ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

NGUYỄN VĂN DŨNG

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ NGƯỢC ĐỂ XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. NGUYỄN MINH TUẤN

Hà Nội - Năm 2013

Mục lục

Lời nói đầu

Hàm số giữ một vị trí trung tâm trong chương trình toán ở trường phổ thông. Học sinh nhận biết định nghĩa và nắm một số tính chất cơ bản của hàm số ở cuối cấp Trung học cơ sở, khi học Toán ở bậc Trung học phổ thông khái niệm hàm số được dần hoàn thiện và khi có công cụ mới là đạo hàm để nghiên cứu hàm số thì học sinh đã có qui trình để khảo sát được các hàm số cơ bản.

Bên cạnh việc khảo sát được các hàm số cơ bản, đối với học sinh khá, giỏi có thể gợi ý, hướng dẫn để học sinh nắm vững các tính chất của hàm số, ứng dụng chúng trong giải quyết một số bài toán khác. Việc nắm vững các tính chất của hàm số cũng giúp giáo viên có cách nhìn toàn diện về hàm số và khai thác được mối liên hệ giữa hàm số với một số bài toán liên quan, đồng thời có thể sáng tạo ra các bài toán mới.

Vấn đề giải phương trình đại số nói chung và phương trình vô tỷ nói riêng, chúng ta đã biết đến một số cách giải khác nhau như: phép biến đổi tương đương, phép dùng ẩn phụ, phép dùng biến đổi liên hợp, phương pháp đánh giá... Tuy nhiên với mỗi phương pháp giải thường chỉ tối ưu với từng trường hợp cụ thể. Mặt khác khi đi sâu nghiên cứu về hàm số ngược của một hàm số, tôi đã nhận thấy có sự liên quan mật thiết giữa sự tương giao của hai hàm số ngược nhau với số nghiệm của một phương trình vô tỷ mà có hai vế là hai hàm số ngược nhau.

Do vậy việc giải các phương trình vô tỷ bằng phương pháp hàm số ngược là một vấn đề mới và cần tìm hiểu. Mặc dù là một phương pháp mới, xong khi đã nắm vững được mối quan hệ giữa chúng thì phương pháp này khá hiệu quả. Trong các đề thi Đại học và thi chọn học sinh giỏi bài toán dạng này cũng luôn được khai thác.

Với mong muốn áp dụng những kiến thức đã học trong chương trình phổ thông và tìm hiểu sâu thêm phương pháp giải toán sơ cấp nên tôi mạnh dạn chọn đề tài nghiên cứu cho luận văn tốt nghiệp của mình là: **"Phương pháp hàm số ngược để xây dựng và phát triển phương trình đại số"**.

Bản luận văn gồm ba chương, lời nói đầu và kết luận.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị: Nhiệm vụ của chương này là hệ thống lại một số kiến thức cơ bản nhất về hàm số và phương trình đại số làm tiền đề để xây dựng nội dung của chương 2.

Chương 2. Xây dựng một số phương trình đại số giải bằng phương pháp hàm số ngược: Trong chương này tác giả đi xây dựng cơ sở của việc áp dụng hàm số ngược vào giải toán, đồng thời xây dựng và giải quyết năm bài toán tổng quát của phương trình đại số mà giải bằng phương pháp hàm số ngược.

Chương 3. Các bài toán liên quan: Trong chương này giới thiệu các bài toán cụ thể minh họa cho các bài toán tổng quát đã đề cập đến ở chương 2. Sau mỗi bài toán minh họa, tác giả đã có những nhận xét về cách giải cũng như sáng tác một phương mới từ một phương trình đã biết.

Để hoàn thành bản luận văn này, tôi xin chân thành cảm ơn tới người thầy kính mến PGS.TS Nguyễn Minh Tuấn đã dành nhiều thời gian hướng dẫn, chỉ dạy trong suốt thời gian xây dựng đề tài cho đến khi hoàn thành luận văn. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô giáo trong khoa Toán – Cơ – Tin học, Ban giám hiệu, Phòng sau đại học trường ĐHKHTN – ĐHQGHN đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt thời gian học tập tại trường.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng do thời gian và năng lực còn hạn chế nên bản luận văn không tránh khỏi các thiếu sót, rất mong được các thầy cô và các bạn góp ý xây dựng.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, ngày 18 tháng 11 năm 2013

Học viên

Nguyễn Văn Dũng

Bảng các kí hiệu viết tắt

$\mathbb{R}$	tập các số thực.
$\mathbb{R}^*$	tập các số thực khác 0.
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực dương.
$\mathbb{R}^-$	tập các số thực âm.
$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên.
$\mathbb{N}^*$	tập các số tự nhiên khác 0.
$\mathbb{Z}$	tập các số nguyên.
$\mathbb{Z}^+$	tập các số nguyên dương.
$\mathbb{Z}^-$	tập các số nguyên âm.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Khái niệm hàm số

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. *Cho một tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Hàm số f xác định trên D là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số x thuộc D với một và chỉ một số, kí hiệu là $f(x)$; số $f(x)$ được gọi là giá trị của hàm số f tại x. Vậy hàm số là một ánh xạ từ tập con D của $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ và viết*

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

- Tập D được gọi là tập xác định (hay miền xác định), x được gọi là biến số hay đối số của hàm f.
- Tập hợp tất cả các giá trị $f(x)$ khi x chạy qua D được gọi miền giá trị của hàm số f.
- Khi viết $y = f(x)$ thì x được gọi là biến số độc lập, y gọi là biến số phụ thuộc.

1.1.2 Đồ thị hàm số

Định nghĩa 1.2. *Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi x thuộc D.*

1.2 Tính đơn điệu của hàm số

1.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.3. *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.*

a) *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là đồng biến (tăng) trên* $(a;b)$ *nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

b) *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là nghịch biến (giảm) trên* $(a;b)$ *nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Chú ý 1.1. Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên $(a;b)$ được gọi chung là hàm số đơn điệu trên $(a;b)$.

1.2.2 Điều kiện đủ cho tính đơn điệu

Định lí 1.1. *Cho hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm trên* K.

a) *Nếu* $f'(x) > 0$ *với mọi* x *thuộc* K *thì hàm số* $y = f(x)$ *đồng biến trên* K.

b) *Nếu* $f'(x) < 0$ *với mọi* x *thuộc* K *thì hàm số* $y = f(x)$ *nghịch biến trên* K.

Sau đây ta có một định lí mở rộng cho định lí trên như sau:

Định lí 1.2. *Cho hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm trên* K.

a) *Nếu* $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ *và* $f'(x) = 0$ *chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số* $y = f(x)$ *đồng biến trên* K.

b) *Nếu* $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ *và* $f'(x) = 0$ *chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số* $y = f(x)$ *nghịch biến trên* K.

1.3 Hàm số ngược

1.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.4. *Cho hàm số* f *có tập xác định là* $D(f)$ *và có tập giá trị là* $V(f)$. *Hàm số* g *xác định trên* $V(f)$ *được gọi là hàm số ngược của hàm số* f *nếu*

$$(f_0 g)(x) = x,\ \forall x \in V(f) \text{ và } (g_0 f)(x) = x,\ \forall x \in D(f).$$

Nhận xét 1.1. Từ định nghĩa trên ta có nhận xét sau

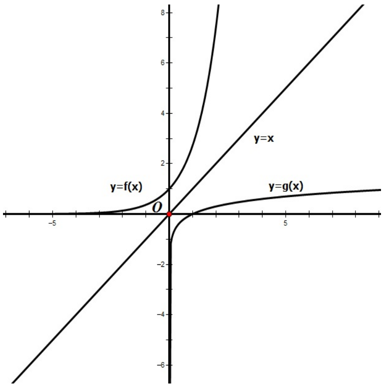
a) Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm số ngược của hàm số $y = g(x)$ thì hàm số $y = g(x)$ cũng là hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$.

b) Nếu $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số ngược nhau thì tập xác định của hàm số này là tập giá trị của hàm số kia và ngược lại.

1.3.2 Đồ thị của hàm số ngược

Định lí 1.3. *Trong hệ tọa độ Oxy đồ thị của hai hàm số ngược nhau $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $y = x$.*

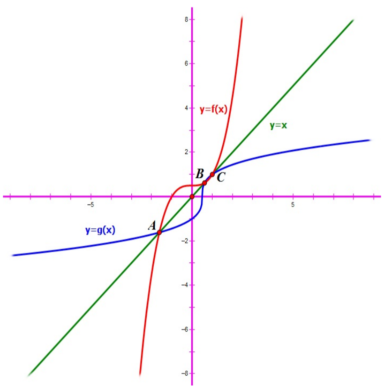
Chứng minh. Xét hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D(f)$, có tập giá trị là $V(f)$ và có đồ thị là $G(f)$.
Giả sử f có hàm số ngược là g.
Xét điểm $M(a; b)$ và điểm $M'(b; a)$ đối xứng với M qua đường thẳng $y = x$.



Hình 1.1:

Ta có: $M \in G(f) \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow g(b) = g(f(a)) \Leftrightarrow g(b) = a \Leftrightarrow M' \in G(g)$.
Điều này chứng tỏ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. □

Hệ quả 1.1. *Hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số ngược nhau thì giao điểm (nếu có) của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ nằm trên đường thẳng $y = x$.*



Hình 1.2:

1.3.3 Điều kiện đủ để một hàm số có hàm số ngược

Định lí 1.4. *Mọi hàm số đồng biến hay nghịch biến trên tập K đều có hàm số ngược.*

Chứng minh. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và đồng biến trên K và có tập giá trị tương ứng là T.
Do T là tập giá trị của $y = f(x)$ nên với mọi $y \in T$ đều tồn tại $x \in K$ để có $f(x) = y$. Bây giờ ta đi chứng minh x là duy nhất.
Thật vậy, ta giả sử tồn tại $x' \in K, x \neq x'$ mà $f(x') = y$.
Khi đó, xẩy ra hai trường hợp:

a) Nếu $x > x'$, ta suy ra $f(x) > f(x') \Leftrightarrow y > y$ điều này là vô lý.

b) Nếu $x < x'$, ta suy ra $f(x) < f(x') \Leftrightarrow y < y$ điều này là vô lý.

Hai trường hợp trên đều vô lý, nên tồn tại duy nhất $x \in K$ để $f(x) = y$.
Do đó theo định nghĩa của hàm số ngược, ta suy ra hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược. □

Nhận xét 1.2. Trường hợp hàm số nghịch biến được chứng minh tương tự.

1.3.4 Ví dụ

Ví dụ 1.1. Hàm số
$$g(x) = \frac{x-1}{2}$$
là hàm số ngược của hàm số $f(x) = 2x + 1$, vì
$$f(g(x)) = 2g(x) + 1 = x,$$
và
$$g(f(x)) = \frac{f(x)-1}{2} = x.$$

Ví dụ 1.2. Hàm số $f(x) = 2x^3 + 1$ có hàm số ngược là
$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$$
vì
$$f(g(x)) = 2g^3(x) + 1 = x,$$
và
$$g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{f(x)-1}{2}} = x.$$

Chú ý 1.2. Không phải hàm số nào cũng có hàm số ngược trên toàn tập xác định của nó, nhưng nếu xét trên một tập con nào đó của tập xác định thì nó vẫn có hàm số ngược.

Ví dụ 1.3. Hàm số $f(x) = x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$ nhưng không có hàm số ngược trên $\mathbb{R}$.
Nhưng nếu xét trên khoảng $[0; +\infty)$ thì hàm số này có hàm số ngược là $g(x) = \sqrt{x}$.
Thật vậy trên $[0; +\infty)$ ta có:

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 = (\sqrt{x})^2 = x,$$

và

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x.$$

Ví dụ 1.4. Hàm số $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ và hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1$$

là hai hàm số ngược nhau trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$.
Vì trên $[-1; +\infty)$ ta có:

$$f(g)(x) = 2g^2(x) + 4g(x) - 1 = x,$$

và

$$g(f)(x) = \sqrt{\frac{f(x)+3}{2}} - 1 = x.$$

1.4 Phương trình đại số một ẩn

1.4.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.5. *Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f, D_g. Đặt $D = D_f \cap D_g$. Mệnh đề chứa biến có dạng*

$$f(x) = g(x) \tag{1.1}$$

được gọi là phương trình một ẩn; x được gọi là ẩn số và D được gọi là tập xác định của phương trình; $f(x)$ được gọi là vế trái và $g(x)$ được gọi là vế phải của phương trình (1.1).

Chú ý 1.3. Để thuận tiện trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác định D của phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x \in D$. Điều kiện đó được gọi là điều kiện xác định của phương trình, gọi tắt là điều kiện của phương trình.

Chú ý 1.4. Các nghiệm của phương trình (1.1) là hoành độ các giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

1.4.2 Nghiệm của phương trình

Định nghĩa 1.6. *Số $x_0 \in D$ gọi là một nghiệm của phương trình* (1.1) *nếu $f(x_0) = g(x_0)$ là một mệnh đề đúng.*

Giải phương trình (1.1) tức là đi tìm tất cả các nghiệm của nó, tức là tìm tập hợp $S = \{x \in D | f(x) = g(x)\}$.

Tập S được gọi là tập nghiệm của phương trình (1.1).

- Khi $S = \emptyset$, ta nói phương trình (1.1) vô nghiệm.
- Nếu $|S| = n$ với n là một số nguyên dương nào đó, ta nói phương trình (1.1) có n nghiệm hay số nghiệm của phương trình (1.1) bằng n.
- Nếu $|S| = \infty$, ta nói phương trình (1.1) có vô số nghiệm.

1.4.3 Ví dụ

Ví dụ 1.5. Tập nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ là $S = \{1; 2\}$.

Ví dụ 1.6. Tập nghiệm của phương trình $x^2 + 2 = 0$ là $S = \emptyset$.

Ví dụ 1.7. Tập nghiệm của phương trình $|x - 1| + |x - 2| = 1$ là $S = [1; 2]$ (trong trường hợp này $|S| = \infty$).

1.5 Phương trình tương đương

1.5.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.7. *Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng một tập nghiệm.*

Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

1.5.2 Phép biến đổi tương đương

Để giải một phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.

Định lí sau đây nêu lên một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng.

Định lí 1.5. *Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định là D; $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên D ($h(x)$ có thể là một hằng số). Khi đó trên D, phương trình đã cho tương đương với mỗi phương trình sau:*

a) $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.

b) $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ *với* $h(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in D$.

1.6 Phương trình hệ quả

1.6.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.8. *Phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu tập nghiệm của nó chứa tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.*

Khi đó ta viết $f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$.

