ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

ĐINH TIẾN DŨNG

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC QUA CÁC KÌ THI OLYMPIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2021

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

ĐINH TIẾN DŨNG

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC QUA CÁC KÌ THI OLYMPIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460101.13

Cán bộ hướng dẫn: TS. LÊ VĨ

Hà Nội - 2021

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng luận văn *"Một số phương trình hàm và bất phương trình hàm đa thức qua các kì thi Olympic"* thuộc chuyên ngành *Phương pháp Toán sơ cấp* được hoàn thiện từ chính sự nghiên cứu, tìm hiểu của bản thân cùng với sự hỗ trợ từ giảng viên hướng dẫn, TS. Lê Vĩ.

Trong quá trình nghiên cứu, tôi đã thu thập, kế thừa và phát triển các kết quả từ nhiều nguồn khác nhau và có ghi rõ trong tài liệu tham khảo, tôi xin bày tỏ lòng trân trọng và biết ơn tới các nhà khoa học.

Tác giả

Đinh Tiến Dũng

LỜI CẢM ƠN

Luận văn *"Một số phương trình hàm và bất phương trình hàm đa thức qua các kì thi Olympic"* được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội. Tác giả xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo của khoa sau Đại học, Đại học Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội đã trang bị kiến thức cơ sở, tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới TS. Lê Vĩ đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tác giả có thêm nhiều kiến thức, kĩ năng, khả năng nghiên cứu cũng như tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Hà Nội, ngày 28 tháng 11 năm 2021

Học viên

Đinh Tiến Dũng

Mục lục

MỞ ĐẦU

Đa thức là một trong những nội dung quan trọng của Đại số sơ cấp và thường xuất hiện trong các kì thi cấp quốc gia, quốc tế dưới dạng xác định một đa thức hay phương trình hàm, bất phương trình hàm đa thức. Trong chương trình chuyên toán THPT thì Đa thức là một chuyên đề quan trọng.

Các bài toán về đa thức khá đa dạng, có nhiều phương pháp giải khác nhau và có mối liên hệ chặt chẽ với các lí thuyết chuyên ngành khác. Phương trình hàm và bất phương trình hàm đa thức là dạng đặc biệt của phương trình hàm và không có phương pháp chung nào để giải. Việc tìm ra lời giải phụ thuộc vào từng phương trình cụ thể cùng một số điều kiện liên quan.

Để giải các bài toán phương trình, bất phương trình hàm đa thức bên cạnh sử dụng các kĩ thuật, phương pháp giải phương trình hàm còn sử dụng các tính chất và đặc trưng cơ bản của đa thức như nghiệm, bậc, hệ số, biểu diễn đa thức hay tính liên tục và giới hạn hàm số.

Luận văn *"Một số phương trình hàm và bất phương trình hàm đa thức qua các kì thi Olympic"* được chia thành 3 chương ngoài phần mở đầu, kết luận.

Chương 1. Trình bày một số kiến thức cơ bản về Đa thức, phương trình hàm và bất phương trình hàm đa thức, một số kĩ thuật và dạng toán đã biết làm cơ sở cho các phương pháp giải cho phương trình hàm, bất phương trình hàm đa thức.

Chương 2. Nghiên cứu các phương pháp giải phương trình hàm đa thức thường gặp: đánh giá nghiệm, sử dụng phép thế và đổi biến số, so sánh bậc và hệ số, chỉ ra họ nghiệm và chứng minh, sử dụng dãy số và giới hạn.

Chương 3. Nghiên cứu một số phương pháp giải bất phương trình hàm đa thức dựa trên các phương pháp giải phương trình hàm đa thức.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các kiến thức cơ bản về đa thức như định nghĩa, các phép toán, kết quả cơ bản về đa thức, định nghĩa phương trình hàm và bất phương trình hàm đa thức. Bên cạnh đó là một số bài toán tổng quát cho phương trình hàm đa thức. Chương này được tham khảo trong [1, 2, 3, 4, 5].

1.1 Đa thức và các vấn đề cơ bản

Trong mục này, chúng ta nhắc lại định nghĩa, một số tính chất, các kết quả cơ bản về đa thức với hệ số trên một trường.

1.1.1 Định nghĩa

Cho $\mathbb{A}$ là một vành giao hoán có đơn vị. Đa thức bậc n biến x là biểu thức có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

trong đó $n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{A},\ a_n \neq 0$.

Ta cũng viết đa thức này dưới dạng $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Các số $a_0,\ a_1, ...,\ a_n$ gọi là các hệ số của đa thức, a_n là hệ số cao nhất và a_0 là hệ số tự do. Số n được gọi là bậc của đa thức $P(x)$. Kí hiệu $\deg P = n$. Trường hợp đặc biệt, $P(x) = c$ với $c \in \mathbb{A}$ thì $\deg P = 0$. Khi đó, ta nói $P(x)$ là đa thức hằng.

Hai đa thức $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ và $Q(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m = n \\ a_i = b_i,\ \forall i. \end{cases}$$

Khi $\mathbb{A} = K$ là một trường thì $K[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta thường xét $\mathbb{A} = \mathbb{Z},\ \mathbb{A} = \mathbb{Q},\ \mathbb{A} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{A} = \mathbb{C}$.

1.1.2 Các phép toán về đa thức

Cho hai đa thức $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ và $Q(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$, chúng ta định nghĩa các phép toán như sau:

Phép toán cộng, trừ đa thức:

$$P(x) + Q(x) = \sum_{i=0}^{\max\{n,\, m\}} (a_i + b_i)x^i;\ P(x) - Q(x) = \sum_{i=0}^{\max\{n,\, m\}} (a_i - b_i)x^i.$$

Phép toán nhân đa thức:

$$P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \text{ với } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Từ đó, với hai đa thức $P(x),\ Q(x)$ có các kết quả sau:

i) $\deg(P(x) + Q(x)) \leq \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\}$;

ii) $\deg(P(x).Q(x)) = \deg P(x) + \deg Q(x)$.

Phép chia đa thức: Cho các đa thức $P(x), Q(x)$ (khác đa thức không). Nếu có đa thức $R(x)$ sao cho $P(x) = Q(x)R(x)$ thì ta nói rằng $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ và thương là $R(x)$. Với các đa thức $P(x), Q(x)$ và $Q(x) \neq 0$ tồn tại duy nhất hai đa thức $G(x), H(x)$ sao cho

$$P(x) = G(x)Q(x) + H(x) \text{ với } \deg H(x) < \deg Q(x).$$

Đa thức $D(x)$ được gọi là nhân tử chung của hai đa thức $P(x), Q(x)$ nếu $P(x), Q(x)$ cùng chia hết cho đa thức $D(x)$. Hai đa thức $P(x), Q(x)$ được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu chúng chỉ có ước chung là hằng số $m \in \mathbb{A}, m \neq 0$ và viết $(P(x), Q(x)) = 1$.

Tính chất. Cho các đa thức $P(x), Q(x), M(x)$. Nếu tích $P(x)Q(x)$ chia hết cho đa thức $M(x)$ và $(Q(x), M(x)) = 1$ thì $P(x)$ chia hết cho $M(x)$.

1.1.3 Nghiệm của đa thức

Định nghĩa 1.1.3. Cho đa thức $P(x)$ trên trường $\mathbb{A}$. Số $a \in \mathbb{A}$ được gọi là nghiệm của đa thức $P(x)$ nếu $P(a) = 0$.

Định lý 1.1.4 (*Bezout*)**.** Số a là nghiệm của đa thức $P(x)$ nếu và chỉ nếu tồn tại một đa thức $Q(x)$ sao cho $P(x) = (x - a)Q(x)$. Số $x = a$ được gọi là nghiệm bội $k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$ của $P(x)$ nếu $P(x) = (x - a)^k g(x)$ và $g(a) \neq 0$.

Định lý 1.1.5. Cho đa thức $P(x)$ khác đa thức không và $a_1,\ a_2, ...,\ a_t$ là các nghiệm phân biệt của $P(x)$ giả sử a_i là nghiệm bội i của $P(x)$ với $i = \overline{1, t}$. Khi đó có biểu diễn $P(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}...(x - a_t)^{k_t}Q(x)$, trong đó $Q(a_i) \neq 0,\ \forall i = \overline{1, t}$.

Hệ quả 1.1.6. Đa thức $P(x)$ có $\deg P(x) \geq 1$ thì chỉ có hữu hạn nghiệm. Số nghiệm của đa thức $P(x)$ không vượt quá số bậc của P. Trường hợp riêng, nếu số nghiệm của đa thức $P(x)$ lớn hơn $\deg P(x)$ thì $P(x) = 0$. Nếu đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm thì $P(x) = 0$.

Hệ quả 1.1.7. Nếu $P(x)$ là đa thức hệ số thực mà lại là hàm tuần hoàn thì $P(x) = c$ với c là một hằng số.

Hệ quả 1.1.8. Mọi đa thức hệ số thực bậc lẻ đều có nghiệm thực.

Hệ quả 1.1.9. Nếu $P(x),\ Q(x)$ có $\deg P \leq n,\ \deg Q \leq n$ và $P(x),\ Q(x)$ có giá trị bằng nhau tại $n + 1$ số khác nhau thì $P(x) = Q(x)$.

Hệ quả 1.1.10. Cho $a \neq 0, b, c$ là các hằng số bất kì và $n \geq 1$ là một số tự nhiên. Khi đó tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn đẳng thức

$$P(ax^2 + bx + c) = aP^2(x) + bP(x) + c,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh

Giả sử $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_n \neq 0$. Thay vào phương trình đã cho thu được

$$a_n(ax^2 + bx + c)^n + a_{n-1}(ax^2 + bx + c)^{n-1} + ... + a_1(ax^2 + bx + c) + a_0$$

$$= a\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big)^2 + b\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) + c,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

So sánh các hệ số $x^{2n},\ x^{2n+1}, ...,\ x^{2n-n} = x^n$ hai vế ta được các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
a_n a^n &= a a_n^2,\\
\varphi_1(a_n,\ b,\ c) &= 2a a_n a_{n-1},\\
\varphi_2(a_n,\ a_{n-1},\ b,\ c) &= a a_{n-1}^2 + 2a a_n a_{n-2},\\
\varphi_1(a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ b,\ c) &= 2a a_n a_{n-1} + 2a a_n a_{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_1(a_n,\ a_{n-1}, ...,\ a_0\ b,\ c) &= 2a a_n a_0 + 2a_n a_0 b,
\end{aligned}$$

trong đó $\varphi_1,\ \varphi_2, ...,\ \varphi_n$ là những đa thức. Vì $a_n \neq 0$ nên hệ phương trình trên xác định $a_n,\ a_{n-1}, ...,\ a_0$ duy nhất. Điều này có nghĩa nếu đa thức $P(x)$ tồn tại thì duy nhất. □

Định lý 1.1.11 (*Định lý cơ bản của Đại số*)**.** Mọi đa thức bậc n (với $n > 0$) hệ số phức (hoặc thực) đều có đủ n nghiệm phức (phân biệt hay trùng nhau).

Trong một số trường hợp để thuận lợi việc tìm dạng biểu diễn của đa thức $P(x)$ có thể sử dụng nghiệm phức. Tức là xét mở rộng trường với nghiệm $a \in \mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.1.12 (*Dạng lượng giác của số phức*)**.** Cho số phức $z = a+bi, z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là một argument của z. Nếu ϕ là một argument của số phức z thì mọi argument của z có dạng $\phi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Nếu ϕ là một argument của số phức z thì $a = |z|cos\phi, b = |z|sin\phi$ nên $z = |z|(cos\phi + isin\phi)$. Ngược lại, số phức $z \neq 0$ viết dưới dạng $z = r(cos\phi + isin\phi)$ với $r > 0$ thì $r = |z|$ và ϕ là một argument của z. Argument của số phức $z = 0$ không được định nghĩa.

Cho số phức $z \neq 0$, dạng $z = r(cos\phi + isin\phi)$ với $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ được gọi là dạng lượng giác của số phức z. Từ việc nhân số phức dạng lượng giác và quy nạp toán học chứng minh được công thức *Moivre*:

$$[r(cos\phi + isinn\phi)]^n = r^n[cos(n\phi) + isin(n\phi)].$$

1.2 Phương trình và bất phương trình hàm đa thức

Trong mục này, chúng ta nhắc lại định nghĩa phương trình hàm, bất phương trình hàm đa thức, một số dạng toán và kĩ thuật thường sử dụng.

Định nghĩa 1.2.1. Phương trình hàm được hiểu là phương trình mà hai vế của phương trình được xây dựng từ một số hữu hạn các hàm chưa biết (của một số hữu hạn các biến) và từ một số hữu hạn các biến độc lập. Phép xây dựng này được thực hiện từ một số hữu hạn các hàm đã biết (một hay nhiều biến) và bởi một số hữu hạn các phép thay thế các từ chứa các hàm đã biết hoặc các hàm chưa biết thành các từ chứa các hàm đã biết hoặc chưa biết khác.

Định nghĩa 1.2.2 (*Phương trình hàm*)**.** Phương trình hàm là một phương trình trong đó nghiệm cần tìm là hàm số, trong phương trình chứa tối thiểu một hàm chưa biết và một số hữu hạn các biến số độc lập xác định.

Định nghĩa 1.2.3 (*Phương trình hàm nhiều biến*)**.** Phương trình hàm nhiều biến là phương trình hàm mà trong đó chứa nhiều hơn một biến. Có thể chia lớp các phương trình hàm nhiều biến thành hai loại: Phương trình hàm với các biến tự do và phương trình hàm với các biến bị ràng buộc điều kiện.

Định nghĩa 1.2.4 (*Bất phương trình hàm*)**.** Định nghĩa bất phương trình hàm một biến và nhiều biến được định nghĩa tương tự phương trình hàm bằng việc thay dấu $'' ='' $ bởi một trong các dấu $'' >,\ \geq,\ <,\ \leq''$.

Bài toán tổng quát. Cho X, Y là các tập hợp nào đó. Xác định hàm số $f : X \to Y$ thỏa mãn một số điều kiện cho trước. Trong trường hợp đặc biệt, khi hàm số f cần xác định là đa thức thì bài toán trở thành phương trình hàm, bất phương trình hàm đa thức với một số điều kiện đã cho.

Không có phương pháp giải chung nào cho các bài toán phương trình hàm hay bất phương trình hàm đa thức, việc tìm ra lời giải phụ thuộc vào từng phương trình, bất phương trình cụ thể và một số điều kiện liên quan. Đa thức là trường hợp đặc biệt của hàm số, vì thế các phương pháp giải cho phương trình hàm, bất phương trình hàm nói chung đều sử dụng được cho các bài toán này. Dựa trên các tính chất đặc trưng của đa thức, bài toán phương trình hàm đa thức thường được giải bằng các phương pháp sau: Phương pháp đánh giá nghiệm; phương pháp thế và đổi biến số; phương pháp đánh giá bậc và so sánh hệ số; phương pháp chỉ ra họ nghiệm và chứng minh; phương pháp sử dụng dãy số, giới hạn.

Bài toán bất phương trình hàm khó hơn rất nhiều so với phương trình hàm vì tính chặt chẽ cao và liên quan nhiều đến những đánh giá bất đẳng thức, lí thuyết hay các nguyên lí của Giải tích. Một số bài toán bất phương trình hàm đa thức đơn giản có thể giải được bằng một vài phép thế, nhưng có nhiều bài toán để giải đòi hỏi phải vận dụng linh hoạt các tính chất của hàm số, chẳng hạn tính chẵn – lẻ, đơn điệu, liên tục,... Sau đây là một số kĩ thuật thường sử dụng cho bài toán bất phương trình hàm nói chung và hàm đa thức nói riêng:

1. Dự đoán được công thức của hàm số, chẳng hạn $f(x) = g(x)$ thì có thể xét $f(x) > g(x)$ và $f(x) < g(x)$, sau đó sử dụng tính đơn điệu của hàm số để dẫn tới điều vô lí.

