} u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = (b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, 1, 0, \dots, 0) \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{cases}$$

và giữa chúng có quan hệ (3.9) cho trong định lý 3.1, cụ thể là:

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \Rightarrow \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

**Định nghĩa 3.4:** Nếu hệ tuyến tính có ít nhất một điểm trạng thái đầu  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  và ứng với nó là một tín hiệu điều khiển  $u_0(t)$  sao cho tín hiệu đầu ra  $y(t)$  đồng nhất bằng 0 thì hệ được gọi là có *tính động học không* (zero dynamic).

Tất nhiên rằng tính chất động học của hệ không thay đổi nếu ta biến đổi mô hình trạng thái của nó bằng những phép biến đổi tương đương  $\mathbf{z} = \mathbf{S}\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{z}$  hay  $\mathbf{S}$  là một ma trận vuông không suy biến. Bây giờ ta định nghĩa phép đổi biến:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{x} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{pmatrix}$$

trong đó  $r$  là bậc tương đối của hệ. Phép biến đổi này đưa hệ về dạng:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{\xi}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \underline{g}^T \end{pmatrix} \underline{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \underline{s}^T \end{pmatrix} \underline{\eta} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \end{pmatrix} u \\ \frac{d\underline{\eta}}{dt} = P \underline{\xi} + Q \underline{\eta} \\ y(t) = z_1(t) \end{cases}$$

trong đó:

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}, \quad \underline{\eta} = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{m-1} \end{pmatrix}$$

và vector hàng  $\underline{g}^T$ ,  $\underline{s}^T$ , cũng như ma trận  $P$  được suy ra từ  $A$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}^T$ ,  $\underline{z}(x)$  giống như  $Q$ , nhưng ở đây không được ta tính cụ thể vì chúng không có vai trò gì trong việc xét điều kiện để tồn tại tính động học không.

Giả sử rằng hệ có tính động học không. Vậy thì phải có:

$$y = z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\xi}(t) = \underline{\xi}_0 = \underline{0}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{\eta}}{dt} = Q \underline{\eta} \text{ với giá trị đầu } \underline{\eta}_0 \text{ tùy ý} \\ u_0(t) = -\frac{1}{k} \underline{s}^T \underline{\eta}(t) \end{cases} \quad (3.61)$$

Nói cách khác, khi đang ở trạng thái đầu  $\underline{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\eta}_0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{\eta}_0$  tùy ý, và được kích thích

bằng tín hiệu  $u_0(t)$  tính theo (3.61), thì tín hiệu đầu ra của hệ sẽ đồng nhất bằng không, mặc dù trạng thái  $\underline{\eta}(t)$  của nó lại khác không, thậm chí còn tiến tới vô cùng nếu ma trận  $Q$  có ít nhất một giá trị riêng nằm bên phải trục ảo. Khi ở chế độ động học không, dạng của quỹ đạo trạng thái  $\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\eta}(t) \end{pmatrix}$  của hệ được quyết định bởi giá trị riêng của

ma trận  $Q$  và ta thấy đó chính là điểm không của hàm truyền  $G(s)$ , vì:

$$\det(sI - Q) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_{m-1} s^{m-1} + s^m$$

Kết hợp thêm quan hệ đã biết giữa mô hình (3.8) của hệ SISO với điểm không của nó:



$$B(s) = \det \begin{pmatrix} sI - A & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{pmatrix} = 0 \quad (3.62)$$

ta có kết luận:

**Định lý 3.31:** Để hệ tuyến tính có quỹ đạo trạng thái  $\underline{x}(t)$  ở chế độ động học không tiến về gốc tọa độ thì cần và đủ là mọi điểm không của nó phải nằm bên trái trục ảo, tức là hệ phải là pha cực tiểu (*minimum phase*), hay (3.62) là đa thức Hurwitz.

### 3.4 Thiết kế bộ điều khiển

#### 3.4.1 Bộ điều khiển phản hồi trạng thái gán điểm cực

##### Đặt vấn đề và phát biểu bài toán

Xét hệ MIMO có mô hình trạng thái tham số hằng (3.59). Theo công thức (3.39) về việc xác định ma trận hàm truyền  $G(s)$  của hệ từ mô hình trạng thái (3.59) thì các điểm cực của hệ chính là giá trị riêng của ma trận  $A$ . Mặt khác, chất lượng hệ thống lại phụ thuộc nhiều vào vị trí của các điểm cực (cũng là giá trị riêng của  $A$ ) trong mặt phẳng phức (mục 2.3.4). Do đó, để hệ thống có được chất lượng mong muốn, người ta có thể can thiệp bằng một bộ điều khiển vào hệ thống sao cho với sự can thiệp đó, hệ có được các điểm cực là những giá trị cho trước ứng với chất lượng mong muốn. Cũng vì nguyên lý can thiệp để hệ nhận được các điểm cực cho trước như vậy nên phương pháp thiết kế bộ điều khiển can thiệp này có tên gọi là *phương pháp cho trước điểm cực*, hay *phương pháp gán điểm cực* (pole placement).

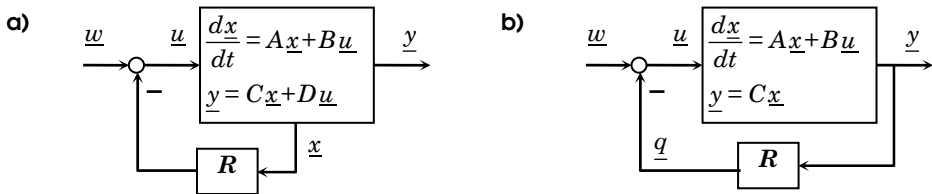
Có hai khả năng thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực bằng bộ điều khiển  $R$  tính là:

- *Thiết kế bằng phản hồi trạng thái* (hình 3.10a). Với  $R$ , hệ kín sẽ có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} + B(\underline{w} - R\underline{x}) = A\underline{x} + B\underline{w} - BR\underline{x} = (A - BR)\underline{x} + B\underline{w}$$

bởi vậy nhiệm vụ "gán điểm cực" là phải thiết kế  $R$  sao cho ma trận  $A - BR$  nhận  $n$  giá trị  $s_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , đã được chọn trước từ yêu cầu chất lượng cần có của hệ thống, làm giá trị riêng. Nói cách khác, ta phải tìm  $R$  từ phương trình:

$$\det(sI - A + BR) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n), \quad \forall s \quad (3.63)$$



Hình 3.10: Nguyên tắc thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực

- *Thiết kế theo nguyên tắc phản hồi tín hiệu ra*  $\underline{y}$  (hình 3.10b). Vì tín hiệu phản hồi về bộ điều khiển  $R$  là  $\underline{y}$  nên hệ kín có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} + B(\underline{w} - R\underline{y}) = A\underline{x} + B\underline{w} - BRC\underline{x} = (A - BRC)\underline{x} + B\underline{w}$$

Vậy nhiệm vụ "gán điểm cực" là phải tìm  $R$  để ma trận  $A - BRC$  có các giá trị riêng là  $n$  giá trị  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  đã được chọn trước từ yêu cầu chất lượng cần có của hệ thống, hay nhiệm vụ thiết kế chính là tìm ma trận  $R$  thỏa mãn:

$$\det(sI - A + BRC) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (3.64)$$

Như sau này ta thấy, để phương trình (3.63) có nghiệm  $R$  thì chỉ cần hệ (3.59) cho ban đầu điều khiển được là đủ. Ngược lại, đối với phương trình (3.64) thì điều kiện hệ (3.59) điều khiển được là chưa đủ và người ta thường phải mở rộng phạm vi tìm nghiệm sang cả những bộ điều khiển phản hồi đầu ra mang tính động học, chứ không phải chỉ giới hạn trong các bộ điều khiển tĩnh (ma trận hằng)  $R$ , tức là phải sử dụng bộ điều khiển có mô hình trạng thái (tuyến tính):

$$R: \begin{cases} \frac{d\underline{z}}{dt} = E\underline{z} + F\underline{y} \\ \underline{q} = G\underline{z} + H\underline{y} \end{cases}$$

Mục này sẽ giới thiệu các phương pháp khác nhau phục vụ bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái gán điểm cực  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , mà thực chất chính là các phương pháp tính để giải phương trình (3.63).

### Phương pháp Ackermann

Phương pháp Ackermann là phương pháp thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực  $R$  theo nguyên lý phản hồi trạng thái cho đối tượng *chỉ có một tín hiệu vào*. Trước hết, ta xét đối tượng có một đầu vào  $u$  mô tả bởi mô hình trạng thái dạng *chuẩn điều khiển* (xem thêm định lý 3.2):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_A \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u \quad (3.65)$$

Như vậy, đối tượng có đa thức đặc tính theo công thức (3.40) là:

$$\det(sI - A) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

với nghiệm là các điểm cực của đối tượng.

Tương ứng với đối tượng (3.65), bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  phải là:

$$R = (r_1, r_2, \dots, r_n) \quad (3.66)$$

Khi đó hệ kín sẽ có mô hình:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A - \underline{b}R)\underline{x} + \underline{b}w \\ &= \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (r_1, r_2, \dots, r_n) \right] \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 + r_1) & -(a_1 + r_2) & -(a_2 + r_3) & \cdots & -(a_{n-1} + r_n) \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \end{aligned}$$

với đa thức đặc tính:

$$\det(sI - A + \underline{b}R) = (a_0 + r_1) + (a_1 + r_2)s + \cdots + (a_{n-1} + r_n)s^{n-1} + s^n$$

và phương trình (3.63) trở thành:

$$(a_0 + r_1) + (a_1 + r_2)s + \cdots + (a_{n-1} + r_n)s^{n-1} + s^n = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)$$

$$\Leftrightarrow (a_0 + r_1) + (a_1 + r_2)s + \cdots + (a_{n-1} + r_n)s^{n-1} + s^n = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 s + \cdots + \hat{a}_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

Suy ra:

$$r_i = \hat{a}_{i-1} - a_{i-1}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

Vậy thuật toán xác định bộ điều khiển  $R$  gán điểm cực  $s_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  theo nguyên tắc phản hồi trạng thái cho đối tượng (3.65) một đầu vào dạng chuẩn điều khiển, gồm các bước như sau:

- Tính các hệ số  $\hat{a}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  của phương trình đặc tính cần phải có của hệ kín từ những giá trị điểm cực  $s_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  đã cho theo:

$$(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 s + \cdots + \hat{a}_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

- Tính các phần tử  $r_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  của bộ điều khiển (3.66) theo:

$$r_i = \hat{a}_{i-1} - a_{i-1}$$

**Ví dụ 3.27:** Gán điểm cực cho đối tượng chuẩn điều khiển

Xét đối tượng SISO có mô hình trạng thái:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

tức là có  $a_0=1$ ,  $a_1=-2$  và  $a_2=-3$ . Giả sử rằng chất lượng mong muốn của hệ kín đã được chọn với những điểm cực  $s_1=-3$ ,  $s_2=-4$ ,  $s_3=-5$  cần phải có. Vậy thì với:

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

ta có  $\hat{a}_0=60$ ,  $\hat{a}_1=47$  và  $\hat{a}_2=12$ . Suy ra, bộ điều khiển phản hồi trạng thái cần tìm là:

$$R = (60-1, 47+2, 12+3) = (59, 49, 15)$$

□

Tiếp theo, ta bàn tới vấn đề đối tượng cho ban đầu có mô hình không ở dạng chuẩn điều khiển:

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}u \quad (3.67)$$

Rất tự nhiên, ta nghĩ ngay tới việc tìm một phép đổi biến:

$$\underline{z} = S\underline{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = S^{-1}\underline{z}$$

sao cho với nó, đối tượng ban đầu được chuyển về dạng chuẩn điều khiển.

**Định lý 3.32:** Nếu hệ (3.67) là điều khiển được thì phép đổi biến  $\underline{z} = S\underline{x}$  với:

$$S = \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

trong đó  $\underline{s}^T$  là vector hàng cuối cùng của ma trận:

$$(\underline{b}, A\underline{b}, \dots, A^{n-1}\underline{b})^{-1}$$

sẽ chuyển nó về dạng chuẩn điều khiển:

$$\frac{dz}{dt} = SAS^{-1}\underline{z} + S\underline{b}u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

với  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  là các hệ số của đa thức đặc tính:

$$\det(sI-A) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

Chứng minh:

Trước hết ta thấy ngay được:

$$\begin{aligned} \underline{s}^T &= (0, \dots, 0, 1)(\underline{b}, A\underline{b}, \dots, A^{n-1}\underline{b})^{-1} \\ \Leftrightarrow \underline{s}^T(\underline{b}, A\underline{b}, \dots, A^{n-1}\underline{b}) &= (0, \dots, 0, 1) \Leftrightarrow \underline{s}^T A^k \underline{b} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq k \leq n-2 \\ 1 & \text{nếu } k = n-1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow S\underline{b} &= \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{s}^T \underline{b} \\ \underline{s}^T A\underline{b} \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1}\underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ngoài ra, theo định lý Cayley–Hamilton (định lý 3.8) còn có:

$$SA = \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \underline{s}^T A \\ \underline{s}^T A^2 \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{s}^T A \\ \underline{s}^T A^2 \\ \vdots \\ -a_0 \underline{s}^T - a_1 \underline{s}^T A - \dots - a_{n-1} \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

với  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  là các hệ số của đa thức đặc tính, cũng như:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} S &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} S &= \begin{pmatrix} \underline{s}^T A \\ \underline{s}^T A^2 \\ \vdots \\ -a_0 \underline{s}^T - a_1 \underline{s}^T A - \dots - a_{n-1} \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vậy:

$$SA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} S$$

□

**Ví dụ 3.28:** Minh họa định lý 3.32

Cho đối tượng:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Đối tượng này có:

$$A\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A^2\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\underline{b}, A\underline{b}, A^2\underline{b})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{s}^T = (1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \underline{s}^T A = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (0, 1, 0)$$

$$\Rightarrow \underline{s}^T A^2 = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (0, -1, 1)$$

Vậy:

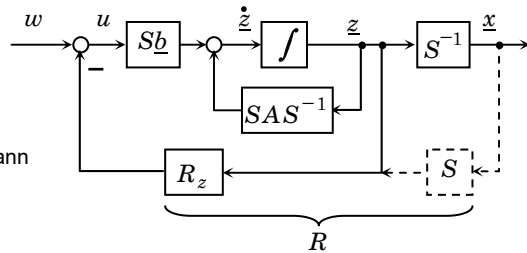
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{z} = S\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{z}$$

ta sẽ được:

$$\frac{dz}{dt} = SAS^{-1}\underline{z} + S\underline{b}u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{z} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underline{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

□



**Hình 3.11:** Minh họa phương pháp Ackermann cho hệ có mô hình trạng thái không ở dạng chuẩn điều khiển.

Đương nhiên, khi đã chuyển được (3.67) về dạng chuẩn điều khiển, ta lại áp dụng được thuật toán đã biết để thiết kế bộ điều khiển  $R_z$  phản hồi trạng thái  $\underline{z}$  cho nó, tức là:

$$R_z = (\hat{a}_0 - a_0, \hat{a}_1 - a_1, \dots, \hat{a}_{n-1} - a_{n-1})$$

với các hệ số  $a_i$ ,  $\hat{a}_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  được xác định từ:

$$\det(sI - A) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

$$(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 s + \dots + \hat{a}_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

Cuối cùng, bộ điều khiển  $R$  phản hồi trạng thái  $\underline{x}$  cần tìm sẽ là:

$$\begin{aligned} R &= R_z S = (\hat{a}_0 - a_0, \hat{a}_1 - a_1, \dots, \hat{a}_{n-1} - a_{n-1}) \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{a}_i - a_i) \underline{s}^T A^i = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i \underline{s}^T A^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \underline{s}^T A^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i \underline{s}^T A^i + \underline{s}^T A^n, \text{ vì có } A^n = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \text{ (Cayley-Hamilton)} \end{aligned}$$

Hình 3.11 minh họa cho việc thiết kế  $R$  gồm các bước như sau:

- Xác định phép đổi biến  $\underline{z} = S\underline{x}$  theo định lý 3.32
- Tính các hệ số  $\hat{a}_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  của phương trình đặc tính cần phải có của hệ kín từ những giá trị điểm cực  $s_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  đã cho theo:

$$(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 s + \dots + \hat{a}_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

- Bộ điều khiển  $R$  cần tìm sẽ là:

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i \underline{s}^T A^i + \underline{s}^T A^n \quad (3.68)$$

**Ví dụ 3.29:** Thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực theo Ackermann

Xét lại đối tượng đã cho ở ví dụ 3.28 và vector:

$$\underline{s}^T = (1, 0, 0)$$

đã tìm được. Khi đó, để gán các điểm cực  $s_1 = s_2 = s_3 = -1$ , với:

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = 1 + 3s + 3s^2 + s^3 \Rightarrow \hat{a}_0 = 1, \hat{a}_1 = \hat{a}_2 = 3$$

ta sử dụng bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  tìm theo (3.68) như sau:

$$\hat{a}_0 \underline{s}^T = (1, 0, 0)$$

$$\hat{a}_1 \underline{s}^T A = 3(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3(0, 1, 0) = (0, 3, 0)$$

$$\hat{a}_2 \underline{s}^T A^2 = 3(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 = (0, 3, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (0, -3, 3)$$

$$\underline{s}^T A^3 = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^3 = (0, -1, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (0, -2, -3)$$

$$\Rightarrow R = \hat{a}_0 \underline{s}^T + \hat{a}_1 \underline{s}^T A + \hat{a}_2 \underline{s}^T A^2 + \underline{s}^T A^3 = (1, -2, 0) \quad \square$$

### Phương pháp Roppenecker

Giống như phương pháp Ackermann, phương pháp Roppenecker được sử dụng để thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái theo nguyên lý cho trước điểm cực. Khác với Ackermann, phương pháp Roppenecker áp dụng được cho cả hệ MIMO. Để bắt đầu ta hãy xét đối tượng MIMO:

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad (3.69)$$

Nhiệm vụ đặt ra là tìm bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  sao cho hệ kín (hình 3.10a):

$$\frac{dx}{dt} = (A - BR)\underline{x} + B\underline{u}$$

nhận những giá trị  $s_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  cho trước làm điểm cực. Chú ý rằng nếu có  $s_k$  là một số phức thì cũng phải có một giá trị liên hợp với nó  $s_i = \bar{s}_k$ , vì chỉ như vậy các phần tử của  $R$  mới có thể là những số thực.

Giả sử rằng đã tìm được  $R$ . Vậy thì do  $\det(s_k I - A + BR) = 0$  với mọi  $k=1,2, \dots, n$  nên ứng với mỗi  $k$  phải có một vector (riêng bên phải)  $\underline{a}_k$  không đồng nhất bằng  $\underline{0}$  thỏa mãn:

$$(s_k I - A + BR)\underline{a}_k = \underline{0} \Leftrightarrow (s_k I - A)\underline{a}_k = -BR\underline{a}_k$$

Nếu gọi  $\underline{t}_k = -R\underline{a}_k$  là những vector tham số thì:

$$(s_k I - A)\underline{a}_k = B\underline{t}_k \Rightarrow \underline{a}_k = (s_k I - A)^{-1} B\underline{t}_k, \quad k=1,2, \dots, n \quad (3.70)$$

và

$$(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n) = -R(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \Rightarrow R = -(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)^{-1} \quad (3.71)$$



Từ đây, ta có thể hình dung sơ lược việc thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  gán các điểm cực  $s_k$ ,  $k=1,2, \dots, n$  cho trước, gồm các bước như sau:

- Chọn  $n$  vector tham số  $\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n$  sao cho với nó  $n$  vector  $\underline{a}_k$ ,  $k=1,2, \dots, n$  xác định theo (3.70) lập thành hệ độc lập tuyến tính, tức là ma trận  $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$  không bị suy biến.
- Xác định  $R$  theo (3.71).

**Ví dụ 3.30:** Thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực theo Roppenecker

Hãy thiết kế bộ điều khiển  $R$ , gán điểm cực  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -2$  cho đối tượng

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Vì đối tượng có hai biến trạng thái và một đầu vào nên  $\underline{t}_1, \underline{t}_2$  chỉ có một phần tử, bởi vậy ta có thể viết một cách đơn giản là  $t_1, t_2$  thay vì phải sử dụng ký hiệu vector. Ứng với  $i=1$  và  $i=2$  thì từ (3.70) được:

$$(s_1 I - A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (s_1 I - A)^{-1} B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(s_2 I - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow (s_2 I - A)^{-1} B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

và vì hai vector trên đã độc lập tuyến tính nên cũng chỉ cần chọn  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = 8$ . Khi đó:

$$\underline{a}_1 = (s_1 I - A)^{-1} B t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \underline{a}_2 = (s_2 I - A)^{-1} B t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

là hai vector độc lập tuyến tính. Vậy:

$$R = -(t_1, t_2) (\underline{a}_1, \underline{a}_2)^{-1} = -(3, 8) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = (2, 5)$$

Kiểm tra lại thì thấy với  $R$  tổng hợp được, hệ kín có ma trận hệ thống:

$$A - BR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

với hai giá trị riêng  $-1$  và  $-2$  đúng như yêu cầu đã đặt ra. □

Tuy nhiên, có ba vấn đề cần phải bàn thêm về thuật toán trên. Đó là:

- Có thực sự với bộ điều khiển  $R$  tổng hợp được, ma trận hệ thống của hệ kín sẽ có các giá trị riêng là  $s_k$ ,  $k=1,2, \dots, n$ .
- Phải có điều kiện gì để tồn tại  $\underline{a}_k$  tính theo (3.70).

- Phải làm gì để tất cả  $n$  vector  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  lập thành hệ độc lập tuyến tính?

Về câu hỏi thứ nhất. Xuất phát từ (3.71) có:

$$R\underline{a}_k = -\underline{t}_k \quad \text{với mọi } k=1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow BR\underline{a}_k = -B\underline{t}_k = -(s_k I - A) \underline{a}_k \quad \Leftrightarrow \quad (s_k I - A + BR) \underline{a}_k = \underline{0}$$

Do  $\underline{a}_k \neq \underline{0}$  nên  $(s_k I - A + BR)$  phải là ma trận suy biến, tức là:

$$\det(s_k I - A + BR) = 0 \quad \text{với mọi } k=1, 2, \dots, n$$

hay  $s_k, k=1, 2, \dots, n$  là giá trị riêng của  $(A - BR)$ .

Về câu hỏi thứ hai. Để tính được  $\underline{a}_k, k=1, 2, \dots, n$  theo (3.70) thì rõ ràng phải có  $(s_k I - A)^{-1}$ . Nói cách khác, khi những điểm cực cho trước  $s_k, k=1, 2, \dots, n$  không phải là giá trị riêng của  $A$  thì ta tính được  $\underline{a}_k, k=1, 2, \dots, n$  theo (3.70). Trường hợp có một giá trị  $s_k$  làm cho  $(s_k I - A)$  suy biến thì có nghĩa là bộ điều khiển  $R$  không cần phải dịch chuyển giá trị riêng  $s_k$ . Bởi vậy ứng với nó sẽ có:

$$(s_k I - A) \underline{a}_k = B\underline{t}_k = \underline{0}$$

Nói cách khác, trong công thức (3.71), khi đó vector tham số  $\underline{t}_k$  phải được chọn bằng  $\underline{0}$

$$\underline{t}_k = \underline{0}$$

và vector  $\underline{a}_k$  phải là vector riêng bên phải ứng với giá trị riêng  $s_k$  của đối tượng chứ không phải được tính theo (3.70), tức là:

$$(s_k I - A) \underline{a}_k = \underline{0} \quad (3.72)$$

Về câu hỏi thứ ba. Để xét khi nào  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  độc lập tuyến tính với nhau ta chia làm ba trường hợp:

- Khi tồn tại các vector  $(s_k I - A)^{-1}$  thì chúng *ít nhất* phải khác nhau từng đôi một. Nói cách khác những giá trị điểm cực cho trước  $s_k, k=1, 2, \dots, n$  mà không phải là giá trị riêng của  $A$  thì phải khác nhau từng đôi một.
- Nếu có nhiều giá trị  $s_k$  mà ứng với nó không tồn tại  $(s_k I - A)^{-1}$ , tức là những giá trị này là giá trị riêng của  $A$  và bộ điều khiển  $R$  không cần dịch chuyển các điểm cực  $s_k$  đó. Gọi  $\underline{a}_k$  là vector riêng bên phải của  $A$  ứng với  $s_k$ . *Các vector riêng này sẽ độc lập tuyến tính với nhau nếu như những giá trị riêng không cần dịch chuyển đó cũng lại khác nhau đôi một.* Trường hợp chúng không khác nhau, chẳng hạn như có  $q$  giá trị  $s_k$  giống nhau thì bắt buộc ứng với nghiệm  $s_k$  bội  $q$  đó phải có đúng  $q$  vector riêng bên phải độc lập tuyến tính với nhau.

- Nếu  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  vẫn không độc lập tuyến tính mặc dù đã thỏa mãn các yêu cầu trên thì ta có thể thông qua việc lựa chọn  $\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n$  để  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  lập thành hệ độc lập tuyến tính. Trường hợp điều đó vẫn không xảy ra thì cuối cùng ta có thể thay đổi nhỏ các giá trị  $s_k, k=1,2, \dots, n$  để có được  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  độc lập tuyến tính. Việc sửa đổi  $s_k$  cũng là hợp lý vì thực tế có rất nhiều bộ giá trị  $s_k, k=1,2, \dots, n$  cùng mang đến một chất lượng như nhau cho hệ kín.

Tổng kết lại các trường hợp vừa xét, ta đi đến thuật toán Roppenecker dạng tổng quát với hai bước tính như sau:

- 1) Tính các vector  $\underline{a}_k$  ứng với các giá trị  $s_k$  đã cho:
  - a) Nếu  $s_k$  không phải là giá trị riêng của  $A$  thì tính theo (3.70), trong đó  $\underline{t}_k$  là tham số tự do.
  - b) Nếu  $s_k$  là giá trị riêng của  $A$  thì chọn  $\underline{t}_k = \underline{0}$  và  $\underline{a}_k$  là vector riêng bên phải tương ứng của  $A$  tính theo (3.72)
- 2) Chọn các vector tham số còn tự do  $\underline{t}_k$  sao cho với nó  $n$  vector  $\underline{a}_k, k=1,2, \dots, n$  xác định ở bước 1 lập thành hệ độc lập tuyến tính, rồi tính  $R$  theo (3.71).

**Ví dụ 3.31:** Thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực theo Roppenecker

Xét đối tượng:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Ta sẽ tìm bộ điều khiển tĩnh  $R$ , phản hồi trạng thái theo thuật toán Roppenecker để ma trận hệ thống của hệ kín nhận  $s_1 = -2, s_2 = -1$  làm các giá trị riêng.

Với  $s_1 = -2$  thì:

$$(s_1 I - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (s_1 I - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{a}_1 = (s_1 I - A)^{-1} B t_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ở đây ta đã chọn  $t_1 = 4$ .

Với  $s_2 = -1$  thì do  $\det(s_2 I - A) = 0$ , tức là  $s_2$  đã là giá trị riêng của  $A$  nên bộ điều khiển  $R$  không cần dịch chuyển  $s_2$ . Chọn  $t_2 = 0$  và  $\underline{a}_2$  là vector riêng bên phải của đối tượng:

$$(s_2 I - A) \underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vậy thì:

$$R = -(t_1, t_2) (\underline{a}_1, \underline{a}_2)^{-1} = -(4, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = (12, 4)$$

Kiểm tra lại thì thấy với  $R$  tổng hợp được ma trận hệ kín:

$$A - BR = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (12, 4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$$

có hai giá trị riêng  $-2$  và  $-1$  như yêu cầu đã đặt ra. □

**Bàn thêm:** Trong bộ điều khiển  $R$  thiết kế theo phương pháp Roppennecker có chứa các vector tham số tự do  $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n$ . Như vậy, thực chất phương pháp đã cho ra tập các bộ điều khiển  $R(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n)$  gán điểm cực  $s_k, k=1, 2, \dots, n$  đặt trước cho một đối tượng (3.69). Điều này tạo cơ hội để ta có thể thiết kế được một bộ điều khiển  $R$  gán điểm cực  $s_k, k=1, 2, \dots, n$  cho đối tượng nhiều mô hình:

$$M_i: \frac{dx}{dt} = A_i \underline{x} + B_i \underline{u} \quad \text{với } i=1, 2, \dots, m \quad (3.73)$$

theo các bước như sau:

- 1) Thiết kế cho từng mô hình  $M_i$  trong (3.73) một bộ điều khiển  $R_i(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n)$  phụ thuộc tham số.
- 2) Chọn các vector tham số  $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n$  để tất cả  $m$  bộ điều khiển thu được trở thành đồng nhất:

$$R_1(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n) = R_2(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n) = \dots = R_m(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n) = R$$

### Phương pháp modal phản hồi trạng thái

Phương pháp modal do Rosenbrock xây dựng năm 1962 là phương pháp thiết kế bộ điều khiển tĩnh  $R$ , phản hồi trạng thái cho đối tượng MIMO mô tả bởi:

$$\frac{dx}{dt} = A \underline{x} + B \underline{u} \quad (3.74)$$

để hệ kín thu được với mô hình (hình 3.10a):

$$\frac{dx}{dt} = (A - BR) \underline{x} + B \underline{u}$$

nhận những giá trị cho trước  $s_i, i=1, 2, \dots, n$  làm điểm cực, tức là có:

$$\det(s_i I - A + BR) = 0 \quad \text{với mọi } i=1, 2, \dots, n.$$

Tư tưởng của phương pháp là khá đơn giản. Nó bắt đầu từ việc chuyển mô hình đối tượng, cụ thể là ma trận  $A$ , sang dạng đường chéo (dạng modal) hay Jordan để thiết kế bộ điều khiển rồi sau đó mới chuyển ngược lại mô hình ban đầu.

Để mô tả nội dung phương pháp modal, ta bắt đầu với trường hợp ma trận  $A$  của đối tượng có dạng giống đường chéo. Một ma trận  $A$  được gọi là giống đường chéo, nếu:

- hoặc là các giá trị riêng  $\lambda_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  của nó khác nhau từng đôi một,
- hoặc là ứng với một giá trị riêng  $\lambda_k$  bội  $q$  thì phải có đúng  $q$  vector riêng bên phải độc lập tuyến tính, tức là giá trị sệt hạng của  $(\lambda_k I - A)$  phải bằng  $q$ .

Một ma trận  $A$  giống đường chéo luôn chuyển được về dạng đường chéo nhờ phép biến đổi tương đương, trong đó ma trận đường chéo thu được có các phần tử trên đường chéo chính là giá trị riêng của nó  $\lambda_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$ :

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_i)$$

với  $M$  là ma trận modal có các vector cột là vector riêng bên phải của  $A$ :

$$M = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$

$$(\lambda_i I - A) \underline{a}_i = \underline{0} \quad \text{với mọi } i=1,2, \dots, n.$$

**Ví dụ 3.32:** Biến đổi tương đương về dạng đường chéo

Cho ma trận  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Ma trận này có hai giá trị riêng là nghiệm của:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ và } \lambda_2 = 2$$

Tương ứng với hai giá trị riêng đó là hai vector riêng bên phải:

$$(\lambda_1 I - A) \underline{a}_1 = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \underline{a}_1 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A) \underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

và hiển nhiên hai vector đó độc lập tuyến tính với nhau. Do vậy ma trận modal:

$$M = (\underline{a}_1, \underline{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

không suy biến và ta có:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$$

□

**Ví dụ 3.33:** Biến đổi tương đương về dạng đường chéo

Ma trận  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  có các giá trị riêng là nghiệm của:

$$\det(\lambda I - A) = -\lambda^3 - \lambda^2 - 21\lambda + 45 = (\lambda + 3)^2(\lambda - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3 \text{ và } \lambda_3 = 5.$$

Như vậy  $A$  có một giá trị riêng  $\lambda_1 = -3$  bội 2 và một giá trị riêng  $\lambda_3 = 5$  là nghiệm đơn.

Ứng với  $\lambda_1 = -3$  bội 2 có 2 vector riêng độc lập tuyến tính là nghiệm của:

$$(A - \lambda_1 I)\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 - 6a_3 = 0 \\ -a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -2a_2 + 3a_3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Còn lại, ứng với  $\lambda_3 = 5$  là vector riêng:

$$(A - \lambda_3 I)\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \underline{a}_3 = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra:

$$M = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$\begin{aligned} M^{-1}AM &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{diag}(-3, -3, 5) \end{aligned}$$

□

Quay lại bài toán thiết kế bộ điều khiển  $R$  cho đối tượng (3.74) có  $A$  là ma trận giống đường chéo. Gọi  $\lambda_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  là các giá trị riêng và  $M$  là ma trận modal của  $A$ . Khi đó với phép đổi biến  $\underline{x} = M\underline{z}$  hay  $\underline{z} = M^{-1}\underline{x}$  ta sẽ thu được mô hình trạng thái tương đương cho đối tượng (hình 3.12a):

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = M^{-1}AM\underline{z} + M^{-1}B\underline{u} = G\underline{z} + M^{-1}B\underline{u}$$

trong đó

$$G = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_i)$$

Với việc chuyển đổi trạng thái nhờ ma trận modal  $M$  như vậy thì mạch phản hồi chính là ma trận đường chéo chứa các điểm cực đang có  $\lambda_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  của hệ. Do đó, muốn hệ thống nhận tất cả các giá trị đặt trước  $s_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  làm điểm cực mới ta chỉ cần nối song song với  $G$  một khối khác có  $S-G$  (hình 3.12b), trong đó:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{pmatrix} = \text{diag}(s_i)$$

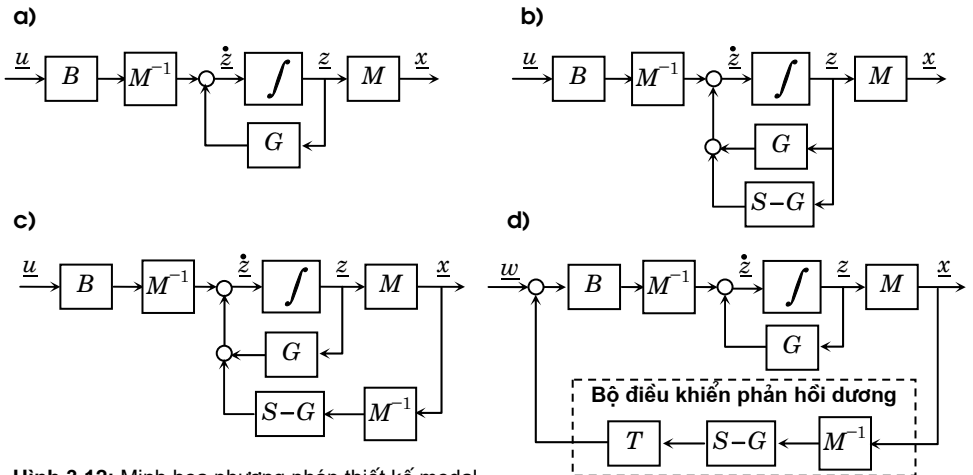
**Định lý 3.33:** Hệ với sơ đồ khối mô tả ở hình 3.12b có các điểm cực là  $s_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$ .

*Chứng minh:*

Từ sơ đồ khối của hệ ta có mô hình trạng thái:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= (G+S-G)\mathbf{z} + M^{-1}B\mathbf{u} = S\mathbf{z} + M^{-1}B\mathbf{u} \\ \Leftrightarrow M^{-1} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= SM^{-1}\mathbf{x} + M^{-1}B\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{x}}{dt} = MSM^{-1}\mathbf{x} + B\mathbf{u} \end{aligned}$$

Do đó hệ sẽ có các điểm cực là giá trị riêng của  $MSM^{-1}$ . Nhưng giá trị riêng của  $MSM^{-1}$  cũng là giá trị riêng của  $S$  vì  $MSM^{-1}$  và  $S$  là hai ma trận tương đương, nên hệ sẽ có các điểm cực là  $s_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  (cũng là các giá trị riêng của  $S$ ).  $\square$



Hình 3.12: Minh họa phương pháp thiết kế modal

Việc còn lại là phải đưa hệ trong hình 3.12b) về dạng thực hiện được trong thực tế, tức là về dạng mà điểm hồi tiếp phải là điểm trạng thái  $\underline{x}$  và đầu ra của khâu hồi tiếp phải kết hợp được với  $\underline{u}$ . Áp dụng quy tắc về đại số sơ đồ khối, trước tiên dễ dàng có ngay sơ đồ khối như hình 3.12c), vì  $M$  là ma trận không suy biến.

Để tiếp tục, ta chuyển điểm hồi tiếp tới trước khâu  $B$ . Vấn đề sẽ rất đơn giản nếu  $B$  là ma trận không suy biến. Khi đó ta chỉ cần chọn:

$$T = (M^{-1}B)^{-1} = B^{-1}M \quad (3.75)$$

là được và bộ điều khiển phản hồi âm  $R$  khi đó sẽ là:

$$R = -T(S-G)M^{-1} \quad (3.76)$$

Song nói chung do  $B$  không phải là ma trận vuông ( $B$  có  $n$  hàng,  $r$  cột với  $n \geq r$ ) nên tích  $M^{-1}B$  cũng có  $n$  hàng,  $r$  cột và do đó không thể tính  $T$  theo (3.75). Nếu như rằng tích  $M^{-1}B$  có hạng là  $r$  thì ta có thể giả sử rằng  $r$  vector hàng đầu tiên của nó là độc lập tuyến tính. Điều giả sử này hoàn toàn không làm mất tính chất tổng quát của phương pháp vì tích  $M^{-1}B$  phụ thuộc vào  $M$  nên lúc nào ta cũng có thể sắp xếp lại thứ tự các vector riêng bên phải của  $A$  trong  $M$  để có được  $r$  vector hàng đầu tiên trong  $M^{-1}B$  là độc lập tuyến tính.

Khi  $M^{-1}B$  có  $r$  vector hàng đầu tiên là độc lập tuyến tính, tức là:

$$M^{-1}B = \begin{pmatrix} K_r \\ K_{n-r} \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

trong đó  $K_r$  là ma trận vuông không suy biến bao gồm  $r$  vector hàng đầu tiên của  $M^{-1}B$ , thì thay vì xác định  $T$  theo (3.75) ta chỉ lấy  $T_r$  là ma trận nghịch đảo của  $K_r$ :

$$T_r = K_r^{-1} \quad (3.78)$$

Lúc này, do  $T_r$  chỉ còn là ma trận kiểu  $r \times r$  nên công thức (3.76) cũng phải được sửa đổi lại cho phù hợp với phép nhân ma trận như sau:

$$R = -T_r(S_r - G_r) K_r^{-1} \quad (3.79)$$

trong đó  $S_r, G_r$  là các ma trận vuông kiểu  $r \times r$  định nghĩa như sau:

$$S_r = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_r \end{pmatrix}, \quad G_r = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

Để biểu diễn được các công thức (3.77), (3.78) dưới dạng gọn hơn ta sử dụng một tính chất sau của đại số ma trận. Nếu:

$$M = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$



là ma trận modal của  $A$ , trong đó  $\underline{a}_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  là các vector riêng bên phải của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  của nó thì khi biến đổi  $M^{-1}$  về dạng:

$$M^{-1} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_n^T \end{pmatrix}$$

các vector  $\underline{b}_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  lại chính là *vector riêng bên trái* của  $A$  ứng với  $\lambda_i$ , tức là

$$\underline{b}_i^T (\lambda_i I - A) = \underline{0}^T \quad \text{với mọi } i=1,2, \dots, n \quad (3.81)$$

Với tính chất vừa nêu trên của ma trận  $A$  thì khi ký hiệu  $M_r^{-1}$  là ma trận gồm  $r$  vector hàng đầu tiên của  $M^{-1}$ , ta sẽ có:

$$M_r^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_r^T \end{pmatrix}, \quad T_r = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T B \\ \vdots \\ \underline{b}_r^T B \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.82)$$

Ta đi đến thuật toán xác định bộ điều khiển  $R$  dịch chuyển điểm cực cho đối tượng có hạng của  $B$  là  $r$  và  $A$  là ma trận giống đường chéo, như sau:

- Xác định  $r$  vector riêng bên trái  $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_r$  của  $A$  theo công thức (3.81).
- Tính  $M_r^{-1}$  và  $T_r$  theo (3.82).
- Xác định  $S_r$ ,  $G_r$  từ  $s_i, \lambda_i$ ,  $i=1,2, \dots, r$  theo (3.80).
- Tính  $R$  theo công thức (3.79).

**Định lý 3.34:** Bộ điều khiển  $R$  tổng hợp theo thuật toán trên chỉ dịch chuyển được  $r$  điểm cực  $\lambda_i$ ,  $i=1,2, \dots, r$  trong số  $n$  điểm cực của đối tượng (giá trị riêng của  $A$ ) tới  $r$  giá trị mong muốn  $s_i$ ,  $i=1,2, \dots, r$ . Nó không làm thay đổi vị trí các điểm cực còn lại của đối tượng. Nói cách khác, hệ kín thu được sẽ có các điểm cực là  $s_1, \dots, s_r$ ,  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ .

*Chứng minh:*

Do giá trị riêng của ma trận (điểm cực của hệ) bất biến với phép biến đổi tương đương nên giá trị riêng của  $A - BR$  cũng là giá trị riêng của:

$$\begin{aligned} M^{-1}(A - BR)M &= G - M^{-1}BRM = G + M^{-1}BT_r(S_r - G_r)M_r^{-1}M \\ &= G + \begin{pmatrix} K_r \\ K_{n-r} \end{pmatrix} K_r^{-1}(S_r - G_r) \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_r^T \end{pmatrix} (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \end{aligned}$$

Nhưng vì:

$$\underline{b}_i^T \underline{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

nên:

$$M^{-1}(A-BR)M = G + \begin{pmatrix} I_r \\ K_{n-r}K_r^{-1} \end{pmatrix} (S_r - G_r)(I_r, \Theta)$$

trong đó  $I_r$  là ma trận đơn vị kiểu  $r \times r$ . Suy ra:

$$M^{-1}(A-BR)M = G + \begin{pmatrix} I_r \\ K_{n-r}K_r^{-1} \end{pmatrix} (S_r - G_r, \Theta) = G + \begin{pmatrix} S_r - G_r & \Theta \\ K_{n-r}K_r^{-1}(S_r - G_r) & \Theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_r & 0 & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times & \lambda_{r+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \cdots & \times & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

với  $\times$  là một số thực nào đó. Từ đẳng thức sau cùng ta có được đ.p.c.m. □

### Ví dụ 3.34: Minh họa phương pháp modal

Hãy thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái hoàn toàn cho đối tượng có mô hình:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

để hệ mới nhận  $s_1 = -1$  và  $s_2 = -3$  làm các điểm cực.

Do  $B$  có hạng là 1 với hàng đầu tiên của nó độc lập tuyến tính (khác 0) nên thuật toán nêu trên chỉ chuyển được một điểm cực. Đối tượng có hai điểm cực là  $\lambda_1 = 1$  và  $\lambda_2 = -2$ . Ta sẽ sử dụng thuật toán để xác định  $R$  chuyển  $\lambda_1 = 1$  tới  $s_1 = -1$ .

Bây giờ ta xác định  $\underline{b}_1$  là vector riêng bên trái của đối tượng ứng với  $\lambda_1 = 1$

$$\underline{b}_1^T (\lambda_1 I - A) = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1^T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tiếp theo là:

$$S_1 - G_1 = -1 - 1 = -2$$

Suy ra:

$$M_r^{-1} = (1, 1) \text{ và } T_r = \left[ (1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow R = -T_r(S_r - G_r)M_r^{-1} = 2(1, 1) = (2, 2).$$

Thử lại với bộ điều khiển  $R$  tìm được thì hệ kín với:

$$A - BR = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (2, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rõ ràng là có một điểm cực mới  $s_1 = -1$  và một điểm cực cũ  $\lambda_2 = -2$ . □

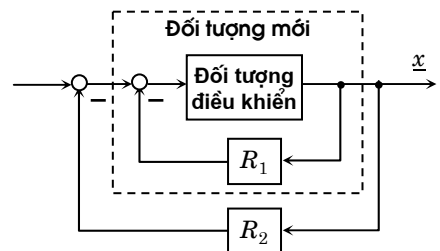
Như vậy, bộ điều khiển  $R$  không chuyển được tất cả  $n$  điểm cực  $\lambda_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  của đối tượng tới  $n$  giá trị mới  $s_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$  như mong muốn mà chỉ chuyển được  $r$  trong số chúng, nếu như  $B$  có hạng là  $r$ . Song với kết quả định lý 3.34 thì điều đó hoàn toàn không hạn chế khả năng ứng dụng của thuật toán vì hai lý do sau đây:

- 1) Thông thường, ở các bài toán tổng hợp theo nguyên lý cho trước điểm cực ít khi người ta đặt ra vấn đề dịch chuyển tất cả  $n$  điểm cực mà chỉ những điểm cực mang tính quyết định tới sự thay đổi chất lượng của hệ thống. Nói cách khác, thuật toán sẽ được áp dụng trực tiếp cho bài toán có số các điểm cực phải dịch chuyển là  $r$  ít hơn số các điểm cực vốn có của đối tượng là  $n$ .
- 2) Trong trường hợp số các điểm cực phải dịch chuyển lại nhiều hơn  $r$  hoặc phải dịch chuyển toàn bộ  $n$  điểm cực của đối tượng thì dựa vào định lý 3.34 nói rằng những điểm cực được dịch chuyển sẽ là các điểm được sắp xếp trong  $S_r$  cũng như trong  $G_r$  và thuật toán không làm thay đổi vị trí những điểm cực còn lại, ta có thể lần lượt thực hiện các bước như sau:

- a) Sử dụng thuật toán đã nêu để xác định bộ điều khiển  $R_1$  nhằm dịch chuyển  $r$  điểm cực  $\lambda_i$ ,  $i=1,2, \dots, r$  tới  $s_i$ ,  $i=1,2, \dots, r$ .
- b) Xem hệ thống gồm đối tượng và bộ điều khiển  $R_1$  đã tìm được như một đối tượng mới. Vậy thì đối tượng mới này sẽ có các điểm cực là  $s_1, \dots, s_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ . Sắp xếp lại các điểm cực, chẳng hạn như theo thứ tự  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}, s_{n-r+1}, \dots, s_n$  rồi lại sử dụng thuật toán một lần nữa để tìm bộ điều khiển  $R_2$  thứ hai nhằm chuyển  $r$  trong số  $n-r$  điểm cực  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$  tới các điểm cực mới  $s_1, \dots, s_{n-r}$  (hình 3.13).
- c) Cứ như vậy, ta thực hiện bước b) nhiều lần để có được các bộ điều khiển  $R_k$  lồng nhau cho tới đã chuyển được hết tất cả các điểm cực. Cách tổng hợp những bộ điều khiển  $R_k$  lồng nhau như vậy để có:

$$R = \sum_k R_k$$

được gọi là *điều khiển cascade*.



**Hình 3.13:** Nguyên tắc tổng hợp bộ điều khiển cascade nhờ phương pháp modal.

**Ví dụ 3.35:** Minh họa thiết kế cascade với phương pháp modal

Hãy thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái cho đối tượng có mô hình:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

sao cho hệ mới nhận  $s_1 = s_2 = -1$  làm các điểm cực.

Đối tượng có hai điểm cực là  $\lambda_1 = 1$  và  $\lambda_2 = 2$ . Do  $B$  có hạng là 1 với hàng đầu tiên của nó độc lập tuyến tính (khác 0) nên phương pháp modal trực tiếp chỉ có thể chuyển được nhiều nhất một điểm cực. Trước tiên, ta sẽ chuyển  $\lambda_1 = 1$  tới  $s_1 = -1$ . Theo (3.80):

$$S_1 - G_1 = -1 - 1 = -2$$

Vector riêng bên trái  $\underline{b}_1$  của đối tượng ứng với  $\lambda_1 = 1$  là:

$$\underline{b}_1^T (\lambda_1 I - A) = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1^T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Suy ra:

$$M_r^{-1} = (1, -1) \quad \text{và} \quad T_r = \left[ (1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 1$$

Do đó ta có  $R_1$ :

$$R_1 = -T_r(S_r - G_r)M_r^{-1} = 2(1, -1) = (2, -2)$$

Thử lại với bộ điều khiển  $R_1$  tìm được thì hệ kín:

$$A - BR_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (2, -2) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

có các giá trị riêng  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = \lambda_2 = 2$ . Như vậy  $R_1$  mới chỉ chuyển  $\lambda_1 = 1$  tới  $s_1 = -1$  còn  $\lambda_2 = 2$  thì không.

Xem hệ kín gồm đối tượng đã cho và bộ điều khiển  $R_1$  vừa tìm được như một đối tượng mới thì đối tượng này có mô hình:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Nó có hai điểm cực  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Ta sẽ tìm  $R_2$  để chuyển nốt  $\lambda_1 = 2$  tới  $s_1 = -1$ . Từ:

$$\underline{b}_1^T (\lambda_1 I - A) = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1^T \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

có:

$$M_r^{-1} = (1, -4) \quad \text{và} \quad T_r = \left[ (1, -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 1$$

Ngoài ra:

$$S_1 - G_1 = -1 - 2 = -3$$

Vậy:

$$R_2 = -T_r(S_r - G_r)M_r^{-1} = 3(1, -4) = (3, -12)$$

Thử lại với bộ điều khiển  $R_2$  tìm được thì hệ kín:

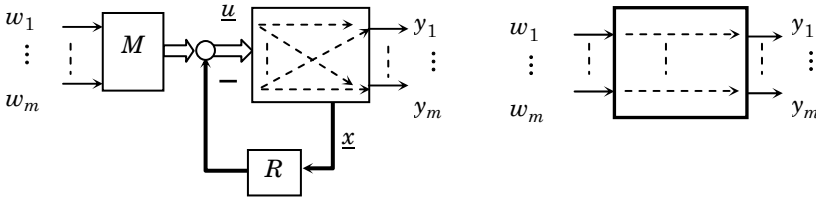
$$A - BR_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (3, -12) = \begin{pmatrix} -5 & 16 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

rõ ràng có các giá trị riêng  $s_1 = s_2 = -1$ . □

### 3.4.2 Điều khiển tách kênh

#### Bộ điều khiển phản hồi trạng thái tách kênh Falb-Wolovich

Có rất nhiều bộ điều khiển được ứng dụng thành công lại chỉ dùng được cho hệ SISO, bộ điều khiển PID là một ví dụ điển hình. Vì mong muốn sử dụng các bộ điều khiển đó cho hệ MIMO người ta đã nghĩ đến việc can thiệp sơ bộ trước vào hệ MIMO, biến một hệ thống MIMO thành nhiều hệ SISO với mỗi đầu ra  $y_i(t)$  chỉ phụ thuộc vào một tín hiệu đầu vào  $w_i(t)$ .



Hình 3.14: Mục đích của điều khiển tách kênh.

Xét đối tượng MIMO tuyến tính, có  $m$  đầu vào  $u_1, u_2, \dots, u_m$  và cũng có  $m$  đầu ra  $y_1, y_2, \dots, y_m$  mô tả bởi:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

Để tách kênh, ta phải xác định các bộ điều khiển  $R$  và  $M$  như ở hình 3.14 mô tả, sao cho đầu ra  $y_i(t)$  chỉ phụ thuộc vào một tín hiệu đầu vào  $w_i(t)$  với  $i=1, 2, \dots, m$ . Sự phụ thuộc đó được mô tả trong miền thời gian bởi phương trình vi phân bậc  $r_i$  hệ số hằng:

$$a_{i0}y_i + a_{i1}\frac{dy_i}{dt} + \dots + a_{i,r_i-1}\frac{d^{r_i-1}y_i}{dt^{r_i-1}} + \frac{d^{r_i}y_i}{dt^{r_i}} = b_iw_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^{r_i} y_i}{dt^{r_i}} + \sum_{k=0}^{r_i-1} a_{ik} \frac{d^k y_i}{dt^k} = b_i w_i \quad (3.83)$$

trong đó  $b_i$  và  $a_{ik}$ ,  $i=1,2, \dots, m$ ,  $k=0,1, \dots, r_i-1$  là các tham số tự do được chọn tùy ý theo chất lượng đặt trước của từng kênh. Nói cách khác, nhiệm vụ thiết kế đặt ra ở đây là phải xác định hai bộ điều khiển tĩnh  $R$  và  $M$  để với nó hệ kín có ma trận hàm truyền dạng đường chéo:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & G_m(s) \end{pmatrix}$$

với các phân tử  $G_i(s)$  là những hàm truyền:

$$G_i(s) = \frac{b_i}{a_{i0} + a_{i1}s + \cdots + a_{i,r_i-1}s^{r_i-1} + s^{r_i}} \quad (3.84)$$

có các hệ số  $b_i$  và  $a_{ik}$ ,  $i=1,2, \dots, m$ ,  $k=0,1, \dots, r_i-1$  được chọn trước, tương ứng với chất lượng mong muốn của từng kênh, chẳng hạn chọn  $a_{i0}$ ,  $a_{i1}$ ,  $\dots$ ,  $a_{i,r_i-1}$  là những hệ số của đa thức Hurwitz để  $G_i(s)$  ổn định và  $b_i = a_{i0}$  để có sai lệch tĩnh bằng 0.

Trước hết ta bàn tới vấn đề bậc  $r_i$ ,  $i=1,2, \dots, m$  của mô hình (3.83), cũng như của hàm truyền (3.84) cần phải có, tức là xét xem với  $r_i$  như thế nào thì vế phải của (3.83) chỉ có  $w_i(t)$  chứ không có các đạo hàm của  $w_i(t)$ .

Để xác định  $r_i$  cho riêng kênh thứ  $i$  ta sử dụng khái niệm bậc tương đối tối thiểu đã được định nghĩa ở mục 3.2.1. Ký hiệu  $\underline{c}_i$ ,  $i=1,2, \dots, s$  là vector hàng thứ  $i$  của ma trận

$$C, \text{ tức là } C = \begin{pmatrix} \underline{c}_1^T \\ \vdots \\ \underline{c}_s^T \end{pmatrix}, \text{ thì bậc tương đối tối thiểu } r_i \text{ cho kênh thứ } i \text{ sẽ được xác định theo}$$

định lý 3.5, mà cụ thể là công thức (3.19) như sau:

$$\underline{c}_i^T A^k B = \begin{cases} = \underline{0}^T & \text{khi } 0 \leq k \leq r_i - 2 \\ \neq \underline{0}^T & \text{khi } k = r_i - 1 \end{cases}$$

Khi đó ta sẽ có từ phương trình mô hình trạng thái với đầu ra thứ  $i$ :

$$y_i = \underline{c}_i^T \underline{x}$$

các quan hệ sau:

$$\frac{dy_i}{dt} = \underline{c}_i^T \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{c}_i^T (A\underline{x} + B\underline{u}) = \underline{c}_i^T A\underline{x} \quad (\text{vì } \underline{c}_i^T B = \underline{0}^T)$$

⋮

$$\frac{d^k y_i}{dt^k} = \underline{c}_i^T A^k \underline{x} \quad \text{nếu} \quad 0 \leq k < r_i - 1$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{d^{r_i} y_i}{dt^{r_i}} &= \underline{c}_i^T A^{r_i} \underline{x} + \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B \cdot \underline{u} = \underline{c}_i^T A^{r_i} \underline{x} + \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B \cdot (M \underline{w} - R \underline{x}) \\ &= \underline{c}_i^T (A^{r_i} - A^{r_i-1} B R) \underline{x} + \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B M \underline{w} \end{aligned}$$

Kết quả trên cho thấy bậc  $r_i$  của phương trình vi phân (3.83) chỉ có thể là bậc tương đối  $r_i$  của kênh thứ  $i$ . Từ đây ta suy ra được cho (3.83):

$$\underline{c}_i^T (A^{r_i} - A^{r_i-1} B R) \underline{x} + \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B M \underline{w} = - \sum_{k=0}^{r_i-1} a_{ik} \underline{c}_i^T A^k \underline{x} + b_i w_i$$

và

$$\underline{c}_i^T (A^{r_i} - A^{r_i-1} B R) = - \sum_{k=0}^{r_i-1} a_{ik} \underline{c}_i^T A^k \Leftrightarrow \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B R = \underline{c}_i^T A^{r_i} + \sum_{k=0}^{r_i-1} q_{ik} \underline{c}_i^T A^k \quad (3.85)$$

và

$$\underline{c}_i^T A^{r_i-1} B M \underline{w} = b_i w_i \Leftrightarrow \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B M = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{phần tử thứ } i}}{b_i}, 0, \dots, 0) \quad (3.86)$$

Viết chung lại (3.85) và (3.86) cho tất cả các kênh  $i=1, 2, \dots, m$  ta đi đến:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{c}_1^T A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ \underline{c}_m^T A^{r_m-1} B \end{pmatrix}}_E R = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{r_1-1} a_{1k} \underline{c}_1^T A^k + \underline{c}_1^T A^{r_1} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r_m-1} a_{mk} \underline{c}_m^T A^k + \underline{c}_m^T A^{r_m} \end{pmatrix}}_F \Rightarrow R = E^{-1} F \quad (3.87)$$

và

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{c}_1^T A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ \underline{c}_m^T A^{r_m-1} B \end{pmatrix}}_E M = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_m \end{pmatrix}}_L \Rightarrow M = E^{-1} L \quad (3.88)$$

Hai công thức (3.87) và (3.88) chính là lời giải  $R$  và  $M$  của bài toán tách kênh. Cũng từ hai công thức đó mà ta thấy điều kiện để bài toán có nghiệm là  $E$  phải là ma trận không suy biến.