1.6.2 Phép biến đổi hệ quả

Định lí 1.6. *Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.*

$$f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2.$$

Chú ý 1.5. Nếu phép biến đổi một phương trình dẫn đến một phương trình hệ quả thì sau khi giải phương trình hệ quả, ta phải thử lại các nghiệm tìm được vào phương trình đã cho để phát hiện và loại bỏ nghiệm ngoại lai.

1.7 Phương trình vô tỷ

1.7.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.9. *Một phương trình được gọi là phương trình vô tỷ nếu nó chứa ẩn dưới dấu căn thức.*

1.7.2 Ví dụ

Ví dụ 1.8. Các phương trình sau là phương trình vô tỷ

1. Phương trình $x - \sqrt{x-1} = 7$.
2. Phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$.
3. Phương trình $x^3 - 3\sqrt[3]{2+3x} = 2$.

Chương 2

Xây dựng một số phương trình đại số giải bằng phương pháp hàm số ngược

Chương này sẽ trình bày cơ sở để vận dụng phương pháp hàm ngược vào xây dựng phương trình và đưa ra một số phương trình ở dạng tổng quát mà có thể giải bằng phương pháp hàm ngược.

2.1 Cơ sở của việc vận dụng phương pháp hàm ngược vào xây dựng phương trình

Định lí 2.1. *Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số ngược nhau khi đó nghiệm phương trình*

$$f(x) = g(x) \tag{2.1}$$

cũng là nghiệm của phương trình

$$f(x) = x, \;\; x \in D_f \cap D_g \tag{2.2}$$

hoặc là nghiệm của phương trình

$$g(x) = x, \;\; x \in D_f \cap D_g. \tag{2.3}$$

Nhận xét 2.1. Định lí trên được suy trực tiếp từ Hệ quả 1.1.

Nhận xét 2.2. Như vậy việc giải phương trình (2.1) được thay thế bởi việc giải phương trình (2.2) hoặc (2.3).

Nhận xét 2.3. Để thuận tiện cho những phần sau khi trình bày vấn đề này, ta sẽ gọi phương trình có dạng (2.1) là phương trình hàm số ngược.
Việc giải các phương trình dạng (2.2) hay (2.3) được gọi là phương pháp hàm số ngược.

2.2 Một số dạng phương trình đại số mà có thể giải bằng phương pháp hàm số ngược

Trong phần này sẽ tập trung nêu các dạng tổng quát của phương trình đại số mà có thể giải bằng phương pháp hàm số ngược, tức là những phương trình có dạng (2.1).

2.2.1 Dạng thứ nhất

Phương trình

$$\frac{a(x+b)^{2n+1}-c}{d} = \sqrt[2n+1]{\frac{dx+c}{a}} - b, \tag{2.4}$$

trong đó $n \in \mathbb{N}; a, d \neq 0; a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n+1}-c}{d}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = \frac{a}{d}(2n+1)(x+b)^{2n}$$

Dễ thấy $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Nên hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n+1}-c}{d}$$

luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do vậy theo Định lý 1.4 thì hàm số $f(x)$ luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt[2n+1]{\frac{dx+c}{a}} - b.$$

Điều này chứng tỏ (2.4) là một phương trình hàm số ngược. □

2.2.2 Dạng thứ hai

Phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{a(x+b)^{2n}-c}{d} = \sqrt[2n]{\dfrac{dx+c}{a}} - b \\ x \geq max\left\{-b; -\dfrac{c}{d}\right\} \end{cases} \tag{2.5}$$

trong đó $n \in \mathbb{N}^*; a > 0, d > 0; a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n} - c}{d}.$$

Hàm f xác định trên tập $D = [max\left\{-b; -\frac{c}{d}\right\}; +\infty)$.
Ta có

$$f'(x) = \frac{2an}{d}(x+b)^{2n-1},$$

Dễ thấy $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in D$.
Do đó hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n} - c}{d}$$

luôn đồng biến trên D.
Do vậy theo Định lý 1.4 thì hàm số $f(x)$ luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt[2n]{\frac{dx+c}{a}} - b.$$

Điều này chứng tỏ (2.5) là một phương trình hàm số ngược. □

2.2.3 Dạng thứ ba

Phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{a(x+b)^{2n} - c}{d} = -\sqrt[2n]{\dfrac{dx+c}{a}} - b \\ x \in \left[-\dfrac{c}{d}; -b\right] \end{cases} \tag{2.6}$$

trong đó $n \in \mathbb{N}^*; a > 0, d > 0; a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n} - c}{d}.$$

Ta có tập xác định là $D = \left[-\frac{c}{d}; -b\right]$.
Ta có

$$f'(x) = \frac{2an}{d}(x+b)^{2n-1},$$

Dễ thấy $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in D$.
Do đó hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n} - c}{d}$$

luôn nghịch biến trên D.
Do vậy theo Định lý 1.4 thì hàm số $f(x)$ luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = -\sqrt[2n]{\frac{dx+c}{a}} - b.$$

Điều này chứng tỏ (2.6) là một phương trình hàm số ngược. □

2.2.4 Dạng thứ tư

Phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{a(x+b)^{2n}-c}{d} = \sqrt[2n]{\dfrac{dx+c}{a}} - b \\ x \in \left[-b; -\dfrac{c}{d}\right] \end{cases} \tag{2.7}$$

trong đó $n \in \mathbb{N}^*; a > 0, d < 0; a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n}-c}{d}.$$

Ta có tập xác định của hàm f là $D = \left[-b; -\dfrac{c}{d}\right]$.
Ta có

$$f'(x) = \frac{2an}{d}(x+b)^{2n-1},$$

suy ra $f'(x) \le 0$ với mọi $x \in D$.
Do đó hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n}-c}{d}$$

luôn nghịch biến trên D.
Do vậy theo Định lý 1.4 thì hàm số $f(x)$ luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt[2n]{\frac{dx+c}{a}} - b.$$

Điều này chứng tỏ (2.7) là một phương trình hàm số ngược. □

2.2.5 Dạng thứ năm

Phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{a(x+b)^{2n}-c}{d} = -\sqrt[2n]{\dfrac{dx+c}{a}} - b \\ x \le \min\left\{-b; -\dfrac{c}{d}\right\} \end{cases} \tag{2.8}$$

trong đó $n \in \mathbb{N}^*; a > 0, d < 0; a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n}-c}{d}.$$

Ta có tập xác định của hàm f là $D = \left(-\infty; \min\left\{-b; -\dfrac{c}{d}\right\}\right]$.
Ta có

$$f'(x) = \frac{2an}{d}(x+b)^{2n-1},$$

suy ra $f'(x) \ge 0$ với mọi $x \in D$.
Do đó hàm số

$$f(x) = \frac{a(x+b)^{2n}-c}{d}$$

luôn đồng biến trên D.
Do vậy theo Định lý 1.4 thì hàm số $f(x)$ luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = -\sqrt[2n]{\frac{dx+c}{a}} - b.$$

Điều này chứng tỏ (2.8) là một phương trình hàm số ngược. □

2.3 Các bước thực hiện khi giải phương trình bằng phương pháp hàm số ngược

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Đưa phương trình đã cho về dạng (2.1), tức là phương trình có dạng $f(x) = g(x)$, mà trong đó hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số ngược của nhau.

(xem 5 dạng cơ bản đã trình bày ở mục 2.2)

Bước 3. Chứng minh với điều kiện của bài toán thì hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số ngược nhau.

Bước 4. Thay một trong hai vế của (2.1) bởi x (thường là vế chứa căn).

Bước 5. Giải phương trình $f(x) = x$ hoặc $g(x) = x$.

Bước 6. So sánh với điều kiện của phương trình để suy ra nghiệm.

Chương 3

Các bài toán liên quan

Trong chương này sẽ giới thiệu một số bài toán minh họa cho phương pháp hàm số ngược trong việc ứng dụng để giải một số phương trình đại số có dạng tổng quát đã giới thiệu ở chương 2.

Bài toán 3.1. Giải phương trình

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}. \tag{3.1}$$

Lời giải. Ta có phương trình (3.1) tương đương với phương trình sau

$$\frac{x^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2x - 1}. \tag{3.2}$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{2}$.
Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2}$.
Dễ thấy $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số

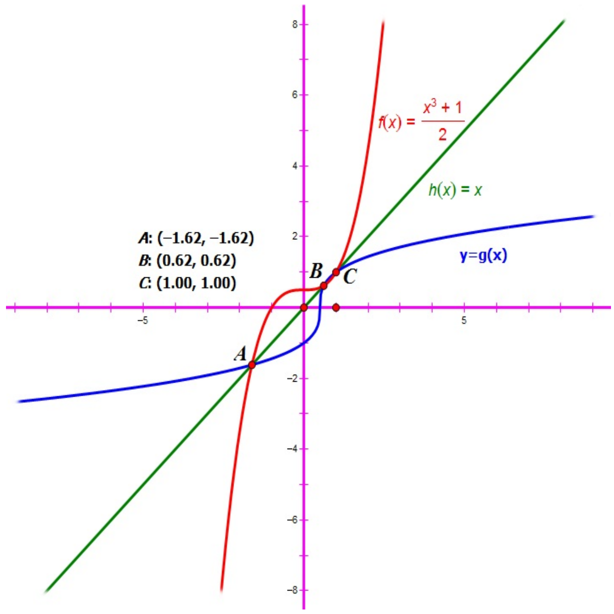
$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{2}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số $g(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$.
Điều này chứng tỏ phương trình (3.2) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.2) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{x^3 + 1}{2} = x. \tag{3.3}$$

Ta có (3.3) tương đương với phương trình

$$x^3 - 2x + 1 = 0. \tag{3.4}$$



Hình 3.1:

Giải phương trình (3.4) ta được các nghiệm là

$$x = 1, x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình (3.1) có tập nghiệm là $S = \left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Nhận xét 3.1. Hình (3.1) minh họa cho kết quả của phương trình (3.1).

Nhận xét 3.2. Phương trình (3.1) không cho ở một trong 5 dạng phương trình tổng quát đã nêu trong Chương 2, tuy nhiên bằng biến đổi đơn giản ta đã đưa phương trình (3.1) về dạng (3.2), từ đây ta thấy rằng phương trình (3.2) thuộc dạng thứ nhất (2.4).

Nhận xét 3.3. Do phương trình (3.2) có hai vế là hai hàm số ngược của nhau nên ta đã sử dụng phương pháp hàm số ngược để giải quyết. Lời giải của bài toán này thật gọn gàng và sáng sủa.

Nhận xét 3.4. Từ (3.1), nếu ta sử dụng phép đặt ẩn phụ $x = t+1$ thì từ phương trình (3.1) ta nhận được phương trình sau

$$t^3 + 3t^2 + 3t + 2 = 2\sqrt[3]{2t+1}. \tag{3.5}$$

Nhận xét 3.5. Từ Nhận xét (3.4), bằng cách thay t bởi x ta có bài toán mới sau đây

Bài toán 3.2. Giải phương trình sau

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 2\sqrt[3]{2x+1}. \tag{3.6}$$

Nhận xét 3.6. Phương trình (3.6) không thể đưa ngay về một trong 5 dạng phương trình hàm ngược đã trình bày trong Chương 2 được, tuy nhiên theo Nhận xét (3.4) ở trên ta có thể kết hợp dùng ẩn phụ và phương pháp hàm số ngược để giải phương trình này.

Lời giải. Phương trình (3.6) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Ta có phương trình (3.6) tương đương với phương trình sau

$$\frac{(x+1)^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2x+1}. \tag{3.7}$$

Đặt $t = x + 1$, thì từ phương trình (3.7) ta nhận được phương trình sau

$$\frac{t^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2t-1}. \tag{3.8}$$

Phương trình (3.8) chính là phương trình (3.1) đã giải ở trên, do đó phương trình (3.8) có các nghiệm là

$$t_1 = 1; t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; t_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Từ kết quả này suy ra phương trình (3.6) có các nghiệm là

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Nhận xét 3.7. Phương trình (3.6) là một trong những phương trình được sáng tác từ phương trình (3.1), cũng bằng cách này từ phương trình (3.1)ta có thể sáng tác ra nhiều phương trình khác nhau nữa. Ví dụ các phương trình sau:

Bài tập 3.1. Giải phương trình $8x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{4x-1}$.

Bài tập 3.2. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 2\sqrt[3]{2x-5}$.

Bài tập 3.3. Giải phương trình $4x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = \sqrt[3]{4x+1}$.

Bài tập 3.4. Giải phương trình $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x+2a+1}$ với $a \in \mathbb{R}$.

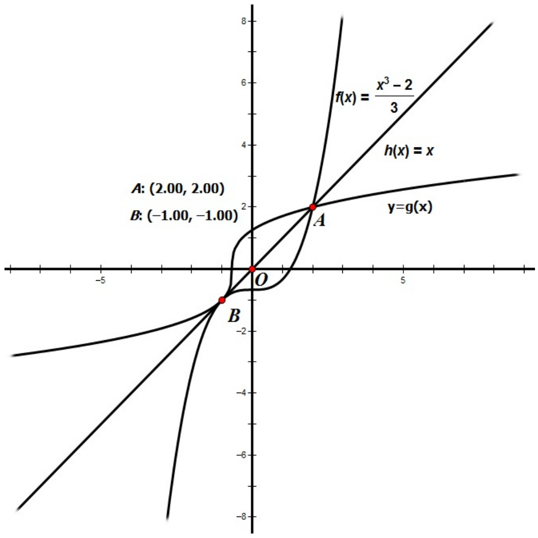
Bài toán 3.3. Giải phương trình sau

$$x^3 - 3\sqrt[3]{2+3x} = 2. \tag{3.9}$$

Lời giải. Ta có phương trình (3.9) tương đương với phương trình sau

$$\frac{x^3-2}{3} = \sqrt[3]{2+3x}. \tag{3.10}$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3-2}{3}$.
Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = x^2$.
Dễ thấy $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số $f(x) = \dfrac{x^3-2}{3}$ luôn có hàm số ngược là hàm số $g(x) = \sqrt[3]{2+3x}$.



Hình 3.2:

Điều này chứng tỏ phương trình (3.10) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.10) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{x^3-2}{3} = x. \tag{3.11}$$

Ta có (3.11) tương đương với phương trình

$$x^3 - 3x - 2 = 0. \tag{3.12}$$

Giải phương trình (3.12) ta được các nghiệm là $x = -1, x = 2$.
Vậy phương trình (3.9) có tập nghiệm là $S = \{-1; 2\}$.

