

Mục lục

Mở đầu	3
1 Một số kiến thức cơ sở	4
1.1 Sơ lược về hàm Lambert W	4
1.1.1 Hàm Lambert vô hướng	5
1.1.2 Dạng ma trận của hàm Lambert	7
1.2 Một số tính chất cơ bản của các hệ điều khiển không trễ	9
2 Phân tích các hệ điều khiển có trễ sử dụng phương pháp hàm Lambert W	11
2.1 Giới thiệu chung	11
2.2 Ứng dụng của hàm Lambert W trong lý thuyết phương trình vi phân có trễ	13
2.2.1 Trường hợp vô hướng	13
2.2.2 Trường hợp hệ phương trình	16
2.3 Tính ổn định của hệ	19
2.4 Hàm phân rã cho hệ điều khiển có trễ	20
2.5 Tính điều khiển được và tính quan sát được	21
2.5.1 Tính điều khiển được	21
2.5.2 Tính quan sát được	27
2.6 Phân tích và điều khiển các hệ có trễ sử dụng gói công cụ Lamber-tWDDE	33
2.6.1 Phân tích sự rung lắc của máy công cụ	33
2.6.2 Điều khiển động cơ Diesel	37
3 Kết luận	40

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Các hệ điều khiển có trễ biểu diễn các hệ động lực có chứa độ trễ thời gian trong hệ thống, hoặc trễ được sử dụng như một công cụ để điều khiển và kiểm soát các tính chất mong muốn của hệ thống, ví dụ như tính ổn định, tính điều khiển được hay quan sát được, v.v. Độ trễ về mặt thời gian như vậy là rất phổ biến trong các hệ động lực hay hệ điều khiển trong khoa học và kỹ thuật, và có thể dẫn đến một số vấn đề không mong muốn như sự không ổn định và thiếu chính xác, và do đó làm giảm hiệu suất có thể đạt được của các hệ điều khiển. Thêm vào đó, bởi vì các phương trình vi phân có trễ là các hệ động lực vô hạn chiều, việc phân tích các hệ điều khiển có trễ bằng các phương pháp cổ điển được phát triển cho các hệ điều khiển hữu hạn chiều là không khả thi.

Trong những thập niên gần đây, hàm Lambert W được nghiên cứu và sử dụng như một phương pháp tiếp cận hiệu quả cho các hệ phương trình vi phân đơn trễ (tức là chỉ có một trễ) với hệ số hằng số. Cách tiếp cận sử dụng hàm Lambert W dẫn đến công thức nghiệm hiển cho các phương trình vi phân có trễ và cho phép nghiên cứu sâu hơn về các tính chất điều khiển tại từng điểm, ví dụ như tính điều khiển được, tính quan sát được, các ma trận Gramian. Những công trình nghiên cứu tiên phong gần đây của Yi, Nelson và Ulsoy (2008-2012) dẫn đến sự ra đời của gói công cụ LambertWDDE được lập trình trong ngôn ngữ tính toán khoa học MATLAB.

Với mong muốn được tìm hiểu kĩ hơn về các tính chất điều khiển của hệ điều khiển có trễ và ứng dụng trong thực tế, tôi quyết định chọn đề tài **“Lý thuyết điều khiển của các hệ động lực có trễ sử dụng phương pháp hàm Lambert và ứng dụng”** cho luận văn thạc sĩ của mình.

Chương 1

Một số kiến thức cơ sở

Mục đích chính của luận văn này là về phương pháp tiếp cận sử dụng hàm Lambert W để nghiên cứu các hệ điều khiển có trễ. Trong chương này chúng ta sẽ trình bày phần kiến thức chuẩn bị cho Chương 2, bao gồm hai mục chính (1) giới thiệu sơ lược về hàm Lambert W , và (2) nhắc lại một số tính chất cơ bản của các hệ điều khiển không trễ.

1.1 Sơ lược về hàm Lambert W

Theo định nghĩa [9, 14, 23], mọi hàm $W(s)$ thỏa mãn:

$$W(s)e^{W(s)} = s \quad (1.1)$$

được gọi là hàm Lambert W . Hàm Lambert W , với đối số phức s , là một hàm có giá trị phức với vô hạn nhánh, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$. Hàm vô hướng Lambert W đã được lập trình sẵn trong nhiều phần mềm tính toán khoa học, ví dụ như hàm *lambertw* trong MATLAB. Hàm ma trận Lambert W [48] có thể thu được bằng cách sử dụng phép biến đổi tương tự và có thể dễ dàng đánh giá bằng cách sử dụng gói công cụ LambertWDDE [11]. Các hàm số này rất hữu ích trong nghiên cứu tổ hợp (ví dụ như phép liệt kê của cây) cũng như trong thuyết tương đối và cơ học lượng tử. Chúng có thể được sử dụng để giải rất nhiều phương trình khác nhau có chứa đến số mũ (ví dụ như cực đại của các phân phối Planck, Bose-Einstein và Fermi-Dirac) cũng như trong việc giải các phương trình vi phân có trễ như sẽ thảo luận trong chương tiếp theo.

1.1.1 Hàm Lambert vô hướng

Hàm Lambert W được định nghĩa là một hàm phức ngược đa trị của hàm $w \mapsto we^w$ với $w \in \mathbb{C}$. Năm 1758, Lambert nghiên cứu phương trình $x = q + x^m$ với ẩn số x . Trong [14], Euler biến đổi phương trình Lambert về dạng đối xứng hơn

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta} \quad (1.2)$$

bởi thay thế $x = x^{-\beta}$ và đặt $m = \frac{\alpha}{\beta}$ và $q = (\alpha - \beta)v$. Phiên bản Euler của chuỗi Lambert có dạng sau

$$\begin{aligned} x^\gamma = 1 + \gamma v + \frac{1}{2}\gamma(\gamma + \alpha + \beta)v^2 + \frac{1}{6}\gamma(\gamma + \alpha + 2\beta)(\gamma + 2\alpha + \beta)v^3 \\ + \frac{1}{24}\gamma(\gamma + \alpha + 3\beta)(\gamma + 2\alpha + 2\beta)(\gamma + 3\alpha + \beta)v^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sau khi chuyển đổi chuỗi, Euler nhìn vào trường hợp đặc biệt, bắt đầu từ $\alpha = \beta$. Để nhìn thấy ý tưởng từ phương trình ban đầu, ta chia (1.1) cho $(\alpha - \beta)$ và cho $\beta \rightarrow \alpha$, ta được

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{x^\alpha - x^\beta}{\alpha - \beta} = vx^{2\alpha}.$$

Do đó

$$x^\alpha \log \alpha = vx^{2\alpha}.$$

Vì vậy

$$\log x = vx^\alpha.$$

Euler chú ý rằng nếu ta giải được phương trình (1.3) với $\alpha = 1$ thì ta có thể giải được nó với mọi $\alpha \neq 0$. Để thấy điều này, ta nhân phương trình (1.3) với α , dẫn đến $\alpha \log x = \log x^\alpha$. Đặt $z = x^\alpha$ và $u = \alpha v$, ta có $\log z = uz$ là kết quả của phương trình (1.3) với $\alpha = 1$.

Để giải phương trình (1.2), đầu tiên Euler cho $\alpha = \beta = 1$ và viết lại (1.2) dưới dạng chuỗi của $\frac{x^\gamma - 1}{\gamma}$. Từ phương trình (1.2) thì

$$\frac{x^\gamma - 1}{\gamma} = v + \frac{1}{2}(\gamma + 2)v^2 + \frac{1}{6}(\gamma + 3)(\gamma + 3)v^3 + \dots$$

Tiếp đến, ông cho $\gamma \rightarrow 0$, vì

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{x^\gamma - 1}{\gamma} = \log x$$

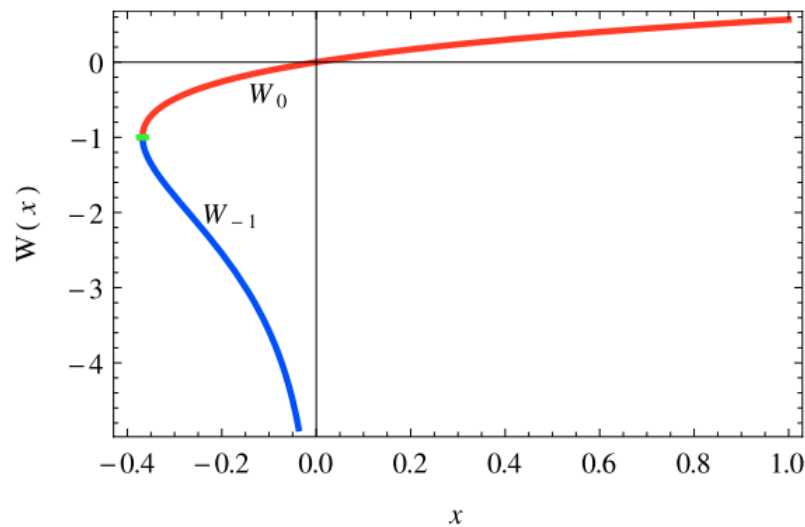
nên ta thu được

$$\log x = v + \frac{2^1}{2!}v^2 + \frac{3^2}{3!}v^3 + \frac{4^3}{4!}v^4 + \dots \quad (1.4)$$

Chuỗi bên vế phải hội tụ với mọi $|v| < \frac{1}{e}$, và nó được định nghĩa là hàm $T(v)$ và được gọi là hàm cây [9]. Nó có giá trị bằng với $-W(-v)$ với $W(z)$ được định nghĩa là hàm thỏa mãn

$$W(z)e^{W(z)} = z. \quad (1.5)$$

Ta sẽ gọi tất 2 hàm này là T và W . Hai hàm này được sử dụng trong rất nhiều ứng dụng, xem [9]. Bởi vì ánh xạ $x \mapsto xe^x$ không phải là đơn ánh nên $W(z)$ không xác định duy nhất từ phương trình (1.5). Trong thực tế hàm Lambert W là hàm có giá trị phức đối với đối số phức z và nó có vô hạn nhánh W_k , ở đó $k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$. Như có thể thấy trong Hình 1.1, hàm Lambert W có hai nhánh thực với điểm nhánh là $(-e^{-1}, -1)$. Nhánh dưới, $W_{-1}(z)$, xác định trên đoạn $[-e^{-1}, 0]$, còn nhánh trên, $W_0(z)$, xác định trên đoạn $[-e^{-1}, \infty)$. Ngoại trừ điểm $z = -e^{-1}$ mà nhánh chính W_0 không khả vi tại đó, tất cả các nhánh đều là giải tích địa phương. Nhánh chính và tất cả các nhánh khác của hàm Lambert có thể được tính toán giải tích thông qua việc tính toán chuỗi. Các ngôn ngữ tính toán khoa học phổ biến hiện nay như Python, Matlab, Maple, Mathematica, ... đều có hàm Lambert (vô hướng) dựng sẵn với độ chính xác tùy ý.



Hình 1.1: Hàm Lambert với 2 nhánh chính $k=0$, $k=-1$

1.1.2 Dạng ma trận của hàm Lambert

Nhắc lại rằng với $z \in \mathbb{C}$, hàm Lambert W được định nghĩa là một hàm ngược đa trị của hàm vô hướng $z \mapsto ze^z$

$$W_k(z) \in \{w \in \mathbb{C} : z = we^w\}$$

trong đó W_k là nhánh thứ k , $k \in \mathbb{Z}$. Bây giờ ta sẽ đi xây dựng khái niệm hàm Lambert W cho ma trận. Đầu tiên ta định nghĩa hàm Lambert W cho ma trận theo dạng chuẩn tắc Jordan

$$J = \text{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s))$$

với $J_n(\lambda)$ là ma trận Jordan cỡ $n \times n$ tương ứng với giá trị riêng λ bội n . Vậy:

$$W_k(J) = \text{diag}(W_{k_1}(J_{n_1}(\lambda_1)), W_{k_2}(J_{n_2}(\lambda_2)), \dots, W_{k_s}(J_{n_s}(\lambda_s))).$$

Chú ý rằng ta có thể lấy các nhánh khác nhau cho mỗi khối Jordan. Nếu J có s khối Jordan và tập chỉ số cho các nhánh của hàm Lambert W là \mathbb{Z} thì tập chỉ số của các nhánh $W_k(j)$ là \mathbb{Z}^s . Với khối Jordan có số chiều là 1 thì ta có thể sử dụng hàm Lambert vô hướng. Với khối có số chiều lớn hơn, ta sẽ định nghĩa hàm Lambert W (với nhánh cố định) của một khối Jordan bởi định nghĩa tiêu chuẩn của hàm ma trận dạng

$$P(J_k(\lambda)) = \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} p^{(k-1)}(\lambda) \\ & p(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & p'(\lambda) \\ & & & p(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$W_k(J_n(\lambda)) = \begin{bmatrix} W_k(\lambda) & W'_k(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} W_k^{(n-1)}(\lambda) \\ & W_k(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & W'_k(\lambda) \\ & & & W_k(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Nếu $k = 0$ thì ta phải giả sử thêm là $\lambda \neq -e^{-1}$ (vì $W'_0(-e^{-1})$ không xác định).