Vậy thuật toán tìm các bộ điều khiển  $R$  và  $M$  cho bài toán tách kênh sẽ như sau:

- 1) Xác định vector bậc tương đối tối thiểu  $(r_1, \dots, r_m)$  của đối tượng
- 2) Chọn tùy ý các tham số  $b_i$  và  $a_{ik}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $k=0, 1, \dots, r_i-1$ . Ta cũng có thể chọn chúng theo chất lượng định trước cho từng kênh, chẳng hạn:

- a) Chọn  $a_{ik}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $k=0, 1, \dots, r_i-1$  để có

$$a_{i0} + a_{i1}s + \dots + a_{i,r_i-1}s^{r_i-1} + s^{r_i} = (s-s_{i1})(s-s_{i2}) \dots + (s-s_{i,r_i})$$

với  $s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{i,r_i}$  là các điểm cực chọn trước cho kênh thứ  $i$ .

- b) Chọn  $b_i = a_{i0}$  để kênh thứ  $i$  không có sai lệch tĩnh.

- 3) Lập các ma trận  $E$ ,  $F$ ,  $L$  rồi tính  $M$ ,  $R$  theo các công thức (3.87), (3.88).

### Ví dụ 3.36: Thiết kế bộ điều khiển tách kênh

Xét đối tượng có hai tín hiệu vào, hai tín hiệu ra và ba biến trạng thái mô tả bởi:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{u}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

Trước hết ta xác định bậc tương đối  $r_1, r_2$  của hệ.

$$\begin{aligned} \underline{c}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{c}_1^T B = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0) \\ &\Rightarrow \underline{c}_1^T AB = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1) \neq \underline{0}^T \end{aligned}$$

Vậy  $r_1=2$

$$\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{c}_2^T B = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1) \neq \underline{0}^T$$

Vậy  $r_2=1$

Tiếp theo ta tính:

$$E = \begin{pmatrix} \underline{c}_1^T AB \\ \underline{c}_2^T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bây giờ ta chọn các hằng số  $b_1, b_2$  và  $a_{10}, a_{11}, a_{20}$  với điều kiện  $b_1 = a_{10}$  cũng như  $b_2 = a_{20}$  để không có sai lệch tĩnh, và từng kênh là ổn định, chẳng hạn như:

$$b_1 = a_{10} = 2, \quad b_2 = a_{20} = 3, \quad a_{11} = 1$$



Với các tham số được chọn thì:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a_{10}\underline{c}_1^T + a_{11}\underline{c}_1^T A + \underline{c}_1^T A^2 \\ a_{20}\underline{c}_2^T + \underline{c}_2^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra các bộ điều khiển cần tìm là:

$$M = E^{-1}L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R = E^{-1}F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

### Bộ điều khiển tách kênh Smith–McMillan

Phép biến đổi Smith–McMillan trình bày sau đây cho phép thiết kế các bộ điều khiển nhằm biến đổi mọi ma trận hàm truyền  $S(s)$  của đối tượng, không cần phải vuông, tức là không cần phải có giả thiết đối tượng có số tín hiệu vào bằng số các tín hiệu ra, về được dạng ma trận đường chéo, tức là:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & G_m(s) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & G_m(s) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Điều đó nói rằng mọi hệ thống MIMO đều có thể tách được kênh.

Phép biến đổi Smith–McMillan dựa vào việc thay đổi các dòng hay cột của ma trận bằng những dòng, cột mới tương đương (phép biến đổi tương đương). Chúng bao gồm:

- Hoán đổi vị trí vector hàng thứ  $i$  với hàng thứ  $k$  của  $S(s)$ . Việc này tương ứng phép nhân  $I_{ik}$  với  $S(s)$ , trong đó  $I_{ik}$  là ma trận không suy biến thu được từ ma trận đơn vị  $I$  sau khi đổi chỗ hai hàng thứ  $i$  và  $k$  (hoặc hai cột). Ví dụ:

$$I_{25}S(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t}_1 & — \\ \underline{t}_2 & — \\ \underline{t}_3 & — \\ \underline{t}_4 & — \\ \underline{t}_5 & — \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{t}_1 & — \\ \underline{t}_5 & — \\ \underline{t}_3 & — \\ \underline{t}_4 & — \\ \underline{t}_2 & — \end{pmatrix}$$

- Hoán đổi vị trí vector cột thứ  $i$  với cột thứ  $k$  của  $S(s)$ . Việc này tương ứng phép nhân  $S(s)$  với  $I_{ik}$ , trong đó  $I_{ik}$  là ma trận không suy biến thu được từ ma trận đơn vị  $I$  sau khi đổi chỗ hai hàng thứ  $i$  và  $k$  (hoặc hai cột). Ví dụ:

$$S(s)I_{25} = \begin{pmatrix} \underline{t}_1 & \underline{t}_2 & \underline{t}_3 & \underline{t}_4 & \underline{t}_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{t}_1 & \underline{t}_5 & \underline{t}_3 & \underline{t}_4 & \underline{t}_2 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

- Hàng thứ  $i$  được cộng thêm với tích của  $c$  và hàng thứ  $k$  trong  $S(s)$ . Việc này tương ứng phép nhân  $C_{ik}$  với  $S(s)$ , trong đó  $C_{ik}$  là ma trận không suy biến thu được từ ma trận đơn vị  $I$  sau khi thay phần tử 0 thứ  $ik$  bằng phần tử  $c$ . Ví dụ:

$$C_{24}S(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t}_1 & — \\ \underline{t}_2 & — \\ \underline{t}_3 & — \\ \underline{t}_4 & — \\ \underline{t}_5 & — \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{t}_1 & — \\ \underline{t}_2 + c \cdot \underline{t}_4 & — \\ \underline{t}_3 & — \\ \underline{t}_4 & — \\ \underline{t}_5 & — \end{pmatrix}$$

- Cột thứ  $k$  được cộng thêm với tích của  $c$  và cột thứ  $i$  trong  $S(s)$ . Việc này tương ứng phép nhân  $S(s)$  với  $C_{ik}$ , trong đó  $C_{ik}$  là ma trận không suy biến thu được từ ma trận đơn vị  $I$  sau khi thay phần tử 0 thứ  $ik$  bằng phần tử  $c$ . Ví dụ:

$$S(s)C_{24} = \begin{pmatrix} \underline{t}_1 & \underline{t}_2 & \underline{t}_3 & \underline{t}_4 & \underline{t}_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{t}_1 & \underline{t}_2 & \underline{t}_3 & \underline{t}_4 + c \cdot \underline{t}_2 & \underline{t}_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

Phép biến đổi Smith–McMillan được tóm tắt như sau:

- Viết lại  $S(s)$  thành  $\frac{1}{d(s)}P(s)$ , trong đó  $d(s)$  là đa thức bội số chung nhỏ nhất của tất cả các đa thức mẫu số có trong các phân tử của  $S(s)$  và  $P(s)$  là ma trận có các phân tử là đa thức. Ví dụ:

$$S(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{-1}{s^2+3s+2} \\ \frac{s^2+s-4}{s^2+3s+2} & \frac{2s^2-s-8}{s^2+3s+2} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{s^2+3s+2}{d(s)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{pmatrix}}_{P(s)}$$

- Sử dụng các phép biến đổi tương đương đã nói ở trên để đưa  $P(s)$  về dạng "đường chéo" bằng cách đưa dần các phần tử không nằm trên đường chéo về 0 thông qua việc cộng trừ hàng và cột. Điều này đã được Smith–McMillan chuyển thành những bước của thuật toán sau:

a) Đặt  $d_0(s) = 1$ .

b) Chọn  $d_1(s)$  là ước số chung lớn nhất của tất cả các phần tử của  $P(s)$ . Ví dụ

$$d_1(s) = \text{ƯSCLN}\{1, -1, s^2+s-4, 2s^2-s-4, s^2-4, 2s^2-8\} = 1$$

c) Chọn  $d_k(s)$  là ước số chung lớn nhất của tất cả các phần tử là định thức ma trận vuông  $k \times k$  lấy từ  $P(s)$ . Ví dụ:

$$\begin{aligned} d_2(s) &= \text{ƯSCLN}\left\{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \det\begin{pmatrix} s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \text{ƯSCLN}\{3s^2-2s-4, 3s^2-4, s(s^2-4)\} = (s+2)(s-2) \end{aligned}$$

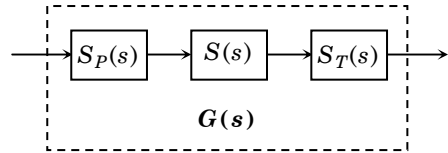
d) Ma trận "đường chéo"  $G(s)$  tương đương với  $S(s)$  sẽ có các phần tử  $G_k(s)$  là:

$$G_k(s) = \frac{1}{d(s)} \cdot \frac{d_k(s)}{d_{k-1}(s)}$$

Ví dụ:

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)(s-2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Hình 3.15:** Thiết kế bộ điều khiển tách kênh theo Smith–McMillan.



Như vậy phép biến đổi Smith–McMillan không cần có giả thiết  $S(s)$  phải là ma trận vuông và có  $E$  không suy biến. Ma trận  $G(s)$  được tạo thành là tương đương với  $S(s)$  theo nghĩa:

$$G(s) = S_T(s)S(s)S_P(s)$$

trong đó  $S_T(s)$  và  $S_P(s)$  là những ma trận không suy biến (với phần lớn các giá trị  $s$ ), được sinh ra từ những phép đổi hàng cột của  $S(s)$ . Chúng chính là hai bộ điều khiển tách kênh đối tượng  $S(s)$  như mô tả ở hình 3.15.

### 3.4.3 Điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu

#### Điều kiện cần và các bước tổng hợp bộ điều khiển tối ưu

Xét hệ tuyến tính tham số hằng:

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad (3.89)$$

trong đó  $\underline{x}=(x_1, x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  là vector trạng thái và  $\underline{u}=(u_1, u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$  là vector các tín hiệu điều khiển. Nhiệm vụ điều khiển tối ưu đặt ra ở đây là phải tìm bộ điều khiển phản hồi trạng thái (hình 3.16):

$$\underline{u}^* = -R\underline{x} \quad \text{trong đó} \quad R = (r_{ik}) = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.90)$$

sao cho không phụ thuộc điểm trạng thái đầu  $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ , hệ là ổn định và luôn có:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T E \underline{x} + \underline{u}^T F \underline{u}) dt \rightarrow \min_R \quad (3.91)$$

trong đó  $E, F$  được giả thiết là *hai ma trận đối xứng*,  $E$  *bán xác định dương* và  $F$  *xác định dương*, tức là  $E=E^T \geq 0$  và  $F=F^T > 0$ . Việc giả thiết  $E, F$  đối xứng không làm mất tính tổng quát của bài toán, vì trong trường hợp  $E, F$  không đối xứng thì từ tính vô hướng của hàm mục tiêu (3.91), ta hoàn toàn thay thế nó được bởi:

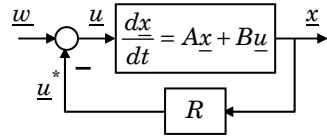
$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} (Q + Q^T) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \underline{x}^T \frac{E + E^T}{2} \underline{x} + \underline{u}^T \frac{F + F^T}{2} \underline{u} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T \hat{E} \underline{x} + \underline{u}^T \hat{F} \underline{u}) dt \end{aligned}$$

với

$$\hat{E} = \frac{E + E^T}{2} \quad \text{và} \quad \hat{F} = \frac{F + F^T}{2}$$

là hai ma trận đối xứng. Giả thiết  $E \geq 0$  (bán xác định dương) và  $D > 0$  (xác định dương) để đảm bảo rằng luôn có  $Q \geq 0$ ,  $\forall \underline{x}, \underline{u}$  và như vậy bài toán tối ưu sẽ có nghiệm.

Bài toán tối ưu trên có ý nghĩa ứng dụng như sau: Sau một tác động tức thời, ví dụ như tác động của xung dirac  $\delta(t)$ , đánh bật hệ (3.89) ra khỏi điểm cân bằng là gốc tọa độ  $\underline{0}$  trong không gian trạng thái  $\mathbb{R}^n$ , thì bộ điều khiển tối ưu (3.90) sẽ kéo hệ quay trở lại điểm gốc  $\underline{0}$  ban đầu và năng lượng  $Q$  chi phí cho quá trình quay về gốc  $\underline{0}$  đó, tính theo



**Hình 3.16:** Thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu

(3.91), là nhỏ nhất. Chính vì có ý nghĩa như vậy nên *hàm mục tiêu*  $Q$  (3.91), thực chất có dạng như một *phiếm hàm* (*functional*), còn được gọi là *hàm tổn hao* (*cost function*).

Để xác định điều kiện cần, tức là điều kiện mà bộ điều khiển tối ưu  $R$  cần phải có, ta thay bộ điều khiển (3.90) vào hàm mục tiêu (3.91):

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty \underline{x}^T (E + R^T F R) \underline{x} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \underline{x}^T K \underline{x} dt \quad \text{với } K = E + R^T F R \quad (3.92)$$

và vào mô hình hệ thống (3.89). Khi đó hệ kín (hình 3.16) sẽ có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - BR) \underline{x} + B\underline{w} = \hat{A} \underline{x} + B\underline{w} \quad \text{với } \hat{A} = A - BR$$

Theo yêu cầu bài toán tối ưu là hệ kín còn phải ổn định, thì bộ điều khiển  $R$  phải đồng thời làm cho  $Q \rightarrow \min$  và  $\hat{A} = A - BR$  là ma trận bền.

Ký hiệu  $\underline{x}(t)$  là quỹ đạo trạng thái tự do của hệ kín (quỹ đạo ứng với  $\underline{w}=0$ ) thì:

$$\underline{x}(t) = e^{\hat{A}t} \underline{x}_0 \quad \text{với } \underline{x}_0 = \underline{x}(0) \text{ là điểm trạng thái đầu}$$

Thay vào hàm mục tiêu (3.92) ta được:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( e^{\hat{A}t} \underline{x}_0 \right)^T K \left( e^{\hat{A}t} \underline{x}_0 \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \underline{x}_0^T \left( e^{\hat{A}^T t} K e^{\hat{A}t} \right) \underline{x}_0 dt \\ &= \frac{1}{2} \underline{x}_0^T \left( \int_0^\infty e^{\hat{A}^T t} K e^{\hat{A}t} dt \right) \underline{x}_0 = \frac{1}{2} \underline{x}_0^T P \underline{x}_0 \quad \text{với } P = \int_0^\infty e^{\hat{A}^T t} K e^{\hat{A}t} dt \end{aligned} \quad (3.93)$$

Như vậy ở đây  $P$  phải là ma trận đối xứng, bán xác định dương, tức là  $P=P^T \geq 0$ , hoặc chặt hơn nữa thì nó còn phải đối xứng xác định dương ( $P=P^T > 0$ ), vì luôn có  $Q \geq 0, \forall \underline{x}_0$ . Điều kiện cần được áp dụng ở đây là khi hàm mục tiêu (3.93) có giá trị nhỏ nhất tại  $R$  định nghĩa bởi (3.90), thì tại đó nó phải thỏa mãn:

$$\frac{\partial Q}{\partial r_{ik}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial r_{ik}} = \Theta \quad \text{với } i=1, 2, \dots, m \quad \text{và } k=1, 2, \dots, n \quad (3.94)$$

Tiếp tục, từ cấu trúc của ma trận  $P$  định nghĩa trong (3.93) ta còn có với  $\hat{A}e^{\hat{A}t} = e^{\hat{A}t}\hat{A}$ :

$$\begin{aligned} P\hat{A} &= \left( \int_0^\infty e^{\hat{A}^T t} K e^{\hat{A}t} dt \right) \hat{A} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( e^{\hat{A}^T t} K \right) \left( e^{\hat{A}t} \hat{A} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( e^{\hat{A}^T t} K \right) \left( \hat{A} e^{\hat{A}t} \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left( e^{\hat{A}^T t} K \right) \frac{d}{dt} \left( e^{\hat{A}t} \right) dt = e^{\hat{A}^T t} K e^{\hat{A}t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left( e^{\hat{A}^T t} K \right) e^{\hat{A}t} dt \\ &= e^{\hat{A}^T t} K e^{\hat{A}t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \hat{A}^T e^{\hat{A}^T t} K e^{\hat{A}t} dt = -K - \int_0^\infty \hat{A}^T e^{\hat{A}^T t} K e^{\hat{A}t} dt, \quad \text{vì } \hat{A} \text{ giả thiết là bền} \\ &= -K - \hat{A}^T \left( \int_0^\infty e^{\hat{A}^T t} K e^{\hat{A}t} dt \right) = -K - \hat{A}^T P \end{aligned}$$

Vậy, ma trận  $P=P^T \geq 0$  phải là nghiệm của:

$$P\hat{A} + \hat{A}^T P = -K \quad (3.95)$$

và đây chính là dạng phương trình Lyapunov (3.42) mà ta đã biết từ định lý 3.21. Áp dụng điều kiện cần (3.94) vào phương trình (3.95) thì:

$$\begin{aligned} P \frac{\partial \hat{A}}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial \hat{A}^T}{\partial r_{ik}} P &= -\frac{\partial K}{\partial r_{ik}} \Leftrightarrow P \frac{\partial (A - BR)}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial (A - BR)^T}{\partial r_{ik}} P = -\frac{\partial (E + R^T FR)}{\partial r_{ik}} \\ \Leftrightarrow -PB \frac{\partial R}{\partial r_{ik}} - \frac{\partial R^T}{\partial r_{ik}} B^T P &= -\frac{\partial R^T}{\partial r_{ik}} FR - R^T F \frac{\partial R}{\partial r_{ik}} \\ \Leftrightarrow (R^T F - PB) \frac{\partial R}{\partial r_{ik}} + \frac{\partial R^T}{\partial r_{ik}} (FR - B^T P) &= \Theta \end{aligned} \quad (3.96)$$

trong đó  $\Theta$  là ký hiệu của ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0. Do  $\frac{\partial R}{\partial r_{ik}}$  là ma trận có phần tử thứ  $ik$  bằng 1, các phần tử còn lại đều bằng 0, nên:

$$(R^T F - PB) \frac{\partial R}{\partial r_{ik}}$$

phải là ma trận có cột thứ  $k$  là cột thứ  $i$  của  $R^T F - PB$ , các phần tử ở cột còn lại đều bằng 0. Tương tự:

$$\frac{\partial R^T}{\partial r_{ik}} (FR - B^T P) = \left( (R^T F - PB) \frac{\partial R}{\partial r_{ik}} \right)^T$$

là ma trận có hàng thứ  $k$  là hàng thứ  $i$  của  $FR - B^T P$ , các hàng còn lại đều bằng 0. Nhận xét này cho thấy từ (3.96) rằng  $FR - B^T P$  phải có hàng thứ  $i$  đồng nhất bằng 0. Cho  $i$  chạy từ 1 tới  $m$  ta được:

$$FR - B^T P = \Theta \Leftrightarrow R = F^{-1} B^T P \quad (3.97)$$

Cuối cùng, thay ngược (3.97) vào (3.95) ta đi đến:

$$\begin{aligned} P(A - BR) + (A - BR)^T P &= -(E + R^T FR) \\ \Leftrightarrow P(A - BF^{-1}B^T P) + (A - BF^{-1}B^T P)^T P &= -E - (F^{-1}B^T P)^T F (F^{-1}B^T P) \\ \Leftrightarrow PBF^{-1}B^T P - PA - A^T P &= E \quad \text{vì} \quad (F^{-1})^T = (F^T)^{-1} = F^{-1} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Phương trình (3.98) có tên gọi là *phương trình đại số Riccati* (ARE), nó cho phép ta xác định được ma trận  $P$  từ các ma trận  $A, B, E, F$  đã cho.

Tổng kết lại ta đi đến điều kiện cần, phát biểu như sau:

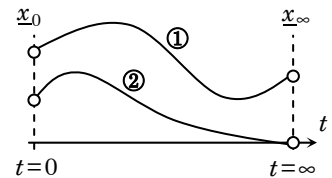
**Định lý 3.35:** Nếu  $\underline{u}^* = -R\underline{x}$  là tín hiệu điều khiển tối ưu, tức là  $R$  là bộ điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu theo nghĩa cùng làm cho  $Q \rightarrow \min$  và  $\hat{A} = A - BR$  là ma trận bền, thì nó phải thỏa mãn (3.97), trong đó  $P = P^T \geq 0$  là nghiệm của phương trình đại số Riccati (3.98).

Hai công thức (3.97) và (3.98) của điều kiện cần cũng tạo thành thuật toán thiết kế bộ điều khiển tối ưu  $R$  gồm các bước như sau:

- 1) Xác định nghiệm  $P$  đối xứng, bán xác định dương ( $P = P^T \geq 0$ ) của phương trình đại số Riccati (3.98).
- 2) Thay nghiệm  $P$  tìm được vào (3.97) để có bộ điều khiển tối ưu  $R$ .

**Chú ý:** Về thuật toán thiết kế trên ta nên lưu ý mấy điểm sau:

- Nếu  $P$  xác định dương thì đương nhiên nó cũng bán xác định dương ( $P > 0 \Rightarrow P \geq 0$ ), nhưng điều ngược lại không đúng. Bởi vậy trong trường hợp phương trình Riccati (3.98) có cả nghiệm bán xác định dương và nghiệm xác định dương, ta chỉ nên lấy nghiệm xác định dương. Để kiểm tra tính xác định dương của ma trận  $P$ , ta sử dụng định lý 3.22 của Sylvester.
- Hai bước thiết kế trên được xây dựng hoàn toàn từ điều kiện cần (3.94) của hàm mục tiêu  $Q \rightarrow \min$ . Nói cách khác, nếu phương trình Riccati (3.98) có nhiều nghiệm thì không phải tất cả các nghiệm đó cũng đều đưa đến bộ điều khiển  $R$  cho bởi (3.97) là tối ưu theo nghĩa đồng thời đạt được cả hai mục đích  $Q \rightarrow \min$  và  $\hat{A} = A - BR$  là ma trận bền.
- Vì điều kiện cần (3.94) chỉ được xây dựng cho  $Q \rightarrow \min$ , chứ không phải cho ma trận bền  $\hat{A} = A - BR$  nên ngay cả trong trường hợp phương trình đại số Riccati (3.98) chỉ có một nghiệm  $P$  bán xác định dương duy nhất, tức là chỉ có một bộ điều khiển  $R$  duy nhất, thì ta cũng chỉ mới đảm bảo được rằng sẽ có  $Q \rightarrow \min$  chứ chưa khẳng định được  $\hat{A} = A - BR$  có bền hay không, tức là chưa khẳng định được hệ kín có ổn định hay không. Bởi vậy trong mọi trường hợp ta luôn phải kiểm tra lại tính ổn định của hệ kín ở hình 3.16.
- Từ công thức (3.93) ta còn thấy giá trị tối ưu của hàm mục tiêu  $Q$  (giá trị nhỏ nhất) còn phụ thuộc điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0$ . Hơn thế nữa, trong trường hợp nghiệm  $P$  của phương trình (3.98) chỉ bán xác định dương, điểm cuối  $\underline{x}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t)$  của quỹ đạo trạng thái tối ưu cũng rất có thể sẽ không kết thúc tại gốc tọa độ (do đó hệ không ổn định), giống như quỹ đạo ① ở hình 3.17.



**Hình 3.17:** Minh họa quỹ đạo trạng thái tối ưu của hệ kín.

**Ví dụ 3.37:** Thiết kế bộ điều khiển LQR

Xét đối tượng có mô hình trạng thái:

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} + Bu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad \text{với} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nhiệm vụ điều khiển là xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu  $R$  làm hệ ổn định, tức là sau khi bị nhiễu tức thời đánh bật ra khỏi gốc  $\underline{0}$  và bị đưa đến một điểm trạng thái  $\underline{x}_0$  nào đó thì  $R$  sẽ đưa đối tượng quay trở lại được  $\underline{x}_\infty = \underline{0}$  và năng lượng tổn hao cho quá trình quay về tính theo:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T E \underline{x} + u^T F u) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \underline{x}^T \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \underline{x} + u^2 dt \quad \text{với} \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad F = 1$$

là nhỏ nhất. Giả sử  $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}$ , thì phương trình đại số Riccati (3.98) sẽ là:

$$\begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_3 \\ p_1 p_3 & p_3^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_3 & p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_3 & 0 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^2 - 2p_3 - 5 = 0 \\ p_3^2 - 4 = 0 \\ p_1 p_3 - p_2 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có các nghiệm sau:

- $p_3 = 2$  ;  $p_1 = 3$  ;  $p_2 = 6$
- $p_3 = 2$  ;  $p_1 = -3$  ;  $p_2 = -6$
- $p_3 = -2$  ;  $p_1 = 1$  ;  $p_2 = -2$
- $p_3 = -2$  ;  $p_1 = -1$  ;  $p_2 = 2$

trong đó chỉ có nghiệm đầu tiên mới làm cho  $P$  xác định dương, do đó nó cũng là bán xác định dương, tức là theo định lý Sylvester (định lý 3.22), nghiệm này có  $p_1 > 0$  và  $p_1 p_2 - p_3^2 > 0$ . Suy ra:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

và bộ điều khiển  $R$  thỏa mãn bài toán được xác định theo công thức (3.97) là:

$$R = F^{-1} B^T P = (1, 0) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = (3, 2)$$

Do bộ điều khiển tối ưu này chưa đảm bảo được sẽ có  $\underline{x}_\infty = \underline{0}$  hay không nên ta cần phải kiểm tra lại tính ổn định hệ kín. Hệ kín (hình 3.16) có mô hình:

$$\frac{dx}{dt} = (A - BR)\underline{x} + Bw = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w$$

với đa thức đặc tính



$$0 = \det(sI - (A - BR)) = \det \begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{pmatrix} = s^2 + 3s + 2$$

là đa thức Hurwitz. Vậy hệ kín là ổn định. □

**Ví dụ 3.38:** Thiết kế bộ điều khiển LQR

Tìm bộ điều khiển  $R$  phản hồi âm trạng thái cho đối tượng:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{với} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

để khi bị nhiễu tức thời đánh bật ra khỏi gốc  $\underline{0}$  và bị đưa đến một điểm trạng thái  $\underline{x}_0$  nào đó thì  $R$  sẽ đưa đối tượng quay trở lại được  $\underline{x}_\infty = \underline{0}$  và năng lượng tổn hao tính theo:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T E \underline{x} + \underline{u}^T F \underline{u}) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \underline{x}^T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \underline{x} + u^2 \right] dt \quad \text{với} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad F = 1$$

là nhỏ nhất. Ký hiệu  $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}$  khi đó phương trình Riccati (3.98) trở thành:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \quad 1) \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} p_3^2 - 2p_3 & p_2p_3 - 2p_1 - p_2 \\ p_2p_3 - 2p_1 - p_2 & p_2^2 - 4p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} p_3^2 - 2p_3 = 3 \\ p_2p_3 - 2p_1 - p_2 = 4 \\ p_2^2 - 4p_3 = 13 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình trên có các nghiệm sau:

- $p_3 = 3$  ;  $p_2 = 5$  ;  $p_1 = 3$
- $p_3 = 3$  ;  $p_2 = -5$  ;  $p_1 = -7$
- $p_3 = -1$  ;  $p_2 = 3$  ;  $p_1 = -5$
- $p_3 = -1$  ;  $p_2 = -3$  ;  $p_1 = 1$

nhưng chỉ có nghiệm đầu tiên là xác định dương, tức là thỏa mãn điều kiện Sylvester:

$$p_1 > 0 \quad , \quad p_1p_2 - p_3^2 > 0$$

Suy ra

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Vậy bộ điều khiển  $R$  cần tìm được xác định theo (3.97) sẽ là:

$$R = F^{-1}B^TP = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (3 \quad 5)$$

Bộ điều khiển tối ưu này chưa đảm bảo được sẽ có  $\underline{x}_\infty = \underline{0}$ . Do đó ta cần phải kiểm tra lại tính ổn định hệ kín. Hệ kín (hình 3.16) với bộ phản hồi (âm) trạng thái  $R$  có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - BR)\underline{x} + Bw = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

và đa thức đặc tính của nó

$$0 = \det(sI - (A - BR)) = \det \begin{pmatrix} s & -2 \\ 2 & s+5 \end{pmatrix} = s^2 + 5s + 4$$

là đa thức Hurwitz. Vậy hệ kín là ổn định tối ưu. □

### Bàn về tính ổn định của hệ kín tối ưu và bài toán mở

Sau đây, không mất tính tổng quát, ta sẽ xét cụ thể tính ổn định của hệ kín phản hồi âm ở hình 3.16, bao gồm đối tượng tuyến tính (3.89) và bộ điều khiển phản hồi (âm) trạng thái tối ưu (3.97) có ma trận  $P$  là nghiệm *đối xứng bán xác định dương* của phương trình đại số Riccati (3.98). Việc khảo sát này là cần thiết vì hai lý do:

- Thứ nhất là trong phần diễn giải trước đó và phần chứng minh sau này của định lý 3.35, công thức (3.95) đã sử dụng giả thiết rằng điểm cuối của quỹ đạo trạng thái tối ưu là gốc tọa độ như một điều mặc nhiên chứ hoàn toàn không được kiểm chứng. Nói như vậy để thấy rằng bộ điều khiển tối ưu (3.97), (3.98) tìm được có thể đưa quỹ đạo trạng thái hệ kín từ một điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0$  tùy ý cho trước tới một điểm cuối  $\underline{x}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t)$  bất kỳ nào khác cũng cho trước ngoài gốc tọa độ, vẫn thỏa mãn điều kiện (3.95). Khi đó hệ kín sẽ không ổn định.
- Thứ hai, trong trường hợp (3.95) có  $K$  xác định dương và phương trình đại số Riccati (3.98), mà bản chất là tương đương với (3.95), có nghiệm  $P$  đối xứng xác định dương (chứ không chỉ bán xác định dương), thì từ định lý 3.21, ta đến ngay được  $\hat{A} = A - BR$  là ma trận bền. Điều này đảm bảo cho tính ổn định của hệ kín ở hình 3.16. Tuy nhiên khả năng tồn tại tại nghiệm  $P$  xác định dương của phương trình đại số Riccati (3.98), chứ không chỉ là bán xác định dương, lại hoàn toàn chưa được khảo sát.

Trước tiên, ta giả sử phương trình Riccati (3.98) có nghiệm  $P$  đối xứng bán xác định dương và chỉ khảo sát điều kiện đủ để với nó bộ điều khiển tối ưu (3.97) sẽ làm hệ kín ở hình 3.16 là ổn định. Từ giả thiết của bài toán tối ưu rằng phiếm hàm mục tiêu (3.91) có  $E$  đối xứng bán xác định dương và  $F$  đối xứng xác định dương, ta có được ngay với định lý Barbalat tính chất sau của điểm trạng thái cuối  $\underline{x}_\infty$ :

$$\begin{aligned} Q_{\min} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T E \underline{x} + \underline{u}^T F \underline{u}) dt < \infty & \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\underline{x}^T E \underline{x} + \underline{u}^T F \underline{u}) = 0 \\ & \Leftrightarrow \underline{x}_\infty^T E \underline{x}_\infty = 0 \text{ và } \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{u}(t) = \underline{0} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Như vậy, trạng thái cuối  $\underline{x}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t)$  của quỹ đạo tối ưu phải là dạng cân bằng của hệ kín, tức là hoặc là điểm cân bằng hoặc là dao động tự do (hình 3.17).

**Định lý 3.36:** Giả sử phương trình đại số Riccati (3.98) có nghiệm  $P$  đối xứng, bán xác định dương. Khi đó bộ điều khiển tối ưu phản hồi (âm) trạng thái (3.97) sẽ làm hệ kín ở hình 3.16 ổn định, nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

- $\det(A-BR) \neq 0$  và hệ kín không dao động.
- $E$  đối xứng xác định dương,
- $\underline{a}^T(E+PA)\underline{a} > 0$ ,  $\forall \underline{a} \neq \underline{0}$ , hay  $(2E+PA+A^TP)$  là đối xứng xác định dương,
- $E + PBF^{-1}B^TP$  đối xứng xác định dương.

*Chứng minh:*

a) Hệ kín tối ưu ở hình 3.16 có mô hình trạng thái là:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - BR)\underline{x} + B\underline{u}$$

và điều kiện a) chỉ rằng hệ kín chỉ cân bằng duy nhất tại gốc. Suy ra  $\underline{x}_\infty = \underline{0}$ .

b) Nếu  $E$  đối xứng xác định dương thì từ (3.99) ta cũng suy ra được  $\underline{x}_\infty = \underline{0}$ .

c) Thay các công thức (3.97), (3.98) vào phiếm hàm mục tiêu (3.91) thì dọc theo quỹ đạo trạng thái tối ưu sẽ phải có:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T E \underline{x} + \underline{u}^T F \underline{u}) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T (E + PBF^{-1}B^TP) \underline{x}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T (2E + A^TP + PA) \underline{x}) dt = \int_0^\infty (\underline{x}^T (E + PA) \underline{x}) dt \end{aligned}$$

Vì  $Q$  là giá trị hữu hạn (giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu), tức là tích phân vô hạn ở vế phải là hội tụ, nên theo định lý Barbalat, hàm dưới dấu tích phân phải tiến về 0. Điều này dẫn đến  $\underline{x}_\infty = \underline{0}$ , vì  $\underline{a}^T(E+PA)\underline{a} > 0$ ,  $\forall \underline{a} \neq \underline{0}$ .

d) Từ phương trình Riccati (3.98) và kết quả của c) ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\infty (\underline{x}^T (E + PA) \underline{x}) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T (E + PA) \underline{x} + \underline{x}^T (E + A^TP) \underline{x}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T (E + PA + E + A^TP) \underline{x}) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T (E + PBF^{-1}B^TP) \underline{x}) dt \end{aligned}$$

và điều tương tự lại xảy ra như phần chứng minh câu c). □

Chuyển sang bài toán thứ hai là khả năng tồn tại nghiệm  $P$  xác định dương của phương trình đại số Riccati (3.98).

**Bài toán mở** (Chưa có lời giải): Xét phương trình đại số Riccati (3.98) với  $E, F$  là hai ma trận đối xứng cho trước, trong đó  $E$  bán xác định dương,  $F$  xác định dương và  $A, B$  là hai ma trận thực. Hãy xác định điều kiện cần và đủ cho  $A$  và  $B$  để phương trình có nghiệm  $L$  đối xứng xác định dương.

Cặp ma trận  $A$  và  $B$  làm cho phương trình Riccati (3.98) với  $E, F$  là hai ma trận đối xứng xác định dương cho trước, có nghiệm  $P$  cũng đối xứng xác định dương, được gọi là cặp ma trận *ổn định Riccati*. Tuy rằng bài toán mở trên chưa có lời giải, song đã có một số kết quả nghiên cứu thu được dưới dạng hệ quả, liên quan tới nó như sau:

- Nếu  $A$  là Hurwitz thì luôn tồn tại  $B$  để  $(A, B)$  là ổn định Riccati.
- Nếu  $(A, B)$  là ổn định Riccati thì  $(aA, aB)$ ,  $\forall a > 0$ , cũng ổn định Riccati.
- Nếu  $(A, B)$  là ổn định Riccati thì  $(SAS^{-1}, SB)$ ,  $\forall S$  không suy biến, cũng ổn định Riccati (sử dụng phép đổi biến  $\underline{z} = S\underline{x}$ ).
- Nếu  $(A, B)$  điều khiển được và  $E$  xác định dương thì  $(A, B)$  là ổn định Riccati.

### Phương pháp tìm nghiệm phương trình Riccati

Bỏ qua bài toán mở trên đây để giả thiết rằng phương trình đại số Riccati có nghiệm  $P$  đối xứng xác định dương, thì nhiệm vụ của các phần tiếp theo là phải xác định được nghiệm đó.

Phương trình Riccati (3.98) không phải là phương trình tuyến tính nên cần có những phương pháp đặc biệt để tìm nghiệm, nếu nghiệm đó tồn tại. Tên gọi phương pháp tìm nghiệm trực tiếp của mục này không có ý nói rằng ta sẽ giải trực tiếp phương trình Riccati mà ngược lại nó sẽ xác định  $P$  thỏa mãn (3.98) trực tiếp từ mục đích bài toán tổng hợp bộ điều khiển tối ưu  $R$  làm hệ kín ổn định.

Phương pháp trình bày sau đây thuộc về *Kleinman*. Đây là một thuật toán truy hồi giải phương trình (3.98). Điều đặc biệt của thuật toán này là nó không chỉ xác định nghiệm  $P$  của (3.98) mà còn cho ra được luôn bộ điều khiển tối ưu  $R$  tính theo (3.97) sau mỗi bước lặp.

Xuất phát từ công thức (3.98) và do  $P, F$  là những ma trận đối xứng, ta có:

$$PBR = PBF^{-1}B^{TP} = P^TB(F^{-1})^TB^TP = R^TB^TP$$

Bởi vậy cùng với phương trình Riccati (3.98):

$$PBF^{-1}B^TP - PA - A^TP = E$$

ta đi đến được:

$$(A - BR)^TP + P(A - BR) = -E - R^TFR \tag{3.100}$$

và đó chính là phương trình Lyapunov (3.42) đã biết từ định lý 3.21.

Kleinman đã đề xuất tìm truy hồi  $P_k$  từ  $R_k$  dựa vào dạng cải biên của (3.100):

$$(A - BR_k)^T P_k + P_k (A - BR_k) = -E - R_k^T F R_k \quad (3.101)$$

cũng như  $R_{k+1}$  từ  $P_k$  với sự cải biên (3.97) thành:

$$R_{k+1} = F^{-1} B^T P_k \quad (3.102)$$

trong đó  $k=0, 1, 2, \dots$ . Giá trị khởi đầu  $R_0$  phải được chọn sao cho  $(A - BR_0)$  là ma trận bền, chẳng hạn nhờ các phương pháp gán điểm cực (mục 3.4.1). Khi đó tại mỗi bước tính ta luôn thu được ma trận bền  $(A - BR_k)$  và  $P_k$  xác định dương. Dãy  $\{P_k\}$  thu được sẽ hội tụ đến nghiệm  $P$  của (3.100) và  $R_k$  hội tụ tới nghiệm  $R$  của (3.97).

Tóm tắt lại, thuật toán Kleinman có những bước tính sau:

- 1) Xác định  $R_0$  sao cho  $(A - BR_0)$  là ma trận bền bằng cách sử dụng các phương pháp thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực. Nếu bản thân ma trận  $A$  đã là ma trận bền thì có thể chọn  $R_0 = \Theta$ .
- 2) Thực hiện lần lượt với  $k=1, 2, \dots$  các bước sau:
  - a) Giải phương trình Lyapunov (3.101) để có  $P_k$  từ  $R_k$ .
  - b) Tính  $R_{k+1}$  từ  $P_k$  theo (3.102).

Như vậy, thuật toán của Kleinman có sử dụng thêm phương pháp tính giải phương trình Lyapunov. Hiện có khá nhiều phương pháp hữu hiệu phục vụ việc giải phương trình Lyapunov. Nhiều phương pháp trong số chúng còn được cài đặt thành công cụ chuẩn rất tiện ích (chẳng hạn như lệnh **lyap** của MatLab).

Bên cạnh các phương pháp tính đó, nếu để ý thêm tới tính bền của  $\hat{A}_k = A - BR_k$ , tức là tất cả các giá trị riêng của  $\hat{A}_k$  nằm bên trái trục ảo, thì nghiệm  $P_k$  của phương trình Lyapunov (3.101) còn có thể được xác định trực tiếp theo công thức:

$$L_k = \int_0^\infty e^{\hat{A}_k^T t} \hat{E}_k e^{\hat{A}_k t} dt, \quad \text{trong đó} \quad \hat{E}_k = E + R_k^T F R_k$$

Cuối cùng, còn một điều cần bàn đến là khi nào thì nên kết thúc quá trình tính truy hồi trong thuật toán Kleinman. Ta thấy do dãy  $\{P_k\}$  hội tụ đến nghiệm  $P$  nên quá trình tính truy hồi có thể được kết thúc nếu như sai số  $\|L_{k+1} - L_k\|$  đã thỏa mãn điều kiện cho phép:

$$\|L_{k+1} - L_k\| < \varepsilon$$

trong đó  $\varepsilon$  là một số dương đủ nhỏ được chọn trước. Chuẩn ma trận  $\|L_{k+1} - L_k\|$  thường được dùng là chuẩn bậc hai, tức là giá trị suy biến lớn nhất của ma trận:

$$\|P_{k+1} - P_k\| = \sqrt{\lambda_{\max} \left( (P_{k+1} - P_k)^T (P_{k+1} - P_k) \right)}$$

với  $\lambda_{\max}$  là ký hiệu của giá trị riêng lớn nhất.

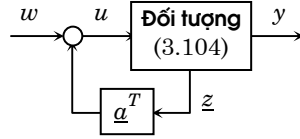
### 3.4.4 Điều khiển bám (tracking control) bằng phản hồi trạng thái

Bài toán đặt ra ở đây là điều khiển đối tượng SISO mô tả bởi:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.103)$$

sao cho tín hiệu ra  $y(t)$  của nó luôn bám được theo tín hiệu mẫu  $y_m(t)$  mong muốn. Nhằm can thiệp vào đối tượng (3.103) để đạt được nhiệm vụ đặt ra, người ta vừa có thể thiết kế bộ điều khiển (phản hồi trạng thái hoặc tín hiệu ra), vừa có thể xác định tín hiệu đặt  $u_m(t)$  thích ứng ở đầu vào. Trước tiên, ta xét bài toán có đối tượng đơn giản với dạng chuẩn điều khiển theo biến  $\mathbf{z}$ :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n) \mathbf{z} \end{cases} \quad (3.104)$$



Hình 3.18: Điều khiển bám với đối tượng (3.104)

Có thể thấy ngay, khi sử dụng bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{a}^T$  với:

$$u = w + \mathbf{a}^T \mathbf{z} \quad \text{trong đó} \quad \mathbf{a}^T = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

thì do hệ kín ở hình 3.18 lúc này có mô hình:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \\ y = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n) \mathbf{z} \end{cases} \quad (3.105)$$

$$\Rightarrow w = \frac{dz_n}{dt} = \frac{d^n z_1}{dt^n} \quad \text{và} \quad y = \hat{c}_1 z_1 + \hat{c}_2 \frac{dz_1}{dt} + \cdots + \hat{c}_n \frac{d^{n-1} z_1}{dt^{n-1}}$$

nên ở đầu vào ta chỉ cần đặt  $w_m(t)$  với:

$$W_m(s) = \frac{s^n Y_m(s)}{\hat{c}_1 + \hat{c}_2 s + \cdots + \hat{c}_n s^{n-1}} \quad (3.106)$$

trong đó  $W_m(s)$  là ảnh Laplace của  $w_m(t)$  và  $Y_m(s)$  là ảnh của  $y_m(t)$ , là sẽ nhận được  $y_m(t)$  ở đầu ra như mong muốn (hình 3.18).

Mở rộng ra cho đối tượng (3.103) ban đầu, ta thấy để giải quyết bài toán thì đơn giản nhất là tìm phép đổi biến  $\underline{z} = S\underline{x}$  chuyển nó về dạng (3.104) mà cụ thể là:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{z}}{dt} = \hat{A}\underline{z} + \hat{b}u \\ y = \hat{c}^T \underline{z} \end{cases}$$

với

$$\hat{A} = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = Sb = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

và  $\hat{c}^T = c^T S^{-1} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n)$

cũng như các phần tử  $a_k$ ,  $k=0, 1, \dots, n-1$  trong (3.107) là hệ số của đa thức đặc tính của đối tượng (3.103), tức là:

$$\det(sI - A) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

Nhớ lại định lý 3.32 thì phép đổi biến đó chính là:

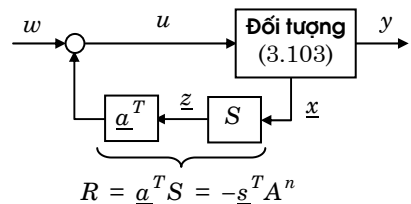
$$S = \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{với} \quad \underline{s}^T = (0, 0, \dots, 1) (\underline{b}, A\underline{b}, \dots, A^{n-1}\underline{b})^{-1} \quad (3.108)$$

Tương ứng, bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R_z = \underline{a}^T$  được thay bằng (hình 3.19):

$$R\underline{x} = \hat{R}\underline{z} = \underline{a}^T S\underline{x} \quad (3.109)$$

Sử dụng thêm định lý Cayley–Hamilton (định lý 3.8) để biến đổi tiếp công thức (3.109) cho bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$ , ta còn đến được:

$$R = \underline{a}^T \underline{z} = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{s}^T a_k A^k = -\underline{s}^T A^n \quad (3.110)$$



**Hình 3.19:** Điều khiển bám cho đối tượng (3.103)

Tổng kết lại ta đi đến:

**Định lý 3.37:** Nếu đối tượng (3.103) là điều khiển được thì bộ điều khiển phản hồi trạng thái (3.110), với  $\underline{s}^T$  và ma trận  $S$  được xác định theo (3.108), cũng như tín hiệu mẫu đặt trước  $w_m(t)$  thỏa mãn (3.106), trong đó:

$$(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n) = \underline{c}^T S^{-1}$$

sẽ tạo ở đầu ra của hệ kín (hình 3.19) tín hiệu  $y_m(t)$  như mong muốn.

Tuy rằng đã tạo được ở đầu ra của hệ kín (hình 3.19) tín hiệu  $y_m(t)$  mong muốn, song do khi đó hệ kín có mô hình trạng thái theo biến  $\underline{z}$  là (3.105), tức là có điểm cực  $s=0$  bội  $n$  nên hệ kín ở hình 3.19 là không ổn định. Điều này nói rằng nếu trong quá trình điều khiển, có một tín hiệu nhiễu tức thời làm trạng thái  $\underline{z}(t)=S\underline{x}(t)$  của hệ kín lệch ra khỏi quỹ đạo mong muốn  $\underline{z}_m(t)$  có ảnh Laplace  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$  với các phần tử được suy ra từ mô hình (3.105) và công thức (3.106) như sau:

$$\begin{aligned} Z_k(s) &= \underline{Z}_k(s) = \frac{s^{k-1} Y_m(s)}{\hat{c}_1 + \hat{c}_2 s + \dots + \hat{c}_n s^{n-1}}, \quad k=1, 2, \dots, n \\ \Leftrightarrow \underline{z}_m^T &= \left( \hat{y}_m, \frac{d\hat{y}_m}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}\hat{y}_m}{dt^{n-1}} \right) \end{aligned} \quad (3.111)$$

trong đó  $\hat{y}_m(t)$  là tín hiệu có ảnh Laplace:

$$\hat{Y}_m(s) = \frac{Y_m(s)}{\hat{c}_1 + \hat{c}_2 s + \dots + \hat{c}_n s^{n-1}} \quad (3.112)$$

thì sau đó hệ sẽ không tự quay về được vector quỹ đạo mong muốn  $\underline{z}_m(t)$  này. Bởi vậy, nhiệm vụ tiếp theo là ta phải làm cho hệ kín (hình 3.19) ổn định, tức là phải can thiệp thêm bằng một bộ điều khiển  $R_e$  sao cho với nó, sai lệch:

$$\underline{e} = \underline{z} - \underline{z}_m$$

tiến được về  $\underline{0}$  (hình 3.20). Điều này tương đương với việc xác định  $R_e$  để ma trận:

$$\hat{A} + \hat{b}(\underline{a}^T - R_e) \quad (3.113)$$

có tất cả các giá trị riêng  $s_1, \dots, s_n$  nằm bên trái trục ảo.

Để tìm  $R_e$  ta lại áp dụng được các phương pháp gắn điểm cực mà ở đây tiện lợi nhất là phương pháp Ackermann (vì chỉ có một tín hiệu vào, cũng như  $\hat{A}$  và  $\hat{b}$  đã có dạng chuẩn điều khiển). Chẳng hạn, khi ký hiệu

$$R_e = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

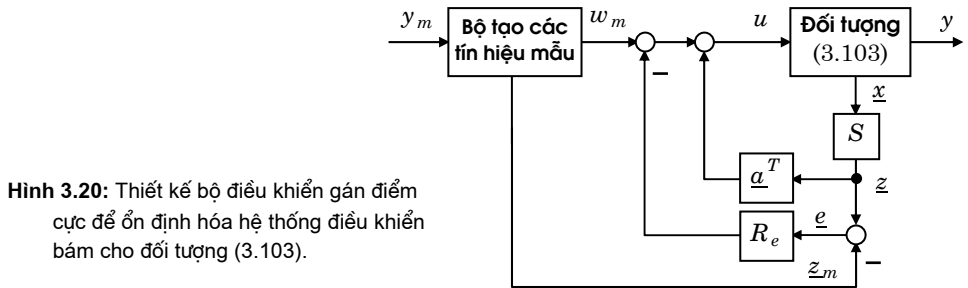
thì do (3.113) lúc này trở thành:



$$\hat{A} + \hat{b}(\underline{a}^T - R_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -r_1 & -r_2 & \dots & -r_n \end{pmatrix}$$

nên các phần tử  $r_k, k=1,2, \dots, n$  của bộ điều khiển  $R_e$  được xác định một cách đơn giản từ những giá trị cho trước  $s_1, \dots, s_n$  nằm bên trái trục ảo theo:

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_n) = r_1 + r_2 s + \dots + r_n s^{n-1} + s^n \quad (3.114)$$



**Hình 3.20:** Thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực để ổn định hóa hệ thống điều khiển bám cho đối tượng (3.103).

Cuối cùng, tổng kết lại ta đi đến:

**Định lý 3.38:** Hệ thống điều khiển có cấu trúc mô tả ở hình 2.20 với  $w_m(t)$  là tín hiệu mẫu đặt trước thỏa mãn (3.106), ma trận  $S$  được xác định theo (3.108),  $\underline{z}_m(t)$  là vector trạng thái mẫu (3.111) của các tín hiệu  $\hat{y}_m(t)$  được xác định theo (3.112),  $R_e = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  có các phần tử  $r_k, k=1,2, \dots, n$  xác định từ những giá trị riêng  $s_1, \dots, s_n$  cho trước nằm bên trái trục ảo theo (3.114), sẽ tạo ra được ở đầu ra của đối tượng (3.103) một tín hiệu  $y(t)$  luôn bám theo tín hiệu mẫu mong muốn  $y_m(t)$  cho dù có tác động của nhiễu. Nếu các giá trị riêng  $s_1, \dots, s_n$  được chọn nằm càng xa trục ảo về phía trái, tốc độ bám càng cao.

*Chứng minh:* Xem phần diễn giải ở trên.

### 3.4.5 Điều khiển phản hồi trạng thái thích nghi

Trong điều khiển ta thường hay gặp những bài toán mà ở đó mô hình mô tả đối tượng có chứa những thành phần bất định. Nguồn gốc của những thành phần bất định này có thể là sai lệch mô hình (đã được phân tích về tính bền vững của hệ kín ở chương

2) và cũng có thể là do sự tác động của các tín hiệu ngoại sinh không biết trước. Chúng được gọi chung lại dưới tên gọi là các tác động tạp nhiễu (disturbance).

Mô hình bất định của các đối tượng tuyến tính MIMO đều có nét chung như sau:

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B[\underline{u} + G(\underline{x})\underline{d}] \quad (3.115)$$

trong đó  $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  là vector biến trạng thái,  $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  là vector các tín hiệu đầu vào (tín hiệu điều khiển) và  $\underline{d}(t) \in \mathbb{R}^p$  là vector các thành phần bất định (không biết trước và cũng không đo được) của đối tượng,  $A$  và  $B$  là hai ma trận hằng, còn  $G(\underline{x})$  là ma trận có các phần tử phụ thuộc  $\underline{x}$ . Nhiệm vụ đặt ra ở đây là phải thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái để điều khiển đối tượng (3.115) sao cho hệ thống có được chất lượng mong muốn và chất lượng này không được phụ thuộc vào vector tạp nhiễu  $\underline{d}(t)$  của mô hình đối tượng (3.115). Bài toán đó có tên gọi là *điều khiển thích nghi kháng nhiễu*.

### Trường hợp đối tượng đã có chất lượng mong muốn khi không có nhiễu

Trước tiên, xét trường hợp đơn giản là ở đối tượng MIMO (3.115) ta đã biết thành phần nhiễu  $\underline{d} = \tilde{\underline{d}}$ . Khi đó nó sẽ được loại bỏ hoàn toàn bằng tín hiệu bù  $\underline{u} = \underline{w} - G(\underline{x})\tilde{\underline{d}}$  ở đầu vào và hệ (3.115) sẽ có mô hình mẫu lý tưởng:

$$\frac{dx_m}{dt} = A\underline{x}_m + B\underline{w} \quad (3.116)$$

trong đó  $A$  là ma trận có giá trị riêng  $s_1, \dots, s_n$  nằm bên trái trục ảo tương ứng với chất lượng mong muốn. Điều này, theo định lý 3.21, phương trình Lyapunov (3.42):

$$A^T P + P A = -Q \quad (3.117)$$

ứng với ma trận  $Q$  đối xứng xác định dương cho trước, luôn có nghiệm  $P$  duy nhất cũng đối xứng và xác định dương.

Nhưng vì giả thiết  $\underline{\theta} = \underline{d} - \tilde{\underline{d}} = 0$  là không thể, hay luôn tồn tại sai lệch bất định  $\underline{\theta} \neq 0$  nên thực tế khi được bù bằng  $\underline{u} = \underline{w} - G(\underline{x})\tilde{\underline{d}}$ , hệ phải có mô hình:

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B[\underline{w} + G(\underline{x})\underline{\theta}] \quad (3.118)$$

Từ đây ta đi đến ý tưởng là chuyển nhiệm vụ điều khiển sang hiệu chỉnh thành phần sai lệch bất định  $\underline{\theta}(t)$  để hệ (3.118) luôn bám được theo mô hình mẫu (3.116), theo nghĩa:

$$\underline{e} = \underline{x} - \underline{x}_m \rightarrow 0 \quad (3.119)$$

Thay (3.116) và (3.118) vào (3.119), được:

$$\frac{de}{dt} = A\underline{e} + B G(\underline{x})\underline{\theta} \quad (3.120)$$

Sử dụng hàm xác định dương:

$$V(\underline{e}, \underline{\theta}) = \underline{e}^T P \underline{e} + \underline{\theta}^T H \underline{\theta}$$

với  $H$  là ma trận đối xứng xác định dương chọn trước tùy ý và  $P$  là nghiệm đối xứng xác định dương của phương trình Lyapunov (3.117), sẽ có:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \left( \frac{d\underline{e}}{dt} \right)^T P \underline{e} + \underline{e}^T P \frac{d\underline{e}}{dt} + \left( \frac{d\underline{\theta}}{dt} \right)^T H \underline{\theta} + \underline{\theta}^T H \frac{d\underline{\theta}}{dt} \\ &= (A\underline{e} + BG\underline{\theta})^T P \underline{e} + \underline{e}^T P (A\underline{e} + BG\underline{\theta}) + 2\underline{\theta}^T H \frac{d\underline{\theta}}{dt} \\ &= \underline{e}^T (A^T P + PA) \underline{e} + 2(BG\underline{\theta})^T P \underline{e} + \underline{\theta}^T H \frac{d\underline{\theta}}{dt} = -\underline{e}^T Q \underline{e} + 2\underline{\theta}^T \left( G^T B^T + H \frac{d\underline{\theta}}{dt} \right) \end{aligned}$$

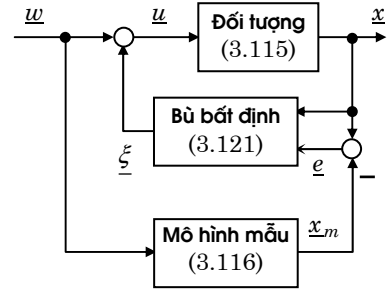
Bởi vậy, để  $\frac{dV}{dt}$  xác định âm theo biến  $\underline{e}$ , điều kiện để có  $\underline{e} \rightarrow \underline{0}$  ta chỉ cần hiệu chỉnh  $\underline{\theta}(t)$  theo:

$$\frac{d\underline{\theta}}{dt} = -H^{-1} G^T B^T P \underline{e}$$

tức là chỉ cần bù thêm ở đầu vào  $\underline{u}$  một thành phần tín hiệu  $\underline{\xi}(t)$  như sau (hình 3.21):

$$\begin{cases} \frac{d\underline{\theta}}{dt} = -H^{-1} G^T B^T P \underline{e} \\ \underline{\xi} = G(\underline{x}) \underline{\theta} \end{cases} \quad (3.121)$$

**Hình 3.21:** Điều khiển kháng nhiễu hệ tuyến tính bất định có ma trận hệ thống là ma trận bền.



**Chú ý:** Với bộ bù bất định (3.121) ta có:

$$\frac{dV}{dt} = -\underline{e}^T Q \underline{e}$$

nên tốc độ tiến về  $\underline{0}$  của sai lệch  $\underline{e}$ , được quyết định bởi các giá trị riêng của ma trận  $Q$ . Nếu các giá trị riêng của ma trận  $Q$  đối xứng, xác định dương (nên các giá trị riêng là những số thực dương) càng lớn, tốc độ tiến về  $\underline{0}$  của  $\underline{e}$  sẽ càng cao.

## Trường hợp tổng quát

Trong trường hợp đối tượng bất định ban đầu (3.115) với ma trận  $A$  chưa có được những giá trị riêng  $s_1, \dots, s_n$  mong muốn, thì tất nhiên ta có thể can thiệp sơ bộ trước bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  (hình 3.22) để có được:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (A - BR)\mathbf{x} + B[\mathbf{v} + G(\mathbf{x})\mathbf{d}] \quad (3.122)$$

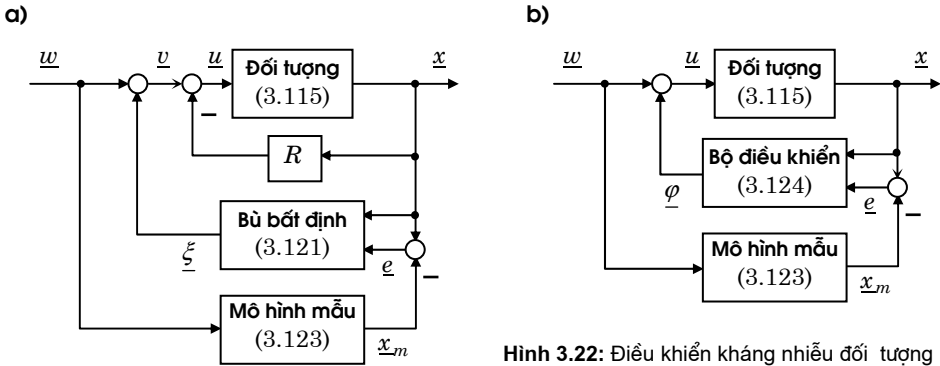
với ma trận  $\hat{A} = A - BR$  nhận những giá trị riêng cho trước đó làm điểm cực. Sau đó lại áp dụng bộ bù bất định (3.121) và mô hình mẫu tương ứng:

$$\frac{d\mathbf{x}_m}{dt} = (A - BR)\mathbf{x}_m + B\mathbf{v} = \hat{A}\mathbf{x}_m + B\mathbf{w} \quad (3.123)$$

Để xác định bộ điều khiển  $R$  từ hai ma trận  $A, B$  của đối tượng (3.115) và các điểm cực mong muốn  $s_1, \dots, s_n$  thỏa mãn:

$$\det(sI - \hat{A}) = \det(sI - A + BR) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

ta áp dụng các phương pháp *thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực* đã biết ở mục 3.4.1.



**Hình 3.22:** Điều khiển kháng nhiễu đối tượng bất định tuyến tính bất kỳ.

Hình 3.22a) mô tả cấu trúc điều khiển kháng nhiễu nêu trên. Nếu để ý thêm rằng:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{\xi} - R\mathbf{x} = \mathbf{w} + \underbrace{G(\mathbf{x})\mathbf{\theta} - R\mathbf{x}}_{\mathbf{\varphi}}$$

thì ta có thể ghép bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  và bộ bù bất định (3.121) chung với nhau thành một bộ điều khiển thống nhất như sau (hình 3.22b):

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{\theta}}{dt} = -H^{-1}G(\mathbf{x})^T B^T P \mathbf{e} \\ \mathbf{\varphi} = G(\mathbf{x})\mathbf{\theta} - R\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.124)$$

trong đó  $H$  là ma trận cũng đối xứng xác định dương được chọn tùy ý và  $P$  là nghiệm đối xứng xác định dương của phương trình Lyapunov:

$$\hat{A}^T P + P \hat{A} = -Q \quad \text{với} \quad \hat{A} = (A - BR) \quad (3.125)$$

có  $Q$  là ma trận đối xứng, xác định dương chọn trước.

**Chú ý:** Do  $\hat{A}$  là ma trận bền nên phương trình Lyapunov (3.125) với  $Q$  là ma trận đối xứng, xác định dương cho trước luôn có nghiệm  $P$  đối xứng xác định dương (duy nhất).

### 3.4.6 Điều khiển phản hồi tín hiệu ra

#### Đặt vấn đề

Trong phần này ta sẽ bàn tới bài toán thứ hai đã được đưa ra ở mục 3.4.1 (hình 3.10b). Đó là bài toán tìm bộ điều khiển  $R$  phản hồi đầu ra cho đối tượng:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

trong đó  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  sao cho hệ kín thu được với mô hình:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = (A - BRC)\underline{x} + B\underline{w} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

có được các điểm cực  $s_1, \dots, s_n$  là những giá trị cho trước.

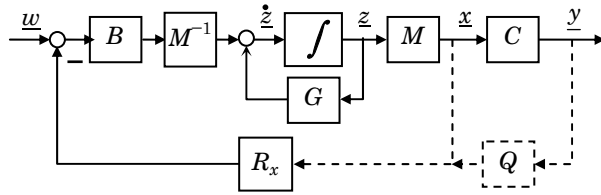
Để thiết kế bộ điều khiển modal phản hồi đầu ra  $R$ , ta cũng bắt đầu với thuật toán tìm bộ điều khiển modal phản hồi trạng thái  $R_x$ , rồi sau đó tìm cách chuyển điểm hồi tiếp từ  $\underline{x}$  về  $\underline{y}$  nhờ ma trận  $Q \in \mathbb{R}^{n \times r}$  (hình 3.23). Ma trận  $Q$  phải thỏa mãn:

$$QC = I \quad (3.126)$$

Nếu  $C$  không suy biến thì ta dễ dàng có được:

$$Q = C^{-1}$$

Khi  $C$  suy biến, mà điều này thường gặp phải (vì  $C$  là ma trận không vuông, có  $n$  hàng,  $r$  cột), ta phải tìm  $Q$  bằng cách giải hệ phương trình (3.126) với  $n^2$  phương trình cho  $n \times r$  ẩn số là các phần tử của  $Q$ . Nếu  $r \geq n$  thì có thể (3.126) còn có nghiệm, song ngược lại khi  $r < n$  hệ phương trình (3.126) thường là vô nghiệm. Trường hợp vô nghiệm này lại hay gặp ở các bài toán điều khiển, vì nói chung số biến trạng thái của đối tượng bao giờ cũng nhiều hơn số các tín hiệu đầu ra của nó.



**Hình 3.23:** Phương pháp thiết kế modal phản hồi đầu ra.

Người ta đành phải chấp nhận một giải pháp dung hòa hơn là không tìm  $Q$  thỏa mãn (3.126) mà thay vào đó là:

$$CQC = C \quad (3.127)$$

Phương trình trên lúc nào cũng có nghiệm  $Q$ , thậm chí là vô số nghiệm. Một trong các nghiệm đó là:

$$Q = C^T(CC^T)^{-1} \quad (3.128)$$

Từ đây ta có thuật toán tìm  $R$  gồm các bước như sau:

- Sử dụng thuật toán modal phản hồi trạng thái đã cho trong mục 3.4.1 để tìm bộ điều khiển  $R_x$  (có thể là gồm nhiều bộ điều khiển lồng nhau).
- Tìm  $Q$  thỏa mãn (3.127). Có thể xác định  $Q$  theo (3.128).
- Tính  $R = R_x Q$

Song một điều cần chú ý là hạng của  $Q$  thỏa mãn (3.128) không lớn hơn hạng của  $C$ , tức là không thể lớn hơn  $r$ , nên hạng của bộ điều khiển  $R$  tính theo (3.129) cũng chỉ có thể nhiều nhất là  $r$ . Điều này nói rằng bộ điều khiển  $R$  không thể chuyển hết được  $n$  điểm cực cũ  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (là giá trị riêng của  $A$ ) tới  $n$  vị trí mới  $s_1, \dots, s_n$  (là giá trị riêng của  $A - BRC$ ) mà nhiều nhất chỉ có thể là  $r$  trong số chúng.

Thuật toán trên còn có một nhược điểm lớn hạn chế khả năng ứng dụng so với thuật toán tìm  $R_x$  phản hồi trạng thái là các điểm cực không được dịch chuyển cũng bị ảnh hưởng. Chính xác hơn là chúng cũng được dịch chuyển song không tới được vị trí đã chọn trước. Nguyên nhân nằm ở ma trận  $Q$  đã được tìm theo (3.128).

### Ví dụ 3.39: Minh họa phương pháp modal phản hồi đầu ra

Xét đối tượng có mô hình:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{u} \quad \text{và} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$$

Cùng với bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R_x$ :

$$R_x = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

hệ kín thu được có các điểm cực

$$s_1 = -2, \quad s_2 = -3 \quad \text{và} \quad s_3 = -4$$

Để chuyển bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R_x$  thành bộ điều khiển phản hồi đầu ra theo (3.129) ta phải tìm ma trận  $Q$  thỏa mãn (3.127). Tìm  $Q$  theo (3.128) ta được:

$$Q = C^T(CC^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

và bộ điều khiển  $R$  phản hồi đầu ra là:

$$R = R_x Q = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Với bộ điều khiển  $R$  phản hồi đầu ra đó, hệ kín có mô hình:

$$\frac{dx}{dt} = (A - BRC)\underline{x} + B\underline{w} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 1 \\ -10 & -5 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{w}$$

và các điểm cực là  $s_1 = -2, s_2 = -3, s_3 = -1$ . Như vậy điểm cực  $s_3$  đã bị dịch chuyển một cách không mong muốn từ vị trí cũ  $-4$  tới vị trí mới  $-1$ . □

Do không kiểm soát được các điểm cực không được dịch chuyển như vậy mà cũng không sử dụng được nhiều lần thuật toán tìm  $R$  phản hồi đầu ra nhằm tạo những bộ điều khiển cascade giống như ở phương pháp phản hồi trạng thái. Hơn nữa cũng vì không kiểm soát được các điểm cực còn lại nên rất có thể chúng lại bị di chuyển tới những vị trí bất lợi cho chất lượng hệ thống, chẳng hạn như sang phía phải trục ảo. Do đó thuật toán không có ý nghĩa ứng dụng.

Có lẽ khi đọc đến phần này, một số bạn đọc sẽ có câu hỏi là tại sao không xác định  $Q$  giống như  $T_r$  khi phải chuyển tín hiệu hồi tiếp về từ sau ra trước khối  $M^{-1}B$  ở thuật toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái. Tức là cũng chia  $CM$  thành:

$$CM = \begin{pmatrix} L_r \\ L_{n-m} \end{pmatrix}$$

với giả thiết  $C$  có hạng là  $r$  và tích  $CM$  có  $r$  vector hàng đầu tiên là độc lập tuyến tính. Sau đó xác định  $Q$  là:

$$Q = L_r^{-1}$$

Ta sẽ thấy cách suy nghĩ tự nhiên đó sẽ dẫn đến trường hợp là với bộ điều khiển  $R$  tìm được hệ kín có điểm cực là giá trị riêng của (xem lại lời chứng minh định lý 3.34):

$$M^{-1}(A-BRC)M = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_m & \times & \cdots & \times \\ \times & \cdots & \times & \lambda_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \cdots & \times & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

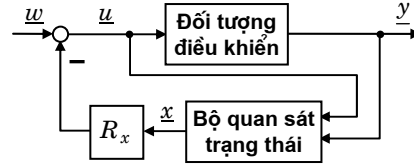
với  $\times$  là một số hạng nào đó. Nói cách khác, nó sẽ không có được các giá trị riêng  $s_1, \dots, s_n$  như bài toán đặt ra, thậm chí chỉ là  $s_1, \dots, s_m$  ở bài toán chuyển  $m$  điểm cực trong số  $n$  điểm cho trước cũng không được (vế phải không phải là ma trận tam giác).

Cuối cùng, ta không nên bi quan là sẽ không có bộ điều khiển gán điểm cực nào làm việc theo nguyên lý phản hồi tín hiệu ra. Ví dụ, đơn giản nhất là ta vẫn có thể sử dụng bộ điều khiển modal phản hồi trạng thái, cộng thêm các bộ quan sát xác định trạng thái  $\underline{x}$  từ những tín hiệu vào  $\underline{u}$  và ra  $\underline{y}$ , là ta đã có bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra  $\underline{y}$  làm việc gián tiếp theo nguyên lý gán điểm cực (hình 3.24).

Như vậy, bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi đầu ra được thay bằng bài toán thiết kế bộ quan sát trạng thái. Có hai bộ quan sát trạng thái điển hình là:

- Bộ quan sát Luenberger và
- Bộ quan sát Kalman (còn gọi là bộ lọc Kalman)

**Hình 3.24:** Điều khiển phản hồi đầu ra nhờ bộ quan sát trạng thái.



### Bộ quan sát Luenberger

Xét đối tượng hợp thức chặt với mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.130)$$

Ý tưởng chính của phương pháp thiết kế bộ quan sát trạng thái Luenberger là sử dụng khâu có mô hình:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = A\underline{z} + B\underline{u} + L(\underline{y} - C\underline{z} - D\underline{u}) \quad (3.131)$$

làm bộ quan sát để có được sự xấp xỉ  $\underline{z} \approx \underline{x}$  ít nhất là sau một khoảng thời gian  $T$  đủ ngắn, nói cách khác là có được (hình 3.25):



$$\|\underline{e}(t)\|_{\infty} = \|\underline{x}(t) - \underline{z}(t)\|_{\infty} \approx 0 \quad \text{ khi } t \geq T. \quad (3.132)$$

Nhiệm vụ thiết kế là xác định  $L$  trong (3.131) để có được yêu cầu (3.132). Trước tiên ta lập sai lệch từ hai mô hình (3.130), (3.131) và được:

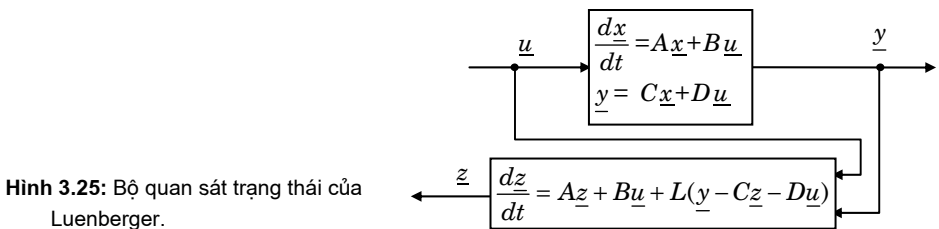
$$\begin{aligned} \underline{e}(t) &= \underline{x}(t) - \underline{z}(t) \\ \Rightarrow \frac{d\underline{e}}{dt} &= \frac{d(\underline{x} - \underline{z})}{dt} = A(\underline{x} - \underline{z}) - L(\underline{y} - C\underline{z} - D\underline{u}) \\ &= A(\underline{x} - \underline{z}) - L(C\underline{x} + D\underline{u} - C\underline{z} - D\underline{u}) \\ &= (A - LC)\underline{e} \end{aligned}$$

Như vậy, rõ ràng để  $\underline{e}(t) \rightarrow 0$  thì  $A - LC$  phải là ma trận bền. Sai lệch  $\underline{e}(t)$  sẽ càng tiến nhanh về 0, tức là thời gian  $T$  cần thiết cho việc quan sát tín hiệu vào ra sẽ càng nhỏ, nếu các giá trị riêng của  $A - LC$  nằm càng xa trục ảo (về phía  $-\infty$ ). Do đó ta có thể chủ động tìm  $L$  với một tốc độ tiến về 0 của  $\underline{e}(t)$  đã được chọn trước bằng cách xác định  $L$  sao cho  $A - LC$  có các giá trị riêng phù hợp với tốc độ đó.

Nếu để ý thêm rằng giá trị riêng của ma trận bất biến với phép chuyển vị, thì công việc xác định  $L$  sao cho  $A - LC$  có được những giá trị riêng chọn trước cũng đồng nghĩa với việc tìm  $L^T$  để:

$$(A - LC)^T = A^T - C^T L^T$$

nhận các giá trị cho trước  $s_1, \dots, s_n$  làm giá trị riêng và đó cũng là bài toán thiết kế bộ điều khiển cho trước điểm cực đã được trình bày tại mục 3.4.1. Nói cách khác, bài toán xác định bộ quan sát trạng thái Luenberger chính là bài toán thiết kế bộ điều khiển cho trước điểm cực ứng với hệ đối ngẫu của đối tượng đã cho. Điều kiện để áp dụng được phương pháp thiết kế cho trước điểm cực là đối tượng phải điều khiển được thì nay, thông qua hệ đối ngẫu được chuyển thành điều kiện đối tượng phải quan sát được.



Ta đi đến thuật toán tìm  $L$  của bộ quan sát trạng thái Luenberger cho đối tượng (3.130) quan sát được gồm hai bước như sau:

- 1) Chọn trước  $n$  giá trị  $s_1, \dots, s_n$  có phần thực âm ứng với thời gian  $T$  mong muốn để quan sát tín hiệu vào ra. Các giá trị  $s_1, \dots, s_n$  được chọn nằm càng xa trục ảo về

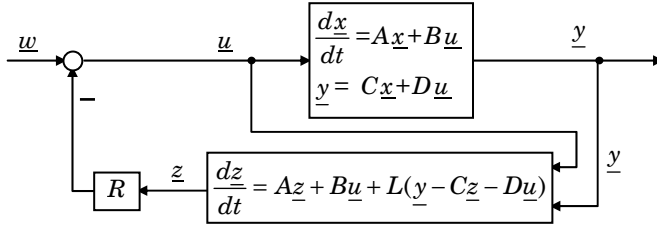
phái trái (có phần thực càng nhỏ) so với các giá trị riêng của  $A$ , thì thời gian  $T$  sẽ càng ngắn và do đó sai lệch  $\underline{e}(t)$  càng nhanh tiến về  $\underline{0}$ .

- 2) Sử dụng các phương pháp đã biết như Roppenecker, modal ... để tìm bộ điều khiển  $L^T$  phản hồi trạng thái gán điểm cực  $s_1, \dots, s_n$  cho đối tượng:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A^T \underline{x} + C^T \underline{u}$$

tức là tìm  $L$  thỏa mãn phương trình cân bằng:

$$\det(sI - A + LC) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n), \quad \forall s \quad (3.133)$$



**Hình 3.26:** Hệ thống điều khiển kín có sự tham gia của bộ quan sát trạng thái Luenberger.

Một điều cần chú ý là bộ quan sát trạng thái thường được sử dụng kèm với bộ điều khiển phản hồi trạng thái (hình 3.26). Nói cách khác trạng thái  $\underline{z}(t)$  tìm được sẽ là tín hiệu đầu vào của bộ điều khiển. Bởi vậy thời gian xác định trạng thái xấp xỉ  $\underline{z}(t)$  của đối tượng không thể chậm hơn thời gian thay đổi trạng thái  $\underline{x}(t)$  của bản thân đối tượng. Từ đây suy ra điều kiện chọn  $s_1, \dots, s_n$  cho bộ quan sát là chúng không được nằm bên phải các điểm cực của đối tượng (các giá trị riêng của ma trận  $A$ ) do bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  mang lại, tức là giá trị riêng của  $A - BR$ .

### Giảm bậc bộ quan sát Luenberger

Xét đối tượng là hợp thức chặt ( $D = \Theta$ ) tức là:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}, & \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{y} = C\underline{x}, & \underline{y} \in \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (3.134)$$

Không mất tính tổng quát nếu ta giả sử rằng ma trận  $C$  với  $\text{Rank}(C) = r$  có  $r$  cột đầu tiên của nó là độc lập tuyến tính. Khi đó từ (3.134) với:

$$\underline{y} = C\underline{x} = (C_1, C_2) \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = C_1 \underline{x}_1 + C_2 \underline{x}_2, \quad C_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^r$$

trong đó

$$\underline{x}_1 = (x_1, \dots, x_r)^T \quad \text{và} \quad \underline{x}_2 = (x_{r+1}, \dots, x_n)^T$$

ta đã xác định ngay được  $r$  giá trị trạng thái đầu tiên  $x_1, \dots, x_r$  trong số  $n$  biến trạng thái một cách rất đơn giản theo công thức:

$$\underline{x}_1 = C_1^{-1}(\underline{y} - C_2 \underline{x}_2) \quad (3.135)$$

với giả thiết là đã biết  $n-r$  trạng thái  $\underline{x}_2 = (x_{r+1}, \dots, x_n)^T$ . Bởi vậy nhiệm vụ của bộ quan sát trạng thái bây giờ chỉ còn là xác định  $\underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$  từ tín hiệu vào ra  $\underline{u}, \underline{y}$ .

Viết lại mô hình đối tượng (3.134) theo biến trạng thái mới:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{-1}(\underline{y} - C_2 \underline{x}_2) \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ \Theta & I \end{pmatrix}}_{\hat{C}} \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \hat{C}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix}$$

với phép biến đổi tương đương  $\hat{C}$ , ta có:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} &= \hat{C}^{-1} (A \underline{x} + B \underline{u}) = \hat{C}^{-1} A \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} + \hat{C}^{-1} B \underline{u} = \hat{C}^{-1} A \hat{C} \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} + \hat{C}^{-1} B \underline{u} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}}_{\hat{C}^{-1} A \hat{C}} \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}}_{\hat{C}^{-1} B} \underline{u} = \begin{pmatrix} A_1 \underline{y} + A_2 \underline{x}_2 + B_1 \underline{u} \\ A_4 \underline{x}_2 + A_3 \underline{y} + B_2 \underline{u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

trong đó  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$  là những ma trận con của  $\hat{C}^{-1} A \hat{C}$  và  $\hat{C}^{-1} B$  có số chiều tương ứng. Từ đây ta suy ra được:

$$\frac{d\underline{x}_2}{dt} = A_4 \underline{x}_2 + (B_2, A_3) \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \hat{y} = \frac{dy}{dt} - A_1 \underline{y} - B_1 \underline{u} = A_2 \underline{x}_2$$

Vậy, thay vì phải sử dụng bộ quan sát (3.131) với bậc  $n$ , ta chỉ cần sử dụng bộ quan sát bậc  $n-r$  cho hệ con trên với cấu trúc:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = A_4 \underline{z} + (B_2, A_3) \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} \end{pmatrix} + L(\hat{y} - A_2 \underline{z})$$

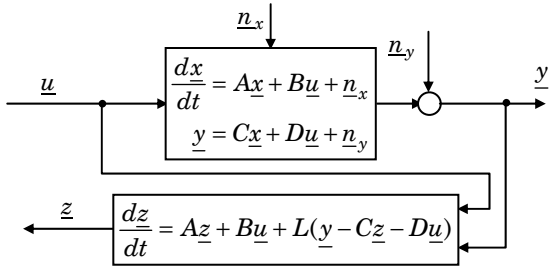
có ma trận  $L$  phải tìm để tất cả giá trị riêng của  $A_4 - LA_2$  nằm bên trái trục ảo, điều kiện cần và đủ để  $\underline{z} \rightarrow \underline{x}_2 = (x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)^T$ . Khi đã có  $\underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$  ta cũng sẽ có các biến trạng thái còn lại là  $\underline{x}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T \in \mathbb{R}^r$  theo (3.135).

### Bộ quan sát Kalman

Với bộ quan sát trạng thái Luenberger, phải sau khoảng thời gian  $T$  nhất định ta mới phát hiện được sự thay đổi trạng thái  $\underline{x}(t)$  trong đối tượng. Điều này đã hạn chế khả

năng ứng dụng của nó, tức là nó chỉ sử dụng được khi nhiều tác động vào hệ thống là nhiều tức thời và khoảng thời gian giữa hai lần nhiễu tác động không được nhỏ hơn  $T$ .

Đã có lúc người ta tìm cách nâng cao khả năng ứng dụng cho bộ quan sát Luenberger bằng cách giảm thời gian quan sát  $T$  thông qua việc chọn các giá trị riêng  $s_1, \dots, s_n$  càng xa trục ảo về phía trái. Song điều này lại gặp sự giới hạn bởi khả năng tích hợp bộ quan sát, vì không bao giờ ta có thể tích hợp được một thiết bị kỹ thuật có hằng số thời gian nhỏ tùy ý (hằng số thời gian càng nhỏ, giá trị riêng nằm càng xa trục ảo về phía trái). Những thiết bị có hằng số thời gian rất nhỏ đến nỗi có thể bỏ qua được (quán tính gần bằng 0) là không tồn tại trong thực tế.



**Hình 3.27:** Bộ quan sát trạng thái của Kalman.

Để loại bỏ nhược điểm trên của bộ quan sát trạng thái Luenberger một cách triệt để, Kalman đã đề nghị phải xét luôn sự tham gia các tín hiệu nhiễu  $\underline{n}_x(t)$  và  $\underline{n}_y(t)$  của đối tượng trong quá trình xác định ma trận  $\underline{L}$  của bộ quan sát. Nói cách khác mô hình mô tả đối tượng phải thể hiện được sự tham gia của tín hiệu nhiễu.

Xét đối tượng bị nhiễu  $\underline{n}_x(t)$ ,  $\underline{n}_y(t)$  tác động, mô tả bởi:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{n}_x \\ \underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u} + \underline{n}_y \end{cases} \quad (3.136)$$

Hai tín hiệu ngẫu nhiên  $\underline{n}_x(t)$ ,  $\underline{n}_y(t)$  được giả thiết là:

- Chúng là tín hiệu ngẫu nhiên egodic.
- Chúng có kỳ vọng (giá trị trung bình) bằng 0, tức là  $m_{\underline{n}_x} = m_{\underline{n}_y} = \underline{0}$ .
- Hàm hồ tương quan của chúng có dạng xung dirac:

$$r_{\underline{n}_x}(\tau) = M[\underline{n}_x(t)\underline{n}_x^T(t+\tau)] = N_x\delta(\tau)$$

$$r_{\underline{n}_y}(\tau) = M[\underline{n}_y(t)\underline{n}_y^T(t+\tau)] = N_y\delta(\tau)$$

trong đó  $M[\cdot]$  là ký hiệu cho phép lấy giá trị trung bình (kỳ vọng),  $N_x$  và  $N_y$  là hai ma trận hằng đối xứng, xác định dương.

- $\underline{n}_x(t)$ ,  $\underline{n}_y(t)$  không tương quan với nhau và  $\underline{n}_y$  không tương quan với  $\underline{x}$ .

Bộ quan sát trạng thái của Kalman, hay còn gọi là *bộ lọc Kalman-Bucy*, cũng có mô hình giống như bộ quan sát của Luenberger (3.131), tức là:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = A\underline{z} + B\underline{u} + L(\underline{y} - C\underline{z} - D\underline{u}) \quad (3.137)$$

nhưng khác với Luenberger, Kalman đã tìm  $L$  sao cho:

$$Q = M[\underline{e}^T \underline{e}] = \sum_{i=1}^n M[e_i^2] \rightarrow \min! \quad (3.138)$$

trong đó  $\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \underline{z}(t)$ . Có thể thấy ngay được rằng nếu có (3.138) thì cũng phải có  $\underline{e}(t) \rightarrow 0$ , vì để tích phân vô hạn:

$$Q = M[\underline{e}^T \underline{e}] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{e}^T \underline{e} dt$$

hội tụ thì hàm dưới dấu tích phân phải tiến về 0. Như vậy trong bộ quan sát Kalman sẽ chứa đựng luôn cả tính chất của bộ quan sát Luenberger.

Từ (3.136) và (3.137) ta có:

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = (A - LC)\underline{e} + \underline{n}_x - L\underline{n}_y$$

Suy ra:

$$\underline{e}(t) = e^{(A-LC)t} \underline{e}_0 - \int_0^t e^{(A-LC)(t-\tau)} [\underline{n}_x(\tau) - L\underline{n}_y(\tau)] d\tau \quad (3.139)$$

Thay (3.139) vào (3.138) có để ý đến các giả thiết về  $\underline{n}_x(t)$ ,  $\underline{n}_y(t)$ , sau đó tìm  $L$  để  $Q$  có giá trị nhỏ nhất bằng cách xác định nghiệm của  $\frac{\partial Q}{\partial L} = 0$ , với  $\frac{\partial Q}{\partial L}$  là ký hiệu chỉ ma trận Jacobi của  $Q$  ta sẽ nhận được:

$$L^T = N_y^{-1} C P \quad (3.140)$$

trong đó  $P$  là nghiệm của phương trình Riccati:

$$P C^T N_y^{-1} C P - P A^T - A P = N_x \quad (3.141)$$

Điều thú vị ở đây là các công thức (3.141) và (3.140) để xác định bộ quan sát trạng thái Kalman hoàn toàn giống như (3.97) và (3.98) ở bài toán thiết kế bộ điều khiển tối ưu phản hồi trạng thái (bài toán LQR đã nói ở mục 3.4.3), trong đó vai trò của đối tượng (3.89) nay được thay bằng hệ đối ngẫu với nó nhưng không có nhiễu:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A^T \underline{x} + C^T \underline{u} \quad (3.142)$$

và hàm mục tiêu (3.91) thì được thay bởi:

$$Q_K = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T N_x \underline{x} + \underline{u}^T N_y \underline{u}) dt \quad (3.143)$$

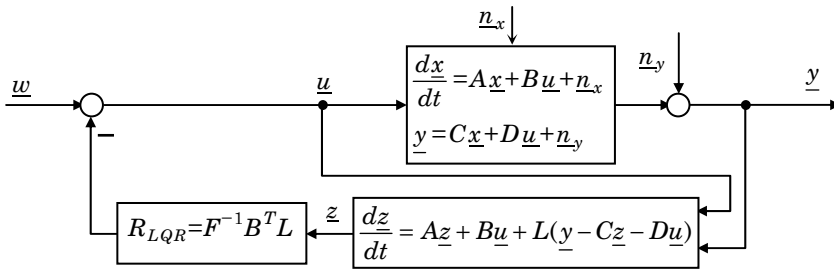
Từ đây ta đến được thuật toán tìm  $L$  cho bộ quan sát trạng thái Kalman theo mô hình (3.137) gồm các bước như sau:

- 1) Xác định hai ma trận  $N_x$  và  $N_y$  là ma trận hàm hỗ tương quan của  $\underline{n}_x(t)$ ,  $\underline{n}_y(t)$ .
- 2) Thiết kế bộ điều khiển tối ưu phản hồi trạng thái  $L^T$  phản hồi âm (bộ điều khiển LQR) cho đối tượng đối ngẫu (3.142) và phiếm hàm mục tiêu (3.143).
- 3) Thay  $L$  tìm được vào (3.137) để có bộ quan sát.

### Thiết kế bộ điều khiển tối ưu phản hồi đầu ra LQG

Bây giờ ta chuyển sang bài toán tổng quát hơn là thiết kế bộ điều khiển tối ưu phản hồi tín hiệu ra cho đối tượng có nhiễu  $\underline{n}_x(t)$ ,  $\underline{n}_y(t)$  tác động, được mô tả bởi (3.136), sao cho với nó có:

$$Q_R = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T E \underline{x} + \underline{u}^T F \underline{u}) dt \rightarrow \min \quad (3.144)$$



**Hình 3.28:** Hệ thống điều khiển phản hồi đầu ra LQG (Linear Quadratic Gaussian) được xây dựng theo nguyên lý tách.

Bộ điều khiển phản hồi đầu ra LQG (*linear quadratic Gaussian*), mô tả ở hình 3.28, là bộ điều khiển bao gồm một bộ điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu  $R_{LQR}$  được thiết kế theo thuật toán đã trình bày ở mục 3.4.3, tức là cho đối tượng *không* có sự tác động của nhiễu (bài toán LQR):

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.145)$$

và phiếm hàm mục tiêu (3.144), còn sự ảnh hưởng của nhiễu  $\underline{n}_x(t)$ ,  $\underline{n}_y(t)$  sẽ được giám sát (được lọc) bởi bộ quan sát trạng thái Kalman (3.137), trong đó  $L$  được xác định theo (3.140) và  $P$  là nghiệm của phương trình Riccati (3.141).

Như vậy, để thiết kế bộ điều khiển LQG ta phải sử dụng hai lần thuật toán thiết kế bộ điều khiển LQR:

- Lần thứ nhất là để xây dựng bộ điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu  $R_{LQR}$  cho đối tượng (3.145) thỏa mãn (3.144).
- Lần thứ hai là để xác định ma trận  $L$  của bộ quan sát Kalman theo (3.140) với  $P$  là nghiệm của phương trình Riccati (3.141), hay  $L^T$  chính là bộ điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu LQR cho đối tượng đối ngẫu (3.142) và phiếm hàm mục tiêu (3.143).

### Kết luận về chất lượng hệ kín: Nguyên lý tách

Bây giờ ta sẽ khảo sát sự ảnh hưởng của bộ quan sát trạng thái đối với chất lượng hệ kín phản hồi đầu ra thông qua vị trí các điểm cực của chúng.

Trước tiên ta xét hệ kín phản hồi đầu ra mô tả ở hình 3.26, bao gồm bộ điều khiển phản hồi trạng thái và bộ quan sát trạng thái Luenberger ở mạch hồi tiếp. Hệ kín này có tín hiệu vào  $\underline{w}$ , tín hiệu ra  $\underline{y}$ , mô tả bởi:

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{x}}{dt} &= A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} + B(\underline{w} - R\underline{z}) = \begin{pmatrix} A & -BR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} + B\underline{w} \\ \text{và} \quad \frac{d\underline{z}}{dt} &= A\underline{z} + B\underline{u} + L(\underline{y} - C\underline{z} - D\underline{u}) = A\underline{z} + B(\underline{w} - R\underline{z}) + LC(\underline{x} - \underline{z}) \\ &= LC\underline{x} + (A - LC - BR)\underline{z} + B\underline{w} = \begin{pmatrix} LC & A - LC - BR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} + B\underline{w}\end{aligned}$$

Ghép chung các phương trình đó lại với nhau sẽ được mô hình trạng thái hệ kín:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR \\ LC & A - LC - BR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \underline{w}$$

Bởi vậy điểm cực của hệ sẽ là nghiệm của phương trình đặc tính:

$$\det \begin{pmatrix} sI - A & BR \\ -LC & sI - A + LC + BR \end{pmatrix} = 0 \quad (3.146)$$

Do định thức của ma trận không thay đổi nếu ta thêm hoặc bớt nội dung của một hàng hay cột một giá trị gồm tổ hợp tuyến tính của những hàng hay cột khác, nên phương trình đặc tính (3.146) sẽ tương đương với:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} sI - A + BR & BR \\ sI - A + BR & sI - A + LC + BR \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} sI - A + BR & BR \\ \Theta & sI - A + LC \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \det(sI - A + BR) \det(sI - A + LC) &= 0\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có cho hệ LQG sử dụng bộ quan sát Kalman vì khi so sánh với bộ quan sát Luengerger, thì hai bộ quan sát này chỉ khác nhau ở phương thức xác định ma trận  $L$ :

- Luenberger xác định theo nguyên tắc cho trước điểm cực,
- Kalman xác định theo cực tiểu phiếm hàm mục tiêu,

Từ đây ta rút ra được kết luận:

**Định lý 3.39:** Bộ quan sát trạng thái của Luenberger và của Kalman không làm thay đổi vị trí các điểm cực cũ  $\det(sI-A+BR)=0$  của hệ thống. Nó chỉ đưa thêm vào hệ thống các điểm cực mới là nghiệm của  $\det(sI-A+LC)=0$ .

Định lý 3.39 này (còn gọi là định lý tách) cho thấy ở hệ tuyến tính, việc thiết kế bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra là tách được thành hai bài toán riêng biệt gồm bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái và bài toán thiết kế bộ quan sát trạng thái (nguyên lý thiết kế tách).

**Chú ý:** Nếu đối tượng có bậc  $n$  thì hệ kín phản hồi đầu ra ở hình 3.26 hoặc 3.28 sẽ có  $2n$  biến trạng thái  $\underline{x}$ ,  $\underline{z}$  và mô hình trạng thái đầy đủ của hệ kín là:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR \\ LC & A-LC-BR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} - DR\underline{z} + D\underline{u} = (C, -DR) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.147)$$

Mô hình (3.147) này có ma trận hệ thống kiểu  $2n \times 2n$ . Tuy nhiên, vì giữa hai vector trạng thái thành phần  $\underline{x}$ ,  $\underline{z}$  có quan hệ xấp xỉ  $\underline{x} \approx \underline{z}$  nên có nhiều khả năng hệ kín trở thành hệ không có bậc nhỏ nhất. Trong trường hợp như vậy hệ kín sẽ chứa các biến trạng thái thừa  $\underline{z}$ . Do đó nó sẽ không thỏa mãn các tiêu chuẩn điều khiển được, quan sát được đã được đề cập ở mục 3.3.3 và 3.3.4 và ma trận hàm truyền của hệ:

$$G(s) = (C, -DR) \begin{pmatrix} sI-A & BR \\ -LC & sI-A+LC+BR \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} + D$$

cũng rất có thể sẽ chỉ có bậc là  $n$ .

**Ví dụ 3.40:** Minh họa phương pháp thiết kế bộ điều khiển phản hồi đầu ra theo nguyên lý tách

Xét đối tượng điều khiển bậc 2 SISO mô tả bởi:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u = A\underline{x} + \underline{b}u \quad \text{và} \quad y = x_2 = (0, 1)\underline{x} = \underline{c}^T \underline{x} + du$$

trong đó

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \underline{c}^T = (0, 1), \quad d=0$$

Bộ điều khiển phản hồi đầu ra theo nguyên lý tách, bao gồm bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  và bộ quan sát trạng thái Luenberger (3.131) làm hệ kín ở hình 3.26 ổn định với tất cả các điểm cực đều bằng  $-2$ , có các ma trận:



$$R=(r_1, r_2) \text{ và } L=\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

được xác định nhờ phương pháp trực tiếp cân bằng các hệ số hai vế của phương trình (3.63) và (3.133) như sau:

$$R=(r_1, r_2) \Rightarrow \det(sI-A+\underline{b}R)=\det\begin{pmatrix} s-1+r_1 & -2+r_2 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}=(s+2)^2$$

$$\Leftrightarrow s^2+(r_1-2)s+(3-r_1-r_2)=s^2+4s+4 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1-2=4 \\ 3-r_1-r_2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow R=(r_1, r_2)=(6, -7)$$

và

$$L=\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(sI-A+L\underline{c}^T)=\det\begin{pmatrix} s-1 & -2+l_1 \\ 1 & s-1+l_2 \end{pmatrix}=(s+2)^2$$

$$\Leftrightarrow s^2+(l_2-2)s+(3-l_1-l_2)=s^2+4s+4 \Leftrightarrow \begin{cases} l_2-2=4 \\ 3-l_1-l_2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow L=\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Như vậy mô hình (3.147) của hệ kín với 4 biến trạng thái  $x_1, x_2, z_1, z_2$ , được viết lại cho hệ SISO, sẽ là:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & -\underline{b}R \\ L\underline{c}^T & A-L\underline{c}^T-\underline{b}R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \underline{b} \\ \underline{b} \end{pmatrix}w=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 16 \\ 0 & 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}}_{\hat{A}}\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\hat{b}}w$$

$$\text{và } y=\begin{pmatrix} \underline{c}^T & -dR \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix}+dw=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{\underline{c}}^T}\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix}$$

trong đó  $\underline{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ . Suy ra, hệ kín có hàm truyền là:

$$G(s)=\hat{\underline{c}}^T(sI-\hat{A})^{-1}\hat{\underline{b}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-1 & -2 & 6 & -7 \\ 1 & s-1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & s+5 & -16 \\ 0 & -6 & 1 & s+5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hay

$$G(s) = \frac{1}{\det(sI - \hat{A})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ -(s^2 + 10s + 41) & \times & 6s + 37 & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-s^2 - 4s - 4}{(s+2)^4} = \frac{-1}{(s+2)^2}$$

trong đó  $\times$  là những phần tử ta không cần phải quan tâm trong tính toán.

Từ công thức hàm truyền này ta nhận thấy mặc dù mô hình trạng thái là bậc 4 (có 4 biến trạng thái  $x_1, x_2, z_1, z_2$ ), song vì có chứa hai biến trạng thái thừa, mà cụ thể ở đây là  $\underline{z} = (z_1, z_2)^T$ , nên cuối cùng bậc của hàm truyền  $G(s)$  tương ứng giảm xuống chỉ còn bằng 2.

Cũng nhân dịp ở ví dụ này ta xác nhận lại lần nữa nhận định trước đây ở mục 3.3.3 và 3.3.4 (xem ví dụ 3.21) về sự tồn tại các hệ điều khiển được, nhưng lại không thỏa mãn tiêu chuẩn Kalman hay Hautus. Rõ ràng hệ kín phản hồi tín hiệu ra thu được ở ví dụ này là điều khiển được cũng như quan sát được, song mô hình trạng thái bậc 4 của nó lại không thỏa mãn tiêu chuẩn Kalman cho trường hợp điều khiển được:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \hat{\underline{b}} & \hat{\underline{A}}\hat{\underline{b}} & \hat{\underline{A}}^2\hat{\underline{b}} & \hat{\underline{A}}^3\hat{\underline{b}} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 16 & -44 \\ 0 & -1 & 4 & -12 \\ 1 & -5 & 16 & -44 \\ 0 & -1 & 4 & -12 \end{pmatrix} = 2 < 4$$

$$\text{và} \quad \text{Rank} \begin{pmatrix} \hat{\underline{c}}^T \\ \hat{\underline{c}}^T \hat{\underline{A}} \\ \hat{\underline{c}}^T \hat{\underline{A}}^2 \\ \hat{\underline{c}}^T \hat{\underline{A}}^3 \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 6 & -7 \\ -1 & -89 & -11 & 117 \end{pmatrix} = 4$$

□

Kết quả ví dụ trên dẫn ta tới kết luận tổng quát cho riêng hệ SISO phản hồi đầu ra theo nguyên lý tách như sau:

**Định lý 3.40:** Bộ điều khiển phản hồi đầu ra theo nguyên lý tách cho đối tượng điều khiển SISO bậc  $n$  như mô tả ở hình 3.26:

$$\frac{dx}{dt} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u, \quad y = \underline{c}^T \underline{x} + du \quad \text{với} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

sẽ không làm thay đổi điểm không của đối tượng. Hệ kín có hàm truyền bậc  $n$  là:

$$G(s) = \frac{\det \begin{pmatrix} sI - \underline{A} & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{pmatrix}}{\det(sI - \underline{A} + \underline{b}\underline{R})}$$

*Chứng minh:*

Từ mô hình trạng thái hệ kín:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -\underline{b}R \\ L\underline{c}^T & A - L\underline{c}^T - \underline{b}R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b} \\ \underline{b} \end{pmatrix} w, \quad y = \begin{pmatrix} \underline{c}^T & -dR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{pmatrix} + dw$$

ta có hàm truyền:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \underline{c}^T & -dR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI - A & \underline{b}R \\ -L\underline{c}^T & sI - A + L\underline{c}^T + \underline{b}R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{b} \\ \underline{b} \end{pmatrix} + d = \frac{B(s)}{A(s)}$$

trong đó  $B(s)$  là đa thức tử số và  $A(s)$  là đa thức mẫu số của hàm truyền. Theo nội dung định lý 3.39 ta có ngay:

$$A(s) = \det(sI - A + \underline{b}R) \cdot \det(sI - A + L\underline{c}^T)$$

và với công thức (3.62) suy ra từ công thức của Schur để tính định thức của ma trận khối cũng như tính chất rằng định thức của ma trận không thay đổi nếu ta thay hàng/cột của nó bằng tổng tuyến tính giữa nó với hàng/cột khác, thì:

$$\begin{aligned} B(s) &= \det \begin{pmatrix} sI - A & \underline{b}R & -\underline{b} \\ -L\underline{c}^T & sI - A + L\underline{c}^T + \underline{b}R & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & -dR & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} sI - A + L\underline{c}^T & -sI + A - L\underline{c}^T & \underline{0} \\ -L\underline{c}^T & sI - A + L\underline{c}^T + \underline{b}R & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & -dR & d \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} sI - A + L\underline{c}^T & \Theta & \underline{0} \\ -L\underline{c}^T & sI - A + \underline{b}R & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & \underline{c}^T - dR & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} sI - A + L\underline{c}^T & \Theta & \underline{0} \\ -L\underline{c}^T & sI - A & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & \underline{c}^T & d \end{pmatrix} \\ &= \det(sI - A + L\underline{c}^T) \cdot \det \begin{pmatrix} sI - A & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vậy

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\det(sI - A + L\underline{c}^T) \cdot \det \begin{pmatrix} sI - A & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{pmatrix}}{\det(sI - A + \underline{b}R) \cdot \det(sI - A + L\underline{c}^T)} = \frac{\det \begin{pmatrix} sI - A & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{pmatrix}}{\det(sI - A + \underline{b}R)}$$

□

### Điều khiển kháng nhiễu bằng phản hồi đầu ra

Tuy rằng việc gán điểm cực bằng phản hồi đầu ra trực tiếp không khả thi trong nhiều trường hợp, nhưng thay vào đó ta lại có định lý tách (định lý 3.39) cho phép thực hiện được gián tiếp thông qua bộ quan sát trạng thái. Hơn thế nữa, với bộ quan sát trạng thái ta không những chỉ gán được điểm cực còn nâng cao được cả khả năng bền vững với nhiễu Gauss  $\underline{n}_x(t)$ ,  $\underline{n}_y(t)$ , tác động vào hệ thống như mô tả ở mô hình (3.136), nhờ bộ quan sát trạng thái Kalman. Song phương pháp điều khiển gián tiếp này bằng định lý tách lại có nhược điểm cơ bản là làm tăng gấp đôi bậc của hệ kín so với bậc của

đối tượng điều khiển, do đó cũng tạo ra thêm sự phức tạp cho động học của hệ thống. Bởi vậy, sẽ là không tốt, nếu ta cứ bảo thủ áp dụng nguyên lý tách cùng bộ quan sát trạng thái Kalman cho mọi bài toán điều khiển có sự tác động của nhiễu, kể cả nhiễu đó là đo được. Phương pháp điều khiển kháng nhiễu  $\underline{n}(t)$  đo được sau đây sẽ cung cấp cho ta thêm một khả năng thiết kế bộ điều khiển bền vững mà không làm tăng thêm bậc cho hệ thống.

Xét hệ bị nhiễu  $\underline{n}(t)$  tác động, mô tả bởi:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} + E\underline{n}(t) \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \quad (3.148)$$

và giả thiết rằng nhiễu  $\underline{n}(t)$  là đo được (hoặc nhận dạng được). Nhiễu  $\underline{n}(t)$  này tác động vào hệ thông qua ma trận  $E$ . Để kháng lại sự ảnh hưởng của nhiễu trong hệ, ta sử dụng bộ điều khiển phản hồi đầu ra (hình 3.29):

$$\underline{u} = \underline{w} - R\underline{y} - K\underline{n}$$

trong đó  $R$  và  $K$  là hai bộ điều khiển cần tìm.

Mô hình hệ kín là:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - BRC)\underline{x} + (E - BK)\underline{n} + B\underline{w}$$

Bởi vậy, để loại bỏ hoàn toàn được nhiễu  $\underline{n}(t)$  ra khỏi hệ kín, ta chỉ cần chọn  $K$  sao cho:

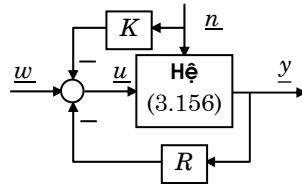
$$E - BK = \Theta \Leftrightarrow E = BK \Rightarrow K = (B^T B)^{-1} B^T E \quad (3.149)$$

Bộ điều khiển  $R$  còn lại sẽ được chọn để hệ có được chất lượng mong muốn, chẳng hạn như để dễ chuyển dịch các điểm cực không ổn định sang bên trái trục ảo.

Ngoài ra ta còn thấy được rằng công thức (3.149) thiết kế bộ điều khiển  $K$  là khả thi, vì với hệ (3.148) điều khiển được có bậc  $n$  tối thiểu với  $m \leq n$  tín hiệu vào ta luôn có  $\text{Rank}(B) = m$  và do đó ma trận  $B^T B$  kiểu  $m \times m$  sẽ có  $\text{Rank}(B^T B) = m$ , nên là ma trận không suy biến, do đó nghịch đảo được.

### 3.4.7 Loại bỏ sai lệch tĩnh bằng bộ tiền xử lý

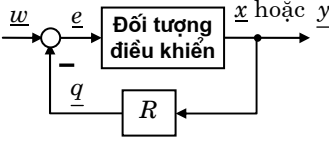
Ở các mục trước ta đã nhiều lần đề cập đến vấn đề sai lệch tĩnh trong hệ kín. Sai lệch tĩnh này vẫn có thể tồn tại ngay cả khi hệ ổn định. Điều này làm cho đáp ứng  $\underline{y}(t)$  chỉ bám được theo dạng của tín hiệu lệnh  $\underline{w}(t)$ , chứ không phải bám theo bản thân  $\underline{w}(t)$ , tức là ở chế độ xác lập sẽ tồn tại sai lệch tĩnh. Nhằm loại bỏ sai lệch tĩnh này người ta thường tiến hành một trong hai giải pháp:



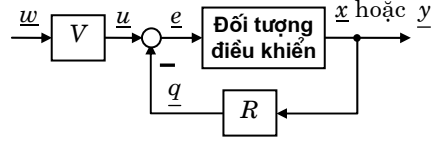
Hình 3.29: Điều khiển kháng nhiễu

- Tạo cho hệ hở có thành phần tích phân (định lý 2.28).
- Sử dụng thêm bộ tiền xử lý  $V$  (hình 3.30).

a)



b)



**Hình 3.30:** Loại bỏ sai lệch tĩnh bằng bộ tiền xử lý.

Trong khi giải pháp thứ nhất được áp dụng nhiều ở hệ SISO thì giải pháp thứ hai khá thích ứng cho hệ MIMO, đặc biệt khi mà bộ điều khiển  $R$  được thiết kế theo phương pháp gán điểm cực. Hơn nữa, việc đưa thêm vào hệ hở khâu tích phân để dẫn tới nguy cơ làm thay đổi vị trí các điểm cực đã được gán nên giải pháp thứ hai càng có tính ưu việt.

Giả sử rằng đối tượng được mô tả bởi (hình 3.30):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}$$

và đối tượng được điều khiển theo nguyên lý hồi tiếp bằng bộ điều khiển  $R$  (tĩnh). Tín hiệu phản hồi về có thể là trạng thái  $\mathbf{x}$  nhưng cũng có thể là đầu ra  $\mathbf{y}$ . Trong cả hai trường hợp, hệ kín chưa có bộ tiền xử lý  $V$  sẽ có mô hình:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \hat{A}\mathbf{x} + B\mathbf{w} \quad , \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}$$

trong đó

$$\hat{A} = \begin{cases} A - BR & \text{nếu tín hiệu phản hồi là } \mathbf{x} \\ A - BRC & \text{nếu tín hiệu phản hồi là } \mathbf{y} \end{cases}$$

Vậy thì ma trận hàm truyền của hệ kín không có bộ tiền xử lý (hình 3.30a) sẽ là:

$$\mathbf{Y}(s) = C(sI - \hat{A})^{-1}B\mathbf{W}(s) = G(s)\mathbf{W}(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = C(sI - \hat{A})^{-1}B$$

Nếu như bộ điều khiển  $R$  đã được thiết kế sao cho hệ kín ổn định (các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo) thì ma trận  $(sI - \hat{A})$  sẽ không suy biến trong toàn bộ miền hội tụ của tích phân Laplace (bên phải trục ảo), do đó mà tồn tại  $(sI - \hat{A})^{-1}$ .