Nhận xét 3.8. Hình (3.2) minh họa cho kết quả của phương trình (3.9).

Nhận xét 3.9. Từ phương trình (3.9) ta có thể sáng tác được các phương trình sau:

Bài tập 3.5. Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 3\sqrt[3]{3x+5}$.

Bài tập 3.6. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 12x - 10 = 3\sqrt[3]{3x-4}$.

Bài tập 3.7. Giải phương trình $8x^3 - 12x^2 + 6x - 3 = 3\sqrt[3]{6x-1}$.

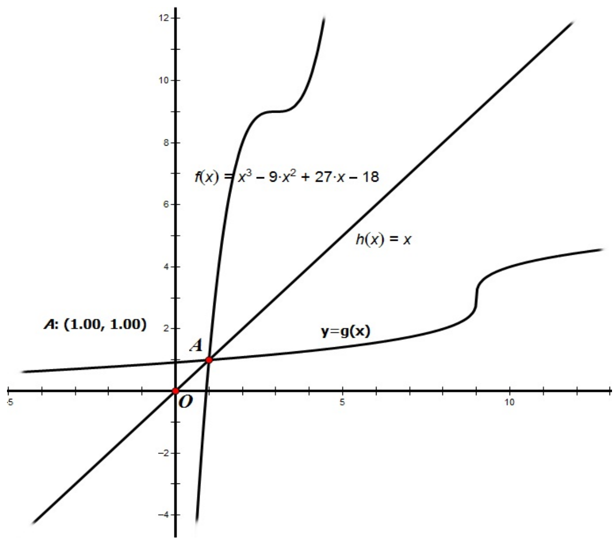
Bài toán 3.4. Giải phương trình sau

$$x^3 - 9x^2 + 27x + 33 = \sqrt[3]{x-9}. \tag{3.13}$$

Lời giải. Ta có phương trình (3.13) tương đương với phương trình sau

$$(x-3)^3 + 9 = \sqrt[3]{x-9} + 3. \tag{3.14}$$

Xét hàm số $f(x) = (x-3)^3 + 9$.
Hàm số f có tập xác định là $\mathbb{R}$.
Hàm f có đạo hàm $f'(x) = 3(x-3)^2$.
Dễ thấy $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số $f(x) = (x-3)^3+9$ luôn có hàm số ngược là hàm số $g(x) = \sqrt[3]{x-9}+3$.



Hình 3.3:

Điều này chứng tỏ phương trình (3.14) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.14) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$(x-3)^3 + 9 = x. \tag{3.15}$$

Ta có (3.15) tương đương với phương trình

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 18 = 0. \tag{3.16}$$

Giải phương trình (3.16) ta được nghiệm duy nhất là $x = 1$.
Vậy phương trình (3.13) có tập nghiệm là $S = \{1\}$.

Nhận xét 3.10. Hình (3.3) minh họa cho kết quả của phương trình (3.13).

Nhận xét 3.11. Từ phương trình (3.13) ta có thể sáng tác được các phương trình sau:

Bài tập 3.8. Giải phương trình $x^3 + 6 = \sqrt[3]{x - 6}$.

Bài tập 3.9. Giải phương trình $x^3 - 12x^2 + 48x - 58 = \sqrt[3]{x - 10}$.

Bài tập 3.10. Giải phương trình $8x^3 - 36x^2 + 54x - 21 = \sqrt[3]{2x - 9}$.

Bài toán 3.5. Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2. \tag{3.17}$$

Lời giải. Ta có phương trình (3.17) tương đương với phương trình sau

$$\frac{27(x - \frac{2}{3})^3 + 8}{81} = \sqrt[3]{\frac{81x - 8}{27}} + \frac{2}{3}. \tag{3.18}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{27(x - \frac{2}{3})^3 + 8}{81}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = (x - \frac{2}{3})^2$.
Dễ thấy $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số

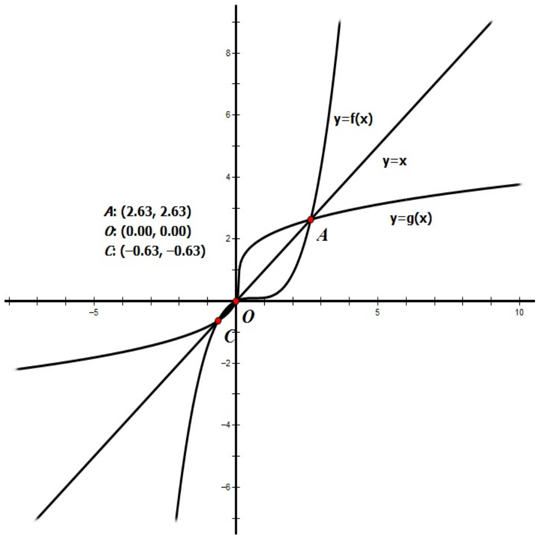
$$f(x) = \frac{27(x - \frac{2}{3})^3 + 8}{81}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{81x - 8}{27}} + \frac{2}{3}.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.18) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.18) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{27(x - \frac{2}{3})^3 + 8}{81} = x. \tag{3.19}$$



Hình 3.4:

Ta có (3.19) tương đương với phương trình

$$27x^3 - 54x^2 - 45x = 0. \tag{3.20}$$

Giải phương trình (3.20) ta được các nghiệm là

$$x = 0, x = \frac{3 - 2\sqrt{6}}{3}, x = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy phương trình (3.17) có tập nghiệm là $S = \left\{0; \frac{3 - 2\sqrt{6}}{3}; \frac{3 + 2\sqrt{6}}{3}\right\}$.

Nhận xét 3.12. Hình (3.4) minh họa cho kết quả của phương trình (3.17).

Nhận xét 3.13. Từ phương trình (3.17) ta có thể sáng tác được các phương trình sau:

Bài tập 3.11. Giải phương trình $27x^3 - 18x^2 - 4x - 2 = \sqrt[3]{243x - 8}$.

Bài tập 3.12. Giải phương trình $x^3 + x^2 - \frac{7x}{3} - \frac{13}{3} = \sqrt[3]{81x + 73}$.

Bài toán 3.6. Giải phương trình sau

$$\left(\frac{8\mathrm{x}^3 + 2001}{2002}\right)^3 = 4004\mathrm{x} - 2001. \tag{3.21}$$

Lời giải. Ta có phương trình (3.21) tương đương với phương trình sau

$$\frac{8x^3 + 2001}{4004} = \sqrt[3]{\frac{4004x - 2001}{8}}. \tag{3.22}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{8x^3 + 2001}{4004}.$$

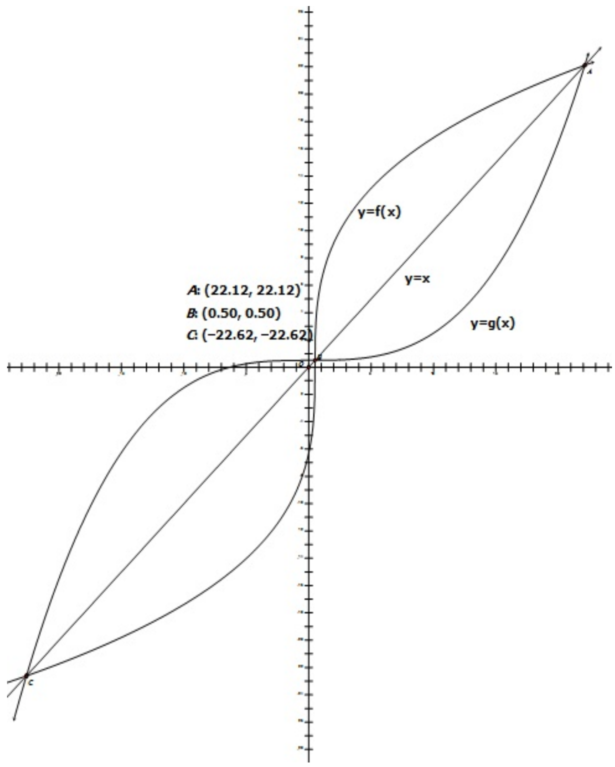
Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = \dfrac{6x^2}{1001}$.
Dễ thấy $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số

$$f(x) = \frac{8x^3 + 2001}{4004}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{4004x - 2001}{8}}.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.22) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên



Hình 3.5:

theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.22) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{8x^3 + 2001}{4004} = x. \tag{3.23}$$

Ta có (3.23) tương đương với phương trình

$$8x^3 - 4004x + 2001 = 0. \tag{3.24}$$

Giải phương trình (3.24) ta được các nghiệm là

$$x = \frac{1}{2}, x = \frac{-1 - \sqrt{8005}}{4}, x = \frac{-1 + \sqrt{8005}}{4}.$$

Vậy phương trình (3.21) có tập nghiệm là

$$S = \left\{0; \frac{-1 - \sqrt{8005}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{8005}}{4}\right\}.$$

Nhận xét 3.14. Hình (3.5) minh họa cho kết quả của phương trình (3.21).

Bài toán 3.7. Xác định m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt

$$x^3 + m(3 - m^2) = 3\sqrt[3]{3x + m(m^2 - 3)}. \tag{3.25}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.25) là $\mathbb{R}$.
Ta có phương trình (3.25) tương đương với phương trình sau

$$\frac{x^3 + m(3 - m^2)}{3} = \sqrt[3]{3x + m(m^2 - 3)}. \tag{3.26}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{x^3 + m(3 - m^2)}{3}.$$

Hàm số f(x) xác định trên $\mathbb{R}$, và ta có $f'(x) = x^2$.
Dễ thấy $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó nó có hàm ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt[3]{3x + m(m^2 - 3)}.$$

Như vậy phương trình (3.26) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1, nghiệm của phương trình (3.26) cũng là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^3 + m(3 - m^2)}{3} = x. \tag{3.27}$$

Ta có (3.27) tương đương với phương trình

$$(x - m)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0 \tag{3.28}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ h(x) = x^2 + m\mathrm{x} + m^2 - 3 = 0. \end{array}\right. \tag{3.29}$$

Từ đây ta thấy rằng phương trình (3.25) có ba nghiệm phân biệt khi phương trình (3.29) có hai nghiệm phân biệt khác m, điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ h(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 3m^2 > 0 \\ 3m^2 - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2;2) \setminus \{\pm 1\}.$$

Vậy với $m \in (-2;2) \setminus \{\pm 1\}$ thì phương trình (3.25) có ba nghiệm phân biệt.

Bài toán 3.8. Giải phương trình sau

$$7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}, \quad (x > 0). \tag{3.30}$$

Lời giải. Ta có phương trình (3.30) tương đương với phương trình sau

$$\frac{28\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}{4} = \sqrt{\frac{4\text{x}+9}{28}} - \frac{1}{2}. \tag{3.31}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{28\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}{4}.$$

Hàm f xác định trên $(0; +\infty)$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = 14x + 7$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.
Do đó hàm số

$$f(x) = \frac{28\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}{4}$$

luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
Do vậy hàm số

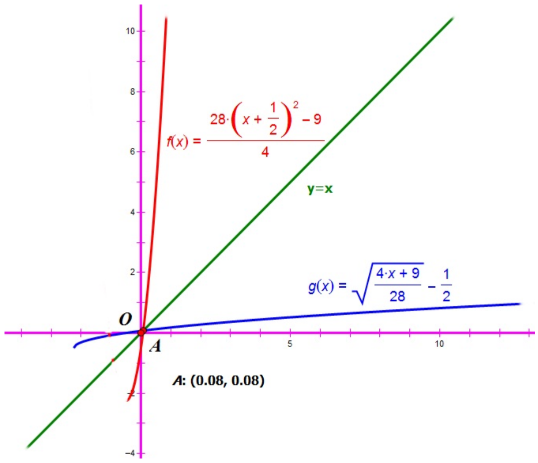
$$f(x) = \frac{28\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}{4}$$

luôn có hàm số ngược trên khoảng $(0; +\infty)$ là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{4\text{x}+9}{28}} - \frac{1}{2}.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.31) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.31) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{28\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}{4} = x, \quad (x > 0). \tag{3.32}$$



Hình 3.6:

Ta có (3.32) tương đương với phương trình

$$14x^2 + 12x - 1 = 0, \quad (x > 0). \tag{3.33}$$

Giải phương trình (3.33) ta được các nghiệm là

$$x = \frac{-6 - 5\sqrt{2}}{14}, x = \frac{-6 + 5\sqrt{2}}{14}.$$

So sánh với điều kiện $x > 0$, ta có phương trình (3.30) có tập nghiệm là

$$S = \left\{ \frac{-6 + 5\sqrt{2}}{14} \right\}.$$

Nhận xét 3.15. Hình (3.6) minh họa cho kết quả của phương trình (3.30).

Nhận xét 3.16. Phương trình (3.30) không cho ở một trong 5 dạng phương trình tổng quát đã nêu trong Chương 2, tuy nhiên bằng biến đổi đơn giản ta đã đưa phương trình (3.30) về dạng (3.31), từ đây ta thấy rằng phương trình (3.31) thuộc dạng thứ hai (2.5).

Nhận xét 3.17. Do phương trình (3.31) có hai vế là hai hàm số ngược của nhau nên ta đã sử dụng phương pháp hàm số ngược để giải quyết.

Nhận xét 3.18. Từ (3.30), nếu ta sử dụng phép đặt ẩn phụ $x = t - 1$ thì từ phương trình (3.30) ta nhận được phương trình sau

$$7t^2 - 7t = \sqrt{\frac{4t + 5}{28}}. \tag{3.34}$$

Nhận xét 3.19. Từ nhận xét trên, bằng cách thay t bởi x ta có bài toán mới sau đây

Bài toán 3.9. Giải phương trình sau

$$7x^2 - 7x = \sqrt{\frac{4x+5}{28}}, \quad (x > 1). \tag{3.35}$$

Nhận xét 3.20. Phương trình (3.35) không thể đưa ngay về một trong 5 dạng phương trình hàm ngược đã trình bày trong Chương 2 được, tuy nhiên theo Nhận xét (3.18) ở trên ta có thể kết hợp dùng ẩn phụ và phương pháp hàm số ngược để giải phương trình này.

Lời giải. Phương trình (3.35) xác định với mọi $x > 1$.

