Ngày ....tháng............năm..........

Câu 1:

a) Để tìm 1 điều kiện đủ, ta chuyển hệ điều khiển tuyến tính bậc 2 này thành hệ điều khiển tuyến tính bậc 1 bằng cách đặt $z = (x_1 \dots x_n \ \dot{x}_1 \dots \dot{x}_n)^T$

$\tilde{B} = (0 \ \ B)^T \in \mathbb{R}^{2n,p}$, $\tilde{C} = (C \ \ 0) \in \mathbb{R}^{q,2n}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -K & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ ban đầu trở thành:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A} z(t) + \tilde{B} u(t), \forall t \geq 0, z(0) = z_0 \\ y(t) = \tilde{C} z(t) + \tilde{D} u(t) \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ để hệ này dương trong là

$\tilde{A}$ Metzler, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D} \geq 0$

$\Leftrightarrow -K, B, C, D \geq 0$

Đây chính là 1 điều kiện đủ cho hệ ban đầu dương trong nhưng không là điều kiện cần

b) Ta chứng minh hệ dương trong thì $B \geq 0$, $C \geq 0$ và $\tilde{D} \geq 0$

Nếu $\exists\, \tilde{d}_{ij} < 0$, chọn $x(0) = 0$, $u(t) = e_j$ thì $y_i(0) = \tilde{d}_{ij} < 0$ (vô lí) $\Rightarrow \tilde{D} \geq 0$

Nếu $\exists\, c_{ij} < 0$, chọn $x(0) = e_j$, $u(t) = 0$ thì $y_i(0) = c_{ij} < 0$ (vô lí) $\Rightarrow C \geq 0$

Nếu $\exists\, b_{ij} < 0$, chọn $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $u(t) = e_j$ thì $\ddot{x}_i(0) = b_{ij} < 0$ nên 0 là điểm cực đại địa phương của x_i, do đó $\exists\, t$ đủ bé sao cho $x_i(t) < 0$ (vô lí) $\Rightarrow B \geq 0$

Xét hệ ở câu a, ta có:

$$z(t) = e^{\tilde{A}t} z(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-s)} \tilde{B} u(s)\, ds$$

Từ điều ~~kiện cần ở trên~~ ta suy ra để hệ ban đầu dương trong thì ma trận tạo bởi n hàng đầu của $e^{\tilde{A}t}$ là dương ~~trong~~ với $\forall t \geq 0$ (cho $u(t) = 0$)

$e^{\tilde{A}t}$ có dạng sau:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n t^{2n}}{(2n)!}}_{P} & \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{Q} \end{pmatrix}$$

Do đó: $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n t^{2n}}{(2n)!} \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Kết hợp điều kiện cần ở trên ta suy ra điều kiện cần cho bài toán ban đầu và đồng thời cũng là điều kiện đủ vì nếu $B, C, \tilde{D} \geq 0$ và điều kiện (*) thoả mãn thì theo công thức của $z(t)$ suy ra $x(t) \geq 0$, do đó $y(t) = Cx(t) + \tilde{D}u(t) \geq 0$

c) Ta chọn $C = 0$, $\tilde{D} \geq 0$ và chọn $B < 0$ thì suy ra hệ dương ngoài nhưng không dương trong

Câu 2:

a)

Bổ đề: Với ma trận vuông A, hệ $\dot{x} = Ax$ ổn định tiệm cận khi và chỉ khi A ~~có~~ ~~ca~~ chỉ có giá trị riêng với phần thực âm.

(Định lý 3.10 sách Ordinary Differential Equations của Luis Barreira và Claudia Valls).

Vì hệ (3) dương trong nên A là Metzler.

Trước tiên, ta chứng minh A chỉ có giá trị riêng với phần thực âm thì $\det(\lambda I - A)$ có mọi hệ số đều dương.

Nếu $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ là nghiệm của $\det(\lambda I - A)$ thì $\overline{z}$ cũng vậy.

