ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TIỂU LUẬN CUỐI KỲ

Học phần: Lý thuyết điều khiển hệ thống

Sinh viên: Trần Xuân Bách, Nguyễn Ngọc Hải, Nguyễn Trung Đức - K64 Tài năng Toán

Tính điều khiển được của hệ suy biến

Sinh viên: Nguyễn Ngọc Hải, Trần Xuân Bách, Nguyễn Trung Đức*
Giảng viên: Hà Phi†

Mô tả. Trong lý thuyết điều khiển hệ thống, tính điều khiển được là một trong những khái niệm quan trọng và có ý nghĩa bậc nhất. Trong báo cáo này, chúng ta tìm hiểu về tính chất điều khiển được của hệ suy biến (singular systems), thông qua việc định nghĩa và phân loại tính điều khiển được (Chương 1 và 2). Sau đó, ta đi tìm hiểu về tính L-điều khiển được một phần (L-partially controllable) đối với hệ thống điều khiển (control system) và hệ thống điều khiển suy biến (hệ mô tả/descriptor systems) (Chương 3 và 4). Báo cáo có sử dụng một số kết quả đã được chứng minh từ các phần trước của cuốn sách, được đề cập lại tại Chương 5.

1 Trạng thái tiếp cận được

Xét hệ thống mô tả thông thường:

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.1}$$ {redes}

trong đó $x \in R^n$ và $u \in R^r$ lần lượt là vectơ trạng thái và vectơ điều khiển đầu vào, với $E, A \in R^{n\times n}$; $B \in R^{n\times r}$ là các ma trận không đổi. Bậc động lực học của hệ là $n_0 = rank(E) \leq n$. Theo phân tích tiêu chuẩn của hệ mô tả tuyến tính, tồn tại hai ma trận khả nghịch Q và P sao cho dưới phép biến đổi (P,Q), hệ thống (1.1) được chuyển thành dạng phân tích tiêu chuẩn tương đương sau:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = & A_1x_1 + B_1u \\ N\dot{x_2} = & x_2 + B_2u \end{cases} \tag{1.2}$$ {relides}

trong đó $x_1 \in R^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}, n_1 + n_2 = n$. Ma trận $N \in R^{n_2\times n_2}$ lũy linh, với cấp là h. Mối quan hệ giữa các trạng thái và các hệ số của hai hệ thống tương đương được cho bởi:

$$P^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{QEP} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \text{QAP} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{QB} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

1.1 Định nghĩa

Để đơn giản, trong phần này chúng ta thảo luận về hệ thống tuyến tính bộ điều khiển ở dạng phân rã chuẩn (1.2).

Định nghĩa 1.1 Cho hệ thống mô tả tuyến tính thông thường (1.2), vectơ $w \in R^n$ được gọi là vectơ đạt được của hệ thống (1.2), nếu tồn tại điều kiện ban đầu $x_1(0) = x_{10}$, đầu vào điều khiển chấp nhận được $u(t) \in C_p^{h-1}$ và một số $t_1 > 0$ sao cho phản hồi của hệ thống (1.2) thỏa

*Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội
†Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

mãn:

$$x(t_1, u, x_{10}) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = w$$

Đặt:

$$\mathscr{R}_t[x_{10}] = \left\{ w \mid \exists u(t) \in C_p^{h-1} \text{ s.t } x(t, u, x_{10}) = w \in R^n \right\}$$

thì tập $\mathscr{R}_t[x_{10}]$ là tập trạng thái có thể đạt được tại thời điểm t từ điều kiện ban đầu $x_1(0) = x_{10}$. Khi đó hệ phản hồi của (1.2) cho bởi:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{A_1 t} x_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \\ x_2(t) = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \end{cases} \qquad (\text{ t} > 0)$$

Từ đó ta có :

$$\mathscr{R}_t[x_{10}] = \left\{ x | x = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} x_{10} + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \\ -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \end{bmatrix}, u(t) \in C_p^{h-1} \right\} \tag{1.3}$$

và

$$\mathscr{R}_t[0] = \left\{ x | x = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \\ -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \end{bmatrix}, u(t) \in C_p^{h-1} \right\} \tag{1.4}$$

Ngoài ra, nếu ta đặt:

$$\mathscr{R}_t = \cup_{x_{10} \in R^{n_1}} \mathscr{R}_t[x_{10}] \tag{1.5}$$

và:

$$\mathscr{H}_t = \{x | x = x_I(t, x_{10}), x_{10} \in R^{n_1}\} \tag{1.6}$$

với:

$$x_I(t, x_{10}) = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

thì R_t là trạng thái có thể đạt được đặt tại thời điểm t của hệ thống (1.2) với mọi điều kiện ban đầu có thể có $x_1(0) = x_{10} \in R^{n_1}$, và $\mathscr{H}_t$ là tập hợp các trạng thái có thể đạt được tự do tại thời điểm t xuất phát từ mọi điều kiện ban đầu có thể x_{10}. Hơn nữa với $\oplus$ là kí hiệu tổng trực tiếp trong không gian vectơ, ta có các dữ kiện cơ bản sau.

Proposition 1.1. *Cho hệ thống mô tả tuyến tính (1.2). Khi đó với $t > 0$ bất kỳ thì:*
1. $\mathscr{R}_t[0]$ là không gian vecto trong R^n.
2. $\mathscr{R}_t[x_{10}] = \mathscr{R}_t[0] + x_I(t, x_{10})$ là đa tạp trong R^n.
3. $\mathscr{H}_t = R^{n_1} \oplus \{0_{n_2}\}$.
4. $\mathscr{R}_t = \mathscr{R}_t[0] + \mathscr{H}_t$ là không gian con trong R^n.

Chứng minh. . Do cả $\int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau, -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t)$ đều là các toán tử tuyến tính của $u(t)$ nên kết quả đầu tiên dễ chứng minh. Kết quả thứ hai dựa vào định nghĩa của $\mathscr{R}_t[x_{10}], \mathscr{R}_t[0]$. Nhớ lại rằng $e^{A_1 t}$ là ma trận không suy biến, ta có:

$$\{x | x = e^{A_1 t} x_{10}, x_{10} \in R^{n_1}\} = R^{n_1}$$

Dựa vào kết quả trên và định nghĩa $\mathscr{H}_t$ thì kết luận 3 và 4 được chứng minh. □

Mệnh đề trên cung cấp cho chúng ta một số thông tin chi tiết sâu sắc về các tập có thể truy cập $\mathscr{R}_t[0], \mathscr{R}_t[x_{10}], \mathscr{H}_t, \mathscr{R}_t$. Một hiện tượng trực tiếp có thể được nhìn thấy từ mệnh đề trên là thay vì lấp đầy toàn bộ không gian như trong trường hợp hệ thống thông thường, phản ứng trạng thái cho một hệ thống mô tả tuyến tính nằm trên một đa tạp trong không gian. Đây là một tính năng đặc biệt mà hệ thống mô tả tuyến tính sở hữu.

1.2 Tính chất của $\mathscr{R}_t[0], \mathscr{R}_t$

Nhắc lại kiến thức: Với cặp ma trận (A,B) với $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}$ thì ma trận điều khiển được cho bởi :

$$Q_c[A,B] = \begin{bmatrix} B & AB & ... & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Theorem 1.2. *Gọi $\mathscr{R}_t[0]$ là không gian con có thể tiếp cận trạng thái của hệ thống tuyến tính bộ điều khiển thông thường (1.2) tại thời điểm t. Sau đó:*

$$\mathscr{R}_t[0] = Image\ Q_c[A_1, B_1] \oplus Image\ Q_c[N, B_2], \forall t > 0 \tag{1.9}$$

Để đi đến chứng minh, ta cần các bổ đề để sau:

Lemma 1.3. *Cho $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}$. Khi đó ta có:*
1. $ker\ Q_c^T[A,B] = \cap_{i=0}^{n-1} ker\ (B^T(A^T)^i)$.
2. $\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau \in Image\ Q_c[A,B], \forall u(\tau) \in R^r$.
3. $x \in ker\ (B^T(A^T)^i), t_1 < t < t_2 \Leftrightarrow x \in \cap_{i=0}^{n-1} ker\ (B^T(A^T)^i)$.