Ta có phương trình (3.35) tương đương với phương trình sau

$$\frac{28\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 9}{4} = \sqrt{\frac{4\text{x}+5}{28}} - \frac{1}{2}. \tag{3.36}$$

Đặt $t = x - 1$, thì từ phương trình (3.36) ta nhận được phương trình sau

$$\frac{28\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}{4} = \sqrt{\frac{4\text{t}+9}{28}} - \frac{1}{2}, \ (t > 0). \tag{3.37}$$

Phương trình (3.37) chính là phương trình (3.30) đã giải ở trên, do đó phương trình (3.37) có nghiệm là

$$t = \frac{-6+5\sqrt{2}}{14}.$$

Từ kết quả này suy ra phương trình (3.35) có nghiệm là

$$x = \frac{8+5\sqrt{2}}{14}.$$

Nhận xét 3.21. Phương trình (3.35) là một trong những phương trình được sáng tác từ phương trình (3.30), cũng bằng cách này từ phương trình (3.30)ta có thể sáng tác ra nhiều phương trình khác nhau nữa. Ví dụ các phương trình sau:

Bài tập 3.13. Giải phương trình $7x^2 + 21x + 14 = \sqrt{\frac{4x+13}{28}}, \ (x > -1).$

Bài tập 3.14. Giải phương trình $7x^2 - 21x + 14 = \sqrt{\frac{4x+1}{28}}, \ (x > 2).$

Bài tập 3.15. Giải phương trình $28x^2 - 14x = \sqrt{\dfrac{8x+5}{28}}, \quad (x > \dfrac{1}{2})$.

Bài toán 3.10. Giải phương trình sau

$$x^2 - x - 1000\sqrt{8000x+1} = 1000, \quad (x > 1). \tag{3.38}$$

Lời giải. Ta có phương trình (3.38) tương đương với phương trình sau

$$\frac{4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1}{8000} = \sqrt{\frac{8000\text{x} + 1}{4}} + \frac{1}{2}. \tag{3.39}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1}{8000}.$$

Hàm số f xác định trên $(1; +\infty)$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2000}$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (1; +\infty)$, nên hàm số

$$f(x) = \frac{4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1}{8000}$$

luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
Do đó trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số

$$f(x) = \frac{4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1}{8000}$$

có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{8000\text{x} + 1}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.39) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.39) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1}{8000} = x, \quad (x > 1). \tag{3.40}$$

Ta có (3.40) tương đương với phương trình

$$x^2 - 2001x = 0, \quad (x > 1). \tag{3.41}$$

Giải phương trình (3.41) ta được các nghiệm là $x = 0, x = 2001$.
So sánh với điều kiện $x > 1$, phương trình (3.30) có tập nghiệm là $S = \{2001\}$.

Bài toán 3.11. Giải phương trình sau

$$2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}, \quad (x > -1). \tag{3.42}$$

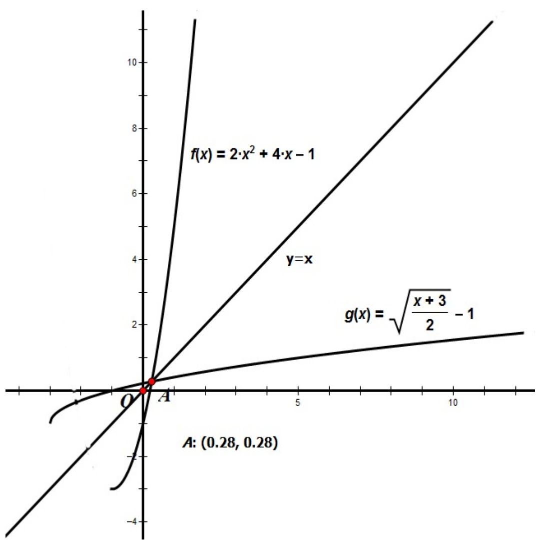
Lời giải. Ta có phương trình (3.42) tương đương với phương trình sau

$$2(x+1)^2 - 3 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1. \tag{3.43}$$

Xét hàm số $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$, xác định trên $(-1; +\infty)$.
Ta có đạo hàm của hàm số f là $f'(x) = 4x + 4$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-1; +\infty)$, nên hàm số $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
Do đó hàm số $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ có hàm số ngược trên khoảng $(-1; +\infty)$ là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.43) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên



Hình 3.7:

theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.43) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$2(x+1)^2 - 3 = x, \quad (x > -1). \tag{3.44}$$

Ta có (3.44) tương đương với phương trình

$$2x^2 + 3x - 1 = 0, \quad (x > -1). \tag{3.45}$$

Giải phương trình (3.45) ta được các nghiệm là

$$x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}, x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}.$$

So sánh với điều kiện $x > -1$, ta có phương trình (3.42) có tập nghiệm là

$$S = \left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}.$$

Nhận xét 3.22. Hình (3.7) minh họa cho kết quả của phương trình (3.42).

Nhận xét 3.23. Từ phương trình (3.42) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.16. Giải phương trình $2x^2 + 8x + 6 = \sqrt{\dfrac{x+4}{2}}$.

Bài tập 3.17. Giải phương trình $8x^2 + 16x + 6 = \sqrt{2x+4}$.

Bài tập 3.18. Giải phương trình $x^2 + 4x = \sqrt{x+6}$.

Bài toán 3.12. Giải phương trình sau

$$x^2 + 5x + 189 = 15\sqrt{120x - 431}. \tag{3.46}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.46) là $x \geq \dfrac{431}{120}$.
Ta có phương trình (3.46) tương đương với phương trình sau

$$\frac{4\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 + 431}{120} = \sqrt{\frac{120\text{x} - 431}{4}} - \frac{5}{2}. \tag{3.47}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{4\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 + 431}{120}.$$

Hàm số f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên sẽ xác định trên $\left[\frac{431}{120}; +\infty\right)$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = \frac{2x+5}{30}$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \left[\frac{431}{120}; +\infty\right)$.
Do đó hàm số

$$f(x) = \frac{4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + 431}{120}$$

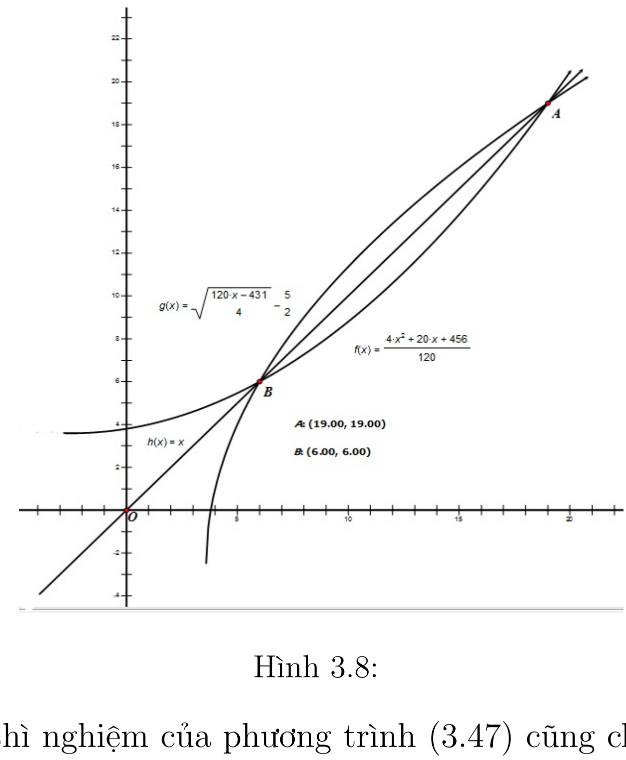
luôn đồng biến trên khoảng $\left[\frac{431}{120}; +\infty\right)$.
Do đó trên khoảng $\left[\frac{431}{120}; +\infty\right)$ hàm số

$$f(x) = \frac{4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + 431}{120}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{120\mathrm{x} - 431}{4}} - \frac{5}{2}.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.47) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên



Hình 3.8:

theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.47) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + 431}{120} = x. \tag{3.48}$$

Ta có (3.48) tương đương với phương trình

$$x^2 - 25x + 114 = 0. \tag{3.49}$$

Giải phương trình (3.49) ta được các nghiệm là $x = 6, x = 19$.
So sánh với điều kiện $x \geq \dfrac{431}{120}$, suy ra phương trình (3.46) có tập nghiệm là

$$S = \{6, 19\}.$$

Nhận xét 3.24. Hình (3.8) minh họa cho kết quả của phương trình (3.46).

Bài toán 3.13. Giải phương trình sau

$$2x^2 + 6x + 10 = \sqrt{4x - 5}. \tag{3.50}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.50) là $x \geq \dfrac{5}{4}$.
Ta có phương trình (3.50) tương đương với phương trình sau

$$\frac{4\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + 5}{4} = \sqrt{\frac{4\mathrm{x} - 5}{4}} - \frac{3}{2}. \tag{3.51}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{4\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + 5}{4}.$$

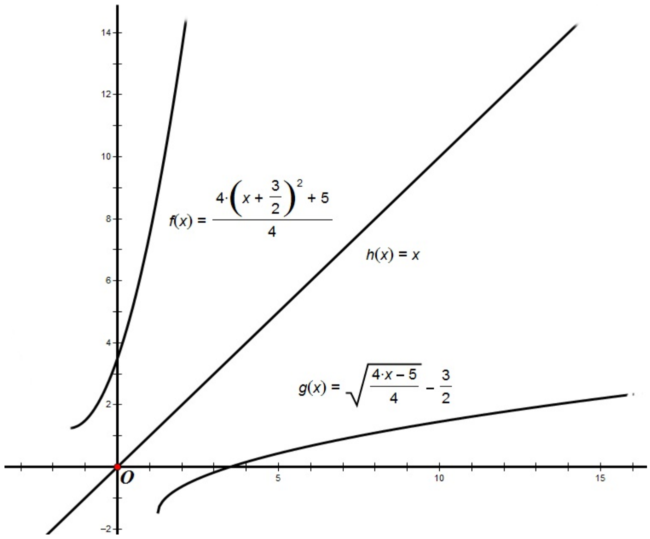
Hàm số f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên f xác định trên $\left[\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = 2x + 3$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \left[\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$.
Suy ra hàm số f luôn đồng biến trên khoảng $\left[\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$.
Do đó trên khoảng $\left[\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$ hàm số

$$f(x) = \frac{4\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + 5}{4}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{4\mathrm{x} - 5}{4}} - \frac{3}{2}.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.51) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên



Hình 3.9:

theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.51) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+5}{4} = x. \tag{3.52}$$

Ta có (3.52) tương đương với phương trình

$$2x^2+4x+7=0. \tag{3.53}$$

Phương trình (3.53) vô nghiệm, do đó phương trình (3.50) vô nghiệm.

Nhận xét 3.25. Hình (3.9) minh họa cho kết quả của phương trình (3.50).

Nhận xét 3.26. Từ phương trình (3.50) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau:

Bài tập 3.19. Giải phương trình $2x^2+2x+6=\sqrt{4x-9}$.

Bài tập 3.20. Giải phương trình $2x^2+10x+18=\sqrt{4x-1}$.

Bài tập 3.21. Giải phương trình $8x^2+4x+6=\sqrt{8x-9}$.

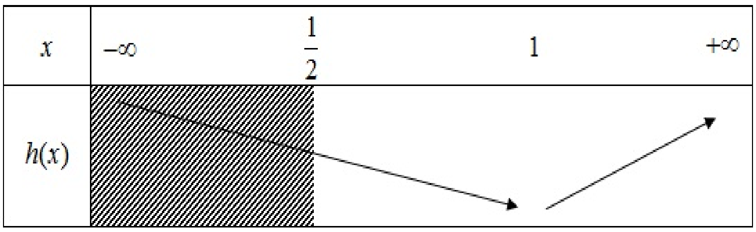
Bài toán 3.14. Xác định tham số m để phương trình sau có nghiệm $x > \frac{1}{2}$

$$2x^2-2x-11-2m=\sqrt{4x+21+4m}. \tag{3.54}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.54) là $x \geq \frac{-21-4a}{4}$.
Ta có phương trình (3.54) tương đương với phương trình sau

$$\frac{4(x-\frac{1}{2})^2-(21+4m)}{4} = \sqrt{\frac{4x+21+4m}{4}}+\frac{1}{2}. \tag{3.55}$$

Xét hàm số
$$f(x) = \frac{4(x-\frac{1}{2})^2 - (21+4m)}{4}.$$
Hàm số f(x) xác định trên $(\frac{1}{2};+\infty)$, và ta có $f'(x) = 2x - 1$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (\frac{1}{2};+\infty)$, nên $f(x)$ đồng biến trên $(\frac{1}{2};+\infty)$.
Do đó $f(x)$ có hàm ngược là hàm số
$$g(x) = \sqrt{\frac{4x+21+4m}{4}} + \frac{1}{2}.$$
Như vậy phương trình (3.55) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1, nghiệm của phương trình (3.55) cũng là nghiệm của phương trình
$$\frac{4(x-\frac{1}{2})^2 - (21+4m)}{4} = x. \tag{3.56}$$
$$\text{với điều kiện } x > \frac{1}{2}, x \geq -\frac{21+4m}{4}$$
Phương trình (3.56) tương đương với phương trình sau
$$x^2 - 2x - 5 - m = 0.$$
hay
$$m = x^2 - 2x - 5 = h(x). \tag{3.57}$$
Như vậy phương trình (3.54) có nghiệm thỏa điều kiện $x > \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi phương trình (3.57) có nghiệm thỏa điều kiện $x > \frac{1}{2}, x \geq -\frac{21+4m}{4}$.
Điều này xẩy ra khi và chỉ khi đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại điểm có hoành độ $x > \frac{1}{2}, x \geq -\frac{21+4m}{4}$.
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x) = x^2 - 2x - 5$ như sau



Xẩy ra các trường hợp sau:

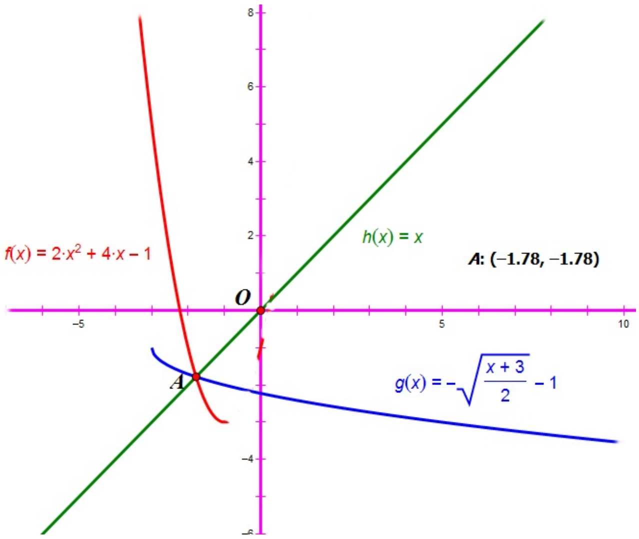
- Nếu $\frac{1}{2} \geq -\frac{21+4m}{4}$ tức $m \geq \frac{-23}{4}$
thì khi đó yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi
$$h(1) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -6.$$
So sánh với khoảng đang xét, ta được $m \geq \frac{-23}{4}$.
- Nếu $\frac{1}{2} < -\frac{21+4m}{4} \leq 1$ tức $\frac{-25}{4} \leq m < \frac{-23}{4}$
thì khi đó yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi
$$h(1) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -6.$$
So sánh với khoảng đang xét, ta được $-6 \leq m < \frac{-23}{4}$.
- Nếu $-\frac{21+4m}{4} > 1$ tức $m < \frac{-25}{4}$
thì khi đó yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi
$$h(-\frac{21+4m}{4}) \leq 0 \Leftrightarrow (4m+23)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = \frac{-23}{4}.$$
(điều này là vô lý)

Kết hợp các kết quả trên, ta được $m \geq -6$.
Vậy với $m \geq -6$ thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Bài toán 3.15. Tìm nghiệm $x \leq -1$ của phương trình sau
$$2x^2 + 4x + \sqrt{\frac{x+3}{2}} = 0. \tag{3.58}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.58) là $x \in [-3; -1]$.
Ta có phương trình (3.58) tương đương với phương trình sau
$$2(x+1)^2 - 3 = -\sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1. \tag{3.59}$$

Xét hàm số $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$.
Hàm f có tập xác định trên $\mathbb{R}$ nên f xác định trên $[-3; -1]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = 2(x+1)$.
Dễ thấy $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-3; -1]$, nên hàm số $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ luôn nghịch biến trên đoạn $[-3; -1]$.



