

**Bài Tập Giải Tích Số. No 5b: Tính gần đúng tích phân
Các phương pháp Newton-Cotes & Gauss**

BÀI TẬP LÝ THUYẾT

Câu 1 a) Hãy tính các tích phân sau sử dụng cả 2 phương pháp Hình thang/Trung điểm đến 4 chữ số thập phân và tính sai số tương đối, biết kết quả chính xác là 0.7468.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx .$$

b) Nếu cần tính tích phân nói trên với sai số nhỏ hơn $1e-9$ bằng các phương pháp Hình thang/Trung điểm composite thì cần sử dụng tối thiểu khoảng bao nhiêu điểm nút?

Câu 2 Tích phân logarit là một dạng tích phân phụ thuộc tham số đặc biệt có dạng

$$\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} .$$

Với x đủ lớn, số lượng các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng x là xấp xỉ gần bằng $\text{li}(x)$. Ví dụ, có 46 số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng 200, và $\text{li}(200)$ thì xấp xỉ 50.

- a) Hỏi có bao nhiêu số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng 300 nếu sử dụng công thức trên.
b) Sử dụng pp Simpson 1/3 composite để tính toán tích phân trên với độ chính xác $1e-6$ thì cần dùng bao nhiêu điểm nút? Bước h của phương pháp =?
c) Hãy lập trình phương pháp Simpson 1/3 và 3/8 để tìm $\text{li}(n)$ với $n = 200, 300, \dots, 1000$. So sánh kết quả thực tế và xấp xỉ theo bảng sau.

n	200	300	1000
Simpson 1/3					
Simpson 3/8					
Kết quả thực tế					
Sai số					

Câu 3 Hãy xác định các hằng số a, b, c , và d sao cho quy tắc cầu phương sau có cấp chính xác là 3.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1) .$$

Câu 4 Hãy xác định các hằng số a, b, c, d, e sao cho quy tắc cầu phương sau có cấp chính xác là 4.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = af(-1) + bf(1) + cf(0) + df'(-1) + ef'(1) .$$

Câu 5 Hãy tìm 4 hằng số A, B, C, D sao cho quy tắc cầu phương sau có cấp chính xác lớn nhất có thể.

$$Af(-h) + Bf(0) + Cf(h) = hDf'(h) + \int_{-h}^h f(x)dx .$$

=====BÀI TẬP LẬP TRÌNH=====

Câu 6 a) Viết hàm trong Python để tính tích phân dựa trên các quy tắc cầu phương Simpson 1/3 và 3/8 dạng composite, ví dụ như

```
def Simpson_3_8(f, a, b, tol):
    return I, h
```

trong đó f là hàm; a và b là 2 đầu mút, tol là sai số cần đạt được của việc tính xấp xỉ tích phân, I là giá trị gần đúng của tích phân, h là độ rộng mỗi bước.

b) Test hàm đã cho và so sánh sai số của hàm đó với hàm `simpson` trong module `scipy.integrate`. Chú ý tìm hiểu hàm `simpson` cẩn thận.

Câu 7 a) Đề xuất phương án và thực hiện việc tính xấp xỉ các tích phân suy rộng sau với sai số $tol = 1e - 9$, sử dụng các hàm đã viết trong bài tập trước.

$$i) A = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \quad (=1) \quad ii) B = \int_0^\infty \frac{t}{e^{2t}} dx \quad (=1/4) .$$

b) So sánh sai số của kết quả tìm được với sai số của hàm `quad` trong module `scipy.integrate`.

Câu 8 Tìm hiểu các hàm `newton_cotes`, `quadrature`, `fixed_quad` trong module `scipy.integrate` để trả lời câu hỏi "Hàm đây dùng để làm gì, hoạt động như thế nào và dựa trên thuật toán nào." Ứng dụng các quy tắc đó để tính tích phân trong các Bài Tập 1 và 7.

=====BÀI TẬP THÊM (Tự luyện tập)=====

Câu 9 Xét tích phân $\int_0^1 \sin(\pi x^2/2) dx$ và giả sử rằng chúng ta muốn tính gần đúng tích phân với sai số bé hơn $1e - 4$.

a. Nếu chúng ta dùng quy tắc hình thang với các nút cách đều thì bước h cần dùng là bao nhiêu?

b. Câu hỏi tương tự với quy tắc Simpson?

Câu 10 Độ dài của một đường cong được biểu diễn bởi hàm số $y = f(x)$ trên một đoạn $[a, b]$ được tính bởi tích phân $I(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Sử dụng các hàm vừa viết trong bài tập trước để tính độ dài của các đường cong sau.

$$(a) f(x) = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \quad (b) f(x) = e^x, 0 \leq x \leq 1, \quad (c) f(x) = e^{x^2}, 0 \leq x \leq 1.$$

Câu 11 Hãy thực hiện lại phương pháp hệ số bất định để tìm các hệ số của phương pháp Newton-Cotes ứng với các trường hợp $n = 1$ (hình thang), $n = 2$ (Simpson 1/3) và $n = 3$ (Simpson 3/8).