Chứng minh. . Kết luận đầu tiên có thể dễ dàng suy ra từ định nghĩa $Q_c[A,B]$ và không gian hạt nhân của nó. Theo định lý Cayley-Hamilton tồn tại $\beta_i(t), i = 0, 1.., n-1.$ sao cho:

$$e^{At} = \beta_0(t)I + \beta_1(t)A + ... + \beta_{n-1}(t)A^{n-1} \tag{1.10}$$ {caley}

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{A(t-\tau)}B(u(\tau))d\tau &= \sum_{i=0}^{n-1} A^iB \int_0^t \beta_i(t-\tau)u(\tau) \\ &= Q_c[A,B]z \end{aligned}$$

với

$$z^T = \int_0^t [\beta_0(t-\tau)u^T(\tau) \quad \beta_1(t-\tau)u^T(\tau)\ ....\beta_{n-1}(t-\tau)u^T(\tau)]$$

Do đó kết luận thứ hai được chứng minh.
Tiếp tục sử dụng kết quả (1.10) ta có:

$$B^Te^{At} = \beta_0(t)B^T + \beta_1(t)B^TA + ... + \beta_{n-1}(t)B^TA^{n-1}$$

Vậy nên, $x \in ker(B^Te^{A^Tt}), t_1 < t < t_2$ tương đương với

$$[\beta_0(t)B^T + \beta_1(t)B^TA + ... + \beta_{n-1}(t)B^TA^{n-1}]x = 0, t_1 < t < t_2$$

Hơn nữa, do t bất kì, quan hệ trên đúng nếu và chỉ nếu:

$$B^T(A^T)^ix = 0, \quad i = 0, 1, .., n-1$$

Điều này rõ ràng tương đương

$$x \in \cap_{i=0}^{n-1} ker(B^T(A^T)^i)$$

Vậy, kết luận thứ 3 được chứng minh □

Lemma 1.4. *Cho $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}$. Định nghĩa:*

$$W(f,t) = \int_0^t f(\tau)e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}f(\tau)d\tau$$

thì Image $W(f,t)$ = Image $Q_c[A;B]$ $\quad \forall t > 0$

Chứng minh. . Theo định nghĩa của $Q_c[A,B]$ và kết luận đầu tiên trong bổ đề trước, ta có thể chứng minh kết quả tương đương sau:

$$\ker W(f,t) = \cap_{i=0}^{n-1} \ker\, (B^T(A^T)^i)$$

Khi $x \in \ker W(f,t)$ ta có:

$$x^TW(f,t)x = x^T0 = 0$$

nói cách khác

$$x^TW(f,t)x = \int_0^t x^Tf(\tau)e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}f(\tau)xd\tau \tag{1.11}$$

$$= \int_0^t \left\| B^Te^{A^T\tau}f(\tau)x \right\|_2^2 d\tau \tag{1.12}$$

$$= 0 \tag{1.13}$$

Do $$\left\| B^Te^{A^T\tau}f(\tau)x \right\|_2^2 \geq 0, 0 \leq \tau \leq t$$,

và $f(\tau)$ là hàm liên tục nên

$$B^Te^{A^T\tau}f(\tau)x = 0, 0 \leq \tau \leq t \tag{1.14}$$

Do đa thức $f(\tau)$ khác 0 nên nó chỉ có hữu hạn không điểm trên $0 \leq \tau \leq t$. Do đó phương trình trên tương đương với:

$$B^Te^{A^T\tau}x = 0, 0 \leq \tau \leq t$$

Áp dụng kết luận thứ ba của bổ đề đầu tiên sẽ thu được thêm

$$x \in \cap_{i=0}^{n-1} ker(B^T(A^T)^i)$$

Do đó

$$kerW(f,t) \subset \cap_{i=0}^{n-1} ker(B^T(A^T)^i)$$

Nếu

$$x \in \cap_{i=0}^{n-1} ker(B^T(A^T)^i),$$

Đảo ngược quá trình trên sẽ được $x \in kerW(t,f)$, có nghĩa là

$$\cap_{i=0}^{n-1} ker(B^T(A^T)^i) \subset kerW(f,t)$$

Do đó bổ đề được chứng minh. □

Lemma 1.5. *Với h vector $x_i \in R^n, i = 0,1,2,...,h-1$ và $t > 0$ bất kỳ, luôn tồn tại đa thức vector $f(x) \in R^n$ bậc $h-1$ thỏa mãn:*

$$f^{(i)}(t_1) = x_i, i = 0,1,..,h-1 \tag{1.15}$$

Chứng minh. . Đặt

$$f(t) = x_0 + x_1(t - t_1) + ... + \frac{1}{(h-1)!} x_{h-1}(t - t_1)^{h-1}$$

Khi đó $f(t)$ là đa thức thỏa mãn đầu bài. $\square$

Ta quay trở lại chứng minh định lý 1.2.

Chứng minh. . Khi $x_1(0) = 0$, phản hồi của hệ (1.2) là

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \\ x_2(t) = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \end{cases} \qquad (\text{ t} > 0)$$

Từ hệ trên, ta dễ thấy $x_2 \in \text{Image } Q_c[N, B_2]$. Hơn nữa, theo chứng minh ngay trên ở bổ đề thứ 3, $x_1 \in \text{Image } Q_c[A_1, B_1]$. Vì vậy:

$$x(t) \in \text{Image } Q_c[A_1, B_1] \oplus \text{Image } Q_c[N, B_2]$$

Theo công thức của $\mathscr{R}_t[0]$ thì điều này tương đương

$$\mathscr{R}_t[0] \subset \text{Image } Q_c[A_1, B_1] \oplus \text{Image } Q_c[N, B_2] \tag{1.16}$$

Mặt khác, đặt

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \text{Image } Q_c[A_1, B_1] \oplus \text{Image } Q_c[N, B_2],$$

với $x_2 \in \text{Image } Q_c[N, B_2], x_1 \in \text{Image } Q_c[A_1, B_1]$.
Do $x_2 \in \text{Image } Q_c[N, B_2]$ nên tồn tại $x_{2i} \in R^r, r = 0, 1, .., h-1$ sao cho :

$$x_2 = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 x_{2i}$$

Dựa theo bổ đề trên, khi ta cố định t > 0, tồn tại một đa thức $f_2(\tau)$ bậc $h-1$ sao cho $f_2^{(i)}(t) = x_{2i}$. Do đó:

$$x_2 = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 f_2^{(i)}(t)$$

Nếu chúng ta đặt đầu vào cho hệ (1.2): $u(t) = u_1(t) + f_2(t)$ thì với $t > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \\ &= -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u_1^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 f_2^{(i)}(t) \\ &= x_2 - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u_1^{(i)}(t) \end{aligned}$$

và

$$x_1(t, u, 0) = \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 f_2(\tau) d\tau \tag{1.17}$$

Do $x_1 \in \text{Image } Q_c[A_1, B_1]$, kết hợp với kết luận thứ hai của bổ đề thứ (1) ta được:

$$\int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 f_2(\tau) d\tau \in \text{Image } Q_c[A_1, B_1]$$

Ta có:

$$\tilde{x_1} = x_1 - \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 f_2(\tau) d\tau \in \text{Image } Q_c[A_1, B_1] \tag{1.18}$$

