

Bài tập lớn: Lý thuyết hệ điều khiển tuyến tính
Thời hạn nộp bài: 09/05/2021

Câu 1. Một hệ điều khiển tuyến tính bậc 2 có dạng

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t), \text{ với mọi } t \geq 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$y = Cx(t) + \tilde{D}u(t), \quad (2)$$

trong đó $M, K \in \mathbb{R}^{n,n}$ là các ma trận giá trị thực thể hiện trọng và độ cứng; M là khả nghịch, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n,p}$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $C \in \mathbb{R}^{q,n}$, $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{q,p}$. Ta gọi M, K, B, C, \tilde{D} là các ma trận hệ số của hệ.

i) Hệ (1) được gọi là dương trong (internally positive) nếu như với mọi biến điều khiển không âm (tức là $u(t) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$) và mọi điều kiện ban đầu không âm (tức là $x_0 \geq 0, \dot{x}_0 \geq 0$) thì trạng thái $x(t)$ và đầu ra $y(t)$ đều không âm.

ii) Hệ được gọi là dương ngoài (externally positive) nếu trong phần i) ở trên ta chỉ yêu cầu $y(t) \geq 0$ chứ không yêu cầu $x(t) \geq 0$.

Đề đơn giản xét trường hợp $M = I_n$ là ma trận đơn vị.

a) Hãy tìm một điều kiện đủ của các ma trận hệ số của hệ (1) để hệ là dương trong. Điều kiện đó có phải là điều kiện cần không?

b) Tìm điều kiện cần và đủ của các ma trận hệ số của hệ (1) để hệ là dương trong.

c) Hãy chỉ ra 1 ví dụ mà hệ là dương ngoài nhưng không là dương trong.

Câu 2. Xét hệ dương bậc nhất dạng

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \text{ với mọi } t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (4)$$

trong đó A, B, C là các ma trận hệ số. Trong thực tế người ta quan tâm đến các hệ dương và ổn định theo nghĩa sau.

i) Xét $u \equiv 0$. Khi đó hệ (3) được gọi là ổn định theo nghĩa Lyapunov nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ đủ bé và N đủ lớn sao cho với mọi điều kiện đầu thỏa mãn $\|x_0\|_2 \leq \delta$ thì $\|x(t)\| < \epsilon$ với mọi $t \geq N$. Thêm vào đó, nếu $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ thì ta nói hệ là ổn định tiệm cận.

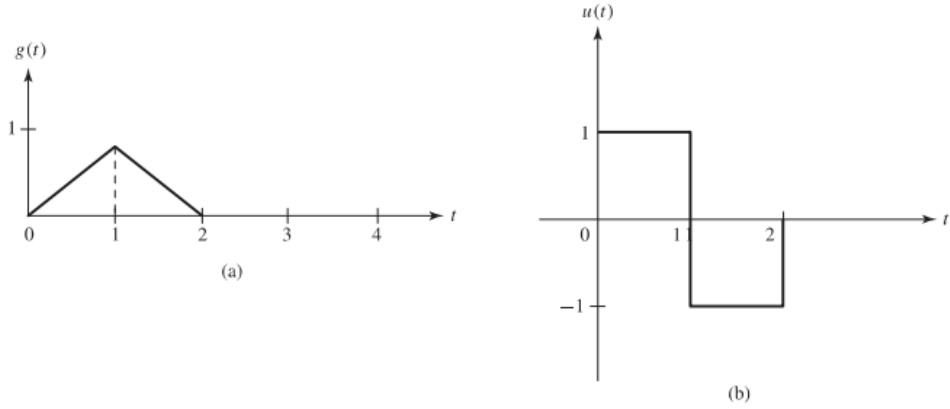
ii) Hệ (3) được gọi là ổn định BIBO nếu với mọi đầu vào u bị chặn đều theo t thì đầu ra y cũng bị chặn đều theo t .

a) Cho $C \geq 0$. Hãy chứng minh rằng một hệ dương trong bất kỳ dạng (3) là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi mọi hệ số của đa thức đặc trưng $\det(\lambda I - A)$ là dương.

b) Cho $C \geq 0$. Hãy chứng minh rằng một hệ dương trong bất kỳ dạng (3) là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi mọi định thức con góc trái của $-A$ là dương.

c) Nếu hệ là ổn định tiệm cận hãy chứng minh nó là ổn định BIBO. Điều ngược lại có đúng không? Vì sao?