Do đó: $\det(\lambda I - A)$ có thể viết được dưới dạng

$$\left(\prod(\lambda - x)\right)\left(\prod(\lambda - z)(\lambda - \overline{z})\right)$$

$$= \left(\prod(\lambda - x)\right)\left(\prod(\lambda - 2\operatorname{Re} z + |z|^2)\right)$$

với $x < 0$ và $\operatorname{Re} z < 0$.

Vì vậy $\det(\lambda I - A)$ có các hệ số đều dương.

Ta chứng minh nếu $\det(\lambda I - A)$ có mọi hệ số đều dương thì A chỉ có giá trị riêng với phần thực âm.

Bổ đề (Định lý Perron-Frobenius): Ma trận vuông A với hệ số ~~dương~~ không âm có ~~A~~ giá ~~trị~~ ~~riêng~~ bán kính phổ $\rho(A)$ là 1 giá trị riêng của A.

Ta xét $\delta > 0$ đủ lớn để $\delta I + A$ là ma trận có các hệ số đều ~~dương~~ không âm (A là Metzler nên luôn chọn được δ). Đặt $M = \delta I + A$.

~~Đa thức đặc trưng của M là:~~

~~det (λ -~~

Ta có: $\det(\lambda I - M) = \det((\lambda - \delta) I - A) = P(\lambda - \delta)$

với $P(\lambda)$ là $\det(\lambda I - A) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n$

với $a_i > 0$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$.

Xét $r = \rho(M)$ là bán kính phổ ma trận M

thì $P(r - \delta) = 0$

$\Rightarrow a_0 + a_1 (r - \delta) + \dots + a_n (r - \delta)^n = 0$

$\Rightarrow r < \delta$ (vì $a_0, a_1, \dots, a_n > 0$)

Xét z là giá trị riêng bất kì của A thì $z + \delta$ là giá trị riêng của M

$\Rightarrow |z + \delta| \leq r < \delta$

$\Rightarrow \operatorname{Re} z < 0$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b)

Bổ đề: Nếu A là ma trận vuông với các hệ số không âm và $\lambda \in \mathbb{R}$ thì $\lambda > \rho(A)$ (bán kính phổ của A) khi và chỉ khi các định thức con chính góc trái của ~~A~~ $\lambda I - A$ đều dương

Ngày .... tháng .... năm ....

Xét $\delta > 0$ sao cho $\delta I + A$ là ma trận có các hệ số không âm.

Khi đó $-A = \delta I - (\delta I + A)$ nên theo bổ đề trên thì $-A$ có các định thức con chính góc trái đều dương khi và chỉ khi $\delta > \rho(\delta I + A)$.

Vì $\delta I + A$ có các hệ số không âm nên $\rho(\delta I + A)$ là giá trị riêng của $\delta I + A$ (định lý Perron-Frobenius)

Do đó $\rho(\delta I + A) - \delta$ là giá trị riêng có phần thực lớn nhất của A

Vì vậy $-A$ có các định thức con chính góc trái đều dương khi và chỉ khi $\rho(\delta I + A) - \delta < 0$ hay tất cả giá trị riêng của A đều có phần thực < 0.

c)

Ta có: $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ t \geq 0, \ x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) \, ds$$

Hệ là ổn định tiệm cận nên A có các giá trị riêng phần thực < 0.

Bổ đề (mệnh đề 2.27 sách Ordinary Differential Equations của Luis Barreira và Claudia Valls):

Nếu ma trận vuông A chỉ có các giá trị riêng phần thực < 0 thì $\exists\, c, d > 0$ sao cho $\|e^{At}\| \leq c e^{-dt}$

Do đó: $\|y(t)\| \leq \|C\|\,\|x(t)\|$

$$\leq \|C\|\left(\|e^{At}\|\,\|x_0\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\|\,\|B\|\,\|u(s)\|\,ds\right)$$

$$\leq \|C\|\left(c e^{-dt} + Mc\|B\| \int_0^t e^{(s-t)d}\,ds\right)$$

(u bị chặn đều theo t bởi $M > 0$)

$$= \|C\|\left(\|x_0\|\, c e^{-dt} + Mc\|B\| \frac{1}{d}\left(1 - e^{-dt}\right)\right)$$

Do đó y bị chặn đều theo t nên hệ ổn định BIBO.

Ta chỉ ra một ví dụ hệ ổn định BIBO ~~chứa~~ ~~chắc~~ mà không ổn định tiệm cận:

Chọn $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = 0$, $C = Id$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) = x_0 e^{At} = x_0 \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

y bị chặn đều theo t nên hệ ổn định BIBO

Mà $\sin t$, $\cos t$ không hội tụ khi $t \to \infty$ nên hệ không ổn định tiệm cận

Câu 3:

a) Ta có phản hồi trạng thái 0 được kích thích bởi $u(t)$ là: $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$

Ta có:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{nếu } 1 < t \le 2 \\ 0 & \text{nếu } t > 2 \end{cases}$$

và

$$g(t) = \begin{cases} at & \text{nếu } 0 \le t \le 1 \\ a(2-t) & \text{nếu } 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{nếu } t > 2 \end{cases}$$

với $a = g(1)$

Do đó:

$$y(t) = \int_0^t a(t-\tau)\,d\tau = \frac{at^2}{2}, \text{ nếu } 0 \le t \le 1$$

$$\cancel{y(t) = \int_0^{t-1} a(2-t)\,d\tau + \int_{t-1}^{t}}$$

$$y(t) = \int_0^{t-1} a(2-t+\tau)\,d\tau + \int_{t-1}^{1} a(t-\tau)\,d\tau$$

$$- \int_1^t a(t-\tau)\,d\tau = a\left(-\frac{3t^2}{2} + 4t - 2\right) \text{ nếu } 1 \le t \le 2$$

$$y(t) = \int_0^{t-2} 0\,d\tau + \int_{t-2}^{1} a(2-t+\tau)\,d\tau - \int_1^{t-1} a(2-t+\tau)\,d\tau$$

$$- \int_{t-1}^{2} a(t-\tau)\,d\tau + \int_2^t 0\,d\tau \text{ nếu } = a\left(\frac{3t^2}{2} - 8t + 10\right)$$

nếu $2 \leq t \leq 3$

$$y(t) = \int_0^{t-2} 0\, d\tau - \int_{t-2}^{2} a(2-t+\tau)\, d\tau + \int_2^{t} 0\, d\tau$$

$$= -a\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 8\right) \text{ nếu } 3 \leq t \leq 4$$

$y(t) = 0$ nếu $4 \leq t$

Vậy

$$y(t) = \begin{cases} at^2/2 & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1 \\ a(-3t^2/2 + 4t - 2) & \text{nếu } 1 \leq t \leq 2 \\ a(3t^2/2 - 8t + 10) & \text{nếu } 2 \leq t \leq 3 \\ -a(t^2/2 - 4t + 8) & \text{nếu } 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{nếu } 4 \leq t \end{cases}$$

b) Ma trận hàm truyền $\hat{G}$ thoả mãn:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \end{pmatrix} = \hat{G}(s) \begin{pmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \end{pmatrix}$$

Ta sử dụng 2 tính chất sau của phép biến đổi Laplace:

1. $\mathcal{L}(ax(t) + by(t)) = a\mathcal{L}(x(t)) + b\mathcal{L}(y(t))$
2. $\mathcal{L}(x^{(n)}(t)) = s^n \hat{x}(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0)$

Với một đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ và ~~y~~ hàm y,

kí hiệu ~~$F(P, y) = \sum_{i=0}^{n} b_i$~~

$$F(P, y) = \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{k=1}^{i} s^{i-k} y^{(k-1)}(0)$$