Khi được nối thêm bộ tiền xử lý (hình 3.30b) quan hệ vào ra của hệ sẽ là:

$$\mathbf{Y}(s) = G(s)V\mathbf{W}(s)$$

Nhiệm vụ của bộ tiền xử lý là phải làm sao tạo ra được tín hiệu ra  $\underline{y}(t)$  ở chế độ xác lập giống như tín hiệu lệnh đầu vào  $\underline{w}(t)$ , tức là:

$$\begin{aligned} \underline{y}_{\infty} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{w}(t) = \underline{w}_{\infty} & \Leftrightarrow & \quad \underline{y}_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \underline{Y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \underline{G}(s) V \frac{\underline{w}_{\infty}}{s} \\ \Leftrightarrow \quad \underline{y}_{\infty} &= G(0) V \underline{w}_{\infty} & \Leftrightarrow & \quad G(0) V = I \quad (\text{vì } \underline{y}_{\infty} = \underline{w}_{\infty}) \end{aligned}$$

Khi hệ thống có số các tín hiệu đầu vào ra bằng nhau thì  $G(0)$  là ma trận vuông. Giả thiết thêm  $G(0)$  không suy biến. Vậy thì bộ điều khiển tiền xử lý  $V$  sẽ là:

$$V = G(0)^{-1} = \left[ C(-\hat{A})^{-1} B \right]^{-1} = \begin{cases} \left[ C(BR - A)^{-1} B \right]^{-1} & \text{nếu phản hồi trạng thái } \underline{x} \\ \left[ C(BRC - A)^{-1} B \right]^{-1} & \text{nếu phản hồi đầu ra } \underline{y} \end{cases}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có thể thu được bộ điều khiển tiền xử lý  $V(s)$  để diệt sai lệch tĩnh cho trường hợp bộ điều khiển phản hồi  $R$  không phải là bộ điều khiển tĩnh ( $R$  không phải là ma trận), mà là một bộ điều khiển động, chẳng hạn:

$$R: \begin{cases} \frac{d\underline{z}}{dt} = E\underline{z} + F\underline{y} \\ \underline{q} = G\underline{z} + H\underline{y} \end{cases}$$

#### Ví dụ 3.41: Loại bỏ sai lệch tĩnh

Trong ví dụ 3.35 ta đã thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái  $R$  cho đối tượng có mô hình:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ \underline{y} = (1, 1) \underline{x} \end{cases}$$

Bộ điều khiển  $R$  đó gồm hai bộ điều khiển  $R_1$  và  $R_2$  lồng nhau (hình 3.13) nên:

$$R = R_1 + R_2 = (2, -2) + (3, -12) = (5, -14)$$

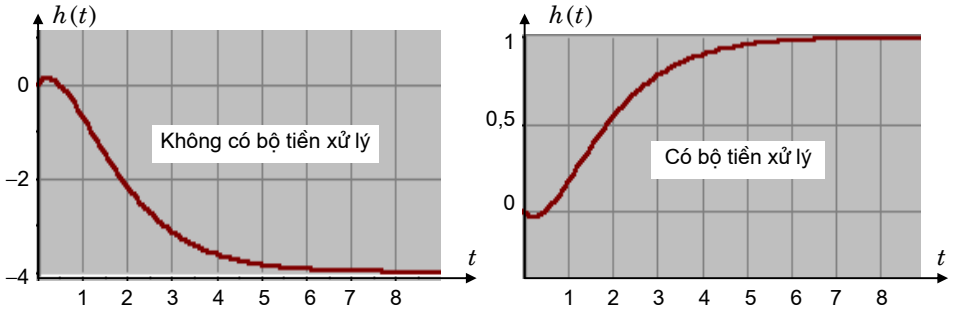
Cùng với  $R$  tìm được, hệ kín có mô hình:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -5 & 16 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ \underline{y} = (1, 1) \underline{x} \end{cases}$$

Hình 3.31 biểu diễn hàm đáp ứng  $y(t)$  của hệ kín khi được kích thích bởi  $w(t)=1(t)$  cho hai trường hợp không có và có bộ tiền xử lý:

$$V = \left[ C(BR - A)^{-1} B \right]^{-1} = \frac{-1}{4}$$





Hình 3.31: Minh họa ví dụ 3.41.

### 3.4.8 Hiện tượng tạo đỉnh (peak) và bài toán chọn điểm cực

Khi thiết kế bộ điều khiển (phản hồi trạng thái hay phản hồi đầu ra) bằng phương pháp gán điểm cực, bao giờ ta cũng phải xác định trước các điểm cực (giá trị riêng của ma trận hệ thống) cần có của hệ kín từ những yêu cầu chất lượng động học đặt ra của bài toán thiết kế. Chẳng hạn từ yêu cầu chất lượng hệ kín phải ổn định, quá trình tự do không có cực trị và tiến về gốc 0 nhanh hơn hàm  $e^{-2t}$  thì các điểm cực  $s_i$  (cho cả bộ quan sát trạng thái) được chọn phải là những số thực âm và nhỏ hơn  $-2$ . Rõ ràng có vô số các bộ điểm cực như vậy.

Vấn đề cần nghiên cứu thêm ở đây là trong vô số các bộ điểm cực cùng mang lại cho hệ một chất lượng giống nhau, bộ điểm cực nào sẽ còn mang đến cho hệ thống những chất lượng động học khác tốt hơn. Ví dụ, nếu ta chọn bộ điểm cực nằm càng xa trục ảo về phía trái, hệ sẽ có quá trình quá độ càng ngắn, song nguy cơ phải trả giá là hệ có thể sẽ có độ quá điều chỉnh càng cao, vì cặp chỉ tiêu chất lượng "thời gian quá độ—độ quá điều chỉnh" bao giờ cũng đối nghịch nhau.

Xét hệ tuyến tính SISO hợp thức chặt:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \text{trong đó } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.150)$$

Điều kiện cần để tín hiệu ra  $y(t)$  của hệ (3.150) có độ quá điều chỉnh  $y_{\max}$  là hệ phải có ít nhất một điểm không, tức là hệ phải có bậc tương đối  $r < n$  (xem mục 2.3.4). Giả thiết rằng hệ là ổn định, tức là tất cả các giá trị riêng  $s_i = \sigma_i + j\omega_i$  của ma trận  $\mathbf{A}$  trong (3.150) đều có phần thực âm  $\sigma_i < 0$ . Khi đó đầu ra  $y(t)$  ở chế độ tự do ( $u=0$ ) sẽ tắt dần theo dạng

tổ hợp tuyến tính của các hàm  $e^{\sigma_i t}$ . Bởi vậy để xác định một cách định tính độ quá điều chỉnh  $y_{\max}$  ta chỉ cần tính giá trị tích phân:

$$Q = \int_0^{\infty} y(t)^2 dt = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T (\underline{c} \underline{c}^T) \underline{x}) dt \quad (3.151)$$

vì khi đó tích phân (3.151) sẽ là một hàm biến thiên đơn điệu tăng theo  $|y_{\max}|$ .

**Định lý 3.41:** Nếu hệ (3.150) là ổn định thì tích phân (3.151) của quá trình tự do  $y(t)$  ứng với một trạng thái đầu  $\underline{x}_0$  tùy ý cho trước, sẽ được tính bởi:

$$Q = \int_0^{\infty} y(t)^2 dt = \underline{x}_0^T P \underline{x}_0 \quad (3.152)$$

trong đó  $P$  là nghiệm của phương trình Lyapunov (3.42), tức là ma trận  $P$  đối xứng, xác định bán dương, thỏa mãn:

$$PA + A^T P = -\underline{c} \underline{c}^T \quad (3.153)$$

*Chứng minh:*

Từ (3.151), (3.153) cũng như công thức tích phân toàn phần và  $\underline{x}(\infty) = \underline{0}$  vì hệ là ổn định, ta có ngay:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\infty} (\underline{x}^T (\underline{c} \underline{c}^T) \underline{x}) dt = - \int_0^{\infty} (\underline{x}^T (PA + A^T P) \underline{x}) dt = - \int_0^{\infty} \underline{x}^T P \left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right) dt - \int_0^{\infty} \left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^T P \underline{x} dt \\ &= \underline{x}^T P \underline{x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{d(\underline{x}^T P)}{dt} \underline{x} dt - \int_0^{\infty} \left( \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^T P \underline{x} dt = \underline{x}_0^T P \underline{x}_0 \quad \square \end{aligned}$$

**Ví dụ 3.42:** Điểm cực được gán nằm càng xa trục ảo về phía trái, độ quá điều chỉnh càng cao.

Cho đối tượng điều khiển SISO có mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A \underline{x} + \underline{b} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \text{ trong đó } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ y = \underline{c}^T \underline{x} = (0, 1) \underline{x} = x_2 \end{cases}$$

Gọi  $R = (r_1, r_2)$  là bộ điều khiển phản hồi (âm) trạng thái để gán hai điểm cực  $s_1, s_2$ . Khi đó, bằng phương pháp cân bằng hệ số hai đa thức (3.63) ta có:

$$\det(sI - A + \underline{b} R) = (s - s_1)(s - s_2) \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 + r_1 & s - 1 + r_2 \end{pmatrix} = (s - s_1)(s - s_2)$$

$$\Leftrightarrow s^2 + (r_2 - 1)s + (r_1 + 1) = s^2 + (-s_1 - s_2)s + s_1 s_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = s_1 s_2 - 1 \\ r_2 = 1 - s_1 - s_2 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \quad R=(s_1s_2-1, 1-s_1-s_2)$$

Với bộ điều khiển này, tức là với  $u=w-R\underline{x}$ , hệ kín (hình 3.10a) sẽ có mô hình:

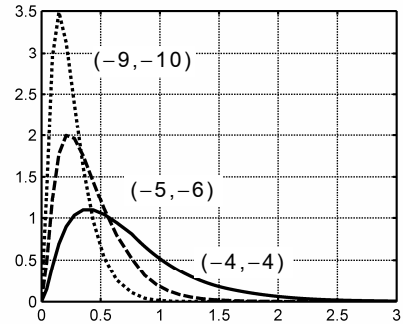
$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = (A-\underline{b}R)\underline{x} + \underline{b}w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -s_1s_2 & s_1+s_2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \\ y = x_2 \end{cases}$$

và do đó ứng với trạng thái đầu  $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$  thì khi  $w=0$ , ta sẽ có theo định lý 3.42, cụ thể là theo các công thức (3.152) và (3.153):

$$Q = \int_0^\infty y(t)^2 dt = \frac{s_1s_2x_{10}^2 + x_{20}^2}{-2(s_1+s_2)} \quad (3.154)$$

Công thức (3.154) chỉ rằng ứng với trạng thái đầu  $\underline{x}_0$  có  $x_{10} \neq 0$  thì khi các điểm cực  $s_1, s_2$  được gán nằm càng xa trục ảo về phía trái,  $Q$  sẽ có giá trị càng lớn và do đó độ quá điều chỉnh  $|y_{\max}|$  cũng càng cao. Thậm chí khi chọn  $s_1 \rightarrow \infty$  và  $s_2 \rightarrow \infty$  trong hệ sẽ xảy ra hiện tượng tạo đỉnh cực đại  $|y_{\max}| = \infty$  (peak) của quá trình tự do. Hình 3.31 biểu diễn đồ thị quá trình tự do  $y(t)$  của hệ kín ứng với trạng thái đầu  $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  và các điểm cực  $(s_1, s_2)$  được gán lần lượt là  $(-4, -4)$ ,  $(-5, -6)$ ,  $(-9, -10)$ . □

**Hình 3.31:** Minh họa ví dụ 3.42. Điểm cực được gán nằm càng xa trục ảo về phía trái, độ quá điều chỉnh càng cao.



Ví dụ 3.42 cho thấy sự trả giá khi chọn điểm cực xa trục ảo về phía trái để có thời gian quá độ ngắn. Song điều này không phải xảy ra ở mọi hệ cũng như với mọi điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0$ . Chẳng hạn từ điểm trạng thái đầu có  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} \neq 0$  thì ngược lại, điểm cực  $s_1, s_2$  càng nằm xa trục ảo về phía trái,  $Q$  có giá trị càng nhỏ (quá trình tự do  $y(t)$  không có độ quá điều chỉnh). Vậy thì giữa điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0$  và độ quá điều chỉnh  $y_{\max}$  có quan hệ như thế nào? Câu trả lời sẽ là hai định lý sau:

**Định lý 3.42:** Bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  không làm thay đổi được điểm không của đối tượng, do đó nó cũng sẽ *không thay đổi được tính pha không cực tiểu* thành *pha cực tiểu* cho hệ.

*Chứng minh:*

Từ định lý 3.2 ta đã được biết rằng đối tượng mô tả bởi hàm truyền:

$$G(s) = \frac{c_0 + c_1 s + \dots + c_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3.155)$$

luôn có mô hình trạng thái (3.150) chuẩn điều khiển với:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

và

$$\underline{c}^T = (c_0, c_1, \dots, c_m, 0, \dots, 0)$$

Khi đó, cùng với bộ điều khiển phản hồi (âm) trạng thái  $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ , tức là với  $u = w - R\underline{x}$ , hệ kín sẽ có mô hình (cũng ở dạng chuẩn điều khiển):

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = (A - \underline{b}R)\underline{x} + \underline{b}w \\ y = \underline{c}^T \underline{x} \end{cases}$$

với

$$A - \underline{b}R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - r_1 & -a_1 - r_2 & -a_2 - r_3 & \dots & -a_{n-1} - r_n \end{pmatrix}$$

Bởi vậy nó sẽ có hàm truyền với cùng đa thức tử số như đối tượng (3.155):

$$\begin{aligned} G_{\text{kín}}(s) &= \frac{c_0 + c_1 s + \dots + c_m s^m}{(a_0 + r_1) + (a_1 + r_2)s + \dots + (a_{n-1} + r_n)s^{n-1} + s^n} \\ &= \frac{B(s)}{A_{\text{kín}}(s)} \end{aligned}$$

□

Từ định lý 3.43 ta còn suy ra được thêm:

$$\underline{c}^T(sI-A)_{adj}\underline{b} = \underline{c}^T(sI-A+\underline{b}R)_{adj}\underline{b}$$

luôn đúng với mọi  $R$ , trong đó  $adj$  là ký hiệu chỉ toán tử lấy ma trận bù.

**Định lý 3.43:** Xét đối tượng điều khiển (3.150). Gọi  $m$  là số các điểm không của đối tượng và  $R$  là bộ điều khiển phản hồi trạng thái gán các điểm cực  $s_i, i=1, \dots, n$  nằm bên trái trục ảo để hệ kín ổn định. Ký hiệu:

$$V = \text{span}(\underline{b}, A\underline{b}, \dots, A^{n-m-1}\underline{b}) \quad (3.156)$$

Khi đó, với tất cả các điểm cực được gán đồng thời là  $-\infty$  ( $s_i = -\infty, i=1, \dots, n$ ), thì giá trị tích phân  $Q$  tính theo (3.152) sẽ là:

$$Q = \begin{cases} 0 & \text{khi } \underline{x}_0 \in V \\ \infty & \text{khi } \underline{x}_0 \notin V \end{cases} \quad (3.157)$$

*Chứng minh:*

Giả sử đối tượng và hệ kín cùng có dạng chuẩn điều khiển. Khi đó sẽ có:

$$A - \underline{b}R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

và  $\underline{c}^T = (c_0, c_1, \dots, c_m, 0, \dots, 0)$

trong đó  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  là hệ số của đa thức:

$$\lambda(s) = (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n \quad (3.158)$$

và  $s_i, i=1, \dots, n$  là các điểm cực được gán cho hệ kín. Ngoài ra vì:

$$(\underline{b}, A\underline{b}, \dots, A^{n-1}\underline{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \times \\ 1 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

nên  $V = \text{span}(\underline{e}_{m+1}, \underline{e}_{m+2}, \dots, \underline{e}_n)$

với  $\underline{e}_i$  là ký hiệu chỉ vector đơn vị thứ  $i$  của không gian trạng thái.

Phương trình Lyapunov (3.153) cho hệ kín là:

$$P(A - \underline{b}R) + (A - \underline{b}R)^T P = -\underline{c}\underline{c}^T = \begin{pmatrix} C_m & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix} \quad (3.159)$$

trong đó

$$C_m = \begin{pmatrix} c_0^2 & c_0 c_1 & \cdots & c_0 c_m \\ c_1 c_0 & c_1^2 & \cdots & c_1 c_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m c_0 & c_m c_1 & \cdots & c_m^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

và  $\Theta \in \mathbb{R}^{n-m-1}$  là ma trận có các phần tử bằng 0. Kết hợp với (3.158), nghiệm  $P$  xác định dương của (3.159) có dạng:

$$P = \begin{pmatrix} P_m & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix}$$

với  $P_m = (p_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$  có phần tử  $p_{ij}$  chỉ sai khác một hằng số so với:

$$p_{ij} \sim \frac{-c_i c_j (s_1 s_2 \cdots s_n)}{(s_1 + s_2)(s_2 + s_3) \cdots (s_{n-1} + s_n)}$$

Bởi vậy, theo định lý 3.42, cụ thể là theo công thức (3.152) ta sẽ có:

$$Q = \underline{x}_0^T P \underline{x}_0 = \underline{x}_{0m}^T P_m \underline{x}_{0m}$$

trong đó  $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$  là ký hiệu chỉ trạng thái đầu và  $\underline{x}_{0m} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0m} \end{pmatrix}$  là vector gồm  $m+1$

phần tử đầu tiên của nó. Rõ ràng khi  $\underline{x}_0 \notin V$  ta sẽ có  $\underline{x}_{0m} \neq \underline{0}$ . Do đó nếu  $s_i = -\infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ , thì  $Q \rightarrow \infty$ . Ngược lại, khi  $\underline{x}_0 \in V$  tức là khi  $\underline{x}_{0m} = \underline{0}$  thì sẽ có  $Q = 0$  và đó chính là điều phải chứng minh.  $\square$

## Câu hỏi ôn tập và bài tập

1. Xác định xem những hệ nào trong số các hệ sau là tuyến tính:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \cos(2t)x_2 + u \\ x_1 + t^3 x_2 \end{pmatrix} \\ y = \sin(t^2)x_1 + x_2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4t^2 x_2 + u_1 \sin t \\ t^3 x_2 + x_1 \\ x_2 + x_3 + u_2 \end{pmatrix} \\ y = 2x_1 + \cos(t)x_3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + u \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

2. Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Hãy xác định  $\text{Im}(A)$ ,  $\text{Ker}(A)$  và kiểm tra tính trực giao của chúng

3. Xác định ma trận hàm mũ  $e^{At}$  với:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} & \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} & \text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ \text{d) } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} & \text{e) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{f) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Cho hệ SISO có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u, \quad y = 5x_2,$$

trong đó  $A$  là ma trận cho trong bài tập số 3 ở các câu c), d), e) và f). Hãy xác định:

- Bậc tương đối của hệ thống.
  - Đáp ứng của hệ khi được kích thích bởi  $1(t)$  từ trạng thái ban đầu  $\mathbf{x}_0$ .
  - Hàm truyền  $G(s)$  của hệ.
  - Các mô hình dạng chuẩn điều khiển và chuẩn quan sát tương đương của hệ.
5. Cho hệ SISO mô tả bởi

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

Chứng minh rằng nếu ma trận  $M = (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b})$  không suy biến thì phép đổi biến  $\mathbf{z} = M^{-1}\mathbf{x}$  sẽ chuyển hệ đã cho về dạng:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$

trong đó  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  là các hệ số của đa thức đặc tính ma trận  $A$ , tức là:

$$\det(sI - A) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

6. Hãy xác định quá trình cưỡng bức và quá trình tự do của những hệ thống được mô tả bởi các mô hình trạng thái sau khi nó được kích thích bằng tín hiệu  $1(t)$  ở đầu vào. Vẽ quỹ đạo pha của quá trình tự do và biện luận tính ổn định của hệ.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u & \text{b) } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ \text{c) } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u & \text{d) } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \end{array}$$

$$e) \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$f) \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} u$$

7. Cho hệ SISO có hàm truyền

$$G(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

a) Chứng minh rằng quá trình tự do của hệ mô tả được bằng mô hình trạng thái:

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -b_n & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

trong đó

$$b_1 = D_1, b_2 = \frac{D_2}{D_1}, b_3 = \frac{D_3}{D_1 D_2}, \dots, b_k = \frac{D_{k-3} D_k}{D_{k-2} D_{k-1}}, \quad k = 4, 5, \dots, n$$

$$\text{và } D_i = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2i-1} & a_{2i-2} & \dots & a_i \end{pmatrix}$$

b) Chứng minh rằng ma trận đường chéo:

$$Q = \text{diag}(q_i) \quad \text{với} \quad q_i = \prod_{k=1}^{n+1-i} b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

xác định dương khi và chỉ khi tất cả các hệ số  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  là dương.

c) Chứng minh rằng hàm  $V = \underline{x}^T Q \underline{x}$  có  $\frac{dV}{dt} = -2b_1^2 x_n^2$ . Từ đó chỉ ra mối liên hệ giữa tiêu chuẩn Lyapunov và tiêu chuẩn Hurwitz.

8. Hãy xác định quá trình tự do và biện luận tính ổn định của những hệ thống được mô tả bởi các mô hình trạng thái sau:

$$a) \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$b) \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

9. Sử dụng định lý Geschgorin để chỉ rằng hệ phụ thuộc tham số:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & a & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ a+b & 1 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

chắc chắn ổn định nếu  $|a| < 3$  và  $|a+b| < 3$ . Hãy chọn một cặp tham số  $a, b$  cụ thể để chỉ rằng định lý Geschgorin chỉ là điều kiện đủ.

10. Cho hệ tuyến tính có vector  $\underline{x}(t)$  gồm  $n$  biến trạng thái, mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad \text{với} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

trong đó  $\underline{u}(t)$  là vector của  $m$  tín hiệu đầu vào.

- a) Giả sử rằng hệ là điều khiển được. Gọi  $\underline{x}_0$  và  $\underline{x}_1$  là hai điểm trạng thái bất kỳ trong không gian trạng thái, cũng như  $\underline{u}_0(t)$  là tín hiệu đưa hệ từ điểm trạng thái ban đầu  $\underline{x}_0$  về gốc tọa độ trong khoảng thời gian hữu hạn  $T_0$ . Hãy xác định một tín hiệu điều khiển  $\underline{u}_1(t)$  đưa hệ từ điểm trạng thái ban đầu  $\underline{x}_1$  về gốc tọa độ và khoảng thời gian hữu hạn cần thiết  $T_1$ .
- b) Gọi  $S$  là ma trận modal của  $A$ , tức là  $S = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$  với  $\underline{a}_k$  là vector riêng bên phải ứng với giá trị riêng  $s_k$  của  $A$ . Chứng minh rằng nếu  $S$  không suy biến ( $A$  là ma trận giống đường chéo) thì điều kiện cần và đủ để hệ đã cho điều khiển được là các vector hàng ứng với cùng một giá trị riêng của tích  $S^{-1}B$  phải độc lập tuyến tính với nhau.
11. Hãy kiểm tra tính điều khiển được và quan sát được của hệ mô tả bởi mô hình trạng thái như sau:

$$\text{a) } \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -20 & -25 & 0 \\ 16 & 20 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} u \quad \text{và} \quad y = (0 \quad 3 \quad -1) \underline{x}$$

$$\text{b) } \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{u} \quad \text{và} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

12. Hãy xác định điều kiện cho tham số  $a$  để hệ sau điều khiển được:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{u}$$

13. Cho hệ mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -k & -11 & -5 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{và} \quad y = (1, 10, 10, 0) \underline{x} + u$$

- a) Xác định điều kiện cho tham số  $k$  để hệ ổn định.
- b) Xác định điều kiện cho tham số  $k$  để hệ điều khiển được.
- c) Hệ có quan sát được hay không khi  $k = 40$ .

15. Xét hệ tuyến tính tham số hằng:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

Chứng minh rằng hệ sẽ điều khiển được khi và chỉ khi với mọi ma trận riêng bên trái  $\mathbf{b}_k$  của  $\mathbf{A}$  luôn có  $\mathbf{b}_k^T \mathbf{B} \neq \mathbf{0}^T$ .

16. Xét hệ tuyến tính tham số hằng:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ sẽ quan sát được khi và chỉ khi với mọi ma trận riêng bên phải  $\mathbf{a}_k$  của  $\mathbf{A}$  luôn có  $\mathbf{C}\mathbf{a}_k \neq \mathbf{0}$ .

17. Cho đối tượng có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = x_2, \quad \text{trong đó } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Hãy thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái sao cho với nó, hệ thống có hai điểm cực mới là  $s_1 = s_2 = -2$  và xác định tính pha cực tiểu của hệ kín thu được để từ đó chỉ rằng bộ điều khiển không làm thay đổi tính pha cực tiểu của đối tượng.
- Hãy xác định bộ quan sát trạng thái Luenberger để tính xấp xỉ  $\hat{\mathbf{z}} \approx \mathbf{x}$  trạng thái của đối tượng với hai điểm cực cho trước là  $\lambda_1 = -4$  và  $\lambda_2 = -5$ .
- Viết phương trình trạng thái và hàm truyền cho hệ kín.

18. Cho đối tượng có mô hình:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

và ba điểm cực mong muốn  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -3$ ,  $s_3 = -4$ .

- Thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái theo phương pháp Roppenecker.
- Thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái theo phương pháp modal.

19. Hãy xác định bộ điều khiển tách kênh cho đối tượng sau để mỗi kênh có hàm quá độ  $h_i(t)$ ,  $i=1,2$  đi từ 0 tới 1, không có sai lệch tĩnh và có dạng hình chữ S.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

20. Cho đối tượng với một tín hiệu vào  $u$  mô tả bởi:



$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Hãy xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái LQR để ổn định đối tượng theo quan điểm tối ưu năng lượng, tức là với bộ điều khiển đó, khi có một nhiễu tác động tức thời đánh bật hệ ra khỏi điểm cân bằng  $\underline{0}$  thì sau đó hệ có khả năng tự quay về điểm cân bằng  $\underline{0}$  với chi phí nhỏ nhất:

$$Q = \int_0^\infty \left( \underline{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \underline{x} + \frac{1}{4} u^2 \right) dt \rightarrow \min.$$

21. Cho bài toán tối ưu LQR:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \\ Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T \underline{E}\underline{x} + \underline{u}^T \underline{F}\underline{u}) dt \rightarrow \min \quad \text{với } \underline{E} = \underline{E}^T \geq 0 \quad \text{và } \underline{F} = \underline{F}^T > 0 \end{cases}$$

Gọi  $\underline{R}$  là bộ điều khiển phản hồi trạng thái (phản hồi âm) của bài toán trên, tức là bộ điều khiển được xác định theo:

$$\underline{R} = \underline{F}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}$$

trong đó  $\underline{P} = \underline{P}^T \geq 0$  là nghiệm của phương trình đại số Riccati:

$$\underline{P}\underline{B}\underline{F}^{-1}\underline{B}^T\underline{P} - \underline{A}^T\underline{P} - \underline{P}\underline{A} = \underline{E}$$

Chứng minh rằng nếu nghiệm  $\underline{P}$  của phương trình Riccati còn là xác định dương thì bộ điều khiển  $\underline{R}$  sẽ còn làm hệ kín ổn định.

22. Xét lại bài toán tối ưu LQR cho ở bài 21. Chứng minh rằng nếu  $(\underline{A}, \underline{E})$  là cặp ma trận quan sát được thì bộ điều khiển tối ưu  $\underline{R}$  phản hồi trạng thái sẽ còn làm cho hệ kín ổn định.

23. Hãy thiết kế bộ điều khiển LQG cho đối tượng với một tín hiệu vào  $u$  mô tả bởi:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \underline{n}_x \\ \underline{y} = (0, 1) \underline{x} + \underline{n}_y \end{cases}$$

với hàm mục tiêu

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \underline{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \underline{x} + u^2 \right) dt \rightarrow \min$$

và các tín hiệu nhiễu Gauss  $\underline{n}_x$ ,  $\underline{n}_y$  có ma trận hàm tương quan:

$$\underline{N}_x = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \underline{N}_y = 1$$

24. Xét bài toán điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T E \underline{x} + \underline{u}^T F \underline{u}) dt \rightarrow \min_{\underline{u}} \quad \text{với } E = E^T \geq 0 \quad \text{và } F = F^T > 0 \end{cases}$$

và giả sử bài toán có nghiệm  $\underline{u} = -R\underline{x}$ . Chứng minh rằng nghiệm  $R$  đó thỏa mãn:

$$\begin{cases} Q_{\min} = \frac{1}{2} \underline{x}_0^T P \underline{x}_0 = \frac{1}{2} \text{trace}(P \underline{x}_0 \underline{x}_0^T) \\ (A - BR)^T P + P(A - BR) = -(E + R^T FR) \end{cases}$$

## 4 ĐIỀU KHIỂN HỆ KHÔNG LIÊN TỤC

### 4.1 Tín hiệu và công cụ toán học

#### 4.1.1 Tín hiệu không liên tục đều

##### Mô tả quá trình trích mẫu

Từ chương 1 ta đã có định nghĩa về tín hiệu không liên tục, đó là tín hiệu mà hàm thời gian  $x(t)$  mô tả nó là hàm không liên tục, tức là hàm có miền xác định là tập các điểm rời nhau trong trường số thực (hoặc phức). Tín hiệu không liên tục được mô tả bằng dãy các giá trị  $x_k$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ . Nếu như dãy các giá trị đó xác định tại những điểm thời gian cách đều nhau, tức là miền xác định  $\mathcal{D}$  của  $x(t)$  là tập điểm cách đều nhau trên trường số thực (hoặc phức):

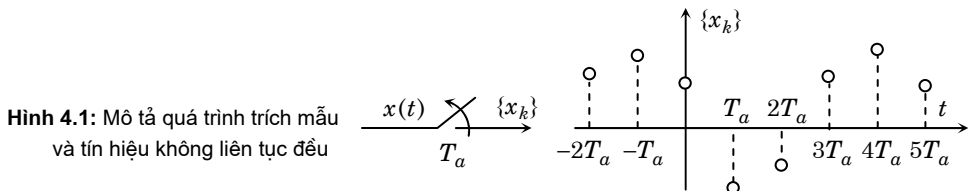
$$\mathcal{D} = \{kT_a \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ và } T_a \text{ là hằng số thực}\}$$

hay  $x_k = x(kT_a)$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , thì tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$  sẽ được gọi là đều (*periodic distance*). Ngược lại nó sẽ được gọi là tín hiệu *không đều* (*aquidistance*). *Tất cả các tín hiệu không liên tục được đề cập trong chương này là những tín hiệu đều.* Hình 4.1 minh họa quá trình trích mẫu, tức là quá trình tạo tín hiệu không liên tục và đều  $\{x_k\}$  từ tín hiệu liên tục  $x(t)$ , cũng như đồ thị biểu diễn  $x_k$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ . Sử dụng khái niệm hàm mở rộng delta  $\delta(t)$  và hàm trích mẫu  $s(t)$  với chu kỳ  $T_a$ :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) \quad (4.1)$$

thì quá trình trích mẫu  $x_k = x(kT_a)$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  từ tín hiệu liên tục  $x(t)$  sẽ là:

$$\{x_k\} = x(t)s(t) \quad (4.2)$$



## Dãy số, tính hội tụ và giá trị giới hạn

Ta có hai cách biểu diễn tín hiệu không liên tục, đó là trực tiếp trong miền thời gian dưới dạng dãy số  $x_k, k=\dots,-1,0,1\dots$ , tức là dưới dạng hàm thường  $\{x_k\}$ , và cách thứ hai là dưới dạng hàm mở rộng theo nghĩa (4.2). Nói như vậy để thấy rằng khi trực tiếp khảo sát, phân tích tín hiệu không liên tục dạng hàm thường  $\{x_k\}$ , ta phải sử dụng đến các công cụ toán học liên quan tới dãy số. Do đó, sẽ là cần thiết nếu ta ôn nhanh lại ở đây một số khái niệm cơ bản về dãy số, tính hội tụ và giới hạn của nó.

Một tập con *đếm được* gồm các phần tử  $x_k, k=\dots,-1,0,1\dots$  thuộc không gian vector  $X$ , sắp xếp theo một thứ tự nhất định, được gọi là *dãy số* và ký hiệu bằng  $\{x_k\}$ . Để biểu diễn dãy số, người ta có thể:

- Sử dụng ánh xạ  $f: k \mapsto x_k$  gán mỗi phần tử  $k$  của tập các số nguyên  $\mathbb{Z}$  với một phần tử  $x_k$  nhất định của tập  $X$ . Khi đó người ta còn viết thành  $x_k=f(k)$ . Chẳng hạn  $x_k=(-1)^{k+1}k^2$ .
- Sử dụng công thức truy hồi  $x_k=f(x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1)$  xác định phần tử thứ  $k$  từ các phần tử trước đó. Ví dụ  $x_k=x_{k-1}+x_{k-2}$  với  $x_1=0$  và  $x_2=1$  (gọi là *dãy Fibonacci*), hay  $x_k=x_{k-1}+a$  với  $a$  là hằng số (gọi là *dãy cộng*), hay  $x_k=ax_{k-1}$  cũng với  $a$  là hằng số (gọi là *dãy nhân*).

Một dãy số  $\{x_k\}$  được gọi là *đơn điệu tăng* (hoặc *đơn điệu giảm*) nếu luôn có  $x_k < x_{k+1}$  (hoặc  $x_k > x_{k+1}$ ) đúng với mọi  $k$ .

Nếu trong không gian vector  $X$  ta định nghĩa thêm số thực  $d(x,y)$  để xác định khoảng cách giữa hai phần tử  $x, y$ , gọi là *metric*, thỏa mãn:

- 1)  $d(x,y)=0$  khi và chỉ khi  $x=y$
- 2)  $d(x,y)=d(y,x)$
- 3)  $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$

thì không gian vector  $X$  được gọi là *không gian metric*. Việc đưa thêm độ đo metric  $d(x,y)$  vào không gian vector  $X$  đã làm cho  $X$  có thêm *tính giải tích*. Chẳng hạn:

- Phần tử  $y$  được gọi là thuộc lân cận  $\varepsilon$  của phần tử  $x$  nếu  $d(x,y) \leq \varepsilon$ .
- Tập  $\mathcal{O}_\varepsilon = \{ y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon \}$  được gọi là lân cận mở của  $x$ .
- Tập  $\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon = \{ y \in X \mid d(x,y) \leq \varepsilon \}$  được gọi là lân cận đóng của  $x$ .
- Phần tử  $x \in X$  được gọi là *điểm trong* của  $X$  nếu tồn tại một lân cận  $\mathcal{O}_\varepsilon$  của nó nằm hoàn toàn bên trong  $X$ . Ngược lại, nếu mọi lân cận  $\mathcal{O}_\varepsilon$  của phần tử  $x \in X$  luôn chứa ít nhất một phần tử  $y \notin X$  thì  $x$  được gọi là *điểm trên biên* của  $X$ .
- Một tập con  $Y \subseteq X$  được gọi là *tập mở* nếu mọi điểm  $y \in Y$  đều là điểm trong của  $Y$ .

Dãy  $\{x_k\}$  thuộc không gian metric  $X$  được gọi là *hội tụ* tới  $x \in X$ , ký hiệu là  $x_k \rightarrow x$ , hay  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ , nếu với mọi  $\varepsilon > 0$  luôn tồn tại ít nhất một chỉ số  $k_0 \in \mathbb{Z}$  để có  $d(x, x_k) < \varepsilon$  đúng với mọi  $k > k_0$ . Phần tử  $x \in X$  khi đó được gọi là *giá trị giới hạn* của dãy  $\{x_k\}$ . Một dãy  $\{x_k\}$  thuộc không gian metric  $X$  thỏa mãn  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$  trong đó  $n > m$ , được gọi là *dãy Cauchy*.

Các dãy trong không gian metric  $X$  có những tính chất sau:

- 1) Nếu dãy  $\{x_k\}$  hội tụ thì phần tử giới hạn  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  là duy nhất và  $d(x, x_k) \rightarrow 0$ .
- 2) Mọi dãy con của dãy hội tụ  $\{x_k\}$  với  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  cũng hội tụ tới  $x$ .
- 3) Các phần tử  $x_k$  của dãy hội tụ  $\{x_k\}$  là bị chặn.
- 4) Nếu dãy  $\{x_k\}$  hội tụ thì cũng có  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$  trong đó  $n > m$ , hay mọi dãy hội tụ cũng sẽ là dãy Cauchy. Nếu  $X$  là không gian của các số thực  $\mathbb{R}$  (hoặc phức  $\mathbb{C}$ ) thì ta còn có điều ngược lại, tức là mọi dãy Cauchy cũng sẽ hội tụ.
- 5) Gọi  $\{x_k\}$  và  $\{y_k\}$  là hai dãy hội tụ trong không gian metric  $X$  với  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  và  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ . Khi đó ta cũng có  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k \pm y_k) = x \pm y \in X$ .
- 6) Nếu  $\{x_k\}$ ,  $\{y_k\}$  là hai dãy hội tụ trong trường số thực  $\mathbb{R}$  (hoặc phức  $\mathbb{C}$ ) với  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  và  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ , thì cũng có  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k y_k) = xy$  và  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{y_k} = \frac{x}{y}$ , (khi  $y \neq 0$ ).
- 7) Mọi dãy đơn điệu và bị chặn  $\{x_k\}$  đều hội tụ.
- 8) Dãy nhân  $x_k = ax_{k-1}$  với  $x_1 = b$ , tức là  $x_k = ba^{k-1}$ , sẽ hội tụ về 0 nếu có  $|a| < 1$ .
- 9) Nếu có  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  và  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a$  thì dãy  $\{z_k\}$  với  $x_k \leq z_k \leq y_k$  cũng có  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$ .

**Ví dụ 4.1:** Một số dãy điển hình trong trường số thực (hoặc phức)

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a} = 1$ , đúng với mọi  $a > 0$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lg k}{k} = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = e^x$
- Nếu có  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  và  $a > 0$  thì cũng có  $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{x_k} = a^x$
- Nếu có  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$  và  $a > 0$  thì cũng có  $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{x_k} = 1$
- Nếu có  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  và  $x_k, a$  là những số thực dương, thì cũng có  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^a = x^a$  □

## 4.1.2 Công cụ toán học

### Phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

Phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT–*discrete Fourier transformation*) đã trình bày ở chương 2, thực chất là phép biến đổi Fourier (2.13) cho tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$ :

$$x_k = x(kT_a), \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Như vậy ta có thể thấy rằng tên gọi rời rạc ở đây không liên quan tới miền giá trị của kết quả phép biến đổi, ký hiệu bởi  $\hat{X}(j\omega)$ , thu được theo công thức (2.13) từ mô hình hàm mở rộng (4.2) của dãy  $\{x_k\}$ :

$$\begin{aligned} \hat{X}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) \right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{-j\omega t}) \delta(t - kT_a) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega kT_a} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nói cách khác tên gọi rời rạc ở đây không ám chỉ rằng miền giá trị  $\hat{X}(j\omega)$  phải là tập không liên thông. Từ ảnh Fourier  $\hat{X}(j\omega)$  của  $\{x_k\}$  trong (4.3), ta cũng lại có được ảnh ngược  $\{x_k\}$  nhờ công thức của phép biến đổi Fourier ngược, định nghĩa bởi (2.13) và tính chất của hàm xung dirac  $\delta(t)$  như sau:

$$\begin{aligned} \{x_k\} = x(t)s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega kT_a} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t-kT_a)\omega} d\omega \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{j(t-kT_a)\omega} d\omega \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \cos((t-kT_a)\omega) d\omega \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - kT_a) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hai công thức (4.3), (4.4) tạo thành cặp biến đổi xuôi và ngược của DFT cho tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$ . Tuy nhiên, nhiệm vụ trọng tâm của DFT không phải chỉ là phương thức lý thuyết xác định ảnh Fourier  $\hat{X}(j\omega)$  của  $\{x_k\}$  theo (4.3) mà là thực hiện công thức (4.3) đó như thế nào bằng các phương pháp số. Nói cách khác, vấn đề nghiên cứu chính của DFT là phải cài đặt được (4.3) thành một thuật toán chạy trên máy tính để xác định ảnh Fourier  $\hat{X}(j\omega)$  của dãy  $\{x_k\}$ , khi luôn tồn tại các khó khăn thực tế sau:

- Bằng thực nghiệm, không thể có được dãy vô hạn  $x_k, k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , mà thay vào đó chỉ có thể có được hữu hạn  $N$  phân tử  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  của dãy đó.
- Với các phương pháp số, không thể có được hàm  $\hat{X}(j\omega)$  mà chỉ có thể có được các giá trị  $\hat{X}(jn\omega_a), n = \dots, -1, 0, 1, \dots$  của nó, với  $\omega_a$  là chu kỳ trích mẫu trong miền tần số tùy chọn. Thậm chí ta cũng chỉ có thể có được hữu hạn các giá trị này.

Ký hiệu dãy hữu hạn gồm  $N$  giá trị có được từ thực nghiệm của tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$  là  $x_k, k=0, 1, \dots, N-1$  thì từ (4.3), ta sẽ có:

$$\hat{X}_a(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\omega k T_a} \quad \text{và nói chung thì } \hat{X}_a(j\omega) \neq \hat{X}(j\omega) \quad (4.5)$$

Sai lệch  $|\hat{X}_a(j\omega) - \hat{X}(j\omega)|$  được gọi là *sai số rò rỉ (leakage)*. Tiếp theo, để (4.5) thích hợp với phương pháp số thực hiện trên máy tính, ta cần phải trích mẫu hàm  $\hat{X}_a(j\omega)$  thành:

$$\{\hat{X}_a(jn\omega_a)\} = \hat{X}_a(j\omega)s(\omega) = \hat{X}_a(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_a) \quad (4.6)$$

Do hàm  $\hat{X}_a(j\omega)$  trong (4.5) là tuần hoàn với chu kỳ  $\frac{2\pi}{T_a}$ , nên sẽ đủ nếu ta cũng chỉ lấy  $N$  các giá trị trích mẫu  $\hat{X}(jn\omega_a), n=0, 1, \dots, N-1$  trong một chu kỳ. Suy ra:

$$N\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \Rightarrow \omega_a = \frac{2\pi}{NT_a}$$

và công thức (4.6) trở thành:

$$\hat{X}_a(jn\omega_a) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jn k \frac{2\pi}{N}}, \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (4.7)$$

Ảnh ngược  $\hat{x}(t)$  của  $\{\hat{X}_a(jn\omega_a)\}$  trong (4.6) là:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\hat{X}_a(jn\omega_a)\} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_a(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_a) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_a(j\omega) e^{j\omega t} \delta(\omega - n\omega_a) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \hat{X}_a(jn\omega_a) e^{jn\omega_a t} \end{aligned} \quad (4.8)$$

và khi so sánh với công thức phân tích chuỗi Fourier (2.12) của tín hiệu tuần hoàn, thì  $\hat{x}(t)$  phải là hàm tuần hoàn với tần số  $\omega_a$ , tức là với chu kỳ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_a} = NT_a$$

có hệ số chuỗi Fourier của nó là:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \hat{X}_a(jn\omega_a) \Rightarrow \hat{X}_a(jn\omega_a) = 2\pi \{ \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots \}$$

So sánh tiếp với kết quả đã có ở chương 2 nói rằng chuỗi Fourier chỉ là một trường hợp riêng của phép biến đổi Fourier thì dãy giá trị trích mẫu trong một chu kỳ  $0 \leq t < T = NT_a$  của hàm tuần hoàn  $\hat{x}(t)$  có hệ số chuỗi Fourier  $c_n, n=\dots, -1, 0, 1, \dots$  như trên chính là giá trị của tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$  cho ban đầu:

$$\hat{x}(kT_a) = x_k, \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

Tổng kết lại các kết quả trên, ta sẽ đến được những kết luận sau về DFT:

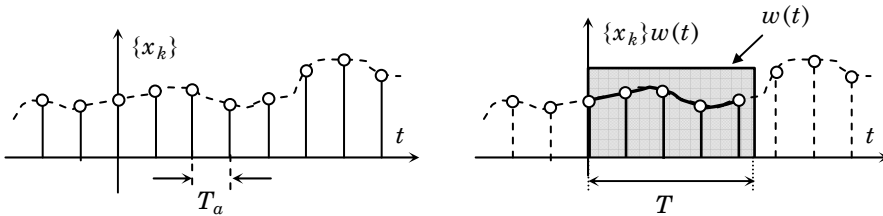
- 1) Ảnh Fourier  $\hat{X}(j\omega)$  của tín hiệu không liên tục đều  $\{x_k\}$  trong miền thời gian với chu kỳ trích mẫu  $T_a$  là một hàm tuần hoàn chu kỳ  $\frac{2\pi}{T_a}$  trong miền phức.
- 2) Kết quả phép tính số (4.7) của DFT thực hiện công thức tính ảnh Fourier (4.3) của tín hiệu không liên tục đều  $\{x_k\}$  sẽ là ảnh Fourier của tín hiệu tuần hoàn  $\hat{x}(t)$  với chu kỳ  $NT_a$ . Tín hiệu tuần hoàn  $\hat{x}(t)$  này có các giá trị trích mẫu trong một chu kỳ là  $\hat{x}(kT_a) = x_k, k=0, 1, \dots, N-1$ .
- 3) Nếu tín hiệu không liên tục, đều  $\{x_k\}$  cho ban đầu là tuần hoàn với chu kỳ  $T=NT_a$  thì giữa kết quả  $\hat{X}_a(jn\omega_a)$  thu được của DFT theo (4.7) và ảnh Fourier  $\hat{X}(j\omega)$  của dãy  $\{x_k\}$  tại các điểm tần số  $\omega=n\omega_a, n=0, 1, \dots, N-1$ , sẽ không có sai số rò rỉ.

Kết luận 3) cho thấy rằng khi tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$  không phải là tín hiệu tuần hoàn thì trong kết quả (4.5), cũng như (4.7) của DFT luôn tồn tại sai số rò rỉ. Ta cũng đã biết được nguyên nhân xuất hiện sai số rò rỉ này là do đã chuyển tổng vô hạn trong công thức (4.3) thành tổng hữu hạn (4.5) để có thể cài đặt được bằng các phương pháp số. Nói cách khác, với (4.5) ta đã không xác định ảnh Fourier của tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$ , mà thay vào đó lại là của  $\{x_k\}w(t)$ , với  $w(t)$  là hàm cửa sổ xung vuông (hình 4.2):

$$w(t) = 1(t) - 1(t - NT_a) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 0 \leq t < T = NT_a \\ 0 & \text{khi } t \notin [0, T) \end{cases}$$

Biết được nguyên nhân như vậy nên nói chung, để làm giảm sai số rò rỉ người ta đã thay hàm cửa sổ xung vuông trên bằng một hàm cửa sổ khác để sao cho có được:

$$\sup_{\omega} |\hat{X}_a(j\omega) - \hat{X}(j\omega)|_{w(t)} \rightarrow \min \quad (4.9)$$



**Hình 4.2:** Nguyên nhân của sai số rò rỉ (leakage)

Tuy rằng cho tới nay vẫn chưa có được lời giải thực sự của bài toán tối ưu (4.9) nêu trên được tìm thấy, thậm chí chỉ cho một lớp các tín hiệu  $\{x_k\}$  nhất định, song người ta cũng đã đưa ra được một vài hàm cửa sổ có thể tạm chấp nhận được như sau:



$$\begin{aligned}
- \quad \text{Bartlett } w_1(t) &= \begin{cases} 1 - 2\left|\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right| & \text{khi } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{khi } t \notin [0, T) \end{cases} \\
- \quad \text{Hanning } w_2(t) &= \begin{cases} 0,5 + 0,5 \cos \frac{\pi(2t-T)}{T} & \text{khi } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{khi } t \notin [0, T) \end{cases} \\
- \quad \text{Blackman } w_3(t) &= \begin{cases} 0,42 + 0,5 \cos \frac{\pi(2t-T)}{T} + 0,08 \cos \frac{2\pi(2t-T)}{T} & \text{khi } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{khi } t \notin [0, T) \end{cases}
\end{aligned}$$

Cuối cùng, để kết thúc mục này, ta cũng nên biết đến một hỗ trợ rất hữu hiệu để thực hiện nhanh công thức DFT (4.7) là kỹ thuật Fourier nhanh (FFT), được áp dụng khi  $N$  có dạng lũy thừa của 2, tức là  $N=2^p$ . Khi  $N=2m$  là số chẵn thì với:

$$P_0(q_0) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k q_0^k \quad \text{với } q_0 = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

công thức (4.7) trở thành:

$$\hat{X}_a(jn\omega_a) = P_0(q_0^n) = \begin{cases} P_{00}(q_1^n) + q_0^n P_{01}(q_1^n) & \text{nếu } 0 \leq n < m \\ P_{00}(q_1^{n-m}) - q_0^{n-m} P_{01}(q_1^{n-m}) & \text{nếu } m \leq n < N \end{cases} \quad (4.10)$$

trong đó

$$q_1 = q_0^2, \quad P_{00}(q_1) = \sum_{k=0}^{m-1} x_{2k} q_1^k, \quad P_{01}(q_1) = \sum_{k=0}^{m-1} x_{2k+1} q_1^k \quad \text{và } m = \frac{N}{2}$$

Quan hệ (4.10) có tên gọi là *cánh bướm (Butterfly)*. Nó cho phép ta thực hiện được công thức DFT (4.7) chỉ với một nửa số phép nhân so với khi tính trực tiếp. Nếu  $m$  lại là số chẵn thì bằng cách áp dụng tiếp quan hệ cánh bướm (4.10) cho hai đa thức con  $P_{00}(q_1^n)$  và  $P_{01}(q_1^n)$ , số phép tính nhân sẽ giảm tiếp còn  $\frac{1}{4}$ . Cứ như vậy cho trường hợp  $N=2^p$  thì cuối cùng số phép tính nhân phải thực hiện chỉ còn lại là  $2pN$  so với  $N^2$  ban đầu và do đó tốc độ tính toán để thực hiện công thức DFT (4.7) cũng được tăng lên nhiều lần.

### Phép biến đổi Z thuận

Như đã trình bày ở chương 2, mục 2.1.3 thì phép biến đổi Z chính là một trường hợp riêng của phép biến đổi Laplace, được áp dụng cho tín hiệu causal, không liên tục  $\{x_k\}$ , với  $x_k=0$  khi  $k<0$ , trong đó tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$  được nhìn nhận như hàm mở rộng theo nghĩa (4.2). Với sự dẫn dắt như vậy, công thức định nghĩa phép biến đổi Z cũng được suy ra từ (2.19) của phép biến đổi Laplace và có dạng như sau:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \quad \text{trong đó } z = e^{sT_a} \quad \text{và } T_a \text{ là chu kỳ trích mẫu} \quad (4.11)$$

Hàm  $X(z)$  trong (4.11) được gọi là ảnh Z của tín hiệu causal không liên tục  $\{x_k\}$  và  $\mathcal{Z}\{\cdot\}$  là ký hiệu của phép biến đổi Z. Vì bản chất của nó chính là phép biến đổi Laplace nên phép biến đổi Z cũng có ánh xạ ngược được suy ra một cách tương tự là:

$$\{x_k\} = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{k-1} dz, \quad k=0,1,2,\dots \quad (4.12)$$

với  $C$  là đường cong kín trong mặt phẳng phức bao tất cả các điểm cực của  $X(z)$  theo chiều dương.

Phép biến đổi Z:  $\{x_k\} \mapsto X(z)$  có những tính chất cơ bản sau:

1) Phép biến đổi Z có đầy đủ các tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace:

- a) Tuyến tính:  $\mathcal{Z}\{ax_k + by_k\} = a\mathcal{Z}\{x_k\} + b\mathcal{Z}\{y_k\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$
- b) Nội xạ:  $\{x_k\} \neq \{y_k\} \Rightarrow \mathcal{Z}\{x_k\} \neq \mathcal{Z}\{y_k\}$
- c) Ảnh của tích chập bằng tích của hai ảnh  $\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^k x_{k-i}y_i\right\} = \mathcal{Z}\{x_k\}\mathcal{Z}\{y_k\}$

2) Ký hiệu  $X(z)$  là ảnh Z của dãy  $\{x_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$ . Khi đó:

- a) (Phép dịch trái): Dãy  $\{y_k\}$  với  $y_k = x_{k-m}$  sẽ có ảnh là  $Y(z) = z^{-m}X(z)$ .
- b) (Phép dịch phải): Dãy  $\{y_k\}$  với  $y_k = x_{k+m}$  sẽ có  $Y(z) = z^m \left[ X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x_i z^{-i} \right]$
- c) (Tính đồng dạng): Dãy  $\{y_k\}$  với  $y_k = a^k x_k$  sẽ có  $Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$
- d) (Tính tỷ lệ): Dãy  $\{y_k\}$  với  $y_k = \frac{x_k}{kT_a}$  có  $Y(z) = \frac{1}{T_a} \int_z^\infty \frac{X(z')}{z'} dz'$
- e) (Hiệu lùi): Dãy  $\{y_k\}$  với  $y_k = x_k - x_{k-1}$  có  $Y(z) = \frac{z-1}{z} X(z)$
- f) (Hiệu tiến): Dãy  $\{y_k\}$  với  $y_k = x_{k+1} - x_k$  có  $Y(z) = (z-1)X(z) - zx_0$ .
- g) (Tổng): Dãy  $\{y_k\}$  với  $y_k = \sum_{i=0}^k x_i$  có  $Y(z) = \frac{z}{z-1} X(z)$
- h) (Tích phân): Dãy  $\{y_k\}$  với  $y_k = kT_a x_k$  có  $Y(z) = -zT_a \frac{dX(z)}{dz}$

3) Các định lý về giới hạn:

- a)  $x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
- b) Nếu dãy  $\{x_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$  hội tụ thì  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

4) Ký hiệu  $\{x_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$  là dãy giá trị trích mẫu của tín hiệu  $x(t)$  với chu kỳ trích mẫu  $T_a$ . Khi đó giữa ảnh Laplace  $X(s)$  của  $x(t)$  và  $X(z)$  của  $\{x_k\}$  có quan hệ:

$$X(z)\Big|_{z=e^{sT_a}} = \frac{1}{2}x(+0) + \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s - jk\frac{2\pi}{T_a}) \quad (4.13)$$

5) Ảnh  $X(z)$  của một số dãy  $\{x_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$  đặc biệt:

$$\text{a) Dãy } \{x_k\} \text{ với } x_k = a^k \text{ có } X(z) = \frac{z}{z-a} \quad (4.14)$$

$$\text{b) Dãy } \{x_k\} \text{ với } x_k = C_k^{n-1} a^{k-n+1} \text{ có } X(z) = \frac{z}{(z-a)^n} \quad (4.15)$$

#### Ví dụ 4.2: Minh họa phép biến đổi Z

Tín hiệu không liên tục  $\{x_k\} = \{1, 1, \dots\}$  có được từ việc trích mẫu tín hiệu bậc thang đơn vị  $1(t)$  sẽ có ảnh là:

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \Leftrightarrow zX(z) = z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$\Rightarrow (z-1)X(z) = z \Leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \quad \square$$

#### Ví dụ 4.3: Minh họa phép biến đổi Z

Cho tín hiệu  $\{x_k\}$  với  $x_k = e^{-kT_a}$  có ảnh  $Z X(z)$  được xác định theo ví dụ 4.2 và tính chất đồng dạng của phép biến đổi Z như sau:

$$x_k = (e^{-T_a})^k \text{ và } Z\{1\} = \frac{z}{z-1} \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-e^{-T_a}} \quad \square$$

#### Ví dụ 4.4: Minh họa phép biến đổi Z

Để xác định ảnh Z của  $\{x_k\}$  với  $x_k = \cos(\omega k T_a)$  ta đi từ kết quả của ví dụ 4.3 bằng cách thay  $e^{-T_a}$  bởi  $e^{j\omega T_a}$ :

$$Z\{e^{j\omega T_a}\} = \frac{z}{z-e^{j\omega T_a}} \text{ và } Z\{e^{-j\omega k T_a}\} = \frac{z}{z-e^{-j\omega T_a}}$$

rồi sử dụng tính chất tuyến tính của phép biến đổi Z, sẽ được:

$$\begin{aligned} Z\{\cos(\omega k T_a)\} &= Z\left\{\frac{e^{j\omega k T_a} + e^{-j\omega k T_a}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z-e^{j\omega T_a}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega T_a}} \right) \\ &= \frac{z}{2} \left( \frac{2z - 2\cos(\omega T_a)}{(z-e^{j\omega T_a})(z-e^{-j\omega T_a})} \right) = \frac{z^2 - z\cos(\omega T_a)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_a) + 1} \end{aligned} \quad \square$$

#### Ví dụ 4.5: Minh họa phép biến đổi Z

Tương tự như ví dụ 4.4 nhưng cho  $\{x_k\}$  với  $x_k = \sin(\omega k T_a)$  ta có:

$$Z\{\sin(\omega k T_a)\} = Z\left\{\frac{e^{j\omega k T_a} - e^{-j\omega k T_a}}{2j}\right\} = \frac{z\sin(\omega T_a)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_a) + 1} \quad \square$$

**Ví dụ 4.6:** Minh họa phép biến đổi Z

Ảnh Z của  $x_k = kT_a$  thu được từ việc trích mẫu tín hiệu tăng đều  $x(t) = t1(t)$  được xác định nhờ tính chất về ảnh của tích phân như sau:

$$kT_a = 1 \cdot kT_a \text{ và } \mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1} \Rightarrow \mathcal{Z}\{kT_a\} = -zT_a \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{zT_a}{(z-1)^2} \quad \square$$

**Ví dụ 4.7:** Minh họa phép biến đổi Z

Nếu xem tín hiệu không liên tục  $\{(k+1)T_a\}$  như tổng hữu hạn  $k+1 = \sum_{i=0}^k 1$  thì từ kết quả ví dụ 4.2 là  $\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1}$  và tính chất ảnh của tổng ta có:

$$\mathcal{Z}\{(k+1)T_a\} = T_a \mathcal{Z}\{k+1\} = T_a \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}\{1\} = T_a \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^2 T_a}{(z-1)^2} \quad \square$$

**Ví dụ 4.8:** Minh họa phép biến đổi Z

Gọi ảnh của  $\{x_k\}$  là  $X(z)$ . Khi đó  $\{y_k\}$  với  $y_k = x_k - x_{k-m}$  sẽ có ảnh là:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{x_k - x_{k-m}\} = \mathcal{Z}\{x_k\} - \mathcal{Z}\{x_{k-m}\} = X(z) - \mathcal{Z}\{x_{k-m}\}$$

Áp dụng công thức phép dịch trái được:

$$Y(z) = X(z) - z^{-m} X(z) = \frac{z^m - 1}{z^m} X(z) \quad \square$$

**Phép biến đổi Z ngược**

Theo tính chất nội xạ của phép biến đổi Z thì từ  $X(z)$  ta cũng sẽ xác định được duy nhất một tín hiệu  $\{x_k\}$  nhận  $X(z)$  làm ảnh Z. Có ba phương pháp cơ bản thường dùng để tìm ảnh ngược  $\{x_k\} = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$  là:

- Phương pháp residue.
- Phương pháp biến đổi ngược hàm hữu tỷ.
- Phương pháp phân tích  $X(z)$  thành chuỗi.