Xét t > 0 cố định, đặt $f_1(\tau) = \tau^h(\tau - t)^h$. Khi đó $f_1(\tau)$ không đồng nhất bằng 0, và bổ đề thứ (2) chỉ ra tồn tại vecto $z \in R^{n_1}$(có thể chọn được) sao cho

$$W(f_1, t)z = \tilde{x_1} \tag{1.19}$$

Với vecto z chọn được ở trên, ta xây dựng

$$u_1(\tau) = f_1(\tau)^2 B_1^T e^{A_1^T(t-\tau)} z, 0 \leq \tau \leq t \tag{1.20}$$

Ta có thể chỉ ra rằng:

$$u_1^{(i)}(t) = 0, i = 0, 1, .., h-1 \tag{1.21}$$

Do đó $x_2(t) = x_2$. Hơn nữa

$$\begin{aligned}
x_1(t, u, 0) &= \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 f_2(\tau) d\tau \\
&= x_1 - x_1 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 f_2(\tau) d\tau \\
&= x_1 - \tilde{x_1} + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau \\
&= x_1 - \tilde{x_1} + W(f_1, t)z \\
&= x_1
\end{aligned}$$

Do đó

$$\mathscr{R}_t[0] \supset \text{Image } Q_c[A_1, B_1] \oplus \text{Image } Q_c[N, B_2] \tag{1.22}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh
Quá trình chứng minh ở trên cũng cho thấy rằng, với một điều khiển $u(t)$ được chọn phù hợp , ta có thể nhận được vector đạt được trong bất kỳ khoảng thời gian ngắn nào. □

Corollary 1.6. *Đặt*

$$\mathscr{R}_t^s[0] = \{x | x = \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau, u(t) \in C_p^{h-1}\}$$

và

$$\mathscr{R}_t^f[0] = \{x | x = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t), u(t) \in C_p^{h-1}\}$$

thì
1. $\mathscr{R}_t^s[0] = \textit{Image } Q_c[A_1, B_1], \mathscr{R}_t^f[0] = \textit{Image } Q_c[N, B_2]$
2. $\mathscr{R}_t = R^{n_1} \oplus \textit{Image } Q_c[N, B_2]$

Chứng minh. . Kết luận đầu tiên được đưa ra ngay sau Định lý 1.2 và các định nghĩa của $\mathscr{R}_t^f[0], \mathscr{R}_t^s[0], \mathscr{R}_t[0]$.

Từ kết luận thứ ba và thứ tư của Mệnh đề 1.1

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_t &= \mathscr{H}_t + \mathscr{R}_t[0] \\
&= (R^{n_1} \oplus \{0_{n_2}\}) + \mathscr{R}_t[0] \\
&= (R^{n_1} \oplus \{0_{n_2}\}) + (\mathscr{R}_t^f[0] \oplus \mathscr{R}_t^s[0]) \\
&= (R^{n_1} + \mathscr{R}_t^s[0]) \oplus (\{0_{n_2}\} + \mathscr{R}_t^f[0]) \\
&= (R^{n_1} + \mathscr{R}_t^s[0]) \oplus \mathscr{R}_t^f[0]
\end{aligned}$$

Do $R^{n_1} + \mathscr{R}_t^s[0] = R^{n_1}, \mathscr{R}_t^f[0] = \text{Image } Q_c[N, B_2]$ nên kết luận thứ 2 được chứng minh.

□

1.3 Ví dụ

Example 1.7. Xét hệ :

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} u(t) \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_2 = x_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_2
\end{cases} \tag{1.23}$$

Đối với hệ thống này,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \\
N &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ta có thể dễ dàng tính toán:

$$\text{Image } Q_c[A_1, B_1] = \text{Image } [B_1 \ A_1 B_1] = R^2$$

và:

$$\text{Image } Q_c[N, B_2] = \text{Image } [B_2 \ N B_2] = R^2$$

Do đó:

$$\mathscr{R}_t[0] = \text{Image } Q_c[A_1, B_1] \oplus \text{Image } Q_c[N, B_2] = R^4$$

$$\mathscr{R}_t = R^2 \oplus \text{Image } Q_c[N, B_2] = R^4$$

Trong ví dụ này $\mathscr{R}_t = \mathscr{R}_t[0]$, nói cách khác tập đạt được cho hệ này trùng với tập đạt được với trường hợp không điều kiện ban đầu.

Example 1.8. Xét hệ sau đây:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Đối với hệ thống này, chỉ bao gồm một hệ thống nhanh, rõ ràng ta có thể thấy

$$\mathscr{R}_t = \mathscr{R}_t[0] = \text{Image } Q_c[N, B_2] = R^3$$

Do vậy cả $\mathscr{R}_t, \mathscr{R}_t[0]$ là cả không gian vecto. Như vậy, cho tùy ý $w \in R^3$, thời gian t_1 và điều khiển chấp nhận được u(t) có thể tìm được sao cho $u(t_1) = 0$.
Phản hồi trạng thái của hệ được cho bởi:

$$x(t) = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} -u(t) + \dot{u}(t) - \ddot{u}(t) \\ u(t) - \dot{u}(t) \\ -u(t) \end{bmatrix}, t > 0.$$

Do vậy, với mỗi $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in R^3, t_1 > 0,$
đẳng thức $x(t_1) = w$ dẫn tới:

$$u(t_1) = -w_3, \dot{u}(t_1) = -w_3 - w_2, \ddot{u}(t_1) = -w_2 - w_1 \tag{1.24}$$

Do đó theo luật điều khiển ta có thể xây dựng được:

$$u(t) = (-w_2 - w_1)(t - t_1)^2 + (-w_3 - w_2)(t - t_1) - w_3$$

có thể đưa trạng thái của hệ tới w tại thời điểm $t = t_1$. Tuy nhiên khi $w_1 + w_2, w_2 + w_3$ quá lớn, theo phương trình gần cuối dẫn đến tỷ lệ biến thiên và gia tốc của điều khiển luật tại t_1 rất lớn. Trong trường hợp này, điều khiển luật $u(t)$ sẽ tăng hoặc giảm đột ngột tại t_1 và có thể dẫn tới việc khó có thể nhận ra trong thực tế.

2 Tính điều khiển được

Trong chương nàu, ta xét tính điều khiển được của hệ mô tả tuyến tính. Khác với trường hợp hệ chuẩn tắc, đối với hệ tuyến tính, có 4 loại điều khiển được, bao gồm, C-điều khiển được, R-điều khiển được, I-điều khiển được và S-điều khiển được.
Như trong trường hợp hệ chuẩn tắc, cả 4 loại điều khiển được được mô tả thông qua vết của hệ. Bởi vì vết của 2 hệ hạn chế tương đương được liên kết với nhau bởi một ánh xạ đồng nhất không suy biến, tất cả bốn loại điều khiển này là không đổi qua các hệ hạn chế tương đương. Chú ý rằng mọi hệ mô tả thông thường là hạn chế tương đương với một phân tích tiêu chuẩn của (1.2), không mất tổng quát, trong chương này ta sẽ chủ yếu tập trung tìm hiểu hệ điều khiển tuyến tính có dạng (1.2) với các hệ con nhanh và chậm:

$$\dot{x_1} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \tag{2.1}$$ {slow}

$$N\dot{x_2} = x_2 + B_2 u_2 \tag{2.2}$$ {fast}

Trong chương này, ta phân loại tính điều khiển được của hệ điều khiển tuyến tính (1.2), và trình bày quan hệ của chúng với các hệ con nhanh và chậm (2.1) và (2.2).

2.1 C-điều khiển được

Đầu tiên ta tìm hiểu về tính điều khiển được hoàn toàn.

Definition 2.1. Hệ (1.2) được gọi điều khiển được hoàn toàn (hay C-điều khiển được) nếu, với mọi $t_1 > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$ và $w \in \mathbb{R}^n$, tồn tại một đầu vào điều khiển $u(t) \in \mathbb{C}_p^{h-1}$ sao cho phản hồi của hệ (1.2) bắt đầu từ $x(0) = x_0$ thỏa mãn $x(t_1, u, x_0) = w$.

