Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN
K63 TTUD - Thầy Hà Phi

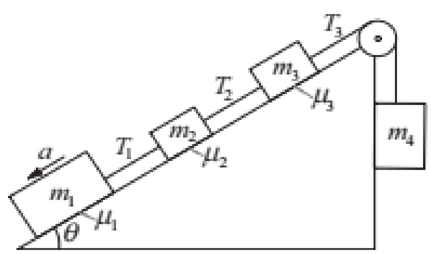
Học Kỳ 1 (2019-2020)
Bài Tập Giải Tích Số. No 6
Giải hệ pt tuyến tính Ax=b

Tìm hiểu toolbox linalg trong Python `https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.15.1/reference/routines.linalg.html`.

Câu 1 *Bốn vật nặng có khối lượng khác nhau m_i được nối với nhau bằng những sợi dây có khối lượng không đáng kể. Ba trong số các khối nằm trên một mặt phẳng nghiêng, hệ số ma sát giữa các khối và mặt phẳng là μ_i. Phương trình chuyển động của các khối có thể được biểu diễn là*

$$\begin{aligned} T_1 + m_1 a &= m_1 g(\sin\theta - \mu_1 \cos\theta) \\ -T_1 + T_2 + m_2 a &= m_2 g(\sin\theta - \mu_2 \cos\theta) \\ -T_2 + T_3 + m_3 a &= m_3 g(\sin\theta - \mu_3 \cos\theta) \\ -T_3 + m_4 a &= -m_4 g. \end{aligned}$$

Trong đó T_i biểu thị lực kéo trong các sợi dây và a là gia tốc của hệ thống. Xác định a và T_i nếu $\theta = 45^o$, $g = 9,82 m/s^2$ và $m = \begin{bmatrix}10 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix}^T$ kg, $\mu = \begin{bmatrix}0.25 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}^T$.



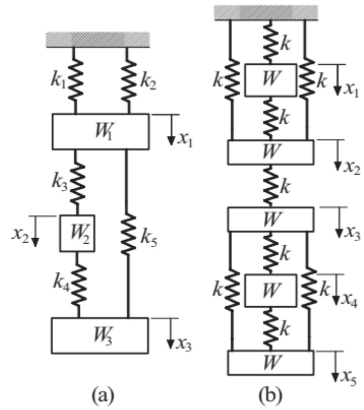
Hình 1: Exercise 25, page 58, Kiusalass

Câu 2 *Công thức chuyển dời của hệ lò xo khối lượng được chỉ ra trong Hình (a) dẫn đến các phương trình cân bằng sau của các khối lượng*

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3+k_5 & -k_3 & -k_5 \\ -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ -k_5 & -k_4 & k_4+k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$$

trong đó k_i là độ cứng của lò xo, W_i đại diện cho trọng lượng của các khối lượng và x_i là độ dịch chuyển của các khối lượng từ cấu hình không định dạng của hệ thống. Viết chương trình giải các phương trình này cho k và W là các đầu vào, còn x là đầu ra. Sử dụng chương trình để tìm các chuyển vị nếu

$$\begin{aligned} &k_1 = k_3 = k_4 = k, \ k_2 = k_5 = 2k, \\ &W_1 = W_3 = 2W, \ W_2 = W \ . \end{aligned}$$



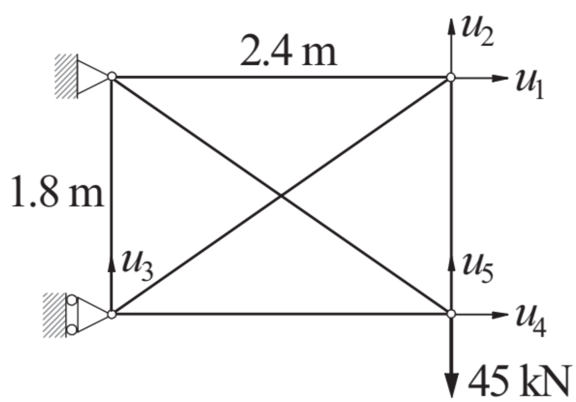
Hình 2: Exercise 12, page 79, Kiusalass

Câu 3 *Công thức chuyển dời của giàn phẳng tương tự như công thức của hệ lò xo khối lượng. Sự khác biệt là (1) độ cứng của các bộ phận là $k_i = (EA/L)_i$, trong đó E là mô đun đàn hồi, A đại diện cho diện tích mặt cắt ngang, và L là chiều dài của bộ phận; và (2) có hai thành phần chuyển vị tại mỗi khớp. Đối với giàn không xác định tĩnh được hiển thị, công thức chuyển vị cho ra phương trình đối xứng $Ku = p$, trong đó*

$$K = \begin{bmatrix} 27.58 & 7.004 & -7.004 & 0 & 0 \\ 7.004 & 29.57 & -5.253 & 0 & -24.32 \\ -7.004 & -5.253 & 29.57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.58 & -7.004 \\ 0 & -24.32 & 0 & -7.004 & 29.57 \end{bmatrix} \quad MN/m \ (millinewton/metre)$$