**1) Phương pháp residue:**

Phương pháp này được xây dựng trực tiếp từ công thức định nghĩa (4.12) về phép biến đổi Z ngược. Cũng giống như ở phương pháp residue khi tìm ảnh ngược của phép biến đổi Laplace đã trình bày tại mục 2.1.4 của chương 2, thì nếu hàm phức  $X(z)z^{k-1}$  chỉ có  $q$  điểm cực hữu hạn  $z_1, z_2, \dots, z_q$  rời nhau và ngoài những điểm cực đó, hàm  $X(z)z^{k-1}$  có tính giải tích, đường cong lấy tích phân  $C$  trong (4.12) sẽ thay được bằng  $q$  đường cong kín  $C_i, i=1, 2, \dots, q$  với mỗi đường cong này chỉ bao một điểm cực  $z_i$  theo chiều dương. Khi đó công thức (4.12) trở thành:

$$x_k = \sum_{i=1}^q \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_i} X(z) \cdot z^{k-1} dz \quad (4.16)$$

Ký hiệu

$$\text{Res}_{z_i} X(z) z^{k-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_i} X(z) \cdot z^{k-1} dz \quad (4.17)$$

là giá trị residue tại điểm cực  $z_i$ ,  $i=1, 2, \dots, q$  thì nó sẽ được tính bởi:

$$\text{Res}_{z_i} X(z) z^{k-1} = \frac{1}{(l_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{l_i-1} [X(z) z^{k-1} (z - z_i)^{l_i}]}{dz^{l_i-1}} \quad (4.18)$$

với  $l_i$  là bậc của điểm cực  $z_i$ . Thay (4.17), (4.18) vào (4.16) ta đi đến:

$$x_k = \sum_{i=1}^q \text{Res}_{z_i} X(z) z^{k-1} = \sum_{i=1}^q \frac{1}{(l_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{l_i-1} [X(z) z^{k-1} (z - z_i)^{l_i}]}{dz^{l_i-1}} \quad (4.19)$$

Tóm lại, phương pháp residue gồm các bước:

- Xác định tất cả các điểm cực  $z_i$  của  $X(z) z^{k-1}$  cũng như bậc  $l_i$  của chúng.
- Tìm giá trị residue của  $X(z) z^{k-1}$  tại các điểm cực đó theo (4.18).
- Tính  $x_k$  theo (4.19).

**Ví dụ 4.9:** Minh họa phép biến đổi Z ngược

Hãy tìm  $\{x_k\}$  có ảnh  $X(z) = \frac{z(1-a)}{z^2 - z(1+a) + a}$ . Do  $X(z)$  có hai điểm cực là  $z_1=1$ ,  $z_2=a$

có bậc bằng 1 (chúng là nghiệm đơn của phương trình  $z^2 - z(1+a) + a = 0$ ) nên:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_1} X(z) z^{k-1} &= \lim_{z \rightarrow 1} X(z) z^{k-1} (z - 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k (1-a)(z-1)}{z^2 - z(1+a) + a} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k (1-a)(z-1)}{(z-1)(z-a)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k (1-a)}{(z-a)} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{và } \text{Res}_{z_2} X(z) z^{k-1} &= \lim_{z \rightarrow a} X(z) z^{k-1} (z - a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^k (1-a)(z-a)}{z^2 - z(1+a) + a} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^k (1-a)(z-a)}{(z-1)(z-a)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^k (1-a)}{(z-1)} = -a^k \end{aligned}$$

Bởi vậy

$$x_k = 1 - a^k \quad \text{với } k \geq 0.$$



**Ví dụ 4.10:** Minh họa phép biến đổi Z ngược

Tìm  $\{x_k\}$  có ảnh

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 7z + 10} = \frac{z(z-1)}{(z-2)(z-5)}$$

Do  $X(z)$  có hai điểm cực là  $z_1=2$  và  $z_2=5$  có bậc bằng 1 nên với:

$$\text{Res } X(z)z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^k(z-1)}{z-5} = -\frac{2^k}{3} \quad \text{và} \quad \text{Res } X(z)z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow 5} \frac{z^k(z-1)}{z-2} = \frac{4}{3}5^k$$

ta có:

$$x_k = -\frac{2^k}{3} + \frac{4}{3}5^k \quad \text{với } k \geq 0.$$

□

## 2) Phương pháp biến đổi ngược hàm hữu tỷ:

Dựa vào tính tuyến tính của phép biến đổi  $Z$  ta có thể xác định  $\{x_k\}$  từ ảnh  $X(z)$  của nó bằng cách phân tích  $X(z)$  thành tổng tuyến tính của những phân cơ bản có dạng quen biết như ở hai công thức (4.14) và (4.15). Khi đó  $\{x_k\}$  sẽ là tổng tuyến tính của các tín hiệu không liên tục tương ứng.

Để minh họa cho phương pháp này, ta xét  $X(z)$  có dạng hàm hữu tỷ:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{B(z)}{zA(z)}$$

và giả sử hai đa thức  $B(z)$ ,  $zA(z)$  là nguyên tố cùng nhau (không có chung nghiệm) và đa thức  $zA(z)$  ở mẫu số có các điểm cực  $z_1, z_2, \dots, z_n$  khác nhau đôi một. Khi đó  $X(z)$  sẽ phân tích được thành tổng tuyến tính các thành phần tối giản:

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i z}{z - z_i} \quad \text{với hệ số Heaviside } c_i = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) \frac{X(z)}{z}$$

Suy ra, với (4.14) ta có:

$$x_k = \sum_{i=1}^n c_i z_i^k$$

Xét tiếp trường hợp đa thức  $zA(z)$  có nghiệm bội. Không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng nó có nghiệm  $z_1$  bội  $q$  và  $n-q$  nghiệm còn lại  $z_{q+1}, z_{q+2}, \dots, z_n$  khác nhau đôi một. Khi đó tổng tuyến tính các thành phần tối giản tương ứng sẽ là:

$$X(z) = \sum_{i=1}^q \frac{c_{1,i} z}{(z - z_1)^i} + \sum_{i=q+1}^n \frac{c_i z}{z - z_i}$$

Suy ra, với (4.14) và (4.15), tín hiệu  $\{x_k\}$  sẽ là:

$$x_k = \sum_{i=1}^q c_{1,i} C_k^{i-1} z_1^{k-i+1} + \sum_{i=q+1}^n c_i z_i^k \quad (4.20)$$

### Ví dụ 4.11: Minh họa phép biến đổi $Z$ ngược

Xét hàm  $X(z) = \frac{z(z^2 + z + 37)}{(z-2)^3(z-1)}$ . Phân tích  $\frac{X(z)}{z}$  thành tổng tuyến tính các thành phần tối giản ta được:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-3}{z-2} + \frac{4}{(z-2)^2} + \frac{7}{(z-2)^3} + \frac{3}{z-1} \Leftrightarrow X(z) = \frac{-3z}{z-2} + \frac{4z}{(z-2)^2} + \frac{7z}{(z-2)^3} + \frac{3z}{z-1}$$

ta sẽ có với công thức (4.20):

$$\begin{aligned} x_k &= -3C_k^0 2^k + 4C_k^1 2^{k-1} + 7C_k^2 2^{k-2} + 3 \cdot 1^k = -3 \cdot 2^k + 4k \cdot 2^{k-1} + 7 \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} + 3 \\ &= -3 \cdot 2^k + k \cdot 2^{k+1} + 7k(k-1)2^{k-3} \end{aligned}$$

□

### 3) Phương pháp phân tích chuỗi:

Cơ sở của phương pháp này là công thức định nghĩa (4.11) và tính nội xạ của phép biến đổi Z. Nếu  $X(z)$  đã cho phân tích được thành chuỗi theo  $z^{-1}$ :

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

chẳng hạn bằng cách chia trực tiếp hai đa thức  $B(z)$ ,  $A(z)$  cho nhau, thì từ tính nội xạ của  $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ , ta được  $x_k = c_k$ .

**Ví dụ 4.12:** Minh họa phép biến đổi Z ngược

Từ  $X(z) = \frac{z}{z^2 - 1,6z + 0,8}$  và sau khi thực hiện nhiều lần phép chia đa thức ta có:

$$X(z) = z^{-1} + 1,6z^{-2} + \dots$$

Suy ra

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1,6, \quad \dots$$

□

### **Chuỗi và tính hội tụ của chuỗi**

Do ảnh  $X(z)$  của tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$  định nghĩa bởi (4.11) có dạng chuỗi nên cũng sẽ là hữu ích nếu ta ôn nhanh lại một số kiến thức cơ bản của chuỗi và tính hội tụ của nó.

Xét dãy số  $\{x_k\}$  trong không gian metric  $X$ . Khi đó, *chuỗi* được hiểu là  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ . Theo định nghĩa này thì chuỗi cũng được xem như một dãy  $\{s_n\}$  với  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$  và nếu dãy  $\{s_n\}$  hội tụ thì chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  sẽ được gọi là *hội tụ*.

Chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  có các tính chất sau:

- 1) Cần để chuỗi hội tụ là  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ . Nếu có thêm  $\text{sgn}(x_k) = -\text{sgn}(x_{k-1})$ , gọi là *dãy đảo dấu*, thì nó còn là điều kiện đủ (chuỗi đảo dấu hội tụ khi và chỉ khi  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ ).

- 2) Nếu các phân tử của chuỗi thỏa mãn  $x_k = x_{k-1} + a$  với  $a$  là hằng số, thì được gọi là *chuỗi cộng*. Chuỗi cộng có  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k = \frac{n(x_1 + x_n)}{2} = nx_1 + \frac{a}{2}n(n-1)$ .
- 3) Nếu các phân tử của chuỗi thỏa mãn  $x_k = ax_{k-1} = a^{n-1}x_1$  với  $a$  là hằng số, thì được gọi là *chuỗi nhân*. Chuỗi nhân có  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k = x_1 \frac{1-a^n}{1-a}$  (khi  $a \neq 1$ ). Như vậy chuỗi nhân với  $a \neq 1$  hội tụ khi và chỉ khi  $|a| < 1$ .
- 4) Nếu có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < 1$  hoặc có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} < 1$  thì chuỗi sẽ hội tụ.
- 5) Nếu chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  hội tụ thì chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  cũng hội tụ (gọi là *hội tụ tuyệt đối*).

### 4.1.3 Phép biến đổi $\mathcal{Z}$

Ký hiệu  $X(s)$  là ảnh Laplace của một tín hiệu causal  $x(t)$  và  $X(z)$  là ảnh Z của tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$  thu được từ  $x(t)$  thông qua việc trích mẫu tín hiệu theo mô hình (4.2). Nếu như rằng có bài toán đặt ra là tìm  $X(z)$  từ  $X(s)$  thì ta có thể thực hiện tuần tự các bước sau:

- Xác định ngược  $x(t)$  từ  $X(s)$  nhờ phép biến đổi Laplace ngược.
- Trích mẫu  $x(t)$  với chu kỳ  $T_a$  thành  $\{x_k\}$  nhờ công thức trích mẫu (4.2).
- Tính  $X(z)$  từ  $\{x_k\}$ .

Nhưng do giữa tín hiệu xung  $\{x_k\}$  và tín hiệu liên tục  $x(t)$  có quan hệ (4.2) nên giữa hai ảnh  $X(z)$  và  $X(s)$  cũng tồn tại một mối quan hệ tương đương. Mô tả mối quan hệ đó là công thức (4.13), tức là:

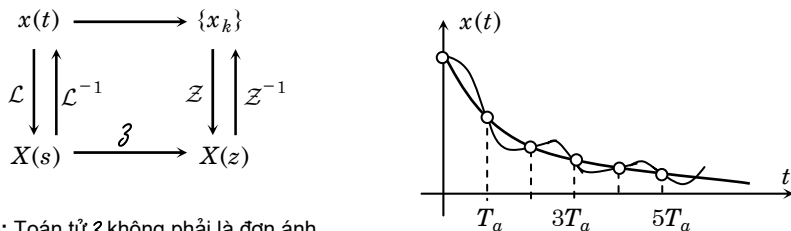
$$X(z) = \frac{1}{2}x(+0) + \frac{z}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(s)}{z - e^{sT_a}} ds \quad (4.21)$$

Từ (4.13) và (4.21) ta còn thấy  $X(z)$  là một hàm tuần hoàn với chu kỳ phức  $\frac{2\pi}{T_a}$ .

Cả hai công thức (4.13) và (4.21) đều cho phép xác định trực tiếp  $X(z)$  từ  $X(s)$  mà không phải tiến hành ba bước vừa nêu trên, trong đó (4.21) có nhiều ý nghĩa ứng dụng hơn. Cả hai công thức đều mô tả phép biến đổi  $\mathcal{Z}$ :  $X(s) \mapsto X(z) = \mathcal{Z}\{X(s)\}$ .

Phép biến đổi từ  $\mathcal{Z}$  theo (4.13) và (4.21) là không khả nghịch (không đơn ánh), tức là có thể có nhiều hàm phức  $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$ , ... có chung một ảnh  $X(z)$ . Điều đó là cũng dễ hiểu vì các tín hiệu liên tục  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ... thỏa mãn  $x_1(kT_a) = x_2(kT_a) = \dots$  sẽ có cùng một kết quả  $\{x_k\}$  sau khi trích mẫu (hình 4.3).





**Hình 4.3:** Toán tử  $\mathcal{Z}$  không phải là đơn ánh.

Mặc dù không phải là đơn ánh, song phép biến đổi  $\mathcal{Z}$  là tuyến tính nên để thực hiện công thức (4.13) hoặc (4.21) ta hoàn toàn sử dụng được phương pháp residue:

$$X(z) = \frac{1}{2}x(+0) + z \operatorname{Res}_{s_k} \frac{X(s)}{z - e^{sT_a}} \quad \text{với } |z| > e^{aT_a}$$

trong đó  $a$  là bán kính hội tụ tích phân Laplace. Ngoài ra, ta cũng có thể áp dụng tính chất tuyến tính đó để xác định  $X(z) = \mathcal{Z}\{X(s)\}$  bằng cách phân tích  $X(s)$  thành tổng tuyến tính của những thành phần  $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$ , ... đơn giản, quen biết:

$$X(s) = \sum_{i=1}^n d_i X_i(s) = d_1 X_1(s) + d_2 X_2(s) + \dots + d_n X_n(s)$$

rồi chuyển riêng từng thành phần đó thành  $X_1(z) = \mathcal{Z}\{X_1(s)\}$ ,  $X_2(z) = \mathcal{Z}\{X_2(s)\}$ , ... , chẳng hạn như thông qua việc tra bảng. Ảnh  $X(z)$  cần tìm sẽ là tổng tuyến tính của những thành phần này:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{X(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{i=1}^n d_i X_i(s)\right\} = \sum_{i=1}^n d_i \mathcal{Z}\{X_i(s)\} = \sum_{i=1}^n d_i X_i(z)$$

**Chú ý:** Để tiện cho việc tìm ngược  $X(z)$  từ  $X(s)$  rất nhiều tài liệu đã cung cấp các bảng tra cho những tín hiệu mẫu, đơn giản. Một bảng tương tự cũng có trong quyển sách này trong phần phụ lục.

Phép biến đổi  $\mathcal{Z}$  có một số tính chất cơ bản sau:

- 1) Nếu  $G(s)$  là hàm thực-hữu tỷ thì  $G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$  cũng là hàm thực-hữu tỷ.
- 2) Nếu  $G(s)$  có một điểm cực  $s_k$  thì tương ứng  $G(z)$  sẽ có một điểm cực  $z_k = e^{s_k T_a}$
- 3) Ứng với hai điểm cực  $s_k$ ,  $s_m$  của  $G(s)$  thỏa mãn  $s_k - s_m = \frac{2\pi nj}{T_a}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  chỉ có một điểm cực  $z_k = e^{s_k T_a}$  trong  $G(z)$ .
- 4) Nếu  $G(s)$  là hàm bền thì tất cả các điểm cực  $z_k$  của  $G(z)$  đều nằm trong đường tròn đơn vị, tức là  $|z_k| < 1$ .
- 5) Nếu  $G(s)$  là hàm hợp thức (bậc của tử số không lớn hơn bậc của mẫu số) thì  $G(z)$  cũng là hàm hợp thức.

- 6) Nói chung bậc của đa thức mẫu số trong  $G(z)$  bằng bậc của đa thức mẫu số trong  $G(s)$ . Nếu  $G(s)$  có ít nhất hai điểm cực  $s_k, s_m$  thỏa mãn  $s_k - s_m = \frac{2\pi nj}{T_a}$  thì bậc của đa thức mẫu số trong  $G(z)$  sẽ nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số trong  $G(s)$ .

## 4.2 Xây dựng mô hình toán học

### 4.2.1 Khái niệm hệ không liên tục

*Hệ không liên tục* là hệ có các tín hiệu vào ra là những tín hiệu không liên tục. Những tín hiệu này đều có miền xác định là tập điểm không liên thông với nhau, ví dụ như tín hiệu xung (không liên tục đều). Ngược lại, *hệ rời rạc* là hệ có các tín hiệu vào ra với miền giá trị là tập điểm không liên thông (tín hiệu rời rạc). Để phân biệt rõ sự khác nhau giữa hệ không liên tục và hệ rời rạc, ta sẽ lấy việc trích mẫu tín hiệu  $x(t)$  và đưa vào bộ điều khiển trong máy tính hay thiết bị số như vi xử lý, vi điều khiển làm ví dụ.

Trước tiên  $x(t)$  được "trích" mẫu thành tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$ , với  $x_k = x(kT_a)$ , để chuyển vào máy tính. Việc trích mẫu này được thực hiện bởi các bộ chuyển đổi số ADC (digital analog converter). Nhưng do máy tính không làm việc với số vô tỷ và với các số hữu tỷ nó cũng chỉ có thể xử lý được trong một dải giá trị nhất định, nên vô tình, giá trị  $x_k$  đã bị ADC chuyển thành số hữu tỷ  $\hat{x}_k \approx x_k$  gần nhất thuộc dải giá trị làm việc thích hợp để đưa vào máy tính. Do tập các số hữu tỷ là không liên thông nên bản chất việc chuyển đổi số thực  $x_k$  thành số hữu tỷ gần nhất  $\hat{x}_k$  chính là quá trình rời rạc hóa tín hiệu  $\{x_k\}$  thành  $\{\hat{x}_k\}$ . Tín hiệu  $\{\hat{x}_k\}$  cuối cùng này có dạng thích hợp với máy tính (thiết bị số) và là một tín hiệu số (vừa không liên tục, vừa rời rạc).

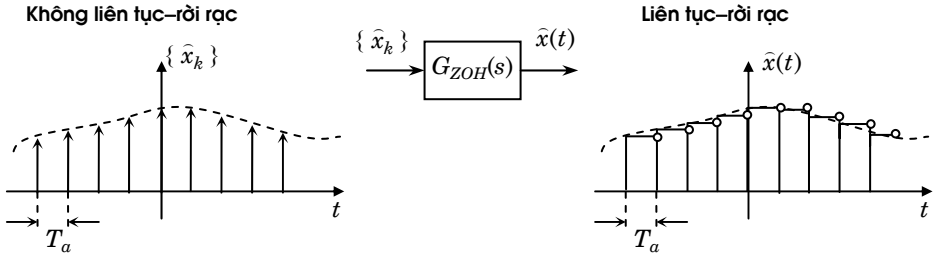
Mặc dù đầu vào của bộ điều khiển trong máy tính có vẻ như là tín hiệu không liên tục-rời rạc  $\{\hat{x}_k\}$ , song trong quá trình xử lý, giá trị  $\hat{x}_k$  này luôn được lưu giữ lại trong bộ đệm hoặc thanh ghi giữa hai lần trích mẫu, để bộ điều khiển có thể sử dụng nó nhiều lần trong khoảng thời gian đó, chứ không nhất thiết chỉ sử dụng đúng một lần duy nhất vào thời điểm  $t = kT_a$ , tức là ở cả những thời điểm khác trong khoảng thời gian giữa hai lần trích mẫu  $kT_a \leq t < (k+1)T_a$  tín hiệu đầu vào của bộ điều khiển vẫn có giá trị là  $\hat{x}_k$ . Điều này chỉ rằng bộ điều khiển đã không thuần túy làm việc với tín hiệu không liên tục-rời rạc  $\{\hat{x}_k\}$  mà là với tín hiệu liên tục-rời rạc  $\hat{x}(t)$  được tạo từ  $\{\hat{x}_k\}$  như sau:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_k [1(t - kT_a) - 1(t - (k+1)T_a)] \quad (4.22)$$

Có thể thấy việc liên tục hóa tín hiệu số  $\{\hat{x}_k\}$  thành tín hiệu liên tục-rời rạc  $\hat{x}(t)$  theo công thức (4.22) nhờ thanh ghi hay bộ đệm trong máy tính chính là quá trình nội suy B-Spline bậc 0. Do đó các thanh ghi hay bộ đệm lưu giữ giá trị  $\hat{x}_k$  này được gọi là

khâu *giữ tín hiệu bậc 0*. Khâu giữ tín hiệu bậc 0, được ký hiệu là ZOH (Zero Order Holding), có mô hình toán học là *hàm cửa sổ xung vuông* và có hàm truyền là (hình 4.4):

$$G_{ZOH}(s) = \mathcal{L}\{1(t) - 1(t - T_a)\} = \frac{1 - e^{-sT_a}}{s} \quad (4.23)$$

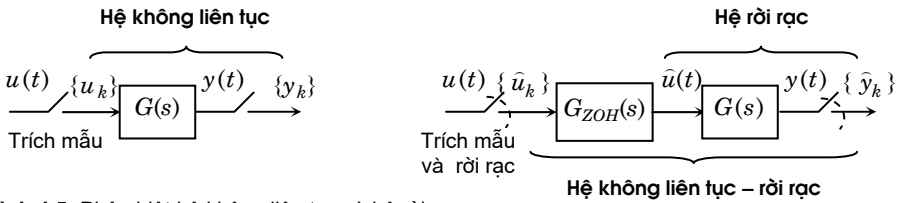


Hình 4.4: Tín hiệu không liên tục-rời rạc và tín hiệu liên tục-rời rạc

Hình 4.5 mô tả lại một cách trực quan những điều vừa được trình bày tại ví dụ trên. Ở hệ rời rạc hình bên phải, nếu ghép chung  $G_{ZOH}(s)$  với  $G(s)$  thành:

$$\hat{G}(s) = G_{ZOH}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-sT_a}}{s} G(s) \quad (4.24)$$

thì  $\hat{G}(s)$  có các tín hiệu vào/ra không liên tục nên nó là *hệ không liên tục*.



Hình 4.5: Phân biệt hệ không liên tục và hệ rời rạc

## 4.2.2 Phương trình sai phân, hàm trọng lượng và hàm truyền

### Phương trình sai phân

Tương tự như ở hệ liên tục tuyến tính với mô hình phương trình vi phân (2.28) biểu diễn quan hệ vào-ra, thì ở hệ không liên tục có tín hiệu vào  $\{u_k\}$ , tín hiệu ra  $\{y_k\}$ , ta cũng có *phương trình sai phân*:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m} \quad (4.25)$$

trong đó  $a_i$ ,  $b_j$  là các tham số của mô hình.

Mô hình sai phân (4.25) có thể được xác định trực tiếp từ hệ nếu như cấu trúc hóa lý bên trong hệ là đã rõ và các định luật cân bằng giữa chúng là cũng đã biết. Khi những giả thiết nêu trên không được thỏa mãn, người ta chuyển sang áp dụng các phương pháp nhận dạng để có được (4.25). Tuy nhiên thường sử dụng hơn cả là kỹ thuật số hóa mô hình vào-ra dạng phương trình vi phân (2.28) nhờ công thức tính xấp xỉ đạo hàm:

$$\begin{aligned} - \quad \text{Bên trái: } \frac{dx}{dt} &\approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T_a}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{\frac{x_k - x_{k-1}}{T_a} - \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{T_a}}{T_a} = \frac{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}{T_a^2}, \dots \\ - \quad \text{Bên phải: } \frac{dx}{dt} &\approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T_a}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{\frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{T_a} - \frac{x_{k+1} - x_k}{T_a}}{T_a} = \frac{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}{T_a^2}, \dots \end{aligned}$$

Với mô hình phương trình sai phân, ta dễ dàng xác định được đáp ứng  $\{y_k\}$  ở đầu ra khi đã có kích thích  $\{u_k\}$  ở đầu vào và trạng thái đầu  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  của hệ, trực tiếp trên miền thời gian mà không cần phải có bất cứ một công cụ toán học nào khác.

- 1) *Tính trực tiếp:* Từ (4.25) ta có ngay công thức lặp để xác định giá trị của tín hiệu  $\{y_k\}$  ở đầu ra như sau:

$$y_k = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m} - (a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n})$$

Tuy nhiên với công thức lặp này ta chỉ có thể có được giá trị  $y_k, k=n, n+1, \dots$  chứ khó có khả năng sử dụng chúng vào việc phân tích chất lượng hệ thống sau này.

- 2) *Tính gián tiếp:* Do phương trình sai phân (4.25) là tuyến tính nên nghiệm  $\{y_k\}$  của nó sẽ là tổng của hai thành phần gồm nghiệm phương trình thuần nhất, còn gọi là *đáp ứng tự do*, và nghiệm riêng, gọi là *đáp ứng cưỡng bức*.

a) *Nghiệm thuần nhất* được hiểu là nghiệm của:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = 0 \quad (4.26)$$

Giả sử nó có dạng  $y_k = c \cdot z^k$  với  $c$  là hằng số. Khi đó (4.26) trở thành:

$$c \cdot z^{k-n} (z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) = 0 \Rightarrow z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4.27)$$

nên nghiệm của (4.26) phải là:

$$y_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k + \dots + c_n z_n^k \quad (4.28)$$

với  $z_1, z_2, \dots, z_n$  là nghiệm của đa thức (4.27), gọi là *đa thức đặc tính của hệ*, khi các nghiệm này là khác nhau đôi một. Trong trường hợp đa thức đặc tính (4.27) có nghiệm bội, chẳng hạn có nghiệm  $z_1$  bội  $q$ , thì thành phần  $c_1 z_1^k$  tương ứng của (4.28) sẽ được thay bởi  $z_1^k (c_{1,1} + c_{1,2} k + \dots + c_{1,q} k^{q-1})$ , tức là:

$$y_k = z_1^k (c_{1,1} + c_{1,2} k + \dots + c_{1,q} k^{q-1}) + c_{q+1} z_{q+1}^k + \dots + c_n z_n^k \quad (4.29)$$

- b) *Nghiệm riêng*: Là một nghiệm của (4.25). Nghiệm riêng này thường được tìm bằng cách giả định trước cấu trúc của  $y_k$  theo  $u_k$  đã biết nhưng có các tham số bất định. Sau đó ta sẽ xác định các tham số đó bằng cách thay vào (4.25) rồi đồng nhất các hệ số của hai vế. Bảng sau giới thiệu một số cấu trúc của  $y_k$  với  $A$  và  $A_i$  là tham số chưa biết, được chọn theo  $u_k$ :

$u_k=d$	$y_k=A$	$u_k=d \cdot k$	$y_k=A_1 k+A_2$
$u_k=d^k$	$u_k=A_1 d^k+A_2$	$u_k=d^k \cos(k \varphi)$	$y_k=A_1 A_2^k \cos(k \varphi+A_3)$
$u_k=d^k \sin(k \varphi)$	$y_k=A_1 A_2^k \sin(k \varphi+A_3)$	$u_k=d^k \sum_{i=0}^p c_i k^i$	$y_k=d^k \sum_{i=0}^p A_i k^i$

- c) *Nghiệm tổng quát*: Là tổng của nghiệm thuần nhất và một riêng. Trong cả hai trường hợp của nghiệm thuần nhất (4.28) và (4.29) thì nghiệm tổng quát này luôn có  $n$  hằng số cần phải xác định, ví dụ  $c_1, c_2, \dots, c_n$  của (4.28), hay  $c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,q}, c_{q+1}, c_{q+2}, \dots, c_n$  của (4.29). Chúng sẽ được xác định từ  $n$  trạng thái đầu đã cho  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  nhờ  $n$  phương trình cân bằng của nghiệm tổng quát.

#### Ví dụ 4.13: Xác định đáp ứng từ phương trình sai phân

Cho hệ liên tục có mô hình vào–ra:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 2u$$

Tín hiệu vào, ra của hệ được trích mẫu với chu kỳ  $T_a=0,5s$  thành  $\{u_k\}$  và  $\{y_k\}$ . Khi đó hệ trở thành không liên tục. Tương ứng, nếu sử dụng công thức xấp xỉ đạo hàm bên trái ta sẽ có phương trình sai phân:

$$\frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T_a^2} + \frac{y_k - y_{k-1}}{T_a} + y_k = 2u_k \Leftrightarrow 7y_k - 10y_{k-1} + 4y_{k-2} = u_k$$

với đa thức đặc tính:

$$7z^2 - 10z + 4 = 0 \Rightarrow z_1 = 0,7 + 0,25j = 0,74e^{j0,1\pi} \text{ và } z_2 = \bar{z}_1 = 0,74e^{-j0,1\pi}$$

Vậy hệ có nghiệm thuần nhất là:

$$y_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

Giả sử hệ có tín hiệu đầu vào là  $u_k=1$ . Vậy thì với nghiệm riêng dạng  $y_k=A$  ta sẽ có:

$$7A - 10A + 4A = 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_k = 1$$

Suy ra nghiệm tổng quát của hệ là (đáp ứng của hệ):

$$y_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k + 1$$

và nếu hệ có trạng thái đầu  $y_0=y_1=0$  thì:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 0 \\ 0.7(c_1 + c_2) + 1 + j0,25(c_1 - c_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -0,5 + 0,6j = 0,8e^{j0,3\pi} \\ c_2 = -0,5 - 0,6j = 0,8e^{-j0,3\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k + 1 = 1,2 \cos((0,3 + 0,1k)\pi) + 1$$

□

## Dãy giá trị hàm trọng lượng (hàm trọng lượng)

Hàm trọng lượng  $\{g_k\}$  của hệ không liên tục với mô hình vào-ra (4.25) được hiểu là đáp ứng ở đầu ra khi đầu vào có dạng dãy xung dirac  $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\}$  và hệ đang ở trạng thái đầu bằng 0. Do mọi dãy giá trị tín hiệu vào  $\{u_k\}$ ,  $k=0, 1, \dots$  bất kỳ luôn biểu diễn được dưới dạng tổng tuyến tính của các dãy xung dirac  $\{\delta_k\}$ :

$$u_k = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta_{k-i}, \quad k=0, 1, \dots$$

và hệ là tuyến tính, nên tín hiệu ra  $\{y_k\}$  tương ứng cũng sẽ là tổng tuyến tính của các đáp ứng thành phần  $g_k$ ,  $k=0, 1, \dots$ , tức là

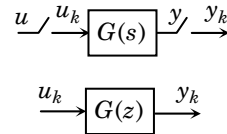
$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} u_i g_{k-i}, \quad k=0, 1, \dots \quad (4.30)$$

Như vậy, hàm trọng lượng  $\{g_k\}$  là một mô hình mô tả hệ, nó cho phép ta xác định được tín hiệu ra  $\{y_k\}$  từ tín hiệu vào  $\{u_k\}$  khi hệ có trạng thái đầu bằng 0, theo công thức *tích chập* (4.30).

## Hàm truyền

Xét hệ tuyến tính không liên tục mô tả ở hình 4.6 với tín hiệu vào  $\{u_k\}$ , tín hiệu ra  $\{y_k\}$ . Hàm truyền của hệ được hiểu là:

$$G(z) = \left. \frac{Y(z)}{U(z)} \right|_{\text{trạng thái đầu}=0}$$



Hình 4.6: Sơ đồ khối

trong đó  $U(z)$ ,  $Y(z)$  là ảnh Z của các tín hiệu  $\{u_k\}$ ,  $\{y_k\}$ . Vì hệ là tuyến tính nên hàm truyền  $G(z)$  được định nghĩa như trên hoàn toàn không phụ thuộc tín hiệu vào và ra. Thật vậy, giả sử rằng với cặp tín hiệu vào ra  $\{u_k\}_1$ ,  $\{y_k\}_1$  ta có hàm truyền  $G_1(z)$  và với cặp  $\{u_k\}_2$ ,  $\{y_k\}_2$  ta có hàm truyền  $G_2(z)$ . Vậy thì với cặp tín hiệu  $\{u_k\} = \{u_k\}_1 + \{u_k\}_2$  và  $\{y_k\} = \{y_k\}_1 + \{y_k\}_2$ , cũng như  $U_1$ ,  $Y_1$ ,  $U_2$ ,  $Y_2$  là ảnh Z của  $\{u_k\}_1$ ,  $\{y_k\}_1$ ,  $\{u_k\}_2$ ,  $\{y_k\}_2$ , tức là  $U = U_1 + U_2$ ,  $Y = Y_1 + Y_2$ , hàm truyền  $G = \frac{Y}{U}$  của nó phải thỏa mãn:

$$GU = Y \Leftrightarrow G(U_1 + U_2) = Y_1 + Y_2 = G_1 U_1 + G_2 U_2, \quad \forall U_1, U_2 \Leftrightarrow G = G_1 = G_2$$

Tính chất không phụ thuộc vào tín hiệu vào và ra của hàm truyền nói lên rằng hàm truyền cũng là mô hình mô tả hệ. Cùng với hàm truyền  $G(z)$  thì khi đã biết tín hiệu vào  $\{u_k\}$  ta luôn xác định được tín hiệu ra  $\{y_k\}$ :

$$G(z) : \{u_k\} \mapsto \{y_k\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)U(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\mathcal{Z}\{u_k\}\} \quad (4.31)$$

Xét tiếp trường hợp hệ có mô hình hàm truyền  $G(z)$  và được kích thích ở đầu vào bằng tín hiệu dãy xung dirac  $\{u_k\} = \{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\}$ . Khi đó, do ảnh  $\mathcal{Z}$  của tín hiệu đầu vào là  $U(z)=1$  nên từ công thức (4.31) ta có ngay:

$$\{y_k\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)U(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \{g_k\} \quad (4.32)$$

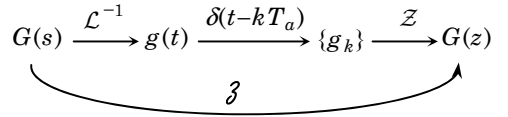
Bởi vậy *hàm gốc trong miền thời gian của hàm truyền  $G(z)$  chính là dãy hàm trọng lượng  $\{g_k\}$  của hệ*. Nói cách khác, nếu đã có dãy hàm trọng lượng  $\{g_k\}$  ta cũng sẽ có hàm truyền  $G(z)=\mathcal{Z}\{g_k\}$ . Với kết quả này và cùng với điều hiển nhiên rằng (hình 4.7):

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$$

thì hàm trọng lượng  $\{g_k\}$  cũng chính là dạng không liên tục của hàm trọng lượng  $g(t)$  sau khi được trích mẫu với cùng chu kỳ trích mẫu  $T_a$  của tín hiệu vào, ra:

$$\{g_k\} = g(t)s(t) \quad (4.33)$$

**Hình 4.7:** Xác định hàm truyền cho hệ không liên tục.



**Chú ý:** Mặc dù viết  $G(z)$ , song không có nghĩa là hàm truyền  $G(z)$  thu được từ  $G(s)$  chỉ đơn giản bằng cách thay  $s=z$  trong  $G(s)$ . Thực chất  $G(z)$  là ảnh  $\mathcal{Z}$  của  $\{g_k\}$  nên nó được xác định từ  $G(s)$  qua các bước (hình 4.7):

- 1) Xác định  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ .
- 2) Trích mẫu  $g(t)$  với chu kỳ  $T_a$  thành hàm trọng lượng  $\{g_k\}$ .
- 3) Chuyển  $\{g_k\}$  sang miền phức nhờ phép biến đổi  $\mathcal{Z}$  để có  $G(z)$ .

Cả ba bước tính trên có thể được thay thế đơn giản nhờ phép biến đổi tích:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : G(s) &\mapsto G(z) = \mathcal{Z}\{g_k\} = \mathcal{Z}\{g(t)s(t)\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}s(t)\} \\ \Leftrightarrow G(z) &= \mathcal{J}\{G(s)\} = \frac{1}{2}g(+0) + \frac{z}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{G(s)}{z - e^{sT_a}} ds \end{aligned} \quad (4.34)$$

được suy ra từ (4.21).

Cuối cùng, hàm truyền còn có thể được xác định từ mô hình phương trình sai phân (4.25) bằng cách chuyển cả hai vế của (4.25) sang miền phức nhờ phép biến đổi Z, rồi lập tỷ số ảnh Z của tín hiệu ra chia cho ảnh Z của tín hiệu vào:

$$G(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_0z^{-1}+a_1z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_mz^{n-m}}{z^n+a_0z^{n-1}+a_1z^{n-2}+\cdots+a_n}\tag{4.35}$$

**Ví dụ 4.14:** Xác định hàm truyền thông qua hàm trọng lượng

Xét hệ liên tục có hàm truyền:

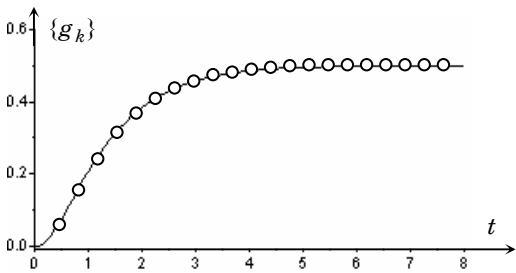
$$G(s)=\frac{1}{(1+2s)(1+s)}$$

Giả sử tín hiệu vào ra  $u(t)$ ,  $y(t)$  được trích mẫu với chu kỳ  $T_a$ . Khi đó hệ trở thành không liên tục. Ta sẽ sử dụng công thức (4.33) để xác định mô hình hàm trọng lượng cho hệ không liên tục đó. Trước tiên ta cần phải xác định hàm trọng lượng  $g(t)$  của hệ liên tục đã cho:

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+2s)(1+s)}\right\}=e^{-t}-e^{-0,5t}$$

$$\text{Vậy } g_k=e^{-kT_a}-e^{-0,5kT_a}\Rightarrow G(z)=\mathcal{Z}\{e^{-kT_a}-e^{-0,5kT_a}\}=\frac{z}{z-e^{-T_a}}-\frac{z}{z-e^{-0,5T_a}}$$

Hình 4.8 là đồ thị biểu diễn hàm trọng lượng  $\{g_k\}$  của hệ ứng với  $T_a=0,5s$ . □



**Hình 4.8:** Minh họa ví dụ 4.14

**Ví dụ 4.15:** Xác định hàm truyền nhờ phép biến đổi  $\mathcal{Z}$

Xét hệ liên tục có hàm truyền:

$$G(s)=\frac{2s+11}{s^2+3s+2}$$

Khi tín hiệu  $u(t)$ ,  $y(t)$  được trích mẫu với chu kỳ  $T_a=0,1s$ , hệ trở thành không liên tục. Ta sẽ xác định hàm truyền  $G(z)$  của hệ không liên tục đó nhờ phép biến đổi  $\mathcal{Z}$ .

Phân tích  $G(s)$  thành tổng tuyến tính các hàm đơn giản được:



$$G(s) = \frac{-7}{s+2} + \frac{9}{s+1}$$

Từ đây suy ra (nhờ bảng tra các tín hiệu cơ bản):

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \frac{z}{z-e^{-2T_a}} = \frac{z}{z-0,8} \quad \text{và} \quad \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z}{z-e^{-T_a}} = \frac{z}{z-0,9}$$

$$\text{Vậy} \quad G(z) = \frac{-7z}{z-0,8} + \frac{9z}{z-0,9} = \frac{2z^2 - 0,9}{z^2 - 1,7z + 0,72}$$

□

### Một số kết luận chung

Trên đây ta đã làm quen được với các dạng mô hình khác nhau của hệ không liên tục SISO với tín hiệu vào, ra là  $\{u_k\}$ ,  $\{y_k\}$ , bao gồm phương trình sai phân, hàm trọng lượng và hàm truyền, cũng như những quan hệ giữa chúng. Để tiện cho việc tra cứu sau này, ta sẽ tổng kết nhanh lại ở đây những quan hệ đó:

- Phương trình sai phân (4.25) có quan hệ với phương trình vi phân (2.28) của hệ tuyến tính liên tục tương ứng thông qua các công thức xấp xỉ đạo hàm bên trái và bên phải, chúng còn được gọi là công thức xấp xỉ loại 1 và loại 2. Phương trình sai phân (4.25) cũng có quan hệ (4.35) với hàm truyền  $G(z)$ .
- Hàm truyền  $G(z)$  có quan hệ (4.32) với hàm trọng lượng  $\{g_k\}$  và (4.34) với hàm truyền  $G(s)$  của hệ tuyến tính liên tục tương ứng. **Chú ý** rằng bên cạnh quan hệ (4.34) đôi khi người ta còn sử dụng những công thức khác để xây dựng hàm truyền hệ không liên tục  $G(z)$  từ hàm truyền  $G(s)$  của hệ liên tục tương ứng, chẳng hạn:

a) thay  $s$  trong hàm truyền hệ liên tục  $G(s)$  bằng  $\frac{z-1}{T_a}$ ,

b) thay  $s = \frac{z-1}{T_a z}$  trong hàm truyền  $G(s)$  của hệ liên tục tương ứng,

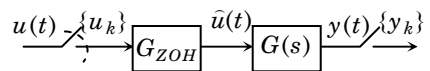
c) thay  $s$  trong  $G(s)$  bằng  $\frac{2(z-1)}{T_a(z+1)}$  (công thức Tustin),

song việc sử dụng phép biến đổi  $\mathcal{Z}$  với công thức (4.34) vẫn được sử dụng nhiều nhất. Lý do đơn giản chỉ là vì khi đó  $G(z)$  có bản chất động học giống như  $G(s)$  của hệ liên tục gốc mà điều này không có được ở các phép biến đổi khác.

Ngoài ra, khi cài đặt một hệ liên tục với hàm truyền  $G(s)$  lên các thiết bị số, như vi xử lý, vi điều khiển hay máy tính, thì sau khi trích mẫu, tín hiệu không liên tục  $\{u_k\}$  ở đầu vào luôn được lưu giữ vào bộ đệm hoặc thanh ghi trong quá trình xử lý. Nói cách khác đầu vào của hệ liên tục  $G(s)$  lúc này sẽ là tín hiệu liên tục (hình 4.9):

$$\hat{u}(t) = u_k \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a$$

chứ không còn là tín hiệu không liên tục



Hình 4.9: Cấu trúc cài đặt hệ vào thiết bị số

$\{u_k\}$ . Bởi vậy khi xác định hàm truyền  $G(z)$  cho hệ không liên tục tương ứng, ta phải luôn lưu tâm tới sự có mặt của bộ đệm đó như một khâu nội suy B-Spline ZOH với hàm truyền > Nói cách khác, thay vì  $G(z)$ , ta phải xác định:

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-sT_a}}{s}$$

$$\Rightarrow \hat{G}(z) = \mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{(1 - e^{-sT_a})G(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \quad \text{với } z = e^{sT_a}$$

### 4.2.3 Mô hình trạng thái

Giống như ở hệ liên tục, hệ tuyến tính không liên tục cũng được mô tả bởi phương trình trạng thái có cấu trúc chung như sau:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \\ \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \end{cases} \quad (4.36)$$

trong đó, nếu  $A, B, C, D$  là những ma trận hằng thì hệ được gọi là *tham số hằng*, ngược lại nếu chúng phụ thuộc thời gian (phụ thuộc chỉ số  $k$ ) thì hệ được gọi là *không dừng* và khi phụ thuộc tham số không gian thì hệ được gọi là *tham số rải*. Vector  $\underline{x}_k$  được gọi là vector trạng thái của hệ, chúng không nhất thiết phải mang một ý nghĩa vật lý nào đó, nên cũng không bắt buộc phải là tín hiệu. Số chiều của  $\underline{x}_k$  cũng sẽ là bậc của mô hình (và là bậc của hệ). Cấu trúc mô hình trạng thái trên dùng chung được cho cả hệ không liên tục SISO và hệ không liên tục MIMO.

#### Xác định mô hình trạng thái từ phương trình sai phân

Xét hệ không liên tục có mô hình vào-ra là phương trình sai phân (4.25). Bổ sung các hệ số  $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$ , để có:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n}$$

và sử dụng ký hiệu  $q \cdot x_k = x_{k+1}$  cho phép dịch phải, phương trình sai phân (4.25) sẽ là:

$$y_{k-n} (q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n) = u_{k-n} (b_0 q^n + b_1 q^{n-1} + \dots + b_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_{k-n}}{u_{k-n}} = \frac{b_0 q^n + b_1 q^{n-1} + \dots + b_n}{A(q)} \quad \text{với } A(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n \quad (4.37)$$

Gọi

$$x_{k-n,1} = \frac{u_{k-n}}{A(q)}, \quad x_{k-n,2} = \frac{q \cdot u_{k-n}}{A(q)}, \quad \dots, \quad x_{k-n,n} = \frac{q^{n-1} \cdot u_{k-n}}{A(q)}$$

ta có  $qx_{k-n,1} = x_{k-n,2}, qx_{k-n,2} = x_{k-n,3}, \dots, qx_{k-n,n} = x_{k-n,n-1}$

và  $u_{k-n} = A(q)x_{k-n,1} = qx_{k-n,n} + a_1 x_{k-n,n} + \dots + a_{n-1} x_{k-n,2} + a_n x_{k-n,1}$

Suy ra

$$q \begin{pmatrix} x_{k-n,1} \\ x_{k-n,2} \\ \vdots \\ x_{k-n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-n,1} \\ x_{k-n,2} \\ \vdots \\ x_{k-n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_{k-n}$$

Ký hiệu tiếp

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{x}_{k-n} = \begin{pmatrix} x_{k-n,1} \\ x_{k-n,2} \\ \vdots \\ x_{k-n,n} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

thì phương trình trên sẽ viết lại được thành:

$$\underline{x}_{k-n+1} = q\underline{x}_{k-n} = A\underline{x}_{k-n} + Bu_{k-n} \Leftrightarrow \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + Bu_k \quad (4.39)$$

Mặt khác ta lại có:

$$\begin{aligned} y_{k-n} &= b_0 \frac{q^n u_{k-n}}{A(q)} + b_1 \frac{q^{n-1} u_{k-n}}{A(q)} + \cdots + b_n \frac{u_{k-n}}{A(q)} = b_n x_{k-n,1} + \cdots + b_1 x_{k-n,n} + b_0 q x_{k-n,n} \\ &= (b_n - b_0 a_n) x_{k-n,1} + \cdots + (b_1 - b_0 a_1) x_{k-n,n} + b_0 u_{k-n} \end{aligned}$$

Bởi vậy, nếu ký hiệu:

$$C = (b_n - a_n b_0, b_{n-1} - a_{n-1} b_0, \cdots, b_1 - a_1 b_0), D = b_0 \quad (4.40)$$

sẽ được:

$$\underline{y}_{k-n} = C\underline{x}_{k-n} + Du_{k-n} \Leftrightarrow \underline{y}_k = C\underline{x}_k + Du_k \quad (4.41)$$

Ghép chung (4.39) và (4.41) ta có mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + Bu_k \\ \underline{y}_k = C\underline{x}_k + Du_k \end{cases} \quad (4.42)$$

với các ma trận  $A, B, C, D$  cho bởi (4.38) và (4.40).

Từ mô hình (4.42) của hệ không liên tục ta còn xác định được trực tiếp đáp ứng  $\{y_k\}$  của hệ trong miền thời gian như sau:

$$\begin{aligned} \underline{x}_k &= A\underline{x}_{k-1} + Bu_{k-1} = A(A\underline{x}_{k-2} + Bu_{k-2}) + Bu_{k-1} = A^2 \underline{x}_{k-2} + (ABu_{k-2} + Bu_{k-1}) \\ &= A^2 (A\underline{x}_{k-3} + Bu_{k-3}) + (ABu_{k-2} + Bu_{k-1}) \\ &= A^3 \underline{x}_{k-3} + (A^2 Bu_{k-3} + ABu_{k-2} + Bu_{k-1}) = \cdots = A^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu_i \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\Rightarrow \underline{y}_k = C \left( A^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu_i \right) + Du_k \quad (4.44)$$

### Xác định mô hình trạng thái từ hàm truyền

Xét hệ không liên tục có hàm truyền  $G(z)$  cho bởi (4.35) dạng thực-hữu tỷ và không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng đa thức tử số có cùng bậc như đa thức mẫu số:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_n}$$

Do hàm truyền này có cấu trúc hoàn toàn giống như mô hình (4.37) của phương trình sai phân, nên mô hình trạng thái tương đương của nó cũng sẽ là (4.42) với:

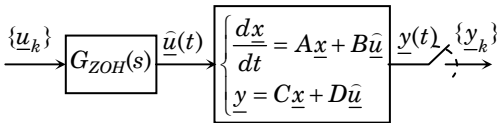
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (b_n - a_n b_0, \dots, b_1 - a_1 b_0), D = b_0$$

### Xác định mô hình trạng thái hệ không liên tục từ mô hình trạng thái hệ liên tục

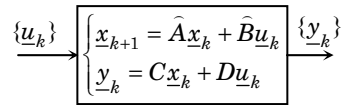
Xét bài toán xác định mô hình trạng thái cho hệ không liên tục MIMO có tín hiệu vào và ra  $\{\underline{u}_k\}, \{\underline{y}_k\}$ , như mô tả ở hình 4.10b, khi phải tích hợp hệ MIMO liên tục lên thiết bị số (hình 4.10a) có để ý đến sự tham gia của khâu nội suy B-Spline bậc 0 (khâu ZOH) với dạng tín hiệu vào-ra mô tả ở hình 4.11, tức là với:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{u}}(t) &= \underline{u}_k \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a \\ \Rightarrow G_{ZOH}(s) &= \frac{1 - e^{-sT_a}}{s} \end{aligned}$$

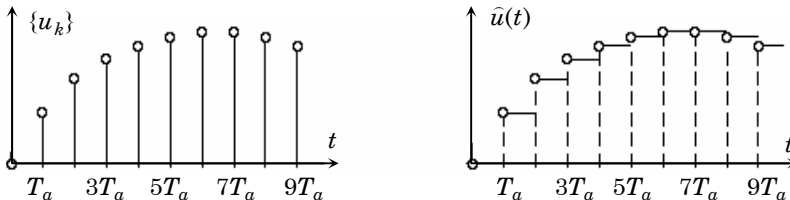
a)



b)



**Hình 4.10:** Mô hình trạng thái tương đương của hệ không liên tục.



**Hình 4.11:** Tín hiệu vào-ra của khâu ZOH

Bắt đầu từ phương trình trạng thái hệ MIMO liên tục tuyến tính:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (4.45)$$

ta có

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \underline{x}_k = \underline{x}(kT_a) = e^{AkT_a} \underline{x}_0 + \int_0^{kT_a} e^{A(kT_a-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \text{và} \quad \underline{x}_{k+1} &= \underline{x}((k+1)T_a) = e^{A(k+1)T_a} \underline{x}_0 + \int_0^{(k+1)T_a} e^{A((k+1)T_a-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{AT_a} \left( e^{AkT_a} \underline{x}_0 + \int_0^{kT_a} e^{A(kT_a-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \right) + \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} e^{A((k+1)T_a-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{AT_a} \underline{x}_k + \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} e^{A((k+1)T_a-\tau)} B d\tau \cdot \underline{u}_k \quad \text{vì } \underline{u}(\tau) = \underline{u}_k \text{ khi } kT_a \leq \tau < (k+1)T_a \\ &= e^{AT_a} \underline{x}_k + \int_0^{T_a} e^{At} B dt \cdot \underline{u}_k \quad \text{với } t = (k+1)T_a - \tau \end{aligned}$$

Bởi vậy, sau khi so sánh với mô hình trạng thái của hệ không liên tục tương đương:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \hat{A} \underline{x}_k + \hat{B} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \underline{u}_k \end{cases} \quad (4.46)$$

ta có

$$\hat{A} = e^{AT_a} \quad \text{và} \quad \hat{B} = \int_0^{T_a} e^{At} B dt = \int_0^{T_a} e^{At} dt \cdot B \quad (4.47)$$

Tương tự như công thức (4.43), từ mô hình trạng thái (4.46) của hệ không liên tục ta cũng xác định được vector trạng thái và đáp ứng của hệ như sau:

$$\begin{cases} \underline{x}_k = \hat{A}^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^{k-i-1} \hat{B} \underline{u}_i \\ \underline{y}_k = C \left( \hat{A}^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \hat{A}^{k-i-1} \hat{B} \underline{u}_i \right) + D \underline{u}_k \end{cases} \quad (4.48)$$

**Ví dụ 4.16:** Xác định mô hình trạng thái hệ không liên tục

Xét hệ SISO liên tục với mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} = (1, 1) \underline{x} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1, 1), D = 0$$

trong đó  $\hat{u} = u_k$  khi  $kT_a \leq t < (k+1)T_a$  và  $T_a = 0,1s$ . Từ kết quả:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

ta có

$$\hat{A} = e^{AT_a} = \begin{pmatrix} e^{-0,1} & 0 \\ 0 & e^{-0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,81 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} = \int_0^{0,1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{0,1} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 - e^{-0,1} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-0,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,095 \end{pmatrix}$$

Vậy mô hình không liên tục của hệ là:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,81 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,095 \end{pmatrix} u_k \\ y = (1, 1) \underline{x}_k \end{cases}$$

□

### Xác định hàm truyền từ mô hình trạng thái

Từ mô hình trạng thái (4.42) của hệ SISO không liên tục và sau khi chuyển hai vế của phương trình thứ nhất sang miền phức nhờ phép biến đổi Z, ta có:

$$z\underline{X}(z) = A\underline{X}(z) + BU(z) \Leftrightarrow (zI - A)\underline{X}(z) = BU(z) \Leftrightarrow \underline{X}(z) = (zI - A)^{-1}BU(z)$$

Thay kết quả trên vào phương trình thứ hai cũng đã được chuyển sang miền phức nhờ phép biến đổi Z, ta thu được hàm truyền:

$$Y(z) = C\underline{X}(z) + DU(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z)$$

$$\Leftrightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (4.49)$$

và với công thức tính định thức ma trận khối của Schur cho ma trận:

$$P = \begin{pmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = \det \begin{pmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(zI - A) \det(D + C(zI - A)^{-1}B)$$

$$\Rightarrow G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D = \det(C(zI - A)^{-1}B + D) = \frac{\det P}{\det(zI - A)} \quad (4.50)$$

ta thấy ngay được rằng điểm cực của hệ chính là nghiệm của  $\det(zI - A) = 0$  và điểm không của hệ là nghiệm của  $\det(P) = 0$ .