Định nghĩa này nói rằng với giả thiết hệ là C-điều khiển được, từ bất kì điều kiện đầu $x(0) = x_0$, ta luôn tìm được một đầu vào điều khiển sao cho phản hồi trạng thái của hệ đạt được từ $x(0)$ tới bất kì vị trí nào trong $\mathbb{R}^n$ trong một thời gian cho trước. Dễ thấy định nghĩa trên là một mở rộng tự nhiên từ tính điều khiển được của hệ tuyến tính thông thường.
Cho $A \in \mathbb{R}^{nxn}, B \in \mathbb{R}^{nxr}$. Như trong trường hợp hệ thông thường, ta định nghĩa cặp ma trận điều khiển được (A, B) là

$$Q_c[A, B] = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B].$$

Đối với cặp ma trận (N, B_2), bởi vì

$$[B_2 \quad NB_2 \quad \dots \quad N^{n_2-1}B_2] = [B_2 \quad NB_2 \quad \dots \quad N^{h-1}B_2 \quad 0]$$

ta viết

$$Q_c[N, B_2] = [B_2 \quad NB_2 \quad \dots \quad N^{h-1}B_2]$$

Từ định nghĩa và một số lưu ý trên, ta có thể chứng minh bổ đề sau.

Lemma 2.2. *Hệ mô tả tuyến tính (1.2) là C-điều khiển được khi và chỉ khi*

$$\mathscr{R}_t[0] = \mathbb{R}^n, \forall t > 0 \tag{2.3}$$ {Ccond1}

hay tương đương,

$$Image\ Q_c\,[A_1, B_1] = \mathbb{R}^{n_1},\ Image\ Q_c\,[N, B_2] = \mathbb{R}^{n_2} \tag{2.4}$$ {Ccond2}

Chứng minh. . Từ định nghĩa ta có thể trực tiếp suy ra hệ (1.2) là C-điều khiển được khi và chỉ khi

$$\mathscr{R}_t\,[x_{10}] = \mathbb{R}^n, \forall x_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}, t > 0 \tag{2.5}$$ {Ccond3}

Hơn nữa, để ý rằng từ kết luận thứ 2 của Mệnh đề 1.1, ta có thể thấy điều kiện (2.3) tương đương với điều kiện (2.5)
Từ Định lý 1.2, ta có

$$\mathscr{R}_t[0] = \mathrm{Image}\, Q_c\,[A_1, B_1] \oplus \mathrm{Image}\, Q_c\,[N, B_2] = \mathbb{R}^n, \forall t > 0$$

□

Liên quan đến tính điều khiển được hoàn toàn của hệ (1.2) cũng như các hệ con nhanh và chậm (2.1) và (2.2) của nó, ta có định lý sau

Theorem 2.3. *Xét hệ điều khiển tuyến tính (1.2) cùng hệ con chậm (2.1) và hệ con nhanh (2.2).*
1. Hệ con chậm (2.1) là C-điều khiển được khi và chỉ khi

$$\mathrm{rank}\, Q_c\,[A_1, B_1] = n_1, \tag{2.6}$$ {lowcond1}

hay tương đương

$$\mathrm{rank}\,[sI - A_1 \quad B_1] = n_1, \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ hữu hạn} \tag{2.7}$$ {lowcond2}

2. Hệ con nhanh (2.2) là C-điều khiển được khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank} Q_c\,[N, B_2] = n_2, \tag{2.8}$$ {fastcond1}

hay tương đương

$$\operatorname{rank}\,[N \quad B_2] = n_1. \tag{2.9}$$ {fastcond2}

3. Hệ (1.2) là C-điều khiển được khi và chỉ khi các hệ con nhanh và chậm (2.1) và (2.2) của nó đều là C-điều khiển được

Chứng minh. . Chứng minh (1): Hệ con chậm (2.1) là một hệ chuẩn tắc, ở đó định nghĩa 2.1 trở thành định nghĩa tính điều khiển được cho hệ tuyến tính chuẩn tắc. Vì vậy, kết luận có thể suy ra trực tiếp từ điều kiện cần và đủ cho tính điều khiển được của hệ chuẩn tắc tuyến tính tiêu chuẩn.
Chứng minh (2): Theo bổ đề 2.2, hệ con nhanh (2.2) là C-điều khiển được khi và chỉ khi

$$\operatorname{Image} Q_c\,[N, B_2] = \mathbb{R}^{n_2}, \tag{2.10}$$

hay tương đương với việc điều kiện (2.8) thỏa mãn, dẫn tới cặp ma trận (N, B_2) là điều khiển được. Từ tiêu chuẩn PBH cho tính điều khiển được của hệ chuẩn tắc tuyến tính tiêu chuẩn, điều kiện (2.8) tương đương với

$$\operatorname{rank}\,[sI - N \quad B_2] = n_2, \forall s \in \sigma(N) \tag{2.11}$$ {fastcond3}

Vì N lũy linh nên $\sigma(N) = \{0\}$. Phương trình (2.11) đúng khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank}\,[-N \quad B_2] = \operatorname{rank}\,[N \quad B_2] = n_2.$$

Điều này tương đương với điều kiện (2.9).
Chứng minh (3): Theo bổ đề 2.2 cùng với (1) và (2) vừa chứng minh, ta có:

$$\begin{aligned}
&\text{Hệ (1.2) là C-điều khiển được}\\
\iff\ & \operatorname{Image} Q_c\,[A_1, B_1] = \mathbb{R}^{n_1},\ \operatorname{Image} Q_c\,[N, B_2] = \mathbb{R}^{n_2}\\
\iff\ & \operatorname{rank} Q_c\,[A_1, B_1] = n_1, \operatorname{rank} Q_c\,[N, B_2] = n_2,\\
\iff\ & \text{cả hệ con nhanh và chậm đều là C-điều khiển được}
\end{aligned}$$

□

Example 2.4 (Dai 1989b).

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
0 = x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_1
\end{cases} \tag{2.12}$$

là một dạng phân tích chuẩn tắc cho hệ hệ thống mạch điện. Tính toán trực tiếp ta có:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 \end{bmatrix} &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \\
\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_2 & NB_2 \end{bmatrix} &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Từ định lý 2.3, ta thấy rằng hệ trên không là C-điều khiển được, trong khi hệ con chậm của nó lại là C-điều khiển được

Remark 2.5. Vì tính C-điều khiển được của một hệ tuyến tính chuẩn tắc là tương tự với tính điều khiển được với tính điều khiển được định nghĩa trong lý thuyết cho các hệ chuẩn tắc, trong các phần tiếp theo ta sẽ gọi một hệ tuyến tính chuẩn tắc là điều khiển được nếu nó là C-điều khiển được.

2.2 R-điều khiển được

Dựa trên tính đạt được của không gian con $\mathscr{R}_t$ được định nghĩa trong chương trước, tính R-điều khiển được (R-controllability) của hệ mô tả tuyến tính (1.2) có thể được định nghĩa như sau

Definition 2.6. Hệ mô tả tuyến tính (1.2) được gọi là R-điều khiển được, nếu nó điều khiển được trong một không gian con đạt được $\mathscr{R}_t$, hay rõ ràng hơn, với mọi $t_1 > 0, x_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}$ và $w \in \mathscr{R}_{t_1}$, luôn tồn tại một đầu vào điều khiển chấp nhận được $u(t) \in \mathbb{C}_p^{h-1}$ sao cho phản hồi của hệ (1.2) bắt đầu từ $x_1(0) = x_{10}$ thỏa mãn $x(t_1, u, x_0) = w$.