Bên cạnh đó chúng ta chú ý rằng bằng cách lấy đạo hàm cả hai vế của đẳng thức $x = W(x)e^{W(x)}$ ta có

$$W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}} = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}. \quad (1.6)$$

Ta hoàn thành việc định nghĩa hàm Lambert W cho ma trận bằng việc biến đổi ma trận về dạng chuẩn tắc Jordan $A = SJS^{-1}$. Từ đó ta có thể định nghĩa

$$W_k(A) = SW_k(J)S^{-1}.$$

Khi đó với mọi k ta có

$$\begin{aligned} W_k(A) e^{W_k(A)} &= SW_k(J)S^{-1} S e^{W_k(J)} S^{-1} \\ &= SJS^{-1} = A. \end{aligned}$$

Chú ý rằng với nhánh chính $k = 0$, từ bây giờ ta sẽ giả sử rằng $-e^{-1}$ không phải là giá trị riêng tương ứng với khối Jordan với số chiều lớn hơn 1, tức là

$$\text{rank}(A + e^{-1}I) = \text{rank}(A + e^{-1}I)^2.$$

Ví dụ 1.1. Trong ví dụ này chúng ta sẽ minh họa cho việc xác định hàm Lambert của một ma trận. Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Phân tích Jordan của ma trận A là $A = SJS^{-1}$, trong đó

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nếu ta chọn $k_1 = 0$, $k_2 = 2$ tương ứng với hai block Jordan, khi đó ta có

$$W_k(A) = S \begin{bmatrix} W_0(3) & 0 \\ 0 & W_2 \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} S^{-1} = S \begin{bmatrix} W_0(3) & 0 & 0 \\ 0 & W_2(1) & W_2'(1) \\ 0 & 0 & W_2(1) \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Do đó, bằng việc tính toán $W_2'(1)$ dựa trên công thức (1.6) ta có

$$W_k(A) = S \begin{bmatrix} 1.0499 & 0 & 0 \\ 0 & -2.4016 + 10.7763i & 1.0119 + 0.0913i \\ 0 & 0 & -2.4016 + 10.7763i \end{bmatrix} S^{-1}.$$

1.2 Một số tính chất cơ bản của các hệ điều khiển không trễ

Xét một hệ điều khiển không trễ dạng

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{1.7}$$

trong đó các ma trận hệ số là $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,p}$, $C \in \mathbb{R}^{m,n}$, $D \in \mathbb{R}^{m,p}$. Công thức nghiệm $x(t)$ của hệ (1.7) là

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \tag{1.8}$$

Bởi vì hệ phương trình vi phân thường $\dot{x}(t) = Ax(t)$ có phổ hữu hạn, tính ổn định của hệ có thể được xác định bằng cách kiểm tra các vị trí của một số hữu hạn các giá trị riêng trong mặt phẳng phức. Bên cạnh đó, các khái niệm cơ bản khác trong lý thuyết điều khiển của hệ thống tuyến tính (không trễ) sẽ được trình bày trong hai định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1. [7] i) Hệ điều khiển (1.7) hay cặp (A, B) được gọi là *điều khiển được* nếu với mọi trạng thái ban đầu $x(0) = x_0$ và trạng thái cuối x_1 , tồn tại một hàm điều khiển để truyền từ trạng thái x_0 sang trạng thái x_1 trong thời gian hữu hạn $t_1 > 0$, tức là $x(t_1) = x_1$.

ii) Hệ điều khiển (1.7) hay cặp (A, C) được gọi là *quan sát được* nếu với mọi trạng thái ban đầu $x(0) = x_0$ chưa biết, tồn tại một thời điểm $t_1 > 0$ sao cho x_0 có thể được xác định duy nhất dựa trên hàm điều khiển $u(t)$ và hàm đầu ra $y(t)$ trên đoạn $[0, t_1]$.

Định nghĩa 2. [7] Xét hệ điều khiển (1.7). Khi đó các ma trận

$$W_c(t) := \int_0^t e^{A(t-s)}BB^Te^{A^T(t-s)}ds$$

và

$$W_o(t) := \int_0^t e^{A^T(t-s)}C^TCe^{A(t-s)}ds$$

lần lượt được gọi là *ma trận điều khiển Gramian* và *ma trận quan sát Gramian*.

Trong hai định lý sau chúng ta sẽ nhắc lại các điều kiện cần và đủ để kiểm tra tính điều khiển được và tính quan sát được của hệ (1.7).

Định lý 1.2. [7, Chương 6] Hệ (1.7) là điều khiển được khi và chỉ khi một trong những điều kiện tương đương sau được thỏa mãn.

- i) Ma trận điều khiển Gramian $W_c(t)$ là khả nghịch với mọi $t > 0$.
- ii) Ma trận điều khiển được $C := \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ là đủ hạng dòng.
- iii) Ma trận $\begin{bmatrix} A - \lambda I_n & B \end{bmatrix}$ là đủ hạng dòng với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$.

Định lý 1.3. [7, Chương 6] Hệ (1.7) là quan sát được khi và chỉ khi một trong những điều kiện tương đương sau được thỏa mãn.

- i) Ma trận quan sát Gramian $W_o(t)$ là khả nghịch với mọi $t > 0$.
- ii) Ma trận quan sát được $\mathcal{O} := \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \dots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix}$ là đủ hạng dòng.
- iii) Ma trận $\begin{bmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{bmatrix}$ là đủ hạng dòng với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$.

Định lý 1.4. [7, Chương 8] Xét hệ điều khiển (1.7). Khi đó ta có các khẳng định sau.

- i) Cặp $(A - BK, B)$, với ma trận K bất kỳ thuộc $\mathbb{R}^{p,n}$, là điều khiển được khi và chỉ khi cặp (A, B) là điều khiển được.
- ii) Tất cả các giá trị riêng của ma trận $A - BK$ có thể chọn được bất kỳ (nếu như các giá trị riêng phức liên hợp đi thành đôi một) bằng cách lựa chọn một ma trận điều khiển phản hồi $K \in \mathbb{R}^{p,n}$ phù hợp khi và chỉ khi cặp (A, B) là điều khiển được.

Nếu hệ đã cho là điều khiển được thì một bộ (thiết bị) điều khiển (controller) đóng kín có thể được thiết kế bằng nhiều phương pháp, bao gồm cả điều khiển phản hồi và phương pháp thiết kế giá trị riêng (eigenvalue assignment). Tương tự, nếu một hệ có thể quan sát được, sau đó, một bộ quan sát (observer) hay bộ ước lượng trạng thái (state estimator) cũng có thể được thiết kế bằng cách sử dụng phương pháp thiết kế giá trị riêng. Chi tiết độc giả quan tâm có thể tham khảo trong [7, Chương 8, 9].

Chương 2

Phân tích các hệ điều khiển có trễ sử dụng phương pháp hàm Lambert W

Trong chương này ta trình bày tổng quan về phương pháp tiếp cận sử dụng hàm Lambert W để nghiên cứu các hệ điều khiển có trễ. Cách tiếp cận này đã được xây dựng và phát triển để phân tích và điều khiển các hệ có trễ tuyến tính, hệ số hằng với một trễ hằng số biết trước (đơn trễ). Biểu diễn nghiệm trong miền thời gian được xây dựng dưới dạng chuỗi vô hạn, với đặc tính là chuỗi chặt cụt sẽ cho ta phần trội (dominant part) của nghiệm của hệ điều khiển ban đầu, mà nó chứa các giá trị riêng nằm ngoài cùng bên phải. Trước hết công thức nghiệm được xây dựng cho các hệ bậc nhất (hệ vô hướng), và sau đó được phát triển cho hệ bậc cao bất kỳ bằng việc sử dụng cách tiếp cận hàm Lambert. Các công thức biểu diễn nghiệm được sử dụng để nghiên cứu những tính chất cơ sở của lý thuyết điều khiển cho các hệ điều khiển có trễ, ví dụ như tính điều khiển được, tính quan sát được.

2.1 Giới thiệu chung

Hệ điều khiển có trễ nảy sinh trong rất nhiều bài toán trong tự nhiên và kỹ thuật, chẳng hạn như trong các quá trình với trễ vận chuyển, các bài toán dòng giao thông, các hệ sinh học, viễn thông và còn rất nhiều vấn đề khác. Có rất nhiều tài liệu về các hệ có trễ, bao gồm nhiều cuốn sách và bài tổng quan, xem [3, 16, 17, 21, 30, 32, 33] và các tài liệu trong đó. Chương này tập trung vào một cách tiếp cận đặc biệt và được phát triển gần đây, dựa trên cách tiếp cận sử dụng hàm Lambert W, [9], để phân tích và điều khiển các hệ điều khiển tuyến tính, hệ số hằng với đơn trễ, [48].

Xét một hệ điều khiển không trễ dạng (1.7) với công thức nghiệm tường minh (1.8). Bởi vì hệ phương trình vi phân thường trong (1.7) có phổ hữu hạn, tính ổn định của hệ có thể được xác định bằng cách kiểm tra các vị trí của một số hữu hạn các giá trị riêng trong mặt phẳng phức. Bên cạnh đó, công thức nghiệm của hệ này cũng được sử dụng để xây dựng các ma trận điều khiển Grammian và ma trận quan sát Grammian. Từ đó, tính điều khiển và tính quan sát sẽ được kiểm tra bằng cách điều kiện hạng của ma trận điều khiển Grammian và ma trận quan sát Grammian tương ứng, như đã được trình bày trong Mục (1.2). Thêm vào đó, nếu hệ đã cho là điều khiển được thì một bộ (thiết bị) điều khiển (controller) đóng kín có thể được thiết kế bằng nhiều phương pháp, bao gồm cả điều khiển phản hồi và phương pháp thiết kế giá trị riêng (eigenvalue assignment). Tương tự, nếu một hệ có thể quan sát được, sau đó, một bộ quan sát (observer) hay bộ ước lượng trạng thái (state estimator) cũng có thể được thiết kế bằng cách sử dụng phương pháp thiết kế giá trị riêng. Đối với các hệ phương trình trạng thái dạng (1.7), bởi vì ta có công thức nghiệm tường minh nên các bước nghiên cứu đề cập ở trên có thể thực hiện được một cách đơn giản.

Mặc dù vậy, đối với các phương trình vi phân có trễ thì công thức nghiệm tường minh là chưa có, và do đó các bước nghiên cứu ở trên sẽ khó có thể thực hiện hơn nhiều. Để tìm nghiệm (nghiệm giải tích hoặc nghiệm số), thông thường phương pháp các bước (method of steps) được thực hiện nhằm tìm ra công thức nghiệm hay tính toán nghiệm xấp xỉ một cách tuần tự trên các đoạn $[0, h]$, $[h, 2h]$, $[2h, 3h]$,... Bên cạnh đó, do sự tồn tại của trễ $h > 0$ mà phổ của hệ là một tập có vô hạn phần tử. Để vượt qua những khó khăn này, gần đây phương pháp hàm Lambert W đã được đề xuất, chứng minh và phát triển nhằm nghiên cứu các hệ điều khiển có trễ theo cách tương tự với các phương trình trạng thái dạng (1.7) ([1, 46]). Đặc trưng của phương pháp này là sử dụng các nhánh của hàm Lambert W để biểu diễn nghiệm dưới dạng một chuỗi vô hạn với biến số là các giá trị riêng của hệ điều khiển có trễ đang xét. Trên cơ sở đó, ta sẽ tìm cách cắt gọn để thu được một chuỗi chặt chẽ hữu hạn sao cho nó chứa tất cả các giá trị riêng trội (các giá trị riêng có vai trò quyết định đáng điệu của nghiệm).

Trong tự nhiên và kỹ thuật có rất nhiều hệ điều khiển mà trong đó xuất hiện độ trễ thời gian, ví dụ như các hệ sinh học, mô hình kinh tế, chuỗi cung ứng, lưu

lượng giao thông, viễn thông, hệ điều khiển mạng lưới, hệ điều khiển ô tô, xem [32]. Do đó, việc mở rộng các công cụ phân tích và điều khiển đã biết đối với phương trình dạng (1.7) (ODEs) cho các hệ điều khiển có trễ (DDEs) là rất quan trọng. Chương này nhằm cung cấp một cái nhìn tổng quan và súc tích về phương pháp hàm Lambert W nhằm phân tích và điều khiển các hệ đơn trễ với trễ hằng số thông qua các ví dụ số đơn giản. Để thực hiện các thử nghiệm số, ta sẽ sử dụng gói công cụ nguồn mở LambertWDDE, có sẵn để tải xuống từ trang web [11]. Các ví dụ bổ sung có thể được tìm thấy tại cùng trang web [11]. Nhiều ứng dụng khác của phương pháp này có thể được tìm thấy trong các tài liệu tham khảo được trích dẫn (ví dụ [12, 32, 43–45, 48, 49])

2.2 Ứng dụng của hàm Lambert W trong lý thuyết phương trình vi phân có trễ

2.2.1 Trường hợp vô hướng

Trước hết chúng ta xét hệ điều khiển trong đó cả biến điều khiển $u(t)$ và biến trạng thái $x(t)$ đều là vô hướng

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_d x(t - h) + bu(t), \quad (2.1)$$

trong đó a , b , a_d là các hằng số đã biết và h là trễ hằng số. Điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ và $x(t) = g(t)$ với mọi $-h \leq t < 0$ phải được cho trước. Hàm Lambert W được áp dụng để giải phương trình đặc trưng được viết lại dưới dạng

$$(s - a)e^{sh} = a_d. \quad (2.2)$$

Nhân cả hai vế của phương trình (2.2) với he^{-ah} ta nhận được

$$h(s - a)e^{h(s-a)} = a_d h e^{-ah}. \quad (2.3)$$

Dựa trên định nghĩa của hàm Lambert W trong biểu thức (2.3) ta có

$$W(a_d h e^{-ah}) e^{W(a_d h e^{-ah})} = a_d h e^{-ah}. \quad (2.4)$$

So sánh các phương trình (2.3) và (2.4) ta có

$$h(s - a) = W(a_d h e^{-ah}). \quad (2.5)$$

Do đó, nghiệm của phương trình đặc trưng trong phương trình (2.2) có thể được viết theo hàm Lambert W như

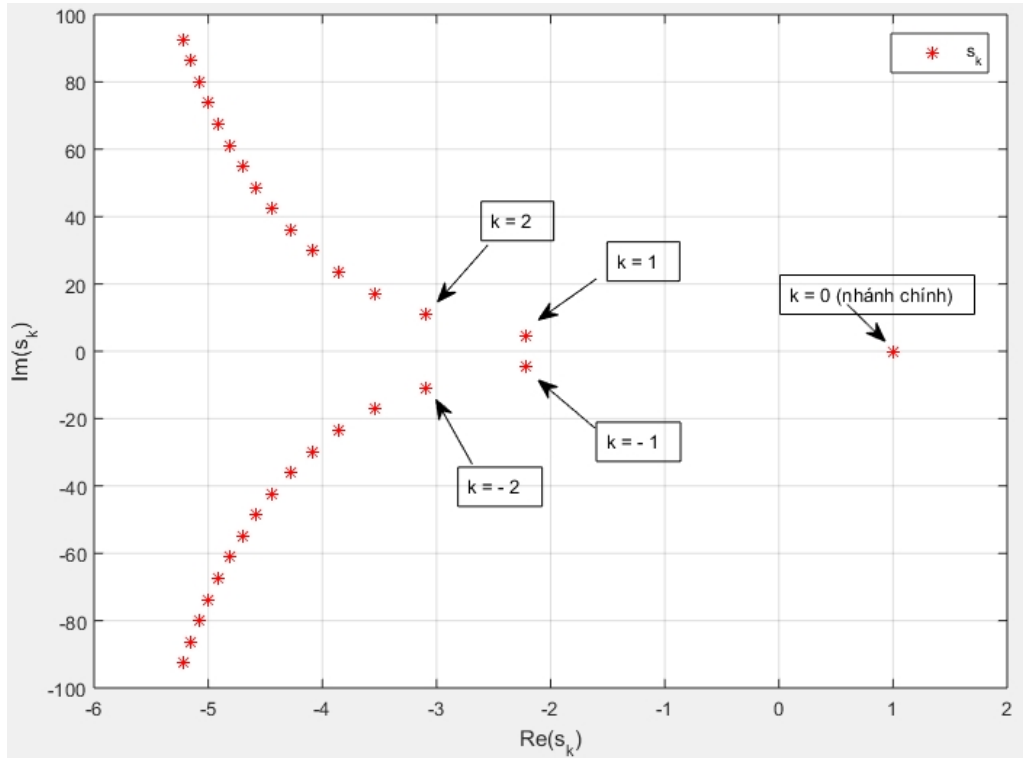
$$s = \frac{1}{h} W(a_d h e^{-ah}) + a. \quad (2.6)$$

Phổ của phương trình DDE vô hướng (2.1) thu được bằng cách sử dụng vô hạn nhánh của hàm Lambert W, và được trình bày tường minh theo các tham số a, a_d và h của hệ. Các nghiệm của phương trình đặc trưng (2.2), cho $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ là

$$s_k = \frac{1}{h} W_k(a_d h e^{-ah}) + a. \quad (2.7)$$

Hơn nữa, đối với phương trình (2.1) tính chất ổn định được xác định bởi giá trị riêng bên phải (nửa phổ phải) của mặt phẳng phức (tức là, $k = 0$). Do đó, để đảm bảo sự ổn định, không cần thiết phải kiểm tra các giá trị riêng khác trong phổ vô hạn.