2. Sử dụng nguyên lý kẹp: Từ điều kiện của đề bài, xây dựng được bất đẳng thức có dạng $g_n \leq f(x) \leq h_n$, với x cố định, hai dãy (g_n), (h_n) được chọn sao cho bất đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} h_n = k(x)$ Khi đó, cho $n \to \infty$ trong bất đẳng thức trên thu được $f(x) = k(x)$.

1.3 Một số dạng phương trình hàm đa thức

Để giải các bài toán phương trình hàm, bất phương trình hàm đa thức nói chung cần phải nghiên cứu kĩ các đặc trưng của đa thức, đơn giản hóa bài toán bằng phép thế biến, đổi biến hoặc đặt biến số, đa thức phụ, đưa về các bài toán cơ bản hoặc đã biết cách giải. Mục này cung cấp một số dạng toán về phương trình hàm đa thức cơ bản.

Bài toán tổng quát 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$f(x)P(ax+b) = g(x)P(mx+n),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

trong đó các đa thức $f(x)$, $g(x)$ có nghiệm thực.

Bài toán này thường được giải theo so sánh hệ số, so sánh bậc và đồng nhất hệ số hai vế của đẳng thức. Với bài toán trên, chúng ta chỉ cần thay các nghiệm của $f(x)$, $g(x)$ vào phương trình ban đầu chỉ ra được một số nghiệm của đa thức $P(x)$ chẳng hạn là $a_1, a_2, ..., a_t$. Khi đó, biểu diễn đa thức cần tìm dưới dạng $P(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_t)^{k_t}Q(x)$, trong đó $Q(a_i) \neq 0$, $\forall i = \overline{1,t}$. Thay vào đẳng thức đã cho, rút gọn dẫn tới $R(x+c) = R(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Từ đó truy ngược lại tìm được đa thức $P(x)$ thỏa mãn.

Bài toán 1.1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $P(1) = 2020$ và

$$(x+1)(x+2)P(x) = x^2P(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy đa thức cần tìm khác đa thức hằng. Kí hiệu

$$(x+1)(x+2)P(x) = x^2P(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.1.1}$$

Thay $x = 0$ vào (1.1.1) thu được $P(0) = 0$. Từ đó, thay $x = -2$ vào (1.1.1) thu được $P(-1) = 0$. Do đó, biểu diễn

$$P(x) = x(x+1)Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.1.2}$$

Thay (1.1.2) vào (1.1.1) và rút gọn dẫn đến

$$(x+1)Q(x) = xQ(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.1.3}$$

Thay $x = 0$ vào (1.1.3) thu được $Q(0) = 0$. Suy ra

$$Q(x) = xR(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.1.4}$$

Thay (1.1.4) vào (1.1.3) và rút gọn thu được $R(x) = R(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$ và do đó $R(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay lại tìm được $P(x) = cx^2(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vì $P(1) = 2020$ nên $c = 1010$. Khi đó $P(x) = 1010x^2(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = 1010x^2(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán tổng quát 2. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$ sao cho

$$P(f(x)) \cdot P(g(x)) = P(h(x)), \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

trong đó $f(x), g(x)$ và $h(x)$ là các đa thức với hệ số thực cho trước thỏa mãn điều kiện $\deg f + \deg g = \deg h$.

Nghiệm của phương trình (1) có nhiều tính chất đặc biệt giúp chúng ta có thể xây dựng được tất cả các nghiệm của nó từ các nghiệm bậc nhỏ.

Định lý 1.3.1. Nếu $P(x),\ Q(x)$ là nghiệm của (1) thì $P(x).Q(x)$ cũng là nghiệm.

Chứng minh

Dễ thấy

$$\begin{aligned}(PQ(h(x)) &= P(h(x)Q(h(x)) = P(f(x))P(g(x))Q(f(x))Q(g(x)) \\ &= (PQ)(f(x))(PQ)(g(x))\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 1.3.2. Nếu $P(x)$ là nghiệm của phương trình (1) thì $[P(x)]^n,\ n \in \mathbb{N}$ cũng là nghiệm.

Định lý 1.3.3. Nếu f, g, h là các đa thức hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$\deg f + \deg g = \deg h$$

và thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

i) $\deg f \neq \deg g$;

ii) $\deg f = \deg g$ và $f^* + g^* \neq 0$, trong đó f^*, g^* là hệ số của lũy thừa cao nhất của đa thức f và g tương ứng.

Khi đó, với mỗi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức với hệ số thực $P(x)$ có bậc n thỏa mãn (1).

Chứng minh

Giả sử P là đa thức bậc n thỏa mãn (1). Gọi $P^*,\ f^*,\ g^*,\ h^*$ lần lượt là hệ số của lũy thừa cao nhất của $P,\ f,\ g,\ h$. So sánh hệ số của lũy thừa cao nhất hai vế trong đẳng thức đã cho suy ra

$$P^*.(f^*)^n.P^*.(g^*)^n = P^*.(h^*)^n.$$

Từ đó suy ra $P^* = \left(\dfrac{h^*}{f^*.g^*}\right)^n$. Như vậy nếu giả sử ngược lại, tồn tại một đa thức Q hệ số thực bậc n, khác P, thỏa mãn (1) thì $Q^* = P^*$ và ta có $Q(x) = P(x) + R(x)$, với $0 \le r = \deg R < n$, (ta quy ước bậc của đa thức đồng nhất không bằng $-\infty$, do đó $r \ge 0$ đồng nghĩa là R không đồng nhất không). Thay vào (1) ta được

$$[P(f) + R(f)] \cdot [P(g) + R(g)] = P(h) + R(h).$$

Khai triển và thu gọn dẫn đến $P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = R(h)$ (2)

Trường hợp 1. $\deg f \neq \deg g$. Giả sử $\deg f > \deg g$. Khi đó bậc của các đa thức ở vế trái của (2) là

$$n\deg f + r\deg g, r\deg f + n\deg g, r\deg f + r\deg g.$$

Để ý rằng $(n-r)\deg f > (n-r)\deg g$. Suy ra $n\deg f + r\deg g > r\deg f + n\deg g$. Do đó, $n\deg f + r\deg g > r\deg f + n\deg g > r\deg f + r\deg g$. Vậy vế trái của (2) có bậc là $n\deg f + r\deg g$, trong khi đó vế phải có bậc là

$$r\deg h = r(\deg f + \deg g) < n\deg f + r\deg g \text{ (Mâu thuẫn).}$$

Trường hợp 2. $\deg f = \deg g$. Khi đó hai đa thức đầu tiên ở vế trái của (2) có cùng bậc là $n\deg f + r\deg g$ và có thể xảy ra sự triệt tiêu khi thực hiện phép cộng. Tuy nhiên, xét hệ số cao nhất của hai đa thức này, ta có hệ số của $x^{n\deg f + r\deg g}$ trong đa thức thứ nhất và đa thức thứ hai lần lượt là $P^* \cdot (f^*)^n \cdot R^* \cdot (g^*)^r, R^*(f^*)^r \cdot P^*(g^*)^n$. Như thế bậc của $x^{n\deg f + r\deg g}$ trong tổng của hai đa thức bằng

$$\begin{aligned}&P^* \cdot (f^*)^n \cdot R^* \cdot (g^*)^r, R^*(f^*)^r \cdot P^*(g^*)^n\\ =&P^*R^*(f^*)^r(g^*)^r[(f^*)^{n-r} + (g^*)^{n-r}] \neq 0(\text{do} f^* + g^* \neq 0)\end{aligned}$$

Như vậy bậc của vế trái của (2) vẫn là $n\deg f + r\deg g$, trong khi đó bậc của vế phải là $r\deg h = r(\deg f + \deg g) < n\deg f + \mathrm{r}\mathrm{deg}g$ (Mâu thuẫn). Từ các định lý trên thấy rằng nếu $P_1(x)$ là một đa thức bậc nhất thỏa mãn (2) với f, g, h là các đa thức thỏa mãn điều kiện của định lý đầu tiên thì tất cả các nghiệm của (2) là

$$P(x) = 0, P(x) = 1, P(x) = [P_1(x)]^n, (\text{với } n = 1, 2, 3, \ldots).$$

□

Nhận xét. Từ các định lý và hệ quả trên để giải các bài toán có dạng (1) chúng ta cần chỉ ra một nghiệm riêng (khác đa thức hằng số) chẳng hạn là $M(x)$, tiếp theo chứng minh $P(x) = [M(x)]^m$ trong đó $m\deg M = \deg P \deg f + \deg Q \deg g$. Để chứng minh kết quả này, đặt $P(x) = [M(x)]^m + Q(x)$ và chỉ ra $Q(x) = 0$, hoặc đặt $P(x) = [M(x)]^m.Q(x)$ và chỉ ra $Q(x) = c \neq 0,\ c \in \mathbb{R}$. Phép đặt đa thức dạng này được trình bày trong Chương 2 mục "2.4. Phương pháp chỉ ra họ nghiệm và chứng minh".

Bài toán 1.2 (*Bulgaria 2001*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x^2) = P(x)P(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy các đa thức $P(x) = 0,\ P(x) = 1\ , \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán. Xét trường hợp $\deg P \neq 0$ thì $P(x)$ có dạng $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Kí hiệu

$$P(x^2) = P(x)P(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.2.1}$$

Thay và so sánh hệ số của bậc cao nhất hai vế trong (1.2.1) thu được $a_n^2 = a_n$. Vì $a_n \neq 0$ nên $a_n = 1$. Với $n = 1$ không tìm được đa thức thỏa mãn. Với $n = 2$ tìm được đa thức $P(x) = x^2 - x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn. Ta chứng minh các nghiệm còn lại là $P(x) = (x^2 - x)^n,\ \forall n \geq 2$. Đặt $P(x) = (x^2 - x)^n + Q(x)$, trong đó $Q(x) \in \mathbb{R}[x]\ ,\ \deg Q = m\ (0 \leq m < 2n)$. Thay vào (1.2.1) thu được

$$Q(x^2) = (x^2 - x)^n Q(x+1) + (x^2 + x)Q(x) + Q(x)Q(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.2.2}$$

Nếu $\deg Q = m\ (0 < m < 2n)$ thì vế trái có bậc $2m$, vế phải có bậc $m + 2n$. So sánh bậc dẫn đến $2m = m + 2n$ hay $m = 2n$. Điều này không thể xảy ra. Do đó, $Q(x)$ phải là đa thức hằng. Từ đó tìm được $Q(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, $P(x) = (x^2 - x)^n,\ n \in \mathbb{N}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) = 0,\ P(x) = 1,\ P(x) = (x^2 - x)^n,\ n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Ngoài cách giải theo dạng này bài toán còn được giải bằng đánh giá nghiệm trong Chương 2.

Bài toán tổng quát 3 ([6])**.** Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ sao cho

$$P(f(x)).P(g(x)) = P(h(x)) + Q(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Phương trình có dạng $P(f)P(g) = P(h) + Q$, trong đó $f(x), g(x), h(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức hệ số thực cho trước thỏa mãn điều kiện $\deg f + \deg g = \deg h$.

Nếu $Q(x)$ là đa thức không thì bài toán này quay về bài toán tổng quát 2. Trong trường hợp $Q(x)$ khác đa thức không thì việc xây dựng nghiệm trở nên khá khó khăn. Tuy nhiên, chúng ta chứng minh được định lý duy nhất, được phát biểu dưới đây.

Định lý 1.3.4 ([6])**.** Cho f, g, h là các đa thức khác đa thức hằng thỏa mãn

$$\deg f + \deg g = \deg h,$$

Q là đa thức cho trước, ngoài ra $\deg f \neq \deg g$ hoặc $\deg f = \deg g$ và $f^* + g^* \neq 0$. Khi đó, với mỗi số nguyên dương n và số thực a, tồn tại nhiều nhất một đa thức P thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $\deg P = n$;

ii) $P^* = a$;

iii) $P(f)P(g) = P(h) + Q$.

Hệ quả 1.3.5. Trong các điều kiện của định lý, với mỗi số nguyên dương n, tồn tại nhiều nhất hai đa thức $P(x)$ có bậc n thỏa mãn $P(f) \cdot P(g) = P(h) + Q$.

Chứng minh

Hệ số cao nhất của P phải thỏa mãn phương trình

$$(P^*)^2(f^*g^*) = P^*(h^*)^n + \text{ hệ số của } x^{nh} \text{ trong } Q.$$

Suy ra P^* chỉ có thể nhận nhiều nhất hai giá trị. □

Bài toán 1.3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho

$$P(x^2 - 2) = P^2(x) - 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x) = -1,\ P(x) = 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán. Xét trường hợp $P(x)$ khác đa thức hằng. Theo **Hệ quả 1.1.10**, trước hết nhận xét rằng với mỗi giá trị của n tồn tại nhiều nhất một đa thức $P_n(x)$ bậc n thỏa mãn $P_n(x^2-2) = P_n^2(x) - 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Bằng cách so sánh những hệ số trước bậc của x trong mỗi đa thức thu được

$$\begin{aligned}&P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2, P_3(x) = x^3 - 3x,\\&P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 2, P_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x.\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh mọi đa thức trong dãy $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x), ...$ được xác định thông qua các đẳng thức sau:

$$P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2, P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x), \forall n \geq 1.$$

Ta chứng minh quy nạp theo n. Với $n = 1,\ n = 2$ thì khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với $P_n(x), P_{n+1}(x)$. Ta cần chứng minh $P_{n+2}(x)$ cũng thỏa mãn đẳng thức trên. Để ý rằng

$$\begin{aligned}&P_{n+2}(x^2-2) - P_{n+2}^2(x) + 2\\=&(x^2-2)P_{n+1}(x^2-2) - P_n(x^2-2) - [xP_{n+1}(x) - P_n(x)]^2 + 2\\=&(x^2-2)(P_{n+1}^2(x) - 2) - (P_n^2(x) - 2) - x^2P_{n+1}^2(x) + 2xP_{n+1}(x)P_n(x) - P_n^2(x) + 2\\=&-2Q_n(x).\end{aligned}$$

trong đó $Q_n(x) = P_{n+1}^2(x) + P_n^2(x) - xP_{n+1}(x)P_n(x) + x^2 - 4$. Lại có

$$\begin{aligned}Q_n(x) &= (xP(x) - P_{n-1}(x))^2 + P^2(x) - x(xP_n(x) - P_{n-1}(x))P_n(x) + x^2 - 4\\&= P_n^2x + P_{n-1}^2x - xP_n(x)P_{n-1}(x) + x^2 - 4 = Q_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Thực hiện quá trình trên sau n bước dẫn đến $Q_n(x) = Q_{n-1}(x) = ... = Q_1(x)$. Mặt khác, dễ thấy

$$Q_1(x) = P_2^2(x) + P_1^2(x) - xP_2(x)P_1(x) + x^2 - 4 = (x^2-2)^2 + x^2 - x(x^2-2)x + x^2 - 4 = 0.$$

Từ đó dẫn đến

$$P_{n+2}(x^2-2) - P_{n+2}^2(x) + 2 = 0.$$

Đẳng thức trên tương đương

$$P_{n+2}(x^2-2) = P_{n+2}^2(x) - 2.$$

Theo nguyên lý quy nạp khẳng định được chứng minh. Tóm lại, các đa thức cần tìm là $P(x) = -1,\ P(x) = 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và các đa thức $P_n(x)$ xác định bởi dãy sau:

$$P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2, P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x), \forall n \geq 1.$$

Chương 2

Phương trình hàm đa thức

Trong chương này, chúng tôi trình bày các phương pháp giải thường sử dụng cho bài toán phương trình hàm đa thức như phương pháp đánh giá nghiệm, phương pháp thế và đổi biến số, phương pháp đánh giá bậc và so sánh hệ số, phương pháp chỉ ra họ nghiệm và chứng minh, phương pháp sử dụng dãy số, đồng thời giới thiệu một số bài toán khác về phương trình hàm đa thức một biến và nhiều biến đã xuất hiện trong các kì thi Olympic với các phương pháp giải. Trong các kì thi Olympic quốc gia, quốc tế với mỗi bài toán cần dựa trên những yếu tố đặc trưng từ đề bài hay các điều kiện cho trước để lựa chọn cách giải sao cho phù hợp. Chương này được tham khảo trong [5, 6, 7, 8, 9, 11].

2.1 Phương pháp đánh giá nghiệm

Ý tưởng của phương pháp này là chỉ ra được một số nghiệm của đa thức. Từ đó, cho phép chúng ta có thể biết được một phần biểu diễn của đa thức cần tìm, cụ thể thông qua định lý Bezout. Việc sử dụng định lý cơ bản của Đại số cho phép chúng ta xử lí nhiều bài toán phức tạp khi phương trình có dạng tích và chưa biết cụ thể nghiệm thực của đa thức.

Bài toán 2.1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$xP(x-1) = (x-3)P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x) = 0$ thỏa mãn. Xét trường hợp $\deg P(x) = n \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Kí hiệu

$$xP(x-1) = (x-3)P(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.1.1}$$

Lần lượt thay $x = 0,\ x = 3$ vào (2.1.1) thu được $P(0) = 0,\ P(2) = 0$. Thay $x = 2$ và chú ý $P(2) = 0$ thì $P(1) = 0$. Đặt $P(x) = x(x-1)(x-2)Q(x)$, trong đó $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Khi đó (2.1.1) trở thành

$$x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x-1) = x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó dẫn đến $Q(x-1) = Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $Q(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số bất kì). Khi đó, $P(x) = cx(x-1)(x-2)$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = cx(x-1)(x-2),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.2 (*Greece 2014*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Viết lại phương trình về dạng

$$(x-4)(x-2)P(x) = x(x+2)P(x-2),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.2.1}$$

Thay $x = -2,\ x = 0,\ x = 4$ vào (2.2.1) thu được $P(0) = P(-2) = P(2) = 0$. Biểu diễn $P(x) = (x-2)x(x+2)Q(x),\ Q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Thay vào (2.2.1) thu được

$$(x-2)Q(x) = xQ(x-2),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dễ tìm được $Q(x) = cx,\ c \in \mathbb{R}$. Khi đó, $P(x) = cx^2(x^2-4)$. Thử lại thỏa mãn. Vậy $P(x) = cx^2(x^2-4),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3 (*VMO B 2003*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)P(x-1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Viết lại phương trình đã cho về dạng

$$(x+2)(x^2+x-1)P(x-1) = (x-2)(x^2-x+1)P(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.3.1}$$

Thay lần lượt $x = -2, x = 2, x = 1, x = -1$ vào (2.3.1) thu được

$$P(-2) = P(1) = P(0) = P(-1) = 0.$$

Khi đó, biểu diễn $P(x) = (x-1)x(x+1)(x+2)Q(x)$ với $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Thay vào (2.3.1) dẫn đến

$$(x^2+x+1)Q(x-1) = (x^2-x+1)Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.3.2}$$

Để ý rằng $(x^2+x+1, x^2-x+1) = 1$ nên từ (2.3.2) phải có $Q(x)$ chia hết cho x^2+x+1 và $Q(x-1)$ chia hết cho x^2-x+1. Khi đó, biến đổi (2.3.2) về dạng

$$\frac{Q(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1} = \frac{Q(x)}{x^2+x+1},\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.3.3}$$

Đặt $H(x) = \dfrac{Q(x)}{x^2+x+1}$ thì (2.3.3) trở thành $H(x-1) = H(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, $H(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với c là hằng số tùy ý. Thay lại tìm được

$$P(x) = c(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2+x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thỏa mãn. Vậy $P(x) = c(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2+x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Trong bài toán này, việc sử dụng tính chất số học hai đa thức nguyên tố cùng nhau $(x^2+x+1, x^2-x+1) = 1$ là khá quan trọng để đưa bài toán đã cho về dạng cơ bản $H(x-1) = H(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ các bài toán 2.1, 2.2, 2.3 chúng ta có thể sáng tạo ra các bài toán dựa trên ý tưởng này bằng việc chọn đa thức $P(x)$ cho trước. Chẳng hạn, với $P(x) = c(x^2-1)(x^2+2)x$ thì $P(x-1) = c(x^2-2x)(x^2-2x+3)(x-1)$ chúng ta thu được bài toán sau:

Bài toán 2.4. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$(x+1)(x^2+2)P(x-1) = (x-2)(x^2-2x+3)P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.5. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Trường hợp 1. Dễ thấy các đa thức $P(x) = 0$, $P(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn.

Trường hợp 2. Xét đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Giả sử a là một nghiệm của $P(x)$. Khi đó a^2+a+1 cũng là nghiệm. Trong phương trình đã cho thay x bởi $x-1$ thu được

$$P(x-1)P(x) = P(x^2-x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì $P(a) = 0$ nên từ phương trình trên phải có $P(a^2-a+1) = 0$. Do đó, a^2-a+1 cũng là nghiệm của $P(x)$. Chọn a là nghiệm có môđun lớn nhất (nếu có nhiều nghiệm như thế thì ta chọn một trong chúng). Từ cách chọn suy ra

$$\left|a^2+a+1\right| \leq \left|a\right|, \left|a^2-a+1\right| \leq \left|a\right|.$$

Theo bất đẳng thức về môđun dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} \left|2a\right| &= \left|(a^2+a+1)+(-a^2+a-1)\right| \\ &\le \left|a^2+a+1\right| + \left|-a^2+a-1\right| \\ &= \left|a^2+a+1\right| + \left|a^2-a+1\right| \\ &\le \left|a\right| + \left|a\right| = 2\left|a\right| = \left|2a\right|. \end{aligned}.$$

Như vậy dấu bằng phải xảy ra ở bất đẳng thức trên, tức là

$$\left|(a^2+a+1)+(a^2-a+1)\right| = \left|a^2+a+1\right| + \left|-a^2+a-1\right|.$$

Từ đó suy ra tồn tại số thực $s \ge 0$ sao cho $a^2+a+1 = s(-a^2+a-1)$. Nếu $\left|a^2+a+1\right| < \left|a^2-a+1\right|$ thì

$$2\left|a^2+a+1\right| > \left|a^2-a+1\right| + \left|a^2+a+1\right| \ge \left|2a\right| \Rightarrow \left|a^2-a+1\right| > \left|a\right|.$$

Tương tự nếu $\left|a^2+a+1\right| > \left|a^2-a+1\right|$ thì $\left|a^2+a+1\right| > |a|$, mâu thuẫn với cách chọn a. Vậy $\left|a^2-a+1\right| = \left|a^2+a+1\right|$. Từ đó suy ra $s=1$ và ta có $a^2+a+1 = -a^2+a-1$, hay $a^2=-1$, suy ra $a = \pm i$. Vậy $P(x) = (x^2+1)^m Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức không chia hết cho x^2+1. Thay vào phương trình ban đầu, thu được

$$(x^2+1)^m Q(x)(x^2+2x+2)^m Q(x+1) = [(x^2+x+1)^2+1]^m Q(x^2+x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khai triển và thu gọn ta được phương trình

$$Q(x)Q(x+1) = Q(x^2+x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ $Q(x)$ cũng thỏa mãn phương trình ban đầu. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thì ta thực hiện tương tự như trên. Từ đó dẫn đến nghiệm có môđun lớn nhất phải là i và $-i$. Nhưng điều này không thể vì $Q(x)$ không chia hết cho x^2+1. Từ các lập luận trên suy ra $Q(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$. Thay lại tìm được $c = 1$. Khi đó $P(x) = (x^2+1)^m, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Tóm lại, các đa thức cần tìm là $P(x) = 0,\ P(x) = 1,\ P(x) = (x^2+1)^m,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Ngoài cách đánh giá nghiệm như trên, bài toán chính là dạng trong bài toán tổng quát 2 với cách trình bày tương tự, mục 1.3.

Bài toán 2.6. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$P(x^2) = P(x)P(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy các đa thức $P(x) = 0, P(x) = 1$ thỏa mãn bài toán. Xét trường hợp đa thức khác hằng. Gọi a là một nghiệm của đa thức $P(x)$. Kí hiệu

$$P(x^2) = P(x)P(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.6.1}$$

Dễ thấy $P(a^2) = P(a)P(a+1) = 0$ nên a^2 cũng là nghiệm của $P(x)$. Làm tương tự thu được dãy $a^2,\ a^4, ..., a^{2^n}, ...$ là nghiệm của $P(x)$. Do đó phải có $\left|a\right| = 0$ hoặc $\left|a\right| = 1$. Vì nếu ngược lại thì dãy $a^2,\ a^4, ...,\ a^{2^n}, ...$ có vô hạn phần tử. Thay $x = a - 1$ vào (2.6.1) thu được $P((a-1)^2) = P(a-1)P(a) = 0$ nên $(a-1)^2$ là nghiệm của $P(x)$. Hoàn toàn tương tự phải có $\left|(a-1)^2\right| = 0$ hoặc $\left|(a-1)^2\right| = 1$. Giả sử $\left|a\right| = 1$ và $\left|(a-1)^2\right| = 1$. Đặt $a = cos\phi + isin\phi$. Khi đó

$$1 - a = (1 - cos\phi) - isin\phi = 2sin\frac{\phi}{2}\left(sin\frac{\phi}{2} - isin\frac{\phi}{2}\right)$$

suy ra

$$(1-a)^2 = -4sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)(\cos\phi + i\sin\phi)$$

tức là $\left|(a-1)^2\right| = 2 - 2cos\phi = 1$. Tìm được $\phi = \frac{\pi}{3}$ hoặc $\phi = \frac{5\pi}{3}$. Nếu $\phi = \frac{\pi}{3}$ thì do $a^2 - 1$ cũng là nghiệm của đa thức $P(x)$ nên phải có $\left|(a-1)^2\right| = 1$. Nhưng điều này không đúng vì

$$\left|(a-1)^2\right| = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - 1\right)^2 + sin^2\frac{2\pi}{3} = 3.$$

Tương tự với $\phi = \frac{5\pi}{3}$. Khi đó, ta có thể kết luận $a = 0, a = 1$. Biểu diễn dạng của đa thức $P(x) = kx^m(x-1)^n$ trong đó k là hằng số thực khác 0. Thay vào đẳng thức đã cho tìm được $k = 1, m = n$ hay $P(x) = x^n(x-1)^n$. Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) = 0,\ P(x) = 1,\ P(x) = (x^2 - x)^n, \forall x \in \mathbb{R}$, n là số tự nhiên.

Nhận xét. Bài toán này không tìm được chính xác nghiệm thực, vì vậy việc sử dụng nghiệm phức dễ dàng hơn cho việc biểu diễn đa thức. Ngoài cách dùng tính chất nghiệm của đa thức thì dễ thấy bài toán có dạng $P(f).P(g) = P(h)$ đã giải theo dạng tổng quát mục 1.3.

Bài toán 2.7. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x^2) + P(x)P(x+1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Nếu $\deg P(x) = 0$ thì $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn. Xét trường hợp $\deg P(x) \geq 1$. Viết lại đẳng thức đã cho về dạng

$$P(x^2) = -P(x)P(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gọi $x = a$ là một nghiệm (thực hoặc phức) của $P(x)$ thì a^2 cũng là nghiệm của đa thức. Khi đó dãy số $a^2, a^4, ..., a^{2^n}, ..$ cũng là các nghiệm của đa thức $P(x)$. Dễ thấy rằng phải có $\left|a\right| = 0$ hoặc $\left|a\right| = 1$. Vì nếu ngược lại thì dãy số $a^2, a^4, ..., a^{2^n}, ...$ là vô hạn trong khi số nghiệm của một đa thức chỉ là hữu hạn. Thay $x = a - 1$ vào đẳng thức trên và lập luận tương tự cũng có $\left|(a-1)^2\right| = 0$ hoặc $\left|(a-1)^2\right| = 1$. Giả sử $\left|a\right| = 1$ và $\left|(a-1)^2\right| = 1$. Đặt $a = \cos\phi + i\sin\phi$. Khi đó

$$1 - a = (1 - \cos\phi) - i\sin\phi = 2\sin\frac{\phi}{2}\left(\sin\frac{\phi}{2} - isin\frac{\phi}{2}\right)$$

suy ra

$$(1-a)^2 = -4sin^2(\frac{\phi}{2})(cos\phi + isin\phi),$$

do đó

$$\left|(a-1)^2\right| = 2 - 2\cos\phi = 1.$$

Tìm được $\phi = \frac{\pi}{3}$ hoặc $\phi = \frac{5\pi}{3}$. Nếu $\phi = \frac{\pi}{3}$ thì do $a^2 - 1$ cũng là nghiệm của đa thức $P(x)$ nên phải có $\left|(a-1)^2\right| = 1$. Nhưng điều này không đúng vì

$$\left|(a-1)^2\right| = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - 1\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{3} = 3.$$

Tương tự với $\phi = \frac{5\pi}{3}$. Khi đó, ta có thể kết luận $a = 0, a = 1$. Biểu diễn dạng của đa thức $P(x) = kx^m(x-1)^n$ trong đó k là hằng số thực khác 0. Thay vào đẳng thức đã cho tìm được $k = -1, m = n$ suy ra $P(x) = -x^m(x-1)^m$. Tóm lại, các đa thức thỏa mãn bài toán là

$$P(x) = 0,\ P(x) = -1,\ P(x) = -x^m(x-1)^m, \forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}.$$

2.2 Phương pháp thế và đổi biến số

Phương pháp thế biến là gán giá trị đặc biệt cho các biến, thường là các giá trị đặc biệt hoặc thế các biến bằng các biểu thức để làm xuất hiện các hằng số hoặc các biểu thức cần thiết. Ý tưởng của việc đổi biến số là tìm cách đặt ẩn phụ thay thế một bộ phận chứa các biến nào đó sao cho thích hợp xây dựng hoặc biến đổi phương trình đã cho về các dạng đặc biệt hoặc đã biết cách giải.

Bài toán 2.8. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy đa thức cần tìm khác đa thức hằng. Kí hiệu

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.8.1}$$

Chú ý rằng $2x + 1 = (x+1)^2 - x^2$ nên (2.8.1) được viết lại dưới dạng

$$P(x+1) - (x+1)^2 = P(x) - x^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.8.2}$$

Đặt $Q(x) = P(x) - x^2,\ Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ thì (2.8.2) trở thành

$$Q(x+1) = Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dễ thấy $Q(x)$ là đa thức mà lại là hàm tuần hoàn nên $Q(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó tìm được $P(x) = Q(x) + x^2 = x^2 + c$. Thử lại thấy thỏa mãn. Do đó, $P(x) = x^2 + c,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Việc biến đổi $P(x+1) - (x+1)^2 = P(x) - x^2$ trong lời giải trên đã chuyển phương trình đã cho về dạng hàm tuần hoàn. Bằng việc đồng nhất các đa thức, chúng ta có thể sáng tạo ra nhiều bài toán phương trình hàm đa thức dạng tương tự. Chẳng hạn, với đẳng thức $(x^2+2x)(x-2) - (x^2-6x+8)x = 6x^2 - 12x$ đồng thời chọn $Q(x) = P(x) + x$ chúng ta được bài toán dưới đây.