Trong trường hợp sử dụng mô hình trạng thái (4.46) thay vì (4.42) của hệ không liên tục, tức là cho hệ liên tục (4.42) nhưng có thêm khâu ZOH ở đầu vào, thì hàm truyền sẽ là:

$$\hat{G}(z) = C(zI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + D = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{C(sI - A)^{-1}B + D}{s}\right\}$$

trong đó  $A, B, C, D$  là các ma trận hệ thống của mô hình trạng thái (4.45) hệ liên tục tương ứng sau khi trích mẫu tín hiệu vào-ra, với sự tham gia của khâu ZOH và hai ma trận  $\hat{A}, \hat{B}$  được xác định từ  $A, B$  theo công thức (4.47).

**Ví dụ 4.17:** Xác định hàm truyền

Hệ không liên tục thu được từ ví dụ 4.16 có hàm truyền là:

$$\hat{G}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1,052z - 0,117}{(z - 0,9)(z - 0,81)}$$

□

### Xác định hàm trọng lượng từ mô hình trạng thái

Từ công thức (4.48) mô tả đáp ứng của hệ SISO không liên tục có mô hình trạng thái (4.42) và với giả thiết rằng trạng thái đầu bằng 0 ( $\underline{x}_0 = \underline{0}$ ), cũng như tín hiệu không liên tục ở đầu vào là dãy xung dirac  $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\}$ , ta có:

$$g_k = \begin{cases} D & \text{ khi } k = 0 \\ CA^{k-1}\hat{B} & \text{ khi } k \geq 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

Đương nhiên rằng công thức (4.51) trên cũng được áp dụng để tính hàm trọng lượng cho mô hình (4.42) lấy từ phương trình sai phân (4.25), trong đó ta chỉ cần thay  $\hat{A}, \hat{B}$  bởi  $A$  và  $B$  có các phần tử lấy từ phương trình sai phân theo (4.38).

Sử dụng tiếp công thức Cayley–Hamilton ở định lý 3.8 cho việc thực hiện (4.51) thì:

$$\begin{aligned} p(\hat{A}) &= a_0 I + a_1 \hat{A} + \dots + a_{n-1} \hat{A}^{n-1} + \hat{A}^n = \Theta \quad (\text{ma trận có các phần tử } 0) \\ \Leftrightarrow a_0 \hat{A}^{k-n+1} + a_1 \hat{A}^{k-n} + \dots + a_{n-1} \hat{A}^{k-2} + \hat{A}^{k-1} &= \Theta, \quad k > n \quad (\text{nhân 2 vế với } \hat{A}^{k-n-1}) \\ \Rightarrow a_0 C \hat{A}^{k-n-1} \hat{B} + a_1 C \hat{A}^{k-n} \hat{B} + \dots + a_{n-1} C \hat{A}^{k-2} \hat{B} + C \hat{A}^{k-1} \hat{B} &= 0, \quad k > n \\ \Leftrightarrow a_0 g_{k-n} + a_1 g_{k-n+1} + \dots + a_{n-1} g_{k-1} + g_k &= 0, \quad k \geq n \\ \Leftrightarrow g_k &= -a_0 g_{k-n} - a_1 g_{k-n+1} - \dots - a_{n-1} g_{k-1}, \quad k \geq n \end{aligned} \quad (4.52)$$

trong đó  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  là các hệ số của đa thức đặc tính của hệ. Do đó giá trị  $g_k$  của hàm trọng lượng  $\{g_k\}$  hoàn toàn được xác định lặp từ  $n$  giá trị đã biết của nó trước đó. Hơn nữa với (4.52) ta còn xác định được tham số  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  của mô hình từ hàm trọng lượng  $\{g_k\}$ . Các hệ số đó còn có tên gọi là *hệ số Markov*.

### 4.2.4 Đại số sơ đồ khối hệ không liên tục

Về nguyên tắc, việc biến đổi sơ đồ khối của một hệ không liên tục cũng được thực hiện giống như ở hệ liên tục đã được trình bày ở mục 2.2.3 ngoại trừ một điều luôn cần phải được chú ý là *các khối không liên tục phải có các tín hiệu vào, ra dạng xung (không liên tục, đều) và cũng chỉ ở khối không liên tục mới có phép biến đổi  $\mathcal{Z}$ :  $G(s) \mapsto G(z)$* .

### Hai khối nối tiếp:

Hình 4.12a) và 4.12b) mô tả hệ thống không liên tục gồm hai khối mắc nối tiếp. Trong khi ở hình 4.12a) có khâu trích mẫu nằm giữa hai khối thì ở hình 4.12b) hai khối được nối trực tiếp với nhau.

- 1) Cả hai khối  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  ở hình 4.12a) đều là những khối không liên tục nên:

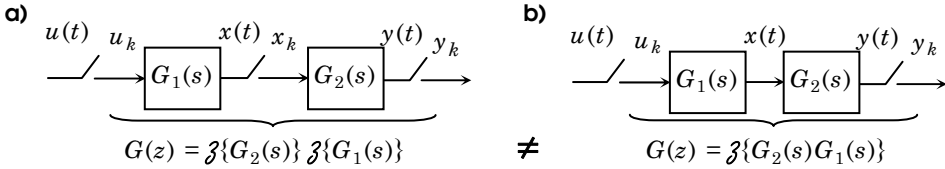
$$G_1(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}\{G_1(s)\} = G_1(z) \quad \text{và} \quad G_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}\{G_2(s)\} = G_2(z)$$

Suy ra hàm truyền tương đương của chúng là:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} \frac{X(z)}{U(z)} = G_2(z)G_1(z) \Rightarrow G(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)\} \mathcal{Z}\{G_1(s)\}$$

- 2) Cả hai khối  $G_1(s)$  và  $G_2(s)$  ở hình 4.12b) không phải là không liên tục, vì  $x(t)$  là tín hiệu ra của  $G_1(s)$  đồng thời cũng là tín hiệu vào của  $G_2(s)$  là tín hiệu liên tục. Nhưng toàn bộ hệ thống với hàm truyền  $G_2(s)G_1(s)$  lại là hệ không liên tục, bởi vậy hàm truyền tương đương  $G(z)$  cho cả hệ sẽ phải là:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)G_1(s)\}$$

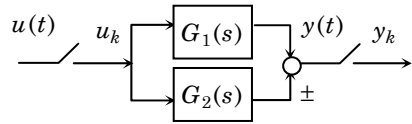


**Hình 4.12:** Nối tiếp hai khối (chú ý sự khác nhau về hàm truyền tương đương).

### Hai khối song song:

Hệ gồm hai khối nối song song được mô tả trong hình 4.13 có tín hiệu vào ra đều ở dạng xung (không liên tục và đều). Các tín hiệu này cũng là tín hiệu vào/ra của từng khối. Bởi vậy mô hình không liên tục  $G(z)$  chung cho cả hệ sẽ là:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\{G_1(s)\} \pm \mathcal{Z}\{G_2(s)\} \\ &= G_1(z) \pm G_2(z) \end{aligned}$$



**Hình 4.13:** Hệ có hai khối song song.

### Hệ hồi tiếp:

Hình 4.14 mô tả hệ hồi tiếp với hai trường hợp khác nhau: Tín hiệu hồi tiếp về là xung (hình 4.14a) và là liên tục (hình 4.14b). Ở cả hai trường hợp, tín hiệu  $u(t)$  có vẻ



như không được trích mẫu. Song do trong  $e(t)$  có chứa  $u(t)$  nên khi trích mẫu  $e(t)$  ta đã trích mẫu luôn cả  $u(t)$ . Như vậy hệ thống có tín hiệu vào không liên tục. Cộng thêm việc trích mẫu  $y(t)$ , hệ cũng có tín hiệu ra không liên tục. Bởi vậy hệ hồi tiếp đã cho chính là hệ không liên tục và để mô tả toàn bộ hệ hồi tiếp trên ta có ảnh  $G(z)$  được tính như sau:

1) Trường hợp hồi tiếp tín hiệu xung  $\{y_k\}$  như ở hình 4.14a):

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}\{G_1(s)\}E(z) = G_1(z)E(z) \quad \text{với } E(z) \text{ là ảnh Z của } \{e_k\} \\ &= G_1(z)[U(z) \pm X(z)] = G_1(z)[U(z) \pm G_2(z)Y(z)] \end{aligned}$$

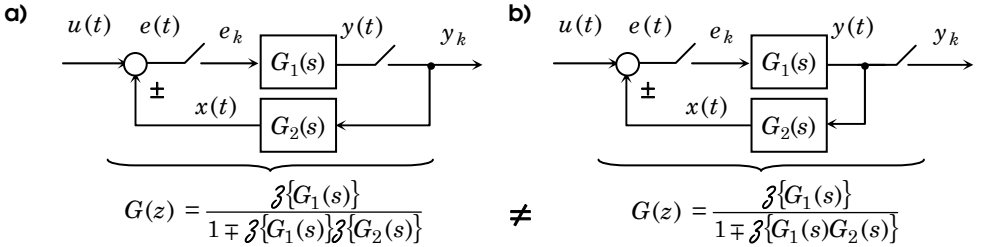
Suy ra

$$[1 \mp G_1(z)G_2(z)Y(z)]Y(z) = G_1(z)U(z) \Leftrightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_1(z)}{1 \mp G_1(z)G_2(z)}$$

2) Trường hợp hồi tiếp tín hiệu liên tục  $y(t)$  như ở hình 4.14b):

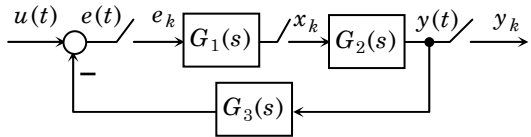
$$\begin{aligned} Y(z) &= G_1(z)E(z) = G_1(z)[U(z) \pm \mathcal{Z}\{X(s)\}] = G_1(z)[U(z) \pm \mathcal{Z}\{G_2(s)Y(s)\}] \\ &= G_1(z)[U(z) \pm \mathcal{Z}\{G_2(s)G_1(s)\}E(z)] = G_1(z)[U(z) \pm \mathcal{Z}\{G_2(s)G_1(s)\} \frac{Y(z)}{G_1(z)}] \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } G(z) = \frac{G_1(z)}{1 \mp \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}}$$



Hình 4.14: Hệ hồi tiếp.

**Ví dụ 4.18:** Biến đổi sơ đồ khối



Hình 4.15: Minh họa cho ví dụ 4.18

Xét hệ có mô hình sơ đồ khối cho trong hình 4.15. Từ sơ đồ khối đó ta có:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}E(z) = G_1(z)G_2(z)E(z)$$

$$\begin{aligned}
&= G_1(z)G_2(z)[U(z) - \mathcal{Z}\{G_3(s)G_2(s)X(s)\}] \\
&= G_1(z)G_2(z)[U(z) - \mathcal{Z}\{G_3(s)G_2(s)\}X(z)] \\
&= G_1(z)G_2(z)[U(z) - \mathcal{Z}\{G_3(s)G_2(s)\}G_1(z)E(z)] \\
&= G_1(z)G_2(z)[U(z) - \mathcal{Z}\{G_3(s)G_2(s)\}G_1(z)\frac{Y(z)}{G_1(z)G_2(z)}]
\end{aligned}$$

Vậy  $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + \mathcal{Z}\{G_2(s)G_3(s)\} \cdot G_1(z)}$  □

**Ví dụ 4.19:** Biến đổi sơ đồ khối khi cài đặt lên thiết bị điều khiển số

Khi cài đặt một hệ thống với hàm truyền  $G(s)$  lên máy tính (hoặc các bộ vi xử lý, vi điều khiển), hệ sẽ có cấu trúc sơ đồ khối như hình 4.16 mô tả, trong đó  $G_{ZOH}(s)$  là hàm truyền của khâu giữ tín hiệu bậc 0:

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-sT_a}}{s}$$

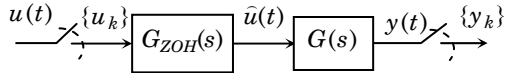
Toàn bộ hệ thống trong máy tính sẽ có hàm truyền

$$\hat{G}(s) = (1 - e^{-sT_a}) \frac{G(s)}{s}$$

Nhưng do hệ thống  $\hat{G}(s)$  trong máy tính có tín hiệu đầu vào  $\{u_k\}$ , đầu ra  $\{y_k\}$  đều là tín hiệu xung (không liên tục và đều) nên nó cũng là một hệ không liên tục và như vậy bên cạnh hàm truyền  $\hat{G}(s)$  dạng liên tục nó còn có mô hình không liên tục như sau:

$$\hat{G}(z) = \mathcal{Z}\{\hat{G}(s)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$
 □

**Hình 4.16:** Cài đặt hệ thống vào máy tính.  
Mô hình cho ví dụ 4.19



**Ví dụ 4.20:** Xác định hàm truyền tương đương

Xét hệ có tín hiệu vào  $\{u_k\}$  và ra  $\{y_k\}$  không liên tục với sơ đồ khối cho ở hình 4.17a. Nhiệm vụ đặt ra là tìm hàm truyền tương đương  $G(z)$  cho hệ.

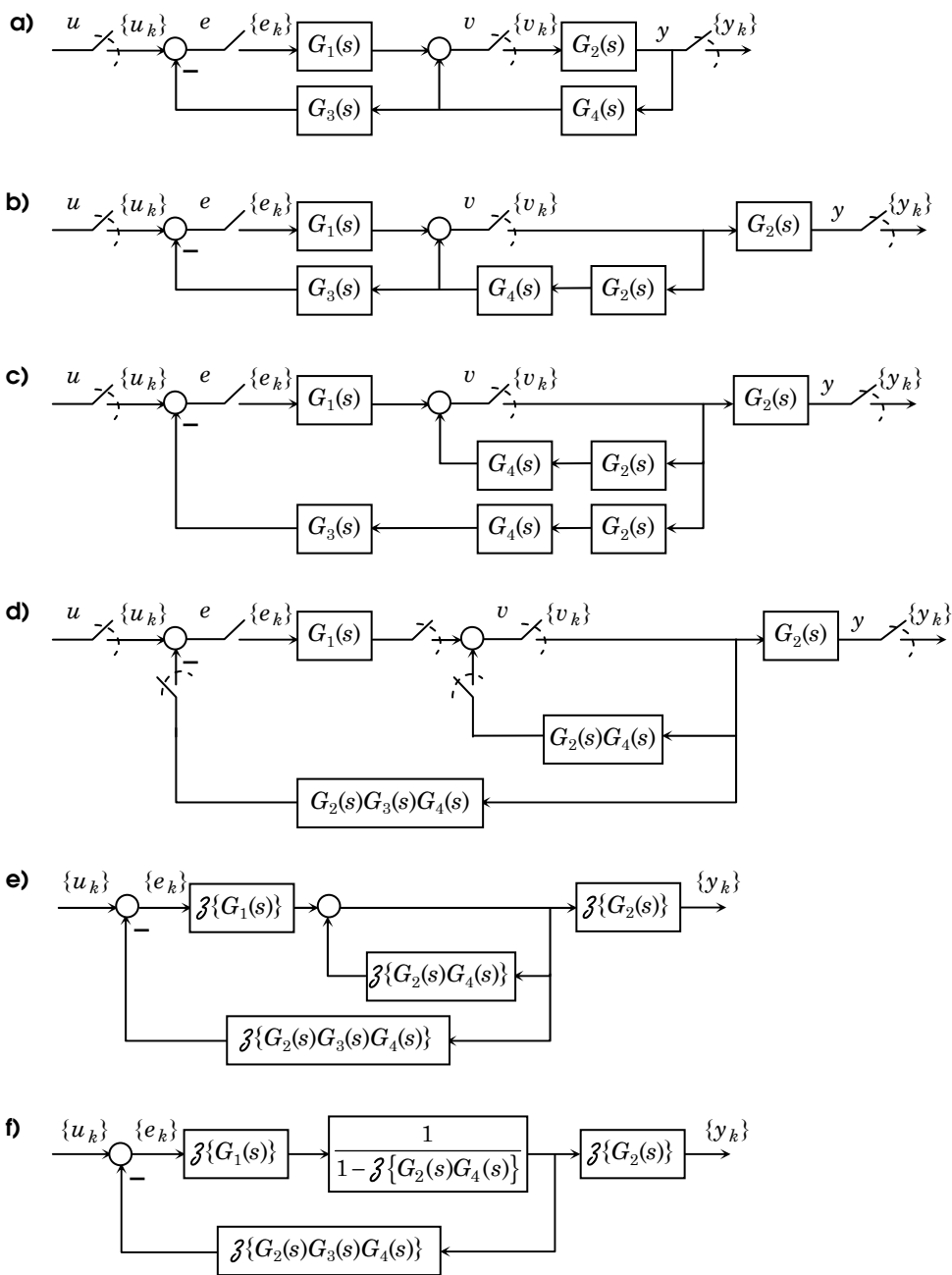
Ta có hai phương pháp cơ bản để xác định  $G(z)$ .

1) *Tìm  $G(z)$  trực tiếp từ ảnh Z của tín hiệu:*

Ký hiệu các ảnh Z của những tín hiệu không liên tục  $\{u_k\}, \{e_k\}, \{v_k\}, \{y_k\}$  là:

$$E(z) = \mathcal{Z}\{e_k\}, \quad U(z) = \mathcal{Z}\{u_k\}, \quad V(z) = \mathcal{Z}\{v_k\} \quad \text{và} \quad Y(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$$

ta có từ sơ đồ khối:



Hình 4.17: Xác định hàm truyền tương đương. Minh họa cho ví dụ 4.20

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)\} V(z)$$

$$V(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\} E(z) + \mathcal{Z}\{G_2(s)G_4(s)\} V(z) \Rightarrow V(z) = \frac{\mathcal{Z}\{G_1(s)\} E(z)}{1 - \mathcal{Z}\{G_2(s)G_4(s)\}}$$

$$E(z) = U(z) - \mathcal{Z}\{G_2(s)G_3(s)G_4(s)\} V(z)$$

Thay phương trình thứ 3 vào phương trình thứ 2, được:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\mathcal{Z}\{G_1(s)\} [U(z) - \mathcal{Z}\{G_2(s)G_3(s)G_4(s)\} V(z)]}{1 - \mathcal{Z}\{G_2(s)G_4(s)\}} \\ &= \frac{\mathcal{Z}\{G_1(s)\} U(z)}{1 - \mathcal{Z}\{G_2(s)G_4(s)\} + \mathcal{Z}\{G_1(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_2(s)G_3(s)G_4(s)\}} \end{aligned}$$

Thay tiếp vào phương trình thứ nhất, ta đi đến:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}\{G_2(s)\} \frac{\mathcal{Z}\{G_1(s)\} U(z)}{1 - \mathcal{Z}\{G_2(s)G_4(s)\} + \mathcal{Z}\{G_1(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_2(s)G_3(s)G_4(s)\}} \\ \Rightarrow G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{G_1(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_2(s)\}}{1 - \mathcal{Z}\{G_2(s)G_4(s)\} + \mathcal{Z}\{G_1(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_2(s)G_3(s)G_4(s)\}} \end{aligned}$$

2) *Tìm  $G(z)$  nhờ biến đổi sơ đồ khối:*

Chuyển nút chia tín hiệu từ sau tới trước khối  $G_2(s)$  ta có hình 4.17b. Chú ý rằng việc chuyển nút tín hiệu từ sau tới trước một khối, chỉ được thực hiện với những khối không phải là khối trích mẫu hoặc khối ZOH và được thực hiện hoàn toàn giống như ở trường hợp hệ liên tục. Tiếp theo, ta chuyển nút chia tín hiệu từ sau khối  $G_4(s)$  tới trước khối  $G_2(s)$  sẽ có hình 4.17c. Hình 4.17d được suy ra từ hình 4.17c trên cơ sở tính chất tuyến tính của khâu trích mẫu tín hiệu, tức là trích mẫu của tổng hai tín hiệu sẽ chính là tổng của các kết quả trích mẫu của hai tín hiệu đó.

Khi tín hiệu vào ra của một khối  $G_k(s)$  nào đó đều là tín hiệu không liên tục thì ta được phép thay khối đó bằng  $G_k(z) = \mathcal{Z}\{G_k(s)\}$  và đó chính là hình 4.17e. Hình 4.17f là kết quả rút gọn của hình 4.17e và từ đây ta có ngay được hàm truyền của hệ.  $\square$

## 4.3 Phân tích hệ không liên tục

### 4.3.1 Phân tích tính ổn định

**Quá trình tự do, điều kiện cần và đủ để hệ ổn định**

Khái niệm ổn định của hệ không liên tục được mô tả bởi hàm truyền  $G(z)$  hay phương trình trạng thái hoàn toàn tương tự như ở hệ liên tục, tức là hệ sẽ được gọi là ổn định BIBO nếu với mọi tín hiệu vào  $\{u_k\}$  bị chặn ( $|u_k| < \infty, \forall k$ ), tín hiệu đầu ra  $\{y_k\}$  của hệ cũng bị chặn ( $|y_k| < \infty, \forall k$ ).

Giống như ở hệ liên tục, tính ổn định của hệ không liên tục cũng được nhận biết thông qua quá trình tự do của nó. Đây là quá trình được biểu diễn bởi đáp ứng tự do (tín hiệu vào bằng 0) của hệ khi đi từ điểm trạng thái đầu khác 0. Nếu sử dụng mô hình trạng thái (4.36) thì với (4.43), quá trình tự do sẽ là (*quỹ đạo trạng thái tự do*):

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 \quad (4.53)$$

Ngược lại, nếu sử dụng mô hình là hàm truyền  $G(z)$  thì quá trình tự do sẽ chính là hàm trọng lượng:

$$\{g_k\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} \quad (4.54)$$

Theo định nghĩa, hàm trọng lượng  $\{g_k\}$  là đáp ứng ở đầu ra khi hệ đang ở trạng thái đầu bằng 0 và được kích thích bằng dãy xung dirac  $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\}$  ở đầu vào. Như vậy, từ đặc điểm này của dãy xung dirac, kích thích đó sẽ chỉ có tác dụng đánh bật hệ ra khỏi trạng thái 0, còn sau đó hoàn toàn để hệ vận động tự do với đáp ứng  $\{g_k\}$ .

**Chú ý:** Trong mục 4,3 này, mô hình trạng thái hệ không liên tục được sử dụng sẽ là (4.36) cho hệ MIMO hoặc (4.42) cho hệ SISO. Đương nhiên điều này hoàn toàn không làm ảnh hưởng tới việc ứng dụng cho hệ có mô hình (4.46) với có sự tham gia thêm của khâu ZOH ở đầu vào, vì khi đó ta chỉ cần thay  $A, B$  bởi  $\hat{A}$  và  $\hat{B}$ .

**Định lý 4.1:** Ở hệ tuyến tính không liên tục, tham số hằng, mô tả bởi hàm truyền  $G(z)$ , hoặc mô hình trạng thái (4.36), (4.42), các phát biểu sau là tương đương.

- Hệ ổn định BIBO.
- Quá trình tự do, tức là hàm trọng lượng (4.54), hay quỹ đạo trạng thái tự do (4.53), là tắt dần (tiến về 0).
- Hàm truyền  $G(z)$  có tất cả các điểm cực  $z_k$  nằm bên trong đường tròn đơn vị, tức là có  $|z_k| < 1, \forall k$ .
- Ma trận hệ thống  $A$  trong mô hình (4.42) có tất cả các giá trị riêng  $z_k$  nằm bên trong đường tròn đơn vị ( $|z_k| < 1, \forall k$ ).

*Chứng minh:*

(b  $\Rightarrow$  a): Không mất tính tổng ta giả thiết  $n$  điểm cực  $z_i, i=1,2,\dots,n$  của  $G(z)$  là khác nhau đôi một. Khi đó nghiệm  $\{g_k\}$  của (4.54) phải có dạng (4.20):

$$g_k = \sum_{i=1}^n c_i z_i^k$$

và để có  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = 0$  thì  $|z_k| < 1, \forall k$ . Suy ra:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|g_k|} \leq |z_{\max}| \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{n |c_{\max}|} = |z_{\max}| < 1 \quad \text{với} \quad |z_{\max}| = \max_i |z_i|, \quad |c_{\max}| = \max_i |c_i|$$

Vậy chuỗi  $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$  là hội tụ và với:

$$|y_k| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} u_i g_{k-i} \right| \leq \|u_k\| \left\| \sum_{i=0}^{\infty} g_i \right\| \leq \|u_k\| \sum_{i=0}^{\infty} |g_i|$$

thì khi  $\{u_k\}$  bị chặn ta cũng có tính bị chặn của  $\{y_k\}$ .

(b $\Leftrightarrow$ c $\Leftrightarrow$ d): Xem phần chứng minh trên cũng như quan hệ (4.50).

(a $\Rightarrow$ d): Không mất tính tổng quát ta giả thiết  $A$  có dạng đường chéo  $A = \text{diag}(z_i)$ . Khi đó, với quan hệ (4.44) và trạng thái đầu  $\underline{x}_0 = \underline{0}$  ta có:

$$\begin{aligned} y_k &= C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i + D \underline{u}_k = C \left( \sum_{i=0}^{k-1} \text{diag}(z_j^{k-i-1}) B u_i \right) + D u_k \\ &= C \left( \sum_{i=0}^{k-1} \text{diag}(z_j^i) B u_{k-i-1} \right) + D u_k \end{aligned}$$

Từ giả thiết  $\{y_k\}$  bị chặn với mọi dãy  $\{u_k\}$  bị chặn, ta suy ra được tính hội tụ của chuỗi lũy thừa  $\sum_{i=0}^{\infty} z_j^i < \infty$ ,  $\forall j$  và điều này là tương đương với  $|z_j| < 1$ ,  $\forall j$ .  $\square$

Theo nội dung định lý trên, thì để kiểm tra tính ổn định của một hệ không liên tục, ta chỉ cần kiểm tra xem nghiệm của đa thức đặc tính của hệ, tức là đa thức  $\det(zI - A)$  của mô hình trạng thái, hoặc là đa thức mẫu số của hàm truyền  $G(z)$ , ký hiệu là  $A(z)$ , có nằm bên trong đường tròn đơn vị hay không. Một đa thức:

$$A(z) = \det(zI - A) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

có tất cả các nghiệm  $z_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  nằm bên trong đường tròn đơn vị ( $|z_i| < 1$ ), sẽ được gọi là *đa thức bền (stable)*.

Xét đa thức  $A(z)$  bậc  $n$  và giả sử  $z_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  là nghiệm của nó. Theo định lý Vieta, các hệ số của đa thức  $A(z)$  sẽ có quan hệ với nghiệm  $z_i$  của nó như sau:

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \\ &= a_n \left[ z^n - z^{n-1} \sum_{i=1}^n z_i + \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^n z_i \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{n-1} = -a_n \sum_{i=1}^n z_i \quad \text{và} \quad a_0 = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^n z_i$$

Suy ra:

**Định lý 4.2** (Điều kiện cần): Nếu đa thức:

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

là *đa thức bền* thì phải có  $|a_0| < |a_n|$ .

*Chứng minh:*

Từ giả thiết  $|z_i| < 1$  với mọi  $i$  ta có  $\prod_{i=1}^n |z_i| < 1$  do đó cũng có:

$$|a_0| = |a_n \prod_{i=1}^n z_i| = |a_n| \prod_{i=1}^n |z_i| < |a_n| \quad \square$$

**Chú ý:** Định lý trên chỉ là một tiêu chuẩn giúp xác định nhanh một đa thức  $A(z)$  có thể là đa thức bền hay không chứ chưa đủ để khẳng định nó chắc chắn sẽ là đa thức bền. Ví dụ sau minh họa điều đó.

**Ví dụ 4.21:** Định lý 4.2 chỉ là điều kiện cần

Đa thức

$$A(z) = 0,8 + 4z + 0,2z^2 + z^3 = (z+2j)(z-2j)(z+0,2)$$

có  $a_0=0,8$  và  $a_3=1$  thỏa mãn  $|a_0| < |a_3|$  nhưng lại không phải là đa thức bền vì có hai nghiệm  $z_{1,2} = \pm 2j$  nằm ngoài đường tròn đơn vị.  $\square$

### Tiêu chuẩn Schur-Cohn-Jury

Tiêu chuẩn Schur-Cohn-Jury được bắt nguồn từ định lý sau:

**Định lý 4.3** (Schur-Cohn): Để

$$A_0(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

là đa thức bền thì cần và đủ là:

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1 \quad \text{và} \quad A_1(z) = A_0(z) - \frac{a_0}{a_n} D_0(z)$$

cũng là đa thức bền, trong đó  $D_0(z)$  là đa thức đối ngẫu với  $A_0(z)$ , tức là:

$$D_0(z) = z^n A_0(z^{-1}) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

*Chứng minh:*

Xét đa thức phụ thuộc tham số  $\varepsilon$

$$C(z, \varepsilon) = A_0(z) - \varepsilon D_0(z)$$

Giả sử rằng  $C(z, \varepsilon)$  có nghiệm  $z_k$  nằm trên đường tròn đơn vị ( $|z_k|=1$ ). Vậy thì do:

$$|D_0(z_k)| = |A_0(z_k^{-1})| = |A_0(\bar{z}_k)| = |\bar{A}_0(z_k)| = |A_0(z_k)|$$

trong đó  $\bar{z}_k$  là giá trị phức liên hợp của  $z_k$  và  $\bar{A}_0(z_k)$  là giá trị phức liên hợp của  $A_0(z_k)$ , nên ta cũng có

$$0 = |C(z_k, \varepsilon)| = |A_0(z_k)| \cdot |1 - \varepsilon|$$

tức là khi  $\varepsilon \neq 1$  thì mọi nghiệm  $z_k$  với  $|z_k|=1$  của  $C(z, \varepsilon)$  cũng là nghiệm của  $A_0(z)$ .

Ngược lại, nếu  $z_k$  với  $|z_k|=1$  là nghiệm của  $A_0(z)$  thì do:

$$0 = A_0(z_k) = \frac{A_0(z_k)}{z_k^n} = A_0(z_k^{-1}) = z_k^n A_0(z_k^{-1}) = D_0(z_k)$$

nên  $z_k$  cũng là nghiệm của  $C(z, \varepsilon)$ . Như vậy với mọi  $\varepsilon \neq 1$  nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của đa thức  $C(z, \varepsilon)$  cũng chính là nghiệm của  $A_0(z)$  và ngược lại. Do nghiệm của  $A_0(z)$  không phụ thuộc  $\varepsilon$  nên các nghiệm  $z_k$  với  $|z_k|=1$  của  $C(z, \varepsilon)$  cũng không phụ thuộc  $\varepsilon$  khi mà  $\varepsilon \neq 1$ . Kết luận này chỉ rõ số các nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của  $C(z, \varepsilon)$  là một hằng số với mọi  $\varepsilon \neq 1$ .

Bây giờ ta cho  $\varepsilon$  chạy trong khoảng  $[0, 1)$ :

- Với  $\varepsilon=0$  thì do  $C(z, 0)=A_0(z)$  nên tất cả nghiệm của  $A_0(z)$  cũng là nghiệm của  $C(z, 0)$ . Gọi số các nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của chúng là  $q$ .
- Tăng dần  $\varepsilon$  và giả sử trong quá trình tăng dần  $\varepsilon$  như vậy số các nghiệm nằm bên trong đường tròn đơn vị của  $C(z, \varepsilon)$  bị thay đổi, tức là có một nghiệm từ bên trong đi ra ngoài hoặc có thêm nghiệm từ bên ngoài đi vào trong đường tròn đơn vị. Do nghiệm của  $C(z, \varepsilon)$  thay đổi liên tục theo  $\varepsilon$  nên bắt buộc trong quá trình dịch chuyển đó phải có lúc chúng nằm trên đường tròn đơn vị. Điều này đã làm cho số các nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của  $C(z, \varepsilon)$  đã có lúc bị thay đổi (lớn hơn hoặc nhỏ hơn  $q$ ). Điều này trái ngược với kết luận trên. Vậy điều giả sử là sai. Nói cách khác để  $A_0(z)$  là đa thức bên thì cần và đủ là  $C(z, \varepsilon)$  cũng phải là đa thức bên với mọi  $0 \leq \varepsilon < 1$ .

Chọn  $\varepsilon = \left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1$  sẽ có  $C(z, \varepsilon) = A_1(z)$ . Do đó nếu  $A_0(z)$  là đa thức bên thì  $A_1(z)$  cũng là đa thức bên. Ngược lại khi  $A_1(z)$  là bên và  $\varepsilon < 1$  thì  $A_0(z)$  cũng phải bên. □

Mở rộng ra, đa thức  $A_1(z)$  còn viết được thành:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_0(z) - \frac{a_0}{a_n} D_0(z) = A_0(z) - \frac{a_0}{a_n} z^n A_0(z^{-1}) \\ &= z \left[ \left( a_1 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-1} \right) + \left( a_2 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-2} \right) z + \cdots + \left( a_n - \frac{a_0}{a_n} a_0 \right) z^{n-1} \right] \end{aligned}$$

do đó  $A_1(z)$  sẽ là đa thức bên khi và chỉ khi đa thức có bậc thấp hơn

$$p_1(z) = \left( a_1 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-1} \right) + \left( a_2 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-2} \right) z + \cdots + \left( a_n - \frac{a_0}{a_n} a_0 \right) z^{n-1}$$

cũng là đa thức bên. Với nhận xét như vậy Jury đã xây dựng thuật toán kiểm tra xem:

$$A_0(z) = a_0^{(0)} + a_1^{(0)} z + \cdots + a_n^{(0)} z^n \quad (4.55)$$

có phải là đa thức bên hay không gồm hai bước như sau:

- 1) Hạ dần bậc của  $A_0(z)$



$$p_1(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}z + \dots + a_{n-1}^{(1)}z^{n-1} \quad \text{với} \quad a_i^{(1)} = a_{i+1}^{(0)} - \frac{a_0^{(0)}}{a_n^{(0)}} a_{n-i-1}^{(0)}, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

$$p_2(z) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}z + \dots + a_{n-2}^{(2)}z^{n-2} \quad \text{với} \quad a_i^{(2)} = a_{i+1}^{(1)} - \frac{a_0^{(1)}}{a_{n-1}^{(1)}} a_{n-i-2}^{(1)}, \quad 0 \leq i \leq n-2$$

⋮

$$p_{n-1}(z) = a_0^{(n-1)} + a_1^{(n-1)}z \quad \text{với} \quad a_i^{(n-1)} = a_{i+1}^{(n-2)} - \frac{a_0^{(n-2)}}{a_{n-2}^{(n-2)}} a_{1-i}^{(n-2)}, \quad i=0, 1$$

2) Kiểm tra điều kiện cần và đủ  $\lambda_i = \left| \frac{a_0^{(i)}}{a_{n-i}^{(i)}} \right| < 1$ , với mọi  $i=0, 1, \dots, n-1$ .

Hai bước trên đã được cài đặt thành thuật toán rất tiện lợi cho việc sử dụng dưới dạng bảng, có tên gọi là tiêu chuẩn Schur–Cohn–Jury cho đa thức (4.55), như sau:

	$a_0^{(0)}$	$a_1^{(0)}$	$a_2^{(0)}$	...
$\lambda_0 = \frac{a_0^{(0)}}{a_n^{(0)}}$	$a_n^{(0)}$	$a_{n-1}^{(0)}$	$a_{n-2}^{(0)}$	...
	$a_0^{(1)} = a_1^{(0)} - \lambda_0 a_{n-1}^{(0)}$	$a_1^{(1)} = a_2^{(0)} - \lambda_0 a_{n-2}^{(0)}$	$a_2^{(1)} = a_3^{(0)} - \lambda_0 a_{n-3}^{(0)}$	...
$\lambda_1 = \frac{a_0^{(1)}}{a_{n-1}^{(1)}}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$a_{n-3}^{(1)}$	...
	$a_0^{(2)} = a_1^{(1)} - \lambda_1 a_{n-2}^{(1)}$	$a_1^{(2)} = a_2^{(1)} - \lambda_1 a_{n-3}^{(1)}$	$a_2^{(2)} = a_3^{(1)} - \lambda_1 a_{n-4}^{(1)}$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$a_0^{(n-1)}$	$a_1^{(n-1)}$	0	...
$\lambda_{n-1} = \frac{a_0^{(n-1)}}{a_1^{(n-1)}}$	$a_1^{(n-1)}$	$a_0^{(n-1)}$	0	...

Với bảng trên, đa thức (4.55) sẽ bền khi và chỉ khi giá trị tuyệt đối của tất cả các số hạng  $\lambda_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  trong cột đầu nhỏ hơn 1 ( $|\lambda_i| < 1, \forall i$ ).

**Ví dụ 4.22:** Minh họa tiêu chuẩn Schur–Cohn–Jury

Cho đa thức

$$A(z) = -1 - 7z - 8z^2 + 28z^3 + 48z^4$$

Lập bảng Schur–Cohn–Jury:

	-1	-7	-8	28	48
-0,02	48	28	-8	-7	-1
	-6,42	-8,17	27,85	47,98	
-0,14	47,98	27,85	-8,17	-6,42	
	-4,45	26,76	47,12		
-0,1	47,12	26,76	-4,45		
	29,28	46,7			
0,63	46,7	29,28			

Do cột đầu đều có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 nên đa thức đã cho là đa thức bền. □

**Ví dụ 4.23:** Minh họa tiêu chuẩn Schur–Cohn–Jury

Xét đa thức bậc 2:

$$A(z) = a_0 + a_1 z + z^2$$

Lập bảng Schur–Cohn–Jury:

	$a_0$	$a_1$	1
$a_0$	1	$a_1$	$a_0$
	$a_1 - a_0 a_1$	$1 - a_0^2$	
$\frac{a_1 - a_0 a_1}{1 - a_0^2}$	$1 - a_0^2$	$a_1 - a_0 a_1$	

Vậy để hệ ổn định thì cần và đủ là:

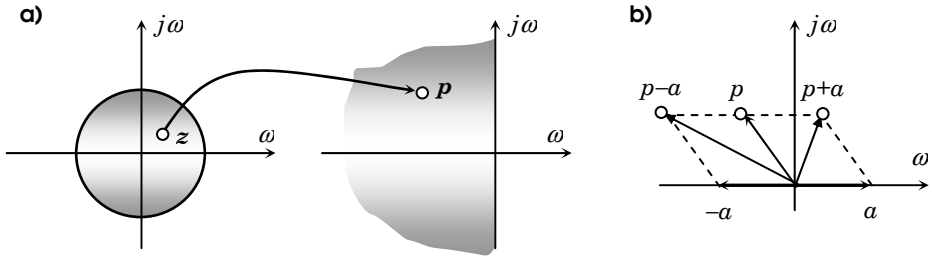
$$|a_0| < 1 \text{ và } |a_1 - a_0 a_1| < 1 - a_0^2 \Leftrightarrow |a_0| < 1 \text{ và } |a_1| < 1 + a_0 \quad \square$$

**Sử dụng các tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ liên tục**

Trong chương 2 và 3 ta đã làm quen khá nhiều tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ liên tục trên cơ sở khảo sát vùng chứa nghiệm đa thức đặc tính của nó (vùng chứa điểm cực của hệ), trong đó các tiêu chuẩn như của Routh–Hurwitz, Lienard–Chipart, Michailov là khá thông dụng. Các tiêu chuẩn này có nhiệm vụ xác định xem nghiệm đa thức đặc tính có nằm bên trái trục ảo hay không mà không cần phải trực tiếp đi tìm các nghiệm đó.

Khác với tiêu chuẩn xét ổn định hệ liên tục, việc xét tính ổn định hệ không liên tục thông qua sự phân bố nghiệm đa thức đặc tính của hệ lại phải chỉ rõ nghiệm của đa thức đặc tính có nằm trong đường tròn đơn vị hay không (định lý 4.1, 4.3). Bởi vậy muốn sử dụng được những tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ liên tục cho việc xét tính ổn định hệ không liên tục thì cần thiết ta phải tìm được một đơn ánh chuyển các điểm  $z$  nằm bên trong đường tròn đơn vị thành một điểm  $p$  nằm bên trái trục ảo trong mặt phẳng phức

(hình 4.18a). **Chú ý** rằng ở đây ta ký hiệu đối số là  $p$  chứ không phải là  $s$  như ở hệ liên tục là để nhấn mạnh rằng phép biến đổi đó *chỉ có ý nghĩa cho việc xét tính ổn định chứ hoàn toàn không phải là một ánh xạ chuyển đổi mô hình không liên tục thành mô hình liên tục tương đương*, chẳng hạn như không thể bằng phép biến đổi này để chuyển hàm truyền không liên tục  $G(z)$  thành hàm truyền liên tục  $G(s)$ .



**Hình 4.18:** Phép biến đổi để sử dụng các tiêu chuẩn xét ổn định hệ liên tục cho việc xét tính ổn định hệ không liên tục.

Hình 4.18b) mô tả một phép biến đổi như vậy. Nếu như điểm  $p$  nằm bên trái trục ảo thì vector  $p+a$  ( $a>0$ ) sẽ có độ dài nhỏ hơn độ dài của vector  $p-a$ , do đó tỷ số:

$$z = \frac{p+a}{p-a} \quad (4.56)$$

sẽ cho ra một vector  $z$  có độ dài nhỏ hơn 1, hay  $z$  sẽ nằm trong đường tròn đơn vị. Ngược lại, khi  $p$  nằm trên hoặc bên phải trục ảo thì độ dài vector  $p+a$  sẽ bằng hoặc lớn hơn độ dài của vector  $p-a$ , dẫn đến  $z$  theo (4.56) nằm trên hoặc ngoài đường tròn đơn vị.

Phép biến đổi (4.56) là phép biến đổi một-một, tức là ánh xạ ngược của nó:

$$p = \frac{a(z+1)}{z-1} \quad (4.57)$$

cũng sẽ chuyển đổi một điểm  $z$  nằm bên trong đường tròn đơn vị thành một điểm  $p$  nằm bên trái trục ảo. Người ta thường gọi (4.57) là *ánh xạ lưỡng tuyến tính*.

Với ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.57) ta dễ dàng kiểm tra ngay được tính đúng đắn của phát biểu sau:

**Định lý 4.4:** Các phát biểu sau là tương đương:

a) Đa thức bậc  $n$

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad (a_n \neq 0)$$

là một đa thức đường tròn (có các nghiệm  $z_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  nằm bên trong đường tròn đơn vị,  $|z_i| < 1$ ).

b) Với  $a > 0$  để đa thức đối ngẫu sau bảo toàn bậc  $n$ :

$$\begin{aligned} A_{\text{đn}}(p) &= (p-a)^n A\left(\frac{p+a}{p-a}\right) = a_0(p-a)^n + a_1(p-a)^{n-1}(p+a) + \dots + a_n(p+a)^n \\ &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 p + \dots + \hat{a}_n p^n \end{aligned}$$

là Hurwitz (có các nghiệm  $p_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  nằm bên trái trục ảo,  $\text{Re}(p_i) < 0$ ).

**Ví dụ 4.24:** Minh họa định lý 4.4

Để xét đa thức bậc 3:

$$A(z) = -0,1 - 0,5z + 0,2z^2 + z^3$$

có phải là một đa thức bền hay không, theo định lý 4.4, thì cần và đủ, ta xét tính Hurwitz của đa thức cũng bậc 3 (với  $a=1$ ):

$$\begin{aligned} A_{\text{đn}}(p) &= -0,1(p-1)^3 - 0,5(p-1)^2(p+1) + 0,2(p-1)(p+1)^2 + (p+1)^3 \\ &= 0,4 + 3p + 4p^2 + 0,6p^3 \end{aligned}$$

Lập các ma trận:

$$H_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0,6 \\ 0,4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H_1 = 3$$

Do

$$\det(H_3) = 7,056 > 0, \quad \det(H_2) = 11,76 > 0, \quad \det(H_1) = 3 > 0$$

nên  $A_{\text{đn}}(p)$  là đa thức Hurwitz. Suy ra  $A(z)$  đã cho là đa thức bền.

Khẳng định trên có thể được kiểm chứng lại trực tiếp từ:

$$A(z) = (z^2 - 0,5)(z + 0,2) = \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(z + 0,2)$$

□

**Ví dụ 4.25:** Minh họa định lý 4.4

Xét lại đa thức bậc 2 ở ví dụ 4.23:

$$A(z) = a_0 + a_1 z + z^2$$

Nó có đa thức đối ngẫu tương ứng cũng bậc 2 (với  $a=1$ ):

$$\begin{aligned} A_{\text{đn}}(p) &= a_0(p-1)^2 - a_1(p-1)(p+1) + (p+1)^2 \\ &= (a_0 + a_1 + 1) + 2(1 - a_0)p + (a_0 - a_1 + 1)p^2 \end{aligned}$$

Bởi vậy  $A(z)$  sẽ là đa thức bền khi và chỉ khi các hệ số  $(a_0 + a_1 + 1)$ ,  $(1 - a_0)$ ,  $(a_0 - a_1 + 1)$  của  $A_{\text{đn}}(p)$  cùng dấu và khác 0, tức là:

$$a_0 < 1 \quad \text{và} \quad -1 - a_0 < a_1 < 1 + a_0$$

□

## Tiêu chuẩn Nyquist

Các phương pháp xét tính ổn định trên đây đều sử dụng đa thức đặc tính của hệ. Điều này đòi hỏi khi áp dụng chúng, bắt buộc ta phải có mô hình của hệ dưới dạng hàm truyền hoặc mô hình trạng thái và đó là điểm khác biệt so với tiêu chuẩn Nyquist. Với Nyquist ta có thể kiểm tra được tính ổn định mà không cần đến đa thức đặc tính của hệ, thay vào đó là đường đồ thị Nyquist  $G_h(N)$  của hệ hở (hình 4.19a), được hiểu là đường đồ thị của hàm truyền hệ hở:

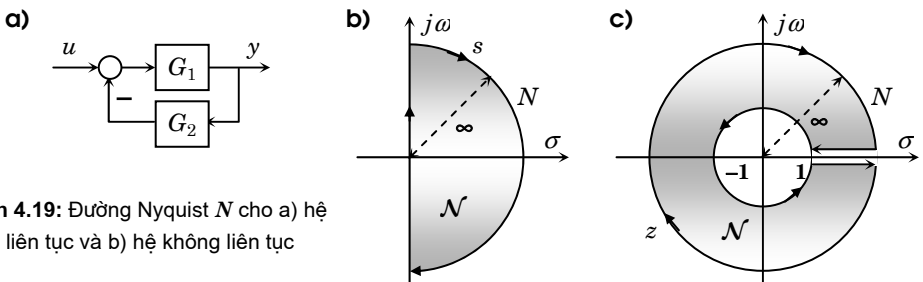
$$G_h(s) = G_1(s)G_2(s) \quad \text{cho hệ liên tục}$$

$$\text{hay } G_h(z) = G_1(z)G_2(z) \quad \text{cho hệ không liên tục}$$

khi biến số  $s$  hoặc  $z$  chạy dọc trên biên  $N$  của miền kín  $\mathcal{N}$  trong mặt phẳng phức chứa tất cả các điểm cực không ổn định của hệ hở. Hơn thế nữa, ở một số trường hợp riêng thì thậm chí ta còn có thể có được đường đồ thị này bằng thực nghiệm. Chẳng hạn như với hệ liên tục có hàm truyền hệ hở  $G_h(s)$  không có điểm cực nào nằm trên trục ảo thì đường Nyquist  $N$  sẽ chỉ gồm toàn bộ trục ảo và nửa đường tròn có bán kính vô cùng lớn với chiều dương (cùng chiều kim đồng hồ) như mô tả ở hình 4.19b. Nếu có thêm giả thiết rằng  $G_h(s)$  là hợp thức chặt, thì khi  $s$  chạy trên nửa đường tròn bán kính vô cùng lớn đó, giá trị hàm truyền bằng 0, nên đường đồ thị Nyquist  $G_h(N)$  cuối cùng lại chính là đường đồ thị đặc tính tần biên-pha:

$$G_h(N) = G_h(j\omega), \quad -\infty \leq \omega \leq \infty$$

và ta hoàn toàn có thể xây dựng được đường đồ thị hàm đặc tính tần này bằng thực nghiệm với các bước thực hiện đã được trình bày chi tiết tại mục 2.2.5 của chương 2.



**Hình 4.19:** Đường Nyquist  $N$  cho a) hệ liên tục và b) hệ không liên tục

Tiêu chuẩn Nyquist của hệ liên tục với các ưu điểm nêu trên hoàn toàn chuyển giao được sang cho hệ không liên tục bằng việc sửa đổi lại miền  $\mathcal{N}$  trong mặt phẳng phức chứa tất cả các điểm cực không ổn định của hệ hở. Ở hệ không liên tục có hàm truyền hệ hở  $G_h(z)$  không có điểm cực nằm trên đường tròn đơn vị, thì miền  $\mathcal{N}$  này sẽ gồm hai

đường tròn, đường tròn thứ nhất là đường tròn đơn vị với chiều ngược kim đồng hồ và đường tròn thứ hai là đường tròn có bán kính vô cùng lớn với chiều cùng kim đồng hồ để tạo thành miền  $\mathcal{N}$  có biên  $N$  của nó theo chiều dương là chiều mà theo đó, miền  $\mathcal{N}$  luôn nằm phía bên phải (hình 4.19c).

Như vậy, đường đồ thị Nyquist  $G_h(N)$  ở trường hợp không liên tục sẽ là đường đồ thị  $G_h(z)$  khi  $z$  chạy kín hai đường tròn trên. Giống như ở hệ liên tục, nếu hàm truyền hệ hở  $G_h(z)$  là hợp thức chặt (theo  $z^{-1}$ ) thì do khi  $z$  chạy dọc trên nửa đường tròn bên ngoài với bán kính vô cùng lớn  $G_h(z)$  luôn có giá trị là:

$$G_h(z) = 0$$

nên cuối cùng toàn bộ đường đồ thị Nyquist  $G_h(N)$  chỉ còn tập trung lại khi  $z$  chạy trên đường tròn đơn vị:

$$G_h(N) = G_h(e^{j\varphi}) \quad \text{với } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (4.58)$$

Ngoài ra, do có  $G_h(z) = \bar{G}_h(\bar{z})$ , trong đó  $\bar{a}$  là số phức liên hợp của  $a$ , nên đường đồ thị Nyquist (4.58) trên sẽ có dạng đối xứng qua trục thực. Bởi vậy ta chỉ cần xây dựng  $G_h(N)$  với  $0 \leq \varphi \leq \pi$  rồi sau đó lấy thêm phần đối xứng qua trục thực là được.

Sau khi đã có được đường đồ thị Nyquist  $G_h(N)$  của hệ hở cho trường hợp không liên tục thì tính ổn định của hệ kín không liên tục như mô tả ở hình 4.19a) sẽ được xác định giống như ở hệ liên tục (mục 2.3.3), mà cụ thể là:

**Định lý 4.5:** Xét hệ kín, không liên tục, cho ở hình 4.19a. Nếu hàm truyền  $G_h(z)$  của hệ hở có  $m$  điểm cực không nằm bên trong đường tròn đơn vị và không có điểm cực nào nằm trên đường tròn đơn vị thì hệ kín sẽ ổn định khi và chỉ khi đường đồ thị Nyquist  $G_h(N)$  xây dựng theo (4.58) bao điểm  $-1+j0$  đúng  $m$  lần theo chiều ngược kim đồng hồ.

Đương nhiên phát biểu trên cũng đúng cho cả trường hợp hệ kín ở hình 4.19a) có  $G_1(z)$  là đã cho (hàm truyền của đối tượng) và  $G_2(z)=k$  là cần phải xác định để hệ kín ổn định (hàm truyền của bộ điều khiển). Khi đó, nếu ta chuyển  $G_h(N)=kG_1(N)$  thành đồ thị Nyquist của riêng khâu  $G_1(N)$  bằng cách giảm đơn vị đo của trục thực cho khâu  $G_1(N)$  đi  $k$  lần, sẽ được:

**Định lý 4.6:** Xét hệ kín, không liên tục, cho ở hình 4.19a) với  $G_2(z)=k$ . Nếu hàm truyền  $G_1(z)$  có  $m$  điểm cực không nằm bên trong đường tròn đơn vị và không có điểm cực nào nằm trên đường tròn đơn vị thì hệ kín sẽ ổn định khi và chỉ khi đường đồ thị Nyquist  $G_1(N)$  bao điểm  $-\frac{1}{k}+j0$  đúng  $m$  lần theo chiều ngược kim đồng hồ.

### 4.3.2 Tính điều khiển được và quan sát được

#### Phân tích tính điều khiển được

Xét hệ MIMO không liên tục, bậc  $n$ , mô tả bởi:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \\ \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \end{cases} \quad (4.59)$$

với  $m$  tín hiệu vào, ghép chung lại thành vector  $\{\underline{u}_k\}$  và  $r$  tín hiệu ra cũng được viết chung thành vector  $\{\underline{y}_k\}$ . Hệ (4.59) sẽ được gọi là:

- *Điều khiển được* nếu ứng với mọi điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  cho trước bao giờ ta cũng tìm được dãy hữu hạn gồm  $N$  các vector  $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$  để đưa được hệ đi từ  $\underline{x}_0$  về tới gốc tọa độ  $\underline{0}$ .
- *Đạt tới được* nếu ứng với mọi điểm trạng thái cuối  $\underline{x}_N \in \mathbb{R}^n$  cho trước bao giờ ta cũng tìm được dãy hữu hạn gồm  $N$  các vector  $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$  để đưa được hệ từ gốc tọa độ  $\underline{0}$  tới được  $\underline{x}_N$ .
- *Điều khiển được hoàn toàn* nếu ứng với mọi điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  và mọi điểm trạng thái cuối cho trước  $\underline{x}_N \in \mathbb{R}^n$  bao giờ ta cũng tìm được dãy hữu hạn gồm  $N$  các vector  $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$  để đưa được hệ đi từ  $\underline{x}_0$  về tới được  $\underline{x}_N$ .

Theo định nghĩa vừa nêu thì rõ ràng hệ sẽ điều khiển được hoàn toàn khi và chỉ khi nó đồng thời điều khiển được và đạt tới được. Với công thức (4.43) thì từ mô hình (4.59) ta có:

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B \underline{u}_i \quad (4.60)$$

Bởi vậy, để kiểm tra tính điều khiển được, ta chỉ cần xác định xem ứng với  $\underline{x}_N = \underline{0}$  và  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  tùy ý, phương trình:

$$\underline{0} = A^N \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B \underline{u}_i \quad \Leftrightarrow \quad -A^N \underline{x}_0 = \left( A^{N-1} B, A^{N-2} B, \dots, B \right) \begin{pmatrix} \underline{u}_0 \\ \vdots \\ \underline{u}_{N-1} \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

có nghiệm  $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$  với một số  $N$  hữu hạn hay không.

Xem  $A^N$  và  $(B, AB, \dots, A^{N-1}B)$  là hai ánh xạ tuyến tính thì rõ ràng (4.61) có nghiệm  $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$  với một số hữu hạn  $N$  và với mọi  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  khi và chỉ khi:

$$\text{Im}(A^N) \subseteq \text{Im}(A^{N-1}B, A^{N-2}B, \dots, B), \quad \text{với } \text{Im}(\bullet) \text{ là không gian ảnh} \quad (4.62)$$

Sử dụng định lý Cayley–Hamilton đã cho ở định lý 3.8 thì khi  $N \geq n$ , ma trận  $A^N$  sẽ phụ thuộc tuyến tính theo  $A, A^2, \dots, A^{n-1}$ , nói cách khác một số hữu hạn  $N$  thỏa mãn

(4.62) là luôn tồn tại và việc có nhiều hơn  $n$  giá trị tín hiệu điều khiển là không cần thiết. Vì vậy (4.62) sẽ tương đương với:

$$\dim \text{Im}(A^n) \leq \dim \text{Im}(A^{N-1}B, A^{N-2}B, \dots, B)$$

Ta đi đến:

**Định lý 4.7:** Cần và đủ để hệ (4.59) điều khiển được là:

$$\text{Rank}(A^n) \leq \text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B), \text{ vì } \dim \text{Im}(\bullet) = \text{Rank}(\bullet) \quad (4.63)$$

Tương tự, để kiểm tra tính *đạt tối được* của hệ (4.59) ta phải kiểm tra xem phương trình (4.60) ứng với  $\underline{x}_N \in \mathbb{R}^n$  tùy ý nhưng cho trước và  $\underline{x}_0 = \underline{0}$

$$\underline{x}_N = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B \underline{u}_i \Leftrightarrow \underline{x}_N = (A^{N-1}B, A^{N-2}B, \dots, B) \begin{pmatrix} \underline{u}_0 \\ \vdots \\ \underline{u}_{N-1} \end{pmatrix}$$

có nghiệm hay không. Điều này cũng dẫn đến:

**Định lý 4.8:** Cần và đủ để hệ (4.59) đạt tối được là:

$$\text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n \quad (4.64)$$

So sánh (4.63) và (4.64) ta còn nhận thấy:

- Điều kiện (4.63) để hệ điều khiển được và (4.64) để hệ đạt tối được chỉ tương đương với nhau khi  $\text{Rank}(A^n) = n$ , tức là khi ma trận  $A^n$  không suy biến. Nói cách khác, chỉ khi  $A^n$  không suy biến thì giống như ở hệ liên tục, hệ sẽ *điều khiển được hoàn toàn nếu nó điều khiển được*.
- Nếu  $A^n$  suy biến thì  $\text{Rank}(A^n) < n$ . Do đó khi hệ đạt tối được thì nó cũng sẽ điều khiển được, nhưng ngược lại nếu hệ chỉ điều khiển được thì không có nghĩa là nó cũng đạt tối được và do đó cũng không điều khiển được hoàn toàn. Đây chính là điều khác biệt so với hệ liên tục.

**Ví dụ 4.26:** Điều khiển được, nhưng không điều khiển được hoàn toàn

Xét hệ có một đầu vào mô tả bởi:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

Hệ này có

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \text{Rank}(B, AB) = \text{Rank}(A^2) = \text{Rank} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

nên nó điều khiển được. Nhưng vì

$$\text{Rank}(B, AB) = 1 \neq 2$$

nên nó không đạt tối được, do đó nó không điều khiển được hoàn toàn. Chẳng hạn như với  $\underline{x}_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  thì do phương trình:

$$(B, AB) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vô nghiệm nên không tồn tại  $\{u_0, u_1\}$  để đưa hệ từ gốc tọa độ  $\underline{0}$  tới được  $\underline{x}_N$ . □

**Định lý 4.9:** Các phát biểu sau cho hệ (4.59) là tương đương:

- a) Điều khiển được hoàn toàn.
  - b) Đạt tối được.
  - c) (Kalman)  $\text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$
  - d) (Hautus)  $\text{Rank}(zI - A, B) = n$  với mọi  $z \in \mathbb{C}$
- (4.65)

*Chứng minh:*

Tính tương đương của a), b) và c) đã được khẳng định trong định lý 4.7 và định lý 4.8, cũng như các nhận xét về hai công thức (4.63) và (4.64) của chúng. Chỉ còn lại kết luận d) là phải chứng minh. Song ta có thể thấy ngay phát biểu c) và d) là hoàn toàn giống như tiêu chuẩn Kalman và tiêu chuẩn Hautus về tính điều khiển được (hoàn toàn) của hệ liên tục (mục 3.3.3), nên chúng là tương đương. □

**Ví dụ 4.27:** Vừa điều khiển được, vừa điều khiển được hoàn toàn

Xét hệ với một đầu vào mô tả bởi:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

Hệ này có

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(B, AB) = \text{Rank} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

nên nó vừa điều khiển được, vừa đạt tối được, tức là điều khiển được hoàn toàn. □

### Phân tích tính quan sát được

Tiếp theo ta phân tích tính quan sát được của hệ tham số hằng có mô hình trạng thái (4.59). Ý nghĩa của việc phân tích đó như sau: Giả sử rằng tại thời điểm  $k=0$  hệ

đang ở trạng thái  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  nào đó và ta phải xác định  $\underline{x}_0$  đó thông qua việc đo các tín hiệu vào ra  $\{\underline{u}_k\}, \{\underline{y}_k\}$ . Nếu ta có thể làm được việc đó thông qua quan sát (đo) các tín hiệu vào và ra trong một khoảng thời gian hữu hạn, tức là từ hữu hạn các giá trị đo được của tín hiệu vào-ra  $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$  và  $\{\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{N-1}\}$ , thì hệ sẽ được gọi là quan sát được.

Thay quan hệ (4.60) vào phương trình thứ hai của (4.59) được:

$$\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0 + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B \underline{u}_i + D \underline{u}_k \Leftrightarrow CA^k \underline{x}_0 = \underbrace{\underline{y}_k - \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B \underline{u}_i - D \underline{u}_k}_{\Delta \underline{y}_k}$$

Cho  $k$  chạy từ 0 đến  $N-1$  sẽ có:

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{pmatrix} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} \Delta \underline{y}_0 \\ \Delta \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \Delta \underline{y}_{N-1} \end{pmatrix}$$

Nhưng vì với  $k \geq n$  ma trận  $A^k$  sẽ phụ thuộc tuyến tính theo  $A, A^2, \dots, A^{n-1}$ , nên thực chất phương trình trên chỉ còn là:

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} \Delta \underline{y}_0 \\ \Delta \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \Delta \underline{y}_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Từ đây ta thấy điểm trạng thái  $\underline{x}_0$  sẽ xác định được chính xác nếu ánh xạ (4.66) có miền ảnh là toàn bộ không gian trạng thái và khi kết hợp với tính tương đương giữa tiêu chuẩn Kalman và tiêu chuẩn Hautus phát biểu cho mô hình hệ liên tục, sẽ đến được:

**Định lý 4.10:** Các phát biểu sau cho hệ (4.59) là tương đương:

a) Hệ quan sát được.

$$\text{b) (Kalman) Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (4.67)$$

$$\text{c) (Hautus) Rank} \begin{pmatrix} zI - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad \text{với mọi } z \in \mathbb{C} \quad (4.68)$$

**Ví dụ 4.28:** Xác định tính quan sát được

Cho hệ SISO bậc 2, mô tả bởi:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_k \quad \text{và} \quad y_k = (2, 1) \underline{x}_k + u_k$$

Hệ này có:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

nên nó quan sát được, tức là mọi điểm trạng thái  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  của nó sẽ được xác định từ hữu hạn các giá trị tín hiệu  $\{u_0, u_1\}$  và  $\{y_0, y_1\}$  nhờ công thức (4.66):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \underline{x}_0 &= \begin{pmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - u_0 \\ y_1 - 2u_0 - u_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} y_0 - u_0 \\ y_1 - 2u_0 - u_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \underline{x}_0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 - u_0 \\ y_1 - 2u_0 - u_1 \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

Tiếp tục, ta còn thấy, do từ (4.67) còn có:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^T = \text{Rank} (C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T)$$

nên cũng có được khẳng định sau (tương tự như ở hệ liên tục):

**Định lý 4.11:** Để hệ (4.59) quan sát được thì cần và đủ là hệ đối ngẫu:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A^T \underline{x}_k + C^T \underline{u}_k \\ \underline{y}_k = B^T \underline{x}_k + D^T \underline{u}_k \end{cases}$$

đạt tới được, tức là điều khiển được hoàn toàn.

Xét riêng hệ SISO không liên tục với mô hình:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B u_k \\ y_k = C \underline{x}_k + D u_k \end{cases} \quad (4.69)$$

Với công thức (4.49) thì hệ trên có hàm truyền:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

Nhưng vì  $G(z)$  là hàm vô hướng (ma trận  $1 \times 1$ ) nên có  $G(z) = G^T(z)$ . Suy ra:

$$G(z) = (C(zI - A)^{-1} B + D) = B^T (zI - A^T)^{-1} C^T + D^T = B^T (zI - A^T)^{-1} C^T + D$$

và do đó bên cạnh mô hình (4.69), nó còn có mô hình trạng thái đối ngẫu tương đương:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A^T \underline{x}_k + C^T u_k \\ y_k = B^T \underline{x}_k + D u_k \end{cases} \quad (4.70)$$

Điều này dẫn ta đến kết luận rằng mọi hệ SISO không liên tục với hàm truyền dạng thực-hữu tỷ:

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_n}$$

thì bên cạnh mô hình trạng thái (xem lại mục 4.3.2):

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k \\ y_k = (b_n - a_n b_0, \dots, b_1 - a_1 b_0) \underline{x}_k + b_0 u_k \end{cases} \quad (4.71)$$

được gọi là mô hình chuẩn điều khiển, nó còn có mô hình trạng thái tương đương khác theo cấu trúc (4.70), được gọi là *mô hình chuẩn quan sát*, như sau:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} b_n - a_n b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{pmatrix} u_k \\ y = (0, \dots, 0, 1) \underline{x}_k + b_0 u_k \end{cases} \quad (4.72)$$

**Ví dụ 4.29:** Minh họa định lý 4.11

Xét hệ có mô hình *trạng thái dạng chuẩn quan sát* (4.72). Khi đó với:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, C = (0, \dots, 0, 1)$$

ta có

$$\begin{aligned} CA &= (0, \dots, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, 1, -a_{n-1}) \\ CA^2 &= (0, \dots, 0, 1, -a_{n-1}) A = (0, \dots, 0, 1, -a_{n-1}, -a_{n-2} + a_{n-1}^2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$CA^{n-1} = (1, -a_{n-1}, -a_{n-2} + a_{n-1}^2, \dots)$$

nên

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & \times \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \times & \times \end{pmatrix} = n \quad (\text{vì có định thức khác } 0)$$

và do đó nó quan sát được (các dấu  $\times$  là chỉ những giá trị được xác định từ bộ tham số  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ).

Hệ đối ngẫu với nó có mô hình trạng thái *chuẩn điều khiển* (4.71) có cùng hàm truyền  $G(z)$ . Kiểm tra tương tự ta cũng thấy hệ (4.71) là điều khiển được hoàn toàn.  $\square$

### 4.3.3 Chu kỳ trích mẫu và chất lượng hệ thống

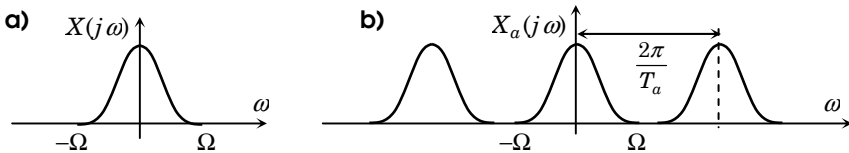
#### Hiện tượng trùng phổ

Xét tín hiệu liên tục  $x(t)$ . Bên cạnh thông tin trong miền thời gian mà tín hiệu truyền tải người ta còn quan tâm đặc biệt tới thông tin trong miền tần số của tín hiệu được phản ánh qua ảnh Fourier  $X(j\omega)$  của nó định nghĩa bởi công thức (2.13) đã cho ở chương 2. Vấn đề đặt ra trong quá trình không liên tục hóa tín hiệu liên tục  $x(t)$  thành tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$ , theo nghĩa  $x_k = x(kT_a)$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , là cần phải chọn chu kỳ trích mẫu  $T_a$  như thế nào để sai lệch thông tin tần số giữa  $X(j\omega)$  của tín hiệu gốc  $x(t)$  và  $X_a(j\omega)$  của tín hiệu không liên tục  $\{x_k\}$  là nhỏ nhất. Câu trả lời cho vấn đề này đã được đưa ra ở mục 2.1.2 với công thức trùng phổ, còn gọi là định lý Shannon–Katelnikov (hình 4.20):

$$X_a(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - n \frac{2\pi}{T_a}))$$

và từ công thức trùng phổ này ta đến ngay được chu kỳ trích mẫu của Nyquist như sau:

**Định lý 4.12:** Nếu tín hiệu liên tục  $x(t)$  có ảnh Fourier  $X(j\omega)$  thỏa mãn  $|X(j\omega)|=0$  khi  $\omega \notin [-\Omega, \Omega]$  thì với chu kỳ trích mẫu  $T_a < \frac{\pi}{\Omega}$  sẽ có  $X_a(j\omega) = X(j\omega)$  khi  $\omega \in [-\Omega, \Omega]$ .



Hình 4.20: Minh họa chu kỳ trích mẫu Nyquist

### Chọn chu kỳ trích mẫu để đồng nhất điểm cực

Xét hệ liên tục ổn định, có thể là MIMO, mô tả bởi:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u} \end{cases} \quad (4.73)$$

Khi đó, hệ không liên tục tương ứng với chu kỳ trích mẫu  $T_a$  của tín hiệu vào-ra thành  $\{\underline{u}_k\}, \{\underline{y}_k\}$  có sự tham gia của khâu ZOH ở đầu vào (hình 4.10a) sẽ được mô tả bởi (4.46), tức là:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \hat{\underline{A}}\underline{x}_k + \hat{\underline{B}}\underline{u}_k \\ \underline{y}_k = \underline{C}\underline{x}_k + \underline{D}\underline{u}_k \end{cases} \quad \text{trong đó } \hat{\underline{A}} = e^{\underline{A}T_a} \quad \text{và} \quad \hat{\underline{B}} = \int_0^{T_a} e^{\underline{A}t} \underline{B} dt \quad (4.74)$$

Ký hiệu  $s_1, \dots, s_n$  là giá trị riêng của  $\underline{A}$ , tức là điểm cực của hệ liên tục (4.73) và gọi  $\underline{M}$  là ma trận modal của  $\underline{A}$ . Vậy thì:

$$\underline{M}^{-1} \hat{\underline{A}} \underline{M} = \underline{M}^{-1} e^{\underline{A}T_a} \underline{M} = \text{diag}(e^{s_i T_a}) \Leftrightarrow \text{diag}(\lambda_i) = \text{diag}(e^{s_i T_a})$$

trong đó  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  là giá trị riêng của  $\hat{\underline{A}}$ . Từ đây ta suy ra được chu kỳ trích mẫu:

$$T_a = \frac{\ln \lambda_i}{s_i}$$

### Quan hệ giữa chu kỳ trích mẫu và tính điều khiển được, quan sát được

Tiếp theo, ở mục này, chúng ta sẽ khảo sát sự ảnh hưởng của thời gian trích mẫu  $T_a$  tới tính điều khiển được và quan sát được của hệ.

**Định lý 4.13:** Xét hệ liên tục SISO có mô hình trạng thái (4.73) với  $\underline{B}$  là vector cột,  $\underline{C}$  là vector hàng và  $\underline{D}$  là hằng số thực. Khi đó mô hình không liên tục tương ứng (4.74) với sự tham gia của khâu ZOH ở đầu vào cũng có  $\hat{\underline{B}}$  là vector cột. Nếu ma trận  $\underline{A}$  của mô hình liên tục (4.73) có cặp giá trị riêng là số phức liên hợp  $s_0, \bar{s}_0$  với  $s_0 - \bar{s}_0 = 2ja_0$ , thì khi sử dụng thời gian trích mẫu:

$$T_a = \frac{k\pi}{\omega_0}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

*tính điều khiển được (hoàn toàn), cũng như quan sát được của mô hình liên tục (4.73) sẽ bị mất ở mô hình không liên tục (4.74), tức là mô hình (4.74) khi đó sẽ không điều khiển được hoàn toàn, hay sẽ không quan sát được.*

*Chứng minh:*

Trước tiên ta có thể thấy được rằng khi  $s_0$  là một giá trị riêng của  $\underline{A}$  thì  $z_0 = e^{s_0 T_a}$  cũng sẽ là một giá trị riêng của  $\hat{\underline{A}} = e^{\underline{A}T_a}$ . Nhưng do có:

$$e^{(s_0 - \bar{s}_0)T_a} = e^{2jk\pi} = 1 \Leftrightarrow e^{s_0 T_a} = e^{\bar{s}_0 T_a}$$

nên  $\hat{A}$  sẽ có một giá trị riêng  $z_0 = \bar{z}_0$  bội hai. Mặt khác, do  $A$  có hai vector riêng ứng với  $s_0, \bar{s}_0$  khác nhau độc lập tuyến tính, nên  $\hat{A}$  cũng sẽ có hai vector riêng độc lập tuyến tính ứng với một giá trị riêng  $z_0 = \bar{z}_0$  bội hai. Suy ra:

$$\text{Rank}(z_0 I - \hat{A}) \leq n - 2 \Leftrightarrow \text{Rank}(z_0 I - \hat{A}, \hat{B}) \leq n - 1$$

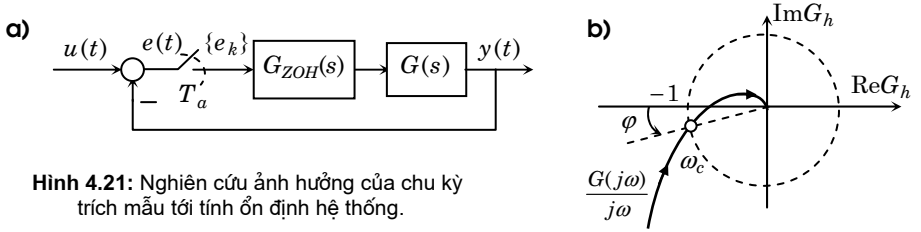
vì  $\hat{B}$  là vector cột (hệ SISO). Vậy, theo tiêu chuẩn Hautus, hệ không liên tục (4.74) là không điều khiển được hoàn toàn. Tương tự, ta cũng có được khẳng định về tính không quan sát được của (4.74).  $\square$

### Quan hệ giữa chu kỳ trích mẫu và tính ổn định

Xét hệ kín có sơ đồ khối ở hình 4.21a) với sự tham gia của khâu ZOH ở đầu vào khâu liên tục  $G(s)$ . Hệ kín này có hàm truyền hệ hở là:

$$G_h(s) = (1 - e^{-sT_a}) \frac{G(s)}{s} \quad (4.75)$$

Như vậy hệ hở có chứa một khâu trễ với thời gian trễ  $T_a$ .



**Hình 4.21:** Nghiên cứu ảnh hưởng của chu kỳ trích mẫu tới tính ổn định hệ thống.

Giả sử  $G(s)$  là ổn định. Vậy thì thành phần  $\frac{G(s)}{s}$  trong (4.75) chỉ có một điểm cực  $s=0$  duy nhất không nằm bên trái trục ảo. Do đó theo nội dung tiêu chuẩn Nyquist (định lý 2.23 và 2.27), hệ kín với hàm truyền hệ hở chỉ chứa riêng thành phần  $\frac{G(s)}{s}$ , tức là khi có chu kỳ trích mẫu  $T_a=0$ , sẽ ổn định khi và chỉ khi đường đồ thị hàm đặc tính tần biên-pha  $\frac{G(j\omega)}{j\omega}$ ,  $0 \leq \omega \leq \infty$  cắt đường tròn đơn vị tại điểm cắt  $\varphi_c = \arccos \frac{G(j\omega_c)}{j\omega_c}$  có góc cắt lớn hơn  $-\pi$ , tức là có góc dự trữ ổn định  $\varphi = \pi + \varphi_c > 0$  như minh họa ở hình 4.21b.

Bây giờ ta xét ảnh hưởng của chu kỳ trích mẫu  $T_a > 0$  tới góc dự trữ ổn định  $\varphi$ . Từ:

$$\text{arc} G_h(j\omega) = \text{arc} \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \text{arc}(1 - e^{-j\omega T_a}) = \text{arc} \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \arctan \left( \tan \frac{\omega T_a}{2} \right)$$

cũng như:

$$\left| 1 - e^{j\omega T_a} \right| \leq \sqrt{2} \text{ là bị chặn với mọi } \omega \text{ và } T_a$$

ta sẽ thấy nếu tăng chu kỳ trích mẫu  $T_a$  để có  $\text{ctan}(\frac{\omega_c T_a}{2}) < 0$ , góc dự trữ ổn định sẽ giảm và nếu góc dự trữ ổn định giảm tới giá trị  $\varphi \leq 0$ , hệ kín sẽ mất ổn định. Vậy:

**Định lý 4.14:** Xét hệ kín ổn định cho ở hình 4.21a) với khâu  $G(s)$  cũng ổn định. Ký hiệu:

$$\varphi = \pi + \arctan \frac{G(j\omega_c)}{j\omega_c} \text{ với } \left| \frac{G(j\omega_c)}{j\omega_c} \right| = 1$$

là góc dự trữ ổn định. Nếu chu kỳ trích mẫu  $T_a$  đủ lớn làm cho:

$$\arctan \left( \text{ctan} \frac{\omega_c T_a}{2} \right) < -\varphi$$

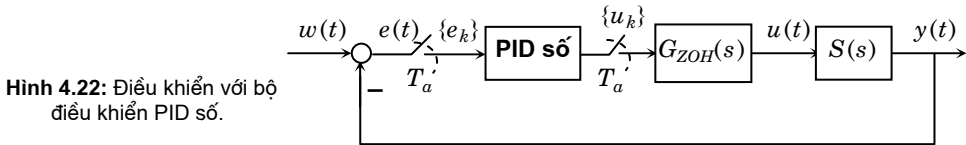
thì hệ kín sẽ mất ổn định.

## 4.4 Thiết kế bộ điều khiển

### 4.4.1 Chọn tham số cho bộ điều khiển PID số

#### Cấu trúc bộ điều khiển PID số

Hình 4.22 biểu diễn một hệ thống điều khiển có sử dụng bộ điều khiển PID số, tức là bộ điều khiển PID có tín hiệu vào ra dạng số (không liên tục và rời rạc). Tín hiệu đầu ra của bộ PID số là dãy  $\{u_k\}$  được đưa đến điều khiển đối tượng có hàm truyền liên tục  $S(s)$ . Do  $\{u_k\}$  là tín hiệu không liên tục-rời rạc nên để có thể làm tín hiệu điều khiển cho đối tượng liên tục ta cần phải liên tục hóa nó (trong miền thời gian) bằng bộ chuyển đổi số-tương tự ZOH với hàm truyền  $G_{ZOH}(s)$ .



Để xác định mô hình không liên tục của bộ PID số ta sẽ đi từ mô hình liên tục của nó trong miền thời gian:

$$u(t) = k_p \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) = \underbrace{k_p e(t)}_{u_P(t)} + \underbrace{\frac{k_p}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{u_I(t)} + \underbrace{k_p T_d \frac{de(t)}{dt}}_{u_D(t)}$$

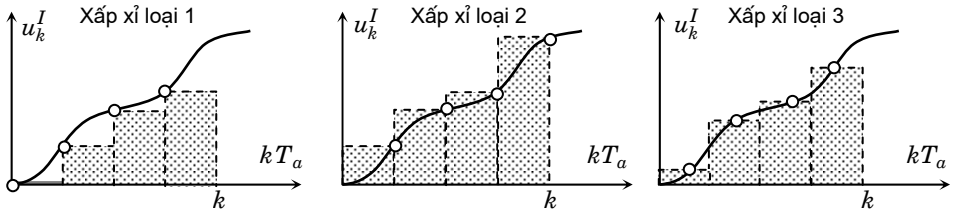


Khi đầu vào  $e(t)$  của PID số được thay bằng dãy  $\{e_k\}$  có chu kỳ trích mẫu  $T_a$  thì:

- Khâu khuếch đại  $u_P(t) = k_p e(t)$  được thay bằng  $u_k^P = k_p e_k \Rightarrow U_P(z) = k_p E(z)$
- Khâu tích phân  $u_I(t) = \frac{k_p}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau$  được thay bằng (hình 4.23):
  - a) Xấp xỉ loại 1:  $u_k^I = \frac{k_p T_a}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e_i = u_{k-1}^I + \frac{k_p T_a}{T_I} e_{k-1} \Rightarrow U_I(z) = \frac{k_p T_a}{T_I(z-1)} E(z)$
  - b) Xấp xỉ loại 2:  $u_k^I = \frac{k_p T_a}{T_I} \sum_{i=1}^k e_i = u_{k-1}^I + \frac{k_p T_a}{T_I} e_k \Rightarrow U_I(z) = \frac{k_p T_a z}{T_I(z-1)} E(z)$
  - c) Xấp xỉ loại 3:  $u_k^I = \frac{k_p T_a}{T_I} \sum_{i=1}^k \frac{e_{i-1} + e_i}{2} \Rightarrow U_I(z) = \frac{k_p T_a}{2T_I} \frac{z+1}{z-1} E(z)$
- 3) Khâu vi phân  $u_D(t) = k_p T_D \frac{de(t)}{dt}$  được thay bằng  $u_k^D = \frac{k_p T_D}{T_a} (e_k - e_{k-1})$

Thay các công thức xấp xỉ trên vào  $u_k = u_k^P + u_k^I + u_k^D$  ta sẽ được hàm truyền của bộ điều khiển PID không liên tục:

- Xấp xỉ loại 1:  $G_{PID}(z) = k_p \left[ 1 + \frac{T_a}{T_I(z-1)} + \frac{T_D(z-1)}{T_a z} \right]$  (4.76)
- Xấp xỉ loại 2:  $G_{PID}(z) = k_p \left[ 1 + \frac{T_a z}{T_I(z-1)} + \frac{T_D(z-1)}{T_a z} \right]$
- Xấp xỉ loại 3:  $G_{PID}(z) = k_p \left[ 1 + \frac{T_a(z+1)}{2T_I(z-1)} + \frac{T_D(z-1)}{T_a z} \right]$



Hình 4.23: Xấp xỉ khâu tích phân trong PID

### Xác định tham số cho PID số bằng thực nghiệm

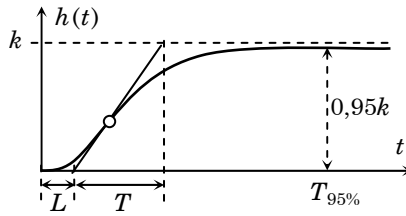
Tương tự như ở phương pháp thực nghiệm của Ziegler–Nichols, Takahashi cũng đưa ra một phương pháp xác định ba tham số  $k_p$ ,  $T_I$  và  $T_D$  của PID số hoặc từ đường đồ thị hàm quá độ  $h(t)$  của đối tượng  $S(s)$  hoặc từ giá trị tối hạn  $k_{th}$  và  $T_{th}$ .

1) Xác định từ hàm quá độ của đối tượng:

Điều kiện để áp dụng được phương pháp Takahashi là đối tượng phải ổn định, có hàm quá độ  $h(t)$  đi từ 0 và có dạng hình chữ S (không có độ quá điều chỉnh).

Hình 4.24 biểu diễn dạng  $h(t)$  chung cho những đối tượng có thể áp dụng được phương pháp Takahashi. Từ đường  $h(t)$  đó ta lấy được các giá trị:

- $k$  là hệ số khuếch đại của đối tượng, được xác định từ  $h(t)$  theo  $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$
- $L$  là giá trị xấp xỉ thời gian trễ. Nó là giao điểm đường tiếp tuyến với  $h(t)$  tại điểm uốn với trục thời gian.
- $T$  là giá trị đặc trưng cho quá trình quá độ. Nó là thời gian cần thiết để đường tiếp tuyến với  $h(t)$  tại điểm uốn đi được từ 0 tới  $k$ .
- $T_{95\%}$  là điểm thời gian mà  $h(t)$  đạt được giá trị  $0,95k$ .



**Hình 4.24:** Xác định tham số của PID số theo phương pháp Takahashi.

Thời gian trích mẫu  $T_a$  có thể được chọn từ các thông số của  $h(t)$  cho đối tượng liên tục có  $h(t)$  ở hình 4.24 như sau:

- Xác định từ  $L$ : Nếu  $\frac{T}{L} < 12$  thì  $\frac{L}{5} \leq T_a \leq \frac{L}{2}$ .
- Xác định từ  $T$ :  $T_a \leq \frac{T}{10}$
- Xác định từ  $T_{95\%}$ :  $\frac{T_{95\%}}{20} \leq T_a \leq \frac{T_{95\%}}{10}$

Nói chung, nếu thời gian trích mẫu  $T_a$  được chọn đã thỏa mãn  $T_a \leq 2L$  thì ba tham số  $k_p$ ,  $T_I$  và  $T_D$  của PID số sẽ được xác định từ  $k$ ,  $L$  và  $T$  theo phương pháp Takahashi như sau:

- Nếu chỉ sử dụng riêng bộ P số:  $k_p = \frac{T}{k(L + T_a)}$
- Nếu sử dụng bộ PI số:  $k_p = \frac{0,9T}{k(L + 0,5T_a)}$  và  $T_I = \frac{10}{3}(L + 0,5T_a)$
- Nếu sử dụng bộ PID số:  $k_p = \frac{1,2T}{k(L + T_a)}$ ,  $T_I = \frac{2(L + 0,5T_a)^2}{L + T_a}$ ,  $T_D = \frac{L + T_a}{2}$

2) Xác định từ giá trị tới hạn:

Bên cạnh phương pháp xác định tham số như trên, và nếu không có được đồ thị hàm quá độ  $h(t)$  của đối tượng thì ta có thể xác định  $k_p$ ,  $T_I$  và  $T_D$  của PID số như sau:

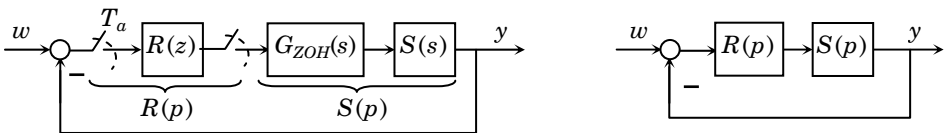
- Thay bộ điều khiển PID số trong hệ kín (hình 4.22) bằng bộ khuếch đại  $k$ . Sau đó tăng  $k$  tới giá trị tới hạn  $k_{th}$  để hệ kín có dao động điều hòa, tức là  $y(t)=h(t)$  có dạng hàm tuần hoàn. Xác định chu kỳ  $T_{th}$  của dao động.
- Xác định  $k_p$ ,  $T_I$  và  $T_D$  của PID số:
  - a) Nếu chỉ sử dụng riêng bộ P số:  $k_p = 0,5 k_{th}$
  - b) Nếu sử dụng bộ PI số:  $k_p = 0,45 k_{th}$  và  $T_I = 0,83 T_{th}$
  - c) Nếu sử dụng bộ PID số:  $k_p = 0,6 k_{th}$ ,  $T_I = 0,83 T_{th}$  và  $T_D = 0,125 T_{th}$

#### 4.4.2 Các phương pháp thiết kế trong miền tần số

##### Sử dụng ánh xạ lưỡng tuyến tính để thiết kế bộ điều khiển

Trong chương 2 ta đã làm quen với nhiều phương pháp thiết kế bộ điều khiển liên tục rất hữu hiệu như phương pháp tối ưu độ lớn (còn gọi là tối ưu modul), tối ưu đối xứng, cân bằng mô hình .... Các phương pháp này đều có một điểm chung là sử dụng công cụ phức (hàm truyền) nên chúng vẫn thường được xếp vào lớp các phương pháp thiết kế trong miền tần số.

Mong muốn sử dụng những phương pháp thiết kế trong miền tần số này để tổng hợp bộ điều khiển không liên tục, người ta đã nghĩ ra ánh xạ lưỡng tuyến tính nhằm chuyển hàm  $S(z)$  của đối tượng sang miền tần số  $p = \delta + jv$  gần giống như miền  $s = \sigma + j\omega$  của hệ liên tục, sau đó thiết kế bộ điều khiển giả liên tục  $R(p)$  cho đối tượng  $S(p)$  bằng các phương pháp thiết kế hệ liên tục đã biết rồi cuối cùng lại thông qua ánh xạ lưỡng tuyến tính đó để chuyển ngược  $R(p)$  sang miền Z thành  $R(z)$  – hình 4.25.



**Hình 4.25:** Chuyển hệ không liên tục dạng giả "liên tục" để thiết kế bộ điều khiển.

Ở mục trước, khi xét tính ổn định hệ không liên tục, ta đã được biết một ánh xạ lưỡng tuyến tính (với  $a=1$ ), đó là:

$$z = \frac{p+1}{p-1} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{z+1}{z-1}$$

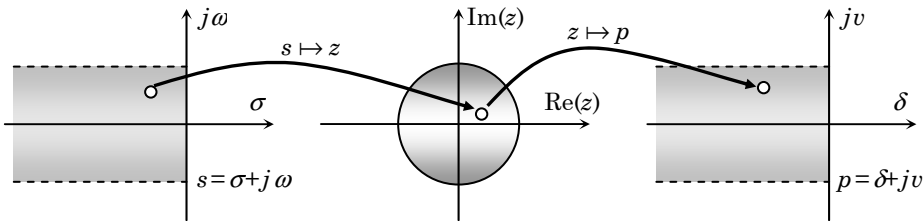
Ánh xạ này được sử dụng nhằm kiểm tra tính ổn định hệ không liên tục bằng các công cụ xét tính ổn định hệ liên tục.

Tuy nhiên, đối với công việc thiết kế bộ điều khiển thì ánh xạ trên tỏ ra không phù hợp vì nó đã không để ý tới tính tuần hoàn của:

$$z = e^{sT_a} = e^{(\sigma + j\omega)T_a} \quad (\text{với chu kỳ } \Omega = \frac{2\pi}{T_a} \text{ của } \omega) \quad (4.77)$$

Bởi vậy ta cần có một ánh xạ lưỡng tuyến tính khác phù hợp hơn sao cho ánh xạ này giữ được bản chất của công thức (4.77) là chuyển những điểm  $z$  nằm trong đường tròn đơn vị chỉ vào một "dải băng" nằm bên trái trục ảo (hình 4.26). Ánh xạ đó là công thức Tustin:

$$z = \frac{2 + T_a p}{2 - T_a p} \Leftrightarrow p = \frac{2}{T_a} \frac{z + 1}{z - 1} \quad (4.78)$$



**Hình 4.26:** Minh họa ánh xạ lưỡng tuyến tính được sử dụng để thiết kế bộ điều khiển không liên tục

Mặc dù ánh xạ (4.78) đã tạo ra được một dải băng trong mặt phẳng phức  $p = \delta + jv$  có dạng "gần giống" như trong mặt phẳng  $s = \sigma + j\omega$ , song sự gần giống đó cũng có nghĩa là hoàn toàn chưa giống nhau. Điều này ta có thể thấy thông qua việc thay  $p = jv$  và  $z = e^{j\omega T_a}$  vào công thức (4.78) và được:

$$\begin{aligned} p = \frac{2}{T_a} \frac{z + 1}{z - 1} &\Rightarrow jv = \frac{2}{T_a} \frac{e^{j\omega T_a} + 1}{e^{j\omega T_a} - 1} = \frac{2}{T_a} j \tan \frac{\omega T_a}{2} \\ &\Rightarrow v = \frac{2}{T_a} \tan \frac{\omega T_a}{2} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Công thức hiệu chỉnh  $\omega$  thành  $v$  theo (4.79) cần phải được lưu tâm khi sử dụng các phương pháp thiết kế bộ điều khiển liên tục có các giá trị tần số cắt  $\omega_c$  hay các tần số gẫy  $\omega_1, \omega_2$  cho trước để thiết kế bộ điều khiển giả liên tục  $R(p)$ , chẳng hạn như khi sử dụng phương pháp thiết kế với biểu đồ Bode.

Tổng kết lại, thuật toán thiết kế bộ điều khiển không liên tục  $R(z)$  có sử dụng ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.78) và các phương pháp thiết kế hệ liên tục sẽ gồm các bước:

- Từ hàm truyền  $S(s)$  của đối tượng, xác định  $S(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{S(s)}{s}\right\}$ .
- Chuyển  $S(z)$  thành hàm "liên tục"  $S(p)$  nhờ ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.78).
- Thiết kế bộ điều khiển  $R(p)$  "liên tục" cho đối tượng cũng "liên tục"  $S(p)$  bằng các phương pháp đã biết như tối ưu độ lớn, tối ưu đối xứng, cân bằng mô hình, biểu đồ Bode. Nếu trong phương pháp thiết kế đó có sử dụng tần số cắt  $\omega_c$  hay các tần số gãy  $\omega_1, \omega_2$  cho trước thì cũng phải chuyển những giá trị cho trước đó sang miền  $p$  thành tần số cắt  $v_c$ , tần số gãy  $v_1, v_2$  tương ứng nhờ công thức (4.79).
- Chuyển ngược  $R(p)$  tìm được sang miền  $Z$  nhờ ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.78).

**Ví dụ 4.30:** Minh họa thuật toán thiết kế nhờ ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.78)

Cho đối tượng liên tục có hàm truyền:

$$S(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

Đối tượng được điều khiển bằng bộ điều khiển không liên tục theo sơ đồ cấu trúc mô tả ở hình 4.25. Như vậy đối tượng thực sự của bộ điều khiển không liên tục  $R(z)$  sẽ gồm đối tượng đã cho và bộ chuyển đổi số-tương tự  $G_{ZOH}(s)$ .

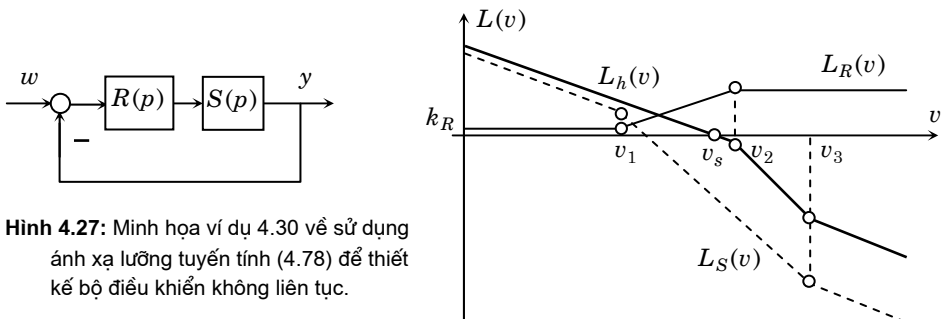
Nếu  $T_a = 0,2$  giây thì hàm truyền trong miền  $Z$  của đối tượng này là

$$S(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{S(s)}{s}\right\} = \frac{0,02(z+0,94)}{(z-1)(z+0,82)}$$

Sử dụng ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.78) ta có mô hình  $S(p)$  "giả liên tục" tương đương của  $S(z)$ :

$$S(p) = \frac{(1+0,0033p)(1-0,1p)}{p(1+1,003p)}$$

Biểu đồ Bode của  $S(p)$  là  $L_S(v)$  được vẽ minh họa trong hình 4.27. Từ đường  $L_h(v)$  mong muốn của hàm truyền hệ hở  $L_h(v)$  ta suy ra được đường  $L_R(v)$  của bộ điều khiển  $R(p)$  bằng cách cộng trừ đồ thị.



**Hình 4.27:** Minh họa ví dụ 4.30 về sử dụng ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.78) để thiết kế bộ điều khiển không liên tục.

Với  $L_R(v)$  tìm được (cho trường hợp  $v_s=2$  ,  $v_1=0,997$  và  $v_2=3,27$  ta suy ra

$$R(p) = \frac{2(1+1,003p)}{1+0,31p}$$

Chuyển ngược  $R(p)$  lại miền  $Z$  cũng với ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.78) thì bộ điều khiển không liên tục cần tìm sẽ là

$$R(z) = \frac{5,44(z-0,82)}{z-0,51}$$

□

### Thiết kế bộ điều khiển không liên tục theo mô hình mẫu

Giống như đã thực hiện cho đối tượng liên tục (chương 2, mục 2.4.3), ở đây ta cũng xét bài toán điều khiển đối tượng không liên tục, mô tả bởi:

$$S(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}$$

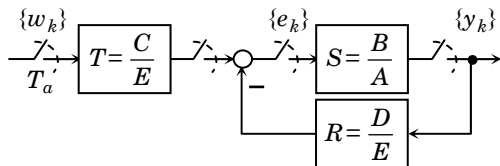
với hai bộ điều khiển mà ta phải thiết kế là

$$T(z) = \frac{C(z)}{E(z)} \quad \text{và} \quad R(z) = \frac{D(z)}{E(z)}$$

sao cho hệ kín (hình 4.28) có được mô hình mẫu mong muốn

$$G_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

**Hình 4.28:** Nội dung bài toán thiết kế bộ điều khiển theo mô hình mẫu.



Trước hết ta có thể nhận thấy ngay rằng về cơ bản, khi so sánh với bài toán của hệ liên tục (mục 2.4.3), thì ở đây không có sự phân biệt lớn nào, ngoại trừ:

- Các đa thức của biến  $s$  được thay bằng của biến  $z$ .
- Khái niệm đa thức Hurwitz được thay bằng *đa thức bền*, tức là đa thức có tất cả các nghiệm  $z$  nằm bên trong đường tròn đơn vị.
- Khái niệm đa thức phản Hurwitz được thay bằng đa thức *phản bền* (antistable), tức là đa thức tất cả các nghiệm  $z$  nằm bên ngoài đường tròn đơn vị.

Do đó, thuật toán đã có ở mục 2.4.3 cho hệ liên tục nay sẽ được sửa đổi lại thành:

- 1) Kiểm tra điều kiện về bậc của các đa thức:

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B \geq 0$$

2) Phân tích đa thức  $B(z)$  thành  $B=B^-B^+$ , trong đó  $B^-(z)$  là *đa thức bên* và  $B^+(z)$  là *đa thức phản bên*.

3) Kiểm tra điều kiện  $B_m=B^+ \hat{B}_m$

4) Sử dụng thuật toán Euclid mở rộng để xác định đa thức thừa số chung nhỏ nhất là  $H(z)$  của  $A(z)$  và  $B^+(z)$  cũng như các đa thức  $X(z)$ ,  $Y(z)$ ,  $U(z)$ ,  $V(z)$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} AX+B^+Y=H \\ AU+B^+V=0 \end{cases}$$

5) Xác định các nghiệm:

$$\hat{E} = \hat{E}_0 + UQ \quad \text{và} \quad D = D_0 + QV$$

trong đó:

$$\hat{E}_0 = XA_m, \quad D_0 = YA_m$$

và  $Q$  là một đa thức tùy ý. Để  $D(z)$  là đa thức có bậc thấp nhất ta có thể chọn:

$$Q = -D_0 \operatorname{div} V \quad \Rightarrow \quad D = D_0 \bmod V$$

6) Xác định  $E=B^- \hat{E}$  và  $C = H\hat{B}_m$

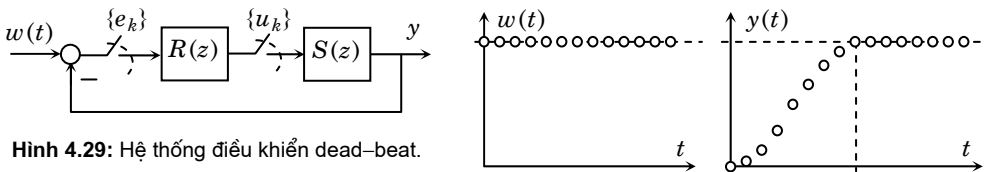
### Thiết kế bộ điều khiển dead-beat

Xét hệ kín không liên tục với sơ đồ cấu trúc ở hình 4.29 gồm bộ điều khiển có hàm truyền  $R(z)$  và đối tượng  $S(z)$ . Do  $S(z)$  là hợp thức theo  $z^{-1}$  (điều kiện causal) nên không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng nó có bậc  $n$  và:

$$S(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.80)$$

tức là có:

$$y_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} U(z)S(z) = 0 \text{ nếu } u_k=1, \text{ hay } U(z) = \frac{z}{z-1} \quad (4.81)$$



Hình 4.29: Hệ thống điều khiển dead-beat.

Hệ được gọi là dead-beat nếu nó thỏa mãn:

- Khi tín hiệu đầu vào  $w(t)$  thay đổi từ hằng số này sang hằng số khác thì *sau đúng  $n$  bước điều khiển* tín hiệu đầu ra cũng đạt tới được hằng số bằng tín hiệu đầu vào

(không có sai lệch tĩnh), trong đó  $n$  là bậc của mô hình hệ thống. Nói cách khác, hệ có quá trình quá độ là  $n$  bước.

- Ở chế độ xác lập, tín hiệu đầu ra không thay đổi ngay cả trong khoảng thời gian giữa các lần trích mẫu, tức là khi đó  $y(t)$  phải là hằng số chứ không riêng gì dãy các giá trị trích mẫu  $\{y_k\}$  của nó.

Bộ điều khiển làm cho hệ thống trở thành dead-beat được gọi là bộ điều khiển dead-beat hay bộ điều khiển có *thời gian hiệu chỉnh hữu hạn*. Nhiệm vụ đặt ra của bài toán là phải xác định  $R(z)$  sao cho hệ kín (hình 4.29):

$$G(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{R(z)S(z)}{1 + R(z)S(z)} \quad (4.82)$$

đạt được những yêu cầu của một hệ dead-beat. Nếu như rằng từ yêu cầu hệ dead-beat ta đã có được hàm truyền mong muốn  $G(z)$  của hệ kín thì với (4.80) ta cũng sẽ suy ra được bộ điều khiển  $R(z)$  theo nguyên tắc cân bằng mô hình như sau:

$$R(z) = \frac{1}{S(z)} \cdot \frac{G(z)}{1 - G(z)} \quad (4.83)$$

Bây giờ ta sẽ đi vào phân thiết kế bộ điều khiển dead-beat  $R(z)$ . Xét với  $w(t)=1(t)$  và yêu cầu rằng *sau đúng  $n$  bước điều khiển* tín hiệu đầu ra  $y(t)$  tới được hằng số bằng tín hiệu đầu vào, tức là  $y_k=1$  khi  $k \geq n$  và (4.81), tức là  $y_0=0$  nên dãy  $\{y_k\}$  phải có dạng

$$\{y_k\} = \{0, y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, 1, 1, \dots\} \quad (4.84)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} Y(z) &= y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_{n-1} z^{-n+1} + \sum_{k=n}^{\infty} z^{-k} \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{Y(z)}{W(z)} = Y(z) \frac{z-1}{z} = Y(z)(1-z^{-1}) \\ &= \left( y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_{n-1} z^{-n+1} + \sum_{k=n}^{\infty} z^{-k} \right) (1-z^{-1}) \\ &= y_1 z^{-1} + (y_2 - y_1) z^{-2} + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) z^{-n+1} + (1 - y_{n-1}) z^{-n} \\ &= p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_n z^{-n} = P(z^{-1}) \end{aligned} \quad (4.85)$$

với

$$\sum_{k=1}^n p_k = y_1 + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (1 - y_{n-1}) = 1$$

Nếu  $\{y_k\}$  có dạng như (4.84) mô tả thì tương ứng  $\{u_k\}$  cũng phải có dạng:

$$\{u_k\} = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_n, \dots\}$$

Do đó

$$U(z) = u_0 + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + \dots + u_{n-1} z^{-n+1} + u_n \sum_{k=n}^{\infty} z^{-k}$$



$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad \frac{U(z)}{W(z)} &= U(z) \frac{z-1}{z} = U(z)(1-z^{-1}) \\
&= \left( u_0 + u_1 z^{-1} + \dots + u_{n-1} z^{-n+1} + u_n \sum_{k=n}^{\infty} z^{-k} \right) (1-z^{-1}) \\
&= u_0 + (u_1 - u_0) z^{-1} + \dots + (u_{n-1} - u_{n-2}) z^{-n+1} + (u_n - u_{n-1}) z^{-n} \\
&= q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_n z^{-n} = Q(z^{-1})
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Từ (4.85) và (4.86) ta được:

$$S(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{W(z)} \cdot \frac{W(z)}{U(z)} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

sau đó so sánh với (4.80) sẽ có

$$\begin{aligned}
\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} &= \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_n z^{-n}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_n z^{-n}} \\
&= \frac{\frac{p_1}{q_0} z^{-1} + \frac{p_2}{q_0} z^{-2} + \dots + \frac{p_n}{q_0} z^{-n}}{1 + \frac{q_1}{q_0} z^{-1} + \frac{q_2}{q_0} z^{-2} + \dots + \frac{q_n}{q_0} z^{-n}}
\end{aligned}$$

và đây chính là công thức xác định các hệ số  $p_1, \dots, p_n$  của  $P(z^{-1})$  và  $q_0, q_1, \dots, q_n$  của  $Q(z^{-1})$  từ  $b_1, \dots, b_n$  và  $a_1, \dots, a_n$  của  $S(z)$  như sau:

1) Xác định  $q_0$  theo:

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{q_0} = \frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{q_0} \quad \Leftrightarrow \quad q_0 = \left( \sum_{k=1}^n b_k \right)^{-1}$$

2) Cân bằng hệ số các đa thức tử và mẫu với nhau:

$$p_k = q_0 b_k \quad \text{và} \quad q_k = q_0 a_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

3) Thay các đa thức  $G(z) = P(z^{-1})$  và  $S(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}$  tìm được vào công thức (4.83) của

$R(z)$  ta có hàm truyền của bộ điều khiển dead-beat:

$$R(z) = \frac{1}{S(z)} \cdot \frac{G(z)}{1-G(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \cdot \frac{P(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} \tag{4.87}$$

**Chú ý:** Bộ điều khiển dead-beat đã được thiết kế cho trường hợp  $w(t)$  có dạng bậc thang trên đây sẽ mất tác dụng dead-beat nếu  $w(t)$  là các tín hiệu khác, chẳng hạn như với tín hiệu tăng đều  $w(t)=t1(t)$ . Ngoài ra, để hệ có các tín hiệu bên trong là bị chặn ở quá trình quá độ thì:

- Các điểm cực không ổn định (không nằm trong đường tròn đơn vị) của đối tượng  $S(z)$  không thể cân bằng (bù) được bởi một điểm không của  $R(z)$ , vì nếu như vậy, hệ vẫn có bản chất không ổn định giữa những lần trích mẫu.

- Cũng như vậy, không thể cân bằng các điểm không nằm ngoài đường tròn đơn vị của  $S(z)$  bằng điểm cực của  $R(z)$ .

**Định lý 4.15:** Gọi  $G(z)$  là hàm truyền của hệ dead-beat gồm bộ điều khiển  $R(z)$  và đối tượng  $S(z)$ . Nếu có điểm cực  $z_k$  của  $S(z)$  không nằm bên trong đường tròn đơn vị, tức là có  $|z_k| \geq 1$ , thì nó phải là điểm không của  $1-G(z)$ . Ngược lại tất cả các điểm không  $z_l$  của  $S(z)$  không nằm bên trong đường tròn đơn vị cũng phải là điểm không của  $G(z)$ .

*Chứng minh:*

Gọi  $z_k$  là điểm cực của  $S(z)$  không nằm trong đường tròn đơn vị và ký hiệu:

$$S(z) = \frac{S_0(z)}{z - z_k}$$

Vậy thì điều khẳng định thứ nhất được suy ra ngay từ quan hệ:

$$1 - G(z) = 1 - \frac{R(z)S(z)}{1 + R(z)S(z)} = \frac{1}{1 + R(z)\frac{S_0(z)}{z - z_k}} = \frac{z - z_k}{z - z_k + R(z)S_0(z)}$$

vì  $R(z)$  không được phép cân bằng  $z_k$ , tức là  $R(z)$  không nhận  $z_k$  làm điểm không.

Tương tự, điều khẳng định thứ hai cũng được suy ra từ quan hệ (4.82). □

**Ví dụ 4.31:** Thiết kế bộ điều khiển dead-beat

Xét hệ kín có:

$$S(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

Khi đó với  $T_a = 1s$  thì:

$$S(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{S(s)}{s}\right\} = \frac{0,37z^{-1} + 0,26z^{-2}}{1 - 1,37z^{-1} + 0,37z^{-2}}$$

Vậy

$$P(z^{-1}) = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} \quad \text{và} \quad Q(z^{-1}) = q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}$$

có

$$q_0 = \left( \sum_{k=1}^n b_k \right)^{-1} = \frac{1}{0,37 + 0,26} = 1,58$$

$$p_1 = 0,58, \quad p_2 = 0,42, \quad q_1 = -2,16, \quad q_2 = 0,58$$

Suy ra bộ điều khiển  $R(z)$  theo (4.87) là:

$$R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{1,58 - 2,16z^{-1} + 0,58z^{-2}}{1 - 0,58z^{-1} - 0,42z^{-2}} \quad \square$$

#### 4.4.3 Các phương pháp thiết kế trong miền thời gian

##### Điều khiển phản hồi trạng thái gán điểm cực

Giống như ở hệ liên tục, khá nhiều chất lượng hệ thống được quyết định bởi vị trí điểm cực, tức là giá trị riêng của ma trận  $A$  trong hệ không liên tục, mô tả bởi:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$$

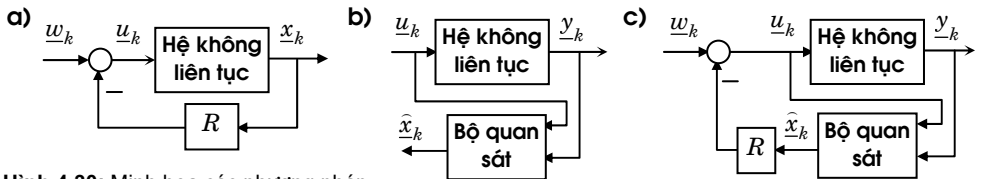
chẳng hạn khi tất cả các điểm cực nằm trong đường tròn đơn vị thì hệ ổn định, các điểm cực nằm càng gần gốc tọa độ thì quá trình quá độ của hệ càng ngắn .... Bởi vậy ở bài toán điều khiển sao cho hệ có được chất lượng mong muốn, mà những chất lượng đó liên quan trực tiếp tới vị trí điểm cực, người ta thường chuyển nó về việc xác định bộ điều khiển phản hồi (trạng thái)  $R$  như mô tả trong hình 4.30a, để hệ kín với mô hình:

$$\underline{x}_{k+1} = (A - BR)\underline{x}_k + B\underline{w}_k$$

nhận những giá trị cho trước  $z_1, \dots, z_n$  ứng với chất lượng mong muốn đó, làm điểm cực, tức là tìm  $R$  từ phương trình:

$$\det(zI - (A - BR)) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n), \forall z \quad (4.88)$$

Phương trình (4.88) trên hoàn toàn đồng nhất với phương trình 3.63 của chương 3. Do đó để tìm  $R$  từ (4.88) ta lại áp dụng được các phương pháp đã biết từ mục 3.4.1 như Ackermann, Roppenecker, modal ....



Hình 4.30: Minh họa các phương pháp điều khiển trong miền thời gian

##### Bộ quan sát trạng thái tiệm cận và kỹ thuật giảm bậc bộ quan sát

Bài toán thiết kế bộ quan sát cho hệ MIMO không liên tục, bậc  $n$ :

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k, & \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{u}_k \in \mathbb{R}^p \\ \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k, & \underline{y}_k \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.89)$$

được đặt ra khi vector trạng thái  $\underline{x}_k$  trong hệ là không đo được trực tiếp bằng cảm biến.