Ví dụ 2.1. Cho $a = -1, a_d = 0.5$, và $h = 1$ các nghiệm đặc trưng thu được bằng phương trình (2.7) và hàm *lambertw* trong MATLAB, và được vẽ trong Hình 2.1.



Hình 2.1: Giá trị riêng của phương trình (2.1) khi $a = -1, a_d = 0.5$, và $h = 1$. Giá trị riêng bên phải là tương ứng với nhánh chính $k = 0$, các cặp tiếp theo lần lượt tương ứng với $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 15$.

Trong [46] nghiệm tổng quát của phương trình (2.1) được biểu diễn dưới dạng một chuỗi vô hạn dựa trên các giá trị riêng trong công thức (2.7) như sau

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{s_k t} C_k^I + \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{s_k(t-\eta)} C_k^N b u(\eta) d\eta, \quad (2.8)$$

trong đó

$$C_k^I = \frac{x_0 + a_d e^{-s_k h} \int_0^h e^{-s_k t} g(t-h) dt}{1 + a_d h e^{-s_k h}}, \quad (2.9)$$

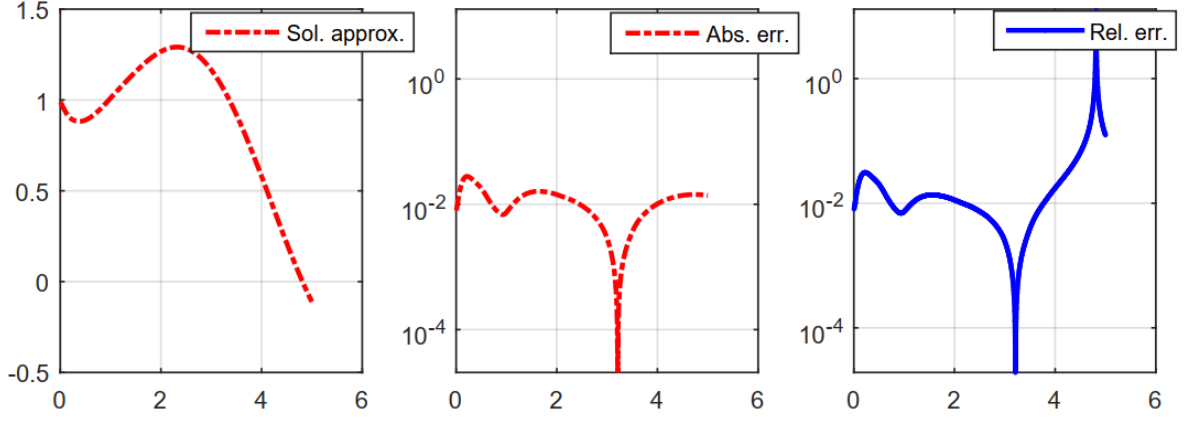
và

$$C_k^N = \frac{1}{1 + a_d h e^{-s_k h}}. \quad (2.10)$$

Lưu ý rằng các hệ số C_k^I được xác định từ hàm $g(t)$ và trạng thái ban đầu x_0 , và các hệ số C_k^N chỉ được xác định theo các tham số hệ a, a_d và h . Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (2.8) có thể được xem là tổng của một nghiệm của hệ thuần nhất (mà chúng ta sẽ gọi là *ng nghiệm tự do (free solution)*) và một nghiệm riêng của hệ không thuần nhất (mà chúng ta sẽ gọi là *ng nghiệm chịu lực tác động (forced solution)*).

Các điều kiện để hội tụ của các nghiệm dạng chuỗi như vậy được thảo luận bởi Bellman và Cooke trong [3]. Ví dụ, nếu tất cả mọi giá trị riêng s_k đều có phần thực âm và tồn tại một chặn dưới dương cho khoảng cách giữa các giá trị riêng thì chuỗi vô hạn nói trên sẽ hội tụ. Một khía cạnh khác rất quan trọng của biểu diễn dạng chuỗi này của nghiệm $x(t)$ đó là việc chặt cụt chuỗi, ví dụ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, sẽ dẫn đến một xấp xỉ cho nghiệm $x(t)$ dựa trên tối đa $(2n+1)$ giá trị riêng ngoài cùng bên phải (còn được gọi là các giá trị riêng trội). Hệ quả là ta có thể xây dựng một biểu diễn xấp xỉ hữu hạn chiều cho hệ (2.1) mà vẫn giữ nguyên được các tính chất động lực của hệ.

Ví dụ 2.2. (Xấp xỉ phản hồi trong trường hợp vô hướng) Cho $a = -1, a_d = 0.5, b = 1$ và $h = 1$ ta có thể tìm được các giá trị của s_k thông qua biểu thức (2.7) và hàm Lambert W như trong Ví dụ 2.1 và các giá trị của C_k^I và C_k^N sử dụng các phương trình (2.9) - (2.10), trong đó $x_0 = 1$ và $g(t) = 1$ với $-h \leq t < 0$. Các giá trị riêng s_k và các hệ số này được trình bày trong Bảng (2.1). Hình 2.2 thể hiện phản hồi cho trường hợp $u(t) = \sin(t)$ và so sánh giữa phương pháp dựa trên hàm Lambert W (sử dụng 7 thành phần trong Bảng (2.1)) và nghiệm số (sử dụng hàm dde23 trong MATLAB).



Hình 2.2: Phản hồi cho trường hợp $u(t) = \sin(t)$, với $x_0 = 1$ và $g(t) = 1$ cho $-h \leq t < 0$, và so sánh giữa công thức chặt cắt nghiệm giữ 7 thành phần đầu tiên dựa trên phương pháp hàm Lambert (xem Bảng (2.1)) và phương pháp số (hàm dde23 trong MATLAB). Các hệ số là $a = -1$, $a_d = 0.5$, và $h = 1$.

k	s_k	C_k^I	C_k^N
0	-0.3149	1.0713	0.5934
± 1	$-2.2211 \pm 4.4442 i$	$-1.9829 \pm 0.4711 i$	$-0.0112 \pm 0.2245 i$
± 2	$-3.0915 \pm 10.8044 i$	$-2.0109 \pm 0.1863 i$	$-0.0093 \pm 0.0916 i$
± 3	$-3.5450 \pm 17.1313 i$	$-2.0073 \pm 0.1168 i$	$-0.0052 \pm 0.0579 i$
± 4	$-3.8550 \pm 23.4407 i$	$-2.0050 \pm 0.0852 i$	$-0.0034 \pm 0.0424 i$
± 5	$-4.0911 \pm 29.7416 i$	$-2.0036 \pm 0.0671 i$	$-0.0024 \pm 0.0335 i$

Bảng 2.1: Các giá trị riêng và hệ số trong Ví dụ 2.2

2.2.2 Trường hợp hệ phương trình

Phép xấp xỉ được trình bày trong phần trước đã được khái quát hóa trong [48] cho hệ điều khiển có trễ có dạng sau

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t), \quad (2.11)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

trong đó $x(t)$ là vectơ trạng thái, $u(t)$ là biến điều khiển, $y(t)$ là vectơ đầu ra, A, A_d, B, C và D là các ma trận hệ số và h là độ trễ vô hướng đã biết. Điều kiện ban đầu $x(t=0) = x_0$ và $x(t) = g(t)$ với $-h \leq t < 0$ phải được cho trước. Công thức nghiệm cho hệ (2.1) có dạng:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{S_k t} C_k^I + \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{S_k(t-\eta)} C_k^N B u(\eta) d\eta, \quad (2.12)$$

trong đó

$$S_k = \frac{1}{h} W_k(A_d h Q_k) + A, \quad (2.13)$$

và Q_k được lấy từ nghiệm số (như bằng cách sử dụng hàm *fsolve* trong MATLAB) của phương trình

$$W_k(A_d h Q_k) e^{W_k(A_d h Q_k) + A h} = A_d h. \quad (2.14)$$

Ở đây các hàm ma trận Lambert W_k được định nghĩa như trong Mục 1.1. Các đại lượng Q_k, W_k, S_k, C_k^I và C_k^N trong các phương trình (2.12) - (2.14) đều có thể tính được bằng các lệnh trong gói công cụ LambertWDDE theo các điều kiện đã cho $h, A, A_d, g(t), x_0, B$ và $u(t)$. Các hàm chính của gói công cụ LambertWDDE được tóm tắt trong Bảng 2.2.

Tên	Mô tả
<i>lambertw_matrix</i>	Tính hàm ma trận LambertW
<i>find_Sk</i>	Tìm S_k và Q_k cho một nhánh cụ thể
<i>find_CI</i>	Tính C_I cho một nhánh cụ thể trong điều kiện ban đầu
<i>find_CN</i>	Tính C_N cho một nhánh cụ thể
<i>pwcont_test</i>	Thử tính điều khiển được cho hệ có trễ
<i>pwobs_test</i>	Thử tính quan sát được cho hệ có trễ
<i>cont_gramian_dde</i>	Ma trận điều khiển Gramian của hệ có trễ
<i>obser_gramian_dde</i>	Ma trận quan sát Gramian của hệ có trễ
<i>place_dde</i>	Phân bổ các giá trị riêng trội của hệ có trễ
<i>stabilityradius_dde</i>	Tính bán kính ổn định cho hệ có trễ

Bảng 2.2: Các hàm chính của gói công cụ LambertWDDE

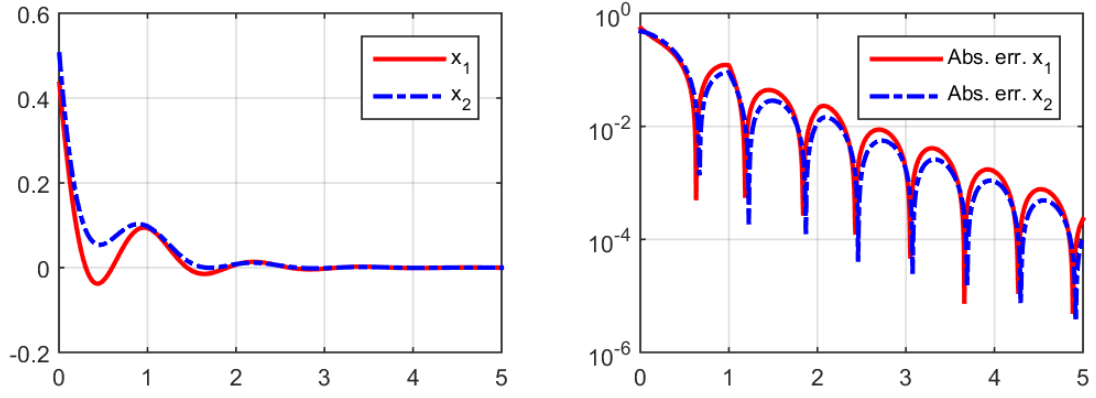
Để có được S_k cho một trường hợp k cụ thể người ta cần giải phương trình (2.14) để tìm Q_k trước, sau đó thay thế kết quả vào biểu thức (2.13) để lấy được S_k . Các bước này được thực hiện trong hàm *find_Sk*. Lưu ý rằng, hàm ma trận Lambert W, W_k trong biểu thức (2.13) và (2.14) được tính toán bằng hàm *lambertw_matrix*, dựa trên phép biến đổi dạng Jordan. Để hiểu rõ hơn toàn bộ quá trình, chúng ta đi tìm hiểu một ví dụ ở đây.

Ví dụ 2.3. Cho

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1.66 & -0.697 \\ 0.93 & -0.33 \end{bmatrix}, \quad h = 1.$$

Để tìm các ma trận S_k chúng ta sẽ sử dụng hàm *find_Sk* trong gói công cụ LambertWDDE. Đối với nhánh chính, $k = 0$, ta có được:

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0.3055 & -1.4150 \\ 2.1317 & -3.3015 \end{bmatrix}.$$



Hình 2.3: Phản hồi gần đúng (3 thành phần) và sai số tuyệt đối cho hệ trong Ví dụ 2.3 so với nghiệm sử dụng hàm dựng sẵn `dde23` trong MATLAB

Các giá trị riêng của S_0 là -1.0119 và -1.9841 . Tiếp theo, sử dụng `find_CI` và `find_CN`, ta có thể nhận được các hệ số cho nghiệm dạng chuỗi của phương trình (2.12). Ví dụ, nếu ta chọn $u(t) = 0, g(t) = 0$, và ta có một bước nhảy tại $t = 0$ đến $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, ta có thể nhận được (sử dụng `find_CI`) hệ số cho phản hồi tự do cho $k = 0$ là:

$$C_0^I = \begin{bmatrix} 0.2635 \\ 0.4290 \end{bmatrix}.$$

Do đó, phép xấp xỉ sử dụng một nhánh $k = 0$ cho phản hồi tự do là:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} 0.3055 & -1.4150 \\ 2.1317 & -3.3015 \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} 0.2635 \\ 0.4290 \end{bmatrix}.$$

Ở đây ta sử dụng ký hiệu `exp` để chỉ hàm mũ cho cả trường hợp vô hướng lẫn ma trận. Lưu ý rằng trong MATLAB, hàm mũ của ma trận là hàm `expm`, chứ không phải hàm vô hướng `exp`. Để cải thiện phép xấp xỉ, quy trình này có thể được lặp lại cho các nhánh bổ sung thứ k , sau đó sự xấp xỉ dạng chuỗi của nghiệm có thể thu được thông qua phương trình (2.12) (xem Hình 2.3). Ví dụ, các nhánh $k = \pm 1$ cho ta các ma trận S_k liên hợp phức bổ sung:

$$S_{-1,+1} = \begin{bmatrix} -0.3499 \pm 4.980i & -1.6253 \pm 0.1459i \\ 2.4174 \pm 0.1308i & -5.1048 \pm 4.5592i \end{bmatrix},$$

với các hệ số liên hợp phức cho phản hồi tự do với $k = \pm 1$ là:

$$C_{-1,+1}^I = \begin{bmatrix} 0.0909 \pm 0.1457i \\ 0.0435 \pm 0.1938i \end{bmatrix}.$$

2.3 Tính ổn định của hệ

Đối với các hệ thống có trễ dạng (2.11) thì tập phổ

$$\sigma(I, A, A_d) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I - A - e^{-\lambda h} A_d) = 0\} \quad (2.15)$$

là vô hạn (các giá trị λ thuộc phổ được gọi là các giá trị riêng của hệ). Chính vì vậy không thể tính được chính xác toàn bộ tập phổ này. Tuy nhiên theo [17] ta biết rằng với mọi số thực α luôn chỉ có một số hữu hạn các giá trị riêng nằm ở nửa mặt phẳng phải $\mathbb{C}_\alpha^+ := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda \geq \alpha\}$. Chú ý rằng với $\alpha = 0$ thì các giá trị riêng nằm trong \mathbb{C}_0^+ xác định sự ổn định của hệ thống. Việc tính toán tất cả các giá trị riêng nằm trong \mathbb{C}_α^+ với $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kỳ đã được nghiên cứu và thực hiện trong [13].