Bài toán 2.9. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2) + 6x^2 - 12x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.10. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x + 2011) = P(x + 2009) + 70, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Kí hiệu

$$P(x + 2011) = P(x + 2009) + 70, \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.10.1}$$

Trong (2.10.1) thay x bởi $x - 2009$ ta được

$$P(x + 2) = P(x) + 70, \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.10.2}$$

Đặt $P(x) = 35x + G(x), \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó $G(x) \in \mathbb{R}[x]$. Thay vào (2.10.2) thu được

$$35(x+2) + G(x+2) = 35x + G(x) + 70, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow G(x+2) = G(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, $G(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số bất kì). Từ đó suy ra $P(x) = 35x + c, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy đa thức thỏa mãn đề bài là $P(x) = 35x + c, \forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số bất kì).

Nhận xét. Việc tìm ra phép đặt $P(x) = 35x + G(x), \forall x \in \mathbb{R}$, chúng ta làm như sau: Giả sử $P(x) = mx + n + G(x)$, thay vào (2.10.2) thu được

$$2m + G(x+2) = 70 + G(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\ (*)$$

Chọn $2m = 70$ hay $m = 35$ thì $(*)$ trở thành

$$G(x+2) = G(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.11. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$(x^2 + 2x)P(x+1) = (x^2 + 4x + 3)P(x) + 2x^2 + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy $P(x)$ khác đa thức hằng. Kí hiệu

$$(x^2 + 2x)P(x+1) = (x^2 + 4x + 3)P(x) + 2x^2 + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.11.1}$$

Thay $x = 0$ vào (2.11.1) thu được $P(0) = 0$. Do đó, biểu diễn $P(x)$ dưới dạng $P(x) = xQ(x)$, trong đó $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Khi đó, đẳng thức (2.11.1) trở thành

$$(x^2 + 2x)(x+1)Q(x+1) = (x^2 + 4x + 3)xQ(x) + 2x^2 + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó dẫn đến

$$(x+2)Q(x+1) = (x+3)Q(x) + 2,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.11.2}$$

Dễ thấy $2 = 2(x+3) - 2(x+2)$ nên (2.11.2) được viết lại dưới dạng

$$(x+2)[Q(x+1) + 2] = (x+3)[Q(x) + 2],\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.11.3}$$

Đặt $R(x) = Q(x) + 2$ với $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ thì (2.11.3) trở thành

$$(x+2)R(x+1) = (x+3)R(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Để ý rằng $(x+2,\ x+3) = 1$ nên $R(x)$ có dạng $R(x) = c(x+2),\ c \in \mathbb{R}$. Sau cùng, $P(x) = xQ(x) = x[R(x) - 2] = x[c(x+2) - 2] = cx(x+2) - 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn, do đó $P(x) = cx(x+2) - 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Trong bài toán này, chúng ta đã sử dụng phép thế các giá trị để tìm nghiệm của đa thức kết hợp với biến đổi đại số cơ bản đưa về dạng đặc biệt, tính chất số học hai đa thức nguyên tố cùng nhau. Việc biến đổi về dạng cơ bản bằng phương pháp đổi biến để đưa về đa thức hằng là khá đơn giản.

Bài toán 2.12 (*Olympic KHTN 2014*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$(x-2)P(3x+2) = 3^{2015}xP(x) + 3^{2016}x - 3x + 6,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Viết lại phương trình đã cho về dạng

$$(x-2)(P(3x+2)+3) = 3^{2015}x(P(x)+3),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.12.1}$$

Đặt $Q(x) = P(x) + 3$ thì (2.12.1) trở thành

$$(x-2)Q(3x+2) = 3^{2015}xQ(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.12.2}$$

Thay $x = 0$ vào (2.12.2) thu được $Q(2) = 0$. Đặt $Q(x) = (x-2)H(x),\ H(x) \in \mathbb{R}[x]$. Với $Q(x) = (x-2)H(x)$ thì (2.12.2) trở thành

$$H(3x+2) = 3^{2014}H(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.12.3}$$

Biểu diễn $G(x) = H(x-1)$ thì (2.12.3) tương đương

$$G(3x+3) = 3^{2014}G(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó dẫn đến $G(3x) = 3^{2014}G(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Bằng quy nạp, chứng minh được $G(3^k) = (3^k)^{2014}G(1),\ \forall k \in \mathbb{R}$. Do đó, đa thức $G(x) - G(1)x^{2014}$ có vô số nghiệm nên $G(x) = cx^{2014}$, trong đó $c = G(1)$. Thay lại tìm được $P(x) = c(x-2)(x+1)^{2014} - 3$. Thử lại thỏa mãn. Vậy đa thức thỏa mãn là $P(x) = c(x-2)(x+1)^{2014} - 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2.3 Phương pháp đánh giá bậc và so sánh hệ số

Mỗi đa thức đều có bậc và các hệ số xác định. Ý tưởng của phương pháp này khá đơn giản, chỉ cần biểu diễn tổng quát của đa thức thay vào phương trình và sử dụng kết quả hai đa thức bằng nhau. Với những bài toán phức tạp hơn thường tìm được bậc và một số các hệ số của đa thức.

Bài toán 2.13 (*Slovenian MO 2014*)**.** Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(P(x)) = (x^2 + x + 1)P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì đa thức $P(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn.

Nếu $\deg P = n$ $(n \geq 1,\ n \in \mathbb{N})$ thì đặt $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ với $a_n \neq 0$. Để ý rằng

$$\deg P(P(x)) = n^2,\ \deg[(x^2+x+1)P(x)] = n+2.$$

So sánh bậc hai vế dẫn đến $n^2 = n+2$. Từ đó tìm được $n = 2$. Do đó, $P(x)$ có dạng $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$. Thay $P(x)$ vào và đồng nhất hệ số tìm được $a = b = 1, c = 0$. Khi đó, $P(x) = x^2 + x$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = x^2 + x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.14. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P(x+1) = P(P(x)+x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Nếu $\deg P = 0$ thì đa thức $P(x) = 0,\ P(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán. Giả sử $\deg P = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. So sánh bậc hai vế ta có $2n = n^2$ hay $n = 2$. Khi đó, $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$.

So sánh hệ số cao nhất thu được $a^2 = a$ hay $a = 1$ (vì $a \neq 0$). Do đó, $P(x) = x^2 + bx + c$ $(b,\ c \in \mathbb{R})$. Thay vào và đồng nhất hệ số tìm được $b = c = 0$ hay $P(x) = x^2$. Thử lại thỏa mãn. Vậy $P(x) = 0,\ P(x) = 1,\ P(x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.15. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$x^2 P(x) = P(P(x)+x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy nếu $\deg P = 0$ thì đa thức $P(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Với $\deg P = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ thì so sánh bậc hai vế dẫn đến $n^2 = n+2$ hay $n = 2$. Do đó, $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$. Thay vào phương trình và đồng nhất hệ số tìm được $(a,\ b,\ c) = (1;\ -2;\ 1)$ hoặc $(a,\ b,\ c) = (-1;\ -2;\ -1)$. Từ đó $P(x) = x^2 - 2x + 1$ hoặc $P(x) = -x^2 - 2x - 1$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) = 0,\ P(x) = (x+1)^2,\ P(x) = -(x+1)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.16 (*VMO Bình Dương 2018*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x^{2018} + y^{2018}) = P^{2018}(x) + P^{2018}(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì các đa thức $P(x) = 0$ và $P(x) = \dfrac{1}{\sqrt[2017]{2}}$ thỏa mãn. Nếu $\deg P(x) \geq 1$ thì đặt $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ với $a_n \neq 0$. Kí hiệu

$$P(x^{2018} + y^{2018}) = P^{2018}(x) + P^{2018}(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (2.16.1)$$

Cho $x = t, y = 0$ trong (2.16.1) ta có

$$P(t^{2018}) = P^{2018}(t) + P^{2018}(0), \forall t \in \mathbb{R} \qquad (2.16.2)$$

So sánh hệ số cao nhất trong (2.16.2) thu được $a_n = a_n^{2018}$ suy ra $a_n = 1$. Thay $x = y = t$ thu được $P(2t^{2018}) = 2P^{2018}(t), \forall t \in \mathbb{R}$. So sánh hệ số cao nhất thu được $2^n a_n = 2a_n^{2018}$. Vì $a_n = 1$ nên $n = 1$. So sánh hệ số tự do thu được $a_0 = 2a_0^{2018}$ dẫn đến $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = \frac{1}{\sqrt[2017]{2}}$. Từ đó tìm được các đa thức $P(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $P(x) = x + \frac{1}{\sqrt[2017]{2}}, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại các đa thức $P(x) = 0$, $P(x) = \frac{1}{\sqrt[2017]{2}}$ và $P(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn.

Nhận xét. Bằng cách giải tương tự như trên chúng ta giải được bài toán tổng quát sau:

Bài toán 2.17. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x^n + y^n) = P^n(x) + P^n(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

và $n \geq 2$ là số tự nhiên chẵn.

Bài toán 2.18. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x + y + P^2(x)) = x + xP(x) + P(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy đa thức hằng không thỏa mãn. Xét trường hợp $\deg P(x) \geq 1$ thì đặt $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ với $a_n \neq 0$. Kí hiệu

$$P(x + y + P^2(x)) = x + xP(x) + P(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (2.18.1)$$

Cho $y = x$, từ (2.18.1) dẫn đến

$$P(2x + P^2(x)) = x + xP(x) + P(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2.18.2)$$

So sánh bậc cao nhất hai vế trong (2.18.2) thu được $2n^2 = n + 1$ hay $n = 1$. Do đó, $P(x)$ là đa thức bậc nhất. Đặt $P(x) = ax + b,\ a \neq 0,\ a,\ b \in \mathbb{R}$, thay vào tìm được $a = 1,\ b = 0$. Khi đó, $P(x) = x$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.19 (*Đề nghị Olympic Toán sinh viên 2016*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P(2x^2 - 1) = P(x^2)P(2x - 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Nếu $\deg P(x) = 0$ thì $P(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn. Nếu $\deg P(x) = n \geq 1$ thì đặt $P(2x-1) = 2^n P(x) + R(x), \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó $R(x)$ là đa thức hệ số thực và có $\deg R(x) = m < n$. Thay vào đẳng thức đã cho thu được

$$P(x)[2^n P(x^2) + R(x^2)] = P(x^2)[2^n P(x) + R(x)], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khai triển và thu gọn ta được

$$P(x)R(x^2) = P(x^2)R(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét trường hợp $m > 0$ so sánh bậc hai vế thu được $n + 2m = 2n + m$ hay $m = n$. Điều này không thể xảy ra do $m < n$. Do đó $R(x)$ là đa thức hằng. Thay lại tìm được $R(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $P(2x-1) = 2^n P(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay x bởi $x+1$ thu được

$$P(2x+1) = 2^n P(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $Q(x) = P(x+1)$ suy ra $Q(2x) = 2^n Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biểu diễn $Q(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Bằng việc so sánh các hệ số trong đẳng thức trên thu được $2^i a_i = 2^n a_i$, với mọi $i = 1, 2, ..., n-1$. Do đó $a_i = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-1$. Lại có $2^n a_0 = a_0$ nên $a_0 = 0$ hoặc $n = 0$. Với $n = 0$ thì $Q(x) = a_0$ dẫn đến $P(x+1) = a_0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $P(x) = a_0, \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó $a_0 \in \mathbb{R}$. Với $a_0 = 0$ thì $Q(x) = ax^n$ dẫn đến $P(x) = a(x-1)^n, \forall x \in \mathbb{R}, a \neq 0, a \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy các đa thức này đều thỏa mãn. Vậy $P(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ và $P(x) = a(x-1)^n, \forall x \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Bài toán 2.20. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(2) = 12$ và

$$P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Kí hiệu

$$P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.20.1}$$

Từ (2.20.1) cho $x = 0$ thì $P(0) = 0$, cho $x = 1$ được $P(1) = 2P(1)$ hay $P(1) = 0$. Cho $x = -1$ được $P(1) = 2P(-1)$ suy ra $P(-1) = 0$. Vậy $P(x)$ có ba nghiệm $0, 1, -1$. Giả sử $P(x)$ có nghiệm $t \not\in \{0; 1; -1\}$, khi đó từ (2.20.1) suy ra t^2 cũng là nghiệm của $P(x)$ Tương tự suy ra t^4 cũng là nghiệm của $P(x)$, nhưng với $t \not\in \{0; 1; -1\}$ thì tất cả các phần tử của dãy $t, t^2, t^4, \ldots, t^{2^n}, \ldots$ là khác nhau đôi một, nên suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm. Do đó $P(x) \equiv 0$, mâu thuẫn với $P(2) = 12$.