Tính R-điều khiển được đảm bảo tính điều khiển được cho hệ thống từ bất kì điều kiện ban đầu $x_1(0)$ (miễn là nó chấp nhận được) tới mọi trạng thái có thể đạt được và quá trình này có thể kết thúc trong một khoảng thời gian cho trước nếu đầu vào điều khiển $u(t)$ được chọn hợp lý.
Ta có bổ đề được suy ra trực tiếp từ định nghĩa

Lemma 2.7. *Hệ mô tả tuyến tính (1.2) là R-điều khiển được khi và chỉ khi*

$$\mathscr{R}_t[0] = \mathscr{R}_t, \forall t > 0 \tag{2.14}$$ {Rcond1}

hay tương đương,

$$Image\ Q_c\,[A_1, B_1] = \mathbb{R}^{n_1} \tag{2.15}$$ {Rcond2}

Chứng minh. . Từ định nghĩa ta có thể trực tiếp suy ra hệ (1.2) là R-điều khiển được khi và chỉ khi

$$\mathscr{R}_t\,[x_{10}] = \mathscr{R}_t, \quad \forall\ x_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}, t > 0 \tag{2.16}$$ {Rcond3}

Như vậy, đủ để thấy sự tương đương giữa (2.14) và (2.16). Rõ ràng, (2.16) suy ra được (2.14). Ở chiều ngược lại, giả sử (2.14) thỏa mãn. Từ kết quả thứ hai của mệnh đề 1.1, ta có:

$$\mathscr{R}_t\,[x_{10}] = \mathscr{R}_t[0] + x_I\,(t, x_{10}) = \mathscr{R}_t + x_I\,(t, x_{10})\,, \forall x_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}, t > 0 \tag{2.17}$$

Hơn nữa, do $x_I\,(t, x_{10}) \in \mathcal{R}_t$, quan hệ trên dẫn tới (2.16).
Từ hệ quả (4.1), ta có:

$$\mathscr{R}_t = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \text{ Image } Q_c\,[N, B_2]$$

Mặt khác, theo định lý (4.1)

$$\mathscr{R}_t[0] = \text{Image}\,Q_c\,[A_1, B_1] \oplus \text{ Image } Q_c\,[N, B_2]\,. \tag{2.18}$$

Chính vì vậy, điều kiện (2.14) thỏa mãn khi và chỉ khi điều kiện (2.15) thỏa mãn. Chứng minh được hoàn tất. □

Kết quả tiếp sau được suy ra dễ dàng từ hệ quả trên

Lemma 2.8. *Hệ mô tả tuyến tính với duy nhất hệ con nhanh:*

$$N\dot{x} = x + Bu,$$

với N lũy linh, luôn là R-điều khiển được.

Từ hệ quả trên, hệ con nhanh (2.2) không ảnh hưởng đến tính R-điều khiển được của hệ (1.2), định lý sau được suy ra một cách tự nhiên

Theorem 2.9. *Hệ mô tả tuyến tính (1.2), với hệ con chậm (2.1) và hệ con nhanh (2.2), là R-điều khiển được khi và chỉ khi hệ thống con chậm (2.1) là C-điều khiển được, hay tương đương, các điều kiện (2.3) và (2.4) được thỏa mãn.*

Chứng minh. . Từ bổ đề 2.7 và định lý 2.3, ta có:

$$
\begin{aligned}
&\text{Hệ (1.2) là R-điều khiển được} \\
&\iff \ \text{Image}\, Q_c\left[A_1, B_1\right] = \mathbb{R}^{n_1} \\
&\iff \operatorname{rank} Q_c\left[A_1, B_1\right] = n_1 \\
&\iff \ \text{cả hệ con chậm là C-điều khiển được} \\
&\iff \ \text{điều kiện 2.4 được thỏa mãn}
\end{aligned}
$$

□

Định lý trên, kết hợp với định lý 2.3, đã cho thấy hệ (1.2) là R-điều khiển nếu nó là C-điều khiển được, nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng.

Example 2.10. Theo định lý 2.9, hệ 2.4 trong ví dụ trước đó là R-điều khiển được, nhưng không là C-điều khiển được.

2.3 I-điều khiển được và S-điều khiển được

Rõ ràng tính chất C-điều khiển được và R-điều khiển được chỉ quan tâm đến phản hồi cuối cùng của hệ. Ta để ý rằng trong trạng thái phản hồi của một hệ mô tả tuyến tính, có thể tồn tại xung (impulse) tại $t = 0$. Đối với hệ mô tả tuyến tính, ta chỉ cần nghiên cứu các tính chất điều khiển của thành phần xung trong trạng thái phản hồi.
Nhắc lại trạng thái phản hồi của một hệ mô tả tuyến tính thông thường, không tồn tại thành phần xung trong trạng thái con $x_1(t)$ khi$u \in \mathbb{C}_{\mathrm{p}}^{h-1}$ và ta có thành phần xung trong $x_2(t)$ được xác định bởi

$$x_{2\text{impulse}}\left(t\right) = -\sum_{i=1}^{h-1} N^i \delta^{(i-1)}(t) \left(x_{20} + \sum_{j=0}^{h-1} N^j B_2 u^{(j)}(0) \right), \tag{2.19}$$ {x2impulse}

đạt được từ giá trị ban đầu của không gian vector và vector điều khiển cũng như đạo hàm của chúng. Loại bỏ thành phần xung trong phản hồi trạng thái bởi điều khiển có nghĩa chọn đầu vào điều khiển phù hợp $u \in \mathbb{C}_{\mathrm{p}}^{h-1}$ sao cho phản hồi trạng thái của hệ tại $t = 0$ là một số không lớn. Bằng tính chất này, ta có thể giới thiệu định nghĩa của tính I-điều khiển được.

Definition 2.11. Hệ mô tả tuyến tính (1.2) được gọi là I-điều khiển được (I-controllable) hay điều khiển được xung nếu với mọi vector $x_{20} \in \mathbb{R}^{n_2}$, tồn tại một đầu vào điều khiển chấp nhận được $u \in \mathbb{C}_{\mathrm{p}}^{h-1}$ sao cho thành phần xung của phản hồi của hệ con nhanh đồng nhất bằng 0, nghĩa là

$$x_{2\ \text{impulse}}\left(t\right) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Định nghĩa này đã thể hiện rõ tính chất triệt tiêu bởi điều khiển chấp nhận được thành phần xung trong hệ mô tả tuyến tính. Từ định nghĩa ta có mệnh đề cơ bản sau.

Proposition 2.12. *Hệ mô tả tuyến tính (1.2) là I-điều khiển được khi và chỉ khi với mọi vector $x_{20} \in \mathbb{R}^{n_2}$, tồn tại một đầu vào điều khiển chấp nhận được $u \in \mathbb{C}_{\text{p}}^{h-1}$ sao cho*

$$Nx_{20} + \begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \\ \vdots \\ u^{(h-2)}(0) \end{bmatrix} = 0 \tag{2.20}$$ {Icond1}

Chứng minh. . Từ định nghĩa, hệ mô tả tuyến tính (1.2) là I-điều khiển được nếu với mọi vector $x_{20} \in \mathbb{R}^{n_2}$, tồn tại một đầu vào điều khiển chấp nhận được $u \in \mathbb{C}_{\text{p}}^{h-1}$ sao cho

$$\left[\sum_{i=1}^{h-1} \delta^{(i-1)}(t) \left(N^i x_2(0) + \sum_{j=i}^{h-1} N^j B_2 u^{(j-i)}(0) \right)\right]_{t=0} = 0 \tag{2.21}$$ {Icond2}

Từ định lý A.1 trong phụ lục A, nhóm các hàm $\delta^{(i)}(t), i = 0, 1, 2, ..., h-2$, là phụ thuộc tuyến tính, phương trình trên tương đương

$$N^i x_2(0) + \sum_{j=i}^{h-1} N^j B_2 u^{(j-i)}(0) = 0, i = 1, 2, \ldots, h-1,$$

có thể viết lại thành

$$N^i x_2(0) + \begin{bmatrix} N^iB_2 & N^{i+1}B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \\ \vdots \\ u^{(h-i-1)}(0) \end{bmatrix} = 0 \tag{2.22}$$
$$i = 1, 2, \ldots, h-1.$$