Điều hết sức thú vị ở đây là đối với trường hợp hệ vô hướng dạng (2.1) thì nhánh chính ($k = 0$) sẽ quyết định tính ổn định của hệ. Điều này đã được Shinozaki và Mori chứng minh trong [31] bằng cách sử dụng tính đơn điệu của phần thực của hàm Lambert W theo chỉ số k của các nhánh (xem Hình 1.1). Thêm vào đó, chứng minh trong [31] có thể được mở rộng cho các hệ có trễ dạng (2.11) trong đó A và A_d thỏa mãn điều kiện *tam giác hóa được đồng thời* (*simultaneously triangularizable*) như trong định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 3. ([29]) Hai ma trận vuông A và A_d được gọi là *tam giác hóa được đồng thời* nếu tồn tại một ma trận khả nghịch T sao cho TAT^{-1} và TA_dT^{-1} cùng có dạng tam giác trên.

Chú ý rằng nếu A và A_d là hai ma trận giao hoán thì chúng sẽ là tam giác hóa được đồng thời, xem [29, Chương 2].

Đối với trường hợp tổng quát thì nhánh chính sẽ không còn chứa giá trị riêng với phần thực lớn nhất của phổ, và do đó nhánh chính sẽ không còn vai trò quyết định đến tính ổn định của hệ nữa. Mặc dù vậy, thông qua quan sát trong nhiều ví dụ thực tế, trong [48] các tác giả đã đưa ra phỏng đoán sau.

Phỏng đoán 2.4. Xét hệ (2.11).

a) Giả sử rằng 0 không phải là giá trị riêng bội của ma trận hệ số A_d . Khi đó các giá trị riêng nằm trên nhánh chính $k = 0$ sẽ có phần thực lớn nhất.

b) Nếu 0 là giá trị riêng bội của ma trận hệ số A_d thì các giá trị riêng nằm trên ba nhánh bao gồm nhánh chính $k = 0$ và hai nhánh $k = \pm 1$ sẽ có phần thực lớn nhất.

2.4 Hàm phân rã cho hệ điều khiển có trễ

Ước lượng hàm phân rã cho các hệ có trễ là một vấn đề đã tồn tại từ lâu và gần đây đã được giải quyết bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lambert W [12]. Mục tiêu là tìm ra giới hạn trên chặt cho tốc độ phân rã, được gọi là α - ổn định, cũng như giới hạn trên của hệ số K , sao cho chuẩn của biến trạng thái bị chặn

$$\|x(t)\| \leq Ke^{\alpha t} \Phi(h, t_0), \quad (2.16)$$

trong đó $\Phi(h, t_0) = \sup_{t_0-h \leq t \leq t_0} \{\|x(t)\|\}$ và $\|\cdot\|$ biểu thị chuẩn Euclid. Sử dụng công thức nghiệm (2.12) ta có thể thu được ước lượng tối ưu của α . Ước lượng của hệ số K cũng ít bị hạn chế hơn, đặc biệt đối với trường hợp ma trận. Một ước lượng tốt hơn của hàm phân rã sẽ dẫn đến mô tả chính xác hơn về phản hồi tức thời và các phương án điều khiển hiệu quả hơn dựa trên mô hình phân rã [12].

Ví dụ 2.5. Xét phương trình (2.11) với các hệ số như trong Ví dụ 2.18. Từ phương trình (2.13), với $k = 0$, hoành độ phổ của hệ (2.11) là:

$$\begin{aligned} \alpha &= \max\{\operatorname{Re}(\operatorname{eig}(S_0))\} \\ &= \max\{\operatorname{Re}(\operatorname{eig}(\frac{1}{h}W_0(-A_d h Q_0) - A))\} = -1.012 \end{aligned}$$

Do đó, ta thu được tốc độ phân rã chính xác. Hơn nữa, bằng việc sử dụng nghiệm của phương trình (2.12) và cách tiếp cận trong [12], ta thu được một cận trên của K . Như trong Bảng 3, hệ số K và tốc độ phân rã α là tốt hơn khi so sánh với các phương pháp khác [12].

	Hệ số K	Tốc độ phân rã α
Tiếp cận ma trận tiêu chuẩn (Hale, 1993)	8.019	3.053
Tiếp cận Lyapunov (Mondie, 2005)	9.33	-0.907
Tiếp cận Lambert-W (Duan et. al., 2012)	3.8	-1.012

Bảng 2.3: So sánh kết quả cho Ví dụ 2.5

2.5 Tính điều khiển được và tính quan sát được

Xét hệ phương trình vi phân với trễ hằng số $h > 0$ có dạng

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t) \text{ với mọi } t > 0 \\ y(t) &= Cx(t), \\ x(t) &= \begin{cases} g(t) \text{ với mọi } t \in [-h, 0) \\ x_0 \text{ nếu } t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Đặt $M(t; g, x_0)$ là nghiệm tự do của phương trình (2.17), tức là nghiệm của (2.17) trong trường hợp $u(t) \equiv 0$. Tính điều khiển được và tính quan sát được là hai thuộc tính cơ bản của hệ động lực. Những tính chất của hệ điều khiển có trễ đã được khám phá từ những năm 1960 và các ma trận (quan sát/điều khiển) Gramian của hệ có trễ được giới thiệu bởi Weiss (1967, [39]) và Delfour *et al* (1972, [10]). Tuy nhiên, áp dụng các kết quả liên quan đến các ma trận Gramians để kiểm chứng tính điều khiển được và tính quan sát được của hệ có trễ tuyến tính là rất khó vì lí do chính là thiếu một công thức nghiệm cho các hệ có trễ [30]. Việc phân tích tính điều khiển được và tính quan sát được sử dụng công thức nghiệm (2.12) (dựa trên hàm ma trận Lambert W) sẽ được trình bày trong hai tiểu mục tiếp theo.

2.5.1 Tính điều khiển được

Tùy thuộc vào tính chất của bài toán đang xét, tồn tại nhiều định nghĩa khác nhau của tính điều khiển được và tính quan sát được cho các hệ điều khiển có trễ [30]. Trong số đó, khái niệm về *tính điều khiển được theo điểm* và các điều kiện liên quan đã được giới thiệu trong [39].

Định nghĩa 4. ([10]) Hệ (2.11) được gọi là *điều khiển được theo điểm* nếu với mọi điều kiện ban đầu $g(t)$ và x_0 , tồn tại một thời điểm $t_1, 0 < t_1 < \infty$ và một hàm chấp nhận được $u(t)$ (tức là đo được và bị chặn trên các khoảng thời gian hữu hạn), sao cho $x(t_1; g, x_0, u(t)) = 0$.

Chú ý rằng còn có các định nghĩa tương đương, ví dụ như *điều khiển được toàn phần* (*fixed-time completely controllable*) trong [8] hoặc \mathbb{R}^n -*điều khiển được đến gốc tọa độ* (*controllable to the origin*) trong [30], [40]. Theo [3], nghiệm của hệ (2.17)

có thể viết được dưới dạng

$$x(t) \equiv x(t; g, x_0, u) = \mathbf{M}(t; g, x_0) + \int_0^t \mathbf{K}(\xi, t) Bu(\xi) d\xi, \text{ với mọi } t \geq 0, \quad (2.18)$$

trong đó $M(t; g, x_0)$ là nghiệm tự do của phương trình (2.17) và $K(\xi, t)$ là hàm hạch của phương trình (2.17). Sử dụng hàm hạch $K(\xi, t)$ trong (2.18), điều kiện cho tính điều khiển được theo điểm được trình bày trong [39] dựa trên định nghĩa sau.

Định nghĩa 5. Hệ (2.17) được gọi là *đầy đủ theo điểm* (pointwise complete) tại thời điểm t_1 nếu với mọi $x_1 \in \mathbb{R}^n$, tồn tại điều kiện ban đầu $g(t)$ và x_0 sao cho $x(t_1; g, x_0, 0) = x_1$, với $x(t_1; g, x_0, 0)$ là nghiệm của (2.17) bắt đầu tại thời điểm $t = 0$.

Điều kiện cho tính đầy đủ theo điểm được trình bày trong [2, 6, 8, 26, 34]. Bên cạnh một số điều kiện cần và đủ tương đối khó kiểm tra (mà chúng ta sẽ không đề cập ở đây), có một số điều kiện đủ tương đối dễ kiểm tra được nhắc lại trong định lý sau.

Định lý 2.6. [26, Chương 5] Xét hệ điều khiển có trễ dạng (2.17). Khi đó hệ là đầy đủ theo điểm nếu như một trong các điều kiện đủ sau đây được thỏa mãn.

- i) *Cỡ của hệ là 2×2 .*
- ii) *Hệ có ma trận hệ số A_d không suy biến.*
- iii) *Hai ma trận A và A_d là giao hoán.*
- iv) *Tồn tại hai vector a và b thuộc $\mathbb{R}^{n,1}$ sao cho $A_d = ab^T$.*

Chú ý 2.7. Chú ý rằng trong trường hợp hệ không trễ ($A_d = 0$) thì điều kiện iii) trong Định lý 2.6 hiển nhiên thỏa mãn. Do đó tính điều khiển được hay quan sát được của hệ quay trở lại các tính chất tương ứng đã biết của hệ điều khiển tuyến tính không trễ.

Mặc dù các phương trình để đạt được hàm hạch trong (2.18) được trình bày trong [5] và [32] việc thiếu đi những kiến thức về nghiệm của hệ DDEs đã hạn chế đáng kể sự đánh giá và ứng dụng của các kết quả trong [47]. Điều này đã khiến nhiều tác giả phát triển các tiêu chuẩn đại số cho các ma trận hệ số để phân tích

tính điều khiển được của hệ [9], [11], [27], [46]. Các định nghĩa khác về tính điều khiển được, ví dụ như *tính điều khiển được của phổ*, đã được nhắc đến trong [39]. Về định nghĩa và các điều kiện đặc trưng cho nhiều loại tính điều khiển được khác nhau và so sánh chúng, độc giả quan tâm có thể tham khảo từ [32], [38].

Mặc dù vậy, sử dụng hàm ma trận Lambert W, ta thu được công thức nghiệm (2.12), và do đó có thể thu được công thức cho cả nghiệm tự do lẫn hàm hạch sẽ được sử dụng trong điều kiện cho tính điều khiển được theo điểm. Bằng cách so sánh (2.18) với (2.12) ta thu được

$$\mathbf{M}(t; g, x_0) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k t} C_k^I, \quad (2.19)$$

và

$$\mathbf{K}(\xi, t) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t-\xi)} C_k^N. \quad (2.20)$$

Từ đó ta thu được kết quả chính sau đây cho tính điều khiển được của hệ (2.17).

Định lý 2.8. *Nếu hệ (2.17) là đầy đủ theo điểm thì nó là điều khiển được theo điểm tới thời điểm $t_1 > 0$ khi và chỉ khi*

$$\text{rank} \left[\mathcal{C}(0, t_1) \equiv \int_0^{t_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t_1-\xi)} C_k^N B B^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t_1-\xi)} C_k^N \right)^T d\xi \right] = n, \quad (2.21)$$

với $\mathcal{C}(0, t_1)$ là ma trận điều khiển Gramian của hệ và chỉ số trên T chỉ hoán vị của một ma trận.

Chứng minh. Điều kiện đủ: Giả sử rằng điều kiện (2.21) được thỏa mãn. Khi đó ma trận điều khiển Gramian $\mathcal{C}(0, t_1)$ là khả nghịch. Bên cạnh đó theo các công thức (2.20), (2.21) ta chú ý rằng

$$\mathcal{C}(0, t_1) = \int_0^{t_1} \mathbf{K}(\xi, t_1) B B^T \mathbf{K}(\xi, t_1)^T d\xi. \quad (2.22)$$

Ta xét hàm điều khiển sau

$$u(t) := -B^T \mathbf{K}(t, t_1)^T \mathcal{C}^{-1}(0, t_1) \mathbf{M}(t_1; g, x_0), \quad (2.23)$$

trong đó $\mathbf{M}(t; g, x_0)$ là nghiệm tự do của (2.17).

Thay hàm điều khiển (2.23) vào công thức nghiệm (2.12) và sử dụng các công thức

(2.19), (2.20) ta có

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \mathbf{M}(t; g, x_0) - \int_0^t \mathbf{K}(\xi, t) B B^T \mathbf{K}(\xi, t_1)^T \mathcal{C}^{-1}(0, t_1) \mathbf{M}(t_1; g, x_0) d\xi, \\ &= \mathbf{M}(t; g, x_0) - \int_0^t \mathbf{K}(\xi, t) B B^T \mathbf{K}(\xi, t_1)^T d\xi \quad \mathcal{C}^{-1}(0, t_1) \quad \mathbf{M}(t_1; g, x_0) . \end{aligned}$$

Do đó, theo công thức (2.22), ta có $x(t_1) = 0$.

Điều kiện cần: Ta sẽ dùng phản chứng trong phần này. Cho bất kỳ g và x_0 , giả sử tồn tại $t_1 > 0$ và một hàm điều khiển $u_{[0, t_1]}$ sao cho $x(t_1) = 0$ nhưng (2.21) không thỏa mãn. Khi đó tồn tại một vector $x_1 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ sao cho $x_1^T \mathcal{C} x_1 = 0$, và theo (2.22) ta thấy rằng

$$x_1^T \mathcal{C} x_1 = \int_0^{t_1} \left(x_1^T \mathbf{K}(\xi, t_1) B \right) \left(x_1^T \mathbf{K}(\xi, t_1) B \right)^T d\xi .$$

Do đó, $x_1^T \mathbf{K}(\xi, t_1) B = 0$, với mọi $0 \leq \xi \leq t_1$.