Giống như ở hệ liên tục, ta lại sử dụng bộ quan sát có cấu trúc (hình 4.30b):

$$\underline{\hat{x}}_{k+1} = A\underline{\hat{x}}_k + B\underline{u}_k + L(\underline{y}_k - C\underline{\hat{x}}_k - D\underline{u}_k) \quad (4.90)$$

thì tìm  $L$  để có  $\underline{e}_k = \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k \rightarrow \underline{0}$ , trong đó sai lệch quan sát  $\underline{e}_k$  có mô hình:

$$\underline{e}_{k+1} = (A - LC)\underline{e}_k$$

Bài toán tìm  $L$  này đồng nhất với bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $L^T$  gán các điểm cực cho trước  $z_1, \dots, z_n$  nằm bên trong đường tròn đơn vị, cho hệ đối ngẫu:

$$\underline{x}_{k+1} = A^T \underline{x}_k + C^T \underline{u}_k$$

tức là:

$$\det(zI - (A - LC)) = \det(zI - (A^T - C^T L^T)) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n), \forall z \quad (4.91)$$

Bởi vậy ta lại áp dụng được các phương pháp quen biết như Ackermann, Roppennecker, modal ... để xác định  $L$ .

Bộ quan sát (4.90) cũng có bậc  $n$  giống như hệ đã cho. Tuy nhiên, nếu hệ (4.89) là hợp thức chặt ( $D = \Theta$ ), có  $\text{Rank}(C) = m$  với  $m \leq n$  là số tín hiệu ra thì do  $m$  trạng thái trong số  $n$  phần tử của  $\underline{x}_k$  đã có thể xác định trực tiếp từ phương trình thứ hai trong (4.89) nên ta có thể hạ bậc của bộ quan sát (4.90) xuống còn  $n - m$ . Không mất tính tổng quát nếu ta giả sử  $m$  vector cột đầu tiên trong  $C$  là độc lập tuyến tính. Khi đó, với:

$$\underline{y}_k = C \underline{x}_k = (C_1, C_2) \begin{pmatrix} \underline{x}_{1,k} \\ \underline{x}_{2,k} \end{pmatrix} = C_1 \underline{x}_{1,k} + C_2 \underline{x}_{2,k}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \underline{x}_{1,k} \in \mathbb{R}^m$$

thì  $C_1$  là ma trận không suy biến và  $m$  phần tử đầu tiên của  $\underline{x}_k$  nằm trong  $\underline{x}_{1,k}$  được xác định trực tiếp bởi:

$$\underline{x}_{1,k} = C_1^{-1}(\underline{y}_k - C_2 \underline{x}_{2,k}) \quad (4.92)$$

Do đó chỉ còn  $n - m$  phần tử còn lại của  $\underline{x}_k$  nằm trong  $\underline{x}_{2,k}$  là phải quan sát. Viết lại (4.89) sang biến trạng thái mới:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{x}_{1,k} \\ \underline{x}_{2,k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ \Theta & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{x}_{2,k} \end{pmatrix} = \hat{C} \begin{pmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{x}_{2,k} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{x}_{2,k} \end{pmatrix} = \hat{C}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{x}_{1,k} \\ \underline{x}_{2,k} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{y}_{k+1} \\ \underline{x}_{2,k+1} \end{pmatrix} &= \hat{C}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{x}_{1,k+1} \\ \underline{x}_{2,k+1} \end{pmatrix} = \hat{C}^{-1} A \begin{pmatrix} \underline{x}_{1,k} \\ \underline{x}_{2,k} \end{pmatrix} + \hat{C}^{-1} B \underline{u}_k = \hat{C}^{-1} A \hat{C} \begin{pmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{x}_{2,k} \end{pmatrix} + \hat{C}^{-1} B \underline{u}_k \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{x}_{2,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \underline{u}_k = \begin{pmatrix} A_1 \underline{y}_k + A_2 \underline{x}_{2,k} + B_1 \underline{u}_k \\ A_3 \underline{y}_k + A_4 \underline{x}_{2,k} + B_2 \underline{u}_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

trong đó  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$  là những ma trận con của  $\hat{C}^{-1} A \hat{C}$  và  $\hat{C}^{-1} B$  có số chiều tương ứng, ta có:

$$\underline{x}_{2,k+1} = A_4 \underline{x}_{2,k} + (B_2, A_3) \begin{pmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \hat{\underline{y}}_k = \underline{y}_{k+1} - A_1 \underline{y}_k - B_1 \underline{u}_k = A_2 \underline{x}_{2,k}$$

Do đó, thay vì phải sử dụng bộ quan sát (4.90) bậc  $n$ , ta sử dụng bộ quan sát bậc  $n-m$  cho vector trạng thái con  $\underline{x}_{2,k}$ :

$$\underline{q}_{k+1} = A_4 \underline{q}_k + (B_2, A_3) \begin{pmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} - L(\hat{\underline{y}}_k - A_2 \underline{q}_k) \quad (4.93)$$

với  $L$  trong (4.93) là ma trận cần phải tìm sao cho tất cả giá trị riêng của  $A_4 - LA_2$  nằm bên trong đường tròn đơn vị, là điều kiện cần và đủ để có  $\underline{q}_k \rightarrow \underline{x}_{2,k}$ . Cuối cùng, khi đã có  $\underline{x}_{2,k}$  ta cũng sẽ có  $\underline{x}_{1,k}$  theo (4.92).

**Chú ý:** Do  $\hat{\underline{y}}_k$  trong (4.93) có sử dụng  $\underline{y}_{k+1}$  nên các biến trạng thái  $\underline{q}_k \rightarrow \underline{x}_{2,k}$  chỉ xác định được sau một nhịp chu kỳ trích mẫu. Nói cách khác, khi sử dụng bộ quan sát giảm bậc (4.93) và (4.92), đầu ra của bộ quan sát ở hình 4.30b) sẽ là  $\hat{\underline{x}}_{k-1} = \begin{pmatrix} \underline{x}_{1,k-1} \\ \underline{q}_{k-1} \end{pmatrix} \rightarrow \underline{x}_{k-1}$ .

### Thiết kế bộ lọc Kalman (quan sát trạng thái Kalman)

Bộ quan sát tiệm cận (4.90) có  $L$  được xác định theo (4.91) không áp dụng được cho hệ tham số hằng tác động bởi nhiễu  $\underline{n}_k, \underline{v}_k$ :

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + \underline{n}_k \\ \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k + \underline{v}_k \end{cases} \quad (4.94)$$

trong đó  $\underline{n}_k, \underline{v}_k$  được giả thiết là hai tín hiệu nhiễu egodic, có kỳ vọng bằng 0, không tương quan với nhau,  $\underline{v}_k$  không tương quan với trạng thái  $\underline{x}_k$  của hệ, cũng như  $\underline{x}_k$  không tương quan với tất cả các giá trị trạng thái trước đó  $\underline{x}_i, i=1,2, \dots, k-1$ , tức là có:

$$\begin{aligned} M\{\underline{n}_k\} = M\{\underline{v}_k\} = 0, \quad M\{\underline{n}_k \underline{v}_i^T\} = \Theta, \quad M\{\underline{x}_k \underline{v}_i^T\} = \Theta \\ M\{\underline{x}_k \underline{x}_i^T\} = \Theta \text{ với } i=1,2, \dots, k-1, \quad M\{\underline{n}_k \underline{n}_i^T\} = N\delta_{k-i} \text{ và } M\{\underline{v}_k \underline{v}_i^T\} = V\delta_{k-i} \end{aligned}$$

với  $N$  và  $V$  là hai ma trận tự tương của  $\underline{n}_k, \underline{v}_k$  và  $\Theta$  là ma trận có các phần tử 0.

Để chỉnh sửa lại, Kalman đề xuất sử dụng bộ quan sát  $\hat{\underline{x}}_k \approx \underline{x}_k$  với cấu trúc:

$$\begin{cases} \underline{x}'_k = A\hat{\underline{x}}_{k-1} + B\underline{u}_{k-1} \text{ với } \hat{\underline{x}}_0 \text{ tùy chọn} \\ \hat{\underline{x}}_k = \underline{x}'_k + L_k(\underline{y}_k - C\underline{x}'_k - D\underline{u}_k) \end{cases} \quad (4.95)$$

cho từng thời điểm  $k=1,2, \dots$ . Vector  $\underline{x}'_k$  trong (4.95) được xem như giá trị cận trái của  $\hat{\underline{x}}_k$  tại thời điểm trích mẫu  $k$ . So với bộ quan sát tiệm cận (4.90) thì trong (4.95) ta có một sửa đổi nhỏ là  $L(\underline{y}_{k-1} - C\hat{\underline{x}}_{k-1} - D\underline{u}_{k-1})$  được thay bởi  $L_k(\underline{y}_k - C\underline{x}'_k - D\underline{u}_k)$  để tận dụng luôn được các giá trị  $\underline{y}_k, \underline{u}_k$  vừa đo ở thời điểm cuối  $k$  vào việc xác định  $\hat{\underline{x}}_k$ . Ma trận  $L_k$  ở đây sẽ được tìm sao cho kỳ vọng sai lệch quan sát là nhỏ nhất:

$$Q = M \left\{ \underline{e}_k^T \underline{e}_k \right\} \rightarrow \min \quad \text{với} \quad \underline{e}_k = \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k \quad (4.96)$$

Để tìm nghiệm  $L_k$  của bài toán tối ưu (4.96) trên, ta cần đến nguyên lý trực giao:

$$M \left\{ \left[ \mathcal{X}(t) - a \mathcal{Y}(t) \right]^2 \right\} \xrightarrow{a} \min \quad \Leftrightarrow \quad M \left\{ \left( \mathcal{X}(t) - a \mathcal{Y}(t) \right) \mathcal{Y}(t) \right\} = 0$$

trong đó  $\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(t)$  là hai quá trình ngẫu nhiên. Nó được suy ra từ điều hiển nhiên rằng hàm khả vi xác định dương có giá trị nhỏ nhất tại điểm mà đạo hàm của nó tại đó có giá trị bằng 0. Áp dụng nguyên lý trực giao đó cho bài toán tối ưu (4.96), lúc này được viết lại thành:

$$\begin{aligned} Q &= M \left\{ \left( \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k \right)^T \left( \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k \right) \right\} \\ &= M \left\{ \left( \underline{x}_k - \underline{x}'_k - L_k (\underline{y}'_k - C \underline{x}'_k) \right)^T \left( \underline{x}_k - \underline{x}'_k - L_k (\underline{y}'_k - C \underline{x}'_k) \right) \right\} \quad \text{với} \quad \underline{y}'_k = \underline{y}_k - D \underline{u}_k \\ &= M \left\{ \left( \underline{q}_k - L_k \underline{y}'_k \right)^T \left( \underline{q}_k - L_k \underline{y}'_k \right) \right\} \rightarrow \min, \quad \text{với} \quad \underline{q}_k = \underline{x}_k - (I - L_k C) \underline{x}'_k \end{aligned}$$

ta được:

$$\Theta = M \left\{ \left( \underline{q}_k - L_k \underline{y}'_k \right) \left( \underline{y}'_i \right)^T \right\}, \quad i=1, 2, \dots, k$$

Kết hợp thêm với giả thiết rằng  $\underline{n}_k, \underline{v}_k$  có kỳ vọng bằng 0, không tương quan với nhau và  $\underline{v}_k$  không tương quan với trạng thái  $\underline{x}_k$  của hệ, do đó cũng không tương quan với  $\underline{x}'_k$ , cũng như  $\underline{n}_k$  không tương quan với  $\underline{y}_k$  và  $\underline{x}_k$  không tương quan với tất cả các giá trị trạng thái trước đó là  $\underline{x}_i, i=1, 2, \dots, k-1$ , bao gồm cả  $\underline{x}'_k$ , ta còn có thêm:

$$\Theta = M \left\{ \left( \underline{q}_k - L_k \underline{y}'_k \right) \left( \underline{y}'_k - C \underline{x}'_k \right)^T \right\}$$

Điều này dẫn đến:

$$\begin{aligned} \Theta &= M \left\{ \left( \underline{q}_k - L_k \underline{y}'_k \right) \left( \underline{y}'_k - C \underline{x}'_k \right)^T \right\} \\ &= M \left\{ \left( \underline{x}_k - (I - L_k C) \underline{x}'_k - L_k \underline{y}'_k \right) \left( \underline{y}'_k - C \underline{x}'_k \right)^T \right\} \\ &= M \left\{ \left[ \underline{x}_k - \underline{x}'_k - L_k C \left( \underline{x}_k - \underline{x}'_k \right) - L_k \underline{v}_k \right] \left( C \left( \underline{x}_k - \underline{x}'_k \right) + \underline{v}_k \right)^T \right\} \quad \text{vì} \quad \underline{y}'_k = C \underline{x}_k + \underline{v}_k \\ &= M \left\{ \left[ (I - L_k C) \underline{e}'_k - L_k \underline{v}_k \right] \left[ C \underline{e}'_k + \underline{v}_k \right]^T \right\} \quad \text{với} \quad \underline{e}'_k = \underline{x}_k - \underline{x}'_k \\ &= (I - L_k C) M \left\{ \left( \underline{e}'_k \right) \left( \underline{e}'_k \right)^T \right\} C^T - L_k V \quad \text{vì} \quad M \left\{ \underline{e}'_k \underline{v}_k^T \right\} = \Theta \\ &= (I - L_k C) P_k C^T - L_k V \quad \text{với} \quad P_k = M \left\{ \left( \underline{e}'_k \right) \left( \underline{e}'_k \right)^T \right\} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$(I - L_k C) P_k C^T - L_k V = \Theta \quad \Leftrightarrow \quad L_k = P_k C^T (C P_k C^T + V)^{-1}$$

Tiếp tục, ta xác định  $P_k$ :

$$\begin{aligned} P_k &= M \{ (\underline{e}'_k)(\underline{e}'_k)^T \} = M \{ (\underline{x}_k - \underline{x}'_k)(\underline{x}_k - \underline{x}'_k)^T \} \\ &= M \{ (A \underline{e}_{k-1} + \underline{n}_{k-1})(A \underline{e}_{k-1} + \underline{n}_{k-1})^T \} \\ &= A M \{ \underline{e}_{k-1} \underline{e}_{k-1}^T \} A^T + M \{ \underline{n}_{k-1} \underline{n}_{k-1}^T \} + 2 A M \{ \underline{e}_{k-1} \underline{n}_{k-1}^T \} \\ &= A K_{k-1} A^T + N \quad \text{vì} \quad M \{ \underline{e}_k \underline{n}_k^T \} = \Theta \end{aligned}$$

trong đó

$$K_{k-1} = M \{ \underline{e}_{k-1} \underline{e}_{k-1}^T \}$$

Ngoài ra, từ:

$$\begin{aligned} \underline{e}_k &= \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k \\ &= \underline{x}_k - \underline{x}'_k - L_k (C \underline{x}_k - C \underline{x}'_k + \underline{v}_k) \\ &= \underline{e}'_k - L_k C (\underline{x}_k - \underline{x}'_k) - L_k \underline{v}_k \\ &= (I - L_k C) \underline{e}'_k - L_k \underline{v}_k \end{aligned}$$

ta còn có:

$$\begin{aligned} K_k &= M \{ \underline{e}_k \underline{e}_k^T \} = M \left\{ \left[ (I - L_k C) \underline{e}'_k - L_k \underline{v}_k \right] \left[ (I - L_k C) \underline{e}'_k - L_k \underline{v}_k \right]^T \right\} \\ &= (I - L_k C) M \{ (\underline{e}'_k)(\underline{e}'_k)^T \} (I - L_k C)^T + L_k M \{ \underline{v}_k \underline{v}_k^T \} L_k^T, \quad \text{vì} \quad M \{ \underline{e}'_k \underline{v}_k^T \} = \Theta \\ &= (I - L_k C) P_k (I - L_k C)^T + L_k V L_k^T \\ &= (P_k - L_k C P_k) (I - C^T L_k^T) + L_k V L_k^T \\ &= P_k - L_k C P_k - P_k C^T L_k^T + L_k C P_k C^T L_k^T + L_k V L_k^T \\ &= (I - L_k C) P_k - P_k C^T L_k^T + L_k (C P_k C^T + V) L_k^T \\ &= (I - L_k C) P_k - P_k C^T L_k^T + P_k C^T (C P_k C^T + V)^{-1} (C P_k C^T + V) L_k^T \\ &= (I - L_k C) P_k \end{aligned}$$

Vậy bộ lọc Kalman với nhiệm vụ xác định  $\hat{\underline{x}}_k$ ,  $k=1, 2, \dots$  được xem như là giá trị trạng thái xấp xỉ cho  $\underline{x}_k$ ,  $k=1, 2, \dots$  của hệ (4.94), sẽ có cấu trúc bao gồm các công thức tính lặp trên, được viết chung lại như sau:

1) Chọn  $K_0$  và  $\hat{\underline{x}}_0$  tùy ý.

2) Thực hiện lần lượt với  $k=1, 2, \dots$  các bước sau:

- a) Tính  $P_k = AK_{k-1}A^T + N$  có sử dụng  $K_{k-1}$  từ vòng lặp trước
- b) Tính  $L_k = P_k C^T (CP_k C^T + V)^{-1}$
- c) Tính  $K_k = (I - L_k C)P_k$  cho vòng lặp sau
- d) Tính  $\underline{x}'_k = A\underline{\hat{x}}_{k-1} + B\underline{u}_{k-1}$  có sử dụng  $\underline{\hat{x}}_{k-1}$  từ vòng lặp trước
- e) Tính  $\underline{\hat{x}}_k = \underline{x}'_k + L_k (\underline{y}_k - C\underline{x}'_k - D\underline{u}_k)$

#### Điều khiển phản hồi đầu ra theo nguyên lý tách

Hệ kín ở hình 4.30c) gồm bộ điều khiển phản hồi trạng thái gán điểm cực  $R$  thỏa mãn (4.88) và bộ quan sát trạng thái (4.90), có phương trình trạng thái khi  $\underline{w}_k = \underline{0}$  là:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{q}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\underline{x}_k + BR\underline{q}_k \\ LC\underline{x}_k + (A - LC - BR)\underline{q}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR \\ LC & A - LC - BR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{q}_k \end{pmatrix}$$

Suy ra, nó có đa thức đặc tính:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} zI - A & BR \\ -LC & zI - A + LC + BR \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} zI - A + BR & BR \\ zI - A + BR & zI - A + LC + BR \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} zI - A + BR & BR \\ \Theta & zI - A + LC \end{pmatrix} \\ &= \det(zI - A + BR) \det(zI - A + LC) \end{aligned}$$

và đến được:

**Định lý 4.16:** Hệ kín phản hồi đầu ra ở hình 4.30c) gồm bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $R$  và bộ quan sát trạng thái (4.90) sẽ có các điểm cực là điểm cực của bộ điều khiển phản hồi trạng thái (4.88) và của bộ quan sát trạng thái.

Định lý trên khẳng định rằng bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi đầu ra luôn tách được thành hai bài toán con là bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái và bài toán thiết kế bộ quan sát trạng thái.

Mở rộng ra, tương tự như đã bàn ở hệ liên tục (định lý 3.41), nếu hệ kín phản hồi đầu ra như mô tả trong hình 3.40c) là SISO, với mô hình đối tượng điều khiển:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}u_k \\ y_k = \underline{c}^T \underline{x}_k + du_k \end{cases}$$

và có bộ quan sát tiệm cận (4.90) cũng như bộ phản hồi trạng thái gán điểm cực  $R$ , thì nó sẽ có hàm truyền là:

$$G(z) = \frac{\det \begin{pmatrix} zI - A & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{pmatrix}}{\det(zI - A + \underline{b}R)}$$



## Thiết kế bộ điều khiển dead-beat

Khái niệm hệ dead-beat đã được giải thích tại ngay mục trước trong phần trình bày các bước thiết kế bộ điều khiển dead-beat miền tần số. Tuy nhiên ở đó ta chưa xét đến điều kiện tồn tại bộ điều khiển. Để công việc thiết kế bộ điều khiển dead-beat nói chung, kể cả trong miền tần số và miền thời gian có thể có kết quả thì trước khi thực hiện công việc tổng hợp bộ điều khiển ta cần phải kiểm tra xem khi nào sẽ tồn tại một bộ điều khiển như vậy.

Hình 4.31 mô tả hệ thống phản hồi trạng thái gồm đối tượng SISO có mô hình:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}u_k, & B \text{ là vector cột} \\ y_k = \underline{c}^T \underline{x}_k, & \underline{c}^T \text{ là vector hàng} \end{cases} \quad (4.97)$$

và hai bộ điều khiển khuếch đại tĩnh  $R, V$ . Giả sử hệ là dead-beat. Khi đó hệ sẽ đi được từ trạng thái đầu  $\underline{x}_0$  bất kỳ về gốc tọa độ sau đúng  $n$  bước điều khiển (ứng với  $w=0$ ), nói cách khác  $\underline{x}_n = \underline{0}$ . Theo công thức (4.43) thì trạng thái  $\underline{x}_n$  tự do của hệ khi đó sẽ là:

$$\underline{x}_n = (A - \underline{b}R)\underline{x}_{n-1} = (A - \underline{b}R)^n \underline{x}_0$$

Như vậy, để có  $\underline{x}_n = \underline{0}$  thì phải có:

$$(A - \underline{b}R)^n = \Theta, \quad \Theta \text{ là ma trận có tất cả các phần tử bằng 0} \quad (4.98)$$

Rõ ràng phương trình trên chỉ có nghiệm  $R$  nếu đối tượng (4.97) điều khiển được hoàn toàn. Hơn nữa, do  $(A - \underline{b}R)^n = \Theta$ , được gọi là ma trận *nilpotent* bậc  $n$ , nên từ định lý Cayley–Hamilton, hệ kín phải có phương trình đặc tính:

$$\det(zI - (A - \underline{b}R)) = z^n \quad (4.99)$$

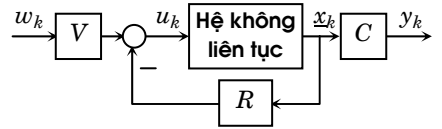
Từ đây ta đi đến được khẳng định:

**Định lý 4.17:** Nếu đối tượng SISO bậc  $n$  (có  $n$  biến trạng thái) mô tả bởi (4.97) là điều khiển được hoàn toàn thì luôn tồn tại bộ điều khiển dead-beat  $R, V$  và hệ kín dead-beat ở hình 4.31 sẽ có điểm cực  $z=0$  bội  $n$ .

**Chú ý:** Theo nội dung định lý 4.17 thì hệ kín có điểm cực bội  $n$  tại  $z=0$ . Việc có điểm cực bội  $z=0$  sẽ làm cho hệ khá nhạy cảm với sự thay đổi nhỏ trong đối tượng điều khiển. Nói cách khác hệ dead-beat không có tính bền vững cao.

Bây giờ ta chuyển sang việc thiết kế bộ điều khiển dead-beat  $R, V$ . Điều kiện (4.99) nói rằng bộ điều khiển  $R$  phải có chức năng gán được các điểm cực:

$$z_1 = \dots = z_n = 0$$



Hình 4.31: Điều khiển dead-beat

Do đó, theo công thức (3.68) của phương pháp Ackermann, nó sẽ là:

$$R = \underline{s}^T A^n \quad (4.100)$$

trong đó  $\underline{s}^T$  là vector hàng cuối cùng của  $(\underline{b}, A\underline{b}, \dots, A^{n-1}\underline{b})^{-1}$ , tức là:

$$\underline{s}^T = (0, \dots, 0, 1)(\underline{b}, A\underline{b}, \dots, A^{n-1}\underline{b})^{-1}$$

Bộ điều khiển  $V$  còn lại có nhiệm vụ phải tạo ra được  $y_k = w_k$  ở chế độ xác lập. Từ phương trình trạng thái của hệ kín (hình 4.31):

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = (A - \underline{b}R)\underline{x}_k + \underline{b}Vw_k \\ y_k = \underline{c}^T \underline{x}_k \end{cases}$$

ta có với công thức (4.44) và tính chất (4.98), đáp ứng ở đầu ra khi  $k \geq n$ :

$$y_k = \underline{c}^T \sum_{i=0}^{k-1} (A - \underline{b}R)^{k-i-1} \underline{b}Vw_i = \underline{c}^T \sum_{i=0}^{n-1} (A - \underline{b}R)^{n-i-1} \underline{b}Vw_i$$

Giả thiết tiếp giá trị tín hiệu kích thích  $w_k$  là hằng số, tức là  $w_0 = w_2 = \dots = w$ , ta sẽ được:

$$y_k = \underline{c}^T \sum_{i=0}^{n-1} (A - \underline{b}R)^{n-i-1} \underline{b}Vw = w \Rightarrow V = \frac{1}{\underline{c}^T \sum_{i=0}^{n-1} (A - \underline{b}R)^{n-i-1} \underline{b}}$$

Ngoài ra, với (4.98) ta còn có:

$$\begin{aligned} (I - (A - \underline{b}R)) \sum_{i=0}^{n-1} (A - \underline{b}R)^{n-i-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} (A - \underline{b}R)^{n-i-1} - \sum_{i=0}^{n-1} (A - \underline{b}R)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (A - \underline{b}R)^{n-i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} (A - \underline{b}R)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (A - \underline{b}R)^{n-i-1} - \sum_{i=0}^{n-2} (A - \underline{b}R)^{n-i-1} \\ &= (A - \underline{b}R)^0 = I \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } V = \frac{1}{\underline{c}^T (I - (A - \underline{b}R))^{-1} \underline{b}} \quad (4.101)$$

Tổng kết lại, ta đi đến:

**Định lý 4.18:** Hai bộ điều khiển  $R, V$  cho bởi (4.100) và (4.101) sẽ làm cho hệ kín ở hình 4.31 có được đáp ứng  $y_k = w$ ,  $k \geq n$  khi hệ được kích thích bằng tín hiệu hằng  $w_k = w$  ở đầu vào.

Đương nhiên rằng bộ điều khiển dead-beat phản hồi trạng thái trên cũng có thể chuyển được sang thành bộ điều khiển dead-beat phản hồi đầu ra bằng cách ghép thêm bộ quan sát trạng thái tiệm cận (4.90) hoặc bộ lọc Kalman vào trước khâu phản hồi trạng thái  $R$ .

#### 4.4.4 Nhập môn điều khiển dự báo

##### Nguyên tắc chung của điều khiển dự báo (MPC–model predictive control)

Hình 4.32a mô tả hệ thống điều khiển kín. Nguyên lý làm việc của bộ điều khiển dự báo trong hình được hiểu như sau. Tại thời điểm  $k$  hiện tại và trên cơ sở cực tiểu hóa một hàm mục tiêu  $Q$  nào đó cho trước được xây dựng từ chất lượng mong muốn định trước, trong khoảng thời gian tương lai  $k, k+1, \dots, k+N$  (hình 4.32b) chẳng hạn như:

$$Q = \sum_{i=k}^{k+N} \left[ (w_i - y_i)^2 + u_i^2 \right] \rightarrow \min \quad (4.102)$$

ta sẽ xác định được dãy giá trị tín hiệu điều khiển tương lai  $u_i, i=k, k+1, \dots, k+N$ . Trong số các giá trị tín hiệu điều khiển tương lai tìm được đó ta chỉ sử dụng  $u_k$  làm tín hiệu điều khiển ở thời điểm hiện tại  $k$ . Ở thời điểm  $k+1$  tiếp theo, ta lại lặp lại chu trình trên để có  $u_{k+1}$  và cứ như vậy bộ điều khiển dự báo sẽ phải thực hiện lặp bài toán tối ưu (4.102) tại từng chu kỳ trích mẫu. Hiển nhiên rằng trong bộ điều khiển dự báo phải có:

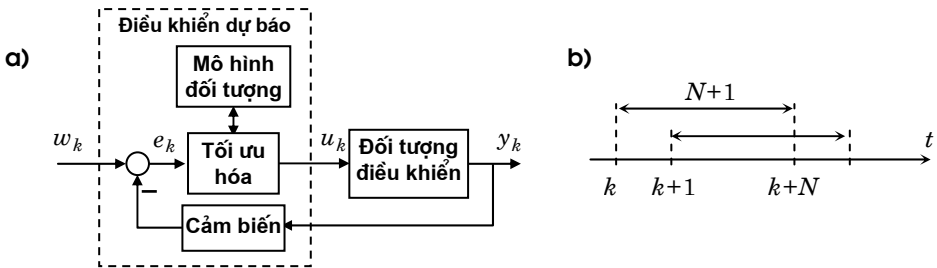
- Dãy giá trị tín hiệu đặt trước  $w_k$  và cảm biến đo tín hiệu ra  $y_k$
- Mô hình toán học của đối tượng.
- Một phiếm hàm mục tiêu, chẳng hạn như phiếm hàm (4.102) và thuật toán giải bài toán tối ưu với phiếm hàm mục tiêu đó.

Giá trị  $N$  trong (4.102) được gọi là cửa sổ dự báo. Có thể thấy ngay rằng khi  $N=\infty$  thì với (4.102) cũng phải có:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (w_i - y_i) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} u_i = 0$$

Suy ra hệ kín là ổn định và có sai lệch tĩnh bằng 0.

##### Điều khiển dự báo hệ SISO trong miền phức



**Hình 4.32:** Mô tả nguyên lý điều khiển dự báo trên cơ sở tối ưu từng đoạn với cửa sổ trượt

Để minh họa việc xây dựng bộ điều khiển dự báo, ta xét hệ kín mô tả ở hình 4.32a với lớp đối tượng có hàm truyền:

$$S(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.103)$$

trong đó  $b_1 \neq 0$ ,  $b_i$ ,  $a_j$  là những tham số hằng đã biết. Từ mô hình đối tượng là hàm truyền (4.103) thì:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m b_j u_{k-j} &= y_k + \sum_{j=1}^n a_j y_{k-j} = (w_k - e_k) + \sum_{j=1}^n a_j (w_{k-j} - e_{k-j}) \\ \Leftrightarrow e_k &= -\sum_{j=1}^n a_j e_{k-j} - \sum_{j=1}^m b_j u_{k-j} + \left( w_k + \sum_{j=1}^n a_j w_{k-j} \right) \\ &= -\sum_{j=1}^n a_j e_{k-j} - \hat{u}_{k-1} + \hat{w}_{k-1} \end{aligned}$$

trong đó

$$\hat{u}_{k-1} = \sum_{j=1}^m b_j u_{k-j} \quad \text{và} \quad \hat{w}_{k-1} = w_k + \sum_{j=1}^n a_j w_{k-j} \quad (4.104)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \underline{x}_k &= \begin{pmatrix} e_{k-n+1} \\ \vdots \\ e_{k-1} \\ e_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}}_{\underline{F}} \underline{x}_{k-1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{c}} (\hat{w}_{k-1} - \hat{u}_{k-1}) \\ &= \underline{F} \underline{x}_{k-1} + \underline{c} (\hat{w}_{k-1} - \hat{u}_{k-1}) \end{aligned} \quad (4.105)$$

Bởi vậy, nếu viết lại công thức trên dưới dạng truy hồi, sẽ được:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+N} &= \underline{F} \underline{x}_{k+N-1} + \underline{c} (\hat{w}_{k+N-1} - \hat{u}_{k+N-1}) \\ &= \underline{F} [\underline{F} \underline{x}_{k+N-2} + \underline{c} (\hat{w}_{k+N-2} - \hat{u}_{k+N-2})] + \underline{c} (\hat{w}_{k+N-1} - \hat{u}_{k+N-1}) \\ &= \underline{F}^2 \underline{x}_{k+N-2} + (\underline{F} \underline{c}, \underline{c}) \begin{pmatrix} \hat{w}_{k+N-2} - \hat{u}_{k+N-2} \\ \hat{w}_{k+N-1} - \hat{u}_{k+N-1} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ &= \underline{F}^N \underline{x}_k + (\underline{F}^{N-1} \underline{c}, \underline{F}^{N-2} \underline{c}, \dots, \underline{c}) \begin{pmatrix} \hat{w}_k - \hat{u}_k \\ \hat{w}_{k+1} - \hat{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{w}_{k+N-1} - \hat{u}_{k+N-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

và điều này tương đương với:

$$\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \underline{x}_{k+N} \\ \underline{x}_{k+N-1} \\ \vdots \\ \underline{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{F}^N \\ \underline{F}^{N-1} \\ \vdots \\ \underline{F} \end{pmatrix}}_{\underline{D}} \underline{x}_k + \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{F}^{N-1} \underline{c} & \dots & \underline{F} \underline{c} & \underline{c} \\ \underline{F}^{N-2} \underline{c} & \dots & \underline{c} & \underline{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{c} & \dots & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}}_{\underline{C}} (\underline{\hat{w}} - \underline{\hat{u}}) = \underline{D} \underline{x}_k + \underline{C} (\underline{\hat{w}} - \underline{\hat{u}}) \quad (4.106)$$

trong đó

$$\underline{\hat{w}} = \begin{pmatrix} \hat{w}_k \\ \vdots \\ \hat{w}_{k+N-1} \\ \hat{w}_{k+N} \end{pmatrix} \text{ và } \underline{\hat{u}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_k \\ \vdots \\ \hat{u}_{k+N-1} \\ \hat{u}_{k+N} \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

Bây giờ ta chuyển sang việc xây dựng bộ điều khiển dự báo theo quy tắc tối ưu từng đoạn của số  $N$  như sau. Cứ sau mỗi chu kỳ trích mẫu với  $y_k$  ở đầu ra, cộng thêm với dãy giá trị tín hiệu đặt  $\{w_k\}$  đã có, ta cần phải xác định được giá trị tín hiệu điều khiển  $u_k$  tại đúng thời điểm đó, sao cho với nó có được:

$$Q = \underline{\hat{x}}^T S \underline{\hat{x}} + \underline{\hat{u}}^T R \underline{\hat{u}} \rightarrow \min \quad (4.108)$$

trong đó  $S, R$  là hai ma trận đối xứng xác định dương cho trước ( $Q$  là hàm lồi). Thay  $\underline{\hat{x}}$  từ (4.106) vào hàm mục tiêu (4.108) ta được:

$$Q = (D\underline{\hat{x}}_k + C\underline{\hat{w}} - C\underline{\hat{u}})^T S (D\underline{\hat{x}}_k + C\underline{\hat{w}} - C\underline{\hat{u}}) + \underline{\hat{u}}^T R \underline{\hat{u}}$$

Vì  $Q$  có dạng toàn phương nên để có  $Q \rightarrow \min$  thì cần và đủ là:

$$\begin{aligned} 0^T &= \frac{\partial Q}{\partial \underline{\hat{u}}} = -2(D\underline{\hat{x}}_k + C\underline{\hat{w}} - C\underline{\hat{u}})^T SC + 2\underline{\hat{u}}^T R = 2\underline{\hat{u}}^T (C^T SC + R) - 2(D\underline{\hat{x}}_k + C\underline{\hat{w}})^T SC \\ \Leftrightarrow \underline{\hat{u}} &= (C^T SC + R)^{-1} C^T S (D\underline{\hat{x}}_k + C\underline{\hat{w}}) \\ \Rightarrow \underline{\hat{u}}_k &= (1, 0, \dots, 0) \underline{\hat{u}} = (1, 0, \dots, 0) (C^T SC + R)^{-1} C^T S (D\underline{\hat{x}}_k + C\underline{\hat{w}}) \\ \Rightarrow u_k &= \frac{1}{b_1} \left[ (1, 0, \dots, 0) (C^T SC + R)^{-1} C^T S (D\underline{\hat{x}}_k + C\underline{\hat{w}}) - \sum_{j=2}^m b_j u_{k+1-j} \right] \end{aligned} \quad (4.109)$$

với  $C, D, \underline{\hat{x}}_k, \underline{\hat{w}}$  xác định bởi (4.105), (4.106) và (4.107). Công thức (4.109) cuối cùng này cũng chính là mô hình toán của bộ điều khiển dự báo ở hình 4.32a.

Tóm lại, bộ điều khiển dự báo ứng với phiếm hàm mục tiêu (4.108) để điều khiển đối tượng (4.103) có nhiệm vụ thực hiện thuật toán sau:

- 1) Xây dựng các ma trận và vector  $F, \underline{c}, D, C$  theo (4.105), (4.106)
- 2) Thực hiện lần lượt với  $k=1, 2, \dots$  các bước sau:
  - a) Đo tín hiệu ra  $y_k$
  - b) Xây dựng các vector  $\underline{\hat{x}}_k, \underline{\hat{w}}$  từ  $w_k, y_k$  theo (4.104), (4.105), (4.107)
  - c) Xác định tín hiệu điều khiển  $u_k$  theo (4.109)

**Chú ý:** Mặc dù thuật toán trên chỉ dùng cho lớp đối tượng (4.103), song nó cũng đã thể hiện nguyên lý làm việc chung của bộ điều khiển dự báo. Ứng với mỗi lớp đối tượng

khác nhau, sẽ có các công thức (4.104), (4.105), (4.106), (4.107) khác nhau, do đó cũng sẽ có công thức tính giá trị tín hiệu điều khiển  $u_k$  khác nhau.

### Điều khiển dự báo hệ MIMO trong không gian trạng thái

Với sự hỗ trợ của nguyên tắc chung của điều khiển dự báo đã trình bày ở trên, ta sẽ hoàn toàn không khó khăn gì khi phải thực hiện bài toán điều khiển dự báo cho lớp đối tượng tuyến tính MIMO có mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \\ \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \end{cases}, \quad \underline{u}_k \in \mathbb{R}^m \quad (4.110)$$

sao cho hệ có được tín hiệu ra  $\underline{y}_k$  bám theo tín hiệu mẫu mong muốn đặt trước  $\underline{w}_k$  theo nghĩa (4.102). Trước tiên, từ mô hình (4.110) ta có ngay được:

$$\begin{aligned} \underline{y}_{k+N} &= C\underline{x}_{k+N} + D\underline{u}_{k+N} = C(A\underline{x}_{k+N-1} + B\underline{u}_{k+N-1}) + D\underline{u}_{k+N} \\ &= CA\underline{x}_{k+N-1} + (CB, D) \begin{pmatrix} \underline{u}_{k+N-1} \\ \underline{u}_{k+N} \end{pmatrix} = CA(A\underline{x}_{k+N-2} + B\underline{u}_{k+N-2}) + (CB, D) \begin{pmatrix} \underline{u}_{k+N-1} \\ \underline{u}_{k+N} \end{pmatrix} \\ &= CA^2\underline{x}_{k+N-2} + (CAB, CB, D) \begin{pmatrix} \underline{u}_{k+N-2} \\ \underline{u}_{k+N-1} \\ \underline{u}_{k+N} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ &= CA^N\underline{x}_k + (CA^{N-1}B, \dots, CB, D) \begin{pmatrix} \underline{u}_k \\ \vdots \\ \underline{u}_{k+N-1} \\ \underline{u}_{k+N} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bởi vậy, khi viết lại cho toàn bộ khoảng thời gian dự báo  $k, k+1, \dots, k+N$  sẽ có:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}} &= \begin{pmatrix} \underline{e}_{k+N} \\ \underline{e}_{k+N-1} \\ \vdots \\ \underline{e}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{w}_{k+N} \\ \underline{w}_{k+N-1} \\ \vdots \\ \underline{w}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{y}_{k+N} \\ \underline{y}_{k+N-1} \\ \vdots \\ \underline{y}_k \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{w}_{k+N} \\ \underline{w}_{k+N-1} \\ \vdots \\ \underline{w}_k \end{pmatrix}}_{\underline{\hat{w}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} CA^N \\ CA^{N-1} \\ \vdots \\ C \end{pmatrix}}_{\underline{\hat{A}}} \underline{x}_k - \underbrace{\begin{pmatrix} CA^{N-1}B & \dots & CB & D \\ CA^{N-2}B & \dots & D & \Theta \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D & \dots & \Theta & \Theta \end{pmatrix}}_{\underline{\hat{B}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{u}_k \\ \vdots \\ \underline{u}_{k+N-1} \\ \underline{u}_{k+N} \end{pmatrix}}_{\underline{\hat{u}}} = \underline{\hat{w}} - \underline{\hat{A}}\underline{x}_k - \underline{\hat{B}}\underline{\hat{u}} \quad (4.111) \end{aligned}$$

trong đó  $\Theta$  là ký hiệu của ma trận có tất cả phần tử đều bằng 0.

Thay vector  $\underline{\hat{x}}$  của (4.111) vào hàm mục tiêu (4.108) có hai ma trận đối xứng và xác định dương  $S, R$ :

$$Q = (\hat{w} - \hat{A}\hat{x}_k - \hat{B}\hat{u})^T S (\hat{w} - \hat{A}\hat{x}_k - \hat{B}\hat{u}) + \hat{u}^T R \hat{u}$$

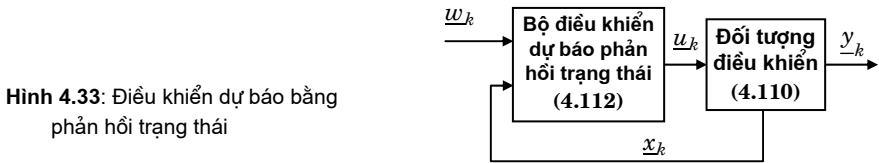
ta thấy, do  $Q$  là dạng toàn phương lồi, nên để có  $Q \rightarrow \min$ , cần và đủ phải là:

$$0^T = \frac{\partial Q}{\partial \hat{u}} = -2(\hat{w} - \hat{A}\hat{x}_k - \hat{B}\hat{u})^T S \hat{B} + 2\hat{u}^T R = 2\hat{u}^T (\hat{B}^T S \hat{B} + R) - 2(\hat{A}\hat{x}_k + \hat{w})^T S \hat{B}$$

$$\Leftrightarrow \hat{u} = (\hat{B}^T S \hat{B} + R)^{-1} \hat{B}^T S (\hat{A}\hat{x}_k + \hat{w})$$

$$\Rightarrow \underline{u}_k = (I_m, \Theta, \dots, \Theta) \hat{u} = (I_m, \Theta, \dots, \Theta) (\hat{B}^T S \hat{B} + R)^{-1} \hat{B}^T S (\hat{A}\hat{x}_k + \hat{w}) \quad (4.112)$$

trong đó  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{x}_k$ ,  $\hat{w}$  xác định bởi (4.111) và  $I_m$  là ma trận đơn vị  $m$  chiều, bằng số chiều tín hiệu đầu vào của đối tượng (4.110). Công thức (4.112) cuối cùng này cũng chính là mô hình toán của bộ điều khiển dự báo phản hồi trạng thái mô tả ở hình 4.33.



## Câu hỏi ôn tập và bài tập

1. Tìm đáp ứng cho hệ  $4y_k - 6y_{k-1} + 3y_{k-2} = u_k$  khi đầu vào là dãy giá trị trích mẫu của tín hiệu  $1(t)$  và các giá trị đầu là  $y_0=1, y_1=-1$ .
2. Hãy xác định ảnh  $X(z)$  của  $\{x_k\}$  với
  - a)  $x_k = 2^{-k}$
  - b)  $x_k = 2^{-k} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$
3. Hãy tìm tín hiệu  $\{x_k\}$  có ảnh  $X(z)$  sau đây
  - a)  $\frac{4}{z^2(3z-1)}$
  - b)  $\frac{8z^2+4z}{4z^2-5z+1}$
  - c)  $\frac{-2z^3-3z^2+11z}{(z-1)^2(z+2)}$
4. Cho tín hiệu xung  $\{x_k\}$  có ảnh Z là  $X(z)$ . Chứng minh rằng nếu có  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^m X(z) = M$  thì cũng có  $x_m = M$ .
5. Cho tín hiệu tuần hoàn  $\{x_k\}$  với chu kỳ  $N$ , tức là  $x_k = x_{k+N}$ . Chứng minh rằng:

$$X(z) = \frac{z^N}{z^N - 1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^{-k}$$

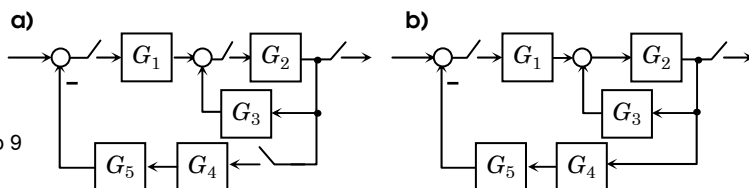
6. Cho hai tín hiệu  $\{x_k\}$  và  $\{y_k\}$ . Gọi  $X(z)$ ,  $Y(z)$  là ảnh của chúng. Giữa  $\{x_k\}$  và  $\{y_k\}$  phải có mối liên hệ gì để có  $X(z) = Y(z^{-1})$ .
7. Người ta đã cài đặt các hệ thống SISO có hàm truyền  $G(s)$  cho sau đây vào máy tính. Hãy xác định hàm truyền không liên tục tương ứng của hệ.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{1}{0,2s(1+s)(1+3s)} & \text{b)} \quad \frac{1+2s}{(1+3s)(1+5s)} & \text{c)} \quad \frac{s+1}{2s^2+3s+4} \\ \text{d)} \quad \frac{2s^2-2s+3}{s(2s^2-4s+1)} & \text{e)} \quad \frac{1}{s(1+2s)^3} & \text{f)} \quad \frac{3s^3+3s^2-4s+8}{(s^2+4)(s^2+2s+2)} \end{array}$$

8. Chứng minh rằng:

$$\text{a)} \quad \mathcal{Z}\left\{\frac{G_{ZOH}(s)}{s-a}\right\} = G_{ZOH}(a) \frac{e^{aT_a}}{z-e^{aT_a}} \quad \text{b)} \quad \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(s-a)^k}\right\} = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} \left( \frac{z}{z-e^{aT_a}} \right)$$

9. Hãy xác định hàm truyền không liên tục cho các hệ có sơ đồ khối sau:



Hình 4.34: Cho bài tập 9

10. Cho hệ SISO có hàm truyền  $G(z) = \frac{z^3+1}{(z-0,5)^3}$ . Hãy xác định dãy giá trị hàm trọng

lượng  $\{g_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$  và từ đó tìm đáp ứng  $\{y_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$  khi  $u_k=1, \forall k$ .

11. Chứng minh rằng hàm truyền dạng thực-hữu tỷ (4.35) của hệ nhân quả (causal) luôn có bậc đa thức tử số (theo  $z$  hoặc  $z^{-1}$ ) không lớn hơn bậc đa thức mẫu số. Từ đó chỉ ra rằng mô hình trạng thái (4.42) chỉ mô tả được hệ nhân quả.

12. Xét hệ không liên tục với mô hình trạng thái (4.42), Chứng minh rằng mọi phép biến đổi tương đương (đổi trục tọa độ)  $\underline{\hat{x}}_k = \underline{M}\underline{x}_k$ ,  $\underline{M}$  không suy biến, không làm thay đổi hàm truyền (4.49) của hệ.

13. Hãy xét tính ổn định, điều khiển được, đạt tới được và quan sát được của hệ có mô hình trạng thái sau:

$$\text{a)} \quad \underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} u_k \quad \text{và} \quad y_k = (1, 0, 0) \underline{x}_k$$

$$\text{b)} \quad \underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} u_k \quad \text{và} \quad y_k = (1, 0, 0) \underline{x}_k$$

14. Cho hệ tuyến tính SISO liên tục mô tả bởi:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (2, 1) \underline{x} \end{cases}$$



Tín hiệu vào  $u(t)$  của hệ được trích mẫu thành dãy  $\{u_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$  với chu kỳ trích mẫu  $T_a=0,1$ , sau đó lại được liên tục hóa bằng khâu ZOH thành  $\hat{u}(t)$ . Tín hiệu đầu ra  $y(t)$  của hệ cũng được trích mẫu thành dãy  $\{y_k\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$  với cùng chu kỳ trích mẫu. Hãy xây dựng mô hình trạng thái không liên tục tương đương và từ đó là hàm truyền  $G(z)$  của hệ.

15. Chứng minh rằng nếu có (4.98) thì cũng sẽ có (4.99).

16. Cho hệ không liên tục mô tả bởi:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$$

Gọi  $R$  là bộ điều khiển phản hồi trạng thái làm hệ ổn định tối ưu theo nghĩa:

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{x}_k^T E \underline{x}_k + \underline{u}_k^T F \underline{u}_k \rightarrow \min$$

trong đó  $E$  là ma trận đối xứng ( $E^T=E$ ), bán xác định dương ( $E \geq 0$ ) và  $F$  là ma trận đối xứng ( $F^T=F$ ), xác định dương ( $F > 0$ ). Chứng minh rằng bộ điều khiển  $R$  sẽ là:

$$R = (F + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

trong đó  $P$  là nghiệm đối xứng, xác định dương của phương trình:

$$P = E + A^T P A - A^T P B (F + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

Giống như ở hệ liên tục, bộ điều khiển tối ưu  $R$  trên cho hệ không liên tục cũng có tên gọi là bộ điều khiển LQR.

17. Cho đối tượng không liên tục mô tả bởi:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \\ \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \end{cases}$$

Chứng minh rằng bộ điều khiển tối ưu phản hồi đầu ra xây dựng theo nguyên lý tách như mô tả ở hình 4.30c, bao gồm bộ điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu tìm theo bài tập 16 ứng với hàm mục tiêu:

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{x}_k^T E \underline{x}_k + \underline{u}_k^T F \underline{u}_k \rightarrow \min$$

và bộ quan sát trạng thái tiệm cận (4.90), sẽ không làm thay đổi được tính pha cực tiểu của đối tượng

18. Chứng minh rằng bộ lọc Kalman cũng áp dụng được cho hệ tuyến tính không dừng mô tả bởi

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k + B_k \underline{u}_k + \underline{n}_k \\ \underline{y}_k = C_k \underline{x}_k + D_k \underline{u}_k + \underline{v}_k \end{cases}$$

với  $\underline{n}_k$ ,  $\underline{v}_k$  là hai tín hiệu nhiễu egodic, có kỳ vọng bằng 0, không tương quan với nhau,  $\underline{v}_k$  không tương quan với trạng thái  $\underline{x}_k$  của hệ, cũng như  $\underline{x}_k$  không tương quan

với tất cả các giá trị trạng thái trước đó  $\underline{x}_i, i=1,2, \dots, k-1$ . Khi đó bộ lọc Kalman sẽ là:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_k = A_{k-1}K_{k-1}A_{k-1}^T + N_{k-1} \text{ với } K_0 \text{ tùy chọn} \\ L_k = P_k C_k^T (C_k P_k C_k^T + V_k)^{-1} \\ K_k = (I - L_k C_k) P_k \\ \underline{x}'_k = A_k \hat{\underline{x}}_{k-1} + B_k \underline{u}_{k-1} \text{ với } \hat{\underline{x}}_0 \text{ tùy chọn} \\ \hat{\underline{x}}_k = \underline{x}'_k + L_k (\underline{y}_k - C_k \underline{x}'_k - D_k \underline{u}_k) \end{array} \right.$$

với  $k=1,2, \dots$  và  $M\{\underline{n}_k \underline{n}_i^T\} = N_k \delta_{k-i}, M\{\underline{v}_k \underline{v}_i^T\} = V_k \delta_{k-i}$

## Ảnh Laplace và ảnh Z của một số tín hiệu cơ bản

$x(t), t \geq 0$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	$x_k = x(kT_a), k \geq 0$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\} = \mathcal{Z}\{X(s)\}$
$\delta(t)$	1	$\{1, 0, 0, 0, \dots\}$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$kT_a$	$\frac{zT_a}{(z-1)^2}$
$t^2$	$\frac{2}{s^3}$	$(kT_a)^2$	$\frac{z(z+1)T_a^2}{(z-1)^3}$
$t^3$	$\frac{6}{s^4}$	$(kT_a)^3$	$\frac{z(z^2+4z+1)T_a^3}{(z-1)^4}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{(kT_a)^n}{n!}$	$-\frac{zT_a}{n!} \cdot \frac{d}{dz} \left( \mathcal{Z}\{(kT_a)^{n-1}\} \right)$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$e^{akT_a}$	$\frac{z}{z-e^{aT_a}}$
$te^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$kT_a e^{akT_a}$	$\frac{ze^{aT_a}T_a}{(z-e^{aT_a})^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$(kT_a)^n e^{akT_a}$	$\frac{d^n}{da^n} \left( \frac{z}{z-e^{aT_a}} \right)$
$a^{bt}$	$\frac{1}{s-b \ln a}$	$a^{bkT_a}$	$\frac{z}{z-a^{bT_a}}$
$ta^{bt}$	$\frac{1}{(s-b \ln a)^2}$	$(kT_a) a^{bkT_a}$	$\frac{zT_a a^{bT_a}}{(z-a^{bT_a})^2}$
$t^2 a^{bt}$	$\frac{2}{(s-b \ln a)^2}$	$(kT_a)^2 a^{bkT_a}$	$\frac{z(z+a^{bT_a})T_a^2 a^{bT_a}}{(z-a^{bT_a})^3}$
$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\cos(\beta kT_a)$	$\frac{z[z - \cos(\beta T_a)]}{z^2 - 2z \cos(\beta T_a) + 1}$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\sin(\beta kT_a)$	$\frac{z \sin(\beta T_a)}{z^2 - 2z \cos(\beta T_a) + 1}$

## Tài liệu tham khảo

- [1] **Anderson, B.D. and Moore, J.B.:** Linear Optimal Control. Prentice–Hall, NJ, 1971.
- [2] **Äström, K.J. and Wittenmark, B.:** Adaptive Control. Addison–Wesley Publishing Company, Inc. 1995.
- [3] **Balas, G.; Doyle, J.C.; Glover, K.; Packard, A. and Smith, R.:**  $\mu$ –Analysis and Synthesis Toolbox. MatLab User's Guide.
- [4] **Burmeister, H.L.:** Automatische Steuerung. VEB Verlag Technik Berlin, 1976.
- [5] **Bögel, K; Tasche, M.:** Analysis in normierten Räumen. Akademie Verlag Berlin, 1974.
- [6] **Chiang, R. and Safonov, M.:** Robust Control Toolbox. MatLab User's Guide.
- [7] **Chui, C. K. and Chen, G.:** Linear System and Optimal Control. Springer Verlag, Heidelberg New York, London, Paris, Tokyo, 1989.
- [8] **Doyle, J.; Francis, B. and Tannenbaum, A.:** Feedback Control Theory. Macmillan Publishing CO., 1990.
- [9] **Fossard, A.:** Multivariable System Control. North–Holland Publishing Company, 1972.
- [10] **Föllinger, O.:** Regelungstechnik (xuất bản lần 9). Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 1996.
- [11] **Katsuhito Ogata:** Modern Control Engineering. Prentice–Hall International Inc., 1995.
- [12] **Lutz, H.; Wendt, W.:** Taschenbuch der Regelungstechnik. Verlag Harri Deutsch, 1998.
- [13] **Müller, K.:** Entwurf robuster Regelungen. B.G. Teubner Stuttgart, 1996.
- [14] **Phước, N.D. và Minh, P.X:** Nhận dạng hệ thống điều khiển. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2001.
- [15] **Phước, N.D. và Minh, P.X:** Điều khiển tối ưu và bền vững (xuất bản lần thứ 2). Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2000.
- [16] **Phước, N.D.:** Lý thuyết điều khiển nâng cao. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2005.
- [17] **Reinschke, K.:** Steuerung kontinuierlicher Prozesse. Skriptum zur Vorlesung, TU–Dresden, 2002.
- [18] **Safonov, M.G.:** Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems. MIT Press, Cambridge, MA, 1980.
- [19] **Unbehauen, R.:** Systemtheorie (xuất bản lần 6). R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1993.
- [20] **Zhou, K.; Doyle, J.C. and Glover, K.:** Robust and Optimal Control. Prentice Hall, 1996.