Vậy $P(x)$ chỉ có ba nghiệm thực là $0, 1, -1$. Giả sử $\deg(P) = n, n \in \mathbb{N}$. Từ (2.20.1) suy ra $2n = n + 4$ hay $n = 4$. Vậy $P(x)$ có một trong ba dạng sau:

$$P(x) = ax^2(x-1)(x+1), P(x) = ax(x-1)^2(x+1), P(x) = ax(x-1)(x+1)^2.$$

Do $P(2) = 12$ nên $a = 1$ hoặc $a = 2$ hoặc $a = \frac{2}{3}$. Thử lại chỉ có một trường hợp $P(x) = x^2(x-1)(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Nhận xét. Với việc chỉ ra được các nghiệm, biểu diễn dưới dạng tích các đa thức là khá nhẹ nhàng so với đặt $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, thay vào phương trình và sử dụng đồng nhất hệ số dẫn tới một hệ phương trình khá phức tạp.
Bài toán 2.21 (*Centro American Olympiad 2008*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $P(1) = 210$ và

$$(x + 10)P(2x) = (8x - 32)P(x + 6), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Kí hiệu

$$(x + 10)P(2x) = (8x - 32)P(x + 6), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.21.1}$$

Từ giả thiết suy ra $P(x)$ không thể đa thức hằng. Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, a_n \neq 0.$$

So sánh hệ số của luỹ thừa cao nhất ở hai vế trong (2.21.1), ta được

$$a_n 2^n = 8a_n \Leftrightarrow 2^n = 2^3 \Leftrightarrow n = 3.$$

Vậy $P(x)$ là đa thức bậc ba. Từ (2.21.1) thay lần lượt $x = -10, x = -2$ và $x = 4$, ta được $P(-4) = 0, P(4) = 0, P(8) = 0$. Như vậy $P(x) = a(x-4)(x+4)(x-8), \forall x \in \mathbb{R}$. Vì $P(1) = 210$ nên $105a = 210$ hay $a = 2$. Do đó

$$P(x) = 2(x-4)(x+4)(x-8), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.21.2}$$

Thử lại với $P(x)$ là đa thức xác định bởi (2.21.2), ta có

$$(x+10)P(2x) = (x+10)2(2x-4)(2x+4)(2x-8) = 16(x+10)(x-2)(x+2)(x-4) \tag{2.21.3}$$

$$(8x-32)P(x+6) = 8(x-4)2(x+2)(x+10)(x-2) = 16(x+10)(x-2)(x+2)(x-4) \tag{2.21.4}$$

Từ (2.21.3), (2.21.4) suy ra đa thức xác định bởi (2.21.2) thỏa mãn. Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = 2(x-4)(x+4)(x-8), \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.22 (*IMO SL 2013 A6*)**.** Cho $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$(x^3 - mx^2 + 1)P(x+1) + (x^3 + mx^2 + 1)P(x-1) = 2(x^3 - mx + 1)P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Nếu $\deg P(x) = 0$ thì $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn. Nếu $P(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ thay vào đẳng thức dẫn đến

$$(x^3 - mx^2 + 1)[a(x+1) + b] + (x^3 + mx^2 + 1)[a(x-1) + b] = 2(x^3 - mx + 1)(ax + b), \forall x \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của x hai vế thu được $2mb = 0$ hay $b = 0$. Khi đó, $P(x) = ax, \forall a \in \mathbb{R}$. Xét trường hợp $\deg P(x) = n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Để ý rằng nếu đa thức $P(x)$ là một đa thức thỏa mãn bài toán thì đa thức $kP(x), k \neq 0$ cũng thỏa mãn bài toán. Vì thế có thể giả sử hệ số cao nhất của đa thức $P(x)$ là 1. Đặt $P(x) = x^n + Q(x)$ với $n \geq 2$ và $\deg Q(x) < n$. Thay vào đẳng thức đã cho thu được

$$\begin{aligned}(x^3 - mx^2 + 1)[(x+1)^n + Q(x+1)] + (x^3 + mx^2 + 1)[(x-1)^n + Q(x-1)]\\ = 2(x^3 - mx + 1)[x^n + Q(x)], \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Biến đổi về dạng sau
$(x^3 + 1)[(x+1)^n + (x-1)^n - 2x^n] + x^3[Q(x+1) + Q(x-1) - 2Q(x)]$
$+(x^3 + 1)[Q(x+1) + Q(x-1) - 2Q(x)] +$
$m[x^2(x-1)^n - x^2(x+1)^n + x^2Q(x-1) - x^2Q(x+1) + 2xQ(x)] = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
Trong đẳng thức trên thì $\deg[(x^3 + 1)[(x+1)^n + (x-1)^n - 2x^n]] = n + 2$ các biểu thức còn lại có $\deg \leq n + 1$ nên vế trái là đa thức bậc $n + 2$, vế phải là đa thức không. Điều này không thể xảy ra. Vậy $P(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.
Nhận xét. Với ý tưởng tương tự bài toán trên, chúng ta giải được bài toán sau:
Bài toán 2.23 (*TST KHTN Hà Nội 2019*)**.** Cho $m \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$(1 - mx)P(x-1) + (1 + mx)P(x+1) = 2(1 + m)P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.24 (*Đề thi HSG TP.HCM 2004-2005*)**.** Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(a + b + c) = 7P(a) + 4P(b) - 5P(c),$$

với a, b, c là các số thực và $(a + b)(b + c)(c + a) = 2a^3 + b^3 - 2c^3$.
Lời giải:

Kí hiệu

$$P(a+b+c) = 7P(a) + 4P(b) - 5P(c) \tag{2.24.1}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 2a^3 + b^3 - 2c^3 \tag{2.24.2}$$

Dễ thấy $(a;b;c) = (3x;2x;x)$ thỏa mãn điều kiện (2.24.2). Khi đó, thay bộ số này vào (2.24.1) thu được

$$P(6x) = 7P(3x) + 4P(2x) - 5P(x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.24.3}$$

Giả sử $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ ($x^0 = 1$). Thay vào (2.24.3) dẫn đến

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(6x)^i = 7\sum_{i=0}^{n} a_i(3x)^i + 4\sum_{i=0}^{n} a_i(2x)^i - 5\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Biến đổi tương đương thu được

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(6^i - 7.3^i - 4.2^i + 5)x^i = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra

$$(6^i - 7.3^i - 4.2^i + 5)a_i = 0, \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{2.24.4}$$

Với $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, dễ thấy $6^i - 7.3^i - 4.2^i + 5 = 0$ khi $3^i(2^i - 7) - 4(2^i - 7) = 23$ hay $(3^i - 4)(2^i - 7) = 23$. Dễ thấy $\begin{cases} 3^i - 4 = 23 \\ 2^i - 7 = 1 \end{cases}$ hay $i = 3$. Kết hợp với (2.24.4) ta suy ra khi $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \backslash \{3\}$ thì $a_i = 0$. Do đó, $P(x) = mx^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn. Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = mx^3, \forall x \in \mathbb{R}$ (với m là hằng số bất kì).

Nhận xét. Việc thực hiện phép thế $(a;b;c) = (3x;2x;x)$ đưa phương trình nhiều biến trở thành phương trình một biến, từ đó dẫn đến so sánh bậc và đánh giá hệ số đơn giản.

Bài toán 2.25 (*Costa Rican Math Olympiad 2008*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(\sqrt{3}(a-b)) + P(\sqrt{3}(b-c)) + P(\sqrt{3}(c-a)) = P(2a-b-c) + P(-a+2b-c) + P(-a-b+2c)$$

với a, b, c là ba số thực bất kì.

Lời giải:

Dễ thấy các đa thức hằng thỏa mãn. Giả sử $\deg P = h \geq 1, P(x) = \sum\limits_{i=0}^{h} a_i x^i$ ($a_h \neq 0$, quy ước $x^0 = 1$). Đặt $x = a - c, y = b - a, z = c - b$. Khi đó $x + y + z = 0$. Từ giả thiết suy ra

$$P(\sqrt{3}x) + P(\sqrt{3}y) + P(\sqrt{3}z) = P(x - y) + P(y - z) + P(z - x).$$

Thay $(x; y; z)$ bởi $(x; x; -2x)$ ta có

$$2P(\sqrt{3}x) + P(-2\sqrt{3}x) = P(0) + P(3x) + P(-3x), \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2.25.1)$$

Thay $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{h} a_i x^i$ thì (2.25.1) tương đương

$$2\sum_{i=0}^{h} a_i(\sqrt{3}x)^i + \sum_{i=0}^{h} a_i(-2\sqrt{3}x)^i = a_0 + \sum_{i=0}^{h} a_i(3x)^i + \sum_{i=0}^{h} a_i(-3x)^i \qquad (2.25.2)$$

So sánh hệ số của cao nhất ở hai vế trong (2.25.2), ta được phương trình

$$2(\sqrt{3})^h + (-2\sqrt{3})^h = 3^h + (-3)^h \qquad (2.25.3)$$

Dễ thấy $h = 1,\ h = 2$ là nghiệm của (2.25.3). Tiếp theo xét $h \geq 3$. Từ (2.25.3) thấy rằng h phải chẵn , đặt $h = 2k,\ k \geq 2$. Khi đó (2.25.3) trở thành $2.3^k + 12^k = 2.9^k$ hay $2 + 4^k = 2.3^k$. Giải phương trình trên tìm được $k = 1,\ k = 2$. Tóm lại từ (2.25.3) suy ra h chỉ có thể là $h = 1, h = 2, h = 4$.

Trường hợp $h = 1$. Khi đó $P(x) = mx + n, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào phương trình đã cho ở đầu bài thấy thỏa mãn.

Trường hợp $h = 2$. Khi đó $P(x) = mx^2 + nx + p, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào phương trình đã cho ở đầu bài ta được

$$3m[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = m[(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2] \text{ (đúng)}$$

Trường hợp $h = 4$. Khi đó $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + e, \forall x \in \mathbb{R}$. Trong phương trình đã cho ở đầu bài, thay bộ $(a; b; c)$ bởi $(x; 0; 0)$ ta được

$$P(\sqrt{3}x) + P(0) + P(-\sqrt{3}x) = P(2x) + 2P(-x), \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2.25.4)$$

Thay $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + e, \forall x \in \mathbb{R}$ vào (2.25.4) thu gọn ta được

$$18mx^4 = 18mx^4 + 6nx^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó dẫn đến $n = 0$ hay $P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào phương trình đã cho ở đầu bài ta được

$$\begin{aligned}&9m[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]+3p[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\\&=m[(2a-b-c)^4+(2b-c-a)^4+(2c-a-b)^4]\\&+p[(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2] \qquad (2.25.5)\end{aligned}$$

Tiếp theo ta chứng minh đẳng thức

$$9[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]=(2a-b-c)^4+(2b-c-a)^4+(2c-a-b)^4 \qquad (2.25.6)$$

Đặt $x=a-c, y=b-a, z=c-b$ thì $x+y+z=0$. Ta có

$$9[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]=9(x^4+y^4+z^4) \qquad (2.25.7)$$

Mặt khác, dễ thấy
$$\begin{aligned}&(2a-b-c)^4+(2b-c-a)^4+(2c-a-b)^4\\&=(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\\&=2(x^4+y^4+z^4)-4x^3y+6x^2y^2\\&-4xy^3-4y^3z+6y^2z^2-4yz^3-4z^3x+6z^2x^2-4zx^3\\&=2(x^4+y^4+z^4)-4x^3(y+z)-4y^3(x+z)-4z^3(x+y)\\&+6(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\end{aligned}$$

Do $x+y+z=0$ nên $x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$. Suy ra
$$\begin{aligned}x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)&=4[x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyx(x+y+z)]\\&=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\end{aligned}$$

Như vậy $x^4+y^4+z^4=2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$. Thay vào (2.25.8) ta được

$$(2a-b-c)^4+(2b-c-a)^4+(2c-a-b)^4=9(x^4+y^4+z^4) \qquad (2.25.9)$$

Từ (2.25.7) và (2.25.9) suy ra (2.25.6) được chứng minh. Do đó, (2.25.5) đúng hay đa thức $P(x)=mx^4+px^2+qx+e, \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn. Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x)=mx+n, P(x)=mx^2+nx+p, P(x)=mx^4+px^2+qx+e(m\neq 0), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Nhận xét. Từ (2.25.4) ta so sánh hệ số của x^h ở hai vế cũng suy ra được h chỉ có thể là $h=1, h=2, h=4$.

Bài toán 2.26 (*IMO 2004*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho

$$P^2(a)+P^2(b)+P^2(c)=P^2(a+b+c)$$

với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $ab+bc+ca=0$.

Lời giải:

Nếu $\deg P(x) = 0$ thì đa thức $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Nếu $\deg P(x) \geq 1$ thì đặt $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ với $a_n \neq 0$. Từ đẳng thức ban đầu, cho $a = b = c = 0$ thu được $P(0) = 0$. Để ý rằng bộ số $(6x, 3x, -2x)$ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 0$. Thay $a = 6x, b = 3x, c = -2x$ ta có

$$P^2(6x) + P^2(3x) + P^2(-2x) = P^2(7x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đẳng thức trên tương đương

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i (6x)^i\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{n} a_i (3x)^i\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{n} a_i (-2x)^i\right]^2 = \left[\sum_{i=0}^{n} a_i (7x)^i\right]^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số x^{2n} hai vế suy ra $a_n^2(36^n + 9^n + 4^n) = a_n^2 49^n$ hay $36^n + 9^n + 4^n = 49^n$. Phương trình này tương đương $\left(\frac{36}{49}\right)^{2n} + \left(\frac{9}{49}\right)^{2n} + \left(\frac{4}{49}\right)^{2n} = 1$. Dễ thấy vế trái là $f(n) = \left(\frac{36}{49}\right)^{2n} + \left(\frac{9}{49}\right)^{2n} + \left(\frac{4}{49}\right)^{2n}$ nghịch biến trên $\mathbb{N}^*$, vế phải là hằng số nên phương trình này có nhiều nhất một nghiệm. Lại có $f(1) = 1$ nên $n = 1$. Kết hợp với $P(0) = 0$ suy ra $P(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Thử lại thấy thỏa mãn. Tóm lại, tất cả các đa thức cần tìm là $P(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.27 (*Olympic KHTN 2017*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho

$$P^2(a) + P^2(b) + P^2(c) = P^2(a + b + c) + 2$$

với mọi bộ số $(a,\ b,\ c)$ thỏa mãn $ab + bc + ca + 1 = 0$.

Lời giải:

Thay $a = x + 1,\ b = -2x - 1,\ c = -2x - 3$ với $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện vào phương trình đã cho thu được

$$P^2(x + 1) + P^2(-2x - 1) + P^2(-2x - 3) = P^2(-3x - 3) + 2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x) = \pm 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu $P(x)$ khác đa thức hằng thì đặt $\deg P = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. So sánh hệ số của x^{2n} hai vế suy ra $1 + 2^{2n} + 2^{2n} = 3^{2n}$ hay $\frac{1}{3^{2n}} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = 1$. Dễ thấy vế trái của phương trình là hàm nghịch biến, vế phải là hàm hằng nên phương trình có nhiều nhất một nghiệm. Lại có $\frac{1}{3^2} + 2.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$ nên $n = 1$. Khi đó, $P(x)$ có biểu diễn $P(x) = px + q$ $(p \neq 0,\ p,\ q \in \mathbb{R})$. Thay vào phương trình đã cho thu được $p^2 + q^2 = 1$. Do đó, $P(x) = \cos t + x \sin t,\ t \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = \pm 1,\ P(x) = \cos t + x \sin t,\ t \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Bộ số $(a,\ b,\ c)$ như trên có thể thay bộ số $(x,\ 1-x,\ x^2-x-1)$ cũng thu được kết quả tương tự. Việc chọn được bộ số này có thể được thực hiện như sau: Để đơn giản, ta chọn a, b, c là các số nguyên. Cho $a = x$ thì đẳng thức $ab + bc + ca + 1 = 0$ viết lại dưới dạng $(xb + 1) + c(b + x) = 0$. Suy ra tồn tại $y \in \mathbb{Z}$ để $xb + 1 = yc$. Thay lại tìm được $b = -x - y,\ yc = x(-x - y) + 1$. Cho $y = 1$ tìm được bộ số như trên thỏa mãn. Các bài toán 2.24, 2.25, 2.26, 2.27 thuộc dạng phương trình hàm đa thức với điều kiện cho trước, việc chọn lựa được bộ số phù hợp dễ dàng chỉ ra được bậc và các hệ số của đa thức.

2.4 Phương pháp chỉ ra họ nghiệm và chứng minh

Phương pháp này thường được sử dụng khi dự đoán được nghiệm của phương trình hàm dựa trên một số nghiệm đặc biệt. Bằng cách biểu diễn một phần đa thức thay vào so sánh bậc, hệ số chúng ta có thể chứng minh tính duy nhất của đa thức cần tìm tương ứng với mỗi bậc, từ đó chỉ ra họ nghiệm.