Từ (2.18) ta có

$$x_1^T x(t_1) = x_1^T \mathbf{M}(t_1; g, x_0) + \int_0^{t_1} x_1^T \mathbf{K}(\xi, t_1) B u(\xi) d\xi, \quad (2.24)$$

và vì $x(t_1) = 0$ nên ta có $0 = x_1^T \mathbf{M}(t_1; g, x_0)$. Tuy nhiên, theo giả thiết về tính điều khiển được theo điểm của hệ nên ta có thể chọn g và x_0 thích hợp sao cho $\mathbf{M}(t_1; g, x_0) = x_1$. Từ đó ta có $x_1^T x_1 = 0$ mâu thuẫn với điều kiện $x_1 \neq 0$. \square

Trong trường hợp hệ điều khiển không có trễ, theo [10] hàm điều khiển u được tính toán bằng ma trận điều khiển Gramian sẽ sử dụng năng lượng tối thiểu để chuyển trạng thái $(x_0, 0)$ sang trạng thái $(0, t_1)$. Sử dụng công thức (2.21), chúng ta có thể chứng minh rằng kết quả tương tự cũng đúng cho các hệ phương trình vi phân có trễ như trong trường hợp ODE. Điều đó được trình bày trong định lý sau.

Định lý 2.9. *Xét hệ điều khiển có trễ dạng (2.17) và giả sử rằng hệ là điều khiển được theo điểm từ trạng thái $(x_0, 0)$ sang trạng thái $(0, t_1)$. Khi đó hàm điều khiển u được tính toán bằng ma trận điều khiển Gramian dạng (2.23) sẽ sử dụng năng lượng tối thiểu, tức là đối với một hàm điều khiển \tilde{u} bất kỳ nào khác thỏa mãn việc chuyển trạng thái $(x_0, 0)$ sang trạng thái $(0, t_1)$ ta đều có đánh giá*

$$\int_0^{t_1} \|\tilde{u}(s)\| ds \geq \int_0^{t_1} \|u(s)\| ds . \quad (2.25)$$

Chứng minh. Đặt $\tilde{x} := x(t_1) - \mathbf{M}(t_1; 0, \mathbf{g}, x_0)$. Bởi vì cả hai hàm \tilde{u} và u đều có thể dùng để truyền từ trạng thái $(x_0, 0)$ đến trạng thái $(\mathbf{0}, t_1)$ nên ta có

$$\tilde{x} = \int_0^{t_1} \mathbf{K}(\xi, t_1) \mathbf{B} u(\xi) d\xi = \int_0^{t_1} \mathbf{K}(\xi, t_1) \mathbf{B} \tilde{u}(\xi) d\xi$$

Trừ hai vế, ta được

$$\int_0^{t_1} \mathbf{K}(\xi, t_1) \mathbf{B} (\tilde{u}(\xi) - u(\xi)) d\xi = \mathbf{0}$$

và do đó

$$\left\langle \int_0^{t_1} \mathbf{K}(\xi, t_1) \mathbf{B} (\tilde{u}(\xi) - u(\xi)) d\xi, C_0^{-1}(0, t_1) \tilde{x} \right\rangle = 0$$

trong đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng Euclid của hai vector. Bằng cách sử dụng tính chất của tích vô hướng $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ta có

$$\int_0^{t_1} \left\langle \tilde{u}(\xi) - u(\xi), [\mathbf{K}(\xi, t_1) \mathbf{B}]^T C_0^{-1}(0, t_1) \tilde{x} \right\rangle d\xi = 0. \quad (2.26)$$

Bằng việc sử dụng (2.23), thì (2.26) trở thành

$$\int_0^{t_1} \langle \tilde{u}(\xi) - u(\xi), u(\xi) \rangle d\xi = 0.$$

Với chuẩn $\|\cdot\|$ thông thường cảm sinh từ tích vô hướng Euclid, ta có

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \|\tilde{u}(\xi)\|^2 d\xi &= \int_0^{t_1} \|\tilde{u}(\xi) - u(\xi) + u(\xi)\|^2 d\xi \\ &= \int_0^{t_1} \|\tilde{u}(\xi) - u(\xi)\|^2 d\xi + \int_0^{t_1} \|u(\xi)\|^2 d\xi + 2 \int_0^{t_1} \langle \tilde{u}(\xi) - u(\xi), u(\xi) \rangle d\xi \\ &= \int_0^{t_1} \|\tilde{u}(\xi) - u(\xi)\|^2 d\xi + \int_0^{t_1} \|u(\xi)\|^2 d\xi \\ &\geq \int_0^{t_1} \|u(\xi)\|^2 d\xi, \end{aligned}$$

và do đó ta có điều phải chứng minh. \square

Định nghĩa 6. Một tập hợp hữu hạn các hàm giá trị vector $f_1(t), \dots, f_n(t)$ trên cùng một miền xác định $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên trường \mathbb{K} nếu tồn tại một tổ hợp tuyến tính không tầm thường của chúng bằng không, tức là tồn tại các số $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ và không đồng thời bằng 0 sao cho

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0 \quad \text{với mọi } t \in \mathbb{D}.$$

Ngược lại thì tập các hàm nói trên được gọi là độc lập tuyến tính.

Bổ đề 2.10. ([7]) Cho hàm giá trị ma trận $F(t)$ xác định trên đoạn $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. Khi đó các hàng của $F(t)$ là độc lập tuyến tính trên đoạn $[t_1, t_2]$ khi và chỉ khi ma trận $\mathcal{P}(t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} F(t)F^T(t)$ là khả nghịch.

Sử dụng Định lý 2.8 và Bổ đề 2.10, giả sử rằng hệ (2.17) là đầy đủ theo điểm, ta thu được hệ quả trực tiếp sau.

Hệ quả 2.11. Hệ (2.17) là điều khiển được theo điểm khi và chỉ khi tất cả các cột của ma trận

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t-0)} C_k^N B, \quad (2.27)$$

là độc lập tuyến tính trên $[0, \infty)$.

Theo [41], biến đổi Laplace của của (2.27) là

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t-0)} C_k^N B \right\} = (s\mathbf{I} - A - A_d e^{-sh})^{-1} B. \quad (2.28)$$

Do phép biến đổi Laplace là toán tử tuyến tính 1-1 nên ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 2.12. ([8]) Hệ (2.17) là tính điều khiển được theo điểm khi và chỉ khi tất cả các hàng của ma trận

$$(s\mathbf{I} - A - A_d e^{-sh})^{-1} B \quad (2.29)$$

là độc lập tuyến tính trên tập tất cả mọi số phức s không thuộc phổ của hệ (2.17).

Trong các hệ ODEs nếu biến trạng thái $x(t)$ bị truyền về 0 tại $t = t_1$ thì nó vẫn là 0 trên $[t_1, \infty)$. Tuy nhiên, vì hệ (2.17) có thành phần trễ, dù tất cả các biến trạng thái riêng lẻ bằng 0 tại $t = t_1$ thì $x(t)$ vẫn có thể khác không khi $t > t_1$. Vì thế các định nghĩa khác về tính điều khiển được cho các hệ có trễ theo các phép hàm, chứ không phải theo điểm, đã được nghiên cứu bổ sung trong [30], [39].

Chú ý 2.13. Một ví dụ trong [42] cho thấy rằng nếu hệ DDEs có thể điều khiển theo điểm thì có thể thiết kế bộ điều khiển phản hồi tuyến tính thông qua việc tái phân bố các giá trị riêng trội cho hệ (2.17). Cho đến nay không có lý thuyết chung cho DDEs, như đã có cho ODE, rằng tính điều khiển được là điều kiện cần cho việc tái phân bố **tất cả các giá trị riêng** bằng điều khiển phản hồi tuyến tính (linear feedback control), xem [35], [36].

2.5.2 Tính quan sát được

Xét hệ (2.17), nếu biết điều kiện ban đầu $g(t)$ và x_0 , ta có thể biết tất cả các biến trạng thái bất cứ lúc nào bằng cách sử dụng công thức nghiệm (2.12). Ngược lại, ta có thể hỏi liệu có thể tìm được điều kiện ban đầu x_0 khi đã biết đầu ra $y(t)$ cũng như biến điều khiển $u(t)$ hay không. Đó chính là câu hỏi cơ bản làm nảy sinh khái niệm tính quan sát được. Sau đây, chúng ta sẽ đi nghiên cứu về tính quan sát được theo điểm đối với các hệ điều khiển có trễ.

Định nghĩa 7. ([10]) Phương trình (2.11) được gọi là *quan sát được theo điểm* trong $[0, t_1]$ nếu điều kiện ban đầu x_0 có thể được xác định duy nhất từ $u(t)$, $g(t)$, và $y(t)$.

Trái ngược với trường hợp hệ không trễ, trở ngại chính khi nghiên cứu tính quan sát được của các hệ có trễ là việc nghiệm tự do không có dạng chỉ là tích của các điều kiện ban đầu và ma trận chuyển trạng thái (ma trận nghiệm cơ bản). Khái niệm quan sát được theo điểm được giới thiệu bởi Gabasov (1972) vì lý do toán học thuần túy. Tuy nhiên, các nhiễu có thể được xấp xỉ bằng các phân phối Dirac làm cho phản hồi của hệ thống có thể xấp xỉ được bằng các bước nhảy trong phản hồi quỹ đạo [25]. Đối với những trường hợp như vậy, khái niệm về tính quan sát được theo điểm đã được sử dụng trong việc phân tích hệ có trễ chịu nhiễu kỳ dị, trong đó nhiễu là rất nhỏ nhưng không thể bỏ qua (xem ví dụ trong [15], [22]).

Giống như tính điều khiển được, việc thiếu một công thức nghiệm của hệ DDEs đã ngăn cản việc đánh giá và áp dụng điều kiện trên. Không giống như tính điều khiển được, việc phát triển các điều kiện đại số cho việc kiểm tra tính quan sát được của các hệ có trễ đã không nhận được nhiều sự chú ý [26]. Bhat và Koivo [4] đã sử dụng phân tích phổ để phân rã không gian trạng thái thành tổng trực tiếp của một không gian hữu hạn chiều và một không gian bù với nó. Trong [24], Olbrot đã trình bày nhiều loại tính quan sát được của các hệ có trễ và các điều kiện đại số tương ứng. Về nghiên cứu chi tiết, vui lòng tham khảo [24], [26].

Áp dụng hàm hạch trong [8] cho ma trận quan sát Gramian trong [10], ta có thể đưa ra điều kiện sau đây cho tính quan sát được của hệ DDEs. Ở đây hệ (2.17) được giả sử là đầy đủ theo điểm.

Định lý 2.14. Hệ (2.17) là quan sát được theo điểm khi và chỉ khi

$$\text{rank} \left[\mathcal{O}(0, t_1) \equiv \text{rank} \int_0^{t_1} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k \xi} C_k^N \right)^T C^T C \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k \xi} C_k^N d\xi \right] = n, \quad (2.30)$$

trong đó $\mathcal{O}(0, t_1)$ là ma trận quan sát Gramian của hệ (2.17).

Chứng minh. Cách chứng minh tương tự như chứng minh về tính điều khiển được và được bỏ qua cho ngắn gọn.

Sử dụng Định lý 2.14 ta thu được hệ quả trực tiếp sau.

Hệ quả 2.15. Hệ (2.17) là quan sát được theo điểm khi và chỉ khi tất cả các cột của ma trận

$$C \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t-0)} C_k^N, \quad (2.31)$$

là độc lập tuyến tính.

Vì

$$\mathcal{L} \left\{ C \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t-0)} C_k^N \right\} = C(s\mathbf{I} - A - A_B e^{-sh})^{-1} \quad (2.32)$$

và do phép biến đổi Laplace là toán tử tuyến tính 1-1 nên ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.16. Hệ (2.17) là quan sát được theo điểm khi và chỉ khi tất cả các cột của ma trận

$$C(s\mathbf{I} - A - A_d e^{-sh})^{-1} \quad (2.33)$$

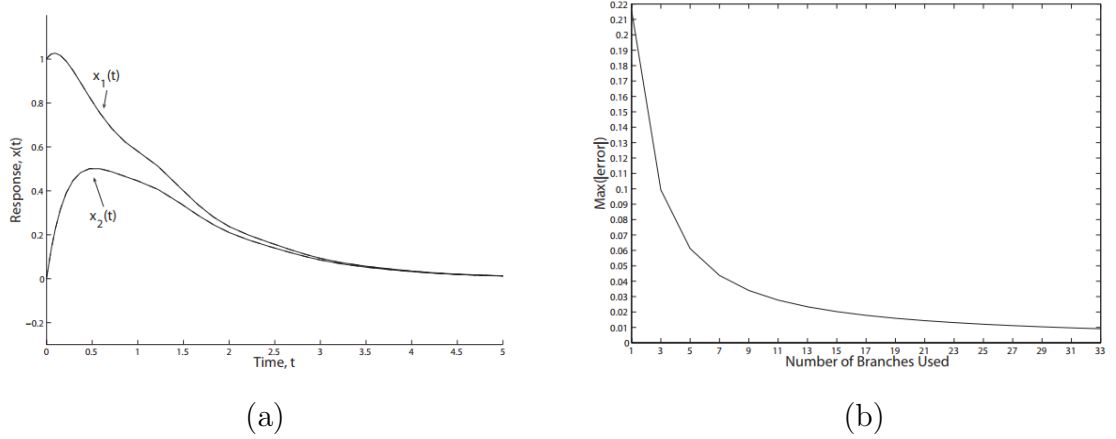
là độc lập tuyến tính ngoại trừ tại các điểm s thuộc phổ của hệ (2.17).

Chú ý 2.17. Cũng như trường hợp tính điều khiển được theo điểm, đối với tính quan sát được theo điểm của hệ (2.17), một bộ quan sát tuyến tính có thể được thiết kế thông qua việc tái phân bố các giá trị riêng trội như các ví dụ trong [42]. Trong trường hợp chưa biết $g(t)$, nếu $g(t)$ cũng như x_0 có thể được xác định duy nhất dựa trên biến điều khiển $u(t)$ và đầu ra $y(t)$, khi đó hệ (2.17) được gọi là *quan sát được tuyệt đối* (hoặc *quan sát được mạnh* trong tài liệu [10]). Về giải thích chi tiết cho định nghĩa về *tính quan sát được tuyệt đối* và các điều kiện đặc trưng cho nó, độc giả có thể tham khảo tài liệu [10].

