## Bài Tập Lý Thuyết Điều Khiển Hệ Thống - No. 3
## Controllability of LTV systems

**Câu 1** *Xét hệ thống tuyến tính có $D \equiv 0$ như sau*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad \forall t \geq t_0, \tag{1}$$
$$y = C(t)x\ . \tag{2}$$

*a) Trong một số ứng dụng thực tế, ví dụ như các hệ cơ học, nhiều khi người ta không quan tâm đến toàn bộ trạng thái $x(t)$ mà chỉ 1 phần của nó. Khi đó hệ được gọi là điều khiển được 1 phần (**partial controllable**). Hãy chứng minh kết quả sau.*

> *Cho trước thời điểm $t_1 > t_0$. Khi đó tồn tại một hàm đầu vào $u$ để điều khiển đầu ra $y_t$ của hệ từ trạng thái ban đầu $y_0 = C(0)x_0$ tới trạng thái $y_1$ tại thời điểm $t_1$ khi và chỉ khi*
> $$y_1 - C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x_0 \in \mathrm{im} C(t_1)\Phi(t_1, t_0)W_c(t_0, t_1), \tag{3}$$
> *trong đó $\{\Phi(t, s)\}$ là nửa nhóm tiến hóa t.ứ với ptvp của $x$ còn $W_c(t_0, t_1)$ là ma trận điều khiển Kalman.*

*b) Chứng minh Định lý về tính điều khiển được cho hệ LTV thông qua kiểm tra điều kiện **ma trận Kalman đủ hạng dòng**, i.e.,*

$$\text{rank } K(t) = \begin{bmatrix} M_0(t) & M_1(t) & \dots & M_{n-1}(t) \end{bmatrix} = n \quad \textit{với } t > t_0 \textit{ nào đó.} \tag{4}$$

Hint: Nếu không làm được các em có thể xem Định lý 6.12 (trang 178 cuốn của Chen).

*c) (Open question) Em hãy thử mở rộng điều kiện hạng Kalman trong phần b) cho hệ điều khiển được 1 phần.*

**Câu 2** *Hãy xét tính điều khiển được của các hệ điều khiển sau*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x\ . \tag{5}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} \end{bmatrix} x\ . \tag{6}$$

**Câu 3** *Hãy xây dựng và chứng minh điều kiện cần và đủ cho tính chất điều khiển được (tương tự như định lý về Gramian điều khiển $W_c$) của hệ phương trình vi phân sau*

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t) + C(t)U(t)D(t), \ \forall t \geq t_0. \tag{7}$$

*Phương trình vi phân (7) có tên gọi là phương trình vi phân Sylvester và có công thức nghiệm tường minh như sau.*

$$X(t) = \Phi_A(t,t_0)D\Phi_{B^T}(t,t_0)^T + \int_{t_0}^{t} \Phi_A(t,s)C(s)\Phi_{B^T}(t,s)^T ds, \tag{8}$$

*trong đó* $\{\Phi_A(t,s)\}$ *và* $\{\Phi_{B^T}(t,s)\}$ *là hai họ tiến hóa tương ứng với hai phương trình vi phân* $\dot{X} = A(t)X$ *và* $\dot{X} = B^T(t)X$.

*Các em có thể tham khảo thêm Định lý 1.1.1-1.1.5 trong cuốn sách*
Abou-Kandil, H., Freiling, G., Ionescu, V., Jank, G.: Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory. Birkhäuser, Basel (2003).

**Câu 4** ***Controllability of frozen system***
*Ta gọi hệ LTV (1) là bị đóng băng từ thời điểm* $\sigma > t_0$ *nào đó nếu lấy* $A(t) \equiv A(\sigma)$ *và* $B(t) \equiv B(\sigma)$, *với mọi* $t \geq \sigma$.
*a) Giả sử rằng tại mọi thời điểm* $\sigma > t_0$ *hệ đóng băng*

$$\dot{x} = A(\sigma)x(t) + B(\sigma)u(t), \ \forall t \geq \sigma,$$

*là điều khiển được. Hỏi hệ LTV (1) có điều khiển được hay không? Vì sao?*
*b) Cho trước thời điểm* $\sigma \geq t_0$, *và giả sử rằng hệ LTV (1) là điều khiển được từ thời điểm* $\sigma$ *đến thời điểm bất kỳ* $t_1 > \sigma$. *Hỏi hệ đóng băng tại* $\sigma$ *có điều khiển được hay không? Vì sao?*