Hình 3.10:

Do đó trên đoạn $[-3; -1]$ hàm số $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = -\sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.59) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.59) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$2(x+1)^2 - 3 = x. \tag{3.60}$$

Ta có (3.60) tương đương với phương trình

$$2x^2 + 3x - 1 = 0. \tag{3.61}$$

Giải phương trình (3.61) ta được nghiệm là

$$x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}, x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}.$$

So sánh với điều kiện $x \in [-3; -1]$, phương trình (3.58) có nghiệm là

$$x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}.$$

Nhận xét 3.27. Hình (3.10) minh họa cho kết quả của phương trình (3.58).

Nhận xét 3.28. Phương trình (3.58) không cho ở một trong 5 dạng phương trình tổng quát đã nêu trong Chương 2, tuy nhiên bằng biến đổi đơn giản ta đã đưa phương trình (3.58) về dạng (3.59), từ đây ta thấy rằng phương trình (3.59) thuộc dạng thứ ba (2.6).

Nhận xét 3.29. Do phương trình (3.59) có hai vế là hai hàm số ngược của nhau nên ta đã sử dụng phương pháp hàm số ngược để giải quyết.

Nhận xét 3.30. Từ (3.58), nếu ta sử dụng phép đặt ẩn phụ $x = 2t - 1$ thì từ phương trình (3.58) ta nhận được phương trình sau

$$8t^2 - 2 + \sqrt{t+1} = 0. \tag{3.62}$$

Nhận xét 3.31. Từ nhận xét trên, bằng cách thay t bởi x ta có bài toán mới sau đây

Bài toán 3.16. Giải phương trình sau

$$8x^2 - 2 + \sqrt{x+1} = 0, \quad (x \le 0). \tag{3.63}$$

Nhận xét 3.32. Phương trình (3.63) không thể đưa ngay về một trong 5 dạng phương trình hàm ngược đã trình bày trong Chương 2 được, tuy nhiên theo Nhận xét (3.30) ở trên ta có thể kết hợp dùng ẩn phụ và phương pháp hàm số ngược để giải phương trình này.
Lời giải. Phương trình (3.63) xác định với mọi $x \in [-1; 0]$.
Ta có phương trình (3.63) tương đương với phương trình sau

$$2(2x-1)^2 + 4(2x-1) + \sqrt{\frac{2(\mathrm{x}+1)-3}{2}} = 0. \tag{3.64}$$

Đặt $t = 2x - 1$, thì từ phương trình (3.64) ta nhận được phương trình sau

$$2(t+1)^2 - 3 = -\sqrt{\frac{t+3}{2}} - 1, \ (-3 \le t \le -1). \tag{3.65}$$

Phương trình (3.65) chính là phương trình (3.58) đã giải ở trên, do đó phương trình (3.65) có nghiệm là

$$t = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}.$$

Từ kết quả này suy ra phương trình (3.63) có nghiệm là

$$x = \frac{1-\sqrt{17}}{8}.$$

Nhận xét 3.33. Phương trình (3.63) là một trong những phương trình được sáng tác từ phương trình (3.58), cũng bằng cách này từ phương trình (3.58)ta có thể sáng tác ra nhiều phương trình khác nhau nữa. Ví dụ các phương trình sau:

Bài tập 3.22. Giải phương trình $2x^2 + 8x + 6 + \sqrt{\frac{x+4}{2}} = 0.$

Bài tập 3.23. Giải phương trình $2x^2 - 2 + \sqrt{\frac{x+2}{2}} = 0.$

Bài tập 3.24. Giải phương trình $8x^2 + 16x + 6 + \sqrt{x+2} = 0.$

Bài toán 3.17. Tìm nghiệm $x \leq \frac{3}{2}$ của phương trình sau

$$2x^2 - 6x - 3 + \sqrt{4x+9} = 0. \tag{3.66}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.66) là $x \in [-\frac{9}{4}; \frac{3}{2}]$.
Ta có phương trình (3.66) tương đương với phương trình sau

$$\frac{4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 9}{4} = -\sqrt{\frac{4x+9}{4}} + \frac{3}{2}. \tag{3.67}$$

Xét hàm số

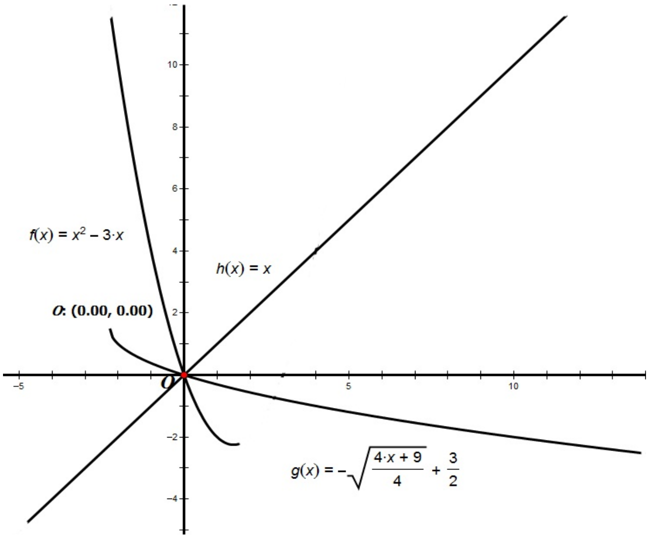
$$f(x) = \frac{4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 9}{4}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên f sẽ xác định trên $[-\frac{9}{4}; \frac{3}{2}]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = 2x - 3$.
Dễ thấy $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-\frac{9}{4}; \frac{3}{2}]$,
nên hàm số f luôn nghịch biến trên đoạn $[-\frac{9}{4}; \frac{3}{2}]$.
Do đó trên đoạn $[-\frac{9}{4}; \frac{3}{2}]$ hàm số

$$f(x) = \frac{4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 9}{4}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = -\sqrt{\frac{4x+9}{4}} + \frac{3}{2}.$$



Hình 3.11:

Điều này chứng tỏ phương trình (3.67) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.67) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-9}{4}=x. \tag{3.68}$$

Ta có (3.68) tương đương với phương trình

$$x^2-4x=0. \tag{3.69}$$

Giải phương trình (3.69) ta được nghiệm là $x=0, x=4$.
So sánh với điều kiện $x \in [-\frac{9}{4};\frac{3}{2}]$, suy ra phương trình (3.66) có nghiệm là $x=0$.

Nhận xét 3.34. Hình (3.11) minh họa cho kết quả của phương trình (3.66).

Nhận xét 3.35. Từ phương trình (3.66) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.25. Giải phương trình $2x^2-10x+5+\sqrt{4x+5}=0$.

Bài tập 3.26. Giải phương trình $2x^2-2x-7+\sqrt{4x+13}=0$.

Bài tập 3.27. Giải phương trình $8x^2-4x-7+\sqrt{8x+13}=0$.

Bài toán 3.18. Tìm nghiệm $x \le -\frac{1}{2}$ của phương trình sau

$$6x^2+6x+\sqrt{\frac{4x+5}{3}}=0. \tag{3.70}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.70) là $x \in [-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}]$.
Ta có phương trình (3.70) tương đương với phương trình sau

$$\frac{12\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 5}{4} = -\sqrt{\frac{4x+5}{12}} - \frac{1}{2}. \tag{3.71}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{12\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 5}{4}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên f xác định trên $[-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = 3(2x+1)$.
Dễ thấy $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}]$, nên hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}]$.
Do đó trên đoạn $[-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}]$ hàm số

$$f(x) = \frac{12\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 5}{4}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = -\sqrt{\frac{4x+5}{12}} - \frac{1}{2}.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.71) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.71) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{12\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 5}{4} = x. \tag{3.72}$$

Ta có (3.72) tương đương với phương trình

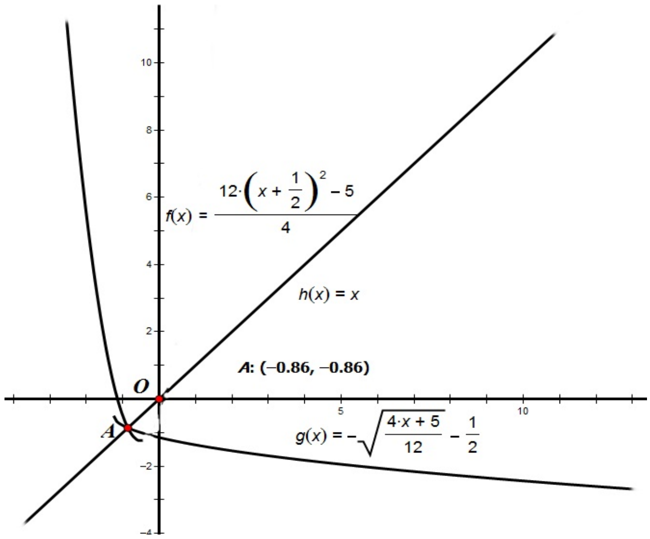
$$6x^2 + 4x - 1 = 0. \tag{3.73}$$

Giải phương trình (3.73) ta được nghiệm là

$$x = \frac{-2-\sqrt{10}}{6}, x = \frac{-2+\sqrt{10}}{6}.$$

So sánh với điều kiện $x \in [-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}]$, phương trình (3.70) có nghiệm là

$$x = \frac{-2-\sqrt{10}}{6}.$$



Hình 3.12:

Nhận xét 3.36. Hình (3.12) minh họa cho kết quả của phương trình (3.70).

Nhận xét 3.37. Từ phương trình (3.70) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.28. Giải phương trình $6x^2 + 18x + 12 + \sqrt{\dfrac{4x+9}{3}} = 0.$

Bài tập 3.29. Giải phương trình $6x^2 - 6x + \sqrt{\dfrac{4x+1}{3}} = 0.$

Bài tập 3.30. Giải phương trình $54x^2 + 54x + 12 + \sqrt{4x+3} = 0.$

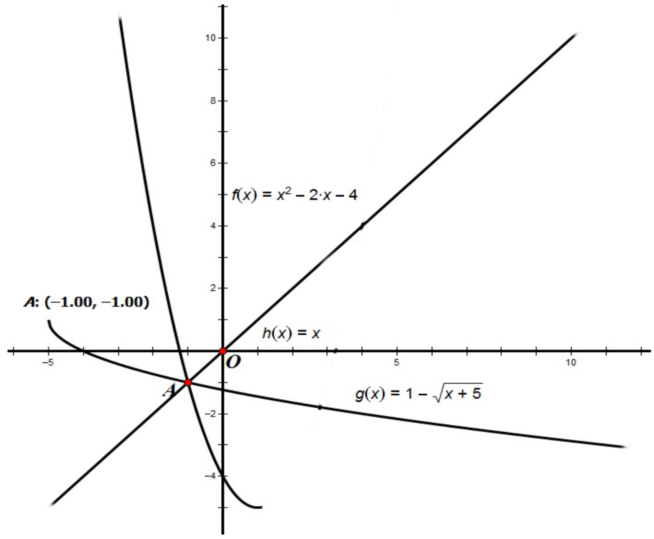
Bài toán 3.19. Tìm nghiệm $x \leq 1$ của phương trình sau

$$x^2 - 2x - 5 + \sqrt{x+5} = 0. \tag{3.74}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.74) là $x \in [-5; 1]$.
Ta có phương trình (3.74) tương đương với phương trình sau

$$(x-1)^2 - 5 = -\sqrt{x+5} + 1. \tag{3.75}$$

Xét hàm số $f(x) = (x-1)^2 - 5$.
Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $[-5; 1]$.
Hàm f có đạo hàm là $f'(x) = 2(x-1)$.
Dễ thấy $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-5; 1]$, nên hàm số $f(x) = (x-1)^2 - 5$ luôn nghịch biến trên đoạn $[-5; 1]$.
Do đó hàm số $f(x) = (x-1)^2 - 5$ luôn có hàm số ngược là hàm số $g(x) = -\sqrt{x+5} + 1$



Hình 3.13:

trên đoạn $[-5; 1]$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.75) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.75) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$(x-1)^2 - 5 = x, \quad x \in [-5; 1]. \tag{3.76}$$

Ta có (3.76) tương đương với phương trình

$$x^2 - 3x - 4 = 0. \tag{3.77}$$

Giải phương trình (3.77) ta được nghiệm là $x = -1; x = 4$.
So sánh với điều kiện $x \in [-5; 1]$, phương trình (3.74) có nghiệm là $x = -1$.

Nhận xét 3.38. Hình (3.13) minh họa cho kết quả của phương trình (3.74).

Nhận xét 3.39. Từ phương trình (3.74) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.31. Giải phương trình $x^2 - 6 + \sqrt{x+6} = 0$.

Bài tập 3.32. Giải phương trình $x^2 - 4x - 2 + \sqrt{x+4} = 0$.