Ví dụ 2.18. Xét hệ (2.17) với các tham số sau

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1.66 & -0.697 \\ 0.93 & -0.330 \end{bmatrix}, \quad h = 1. \quad (2.34)$$

Phản hồi, sử dụng công thức nghiệm (2.12), được mô tả trong Hình 2.4-(a) khi $g(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ và $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Cũng như trong các ví dụ trước, chúng ta chỉ sử dụng một số hữu hạn các nhánh của hàm Lambert để đưa ra một công thức xấp xỉ cho nghiệm. Ví dụ như trong Hình 2.4-a, 33 nhánh ($k = -16, \dots, 16$) của hàm Lambert W được sử dụng. Khi ta tiếp tục thêm các nhánh mới thì sai số của nghiệm xấp xỉ so với một nghiệm thu được bằng cách sử dụng hàm `dde23` trong MATLAB sẽ tiếp tục giảm. Điều đó thể hiện sự hội tụ của nghiệm xấp xỉ (xem Hình 2.4-b).

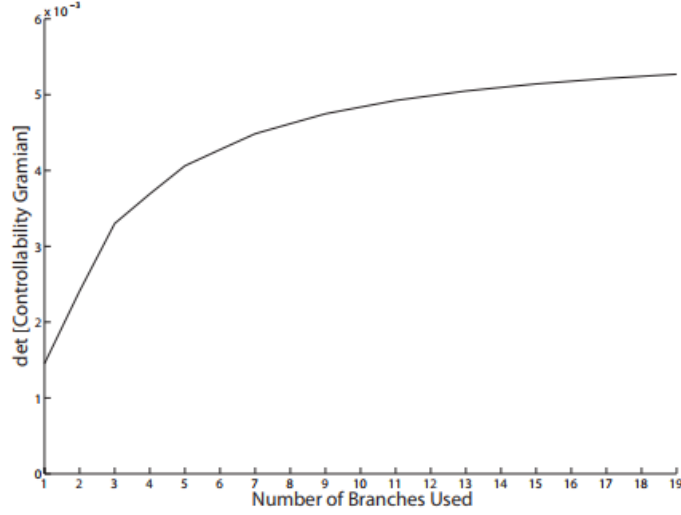


Hình 2.4: Phản hồi trong Ví dụ 2.18 thu được bằng việc sử dụng 33 nhánh đầu tiên của hàm Lambert (a) và sai số tuyệt đối của việc xấp xỉ phản hồi (b). Sai số sẽ tiếp tục giảm khi tiếp tục thêm những nhánh mới vào quá trình xấp xỉ phản hồi.

Sử dụng tiêu chuẩn trong Mục 2.5.1, ta thấy hệ (2.34) là điều khiển được theo điểm. Cho $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ chúng ta có thể tính toán ma trận điều khiển được Gramian $\mathcal{C}(0, t_1)$ trong (2.21). Do đó để hệ (2.34) là điều khiển được theo điểm thì $\mathcal{C}(0, t_1)$ phải khả nghịch, tức là

$$\det |\mathcal{C}(0, t_1)| \neq 0. \quad (2.35)$$

Trong Hình 2.5 chúng ta đi tính toán số cho định thức của ma trận $\mathcal{C}(0, t_1)$ khi số nhánh tăng lên. Khi nhiều nhánh hơn được sử dụng thì nghiệm xấp xỉ sẽ hội tụ (xem Hình 2.4), và điều tương tự cũng đúng với hàm hạch $\mathbf{K}(\xi, t)$ trong (2.20) và ma trận điều khiển Gramian $\mathcal{C}(0, t_1)$ trong (2.21). Hình 2.5 cho thấy định thức hội tụ đến một giá trị khác không, có nghĩa là hệ thống là điều khiển được theo điểm.

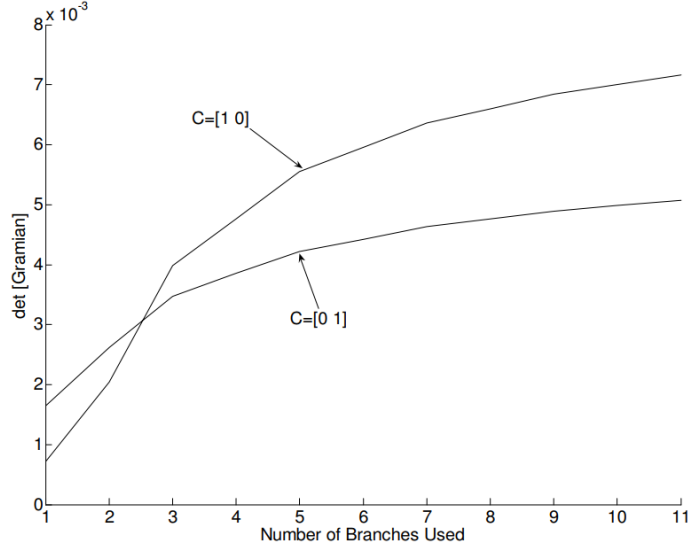


Hình 2.5: Xấp xỉ định thức của ma trận điều khiển Gramian. Khi nhiều nhánh hơn được sử dụng, các định thức có xu hướng hội tụ về một giới hạn khác không.

Mặc dù một hệ thống thỏa mãn các điều kiện đại số được phát biểu trong các nghiên cứu trước đây như [24], [26], trong trường hợp định thức của ma trận quan sát Gramian trong (2.30) nhỏ hơn một giá trị cụ thể nào đó thì việc thiết kế một bộ quan sát như trong [24], [26] có thể không hiệu quả. Lí do là vì hàm phạt (gain) thu được khi quan sát có thể trở nên cao một cách phi thực tế. Định thức của ma trận quan sát Gramian của hệ (2.34) trong hai trường hợp $C = [0 \ 1]$ và $C = [1 \ 0]$ được so sánh trong Hình 2.6 với $t_1 = 4$. Khi có thêm nhiều nhánh mới được sử dụng, giá trị của định thức trong trường hợp $C = [1 \ 0]$ có xu hướng hội tụ đến giá trị cao hơn so với trường hợp $C = [0 \ 1]$.

Từ các kết quả trong Hình 2.5 và 2.6, mặc dù một nghiên cứu chính thức về sai số chặt chẽ là cần thiết, ta cũng có thể quan sát được sự hội tụ của Gramian khi số nhánh của hàm Lambert được sử dụng tăng thêm. Bởi vì ma trận điều khiển Gramian trong phương trình (2.21) và ma trận quan sát Gramian trong phương trình (2.30) là tích phân của tích của hàm hạch và ma trận hằng (B và C) trên một khoảng hữu hạn, do đó sự hội tụ của các Gramians cũng được đảm bảo.

Các kết quả được trình bày trong mục này là phù hợp với những kết quả thu được bằng các phương pháp đại số hiện có. Tuy nhiên, bằng cách sử dụng phương pháp Gramian được phát triển trong phần này, ta có thêm được một số thông tin. Ví dụ như ma trận điều khiển và ma trận quan sát Gramian cho biết làm thế nào để



Hình 2.6: Định thức của ma trận quan sát Gramian khi $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

điều khiển và quan sát các trạng thái tương ứng [18], trong khi các điều kiện đại số cho tính điều khiển được/tính quan sát được chỉ cho biết hệ là điều khiển/quan sát hoặc không. Do đó, thông qua những thay đổi đối với các ma trận Gramian, chúng ta cũng có thể xác định được sự thay đổi trong một số tham số của hệ hoặc độ trễ thời gian h sẽ ảnh hưởng thế nào đến tính điều khiển được và tính quan sát được của hệ.

Trong lý thuyết điều khiển của các hệ thống tuyến tính không trễ, có một bài toán quan trọng có tên là *bài toán nhận thức cân bằng (balanced realization)*. Bài toán nhận thức cân bằng được nghiên cứu bởi vì nhiều tính chất tốt của hệ biến đổi và mối liên hệ chặt chẽ của nó với việc điều khiển đa biến bền vững, xem [37]. Trong bài toán này, chúng ta cần đi tìm một phép đổi tọa độ có dạng $\hat{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ sao cho đối với hệ mới, các ma trận điều khiển/quan sát Gramian bằng nhau và có dạng chéo. Sử dụng các ma trận Gramian trong Mục 2.5, ta có thể nghiên cứu bài toán tương tự cho các hệ điều khiển có trễ. Tính đến nay (2020), đây vẫn đang là một hướng nghiên cứu rất mới.

Đặt $\hat{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$. Khi đó tác động tương ứng trên các Gramians là

$$\hat{\mathcal{C}}(0, t_1) = \mathbf{T}\mathcal{C}(0, t_1)\mathbf{T}^T, \quad \hat{\mathcal{O}}(0, t_1) = \mathbf{T}^{-T}\mathcal{O}(0, t_1)\mathbf{T}^{-1}. \quad (2.36)$$

Bằng việc chọn \mathbf{T} thích hợp ta cần có $\hat{\mathcal{C}}(0, t_1) = \hat{\mathcal{O}}(0, t_1)$ và có dạng chéo. Trong Ví dụ 2.18, với $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ và $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $t_1 = 4$, sử dụng 11 nhánh của hàm ma trận

ODEs	DDEs
Tính điều khiển được	Tính điều khiển được theo điểm
$\mathcal{C}(0, t_1) \equiv \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\xi)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \left(e^{A(t_1-\xi)} \right)^T d\xi$ $(s\mathbf{I} - A)^{-1} B$ $e^{A(t-0)} B$	$\mathcal{C}(0, t_1) \equiv \int_0^{t_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t_1-\xi)} C_k^N \mathbf{B} \mathbf{B}^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t_1-\xi)} C_k^N \right)^T d\xi$ $(s\mathbf{I} - A - A_d e^{-sh})^{-1} B$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t-0)} C_k^N B$
Tính quan sát được	Tính quan sát được theo điểm
$\mathcal{O}(0, t_1) \equiv \int_0^{t_1} \left(e^{A(\xi-0)} \right)^T C^T C e^{A(\xi-0)} d\xi$ $C(s\mathbf{I} - A)^{-1}$ $C e^{A(t-0)}$	$\mathcal{O}(0, t_1) \equiv \int_0^{t_1} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(\xi-0)} C_k^N \right)^T C^T C \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(\xi-0)} C_k^N d\xi$ $C(s\mathbf{I} - A - A_d e^{-sh})^{-1}$ $C \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{S}_k(t-0)} C_k^N$

Bảng 2.4: So sánh các tiêu chuẩn về tính điều khiển được và tính quan sát được đối với các hệ thống ODEs và DDEs

Lambert W ta tìm được $\mathcal{C}(0, t_1)$, $\mathcal{O}(0, t_1)$ lần lượt là

$$\mathcal{C}(0, t_1) = \begin{bmatrix} 0.2992 & 0.1079 \\ 0.1079 & 0.0554 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}(0, t_1) = \begin{bmatrix} 0.2992 & -0.1484 \\ -0.1484 & 0.0975 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Trong trường hợp này, sử dụng ma trận

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -0.3929 & 1.1910 \\ 1.0880 & -0.5054 \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

ta có

$$\hat{\mathcal{C}}(0, t_1) = \hat{\mathcal{O}}(0, t_1) = \begin{bmatrix} 0.0238 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2497 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Trong tương lai, chúng ta cần tiếp tục nghiên cứu để (1) thiết lập các điều kiện cho sự tồn tại của phép biến đổi \mathbf{T} để đạt được sự nhận thức cân bằng cho DDE, và (2) phân tích sự hội tụ của T khi số lượng nhánh được sử dụng tăng lên.

Ví dụ 2.19. (Phân tích tính quan sát được và tính điều khiển được sử dụng gói công cụ LambertWDDE) Xét phương trình (2.11), với A, A_d và h được xác định trong Ví dụ 3 và

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hàm *pwcontr_test* có thể được sử dụng để kiểm tra tính điều khiển được của hệ. Nó kiểm tra hạng của ma trận $(s\mathbf{I} - A - A_d e^{-sh})^{-1} B$ để xác định xem hệ có thể điều khiển được theo từng điểm hay không. Tính quan sát được theo từng điểm có thể được thiết lập bằng cách sử dụng hàm *pwobs_test*. Hơn nữa, tính điều khiển được và quan sát được trong một khoảng thời gian cụ thể có thể được tính toán xấp xỉ, sử dụng hàm *contr_gramian_dde* và *obs_gramian_dde* tương ứng.

2.6 Phân tích và điều khiển các hệ có trễ sử dụng gói công cụ LambertWDDE

Trong mục này chúng ta sẽ sử dụng gói công cụ LambertWDDE để phân tích các tính chất điều khiển của các hệ điều khiển có trễ nảy sinh từ một số bài toán ứng dụng trong công nghiệp.

2.6.1 Phân tích sự rung lắc của máy công cụ

Sự rung lắc của máy công cụ, có thể được mô hình hóa như một hệ thống có trễ, là một trong những hạn chế chính làm hạn chế năng suất của quá trình tiện. Sự rung lắc này xảy ra không phải bởi vì tác động của ngoại lực, mà được gây ra bởi sự tương tác giữa cấu trúc máy và quá trình cắt.

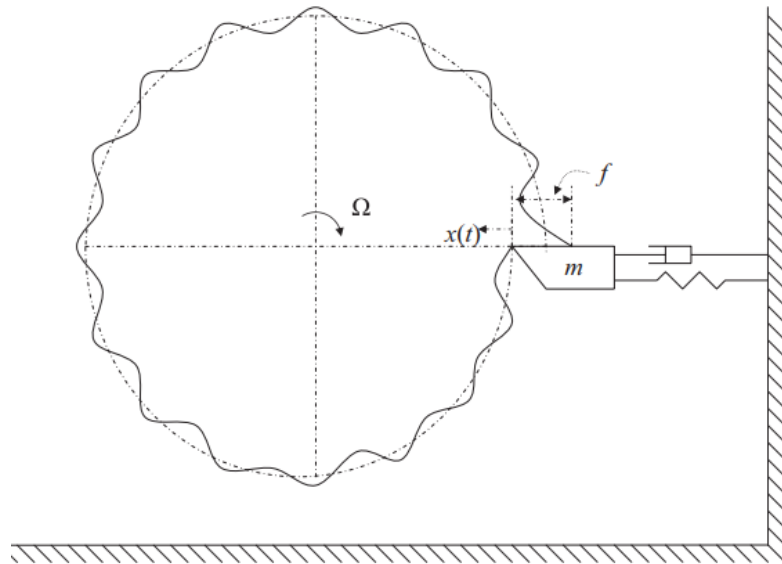
Nếu hệ thống này không ổn định (tức là hệ phương trình có trễ mô tả cho quá trình đó có ít nhất một giá trị riêng với phần thực dương), khi đó sự rung lắc có thể sẽ gây ra sự cố và dẫn đến bề mặt tiện bị kém phẩm chất đi, sự không chính xác về chiều trong bộ phận gia công và làm hư hỏng một phần hay hỏng hoàn toàn máy công cụ.

