

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN-CƠ-TIN HỌC**

Lê Thị Thu An

BÀI TẬP CUỐI KÌ

Ngành Toán học
(Chương trình đào tạo: tài năng)

Hà Nội - 2021

Câu 4: Giải điều kiện cần và đủ cho ma trận $K \in \mathbb{R}^{n,n}$ sao cho:

$$(1) \quad \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m)!} (-K)^m t^{2m} = 0$$

và

$$(2) \quad \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m+1)!} (-K)^m t^{2m+1} \geq 0$$

ở trong 2 trường hợp:

i) K là vô hướng:

- Nếu $-K \geq 0$ thì (1),(2) đều thỏa mãn.
- Nếu $-K < 0$ thì $-K = (-1)x^2$

với $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m)!} (-K)^m t^{2m} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m)!} (-1)^m (xt)^{2m} = \cos(xt) \end{aligned}$$

vì $t \in [0, +\infty)$ nên $f(t)$ sẽ < 0 với t nào đó.

Vậy điều kiện cần và đủ của (1) và (2) là $-K \geq 0$

ii) K là ma trận vuông, đối xứng:

- Nếu $-K \geq 0$ thì (1),(2) đều thỏa mãn.
- Nếu $-K < 0$ thì

$$-K = S^T A S$$

với S là ma trận trực giao, A là ma trận đường chéo $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$.

$$(-K)^m = S^T \text{diag}(a_1^m, \dots, a_n^m) S$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m)!} (-K)^m t^{2m} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m)!} S^T \text{diag}(a_1^m, \dots, a_n^m) S t^{2m} = \cos(xt) \end{aligned}$$

Câu 5: Giải điều kiện cần và đủ cho ma trận M, D, K, B sao cho hệ bậc 2:

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t) \quad (5)$$

với mọi $t \geq 0$ với $M \in \mathbb{R}^{n,n}$, khả nghịch.

Giải: Vì M khả nghịch nên không mất tổng quát, cho $M = I_n$.

b) Là C_2 -điều khiển được, chuyển từ $(x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sang $(x_1, \dot{x}_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Đặt $z(t) = \dot{x}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

Vậy hệ (5) là C_2 -điều khiển được khi và chỉ khi $\left[\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \right]$ trong hệ (3) là C -điều khiển được.