Thêm vào đó, để ý tính chất lũy linh của ma trận N, dễ dàng chứng minh được các phương trình trên thỏa mãn nếu điều kiện (2.20) thỏa mãn. Chính vì vậy, (2.20) và (2.21) là tương đương nhau.
Để hoàn thành chứng minh, ta chỉ cần chỉ ra với các giá trị cho trước $u^{(i)}(0) = u_0^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, h-1$, thỏa mãn (2.20), tồn tại một đầu vào điều khiển chấp nhận được $\hat{u}(t) \in \mathbb{C}_{\text{p}}^{h-1}$ sao cho

$$\hat{u}^{(i)}(0) = u_0^{(i)}, i = 0, 1, 2, \cdots, h-1$$

Điều này được đảm bảo theo bổ đề 1.5. Chứng minh được hoàn tất. □

Tính I-điều khiển được là đủ để loại bỏ thành phần xung trong một hệ nếu chúng không được kì vọng sẽ xuất hiện. Xung phản ứng mạnh sẽ có thể khiến hệ dừng hoạt động, thậm chỉ triệt tiêu toàn hệ thống.
Trực tiếp từ định nghĩa, ta có bổ đề sau

Lemma 2.13. *Hệ mô tả với chỉ một hệ con chậm (hay hệ chuẩn tắc)*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

luôn là I-điều khiển được

Vì hệ con chậm (2.1) luôn là I-điều khiển được, tính I-điều khiển được của hệ (1.2) sẽ được hoàn thiện thông qua tính I-điều khiển được của các hệ con nhanh (2.2) của nó. Điều này được thể hiện qua định lý sau

Theorem 2.14. *1. Hệ (1.2) là I-điều khiển được nếu và chỉ nếu hệ con nhanh (2.2) của nó là I-điều khiển được 2. Hệ con nhanh (2.2) là I-điều khiển được nếu và chỉ nếu một trong những điều kiện sau thỏa mãn:*
(a) Image $N =$ *Image* $\begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix}$.
(b) $\ker N + \operatorname{Image} Q_c[N, B_2] = \mathbb{R}^{n_2}$.
(c) Image $N + \ker N +$ *Image* $B_2 = \mathbb{R}^{n_2}$.

Chứng minh. . Kết luận đầu tiên là hiểu nhiên. Ta sẽ tập trung chứng minh kết luận thứ hai. Chứng minh (a). Hệ con nhanh (2.2) là I-điều khiển được nếu và chỉ nếu với mọi vector $x_{20} \in \mathbb{R}^{n_2}$, tồn tại một đầu vào điều khiển chấp nhận được $u \in \mathbb{C}_{\mathrm{p}}^{h-1}$ sao cho (2.20) được thỏa mãn. Điều này tương đương với khẳng định (a).
Chứng minh (a) $\iff$ (b). Để ý rằng

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 & N^hB_2 \end{bmatrix} \\ &= N\begin{bmatrix} B_2 & N^1B_2 & \cdots & N^{h-2}B_2 & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} \\ &= NQ_c[N, B_2], \end{aligned}$$

và

$$\operatorname{Image}\begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} = \operatorname{Image}\begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 & 0 \end{bmatrix},$$

ta có

$$\operatorname{Image}\begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} = \operatorname{Image}(NQ_c[N, B_2])$$

Vì vậy, theo quan hệ trên và mệnh đề 5.1 trong phần Phụ lục

$$\begin{aligned} (a) &\Leftrightarrow \ \operatorname{Image}\ (NQ_c[N, B_2]) = \ \operatorname{Image}\ N \\ &\Leftrightarrow \ \operatorname{Image}\ Q_c[N, B_2] + \ker N = \mathbb{R}^{n_2} \\ &\Leftrightarrow (b). \end{aligned}$$

Chứng minh (b) $\iff$ (c). Để ý rằng

$$\operatorname{Image} Q_c[N, B_2] = \operatorname{Image} B_2 + \operatorname{Image}\begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 \cdots N^{h-1}B_2 \end{bmatrix}$$

ta có thể viết lại điều kiện trong (b) thành

$$\ker N + \operatorname{Image} B_2 + \operatorname{Image}\begin{bmatrix} NB_2N^2B_2 \cdots N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^{n_2}$$

□

Rõ ràng một hệ thống là I-điều khiển được nếu nó là C-điều khiển được. Tuy nhiên, điều ngược lại không chắc đúng. Sử dụng điều kiện (a) của định lý trên, ta có thể đi tới kết luận cho tính I-điều khiển được của hệ (1.2)

Theorem 2.15. *Xét hệ mô tả tuyến tính* (1.2) *với hệ con nhanh* (2.2)*. Gọi phân tích điều khiển của* (N, B_2) *là*

$$\left(\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{21} \\ 0 \end{bmatrix}\right) \tag{2.23}$$

Hệ (1.2) *là I-điều khiển được nếu và chỉ nếu*

$$N_{22} = 0 \text{ và } N_{12} = N_{11}M \tag{2.24}$$ {Icond3}

thỏa mãn với ma trận M nào đó.

Chứng minh. . Vì tính I-điều khiển được là bất biến với các hệ hạn chế tương đương, không mất tổng quát giả sử cặp ma trận (N, B_2) có dạng (1.2)
Từ điều kiện (a) của định lý 2.14, hệ (1.2) là I-điều khiển được nếu và chỉ nếu

$$\text{Image } N = \text{Image} \begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$ {4.44}

Giả sử $N_{11} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}_1 \times \tilde{n}_1}, N_{22} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}_2 \times \tilde{n}_2}$. Vì (N_{11}, B_{21}) là điều khiển được, ta có

$$\text{Image } \begin{bmatrix} B_{21} & N_{11}B_{21} & \cdots & N_{11}^{h-1}B_{21} \end{bmatrix} = \mathbb{R}^{\tilde{n}_1} \tag{2.26}$$

Sử dụng phân tích của ma trận N và B_2, ta có

$$\text{Image } N = \text{ Image } \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$ {4.46}

và

$$\begin{aligned} &\text{Image} \begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} \\ &= \text{Image} \begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{Image} \begin{bmatrix} N_{11}B_{21} & N_{11}^2B_{21} & \cdots & N_{11}^{h-1}B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{Image} \begin{bmatrix} N_{11}B_{21} & N_{11}^2B_{21} & \cdots & N_{11}^{h-1}B_{21} & N_{11}^{h}B_{21} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \ \text{Image } \left\{\begin{bmatrix} N_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{21} & N_{11}B_{21} & \cdots & N_{11}^{h-1}B_{21} \end{bmatrix}\right\} \\ &\subset \ \text{Image } \begin{bmatrix} N_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.28}$$ {4.47}

Mặt khác, chọn ngẫu nhiên

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Image} \begin{bmatrix} N_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

với $x_1 \in \text{Image}\, N_{11} \subset \mathbb{R}^{\tilde{n}_1}$, thì tồn tại một vector y_1 thỏa mãn

$$x_1 = N_{11}y_1 \tag{2.29}$$

Tồn tại dãy các vector $\alpha_i, i = 0, 1, ..., h-1$, sao cho

$$y_1 = B_{21}\alpha_0 + N_{11}B_{21}\alpha_1 + \cdots + N_{11}^{h-1}B_{21}\alpha_{h-1} \tag{2.30}$$

Kết hợp lại ta được

$$x_1 = N_{11}\left(B_{21}\alpha_0 + N_{11}B_{21}\alpha_1 + \cdots + N_{11}^{h-1}B_{21}\alpha_{h-1}\right)$$