Bài tập 3.33. Giải phương trình $4x^2 - 6 + \sqrt{2x+6} = 0$.

Bài toán 3.20. Tìm nghiệm $x \geq 2$ của phương trình sau

$$2x^2 - 8x + \sqrt{\frac{10-x}{2}} = 0. \tag{3.78}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.78) là $x \in [2; 10]$.
Ta có phương trình (3.78) tương đương với phương trình sau

$$\frac{2(x-2)^2 - 10}{-1} = \sqrt{\frac{10-x}{2}} + 2. \tag{3.79}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{2(x-2)^2 - 10}{-1}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $[2; 10]$.
Hàm f có đạo hàm là $f'(x) = -4(x-2)$.
Dễ thấy $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [2; 10]$. Nên hàm số

$$f(x) = \frac{2(x-2)^2 - 10}{-1}$$

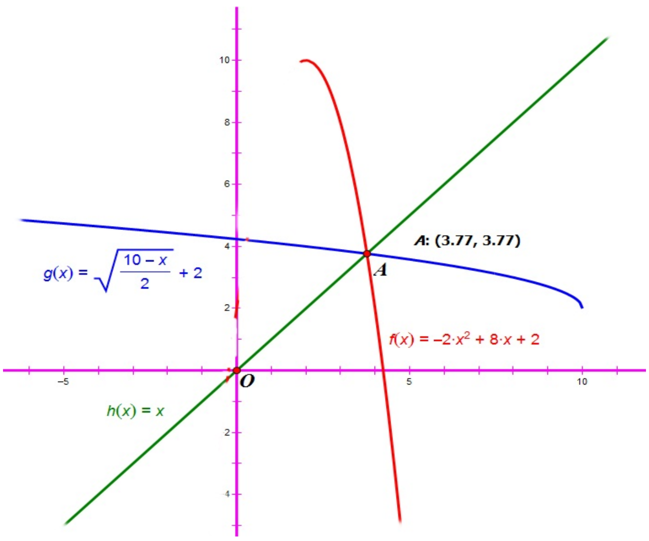
luôn nghịch biến trên đoạn $[2; 10]$.
Do đó trên đoạn $[2; 10]$ hàm số

$$f(x) = \frac{2(x-2)^2 - 10}{-1}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{10-x}{2}} + 2.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.79) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên



Hình 3.14:

theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.79) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{2(x-2)^2-10}{-1} = x, \quad x \in [2;10]. \tag{3.80}$$

Ta có (3.80) tương đương với phương trình

$$2x^2 - 7x - 2 = 0. \tag{3.81}$$

Giải phương trình (3.81) ta được nghiệm là

$$x = \frac{7-\sqrt{65}}{4}; x = \frac{7+\sqrt{65}}{4}.$$

So sánh với điều kiện $x \in [2;10]$, ta suy ra phương trình (3.78) có nghiệm là

$$x = \frac{7+\sqrt{65}}{4}.$$

Nhận xét 3.40. Hình (3.14) minh họa cho kết quả của phương trình (3.78).

Nhận xét 3.41. Phương trình (3.78) không cho ở một trong 5 dạng phương trình tổng quát đã nêu trong Chương 2, tuy nhiên bằng biến đổi đơn giản ta đã đưa phương trình (3.78) về dạng (3.79), từ đây ta thấy rằng phương trình (3.79) thuộc dạng thứ tư (2.7).

Nhận xét 3.42. Do phương trình (3.79) có hai vế là hai hàm số ngược của nhau nên ta đã sử dụng phương pháp hàm số ngược để giải quyết.

Nhận xét 3.43. Từ (3.78), nếu ta sử dụng phép đặt ẩn phụ $x = 2t$ thì từ phương trình (3.78) ta nhận được phương trình sau

$$8t^2 - 16t + \sqrt{5-t} = 0. \tag{3.82}$$

Nhận xét 3.44. Từ nhận xét trên, bằng cách thay t bởi x ta có bài toán mới sau đây

Bài toán 3.21. Giải phương trình sau

$$8x^2 - 16x + \sqrt{5-x} = 0, \quad (x \geq 1). \tag{3.83}$$

Nhận xét 3.45. Phương trình (3.83) không thể đưa ngay về một trong 5 dạng phương trình hàm ngược đã trình bày trong Chương 2 được, tuy nhiên theo Nhận xét (3.43) ở trên ta có thể kết hợp dùng ẩn phụ và phương pháp hàm số ngược để giải phương trình này.

Lời giải. Phương trình (3.83) xác định với mọi $x \in [1; 5]$.
Ta có phương trình (3.83) tương đương với phương trình sau

$$2(2x)^2 - 8(2x) + \sqrt{\frac{10 - 2\mathrm{x}}{2}} = 0. \tag{3.84}$$

Đặt $t = 2x$, thì từ phương trình (3.84) ta nhận được phương trình sau

$$\frac{2(t-2)^2 - 10}{-1} = \sqrt{\frac{10 - t}{2}} + 2, \quad (2 \le t \le 10). \tag{3.85}$$

Phương trình (3.85) chính là phương trình (3.78) đã giải ở trên, do đó phương trình (3.85) có nghiệm là

$$t = \frac{7 + \sqrt{65}}{4}.$$

Từ kết quả này suy ra phương trình (3.83) có nghiệm là

$$x = \frac{7 + \sqrt{65}}{8}.$$

Nhận xét 3.46. Phương trình (3.83) là một trong những phương trình được sáng tác từ phương trình (3.78), cũng bằng cách này từ phương trình (3.78)ta có thể sáng tác ra nhiều phương trình khác nhau nữa. Ví dụ các phương trình sau:

Bài tập 3.34. Giải phương trình $2x^2 - 12x + 10 + \sqrt{\dfrac{11 - x}{2}} = 0.$

Bài tập 3.35. Giải phương trình $2x^2 - 4x - 6 + \sqrt{\dfrac{9 - x}{2}} = 0.$

Bài tập 3.36. Giải phương trình $8x^2 - 24x + 10 + \sqrt{\dfrac{11 - 2x}{2}} = 0.$

Bài toán 3.22. Tìm nghiệm $x \ge \dfrac{1}{3}$ của phương trình sau

$$9x^2 - 6x + 5\sqrt{55 - 15x} = 49. \tag{3.86}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.86) là $x \in [\dfrac{1}{3}; \dfrac{11}{3}]$.
Ta có phương trình (3.86) tương đương với phương trình sau

$$\frac{9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 55}{-15} = \sqrt{\frac{55 - 15x}{9}} + \frac{1}{3}. \tag{3.87}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 55}{-15}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $[\frac{1}{3}; \frac{11}{3}]$.

Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = \frac{-2(3x-1)}{5}$.

Dễ thấy $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [\frac{1}{3}; \frac{11}{3}]$, nên hàm số

$$f(x) = \frac{9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 55}{-15}$$

luôn nghịch biến trên đoạn $[\frac{1}{3}; \frac{11}{3}]$.

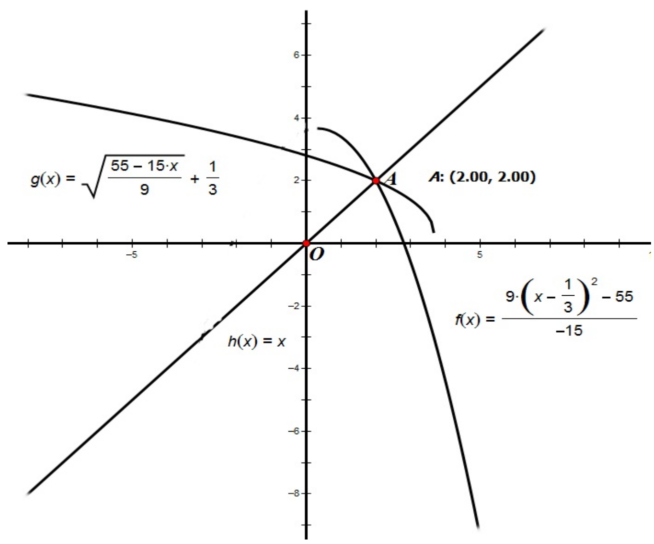
Do đó trên đoạn $[\frac{1}{3}; \frac{11}{3}]$ hàm số

$$f(x) = \frac{9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 55}{-15}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{55 - 15x}{9}} + \frac{1}{3}.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.87) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên



Hình 3.15:

theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.87) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-55}{-15}=x,\quad x\in[\frac{1}{3};\frac{11}{3}]. \tag{3.88}$$

Ta có (3.88) tương đương với phương trình

$$x^2+x-6=0. \tag{3.89}$$

Giải phương trình (3.89) ta được nghiệm là $x=2; x=-3$.
So sánh với điều kiện $x\in[\frac{1}{3};\frac{11}{3}]$, phương trình (3.86) có nghiệm là $x=2$.

Nhận xét 3.47. Hình (3.15) minh họa cho kết quả của phương trình (3.86).

Nhận xét 3.48. Từ phương trình (3.86) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.37. Giải phương trình $9x^2-20x+5\sqrt{70-15x}=34.$

Bài tập 3.38. Giải phương trình $9x^2+12x+5\sqrt{50-15x}=46.$

Bài tập 3.39. Giải phương trình $9x^2-12x+5\sqrt{50+15x}=46.$

Bài toán 3.23. Tìm nghiệm $x\ge -2$ của phương trình sau

$$2x^2+8x+8+3\sqrt{\frac{10-3x}{2}}=0. \tag{3.90}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.90) là $x\in[-2;\frac{10}{3}]$.
Ta có phương trình (3.90) tương đương với phương trình sau

$$\frac{2(x+2)^2-10}{-3}=\sqrt{\frac{10-3x}{2}}-2. \tag{3.91}$$

Xét hàm số

$$f(x)=\frac{2(x+2)^2-10}{-3}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $[-2;\frac{10}{3}]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x)=\frac{-4(x+2)}{3}$.
Dễ thấy $f'(x)\le 0$ với mọi $x\in[-2;\frac{10}{3}]$.
Nên hàm số

$$f(x)=\frac{2(x+2)^2-10}{-3}$$

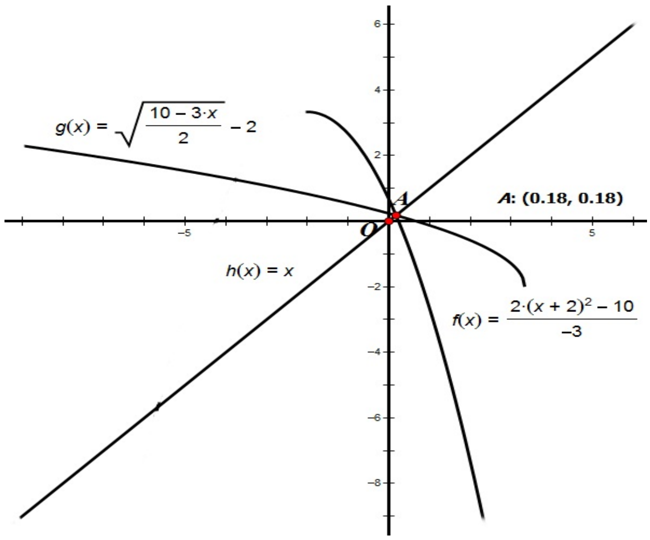
luôn nghịch biến trên đoạn $[-2; \frac{10}{3}]$.
Do đó trên đoạn $[-2; \frac{10}{3}]$ hàm số

$$f(x) = \frac{2(x+2)^2 - 10}{-3}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{10-3x}{2}} - 2.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.91) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên



Hình 3.16:

theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.91) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{2(x+2)^2 - 10}{-3} = x, \quad x \in [-2; \frac{10}{3}]. \tag{3.92}$$

Ta có (3.92) tương đương với phương trình

$$2x^2 + 11x - 2 = 0. \tag{3.93}$$

Giải phương trình (3.93) ta được các nghiệm là

$$x = \frac{-11 - \sqrt{137}}{4}; x = \frac{-11 + \sqrt{137}}{4}.$$

So sánh với điều kiện $x \in [-2; \frac{10}{3}]$, phương trình (3.90) có nghiệm là

$$x = \frac{-11 + \sqrt{137}}{4}.$$

Nhận xét 3.49. Hình (3.16) minh họa cho kết quả của phương trình (3.90).

Nhận xét 3.50. Từ phương trình (3.90) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.40. Giải phương trình $2x^2 + 12x + 18 + 3\sqrt{\dfrac{7-3x}{2}} = 0.$

Bài tập 3.41. Giải phương trình $2x^2 - 12x + 18 + 3\sqrt{\dfrac{7+3x}{2}} = 0.$

Bài tập 3.42. Giải phương trình $8x^2 + 16x + 18 + 3\sqrt{5-3x} = 0.$

Bài toán 3.24. Tìm nghiệm $x \geq -1$ của phương trình sau

$$2x^2 + 4x - 16 + 3\sqrt{\frac{15-3x}{2}} = 0. \tag{3.94}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.94) là $x \in [-1; 5]$.
Ta có phương trình (3.94) tương đương với phương trình sau

$$\frac{2(x+1)^2 - 15}{-3} = \sqrt{\frac{15-3x}{2}} - 1. \tag{3.95}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{2(x+1)^2 - 15}{-3}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $[-1; 5]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = \dfrac{-4(x+1)}{3}$.
Dễ thấy $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-1; 5]$.
Nên hàm số

$$f(x) = \frac{2(x+1)^2 - 15}{-3}$$

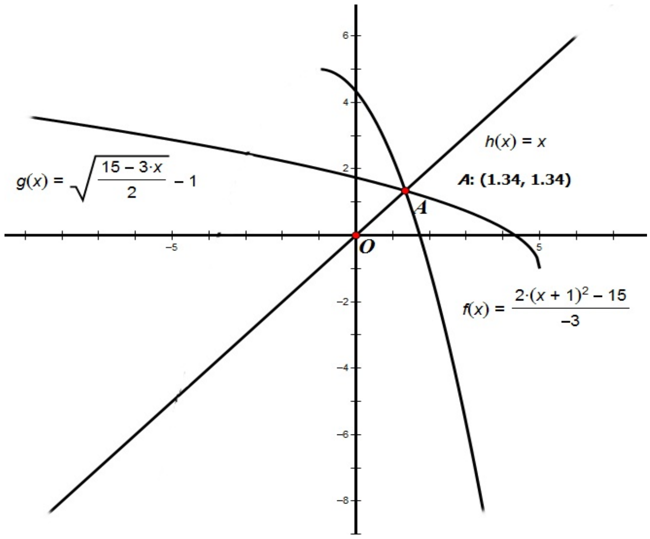
luôn nghịch biến trên đoạn $[-1; 5]$.
Do đó trên đoạn $[-1; 5]$ hàm số

$$f(x) = \frac{2(x+1)^2 - 15}{-3}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{15-3x}{2}} - 1.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.95) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên



Hình 3.17:

theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.95) cũng chính là nghiệm của phương trình sau
$$\frac{2(x+1)^2-15}{-3}=x,\quad x\in[-1;5]. \tag{3.96}$$
Ta có (3.96) tương đương với phương trình
$$2x^2+7x-13=0. \tag{3.97}$$
Giải phương trình (3.97) ta được các nghiệm là
$$x=\frac{-7-\sqrt{153}}{4}; x=\frac{-7+\sqrt{153}}{4}.$$
So sánh với điều kiện $x\in[-1;5]$, phương trình (3.94) có nghiệm là
$$x=\frac{-7+\sqrt{153}}{4}.$$

Nhận xét 3.51. Hình (3.17) minh họa cho kết quả của phương trình (3.94).