Tiếp theo các lý thuyết về sự rung lắc cổ điển được giới thiệu bởi Tobias (1965) và Thusty (2000) vào những năm 1960, nhiều mô hình khác nhau đã được phát triển để dự đoán sự khởi đầu của quá trình rung lắc. Tobias (1965) đã phát triển một phương pháp hình học và một phương pháp đại số để xác định sự khởi đầu của tính không ổn định cho một hệ thống có nhiều bậc tự do (DOF). Merritt (1965) đã trình bày một lý thuyết để tính toán ranh giới ổn định bằng cách vẽ các nghiệm điều hòa của phương trình đặc trưng của hệ thống, và cũng đề xuất một đường biên tiệm cận đơn giản để đảm bảo cho việc không xảy ra dao động ở mọi tốc độ quay của trục chính. Optiz và Bernardi (1970) đã phát triển một biểu diễn vòng kín chung cho hai quá trình tiện và phay.

Động lực học cấu trúc của máy được biểu thị theo các ma trận chuyển, trong khi quá trình cắt bị giới hạn bởi hai giả định: (1) hướng của lực cắt được cố định trong suốt quá trình cắt, và (2) các ảnh hưởng của tốc độ cung cấp vật liệu (feeding speed) và tốc độ cắt (cutting speed) bị bỏ qua. Những giả định này sau đó đã được bỏ qua bởi Minis (1990), người đã mô tả sự ổn định của hệ thống theo phương trình

đặc trưng và sau đó áp dụng tiêu chuẩn ổn định Nyquist để xác định độ ổn định của hệ thống. Ngoài ra, các tiêu chuẩn ổn định cho các hệ thống thời gian đã được phân tích bởi (Chen et al., 1997), Stepan (1989), Kuang (1993), và Stepan và Moon (1997), và sử dụng Định lý mạch rẽ nhánh Hopf (Nayfeh et al., 1997; Kalmar-Nagy et al., 2001; Fofana, 2003).

Gần đây, Olgac và Sipahi đã phát triển một cách tiếp cận mới dựa trên việc xử lý cụm nghiệm đặc trưng, kiểm tra một cụm nghiệm vô hạn tại một thời điểm để ổn định hệ thống trì hoãn để cho phép xác định vùng ổn định hoàn toàn của độ trễ (Sipahi và Olgac, 2003b), (Olgac và Sipahi, 2005). Trong mục này, cách tiếp cận dựa trên hàm ma trận Lambert W cho bài toán ổn định rung lắc được trình bày. Sử dụng phương pháp này, người ta có thể có được phạm vi tốc độ quay trục chính mà không gây ra rung lắc.



Hình 2.7: Mô hình máy cắt vuông góc một bậc tự do, [48, Chương 3]

Trong quá trình tiện, một phôi hình trụ quay với vận tốc góc không đổi, và công cụ tạo ra một bề mặt khi vật liệu được tiện bỏ. Bất kỳ rung động nào của dụng cụ đều được thể hiện trên bề mặt này, điều đó có nghĩa là lực cắt phụ thuộc vào vị trí của dao tiện đối với vòng tiện hiện tại cũng như vòng tiện trước đó. Do đó, các phương trình vi phân có trễ đã được sử dụng rộng rãi làm mô hình cho máy công cụ. Mô hình cắt vuông góc một bậc tự do được mô tả trong Hình 2.7, có thể

được biểu thị như (Kalmar-Nagy et al., 2001)

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \left(\omega_n^2 + \frac{k_c}{m}\right)x(t) - \frac{k_c}{m}x(t-\tau) \\ = \frac{k_c}{8f_0m} \left((x(t) - x(t-\tau))^2 - \frac{5}{12f_0}(x(t) - x(t-\tau))^3 \right), \end{aligned} \quad (2.40)$$

trong đó $x(t)$ là tọa độ tổng quát của vị trí cạnh dao, độ trễ $\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$ là khoảng thời gian cho một vòng quay, với ω_n là vận tốc góc của phôi quay. Hệ số k_c là hệ số cắt xuất phát từ thực nghiệm của các tham số như chiều rộng chip, độ dày chip f (f_0 là ở trạng thái ổn định) và tốc độ cắt. Tần số góc tự nhiên của hệ dao động tự do không chịu đẩy là ω_n và ξ là hệ số giảm chấn tương đối. Lưu ý rằng giá trị 0 của tọa độ tổng quát $x(t)$ của vị trí cạnh dao được chọn sao cho thành phần x của lực cắt cân bằng với độ cứng khi độ dày chip f có giá trị f_0 (Kalmar-Nagy et al., 2001).

Đặt $x_1(t) = x(t)$ và $x_2(t) = \dot{x}(t)$, ta có thể chuyển hệ bậc hai (2.40) về hệ bậc nhất

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 2\xi\omega_n x_2(t) + \left(\omega_n^2 + \frac{k_c}{m}\right)x_1(t) - \frac{k_c}{m}x_1(t-\tau) \\ &\quad + \frac{k_c}{8f_0m} \left((x_1(t) - x_1(t-\tau))^2 - \frac{5}{12f_0}(x_1(t) - x_1(t-\tau))^3 \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

Giả sử rằng không có dao động nào trong vòng tiền trước, tức là $x_1(t-\tau) = 0$, thì ta có thể tìm được điểm cân bằng $x_1(t) = x_2(t) = 0$, có nghĩa là tại điểm cân bằng này, cạnh dao nằm tại vị trí như được xác định trước đó. Tuyến tính hóa hệ tại điểm cân bằng chúng ta thu được

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\omega_n^2 + \frac{k_c}{m}\right) & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_c}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Với $k_m := m\omega_n^2$ được gọi là *độ cứng cấu trúc* (N/m), ta có thể viết lại hệ (2.42) như sau

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 \left(1 + \frac{k_c}{k_m}\right) & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_c}{k_m}\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Chú ý rằng sự rung lắc sẽ xảy ra nếu như hệ (2.43) không ổn định.

Cách tiếp cận dựa trên hàm Lambert W cho thấy điều kiện ổn định cho hệ (2.17) phụ thuộc vào các giá trị riêng của ma trận S_k . Khi đó ta có hệ (2.17) là ổn định không điều kiện khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng của S_k có phần thực âm.

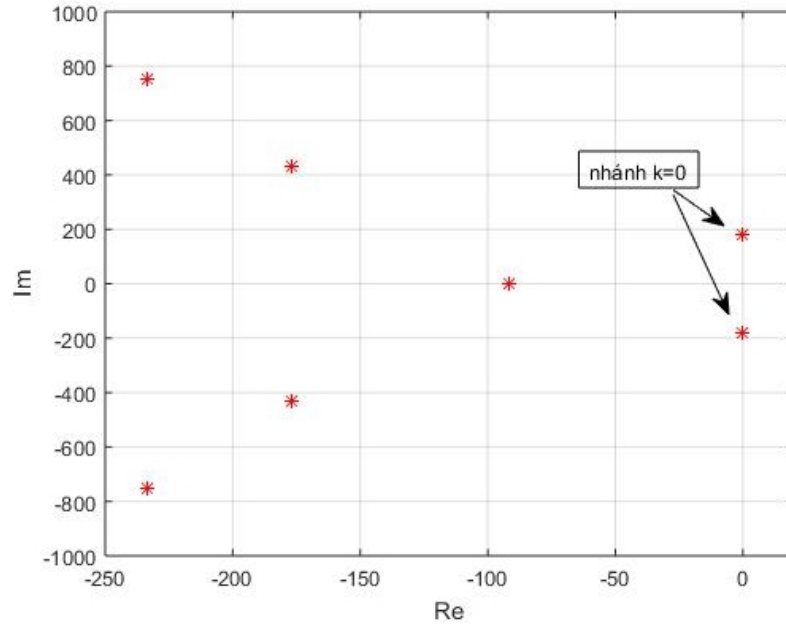
Ví dụ ta xét trường hợp tốc độ quay trục chính $1/T = 50$, $\omega_n = 150$ (Hz^2) và $\xi = 0.05$, tỉ số $\frac{k_c}{k_m} = 0.25$. Khi đó các ma trận S_k và các giá trị riêng tương ứng thu được qua tính toán là như trong Bảng 2.5.

Chỉ số nhánh	S_{k_1, k_2}	Giá trị riêng của S_{k_1, k_2}
$k_1 = k_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -33083 & -0.24 \end{bmatrix}$	$-0.12 \pm 181.88i$
$k_1 = -1, k_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -77988 + 32093i & -177 - 247i \end{bmatrix}$	$-0.12 + 181.88i$ $-176.73 - 428.66i$
$k_1 = 0, k_2 = -1$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 - 1663i & -92 - 182i \end{bmatrix}$	-91.61 $-0.12 - 181.88i$
$k_1 = 1, k_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -77988 - 32093i & -177 + 247i \end{bmatrix}$	$-0.12 - 181.88i$ $-176.73 + 428.66i$
$k_1 = 0, k_2 = 1$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 + 1663i & -92 + 182i \end{bmatrix}$	-91.61 $-0.12 - 181.88i$
\vdots	\vdots	\vdots

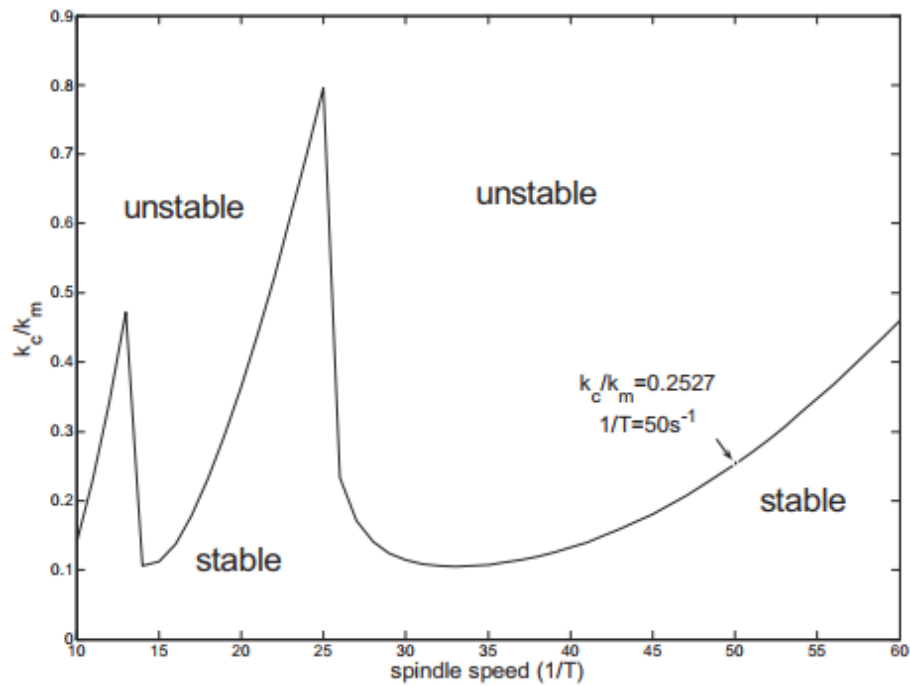
Bảng 2.5: Tính toán các ma trận S_k và các giá trị riêng trội

Thêm vào đó, các giá trị riêng của ma trận $S_{0,0}$ là gần trục ảo nhất và phần thực của chúng là âm. Hơn nữa, sử dụng các nhánh bổ sung để tính toán giá trị riêng luôn đem lại các giá trị riêng mà phần thực của nó nằm ở bên trái trong mặt phẳng phức (xem Hình 2.8). Điều này hoàn toàn phù hợp với Phỏng đoán 2.4 và ta có thể dự đoán rằng hệ (2.43) với bộ tham số đang xét là ổn định không điều kiện.

Chú ý rằng thực tế thông qua việc tính toán các giá trị riêng trội, sử dụng công cụ tính toán phổ trong [13], ta biết rằng hệ (2.43) với bộ tham số đang xét là ổn định không điều kiện. Thêm vào đó, bằng việc quan sát các giá trị riêng của $S_{0,0}$ tương ứng với nhánh chính, người ta có thể tìm điểm tới hạn mà vượt qua ngưỡng đó thì sự rung lắc của máy tiện sẽ xảy ra. Ví dụ, khi tốc độ quay trục chính $1/T = 50$, $\omega_n = 150$ (Hz^2) và $\xi = 0.05$, tỉ số $\frac{k_c}{k_m} = 0.2527$. Giá trị này vừa đúng bằng kết quả thu được bằng phương pháp Lyapunov ([26]), tiêu chuẩn Nyquist và phương pháp tính toán trong [7]. Các ngưỡng ổn định theo phương pháp này được mô tả trong Hình 2.9, [48, Chương 3].



Hình 2.8: Giá trị riêng của hệ (2.43) trong mặt phẳng phức. Các giá trị riêng thu được bằng cách sử dụng nhánh chính ($k = 0$) là trội và sẽ quyết định tính ổn định của hệ.

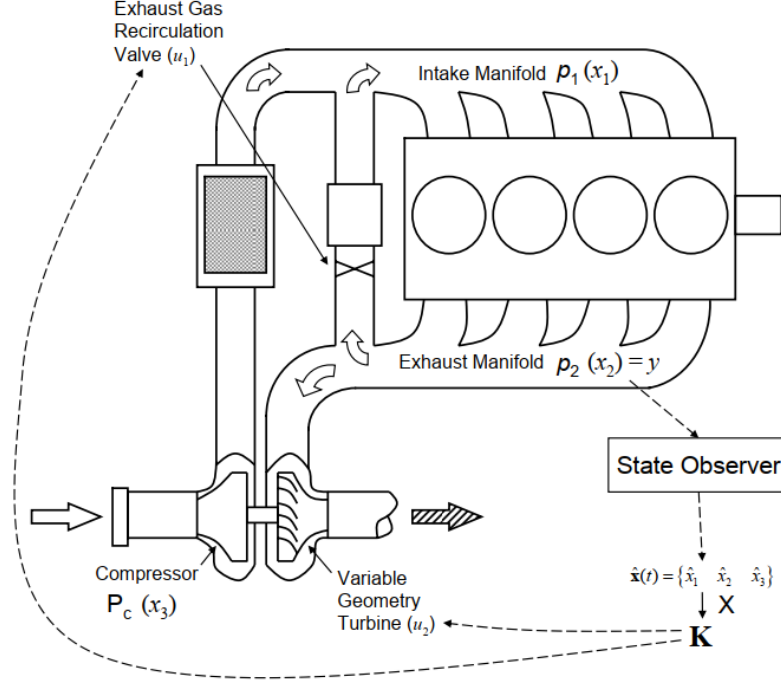


Hình 2.9: Các ngưỡng ổn định trong bài toán rung lắc của máy tiện

2.6.2 Điều khiển động cơ Diesel

Một động cơ diesel có van tuần hoàn khí thải (EGR) và máy nén turbo với tuabin hình học biến thiên (VGT) đã được mô hình hóa trong [19] (Hình 2.10) sử dụng 3 biến trạng thái sau: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, x_1 là áp suất đường ống nạp, x_2 là áp

suất đường ống xả và x_3 là công suất máy nén. Mô hình bao gồm độ trễ do khí vận chuyển trong đường ống nạp vào ống xả ($h = 60$ ms khi tốc độ động cơ N là 1500 vòng/phút).