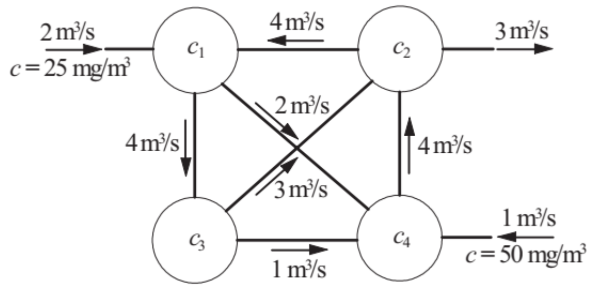
$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -45 \end{bmatrix}^T \quad kN \ (kilonewton) .$$

Xác định các vị trí u_i của các khớp.



Hình 3: Exercise 14, page 79, Kiusalass

Câu 4 *Bốn thùng trộn được nối với nhau bằng đường ống. Chất lỏng trong hệ thống được* *bơm thông qua các đường ống với tỷ lệ hiển thị trong hình. Chất lỏng vào hệ thống chứa hóa chất có nồng độ c theo chỉ định. Xác định nồng độ của hóa chất trong bốn bình, giả sử ở trạng thái dừng.*



Hình 4:

Câu 5 *Viết hàm Python để tìm phân tích LU. Từ đó sử dụng phương pháp Gauss để giải hệ phương trình sau*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3, \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

So sánh kết quả của các em với cách giải sử dụng toolbox linalg trong Python.

Câu 6 *Giả sử ma trận A thỏa mãn $PA = LU$, trong đó a) Hãy sử dụng các ma trận trên để*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

giải hệ phương trình $Ax = b$ với $b = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -12 \end{bmatrix}^T$ mà không cần tìm ma trận A hay tìm nghich đảo của A. b, Có thể nhận thấy ma trận P nhận được từ ma trận đơn vị bằng cách hoán vị các hàng. Hãy nêu ý nghĩa của việc nhân một ma trận với P từ bên trái.

——————————Kết thúc phần 1——————————

Câu 7 *Trong trường hợp ma trận A là đối xứng, xác định dương thì phương pháp Cholesky thường được sử dụng. Hãy đọc phương pháp này trang 116-120 (Giáo trình ĐHBK) hoặc Section 2.4 (Giáo trình Kiusalass) và tìm hiểu hàm numpy.linalg.cholesky trong Python. Áp dụng để giải hệ phương trình sau đối với vế phải b lần lượt bằng* $[2\ 3\ 0]^T$ *và* $[2\ 5\ -2]^T$.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= b_1, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= b_2, \\ 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Câu 8

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Jacobi và phương pháp Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{4x_1 + 0.4x_2 - 0.4x_3 = 8} \\ &\boldsymbol{0.3x_1 - 3x_2 - 0.6x_3 = -9} \\ &\boldsymbol{0.5x_1 + 0.5x_2 + 5x_3 = 5} \end{aligned}$$

a, Viết công thức lặp Jacobi. Kiểm tra điều kiện hội tụ.

b, Với $\boldsymbol{x^{(0)}} = (0, 0, 0)^T$, tính $\boldsymbol{x^{(i)}, i = 1, 2, 3}$.

c, Viết các công thức đánh giá sai số và áp dụng để đánh giá sai số của kết quả $\boldsymbol{x^{(3)}}$ ở câu trên.

d, Hãy đánh giá số lần lặp cần thiết để sai số nhỏ hơn $\boldsymbol{10^{-3}, 10^{-6}}$.

e, Viết công thức lặp Gaus-Seidel cho hệ trên. Tính lại $\boldsymbol{x^{(i)}, i = 1, 2, 3}$.

Câu 9

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + \alpha x_2} & = \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{\alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3} & = \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{\alpha x_2 + x_3} & = \boldsymbol{b_3} \end{cases}$$

a. Viết công thức lặp Jacobi để giải gần đúng hệ trên. Xác định điều kiện về $\boldsymbol{\alpha}$ để sự hội tụ được đảm bảo.

b. Viết công thức lặp Gauss-Seidel để giải gần đúng hệ trên. Xác định điều kiện về $\boldsymbol{\alpha}$ để sự hội tụ được đảm bảo.

c. Từ các tính toán ở hai câu trên, hãy so sánh tốc độ hội tụ của hai phương pháp.

——————————Hết——————————-