Bài toán 2.28. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P(x+1) = P(2x^2 + 8x + 6),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Nếu $\deg P = 0$ thì các đa thức $P(x) = 0,\ P(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán. Xét trường hợp $\deg P \neq 0$ thì $P(x)$ có dạng $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Kí hiệu

$$P(x)P(x+1) = P(2x^2 + 8x + 6),\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2.28.1)$$

Thay và so sánh hệ số của bậc cao nhất hai vế trong (2.28.1) thu được $a_n^2 = a_n.2^n$. Vì $a_n \neq 0$ nên $a_n = 2^n$. Với $n = 1$ tìm được $P(x) = 2x + 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn. Ta chứng minh $P(x) = (2x+3)^n,\ \forall n \geq 2$. Đặt $P(x) = (2x+3)^n + Q(x)$, trong đó $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg Q = m\ (0 \leq m < n)$. Thay vào (2.28.1) thu được

$$(2x+3)^n Q(x+1) + (2x+5)^n Q(x) + Q(x)Q(x+1) = Q(2x^2+8x+6),\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2.28.2)$$

Nếu $\deg Q = m\ (0 < m < n)$ thì vế trái (2.28.2) có bậc $n+m$, vế phải có bậc $2m$. So sánh bậc dẫn đến $n+m = 2m$ hay $m = n$. Điều này không thể xảy ra. Do đó, $Q(x)$ phải là đa thức hằng. Từ đó tìm được $Q(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $P(x) = (2x+3)^n$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = 0,\ P(x) = 1,\ P(x) = (2x+3)^n,\ n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.29 (*Đề nghị Olympic Toán sinh viên 2018*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho

$$P(2x-x^2)=P^2(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lời giải 1:

Nếu $\deg P=0$ thì các đa thức $P(x)=0,\ P(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán. Xét trường hợp $\deg P\neq 0$ thì $P(x)$ có dạng $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$. Kí hiệu

$$P(2x-x^2)=P^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad (2.29.1)$$

Nếu $\deg P=1$ thì đa thức $P(x)=1-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn (2.29.1). Ta chứng minh $P(x)=(1-x)^n,\ \forall n\geq 2, n\in\mathbb{N}$. Đặt $P(x)=(1-x)^n+Q(x)$, trong đó $Q(x)\in\mathbb{R}[x]$, $\deg Q=m$ $(0\leq m<n)$. Thay vào (2.29.1) thu được

$$Q(2x-x^2)=2(1-x)^nQ(x)+Q^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad (2.29.2)$$

Nếu $\deg Q=m$ $(0<m<n)$ thì vế trái có bậc $2m$, vế phải có bậc $m+n$. So sánh bậc dẫn đến $n+m=2m$ hay $m=n$. Điều này không thể xảy ra. Do đó, $Q(x)$ phải là đa thức hằng. Từ đó tìm được $Q(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó, $P(x)=(1-x)^n$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x)=0,\ P(x)=1,\ P(x)=(1-x)^n,\ n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải 2:

Đặt $Q(x)=P(1-x)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$Q((1-x)^2)=P(1-(1-x)^2)=P^2(x)=Q^2(1-x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay $1-x$ bởi x ta được

$$Q(x^2)=Q^2(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Nếu $\deg Q(x)=0$ thì các đa thức $Q(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $Q(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn. Từ đó tìm được các đa thức $P(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $P(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$. Nếu $\deg Q(x)=n\geq 1$ thì biểu diễn $Q(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$. So sánh hệ số cao nhất hai vế suy ra $a_n=1$. Đặt $Q(x)=x^n+R(x)$ trong đó $R(x)$ có $0\leq\deg R(x)=k<n$. Thay vào đẳng thức thu được

$$x^{2n}+R(x^2)=(x^n+R(x))^2, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Khai triển và thu gọn dẫn đến

$$R(x^2)=2x^nR(x)+R^2(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Chú ý rằng vế trái của đẳng thức này có bậc là $2n$, vế phải có bậc là $n+k$. Đồng nhất bậc hai vế dẫn đến $2n = n+k$ hay $n = k$. Vô lí do $k < n$. Do đó, $R(x)$ là đa thức hằng. Từ đó tìm được $R(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $Q(x) = x^n$ suy ra $P(x) = (1-x)^n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $P(x) = (1-x)^n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

Nhận xét. Bài toán 2.28, 2.29 thuộc dạng phương trình $P(f).P(g) = P(h)$. Thay x bởi các đa thức khác, hoàn toàn tương tự chúng ta giải được các bài toán sau:

Bài toán 2.30 (*Đề nghị Olympic 30/4/2011*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(2x+1)P(2x+2) = P(4x^2+6x+3), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.31 (*Romania 1990*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$[P(x)]^2 - 2 = 2P(2x^2-1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Thay $x = 1$ vào phương trình đã cho thu được $P^2(1) - 2 = 2P(1)$ hay $P(1) = 1 \pm \sqrt{3}$. Giả sử $P(x) \neq P(1)$ và đặt $P(x) = (x-1)^n Q(x) + P(1)$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $Q(1) \neq 0$. Thay vào đẳng thức đã cho thu được

$$4(x-1)^n(x+1)^n Q(2x^2-1) + 2P(1) = (x-1)^{2n}Q(x) + 2(x-1)^n Q(x)P(1) + P^2(1) - 2.$$

Lại có $2P(1) = P^2(1) - 2$, thay vào đẳng thức trên ta có

$$4(x+1)^n Q(2x^2-1) = (x-1)^n Q(x) + 2Q(x)P(1).$$

Cho $x = 1$ thu được $Q(1)(2^{n+1} - P(1)) = 0$. Vì $P(1) = 1+\sqrt{3}$ hoặc $P(1) = 1-\sqrt{3}$ nên suy ra $Q(1) = 0$. Điều này mâu thuẫn với $Q(x)$ đang xét ở trên. Từ đó suy ra $P(x) = P(1)$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = 1+\sqrt{3}, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $P(x) = 1-\sqrt{3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Dễ thấy đa thức hằng $P(x) = a$ với a là nghiệm của phương trình $a^2 - 2 = 2a$ thỏa mãn bài toán. Thay lần lượt các trường hợp đặc biệt đa thức bậc nhất, bậc hai,... vào phương trình và đồng nhất thức không tìm được đa thức nào thỏa mãn, do đó nghĩ đến việc chứng minh đa thức cần tìm phải là đa thức hằng. Bằng cách xây dựng tương tự, chẳng hạn với các phương trình $a^2 - 3 = a, a = a^2 - 4a + 1$ lần lượt thu được bài toán sau:

Bài toán 2.32 (*VMO Hà Nội 2017*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho

$$P^2(x) = 2P(x^2-3) + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.33. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(x) = 4P(x^2 - 4x + 1) + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.5 Phương pháp sử dụng dãy số, giới hạn

Phương pháp sử dụng dãy số lúc đầu chúng ta khởi tạo một số các giá trị P_i ban đầu từ phương trình đã cho, các giá trị sau được biểu diễn qua giá trị trước. Dễ thấy $\{P_i\}$ là một dãy hằng xác định, từ đó tất cả các giá trị còn lại đều thỏa mãn một đẳng thức dự đoán và chứng minh được bằng phép toán quy nạp thông qua tính đơn điệu của dãy số. Phép lấy giới hạn là phép toán cơ bản của Giải tích cho phép "xấp xỉ" các đại lượng đang cần tìm từ những đại lượng cho trước, từ đó có thể chỉ ra được tính chất hoặc công thức tổng quát của hàm cần tìm.

Bài toán 2.34. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $P(0) = 0$ và

$$P(x^2 + 1) = P^2(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Để ý rằng $P(0) = 0, P(1) = 0^2 + 1, P(5) = 2^2 + 1$. Chúng ta xây dựng dãy số $\{a_n\}$ như sau: $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Vì $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ nên $\{a_n\}$ là dãy tăng và gồm vô số các số hạng phân biệt.

Ta sẽ chứng minh $P(a_n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Với $n = 0$ thì khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}$. Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1, k \in \mathbb{N}$. Dễ thấy $P(a_{k+1}) = P(a_n^2 + 1) = P^2(a_k) + 1 = a_k^2 + 1 = a_{k+1}$. Do đó, khẳng định đúng với $n = k + 1, k \in \mathbb{N}$. Theo nguyên lý quy nạp suy ra $P(a_n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Xét đa thức hệ số thực $Q(x) = P(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Do $P(a_n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ nên đa thức $Q(x)$ nhận $a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ là nghiệm. Dãy số a_n được xác định như trên gồm vô số số hạng phân biệt nên đa thức $Q(x)$ có vô số nghiệm. Từ đó suy ra $Q(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $P(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Bài toán 1.3 trong mục 1.3 và bài toán 2.34 trên đây đều là phương trình hàm đa thức dạng $P(ax^2 + bx + c) = aP^2(x) + bP(x) + c$ nhưng cách giải khác nhau. Chúng ta không thể áp dụng phương pháp sử dụng dãy số cho bài toán 1.3 vì dãy $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ xác định từ dãy $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n^2 - 2$ trùng với dãy

$0, -2, 2, ..., -2, 2, ...$ không chứa vô hạn các số khác nhau. Bằng cách xây dựng dãy số tương tự như trên, chẳng hạn dãy $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n^3 + a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ là dãy đơn điệu tăng chúng ta có bài toán sau:

Bài toán 2.35. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $P(0) = 0$ và

$$P(x^3 + 1) = P^3(x) + P(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.36. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ không đồng nhất không và thỏa mãn

$$P(1960) = 1992; P(x) = \sqrt{P(x^2 + 1) - 33} + 32, \forall x \geq 0.$$

Lời giải:

Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn. Ta có $P(x^2+1) = [P(x) - 32]^2 + 33, \forall x \geq 0$ và $P(1960^2 + 1) = [1992 - 32]^2 + 33 = 1960^2 + 33$.

Gọi $x_0 = 1960$ thì $x_0 + 32 = 1992, P(x_0) = x_0 + 32 \quad$ (do $P(1960) = 1992$). Xây dựng dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$x_0 = 1960, x_1 = x_0^2 + 1, \ldots, x_{n+1} = x_n^2 + 1, \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Khi đó, $P(x_0) = x_0 + 32$ và

$$P(x_1) = P(x_0^2 + 1) = [P(x_0) - 32]^2 + 33 = x_0^2 + 33 = (x_0^2 + 1) = x_1 + 32,$$

$$P(x_2) = P(x_1^2 + 1) = [P(x_1) - 32]^2 + 33 = x_1^2 + 33 = (x_1^2 + 1) = x_2 + 32, ...$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $P(x_n) = x_n + 32, \forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ $(*)$. Vì dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ là dãy tăng nên từ $(*)$ suy ra $P(x) = x + 32, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = x + 32, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.37. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x^2) + P(x)P(x+1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Trường hợp 1. Nếu $\deg P(x) = 0$ thì $P(x) = 0, P(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn.

Trường hợp 2. Nếu $\deg P(x) \geq 1$. Viết lại đẳng thức đã cho về dạng

$$P(x^2) = -P(x)P(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số $a_n \neq 0$ là hệ số với bậc cao nhất của đa thức $P(x)$ trong phương trình trên thu được $a_n = -a_n^2$ hay $a_n = -1$. Nếu $\deg P(x) = 1$ thì biểu diễn

$P(x) = ax + b, a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$. Thay vào đẳng thức và đồng nhất hệ số không tìm được a, b thỏa mãn. Nếu $\deg P(x) = 2$, đặt $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Thay vào đẳng thức và đồng nhất hệ số tìm được $P(x) = -x(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy đa thức $P(x) = -x^m(x-1)^m, \forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$ cũng thỏa mãn. Với $\deg P(x) \geq 2$. Chúng ta xem xét các khả năng sau:

i) Đa thức $P(x)$ có nghiệm. Gọi $x = a$ là một nghiệm của $P(x)$ thì a^2 cũng là nghiệm của đa thức. Khi đó dãy số $a^2, a^4, ..., a^{2^n}, ..$ cũng là các nghiệm của đa thức $P(x)$. Nhận xét rằng $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1$ thì đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm vì dãy $a^2, a^4, ..., a^{2^n}, ..$ là các số phân biệt. Chú ý $a = -1$ không thỏa mãn vì khi thay $x = -2$ thì $P(4) = 0$ dẫn đến $P(4^t) = 0, \forall t \in \mathbb{N}^*$. Điều này không thể xảy ra. Nếu $P(0) = 0$ thì thay $x = -1$ thu được $P(1) = 0$. Nếu $P(1) = 0$ thì thay $x = -1$ thu được $P(0) = 0$. Vì thế trong mọi trường hợp $P(x)$ có nghiệm $a = 0$ và $a = 1$. Đặt $P(x) = x^i(x-1)^j Q(x)$ với $Q(0), Q(1) \neq 0$. Thay vào đẳng thức đã cho thu được

$$x^{2i}(x^2-1)^j Q(x^2) + x^{i+j}(x-1)^j(x+1)^i Q(x)Q(x+1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $i > j$ thì $x^{i-j}Q(x^2) + (x+1)^{i-j}Q(x)Q(x+1) = 0, \forall x \neq 0, 1, -1$. Cho $x \to 0$ thu được $Q(0)Q(1) = 0$. Điều này không xảy ra. Tương tự với $i < j$ cũng không xảy ra. Như vậy $i = j$. Do đó, $P(x) = (x^2 - x)^i Q(x)$ với $\deg Q$ là số lẻ. Thay vào đẳng thức rút gọn ta được $Q(x^2) + Q(x)Q(x+1) = 0$. Lặp lại quá trình trên cũng thu được $Q(0)Q(1) = 0$. Vậy không tồn tại đa thức thỏa mãn.

ii) Đa thức $P(x)$ không có nghiệm và có hệ số cao nhất là $a_n = -1$. Suy ra bậc của đa thức $P(x)$ là bậc chẵn. Đặt $P(x) = -(x^2 - x)^m + Q(x)$ trong đó $\deg Q(x) = k < 2m$. Thay vào đẳng thức đã cho thu được

$$Q(x^2) = (x^2 - x)^m Q(x+1) + (x^2 + x)^m Q(x) - Q(x)Q(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vế trái của đẳng thức này có bậc $2k$, vế phải có bậc $2m+k$. So sánh bậc hai vế dẫn đến $2k = 2m + k$ hay $k = 2m$. Điều này không thể xảy ra. Do đó, $Q(x)$ là đa thức hằng. Từ đó tìm được $Q(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $P(x) = -(x^2 - x)^m, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = 0,\ P(x) = -1,\ P(x) = -x^m(x-1)^m, \forall x \in \mathbb{R}$, m là số tự nhiên.

Nhận xét. Bài toán này chính là bài toán 2.7 đã được giải bằng nghiệm phức trong phương pháp đánh giá nghiệm. Bằng việc sử dụng giới hạn cũng chỉ ra được đa thức chỉ có các nghiệm 0 và 1 trong trường hợp có nghiệm.