Xét

$$\tilde{y}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{h-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

ta có

$$\begin{aligned} x_1 &= N_{11} \begin{bmatrix} B_{21} & N_{11}B_{21} & \cdots & N_{11}^{h-1}B_{21} \end{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ &\in \text{ Image } \left\{ N_{11} \begin{bmatrix} B_{21} & N_{11}B_{21} & \cdots & N_{11}^{h-1}B_{21} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\in \text{ Image } \left\{ \begin{bmatrix} N_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{21} & N_{11}B_{21} & \cdots & N_{11}^{h-1}B_{21} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \text{Image} \begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Thế nên,

$$\text{Image} \begin{bmatrix} N_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \subset \text{Image} \begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$ {4.50}

Kết hợp lại (2.28) và (2.33), ta được

$$\text{Image} \begin{bmatrix} NB_2 & N^2B_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} = \text{Image} \begin{bmatrix} N_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$ {4.51}

Thay (2.27) và (2.34) vào (2.25) ta được

$$\text{Image} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{bmatrix} = \text{Image} \begin{bmatrix} N_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình này thỏa mãn khi và chỉ khi tồn tại ma trận M thỏa mãn (2.24). Ta có điều phải chứng minh. □

Bên cạnh 3 loại điều khiển được trên, còn một loại điều khiển được nữa cho hệ mô tả tuyến tính, được định nghĩa như sau

Definition 2.16. Hệ mô tả tuyến tính (1.2) được gọi là điều khiển được mạnh (strongly controllable) hay S-điều khiển được (S-controllable), nếu nó vừa là R-điều khiển được vừa là I-điều khiển được.
Mối quan hệ giữa 4 loại điều khiển được trên được mô tả qua sơ đồ dưới đây
C-controllability
$\Downarrow$
S-controllability $\Longleftrightarrow$ R-controllability + I-controllability

3 Tính L - điều khiển được một phần của hệ điều khiển.

Xét hệ điều khiển:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = & Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.1}$$ {cs}

Definition 3.1. Hệ 3.1 được gọi là L - điều khiển được một phần (L-partially C-controllable), trong đó L là một ma trận có cỡ phù hợp, nếu với mọi điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ và mọi trạng thái cuối x_1 tồn tại hàm đầu vào $u(t)$ và thời gian hữu hạn $t_1 > 0$ sao cho:

$$Lx(t_1) = Lx_1$$

Trong phần sau đây, ta xét L ma trận cỡ $l \times n$ ($l \leq n$) và đưa ra một số điều kiện để kiểm tra tính L - điều khiển được một phần của hệ 3.1.

Proposition 3.2. *Hệ 3.1 là L - điều khiển được một phần nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau:*

(i) Ma trận $l \times l$:

$$W_{C,L}(t) = \int_0^t Le^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}L^Td\tau = \int_0^t Le^{A(t-\tau)}BB^Te^{A^T(t-\tau)}L^Td\tau$$

là ma trận khả nghịch với mọi $t > 0$.

(ii) Ma trận L - điều khiển Kalman $l \times np$:

$$C_L = L\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

là đủ hạng dòng.

Chứng minh. . (i) $\Rightarrow$ Hệ 3.1 là L - điều khiển được một phần.
Từ hệ 3.1 ta có:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Do $W_{C,L}(t)$ khả nghịch với mọi $t > 0$, với bất kì $t_1 > 0$, xét:

$$u(t) = -B^Te^{A^T(t_1-t)}L^TW_{C,L}^{-1}(t_1)L\left[e^{At_1}x_0 - x_1\right].$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
Lx(t_1) =& L\Big(e^{At_1}x(0) - \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^Te^{A^T(t_1-\tau)}L^TW_{C,L}^{-1}(t_1)L\left[e^{At_1}x_0 - x_1\right]d\tau\Big)\\
=& Le^{At_1}x(0) - \Big(\int_0^{t_1} Le^{A(t_1-\tau)}BB^Te^{A^T(t_1-\tau)}L^Td\tau\Big)W_{C,L}^{-1}(t_1)L\left[e^{At_1}x_0 - x_1\right]\\
=& Le^{At_1}x(0) - W_{C,L}(t_1)W_{C,L}^{-1}(t_1)L\left[e^{At_1}x_0 - x_1\right]\\
=& Lx_1
\end{aligned}$$

Hay hệ 3.1 là L - điều khiển được một phần.
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Giả sử C_L không đủ hạng dòng nhưng $W_{C,L}(t)$ là khả nghịch với mọi $t > 0$.
Do C_L không đủ hạng dòng nên tồn tại vector $v \neq 0$ cỡ $l \times 1$ sao cho $v^TC_L = 0$. Khi đó:

$$v^TLA^kB \equiv 0 \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Từ định lý định lý Cayley-Hamilton, thì e^{At} với k = 0,1,2,$\cdots$ có thể viết thành tổ hợp tuyến tính của $\{I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1}\}$ nên với mọi t ta có: $v^TLe^{At}B \equiv 0$ Như vậy:

$$\begin{aligned}
v^TW_{C,L}(t)v &= \int_0^t v^TLe^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}L^Tvd\tau\\
&= \int_0^t \|v^TLe^{A\tau}B\|^2d\tau\\
&= 0
\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với việc $W_{C,L}(t)$ khả nghịch với mọi $t > 0$. Ngược lại, giả sử $W_{C,L}(t)$ là không khả nghịch với $t > 0$ nào đó nhưng C_L đủ hạng dòng. Khi đó tồn tại vector $w \neq 0$ cỡ $l \times 1$ sao cho:

$$w^T L e^{At} B \equiv 0 \quad \forall t$$

Khi đó đạo hàm cấp k theo của $w^T L e^{At} B$ bằng 0 với mọi t và với mọi $k = 0, 1, 2, \cdots$, hay

$$w^T L A^k e^{At} B \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}; k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Từ đó ta có:

$$w^T L \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots A^{n-1}B \end{bmatrix} = w^T C_L = 0$$

Điều này mâu thuẫn với C_L đủ hạng dòng.
Từ đó ta có (i) $\Leftrightarrow$ (ii).
Như vậy ta đã chứng minh được mệnh đề 3.2. □

4 Tính L - điều khiển được của hệ mô tả

Xét hệ mô tả:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{4.1}$$ {ds}

Definition 4.1. Hệ 4.1 được gọi là L - điều khiển được một phần (L - partially C - controllable), trong đó L là một ma trận có cỡ phù hợp, nếu với mọi điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ và mọi trạng thái cuối x_1 tồn tại hàm đầu vào u(t) và thời gian hữu hạn $t_1 > 0$ sao cho:

$$Lx(t_1) = Lx_1$$

Trong phần sau đây, ta xét L ma trận cỡ $l \times n$ $(l \leq n)$ đủ hạng dòng , $rank(E) = n_1$, $n_2 = n - n_1$.
Xét phân tích SVD của L:

$$L = U\Sigma V^T$$

trong đó U, V là ma trận vuông trực giao lần lượt cỡ l và n, Σ là ma trận cỡ $l \times n$ mà giá trị trên đường chéo chính dương và các vị trí khác bằng 0.
Đặt $z = V^T x$, khi đó hệ 4.1 là L - điều khiển được một phần khi và chỉ khi hệ sau đây là Σ - điều khiển được một phần:

$$\begin{cases} EV\dot{z}(t) & = AVz(t) + Bu(t) \\ y(t) & = CVz(t) + Du(t) \end{cases} \tag{4.2}$$ {es}

Cặp (E, A) là chính quy và V là khả nghịch nên cặp (EV, AV) cũng chính quy. Do đó tồn tại 2 ma trận khả nghịch P, Q sao cho:

$$P^{-1}z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$QEVP = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad QAVP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

trong đó N là ma trận luỹ linh cỡ n_2 cấp h, A_1 có dạng Jordan.
Khi đó phương trình thứ nhất của hệ 4.2 có thể viết thành:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) & = A_1 z_1(t) + B_1 u(t) \\ N\dot{z}_2(t) & = z_2(t) + B_2 u(t) \end{cases} \tag{4.3}$$ {fs}

Phương trình thứ nhất gọi là hệ con chậm, phương trình thứ hai là hệ con nhanh.
Do P là ma trận khả nghịch nên hệ 4.2 là Σ - điều khiển được một phần khi và chỉ khi hệ 4.3 cũng là Σ - điều khiển được một phần.
Ta viết lại Σ dưới dạng sau

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}$$

trong đó Σ_1 có cỡ $min\{l, n_1\} \times n_1$ và Σ_2 có cỡ $(l - min\{l, n_1\}) \times n_2$.
Ta đưa ra điều kiện để hệ 4.3 là Σ - điều khiển được một phần.