Đặt $D_{11}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, ta có:

$$\mathcal{L}\left(D_{11}\left(\frac{d}{dt}\right) y_1(t)\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i \mathcal{L}\left(y_1^{(i)}(t)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} a_i \left(s^i \hat{y}_1(s) - \sum_{k=1}^{i} s^{i-k} y_1^{(k-1)}(0)\right)$$

$$= \hat{y}_1(s) D_{11}(s) - F(D_{11}, y_1)$$

Tương tự ta có biến đổi Laplace cho hệ:

$$\hat{y}_1(s) D_{11}(s) - F(D_{11}, y_1) + \hat{y}_2(s) D_{12}(s) - F(D_{12}, y_2)$$
$$= \hat{u}_1(s) N_{11}(s) - F(N_{11}, u_1) + \hat{u}_2(s) N_{12}(s) - F(N_{12}, u_2)$$

và

$$\hat{y}_1(s) D_{21}(s) - F(D_{21}, y_1) + \hat{y}_2(s) D_{22}(s) - F(D_{22}, y_2)$$
$$= \hat{u}_1(s) N_{21}(s) - F(N_{21}, u_1) + \hat{u}_2(s) N_{22}(s) - F(N_{22}, u_2)$$

Xét tại $y^{(k)}(0) = u^{k}(0) = 0$ với $\forall k$ thì $F(D_{ij}, y_k)$ và $F(N_{ij}, u_k)$ đều bằng 0.

Do đó:

$$\begin{cases} \hat{y}_1(s) D_{11}(s) + \hat{y}_2(s) D_{12}(s) = \hat{u}_1(s) N_{11}(s) + \hat{u}_2(s) N_{12}(s) \\ \hat{y}_1(s) D_{21}(s) + \hat{y}_2(s) D_{22}(s) = \hat{u}_1(s) N_{21}(s) + \hat{u}_2(s) N_{22}(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{N_{11}(s) D_{22}(s) - N_{21}(s) D_{12}(s)}{D_{11}(s) D_{22}(s) - D_{21}(s) D_{12}(s)} & \dfrac{N_{12}(s) D_{22}(s) - N_{22}(s) D_{12}(s)}{D_{11}(s) D_{22}(s) - D_{21}(s) D_{12}(s)} \\[2ex] \dfrac{N_{11}(s) D_{21}(s) - N_{21}(s) D_{11}(s)}{D_{12}(s) D_{21}(s) - D_{22}(s) D_{11}(s)} & \dfrac{N_{12}(s) D_{21}(s) - N_{22}(s) D_{11}(s)}{D_{12}(s) D_{21}(s) - N_{22}(s) D_{11}(s)} \end{pmatrix}$$

c) Ta có hệ phương trình của hệ thống phản hồi dương:

$$\begin{cases} v(t) = x(t) + y(t) \\ u(t) = a v(t) \\ y(t) = u(t-1) \end{cases}$$

Để tìm phản hồi theo bước đơn vị, ta cho $x(t) = 1$

Thế lần lượt $a = 1$ và $a = 0,5$ vào hệ trên, ta được:

$a = 1 \Rightarrow y(t) = 1 + y(t-1)$ ứng với hình 3(a)

$a = 0,5 \Rightarrow y(t) = 0,5 + 0,5\, y(t-1)$ ứng với hình 3(b)

Ta có hệ phương trình của hệ thống phản hồi âm:

$$\begin{cases} v(t) = x(t) - y(t) \\ u(t) = a v(t) \\ y(t) = u(t-1) \end{cases}$$

Ta cho $x(t) = 1$, thế lần lượt $a = 1$ và $a = 0,5$ vào hệ, ta có:

$a = 1 \Rightarrow y(t) = 1 - y(t-1)$ ứng với hình 3(c)

$a = 0,5 \Rightarrow y(t) = 0,5 - 0,5\, y(t-1)$ ứng với hình 3(d)

$(y(t) = 0, t < 1)$