Nhận xét 3.52. Từ phương trình (3.94) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.43. Giải phương trình $2x^2+8x-10+3\sqrt{\dfrac{12-3x}{2}}=0.$

Bài tập 3.44. Giải phương trình $2x^2-8x-10+3\sqrt{\dfrac{12+3x}{2}}=0.$

Bài tập 3.45. Giải phương trình $8x^2+16x-10+3\sqrt{6-3x}=0.$

Bài toán 3.25. Tìm nghiệm $x \geq 1$ của phương trình sau

$$3x^2 - 6x - 5 + 2\sqrt{\frac{10 - 2x}{3}} = 0. \tag{3.98}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.98) là $x \in [1; 5]$.
Ta có phương trình (3.98) tương đương với phương trình sau

$$\frac{3(x-1)^2 - 10}{-2} = \sqrt{\frac{10 - 2x}{3}} + 1. \tag{3.99}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{3(x-1)^2 - 10}{-2}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $[1; 5]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = -3(x - 1)$.
Dễ thấy $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [1; 5]$.
Nên hàm số

$$f(x) = \frac{3(x-1)^2 - 10}{-2}$$

luôn nghịch biến trên đoạn $[1; 5]$.
Do đó trên đoạn $[1; 5]$ hàm số

$$f(x) = \frac{3(x-1)^2 - 10}{-2}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = \sqrt{\frac{10 - 2x}{3}} + 1.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.99) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.99) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{3(x-1)^2 - 10}{-2} = x, \quad x \in [1; 5]. \tag{3.100}$$

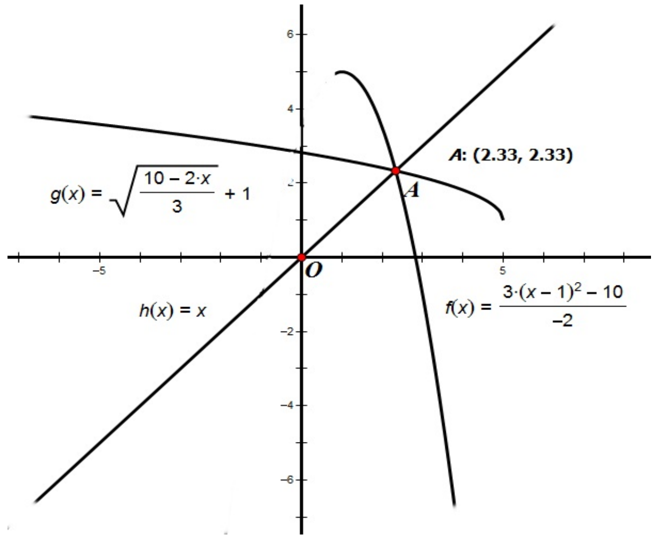
Ta có (3.100) tương đương với phương trình

$$3x^2 - 4x - 7 = 0. \tag{3.101}$$

Giải phương trình (3.101) ta được các nghiệm là

$$x = -1; x = \frac{7}{3}.$$

So sánh với điều kiện $x \in [1; 5]$, phương trình (3.98) có nghiệm là $x = \dfrac{7}{3}$.



Hình 3.18:

Nhận xét 3.53. Hình (3.18) minh họa cho kết quả của phương trình (3.98).

Nhận xét 3.54. Từ phương trình (3.98) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.46. Giải phương trình $3x^2 - 8 + 2\sqrt{\dfrac{8-2x}{3}} = 0.$

Bài tập 3.47. Giải phương trình $12x^2 - 12x - 5 + 2\sqrt{\dfrac{10-4x}{3}} = 0.$

Bài tập 3.48. Giải phương trình $27x^2 + 18x - 5 + 2\sqrt{2-2x} = 0.$

Bài toán 3.26. Giải phương trình sau

$$x^2 - 12x + 36 = 3\sqrt{18-3x}. \tag{3.102}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.102) là $x \in (-\infty; 6]$.
Ta có phương trình (3.102) tương đương với phương trình sau

$$\frac{(x-6)^2 - 18}{-3} = -\sqrt{18-3x} + 6. \tag{3.103}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{(x-6)^2 - 18}{-3}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $(-\infty; 6]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = -\dfrac{2(x-6)}{3}$.

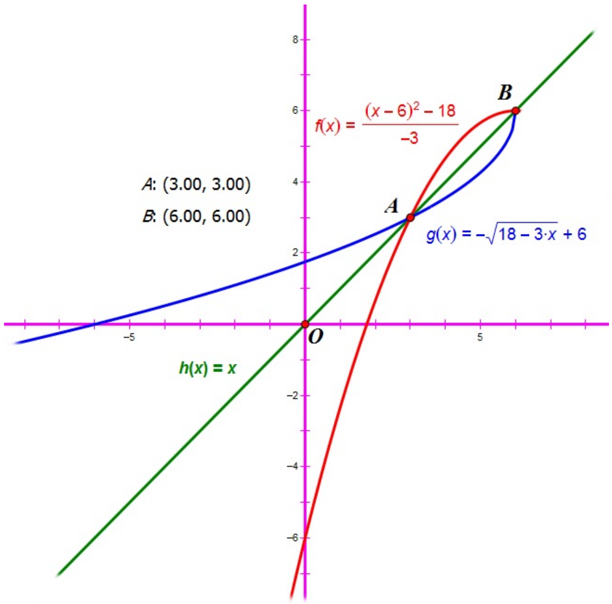
Dễ thấy $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (-\infty; 6]$.
Nên hàm số

$$f(x) = \frac{(x-6)^2 - 18}{-3}$$

luôn đồng biến trên $(-\infty; 6]$.
Do đó trên $(-\infty; 6]$ hàm số

$$f(x) = \frac{(x-6)^2 - 18}{-3}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số $g(x) = -\sqrt{18 - 3x} + 6$.



Hình 3.19:

Điều này chứng tỏ phương trình (3.103) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.103) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{(x-6)^2 - 18}{-3} = x, \quad x \in (-\infty; 6]. \tag{3.104}$$

Ta có (3.104) tương đương với phương trình

$$x^2 - 9x + 18 = 0. \tag{3.105}$$

Giải phương trình (3.105) ta được các nghiệm là $x = 3; x = 6$.
So sánh với điều kiện $x \in (-\infty; 6]$, phương trình (3.102) có tập nghiệm là

$$S = \{3; 6\}.$$

Nhận xét 3.55. Hình (3.19) minh họa cho kết quả của phương trình (3.102).

Nhận xét 3.56. Phương trình (3.102) không cho ở một trong 5 dạng phương trình tổng quát đã nêu trong Chương 2, tuy nhiên bằng biến đổi đơn giản ta đã đưa phương trình (3.102) về dạng (3.103), từ đây ta thấy rằng phương trình (3.103) thuộc dạng thứ năm (2.8).

Nhận xét 3.57. Do phương trình (3.103) có hai vế là hai hàm số ngược của nhau nên ta đã sử dụng phương pháp hàm số ngược để giải quyết.

Nhận xét 3.58. Từ (3.102), nếu ta sử dụng phép đặt ẩn phụ $x = t - 1$ thì từ phương trình (3.102) ta nhận được phương trình sau

$$t^2 - 24t + 39 = 3\sqrt{21 - 3t}. \tag{3.106}$$

Nhận xét 3.59. Từ nhận xét trên, bằng cách thay t bởi x ta có bài toán mới sau đây

Bài toán 3.27. Giải phương trình sau

$$x^2 - 24x + 39 = 3\sqrt{21 - 3x}. \tag{3.107}$$

Nhận xét 3.60. Phương trình (3.107) không thể đưa ngay về một trong 5 dạng phương trình hàm ngược đã trình bày trong Chương 2 được, tuy nhiên theo Nhận xét (3.58) ở trên ta có thể kết hợp dùng ẩn phụ và phương pháp hàm số ngược để giải phương trình này.

Lời giải. Phương trình (3.107) xác định với mọi $x \in (-\infty; 7]$.

Ta có phương trình (3.107) tương đương với phương trình sau

$$(x-1)^2 - 12(x-1) + 36 = 3\sqrt{18 - 3(x-1)}. \tag{3.108}$$

Đặt $t = x - 1$, thì từ phương trình (3.108) ta nhận được phương trình sau

$$t^2 - 12t + 36 = 3\sqrt{18 - 3t}, \quad t \in (-\infty; 6]. \tag{3.109}$$

Phương trình (3.109) chính là phương trình (3.102) đã giải ở trên, do đó phương trình (3.109) có nghiệm là

$$t_1 = 3; t_2 = 6.$$

Từ kết quả này suy ra phương trình (3.107) có nghiệm là

$$x_1 = 4; x_2 = 7.$$

Nhận xét 3.61. Phương trình (3.107) là một trong những phương trình được sáng tác từ phương trình (3.102), cũng bằng cách này từ phương trình (3.102)ta có thể sáng tác ra nhiều phương trình khác nhau nữa. Ví dụ các phương trình sau:

Bài tập 3.49. Giải phương trình $x^2 - 10x - 25 = 3\sqrt{15 - 3x}$.

Bài tập 3.50. Giải phương trình $4x^2 - 24x + 36 = 3\sqrt{18 - 6x}$.

Bài tập 3.51. Giải phương trình $4x^2 - 16x + 25 = 3\sqrt{15 - 6x}$.

Bài toán 3.28. Giải phương trình sau

$$x^2 - 2x + 2 = 2\sqrt{1 - 2x}. \tag{3.110}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.110) là $x \in (-\infty; \frac{1}{2}]$.
Ta có phương trình (3.110) tương đương với phương trình sau

$$\frac{(x-1)^2 - 1}{-2} = -\sqrt{1 - 2x} + 1. \tag{3.111}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 - 1}{-2}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $(-\infty; \frac{1}{2}]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = 1 - x$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; \frac{1}{2}]$.
Nên hàm số $f(x) = \dfrac{(x-1)^2 - 1}{-2}$ luôn đồng biến trên $(-\infty; \frac{1}{2}]$.
Do đó hàm số

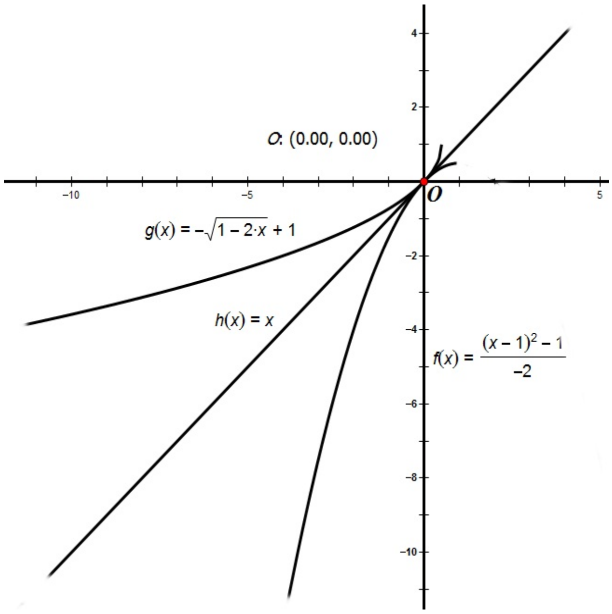
$$f(x) = \frac{(x-1)^2 - 1}{-2}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số $g(x) = -\sqrt{1 - 2x} + 1$ trên $(-\infty; \frac{1}{2}]$.
Điều này chứng tỏ phương trình (3.111) có hai vế là hai hàm số ngược nhau nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.111) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{(x-1)^2 - 1}{-2} = x, \quad x \in (-\infty; \frac{1}{2}]. \tag{3.112}$$

Ta có (3.112) tương đương với phương trình

$$x^2 - 2x = -2x. \tag{3.113}$$



Hình 3.20:

Giải phương trình (3.113) ta được nghiệm là $x = 0$.
So sánh với điều kiện $x \in (-\infty; \frac{1}{2}]$, phương trình (3.110) có nghiệm là $x = 0$.

Nhận xét 3.62. Hình (3.20) minh họa cho kết quả của phương trình (3.110).

Nhận xét 3.63. Từ phương trình (3.110) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.52. Giải phương trình $x^2 + 1 = 2\sqrt{2x - 1}$.

Bài tập 3.53. Giải phương trình $x^2 - 4x + 5 = 2\sqrt{3 - 2x}$.

Bài tập 3.54. Giải phương trình $4x^2 + 1 = 2\sqrt{4x - 1}$.