Hình 2.10: Điều khiển động cơ diesel bằng việc sử dụng đo đặc áp suất ống xả, tất cả các trạng thái đều sẽ được ước lượng thông qua bộ quan sát trạng thái và sau đó được sử dụng trong việc thiết kế điều khiển phản hồi ([20])

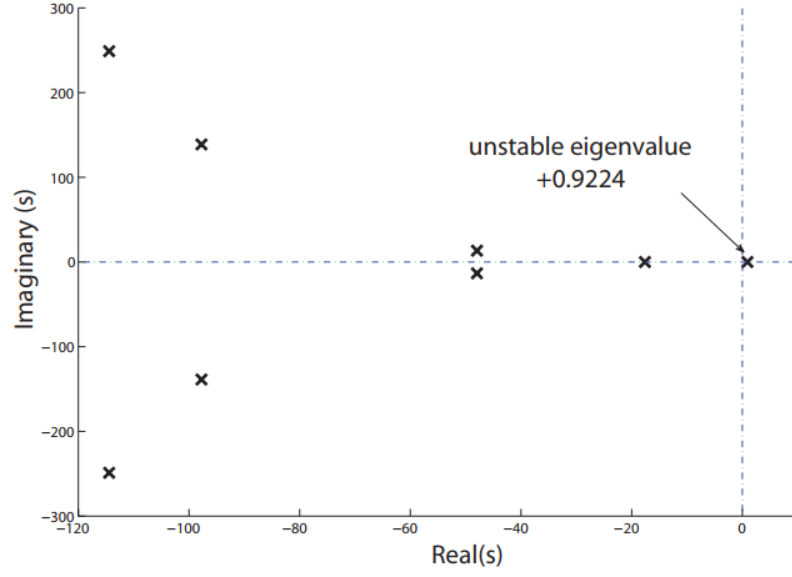
Do đó, một hệ có trễ được tuyến tính hóa dạng (2.17) đã được giới thiệu trong [20] cho một điểm vận hành cụ thể ($N = 1500$ vòng/phút) có dạng

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -27 & 3.6 & 6 \\ 9.6 & -12.5 & 0 \\ 0 & 9 & -5 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_d} x(t-h) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.26 & 0 \\ -0.9 & -0.8 \\ 0 & 0.18 \end{bmatrix}}_B u(t). \quad (2.44)$$

Bên cạnh đó, bằng việc đặt một cảm biến quan sát tại ống xả, chúng ta sẽ đo áp suất xả. Do đó đầu ra của hệ điều khiển có trễ tương ứng với phương trình (2.44) là

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \quad (2.45)$$

Chú ý rằng phổ của hệ (2.44) có chứa một giá trị riêng với phần thực dương (Hình 2.11), vì vậy hệ là không ổn định. Bây giờ ta sẽ đi nghiên cứu tính điều khiển được và quan sát được của hệ thông qua các điều kiện phát biểu trong các Hệ quả 2.12, 2.16 trong Mục 2.5. Ví dụ, để xét tính điều khiển được, ta có thể sử dụng gói công



Hình 2.11: Phổ của hệ (2.44), [20].

cụ Symbolic trong MATLAB để tính toán trực tiếp

$$(s\mathbf{I} - A - A_d e^{-sh})^{-1}B = \begin{bmatrix} s + 27 & -18/5 & -6 \\ -21e^{-sh} - 48/5 & s + 25/2 & 0 \\ 0 & -9 & s + 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.26 & 0 \\ -0.9 & -0.8 \\ 0 & 0.18 \end{bmatrix},$$

và kiểm tra điều kiện hạng (2.29). Đó là cách làm được thực hiện trong hàm *pwcontr_test* trong gói công cụ LambertWDDE. Điều tương tự cũng được thực hiện với tính quan sát được, sử dụng hàm *pwobs_test* trong cùng gói công cụ. Khi đó, hệ điều khiển có trễ (2.44)-(2.45) vừa là điều khiển được theo điểm vừa là quan sát được theo điểm. Điều này phù hợp với những quan sát trong [20].

Chương 3

Kết luận

Luận văn này trình bày về phương pháp tiếp cận sử dụng hàm LambertW được phát triển gần đây để phân tích và điều khiển các hệ có trễ hằng số. Các vấn đề được trình bày ở đây bao gồm các tính chất cơ bản của lý thuyết điều khiển như tính chất ổn định và phân rã của nghiệm, tính điều khiển được và tính quan sát được. Bằng việc sử dụng hàm Lambert W, trước hết chúng ta đưa ra được công thức nghiệm tường minh của hệ có trễ trong cả hai trường hợp nghiệm tự do và nghiệm chịu lực tác động. Trên cơ sở đó, chúng ta có thể phát triển các phương pháp nghiên cứu hệ điều khiển không trễ cho hệ điều khiển có trễ dựa trên các ma trận điều khiển Gramian và quan sát Gramian. Các điều kiện cần và đủ được xây dựng để đặc trưng cho các tính chất điều khiển được và quan sát được của hệ. Các ví dụ số đơn giản cũng được trình bày để minh họa cho các kết quả lý thuyết trong từng chương, mục. Bên cạnh đó chúng ta cũng áp dụng các kết quả lý thuyết được trình bày để phân tích các tính chất điều khiển của hệ có trễ nảy sinh trong hai ví dụ thực tế, đó là vấn đề về sự rung lắc xảy ra trong máy công cụ (cụ thể ở đây là máy tiện) và vấn đề điều khiển của động cơ diesel.

Phần mềm nguồn mở trong gói công cụ LambertWDDE, cũng như các tài liệu và ví dụ kèm theo [11], được hy vọng sẽ làm cho cách tiếp cận dựa trên hàm LambertW trở nên dễ tiếp cận và hữu ích hơn cho những người quan tâm đến các ứng dụng được mô hình hóa dưới dạng hệ điều khiển có trễ hằng số. Nhiều ứng dụng của phương pháp (ví dụ, máy cắt, điều khiển động cơ, mô hình bệnh dịch HIV, ước lượng hàm phân rã, điều khiển động cơ DC, điều khiển PID và điều khiển vững) cũng có thể được tìm thấy trong tài liệu tham khảo [12, 43–46, 48, 49]. Bên cạnh gói công cụ LambertWDDE, các phần mềm hữu ích khác cho các hệ điều khiển có

trễ dựa trên nhiều thuật toán khác nhau cũng có sẵn để tải xuống từ các trang web [5, 13, 28, 38]

Tài liệu tham khảo

- [1] F. M. Asl and A. G. Ulsoy. Analysis of a system of linear delay differential equations. *ASMEJ. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 125:215–223, 2003. (trang 12)
- [2] B. A. Asner and A. Halanay. Non-controllability of time-invariant systems using one-dimensional linear delay feedback. *Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série Électrotechnique et Énergétique*, 18:283–293, 1973. (trang 22)
- [3] R. Bellman and K. L. Cooke. *Differential-Difference Equations*. New York Academic Press, 1963. (trang 11, 15, 21)
- [4] K. Bhat and H. Koivo. Modal characterizations of controllability and observability in time delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(2):292–293, 1976. (trang 27)
- [5] D. Breda, S. Maset, and R. Vermiglio. TRACE-DDE: a tool for robust analysis and characteristic equations for delay differential equations. In J. Loiseau, W. Michiels, S.-I. Niculescu, and R. Sipahi, editors, *Topics in Time Delay Systems (LNCIS)*, pages 145–155. Springer, Heidelberg, 2009. (trang 22, 41)
- [6] R. Brooks and K. Schmitt. Pointwise completeness of differential-difference equations. *Rocky Mountain J. Math.*, 3(1):11–14, 03 1973. (trang 22)
- [7] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1998. (trang 9, 10, 26, 36)
- [8] A. K. Choudhury. Algebraic and transfer-function criteria of fixed-time controllability of delay-differential systems. *International Journal of Control*, 16(6):1073–1081, 1972. (trang 21, 22, 26, 27)

- [9] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the Lambert W function. *In: Advances in Computational Mathematics*, 5:329–359, 1996. (trang 4, 6, 11, 23)
- [10] M. C. Delfour and S. K. Mitter. Controllability, observability and optimal feedback control of affine hereditary differential systems. *SIAM Journal on Control*, 10(2):298–328, 1972. (trang 21, 24, 27, 28)
- [11] S. Duan. Supplement for time delay systems: analysis and control using the Lambert W function. <http://www.umich.edu/ulsoy/tds-supplement.htm>. Technical report, 2010. (trang 4, 13, 23, 40)
- [12] S. Duan, J. Ni, and A. Ulsoy. Decay function estimation for linear time delay systems via the Lambert W function. *Journal of Vibration and Control*, 18:1462–1473, 09 2012. (trang 13, 20, 40)
- [13] K. Engelborghs, T. Luzyanina, and G. Samaey. DDE-biftool v. 2.00 : a MATLAB package for bifurcation analysis of delay differential equations. Technical report, TW-330, 61, 2001. (trang 19, 36, 41)
- [14] L. Euler. Deformulis exponentialibus replicatis. *Leonardo Euleri Opera Omnia*. 1(15):268–297, 1777. (trang 4, 5)
- [15] V. Glizer. Observability of singularly perturbed linear time-dependent differential systems with small delay. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 10:329–363, 07 2004. (trang 27)
- [16] K. Gu and S. I. Niculescu. Stability analysis of time delay systems: a lyapunov approach. In F. P. E. e. A., Lamnabhi-Lagarrigue, editor, *Loria*, volume 328, pages 139–170. Advanced Topics in Control Systems Theory. LNCIS, Springer, Heidelberg, 2006. (trang 11)
- [17] J. K. Hale and S. M. V. Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, 1963. (trang 11, 19)
- [18] S. Holford and P. Agathoklis. The use of model reduction techniques for designing iir filters with linear phase in the passband. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(10):2396–2404, 1996. (trang 31)

- [19] M. Jankovic and I. Kolmanovsky. Constructive lyapunov control design for turbocharged diesel engines. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(2):288–299, 2000. (trang 37)
- [20] M. Jankovic and I. Kolmanovsky. *Developments in Control of Time-Delay Systems for Automotive Powertrain Applications*. 2009. (trang 38, 39)
- [21] V. B. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Academy, Dordrecht, 1999. (trang 11)
- [22] T. Kopeikina. Relative observability of linear nonstationary singularly perturbed delay systems. *Differential Equations*, 34:22–28, 1998. (trang 27)
- [23] J. H. Lambert. Observationes variae in mathesin puram. *Acta Helveticae, Physicomathematico-anatomico-botanico-medica*, 3:128–168, 1758. (trang 4)
- [24] E. B. LEE and A. OLBROT. Observability and related structural results for linear hereditary systems. *International Journal of Control*, 34(6):1061–1078, 1981. (trang 27, 30)
- [25] T. Lee and S. Dianat. Stability of time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):951–953, 1981. (trang 27)
- [26] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi. *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*. NewYork, USA: Elsevier Science Pub., 1987. (trang 22, 27, 30, 36)
- [27] S. Mondi and V. L. Kharitonov. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an lmi approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50:2, 2005. (trang 23)
- [28] N. Olgac and R. Sipahi. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (lti) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):793–797, 2002. (trang 41)
- [29] H. Radjavi and P. Rosenthal. *Simultaneous Triangularizability*. Universitext, Springer, New York, 2000. (trang 19)

- [30] J.-P. Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667 – 1694, 2003. (trang 11, 21, 26)
- [31] H. Shinozaki and T. Mori. Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results. *Automatica*, 42(1):1791–1799, 2006. (trang 19)
- [32] R. Sipahi, S. I. Niculescu, C. T. Abdallah, W. Michiels, and K. Gu. Stability and stabilization of systems with time delay: limitations and opportunities. *IEEE Control Systems Magazine*, 31(1):38–65, 2011. (trang 11, 13, 22, 23)
- [33] G. Stepan. *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*. Wiley, 1989. (trang 11)
- [34] A. Thowsen. On pointwise degeneracy, controllability and minimal time control of linear dynamical systems with delays. *International Journal of Control*, 25(3):345–360, 1977. (trang 22)
- [35] A. C. Tsoi. *Recent advances in the algebraic system theory of delay differential equations*, pages 67–127. 1978. (trang 26)
- [36] H. F. Vandevenne. Controllability and stabilizability properties of delay systems. In *Proc. 1972 IEEE Conference on Decision Control and 11th Symposium on Adaptive Processes*, pages 370–377, 1972. (trang 26)
- [37] E. Verriest and T. Kailath. On generalized balanced realizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(8):833–844, 1983. (trang 31)
- [38] T. Vyhldal and P. Zitek. Mapping based algorithm for large-scale computation of quasipolynomial zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(1):171–177, 2009. (trang 23, 41)
- [39] L. Weiss. On the controllability of delay-differential systems. *SIAM J. Control*, 5:575–587, 1967. (trang 21, 22, 23, 26)
- [40] L. Weiss. An algebraic criterion for controllability of linear systems with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(4):443–444, 1970. (trang 21)

- [41] S. Yi, S. Duan, P. Nelson, and A. Ulsoy. The Lambert W function approach to time delay systems and the LambertW-DDE toolbox. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(14):114 – 119, 2012. 10th IFAC Workshop on Time Delay Systems. (trang 26)
- [42] S. Yi, P. Nelson, and A. Ulsoy. Feedback control via eigenvalue assignment for time delayed systems using the Lambert W function. *Proc. ASME 2007 IDETC*, Las Vegas, NV. (trang 26, 28)
- [43] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Delay differential equations via the matrix Lambert W function and bifurcation analysis: application to machine tool chatter. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 4(2):355–368, 2007. (trang 13, 40)
- [44] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Controllability and observability of systems of linear delay differential equations via the matrix Lambert W function. *IEEE Trans. Automatic Control*, 53(3):854–860, 2008. (trang)
- [45] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Eigenvalues and sensitivity analysis for a model of HIV-1 pathogenesis with an intracellular delay. In *Proc. ASME Dynamic Systems and Control Conf*, October 2008. (trang 13)
- [46] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Eigenvalue assignment via the Lambert W function for control of time-delay systems. *J. Vibration and Control*, 16(7-8):961–982, 2010. (trang 12, 15, 23, 40)
- [47] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. Robust control and time-domain specifications for systems of delay differential equations via eigenvalue assignment. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 132:3, May 2010. (trang 22)
- [48] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. *Time-Delay Systems: Analysis and Control Using the Lambert W Function*. World Scientific, 2010. (trang 4, 11, 13, 16, 19, 34, 36, 40)
- [49] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy. PI control of first order time-delay

systems via eigenvalue assignment. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 2013. (trang 13, 40)