Bài toán 2.38 (*Đề nghị Olympic 30/04/2012*). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$[P(x)]^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Kí hiệu

$$[P(x)]^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.38.1}$$

Giả sử $P(x)$ không phải đa thức hằng. Đặt $P(1) = a$. Trong (2.38.1) thay $x = 1$ thu được $a^2 - 2a - 2 = 0$. Giả sử $P(x) = (x-1)P_1(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (2.38.1) ta được

$$(x-1)^2[P_1(x)]^2 + 2a(x-1)P_1(x) + a^2 - 2 = 2[(2x^2 - 2)P_1(2x^2 - 1) + a].$$

Khai triển và thu gọn ta được

$$(x-1)^2[P_1(x)]^2 + 2a(x-1)P_1(x) = 2[(2x^2 - 2)P_1(2x^2 - 1)]$$

Từ đó suy ra

$$(x-1)[P_1(x)]^2 + 2aP_1(x) = 4(x+1)P_1(2x^2 - 1), \forall x \neq 1 \tag{2.38.2}$$

Do đó hàm đa thức $P_1(x)$ liên tục nên từ (2.38.2) cho $x \to 1$ ta được

$$2aP_1(1) = 8P_1(1) \Leftrightarrow P_1(1) = 0(\text{ do } 2a \neq 8).$$

Biểu diễn $P_1(x) = (x-1)P_2(x)$ và khi đó $P(x) = (x-1)^2 P_2(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (2.38.1) ta được

$$(x-1)^4[P_2(x)]^2 + 2a(x-1)^2 P_2(x) = 2[(2x^2 - 2)^2 P_2(2x^2 - 1)].$$

Biến đổi về dạng

$$(x-1)^2[P_2(x)]^2 + 2aP_2(x) = 8(x+1)^2 P_2(2x^2 - 1), \forall x \neq 1 \tag{2.38.3}$$

Do hàm đa thức $P_2(x)$ liên tục nên từ (2.38.3) cho $x \to 1$ thì

$$2aP_2(1) = 32P_2(1) \Leftrightarrow P_2(1) = 0 \quad (\text{do } 2a \neq 32).$$

Từ đó $P_2(x) = (x-1)P_3(x)$ và dẫn đến $P(x) = (x-1)^3 P_3(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$. Tiếp tục quá trình như trên ta được

$$P(x) = (x-1)^n Q(x) + a, \forall x \in \mathbb{R} \ (Q(1) \neq 0).$$

Thay vào (2.38.1) thu được

$$(x-1)^{2n}[Q(x)]^2 + 2a(x-1)^n Q(x) = 2[(2x^2-2)^n Q(2x^2-1)].$$

Suy ra

$$(x-1)^n[Q(x)]^2 + 2aQ(x) = 2^{n+1}(x+1)^n Q(2x^2-1), \forall x \neq 1 \qquad (2.38.4)$$

Do hàm đa thức $Q(x)$ liên tục nên từ (2.38.4) cho $x \to 1$ ta được

$$2aQ(1) = 2^{2n+1}Q(1) \Leftrightarrow Q(1) = 0(\text{do } 2a \neq 2^{2n+1}).$$

Đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy $P(x)$ là đa thức hằng hay $P(x) \equiv a$. Thay vào (2.38.1) tìm được $P(x) = 1+\sqrt{3},\ P(x) = 1-\sqrt{3}$. Thử lại thỏa mãn. Vậy $P(x) = 1+\sqrt{3},\ P(x) = 1-\sqrt{3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Bài toán này chính là bài toán 2.31 đã được giải bằng phương pháp chỉ ra họ nghiệm và chứng minh. Phép lấy giới hạn trong (2.38.4) cũng chỉ ra được đa thức cần tìm phải là đa thức hằng.

Chương 3

Bất phương trình hàm đa thức

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số phương pháp giải bất phương trình hàm đa thức kết hợp các nguyên lí của Giải tích dựa trên các phương pháp giải phương trình hàm đa thức: phương pháp thế, phương pháp đánh giá bậc và so sánh hệ số, phương pháp sử dụng giới hạn. Chương này được tham khảo trong [5, 6, 7, 9, 10, 12].

3.1 Phương pháp thế

Tương tự phép thế trong phương trình hàm đa thức, phép thế là một kĩ thuật đơn giản và thông dụng với các bất phương trình hàm với các biến tự do, mục tiêu thu được các hệ quả hướng đến việc xác định được đa thức. Một vài bài toán chỉ cần vài phép thế các giá trị đơn giản xác định được hàm đa thức nhưng có nhiều bài để giải quyết ngoài phép thế cần sử dụng thêm một số lí thuyết khác về đa thức. Giá trị của hàm đa thức tại một điểm được xác định xuất phát từ một bất đẳng thức với nguyên lý kẹp.

Bài toán 3.1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn các điều kiện:

i) $P(x+y) \leq P(x) + P(y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$;

ii) $P(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Trong điều kiện i) cho $x = y = 0$ thu được $P(0) \geq 0$. Thay $x = 0$ từ điều kiện ii) thu được $P(0) \leq 0$. Từ đó dẫn đến $0 \leq P(0) \leq 0$ hay $P(0) = 0$. Để ý rằng

$$0 = P(0) = P(x + (-x)) \leq P(x) + P(-x) \leq 0 + 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $P(x) \geq -P(-x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (theo ii)). Vì thế, cũng từ điều kiện ii) thì $P(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x+y) \leq P(x) + P(y) \leq x + y,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Kí hiệu

$$P(x+y) \leq P(x) + P(y) \leq x + y,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R} \tag{3.2.1}$$

Cho $x = y = 0$ vào (3.2.1) thu được $0 \leq P(0) \leq 0$ hay $P(0) = 0$. Cho $y = -x$ vào (3.2.1) thu được

$$0 \leq P(x) + P(-x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $P(x) + P(-x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $P(-x) = -P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ (3.2.2)

Cho $y = 0$ vào (3.2.1) thu được $P(x) \leq x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (3.2.3)

Từ (3.2.2), (3.2.3) suy ra

$$-P(x) = P(-x) \leq -x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

hay $P(x) \geq x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (3.2.4)

Kết hợp (3.2.3), (3.2.4) thì $P(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn. Do đó, đa thức cần tìm là $P(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x+y) + P(y+z) + P(z+x) \geq 3P(x+2y+3z), \forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Kí hiệu

$$P(x+y) + P(y+z) + P(z+x) \geq 3P(x+2y+3z), \forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \tag{3.3.1}$$

Thay $y = z = 0$ vào (3.3.1) và rút gọn thu được $P(x) \leq P(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$ (3.3.2)

Tương tự, thay $y = x,\ z = -x$ vào (3.3.1) thu được $P(2x) \geq P(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$ (3.3.3)

Trong (3.3.3) thay x bởi $\dfrac{x}{2}$ ta có $P(x) \geq P(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$ (3.3.4)

Từ (3.3.2), (3.3.4) suy ra $P(x) = P(0) = c$. Vậy $P(x) = c,\ c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán 3.4. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$yP(x) + P(y) \leq P(xy),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn. Kí hiệu

$$yP(x) + P(y) \leq P(xy),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R} \tag{3.4.1}$$

Khi đó

- Thay $x = 0$ vào (3.4.1) thu được $P(y) \leq P(0)(1 - y),\ \forall y \in \mathbb{R}$.
- Thay $x = -1$ vào (3.4.1) thu được $yP(-1) + P(y) \leq P(-y),\ \forall y \in \mathbb{R}$ (3.4.2)
- Thay $y = -1$ vào (3.4.1) thu được $-P(x) + P(-1) \leq P(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $P(-1) \leq P(y) + P(-y),\ \forall y \in \mathbb{R}$ (3.4.3)

Từ (3.4.2), (3.4.3) dẫn đến

$$\frac{P(-1)}{2}(1 - y) \leq P(y) \leq P(0)(1 - y),\ \forall y \in \mathbb{R} \tag{3.4.4}$$

Thay y bởi xy trong (3.4.4) thu được

$$\frac{P(-1)}{2}(1 - xy) \leq P(xy) \leq P(0)(1 - xy),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $(1-xy)\left(P(0) - \dfrac{P(-1)}{2}\right) \geq 0,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$ hay $P(0) = \dfrac{P(-1)}{2}$. Khi đó (3.4.4) trở thành

$$P(0)(1 - y) \leq P(y) \leq P(0)(1 - y),\ \forall y \in \mathbb{R}$$

hay

$$P(y) = P(0)(1 - y) = c(1 - y) \text{ với } P(0) = c.$$

Thử lại thỏa mãn. Vậy $P(x) = c(1 - x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.5 (*MEMO 2019*)**.** Cho α là một số thực bất kì. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(2x + \alpha) \leq (x^{20} + x^{19})P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì đa thức $P(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn. Kí hiệu

$$P(2x + \alpha) \leq (x^{20} + x^{19})P(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.5.1}$$

Xét trường hợp đa thức khác đa thức không. Giả sử $\deg P = n > 0,\ n \in \mathbb{N}$. Đặt $Q(x) = (x^{20} + x^{19})P(x) - P(2x + \alpha)$. Đa thức $Q(x)$ có bậc $n + 20$, hệ số cao nhất a_n gắn với x^{n+20} và $Q(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $n + 20$ là số chẵn và $a_n > 0$. Vì

$n + 20$ là số chẵn nên n phải là số chẵn. Thay $x = -1$, $x = 0$ vào (3.5.1) thu được $P(-2+\alpha) \le 0$, $P(\alpha) \le 0$. Do đó, đa thức $P(x)$ có nghiệm thực. Gọi m, M lần lượt là các nghiệm thực nhỏ nhất và nghiệm lớn nhất. Dễ thấy $a_n > 0$ nên $P(x)$ nhận giá trị dương với mọi x nằm ngoài khoảng (m, M). Từ đó suy ra $\{-2+\alpha, \alpha\} \subset (m, M)$ và độ dài (m, M) tối thiểu bằng 2. Trong (3.5.1) thay $x = m$ thu được $P(2m + \alpha) \le 0$. Từ đó suy ra

$$m \le 2m + \alpha \text{ hay } -\alpha \le m \tag{3.5.2}$$

Tương tự $P(2M + \alpha) \le 0$ và suy ra

$$2M + \alpha \le M \text{ hay } M \le -\alpha \tag{3.5.3}$$

Từ (3.5.2), (3.5.3) dẫn đến $-\alpha \le m < M \le -\alpha$. Điều này không thể xảy ra. Như vậy, không tồn tại đa thức khác đa thức không thỏa mãn bài toán. Vậy $P(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.2 Phương pháp đánh giá bậc và so sánh hệ số

So với phương trình hàm đa thức, trong bài toán bất phương trình hàm đa thức thì việc tìm được bậc của đa thức khó hơn rất nhiều. Cụ thể, để tìm được bậc, các hệ số của đa thức cần sử dụng một số đánh giá bất đẳng thức đại số hay giới hạn cơ bản của Giải tích.

Bài toán 3.6. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$$1 - x^4 \le P(x) \le 1 + x^4, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Gọi a là hệ số của x với lũy thừa cao nhất trong $P(x)$. Khi đó

- Nếu $\deg P = 4$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x^4} = a$.
- Nếu $\deg P < 4$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x^4} = 0$.
- Nếu $\deg P > 4$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x^4} = \pm\infty$.

Kí hiệu

$$1 - x^4 \le P(x) \le 1 + x^4, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.6.1}$$

$$\frac{1}{x^4} - 1 \leq \frac{P(x)}{x^4} \leq \frac{1}{x^4} + 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \tag{3.6.2}$$

Trong (3.6.2) cho $x \to +\infty$ suy ra $-1 \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x^4} \leq 1$. Do đó, $\deg P \leq 4$. Lại có $1 \leq P(0) \leq 1$ nên $P(0) = 1$. Giả sử $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (3.6.1) thu được

$$-x^4 \leq ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \leq x^4,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

hay

$$\left|ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx\right| \leq \left|x^4\right|,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$\left|ax^3 + bx^2 + cx + d\right| \leq \left|x^3\right|,\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \tag{3.6.3}$$

Trong (3.6.3) cho $x \to 0$ lần lượt thu được $d = 0,\ c = 0,\ b = 0$. Từ đó dẫn đến $|ax| \leq |x|,\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ hay $|a| \leq 1$. Khi đó $P(x) = ax^4 + 1,\ |a| \leq 1$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) = ax^4 + 1,\ |a| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Với việc sử dụng giới hạn cơ bản trong bất đẳng thức (3.6.3) dễ dàng chỉ ra được các hệ số tương ứng thay vì giải bài toán ước lượng đa thức từ bất đẳng thức $\left|ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx\right| \leq \left|x^4\right|,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.7 (*Albania TST 2009*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ khác đa thức không có hệ số không âm và thỏa mãn: $P(x).P\left(\frac{1}{x}\right) \leq P^2(1),\ \forall x > 0$.

Lời giải:

Dễ thấy các đa thức hằng số không âm thỏa mãn bài toán. Xét trường hợp $\deg P = n > 0,\ n \in \mathbb{N}$. Giả sử $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_i \geq 0,\ \forall i = \overline{1, n}$. Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dễ thấy

$$P(x).P\left(\frac{1}{x}\right) \geq (a_n + a_{n-1} + ... + a_1)^2 = P^2(1),\ \forall x > 0.$$

Từ điều kiện $P(x).P\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq P^2(1),\ \forall x > 0$ suy ra $P(x).P\left(\dfrac{1}{x}\right) = P^2(1),\ \forall x > 0$. Thay $P(x)$ vào phương trình trên thu được

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i}) = P^2(1),\ \forall x > 0.$$

Đẳng thức trên tương đương

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}) = P^2(1)x^n,\ \forall x > 0.$$

So sánh hệ số của x^n hai vế thu được

$$a_0^2 + a_1^2 + ... + a_n^2 = (a_0 + a_1 + ... + a_n)^2.$$

Khai triển và thu gọn dẫn đến $\sum\limits_{0 \le i \le j \le n} a_i a_j = 0$. Từ đó suy ra $a_i = 0,\ \forall i = \overline{1, n-1}$. Do đó, $P(x) = a_n x^n$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = a_n x^n,\ \forall a_n \ge 0$ là các đa thức cần tìm.

Bài toán 3.8 (*TST Ninh Bình 2019*)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực không âm thỏa mãn $P(0) = 0,\ P(1) = 1$ và $P(x) \ge x^{2018},\ \forall x \ge 0$.

Lời giải:

Dễ thấy các đa thức hằng không thỏa mãn bài toán.

Xét trường hợp $\deg P = n > 0,\ n \in \mathbb{N}$. Vì $P(0) = 0,\ P(1) = 1$ nên suy ra

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_m x^m,\ a_i \ge 0,\ \forall i = \overline{m, n}$$

và $a_n + a_{n-1} + ... + a_m = 1$.

Xét hàm số $f(x) = P(x) - x^{2018}$. Dễ thấy $P(x) \ge x^{2018},\ \forall x \ge 0$ nên hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 trên $(0;\ +\infty)$ tại $x = 1$. Từ đó suy ra $n \ge 2018$. Vì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên có $f'(1) = 0$ hay $P'(1) - 2018 = 0$. Điều này tương đương $na_n + (n-1)a_{n-1} + ... + ma_m = 2018$. Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ suy rộng thì

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_m x^m \ge x^{na_n + (n-1)a_{n-1} + ... + ma_m} = x^{2018}.$$

Vậy đa thức $P(x)$ như trên thỏa mãn bài toán.

Bài toán 3.9. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$xP(x) + yP(y) \ge 2P(xy),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy các đa thức hằng khác không không thỏa mãn. Xét trường hợp $\deg P = n > 0,\ n \in \mathbb{N}$. Giả sử $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i,\ \forall i = \overline{1, n}$. Kí hiệu

$$xP(x) + yP(y) \ge 2P(xy),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R} \tag{3.9.1}$$

Cho $x = y$ vào (3.9.1) ta có

$$xP(x) \ge P(x^2),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.9.2}$$

Thay $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ vào (3.9.2) ta được

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+1} \geq \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i},\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.9.3}$$

Suy ra

$$a_n + a_{n-1}\frac{x^n}{x^{n+1}} + ... + a_0\frac{x}{x^{n+1}} \geq a_n x^{n-1} + a_{n-1}\frac{x^{2n-2}}{x^{n+1}} + ... + a_0\frac{1}{x^{n+1}},\ \forall x \neq 0 \tag{3.9.4}$$

Nếu $n > 1$ thì trong (3.9.4), cho $x \to \infty$ suy ra $a_n \geq \infty$. Điều này không thể xảy ra. Do đó, $n = 1$ hay $P(x) = ax + b,\ a,\ b \in \mathbb{R}$. Thay vào (3.9.2) thu được

$$bx \geq b,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.9.5}$$

Trong (3.9.5), lần lượt cho $x = 0,\ x = 2$ tìm được $b = 0$ hay $P(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Mặt khác, cũng từ (3.9.1) ta có $xP(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $a > 0$. Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) = ax,\ a \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Từ bất phương trình (3.9.2) với $\deg P = n > 0$, thay vì tính giới hạn, chúng ta có thể so sánh hai vế dẫn đến $1 + n \geq 2n$ và tìm được $n = 1$.

Bài toán 3.10. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực, có hệ số tự do dương và thỏa mãn điều kiện:

Với mọi số thực $x,\ y$ bất đẳng thức $\left|y^2 - P(x)\right| \leq 2|x| \Leftrightarrow \left|x^2 - P(y)\right| \leq 2|y|$.

Lời giải:

Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn bài toán. Trước hết, ta chứng minh $P(x)$ là hàm chẵn. Với các số thực $x,\ y$ thì

$$\left|y^2 - P(x)\right| \leq 2|x| \Leftrightarrow \left|x^2 - P(y)\right| \leq 2|y| \text{ hay } \left|y^2 - P(-x)\right| \leq 2|x|.$$

Bất đẳng thức trên tương đương

$$P(x) - 2|x| \leq y^2 \leq P(x) + 2|x| \text{ hay } P(-x) - 2|x| \leq y^2 \leq P(-x) + 2|x|.$$

Do đó, với mọi $t \geq 0$ luôn tồn tại $y \in \mathbb{R}$ sao cho $t = y^2$, suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$[P(x) - 2|x|;\ P(x) + 2|x|] \cap \mathbb{R}_+ = [P(-x) - 2|x|;\ P(-x) + 2|x|] \cap \mathbb{R}_+ \quad (3.10.1),$$

trong đó $\mathbb{R}_+$ là tập số thực không âm. Vì $P(0) \geq 0$ và $P(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hiển nhiên tồn tại vô số số thực x sao cho $P(x) + 2|x| > 0$. Vì thế từ (3.10.1) suy ra tồn tại vô số số thực x sao cho $P(x) + 2|x| = P(-x) + 2|x|$ hay

$P(x) = P(-x)$ với vô số số thực x. Do $P(x)$ là đa thức nên khẳng định trên đúng với mọi số thực x hay $P(x)$ là hàm chẵn.

Tiếp theo, ta chứng minh $P(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại t sao cho $P(t) \le 0$. Khi đó, do $P(0) > 0$ và $P(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại s sao cho $P(s) = 0$. Vì $P(x)$ liên tục tại $x = s$ nên sẽ tồn tại một khoảng I đủ nhỏ sao cho với mọi $y \in I$ ta có $|P(y)| \le 2\,|y|$. Do đó, với mọi $y \in I$ ta có $\left|0^2 - P(y)\right| \le 2\,|y|$. Vì thế, theo giả thiết của bài ra, ta phải có $\left|y^2 - P(0)\right| \le 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên điều này không thể xảy ra hay $P(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $P(x)$ là đa thức bậc hai. Dễ thấy, các đa thức hằng không thỏa mãn, vì nếu ngược lại thì lấy $x = \sqrt{P(0)}$ và y đủ lớn, ta sẽ có $\left|\sqrt{P(0)} - P(y)\right| \le 2\,|y|$, trong khi không thể có $\left|y^2 - P(\sqrt{P(0)})\right| \le 2\,|P(0)|$ khi y đủ lớn, trái với giả thiết bài ra. Vì $P(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\deg P = n$ phải là số chẵn và hệ số cao nhất phải dương. Giả sử $n \ge 4$. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, chọn $y = \sqrt{P(x)}$, ta sẽ có $\left|(\sqrt{P(x)})^2 - P(x)\right| \le 2\,|x|$. Vì thế, theo giả thiết của bài ra, ta phải có

$$\left|x^2 - P(\sqrt{P(x)})\right| \le 2\left|\sqrt{P(x)}\right| \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$P(\sqrt{P(x)}) \le x^2 + 2\sqrt{P(x)}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \tag{3.10.2}$$

Vì hệ số cao nhất của $P(x)$ dương nên từ tính liên tục của $P(x)$ trên $\mathbb{R}$ suy ra tồn tại các hằng số thực dương $a,\ b$ và số thực dương N_0 sao cho với mọi $x > N_0$ ta có

$$bx^n > P(x) > ax^n \tag{3.10.3}$$

Vì thế, với mọi $x > N_0$ ta có

$$\sqrt{bx^n} > \sqrt{P(x)} > \sqrt{ax^n} \text{ (3.10.4) (do } P(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } n \text{ chẵn, } a,\ b > 0).$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ và $P(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên tồn tại số thực dương N_1 sao cho với mọi $x > N_1$ ta có $\sqrt{P(x)} > N_0$. Chọn $N = \max\{N_0,\ N_1\}$. Theo (3.10.3), (3.10.4) với mọi $x > N$ ta có các bất đẳng thức $P(\sqrt{P(x)}) > a(\sqrt{P(x)})^n > a(\sqrt{ax^n})$ và $x^2 + 2\sqrt{P(x)} < x^2 + 2\sqrt{bx^n}$. Kết hợp với (3.10.2) suy ra với mọi $x > N$ ta có

$$a(\sqrt{ax^n})^n < x^2 + 2\sqrt{bx^n} \tag{3.10.5}$$

Vế trái của (3.10.5) là một đa thức với hệ số thực dương bậc $\dfrac{n^2}{2}$, vế phải là một đa thức với hệ số thực dương và có bậc $\max\left\{2,\ \dfrac{n}{2}\right\}$. Vì $\dfrac{n^2}{2} > \max\left\{2,\ \dfrac{n}{2}\right\}$ (do $n \geq 4$) nên suy ra bất đẳng thức (3.10.5) sai với x đủ lớn, và vì thế phải có $n = 2$ hay $P(x)$ có dạng $P(x) = \alpha x^2 + \gamma x + \beta$, với $\alpha > 0$ (do $P(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$) và $\beta > 0$ (theo giả thiết). Vì $P(x)$ là hàm số chẵn nên phải có $\alpha x^2 + \gamma x + \beta = \alpha x^2 - \gamma x + \beta,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $\gamma x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, $\gamma = 0$ nghĩa là $P(x)$ phải có dạng $P(x) = \alpha x^2 + \beta$, với $\alpha,\ \beta > 0$. Dễ thấy, với x thỏa mãn $|x| \geq \frac{\beta}{2}$ và với $y = \sqrt{\alpha}x$ ta có $\left|y^2 - P(x)\right| \leq 2\,|x|$. Vì thế, theo giả thiết đề bài ra ta phải có $\left|x^2 - P(\sqrt{\alpha}x)\right| \leq 2\sqrt{\alpha}\,|x|$ với mọi x mà $|x| \geq \dfrac{\beta}{2}$ hay phải có $\left|(1-\alpha)x^2 - \beta\right| \leq 2\sqrt{\alpha}\,|x|$ với mọi x mà $|x| \geq \dfrac{\beta}{2}$. Rõ ràng, điều vừa nêu trên chỉ có thể xảy ra khi $\alpha = 1$ hay $P(x) = x^2 + \beta$. Khi đó, áp dụng giả thiết của bài ra cho $y = x + 1$ ta được: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, phải có

$$\left|(x+1)^2 - (x^2+\beta)\right| \leq 2\,|x| \Leftrightarrow \left|x^2 - ((x+1)^2+\beta)\right| \leq 2\,|x+1|$$

hay với mọi $x \in \mathbb{R}$ phải có $|2x+1-\beta| \leq 2\,|x| \Leftrightarrow |2x+1+\beta| \leq 2\,|x+1|$. Suy ra với mọi $x \geq 0$ phải có $1 \leq \beta \leq 4x+1$ hay $-4x-3 \leq \beta \leq 1$. Rõ ràng, điều nêu trên chỉ có thể xảy ra khi $\beta = 1$. Tóm lại, nếu $P(x)$ thỏa mãn bài toán thì $P(x) = x^2+1$. Ngược lại, với $P(x)$ xác định như trên ta có $\left|y^2 - P(x)\right| \leq 2\,|x| \Leftrightarrow \left|y^2 - x^2 - 1\right| \leq 2\,|x|$. Bình phương hai vế thu được $y^4 + x^4 + 1 - 2y^2x^2 + 2y^2 - 2x^2 \leq 4y^2$ hay tương đương $(x^2-y^2-1)^2 \leq 4y^2 \Leftrightarrow \left|x^2 - P(y)\right| \leq 2\,|y|$. Vậy $P(x) = x^2+1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3.3 Phương pháp sử dụng giới hạn

Để vận dụng phương pháp sử dụng giới hạn trong bài toán bất phương trình hàm đa thức trước hết cần xem xét các điều kiện đề bài cho, chúng ta cần xây dựng một bất phương trình hàm dạng kẹp từ các điều kiện của đề bài. Việc nắm vững các định nghĩa, tính chất của hàm như tính liên tục của đa thức, giới hạn hàm số thì nhiều bất phương trình hàm giải được bằng phép chuyển qua giới hạn.

Bài toán 3.11. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$|P(x) - P(y)|^2 \leq |x-y|^3,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Cố định y, với $x \neq y$ thì từ điều kiện đề bài ta có bất đẳng thức dạng $0 \leq \left|\dfrac{P(x)-P(y)}{x-y}\right|^2 \leq |x-y|$. Vì $\lim\limits_{x\to y} 0 = \lim\limits_{x\to y} |x-y| = 0$ nên sử dụng nguyên lý kẹp ta có $\lim\limits_{x\to y}\left|\frac{P(x)-P(y)}{x-y}\right| = 0$. Từ đó suy ra $P'(x) = 0$ hay $P(x) = c$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Trong bài toán này, chúng ta đã sử dụng định nghĩa đạo hàm của hàm số. Việc cố định y đưa về bài toán một biến, thực tế có thể cho y giá trị bất kì, sau đó sử dụng nguyên lý kẹp chính là qua giới hạn trong bất đẳng thức cũng cho kết quả tương tự.

Bài toán 3.12. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn các điều kiện:

i) $P(x+y) \le P(x) + P(y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R},$ (3.12.1)

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1.$ (3.12.2)

Lời giải:

Lấy $\alpha \in \mathbb{R}$, từ điều kiện (3.12.1) cho $y = \alpha$ ta có

$$P(x+\alpha) - P(x) \le P(x) + P(\alpha) - P(x) = P(\alpha) \tag{3.12.3}$$

và $P(x) = P((x+\alpha)-\alpha) \le P(x+\alpha) + P(\alpha)$ hay

$$-P(-\alpha) \le P(x+\alpha) - P(x) \tag{3.12.4}$$

Từ (3.12.3), (3.12.4) dẫn đến

$$-P(-\alpha) \le P(x+\alpha) - P(x) \le P(\alpha) \tag{3.12.5}$$

Với $\alpha > 0$ từ (3.12.5) thu được

$$\frac{P(-\alpha)}{-\alpha} \le \frac{P(x+\alpha)-P(x)}{\alpha} \le \frac{P(\alpha)}{\alpha} \tag{3.12.6}$$

Từ (3.12.2) suy ra $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{P(-\alpha)}{-\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{P(\alpha)}{\alpha} = 1$ nên $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\frac{P(x+\alpha)-P(x)}{\alpha} = 1$.

Theo định nghĩa đạo hàm dẫn đến $P'(x^+) = 1$. (3.12.7)

Cho $\alpha < 0$ từ (3.12.5) thu được

$$\frac{P(-\alpha)}{-\alpha} \ge \frac{P(x+\alpha)-P(x)}{\alpha} \ge \frac{P(\alpha)}{\alpha}.$$

Tương tự như trên tìm được $P'(x^-) = 1$ (3.12.8)

Từ (3.12.7), (3.12.8) ta được $P'(x) = 1$ hay $P(x) = x + c,\ c \in \mathbb{R}$. Theo (3.12.2) ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+c}{x} = 1$ suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x} = 0$. Do đó, $c = 0$ hay $P(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $P(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Trong bài toán khi thực hiện phép thế khéo léo và từ điều kiện ii), chúng ta đã sử dụng các kết quả sau:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$;

2. Hàm $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $f(x)$ có đạo hàm phải và đạo hàm trái tại x_0 và hai đạo hàm đó bằng nhau.

Bằng việc nắm vững các định nghĩa cơ bản, tính chất của hàm số trong nhiều trường hợp có thể xác định được lời giải cho bài toán.

Bài toán 3.13. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn các điều kiện:

i) $P(3x) = 3P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $|P(x) - x| \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Trước hết, ta chứng minh $P(3^n x) = 3^n P(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$. Với $n = 1$ thì khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với $n = k \ge 1$. Tức là với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $P(3^k x) = 3^k P(x)$. Dễ thấy

$$P(3^{k+1}x) = 3P(3^k x) = 3.3^k P(x) = 3^{k+1}P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp thu được $P(3^n x) = 3^n P(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $P(x_0) \ne x_0$. Đặt $a = P(x_0) - x_0$. Ta có

$$P(3^n x_0) = 3^n P(x_0) = 3^n(x_0 + a) = 3^n x_0 + 3^n a,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì thế $|P(3^n x_0) - 3^n x_0| = 3^n |a|, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Kết hợp với điều kiện ii) dẫn đến $3^n |a| \le 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi $n \to +\infty$ thì bất đẳng thức đang xét không đúng. Do đó, không tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $P(x_0) \ne x_0$. Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

KẾT LUẬN

Các bài toán về phương trình hàm, bất phương trình hàm đa thức được đề cập trong nhiều tài liệu về Đại số, Lí thuyết số và Giải tích cũng như các kì thi học sinh giỏi cấp quốc gia, quốc tế. Trong luận văn này đã trình bày lí thuyết, một số bài toán cơ bản, phương pháp giải chung và hệ thống các bài tập tương ứng cho từng phương pháp. Đồng thời luận văn cũng đã đề cập đến cách xây dựng bài toán phương trình hàm đa thức mới dựa trên nền tảng kiến thức cơ bản và bài toán cũ. Để làm được điều này cần phải kết hợp khéo léo giữa việc chọn hàm và các phương pháp giải, khi đó các bài toán được xây dựng cũng như cách giải trở nên đa dạng và phong phú.

Tài liệu tham khảo

[1] Đoàn Quỳnh (chủ biên), 2014, *Tài liệu chuyên toán Giải tích 12*, NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu, 2010, *Một số chuyên đề Giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi THPT*, NXB Giáo dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu, 2015, *Phương trình hàm cơ bản với đối số biến đổi*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4] Nguyễn Hữu Điển, 2003, *Đa thức và ứng dụng*, NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Tài Chung, 2014, *Bồi dưỡng HSG phương trình hàm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[6] Nguyễn Tài Chung, 2019, *Chuyên đề bồi dưỡng HSG Đa thức*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[7] Tuyển tập các bài toán từ đề thi chọn đội tuyển các tỉnh, thành phố 2016 – 2017, 2017 – 2018, 2018 – 2019, 2019 – 2020.

[8] Kỷ yếu Olympic Toán sinh viên, Hội Toán học Việt Nam, lần thứ 22, 24, 25, 26.

[9] Tuyển tập đề thi học sinh giỏi các nước 2004 đến 2020.

[10] Small Chiristopher G., 2007, *Functional equations and how to solve them*, Springer.

[11] B.J.Venkatachala, 2013, *Functional equations A Problem Solving Approach*, Second Editon, PRISM.

[12] https://artofproblemsolving.com/