Bài toán 3.29. Giải phương trình sau

$$2x^2 - 4x + 3 = 3\sqrt{\frac{2 - 3x}{2}}. \tag{3.114}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.114) là $x \in (-\infty; \frac{2}{3}]$.
Ta có phương trình (3.114) tương đương với phương trình sau

$$\frac{2\,(x-1)^2 - 2}{-3} = -\sqrt{\frac{2 - 3x}{2}} + 1. \tag{3.115}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{2\,(x-1)^2 - 2}{-3}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $(-\infty; \frac{2}{3}]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = -\frac{4(x-1)}{3}$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; \frac{2}{3}]$.
Nên hàm số

$$f(x) = \frac{2(x-1)^2 - 2}{-3}$$

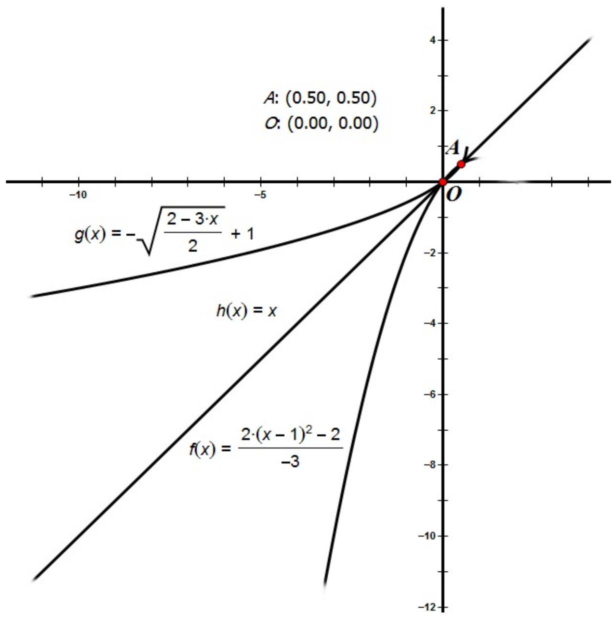
luôn đồng biến trên $(-\infty; \frac{2}{3}]$.
Do đó trên $(-\infty; \frac{2}{3}]$ hàm số

$$f(x) = \frac{2(x-1)^2 - 2}{-3}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = -\sqrt{\frac{2-3x}{2}} + 1.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.115) có hai vế là hai hàm số ngược nhau



Hình 3.21:

nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.115) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{2(x-1)^2 - 2}{-3} = x, \quad x \in (-\infty; \frac{2}{3}]. \tag{3.116}$$

Ta có (3.116) tương đương với phương trình

$$2x^2 - x = 0. \tag{3.117}$$

Giải phương trình (3.117) ta được nghiệm là $x = 0, x = \frac{1}{2}$.
Vậy phương trình (3.114) có tập nghiệm là $S = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$.

Nhận xét 3.64. Hình (3.21) minh họa cho kết quả của phương trình (3.114).

Nhận xét 3.65. Từ phương trình (3.114) ta có thể sáng tác được một số phương trình sau đây:

Bài tập 3.55. Giải phương trình $2x^2 + 1 = 3\sqrt{\frac{3x-1}{2}}$.

Bài tập 3.56. Giải phương trình $2x^2 - 8x + 9 = 3\sqrt{\frac{5-3x}{2}}$.

Bài tập 3.57. Giải phương trình $8x^2 - 8x + 3 = 3\sqrt{1-3x}$.

Bài toán 3.30. Giải phương trình sau

$$3x^2 - 12x + 18 = 5\sqrt{\frac{4-5x}{3}}. \tag{3.118}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.118) là $x \in (-\infty; \frac{4}{5}]$.
Ta có phương trình (3.118) tương đương với phương trình sau

$$\frac{3\,(x-2)^2 - 4}{-5} = -\sqrt{\frac{4-5x}{3}} + 2. \tag{3.119}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{3\,(x-2)^2 - 4}{-5}.$$

Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $(-\infty; \frac{4}{5}]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = -\frac{6(x-2)}{5}$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; \frac{4}{5}]$.
Nên hàm số

$$f(x) = \frac{3\,(x-2)^2 - 4}{-5}$$

luôn đồng biến trên $(-\infty; \frac{4}{5}]$.

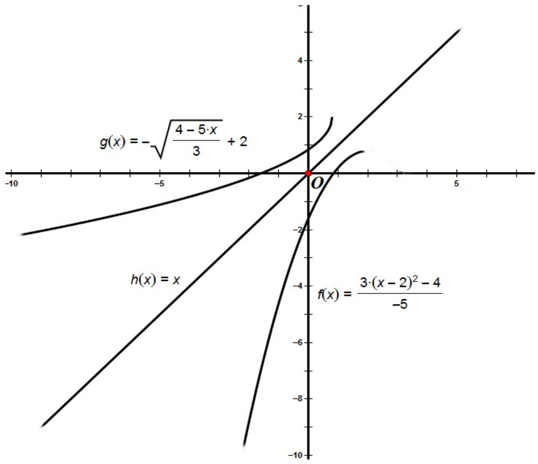
Do đó trên khoảng $(-\infty; \frac{4}{5}]$ hàm số

$$f(x) = \frac{3\,(x-2)^2 - 4}{-5}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số

$$g(x) = -\sqrt{\frac{4-5x}{3}} + 2.$$

Điều này chứng tỏ phương trình (3.119) có hai vế là hai hàm số ngược nhau



Hình 3.22:

nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.119) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{3\,(x-2)^2 - 4}{-5} = x, \quad x \in (-\infty; \frac{4}{5}]. \tag{3.120}$$

Ta có (3.120) tương đương với phương trình

$$3x^2 - 7x + 8 = 0. \tag{3.121}$$

Do phương trình (3.121) vô nghiệm nên phương trình (3.118) vô nghiệm.

Nhận xét 3.66. Hình (3.22) minh họa cho kết quả của phương trình (3.118).

Bài toán 3.31. Giải phương trình sau

$$x^2 - 4x + 6 = 3\sqrt{4-3x}. \tag{3.122}$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình (3.122) là $x \in (-\infty; \frac{4}{3}]$.
Ta có phương trình (3.122) tương đương với phương trình sau

$$\frac{(x-2)^2-4}{-3} = -\sqrt{4-3x}+2. \tag{3.123}$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{(x-2)^2-4}{-3}.$$

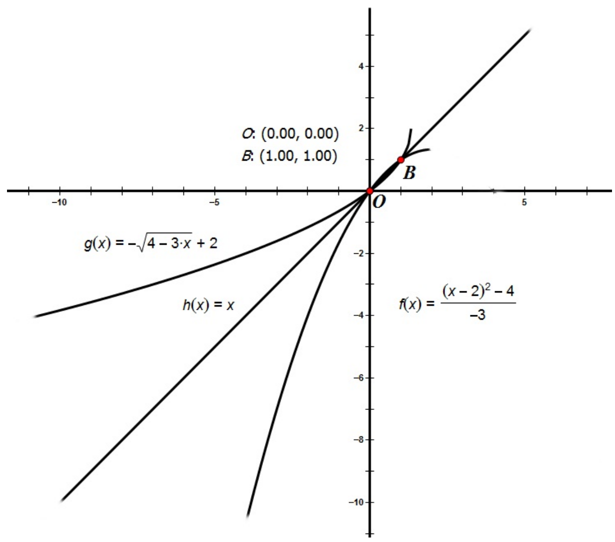
Hàm f có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên xác định trên $(-\infty; \frac{4}{3}]$.
Ta có đạo hàm của hàm f là $f'(x) = -\frac{2(x-2)}{3}$.
Dễ thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; \frac{4}{3}]$.
Nên hàm số

$$f(x) = \frac{(x-2)^2-4}{-3}$$

luôn đồng biến trên $(-\infty; \frac{4}{3}]$.
Do đó hàm số

$$f(x) = \frac{(x-2)^2-4}{-3}$$

luôn có hàm số ngược là hàm số $g(x) = -\sqrt{4-3x}+2$ trên $(-\infty; \frac{4}{3}]$.
Điều này chứng tỏ phương trình (3.123) có hai vế là hai hàm số ngược nhau



Hình 3.23:

nên theo Định lý 2.1 thì nghiệm của phương trình (3.123) cũng chính là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{(x-2)^2-4}{-3} = x, \quad x \in (-\infty; \frac{4}{3}]. \tag{3.124}$$

Ta có (3.124) tương đương với phương trình

$$x^2 - x = 0. \tag{3.125}$$

Giải phương trình (3.125) ta được nghiệm là $x = 0, x = 1$.
So sánh với điều kiện $x \in (-\infty; \frac{4}{3}]$, phương trình (3.122) có tập nghiệm là

$$S = \{0; 1\}.$$

Nhận xét 3.67. Hình (3.23) minh họa cho kết quả của phương trình (3.122).

Bài toán 3.32. Giải phương trình sau

$$\frac{2x^5 - 1}{3 - x^5} = \frac{1 - 3x^5}{x^5 + 2}. \tag{3.126}$$

Lời giải. Đặt $t = x^5$, khi đó từ phương trình (3.126) ta thu được phương trình sau

$$\frac{2t - 1}{3 - t} = \frac{1 - 3t}{t + 2}. \tag{3.127}$$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{2t - 1}{3 - t}$$

Hàm ft) có tập xác định là $D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$
Ta có $f'(t) = \frac{5}{(3 - t)^2}$, suy ra $f'(t) > 0$ với mọi $t \in D$
Do đó theo Định lý 1.4, hàm số $f(t)$ luôn có hàm số ngược là hàm số $g(t) = \frac{1 - 3t}{t + 2}$
Điều này chứng tỏ phương trình (3.127) có hai vế là hai hàm số ngược của nhau, nên nghiệm của phương trình (3.127) cũng là nghiệm của phương trình sau

$$\frac{2t - 1}{3 - t} = t. \tag{3.128}$$

Giải phương trình (3.128) ta được các nghiệm là $t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$
Vậy phương trình (3.126) có tập nghiệm là $S = \left\{ \sqrt[5]{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}; \sqrt[5]{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}} \right\}$.

Bài toán 3.33. Giải phương trình sau

$$x = 1 - 2013(1 - 2013x^2)^2. \tag{3.129}$$

Lời giải. Từ phương trình (3.129) ta thấy mọi $x > 1$ không thể là nghiệm của phương trình (3.129).

Do vậy để tìm nghiệm của phương trình (3.129) ta chỉ cần xét với $x \leq 1$.
Ta có (3.129) có thể viết lại tương đương với hai phương trình sau

$$\left[\begin{array}{l} 1 - 2013\mathrm{x}^2 = \sqrt{\dfrac{1-x}{2013}},\ \text{với điều kiện } x \in \left[-\sqrt{\dfrac{1}{2013}}; \sqrt{\dfrac{1}{2013}}\right] \\ 1 - 2013\mathrm{x}^2 = -\sqrt{\dfrac{1-x}{2013}},\ \text{với điều kiện } x \in \left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{1}{2013}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{1}{2013}}; 1\right] \end{array}\right.$$

- Xét trường hợp $x \in \left[-\sqrt{\dfrac{1}{2013}}; \sqrt{\dfrac{1}{2013}}\right]$, ta có phương trình (3.129) tương đường với phương trình sau

$$1 - 2013\mathrm{x}^2 = \sqrt{\frac{1-x}{2013}} \tag{3.130}$$

Dễ thấy rằng phương trình (3.130) có hai vế là hai hàm số ngược của nhau nên nghiệm của phương trình (3.130) cũng là nghiệm của phương trình sau

$$1 - 2013\mathrm{x}^2 = x \tag{3.131}$$

Giải phương trình (3.131) và so sánh với điều kiện đang xét ta được nghiệm là

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{8053}}{4026}$$

- Xét trường hợp $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{1}{2013}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{1}{2013}}; 1\right]$, ta có phương trình (3.129) tương đường với phương trình sau

$$1 - 2013\mathrm{x}^2 = -\sqrt{\frac{1-x}{2013}} \tag{3.132}$$

Dễ thấy rằng phương trình (3.130) có hai vế là hai hàm số ngược của nhau nên nghiệm của phương trình (3.130) cũng là nghiệm của phương trình sau

$$1 - 2013\mathrm{x}^2 = x \tag{3.133}$$

Giải phương trình (3.131) và so sánh với điều kiện đang xét ta được nghiệm là

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{8053}}{4026}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{\dfrac{-1 + \sqrt{8053}}{4026}; \dfrac{-1 - \sqrt{8053}}{4026}\right\}$

Kết luận

Sau thời gian học tập tại Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà nội, được các thầy cô giảng dạy và đặc biệt là được sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Nguyễn Minh Tuấn, tôi đã hoàn thành luận văn với đề tài **"Phương pháp hàm số ngược để xây dựng và phát triển phương trình đại số"**. Luận văn đã đạt được một số kết quả:

1. Luận văn đã khai thức được ứng dụng về tính chất của hàm số ngược vào xây dựng và giải các phương trình đại số trong chương trình toán phổ thông khá hiệu quả và cho lời giải đẹp, tạo được niềm đam mê tìm tòi và sáng tạo trong học tập toán của học sinh.

2. Luận văn đã hệ thống hóa và phân dạng được các dạng tổng quát của phương trình đại số mà giải được bằng phương pháp hàm số ngược, đồng thời đã đưa ra được 33 bài toán minh họa cho mỗi dạng toán tổng quát, cũng từ đó giới thiệu 57 bài tập mới giúp ta có cái nhìn toàn diện hơn về phương pháp hàm số ngược, trong đó đã có những bài toán có mặt trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi Toán và thi tuyển sinh vào Đại học cao đẳng, một số bài toán đã xuất hiện trong tạp chí Toán học tuổi trẻ. Vì vậy bản luận văn này có thể làm tài liệu tham khảo cho mọi đối tượng học sinh bậc trung học phổ thông.

3. Luận văn đã thể hiện được hướng nghiên cứu tìm tòi và sáng tạo phương pháp mới để giải toán phổ thông.

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Hồng Đức, Lê Bích Ngọc, Lê Hữu Trí (2010), *Phương pháp giải toán Đại số*, NXB ĐHQG Hà Nội.

[2] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Đỗ Mạnh Hùng, Nguyễn Tiến Tài (2006), *Đại số 10*, NXB Giáo Dục.

[3] Hoàng Kỳ (2002),*Căn số và Toán vô tỷ*, NXB Giáo Dục.

[4] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Tiến (2010), *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[5] Trần Phương (2008), *Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn toán - Hàm số*, NXB Hà Nội.

[6] Đoàn Quỳnh, Doãn Minh Cường, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng (2012), *Tài liệu chuyên toán Bài tập Đại số 10*, NXB Giáo Dục Việt Nam.

[7] Đoàn Quỳnh, Doãn Minh Cường, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng (2012), *Tài liệu chuyên toán Đại số 10*, NXB Giáo Dục Việt Nam.

[8] Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, Cấn Văn Tuất (2008), *Giải tích 12*, NXB Giáo Dục.

[9] Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Trần Văn Hạo, Đỗ Mạnh Hùng, Phạm Phu, Nguyễn Tiến Tài (2006), *Bài tập Đại số 10*, NXB Giáo Dục.

[10] Ban tổ chức kỳ thi (2012), *Tổng tập Đề thi Olympic 30 tháng 4 - Toán học 10*, NXB Đại học Sư phạm.

[11] Ban tổ chức kỳ thi (2012), *Tổng tập Đề thi Olympic 30 tháng 4 - Toán học 11*, NXB Đại học Sư phạm.

[12] Tạp chí toán học tuổi trẻ, NXB Giáo Dục Việt Nam.

[13] Tài liệu từ Internet.