Câu 3. a) Hãy xem xét một hệ thống có phản hồi xung như Hình 1 (a). Tìm phản hồi trạng thái 0 được kích thích bởi đầu vào $u(t)$ được thể hiện trong Hình (b).



Hình 1:

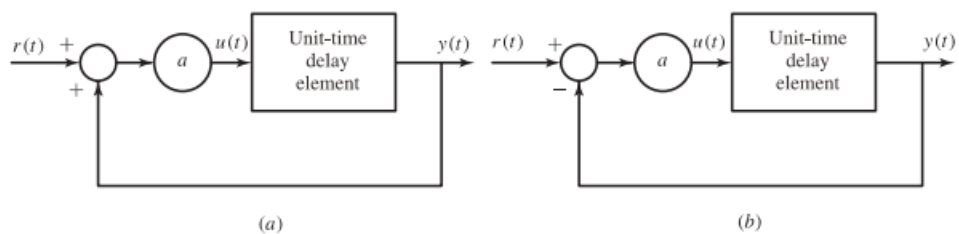
b) Xét một hệ 2 đầu vào và 2 đầu ra được biểu diễn bởi phương trình

$$D_{11}(p)y_1(t) + D_{12}(p)y_2(t) = N_{11}(p)u_1(t) + N_{12}(p)u_2(t),$$

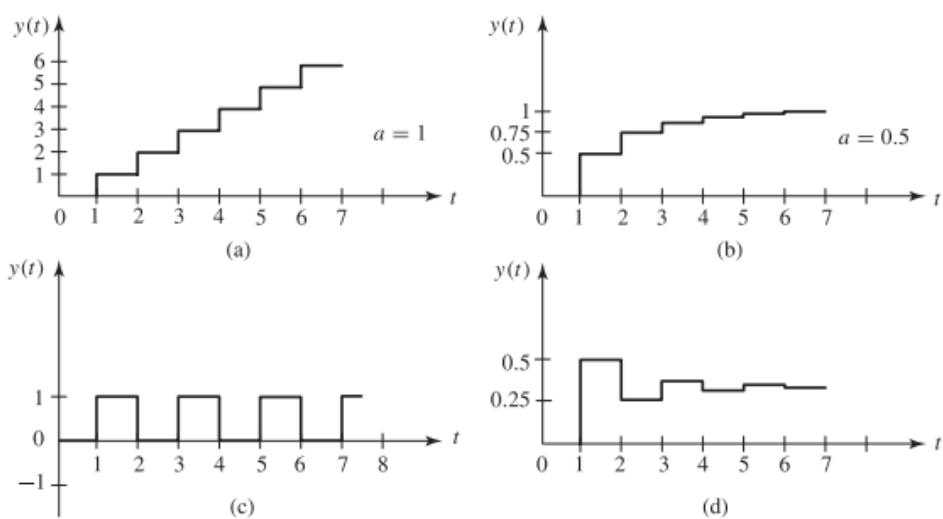
$$D_{21}(p)y_1(t) + D_{22}(p)y_2(t) = N_{21}(p)u_1(t) + N_{22}(p)u_2(t)$$

trong đó N_{ij} and D_{ij} là các đa thức của $p := d/dt$. Tìm ma trận hàm truyền của hệ.

c) Hãy xem xét các hệ thống phản hồi dương và âm được thể hiện trong Hình 2 (a) và (b). Chứng tỏ rằng các phản hồi theo bước đơn vị của hệ thống phản hồi dương được thể hiện trong Hình 3 (a) cho $a = 1$ và trong Hình 3 (b) cho $a = 0.5$. Cũng chứng tỏ rằng các phản hồi theo bước đơn vị của hệ thống phản hồi âm được thể hiện trong (c) và (d) tương ứng với $a = 1$ và $a = 0.5$.



Hình 2: Hệ thống điều khiển phản hồi dương và âm



Hình 3:

Hết