Proposition 4.2. *Hai ma trận điều khiển:*

$$C_1 = \Sigma_1 \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & A_1^2 B_1 & \cdots A_1^{n-1} B_1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \Sigma_2 \begin{bmatrix} B_2 & N B_2 & N^2 B_2 & \cdots N^{h-1} B_2 \end{bmatrix}$$

có đủ hạng dòng thì hệ 4.3 là Σ - điều khiển được một phần.

Chứng minh. . Xét hai trường hợp
(i) $l \leq n_1$.
Trong trường hợp này, $\Sigma_2 \equiv 0$.
Từ điều kiện ma trận C_1 cho biết rằng hệ con chậm là Σ_1 - điều khiển được một phần (theo mệnh đề 3.2).
Với mọi điều kiện ban đầu $z_0 = \begin{bmatrix} z_{01} \\ z_{02} \end{bmatrix}$ và mọi trạng thái cuối $z_1 = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix}$, tồn tại hàm đầu vào u(t) và thời gian hữu hạn t_1 sao cho: $\Sigma_1 z_1(t) = z_{11}$. Khi đó ta có:

$$\Sigma \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \Sigma_1 z_1(t) = z_{11} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix}$$

hay hệ 4.3 là Σ - điều khiển được một phần.

(ii) $n_1 < l \leq n$.
Trong thường hợp này Σ_1 là ma trận đường chéo khả nghịch, Σ_2 là ma trận cỡ $(l - n_1) \times n_2$ có hạng bằng $(l - n_1)$.
Với điều kiện ma trận C_1 thì hệ con chậm là Σ_1 - điều khiển được một phần hay cũng chính là điều khiển được. Ta có:

$$z_2(t) = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t)$$

Với $z_{12} \in \mathbb{R}^{n_2}$ thì $\Sigma_2 z_{12} \in \mathbb{R}^{l-n_1}$.
Ma trận C_2 có đủ hạng dòng tức là hệ vector $\left\{ \Sigma_2 B_2 \quad \Sigma_2 N B_2 \quad \Sigma_2 N^2 B_2 \quad \cdots \Sigma_2 N^{h-1} B_2 \right\}$ có hạng bằng $l - n_1$. Khi đó với mọi $z_{12} \in \mathbb{R}^{n_2}$, tồn tại các $z_{2i} \in \mathbb{R}^r, i = 0, 1, 2, \cdots, h-1$ sao cho:

$$\Sigma_2 z_{12} = -\sum_{i=0}^{h-1} \Sigma_2 N^i B_2 z_{2i}$$

Dựa trên chứng minh của định lý 1.2 ta có thể xây dựng hàm đầu vào u(t). khi ta cố định t > 0, tồn tại một đa thức $f_2(\tau)$ bậc $h - 1$ sao cho $f_2^{(i)}(t) = z_{2i}$. Do đó:

$$\Sigma_2 z_{12} = -\sum_{i=0}^{h-1} \Sigma_2 N^i B_2 f_2^{(i)}(t)$$

Nếu chúng ta đặt đầu vào cho hệ 4.3: $u(t) = u_1(t) + f_2(t)$ thì với $t > 0$ ta có:

$$\begin{aligned}\Sigma_2 z_2(t) &= -\sum_{i=0}^{h-1} \Sigma_2 N^i B_2 u^{(i)}(t)\\ &= -\sum_{i=0}^{h-1} \Sigma_2 N^i B_2 u_1^{(i)}(t) - \sum_{i=0}^{h-1} \Sigma_2 N^i B_2 f_2^{(i)}(t)\\ &= \Sigma_2 z_{12} - \sum_{i=0}^{h-1} \Sigma_2 N^i B_2 u_1^{(i)}(t),\end{aligned}$$

và

$$z_1(t,u,0) = e^{A_1 t} z_{01} + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 f_2(\tau) d\tau \tag{4.4}$$

Ta có:

$$\tilde{z_1} = z_{11} - e^{A_1 t} z_{01} - \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 f_2(\tau) d\tau \in \text{Image } C_1 \tag{4.5}$$

Xét t $>$ 0 cố định, đặt $f_1(\tau) = \tau^h (\tau - t)^h$. Khi đó $f_1(\tau)$ không đồng nhất bằng 0, và tồn tại vecto $z \in R^{n_1}$ sao cho:

$$W(f_1, t) z = \tilde{z_1} \tag{4.6}$$

Với vecto z chọn được ở trên, ta xét:

$$u_1(\tau) = f_1(\tau)^2 B_1^T e^{A_1^T (t-\tau)} z, 0 \le \tau \le t \tag{4.7}$$

Ta có thể chỉ ra rằng:

$$u_1^{(i)}(t) = 0, i = 0, 1, .., h-1 \tag{4.8}$$

Do đó $\Sigma_2 z_2(t) = \Sigma_2 z_{12}$. Hơn nữa:

$$\begin{aligned}z_1(t,u,0) &= e^{A_1 t} z_{01} + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 f_2(\tau) d\tau\\ &= z_{11} - z_{11} + e^{A_1 t} z_{01} + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 f_2(\tau) d\tau\\ &= z_{11} - \tilde{z_1} + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau\\ &= z_{11} - \tilde{z_1} + W(f_1, t) z\\ &= z_{11}\end{aligned}$$

Như vậy:

$$\Sigma \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 z_1(t) \\ \Sigma_2 z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 z_{11} \\ \Sigma_2 z_{12} \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix}$$

hay hệ 4.3 là Σ - điều khiển được một phần. □

5 Phụ lục

Một số kết quả, định lý được sử dụng trong báo cáo

Proposition 5.1. *Cho* $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *và* $B \in \mathbb{F}^{n\times k}$*.*
1. Image $(AB) =$ *Image* $A \Longleftrightarrow$ *Image* $B + \ker A = \mathbb{F}^n$*.*
2. $\ker(AB) = \ker B \Longleftrightarrow$ *Image* $B \cap \ker A = \emptyset$*, với* $\emptyset$ *là không gian con hạt nhân của* $\mathbb{F}^n$*.*
3. Cho $x \in \mathbb{F}^n$*, thì* $x \in$ *Image* $A^{\perp} \Longleftrightarrow x^{\mathrm{T}}A = 0$*.*

Theorem 5.2 (Cayley-Hamilton theorem)**.**
Cho A là ma trận vuông cỡ n.
Khi đó A^n *có thể được viết thành tổ hợp tuyến tính của hệ* $\left\{ \begin{matrix} I_n & A & A^2 & \cdots A^{n-1} \end{matrix} \right\}$

Corollary 5.3. *Ma trận* $A^k, k = 0, 1, 2, \cdots$ *đều có thể viết thành tổ hợp tuyến tính của hệ* $\left\{ \begin{matrix} I_n & A & A^2 & \cdots A^{n-1} \end{matrix} \right\}$

6 Tài liệu tham khảo

1. Duan, G. R. (2010). Analysis and design of descriptor linear systems (Vol. 23). Springer Science Business Media.
2. Bashirov, A. E., Jneid, M. (2013, January). On partial complete controllability of semilinear systems. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2013). Hindawi.