

Các em có thể lựa chọn 1 trong các tổ hợp 123, 134, 234, 135, 235

Câu 1 ($4 \times 1 = 4$ điểm)

- a) Chứng minh rằng phương trình $1 + 4x - 10x^3 = 0$ có nghiệm duy nhất trong đoạn $[0.5, 1]$.
b) Có rất nhiều cách khác nhau để chuyển về bài toán tìm điểm bất động ($x = \varphi(x)$) để giải bằng phương pháp lặp đơn. Ta lấy ví dụ 2 phương pháp sau.

i) $\varphi(x) = 1 + 5x - 10x^3$,

ii) $\varphi(x) = \sqrt{\frac{1 + 4x}{10x}}$.

Hãy biện luận về tính hội tụ của các phương pháp trên.

Hai câu sau chỉ thực hiện cho phương pháp ii).

- c) Tìm số bước lặp cần thiết sao cho sai số tuyệt đối của nghiệm bé hơn $1e - 9$ với x_0 tùy chọn.
d) Tính x_3 chính xác đến 4 chữ số thập phân và đánh giá sai số hậu nghiệm cho x_3 , với $x_0 = 0.8$.

Câu 2 ($4 \times 1 = 4$ điểm)

- a) Viết công thức lặp để giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Jacobi. Phương pháp lặp này có hội tụ không? Vì sao?

$$4x_1 + 0.4x_2 - 0.4x_3 = 8$$

$$0.3x_1 - 3x_2 - 0.6x_3 = -9$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 - 5x_3 = 5$$

- b) Đối với hệ $x^{i+1} = Mx^i + n$ mà các em vừa thu được bằng phương pháp Jacobi, hãy tìm $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_\infty$ của ma trận hệ số M .
c) Tính số bước lặp cần thiết bằng ước lượng tiên nghiệm sao cho ta có ước lượng sai số nghiệm $\|x^* - x^n\| \leq 1e - 6$, với chuẩn $\|\cdot\|$ phù hợp và với x^0 tùy chọn.
d) Cho $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Hãy tìm x^i , $i = 1, 2, 3$. Hãy sử dụng ước lượng hậu nghiệm để đánh giá sai số của x_3 .

Câu 3 (2 điểm PLU + 2 điểm giải hệ)

Tìm phân tích PLU của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2.34 & -4.10 & 1.78 \\ 1.98 & 3.47 & -2.22 \\ 2.36 & -15.17 & 6.81 \end{bmatrix}$$

và hãy áp dụng để giải hệ sau

$$\begin{bmatrix} 2.34 & -4.10 & 1.78 \\ 1.98 & 3.47 & -2.22 \\ 2.36 & -15.17 & 6.81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.73 \\ -6.63 \end{bmatrix}$$

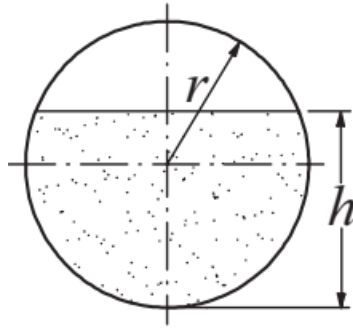
Đề II - Thi trên máy 60 phút

Câu 4 (3 điểm)

Thùng dầu hình trụ có bán kính r và chiều dài L được đổ đầy đến độ sâu h . Kết quả khối lượng dầu trong thùng là

$$V = r^2 L \left(\phi - \left(1 - \frac{h}{r} \right) \sin \phi \right)$$

trong đó $\phi = \arccos \left(1 - \frac{h}{r} \right)$. Nếu bể đầy $3/4$, hãy xác định tỉ số h/r .



Hình 1:

Câu 5 (3 điểm)

Hãy vẽ đồ thị hàm số và lập trình phương pháp Newton để tính toán tất cả các nghiệm thực dương của phương trình

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3 = 0,$$

với sai số $1e-9$. So sánh với nghiệm (giả sử chính xác) có được bằng cách sử dụng hàm `fsolve` from `scipy.optimize` import `fsolve` và tính sai số tương đối.

Hết

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm