

I. PHẦN 1

- 1.1 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}$
- 1.2 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{\frac{1}{x}}$
- 1.3 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{\sin x - x}$
- 1.4 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)^{\cotg \frac{\pi}{2}x}$
- 1.5 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$
- 1.6 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$
- 1.7 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + 2\ln \sin x}$
- 1.8 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{tg \frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$
- 1.9 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{\pi} \arctg x)^x$
- 1.10 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$
- 1.11 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}$
- 1.12 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1+tg x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$
- 1.13 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{tg t} dt}{\int_0^{tg x} \sqrt{\sin t} dt}$
- 1.14 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} (\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7})^x$
- 1.15 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\cos \sqrt{x}}$
- 1.16 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{tg x}$
- 1.17 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\ln x}$
- 1.18 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$
- 1.19 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$
- 1.20 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\cos x}{\cos 2x})^{\frac{1}{x^2}}$
- 1.21 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tg x}$
- 1.22 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + 2) \ln(x + 2) - 2(x + 1) \ln(x + 1) + x \ln x]$
- 1.23 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$
- 1.24 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$
- 1.25 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \ln(x+1) - \sin \ln x)$
- 1.26 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$
- 1.27 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$
- 1.28 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

- 1.29 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$
- 1.30 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + tg^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$
- 1.31 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{tg \frac{\pi}{2}x}$
- 1.32 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{tg 2x}$
- 1.33 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-e^{2x})(1-\cos x)}{2x^4+x^3}$
- 1.34 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \cos x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$
- 1.35 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
- 1.36 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}$
- 1.37 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$
- 1.38 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
- 1.39 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$
- 1.40 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot g x - 1}{x^2}$
- 1.41 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$
- 1.42 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$
- 1.43 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctg t^2}{1-\cos x} dt$
- 1.44 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$
- 1.45 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x-1}{x \ln x}$
- 1.46 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-e^{-x})}}$
- 1.47 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$
- 1.48 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + tg^2 \sqrt{2x})^{\frac{1}{3x}}$
- 1.49 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x^2} \cos^2 \alpha x - 1}{x^2}$
- 1.50 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$
- 1.51 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos(ax)}{\ln \cos(bx)}$
- 1.52 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(nx + \sqrt{1-n^2 x^2})}{\ln(x + \sqrt{1-x^2})}$
- 1.53 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - (\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}$
- 1.54 Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x})$
- 1.55 Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$
- 1.56 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\cot g^2 x}$
- 1.57 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$

1.58 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n}$

1.59 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

1.60 Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$

1.61 Tìm $f(0)$ để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \frac{\sin ax - \sin bx}{x}$$

1.62 Tìm $f(0)$ để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

1.63 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{4}{e^x + 1} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

1.64 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 3x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

1.65 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

1.66 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin(x^2 - 2x)}{3x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

1.67 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^3 x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

1.68 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \sin \frac{\pi}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

1.69 Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$

Hãy tìm các giới hạn một phía: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

1.70 Chứng minh rằng $e^{2x} - e^x$ và $\sin 2x - \sin x$ là các VCB tương đương khi $x \rightarrow 0$

1.71 Chứng minh rằng $\arcsin x - x$ và $\frac{x^3}{6}$ là các VCB tương đương khi $x \rightarrow 0$

1.72 So sánh bậc của các VCB sau khi $x \rightarrow \pm\infty$

$$\alpha(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}, \beta(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$$

1.73 So sánh bậc của các VCB sau khi $x \rightarrow 0$

$$\alpha(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1, \beta(x) = \frac{1}{n}x \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

1.74 So sánh bậc của các VCB sau khi $x \rightarrow 0$

$$\alpha(x) = a^x - b^x, \beta(x) = x \ln \frac{a}{b}$$

1.75 So sánh bậc của các VCB sau khi $x \rightarrow 0$

$$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$$

1.76 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

1.77 Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại mấy của hàm số $f(x) = \frac{8}{1 - 2^{\cot gx}}$

1.78 Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại mấy của hàm số $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x + 1}}$

1.79 Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-1}}} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

1.80 Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

1.81 Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

1.82 Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{neu } |x| \leq 1 \\ |x - 1| & \text{neu } |x| > 1 \end{cases}$$

1.83 Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Với giá trị nào của a thì hàm số gián đoạn tại điểm $x = 0$, khi đó $x = 0$ là điểm gián đoạn loại mấy?

1.84 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x \ln x^2 & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Với giá trị nào của a thì hàm số gián đoạn tại điểm $x = 0$, khi đó $x = 0$ là điểm gián đoạn loại mấy?

1.85 Tìm các điểm gián đoạn của hàm số và xét xem chúng là điểm gián đoạn loại mấy?

$$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

1.86 Tìm các điểm gián đoạn của hàm số và xét xem chúng là điểm gián đoạn loại mấy?

$$y = \frac{1}{\frac{x}{1 - e^{1-x}}}$$

1.87 Tìm các điểm gián đoạn của hàm số và xét xem chúng là điểm gián đoạn loại mấy?

$$y = \frac{\frac{1}{2x-2}+1}{\frac{1}{2x-2}-1}$$

1.88 Tìm các điểm gián đoạn của hàm số và xét xem chúng là điểm gián đoạn loại mấy?

$$y = e^{1+\frac{x}{|x|}}$$

1.89 Xét tính liên tục của hàm số (Với a là tham số)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \leq -1 \\ \arcsin x & , -1 < x < 1 \\ a + \cos x & , x \geq 1 \end{cases}$$

1.90 Tìm a, b để hàm số sau liên tục với mọi giá trị của x

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & , x \leq 1 \\ a^2 x^2 + bx & , 1 < x < 2 \\ 0 & , x \geq 2 \end{cases}$$

1.91 Giả sử f(x) liên tục tại x_0 , chứng minh $|f(x)|$ cũng liên tục tại x_0 .

1.92 Tìm điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^n}$

1.93 Tìm điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \cdot \arctg(nx)$

1.94 Tìm hàm f(x) thỏa mãn

$$xf(x) + f(1-x) = x^3 + 1, \forall x \in R$$

1.95 Tìm hàm f(x) thỏa mãn

$$f(x)f(x^2 - 1) = \sin x, \forall x \in R$$

1.96 Tìm hàm f(x) thỏa mãn

$$f(x+y^2) = f(x^2) + f(y), \forall x, y \in R$$

1.97 Khi $x \rightarrow 0$ cặp VCB sau có tương đương không: $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$

1.98 Tìm a, b để hàm số sau liên tục $\forall x$

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & \text{khi } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{khi } x \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1.99 Giả sử f(x) liên tục tại x_0 . Chứng minh $|f(x)|$ liên tục tại x_0 .

1.100 Tìm a để hàm số sau liên tục $\forall x$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

II. Phần 2

2.1 Tìm cực trị của hàm số:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

2.2 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

2.3 Tìm cực trị của hàm số:

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

2.4 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

2.5 Tìm cực trị của hàm số:

$$f(x) = x + \operatorname{arccot} g 2x$$

2.6 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = x + \operatorname{arccot} g 2x$$

2.7 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$$

2.8 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}$$

2.9 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

2.10 Tìm tiệm cận xiên của hàm số:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 6x + 6}$$

2.11 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = \ln x + x$$

2.12 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

2.13 Tìm cực trị của hàm số trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \tan^2 x}$$

2.14 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

2.15 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

2.16 Tìm tiệm cận xiên của hàm số:

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{4 - t^2} \\ y = \frac{2t^2}{4 - t^2} \end{cases}$$

2.17 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$\begin{cases} x = \frac{6t}{1 + t^3} \\ y = \frac{6t^2}{1 + t^3} \end{cases}$$

2.18 Tìm tiệm cận xiên của hàm số:

$$f(x) = x(1 + \frac{1}{x})^x, (x > 0)$$

2.19 Tìm tiệm cận xiên của hàm số:

$$f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}, (x > 0)$$

2.20 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

2.21 Tìm tiệm cận của hàm số:

$$f(x) = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

2.22 Tìm cực trị của hàm số:

$$f(x) = \sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}$$

2.23 Tìm cực trị của hàm số:

$$f(x) = x \ln^2 x$$

2.24 Tìm cực trị của hàm số:

$$f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

2.25 Tìm cực trị của hàm số:

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$$

2.26 Tìm cực trị của hàm số:

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$$

2.27 Tìm điểm uốn của đường cong:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2} + 1$$

2.28 Tìm điểm uốn của đường cong:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

2.29 Tìm điểm uốn của đường cong:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 6x + 6}$$

2.30 Tìm điểm khoảng lồi, lõm của đường cong:

$$y = e^{\arctg x}$$

2.31 Tìm điểm khoảng lồi, lõm của đường cong:

$$y = \frac{a}{x} \ln \frac{x}{a}, a > 0$$

2.32 Tìm cực trị của hàm số trong khoảng $(0, \pi)$:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \cot^2 x}$$

2.33 Xác định các khoảng đơn điệu của hàm số: $f(x) = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

2.34 Xác định các khoảng đơn điệu của hàm số: $f(x) = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arcsin \frac{x}{3} + \arccos \frac{x}{3}$

2.35 Tìm a, b để hàm số $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ có cực trị tại $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$. Khi đó chứng minh hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 = 1$ và đạt cực đại tại $x_2 = 2$.

- 2.36 Tính $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
- 2.37 Giả sử $f(x)$ là hàm lẻ và có đạo hàm. Chứng minh đạo hàm của nó là hàm chẵn.
- 2.38 Giả sử $f(x)$ là hàm chẵn và có đạo hàm. Chứng minh đạo hàm của nó là hàm lẻ và triệt tiêu tại $x = 0$.
- 2.39 Giả sử $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T và có đạo hàm. Chứng minh đạo hàm của nó cũng tuần hoàn với chu kỳ T .
- 2.40 Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, tính $f^{(2008)}(0)$
- 2.41 Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$, tính $f^{(2008)}(1)$
- 2.42 Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$, tính $f^{(2008)}(2)$
- 2.43 Cho hàm số $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, tính $f^{(n)}(0)$
- 2.44 Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$, tính $f^{(n)}(0)$
- 2.45 Tính $y''(x)$ với $y(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
- 2.46 Cho hàm số $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$, tính $df(x)$
- 2.47 Cho hàm số $f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$, ($x > 0$), tính $df(x)$
- 2.48 Cho hàm số $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, ($x > 0$), tính $df(x)$
- 2.49 Cho hàm số $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$, tính $f'(0), f''(0)$
- 2.50 Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, tính $f'(x)$ với $a > 0$ là hằng số
- 2.51 Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, tính $f''(f'(0))$, với $a > 0$ là hằng số
- 2.52 Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$, tính $f^{(2007)}\left(\frac{3}{2}\right), f^{(2008)}\left(\frac{3}{2}\right)$
- 2.53 Cho hàm số $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, tính $f'(a)$ biết $\varphi(x)$ liên tục tại a và $\varphi(a) \neq 0$
- 2.54 Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$, tính $f^{(7)}(x)$
- 2.55 Cho hàm số $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $f^{(10)}(x)$
- 2.56 Cho hàm số $f(x) = x^n e^x$, tính $f^{(n)}(0)$, với $n \in \mathbb{N}^*$
- 2.57 Cho hàm số $f(x) = \sqrt{\cos \sqrt{x}}$, tìm miền xác định và tính $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$
- 2.58 Cho hàm số $y = f(x^2)$, f khả vi cấp 2. Tìm d^2y
- 2.59 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } 1 < x < +\infty \end{cases}$. Tính $f'(1)$

2.60 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -(1-x) & \text{khi } x < 1 \\ (1-x)(2-x) & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x) & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính $f'(1)$, $f'(2)$

2.61 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, tính $f'(0)$

2.62 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x < 0 \\ \ln(1+x) - x, & x \geq 0 \end{cases}$, tính $f'(0)$

2.63 Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, tính $f^{(n)}(x)$

2.64 Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, tính $f^{(n)}(0)$

2.65 Dùng định lý Lagrange chứng minh bất đẳng thức

$$|\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|$$

2.66 Chứng minh bất đẳng thức sau đây đúng với mọi x

$$2x \arctg x \geq \ln(1+x^2)$$

2.67 Chứng minh bất đẳng thức sau đây đúng với mọi $x > 1$

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$$

2.68 Viết công thức Lagrange cho hàm số $f(x) = \ln x$ trong khoảng $[a, b]$, $b > a > 0$, từ đó

suy ra bất đẳng thức: $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$

2.69 Chứng minh bất đẳng thức sau đây đúng với mọi $x \geq 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2.70 Chứng minh bất đẳng thức sau đây đúng với mọi $x > 0$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

2.71 Chứng minh bất đẳng thức sau đây đúng với mọi $x \geq 0$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

2.72 Chứng minh phương trình $e^{\frac{1}{x}} - x = 0$ có nghiệm duy nhất.

2.73 Chứng minh bất đẳng thức $2x \arctg x \geq \ln(1+x^2)$

2.74 Dùng đạo hàm chứng minh bất đẳng thức: $\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

2.75 Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq 0, \forall x \geq 0$

- 2.76 Chứng minh rằng $\varphi(x)$ là hàm khả vi đơn điệu tăng và $|f'(x)| \leq \varphi'(x), \forall x \geq x_0$ thì $|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0), \forall x \geq x_0$
- 2.77 Khai triển hàm số $f(x) = \frac{x}{x-1}$ theo các lũy thừa của $x-2$ đến số hạng bậc ba và tính phần dư $R_3(x)$
- 2.78 Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ theo các lũy thừa của $x-2$ đến số hạng bậc ba và tính phần dư $R_3(x)$
- 2.79 Hàm $f(x)$ gọi là lồi phía dưới trong khoảng (a, b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, và λ_1, λ_2 tùy ý ($\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) ta có bất đẳng thức $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$. Dùng định lý Lagrange chứng minh hàm $f(x)$ lồi phía dưới nếu $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$
- 2.80 Cho hàm số $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n, m, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.
- 2.81 Trên cung AB của đường cong tham số $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, hãy tìm điểm M mà tiếp tuyến tại đó song song với dây cung AB biết A ứng với $t = 1$ và B ứng với $t = 3$.
- 2.82 Tìm trên đường cong $y = x^3$ các điểm có tiếp tuyến song song với dây cung nối hai điểm $A(-1, -1)$ và $B(2, 8)$.
- 2.83 Cho hàm số $f(x) = x^n$, chứng minh rằng
$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$
- 2.84 Cho hàm số $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$, tìm ba số hạng đầu của khai triển Taylor tại $x_0 = 1$, áp dụng tính $f(1,03)$.
- 2.85 Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ chỉ khả vi duy nhất tại một điểm
- 2.86 Giả sử $f(x)$ khả vi trong đoạn $[0, 1]$ và $f'(0) \cdot f'(1) < 0$. Chứng minh sẽ tồn tại $\zeta \in [0, 1]$ sao cho $f(\zeta) = 0$.
- 2.87 Hàm số $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ triệt tiêu khi $x_1 = -1$ và $x_2 = 1$ nhưng $f'(x) \neq 0, \forall |x| \leq 1$. Điều này có mâu thuẫn với định lý Rolle không? Tại sao?
- 2.88 Giải thích tại sao công thức Cauchy không áp dụng được với các hàm số: $f(x) = x^2, g(x) = x^3; -1 \leq x \leq 1$
- 2.89 Cho $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$. Tính $f^{(20)}(x)$
- 2.90 Cho $f(x) = e^x \sin x$. Tính $f^{(n)}(x)$
- 2.91 Cho $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Tính $f^{(10)}(x)$
- 2.92 Chứng minh rằng các điểm uốn của đường $y = x \sin(x)$ nằm trên đường $y^2(4 + x^2) = 4$
- 2.93 Tìm giới hạn sau và chứng tỏ rằng giới hạn sau không áp dụng được Lôpitan
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$
- 2.94 Cho hàm $f(x) = |1 - x| \sin^2 \pi x$. Tính $f'(1)$
- 2.95 Tìm tiệm cận của hàm số: $f(x) = x^2 e^{-x}$
- 2.96 Tìm cực trị của hàm số: $f(x) = x^2 e^{-x}$

- 2.97 Tìm tiệm cận của hàm số: $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$
- 2.98 Tìm cực trị của hàm số: $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$
- 2.99 Chứng minh $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ có 3 điểm uốn thẳng hàng.
- 2.100 Chứng minh phương trình $2x + \cos x + \sin x = 0$ có nghiệm duy nhất.

III. Phần 3

3.1 Tính tích phân $A = \int \frac{1+e^{\arctg x}}{1+x^2} dx$

3.2 Tính tích phân $B = \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$

3.3 Tính tích phân $C = \int \frac{x-\sin x}{1+\cos x} dx$

3.4 Tính tích phân $A = \int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x} dx$

3.5 Tính tích phân $B = \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx$

3.6 Tính tích phân $C = \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$

3.7 Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

3.8 Tính tích phân $J = \int \frac{x^3+x^2+1}{1+x^4} dx$

3.9 Tính tích phân $I = \int x \ln^2 x dx$

3.10 Tính tích phân $I = \int \frac{\tg x - \cot x}{\sin x} dx$

3.11 Tính tích phân $I = \int \frac{x-a}{x^3+a^2x} dx$

3.12 Tính tích phân $I = \int \frac{\cot x - \tg x}{\cos x} dx$

3.13 Tính tích phân $I = \int \frac{5x-1}{x^3-3x-2} dx$

3.14 Tính tích phân $I = \int x e^{x^2} (x^2+1) dx$

3.15 Tính tích phân $I = \int \arctg \sqrt{x} dx$

3.16 Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$

3.17 Tính tích phân $J = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$

3.18 Tính tích phân $I = \int \frac{\arctg x}{x^3} dx$

3.19 Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| (1+x) dx$

3.20 Tính tích phân $J = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3.21 Tính tích phân $A = \int \frac{dx}{\cos^2 x (1+\cot x)}$

- 3.22 Tính tích phân $B = \int \frac{\sqrt[3]{5} dx}{\sqrt[3]{2} x \sqrt{x^3 - 1}}$
- 3.23 Tính tích phân $A = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- 3.24 Tính tích phân $B = \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$
- 3.25 Tính tích phân $A = \int \frac{\cos^3 \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$
- 3.26 Tính tích phân $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2} dx$
- 3.27 Tính tích phân $I = \int \sin e^{\frac{x}{3}} \cdot e^{\frac{2x}{3}} dx$
- 3.28 Tính tích phân $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 \cdot \cos^2 x} dx$
- 3.29 Tính tích phân $I = \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx$
- 3.30 Tính tích phân $I = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx$
- 3.31 Tính tích phân $I = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4} dx$
- 3.32 Tính tích phân $J = \int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$
- 3.33 Tính tích phân $I = \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$
- 3.34 Tính tích phân $J = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$
- 3.35 Tính tích phân $I = \int \frac{\arccos x}{x^2} dx$
- 3.36 Tính tích phân $J = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$
- 3.37 Tính tích phân $I = \int \frac{x+4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx$
- 3.38 Tính tích phân $J = \int x \arccos \frac{1}{x} dx$
- 3.39 Tính tích phân $I = \int \frac{1}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x} dx$

- 3.40 Tính tích phân $J = \int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$
- 3.41 Tính tích phân $I = \int_1^e (x \ln x)^2 dx$
- 3.42 Tính tích phân $J = \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} dx$
- 3.43 Tính tích phân $I = \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$
- 3.44 Tính tích phân $J = \int \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$
- 3.45 Tính tích phân $I = \int \cos(\ln x) dx$
- 3.46 Tính tích phân $J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$
- 3.47 Tính tích phân $I = \int \sin(\ln x) dx$
- 3.48 Tính tích phân $I = \int \frac{1}{(x^2 + x)(x^2 + 1)} dx$
- 3.49 Tính tích phân $J = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx$
- 3.50 Tính tích phân $I = \int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx$
- 3.51 Tính tích phân $J = \int_1^3 \frac{1}{x \sqrt{x^2 + 5x + 1}} dx$
- 3.52 Tính tích phân $I = \int \frac{x}{(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{3}}} dx$
- 3.53 Tính tích phân $J = \int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx$
- 3.54 Tính tích phân $I = \int \frac{x}{x^6 + 1} dx$
- 3.55 Tính tích phân $J = \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$
- 3.56 Tính tích phân $I = \int \frac{1}{(1 + e^x)^2} dx$

- 3.57 Tính tích phân $I = \int \frac{1}{x(1+\sqrt{x})^2} dx$
- 3.58 Tính tích phân $I = \int x \ln \sqrt{1-x} dx$
- 3.59 Tính tích phân $J = \int \frac{1}{\sin 2x - 2 \sin x} dx$
- 3.60 Tính tích phân $I = \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 x} dx$
- 3.61 Tính tích phân $J = \int x \cdot \ln(1+x^3) dx$
- 3.62 Tính tích phân $I = \int (x^2 + 5x + 6) \cos^2 x dx$
- 3.63 Tính tích phân $J = \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} dx$
- 3.64 Tính tích phân $I = \int (x^2 - 2x + 5) \sin^2 x dx$
- 3.65 Tính tích phân $J = \int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1+\sin^2 x}} dx$
- 3.66 Tính tích phân $I = \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx$
- 3.67 Tính tích phân $I = \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx, (a > 0)$
- 3.68 Tính tích phân $I = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$
- 3.69 Tính tích phân $J = \int \frac{\ln(x^2+1)}{x^3} dx$
- 3.70 Tính tích phân $A = \int \frac{\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}} dx$
- 3.71 Tính tích phân $B = \int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} dx$
- 3.72 Tính tích phân $I = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{16-e^x}} dx$
- 3.73 Tính tích phân $J = \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$
- 3.74 Tính tích phân $I(\alpha) = \int_0^1 |x - \alpha| x dx$
- 3.75 Tính tích phân $I = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$
- 3.76 Tính tích phân $J = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$
- 3.77 Tính tích phân $J = \int_0^1 e^{(x-e^x)} dx$
- 3.78 Tính tích phân $I = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^3 x \sin^5 x}} dx$
- 3.79 Tính tích phân $J = \int \frac{x^4 \arctg x}{1+x^2} dx$
- 3.80 Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx$
- 3.81 Tính tích phân $I = 5 \int \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$
- 3.82 Tìm giới hạn: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})$

- 3.83 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
- 3.84 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$
- 3.85 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$
- 3.86 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx \quad (p, q > 0).$
- 3.87 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $K = \int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctg x}{2 + x^n} dx \quad (n \geq 0).$
- 3.88 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $K = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg \frac{3x}{x}}{x} dx$
- 3.89 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}} dx$
- 3.90 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $K = \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx$
- 3.91 Tính tích phân suy rộng: $K = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$
- 3.92 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $J = \int_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- 3.93 Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I = \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$
- 3.94 Chứng minh $I(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{\tg x} \frac{t}{1+t^2} dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot g x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt = 1, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$
- 3.95 Chứng minh $\int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt, (x > 0)$
- 3.96 Chứng minh $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$
- 3.97 Cho hàm số: $\begin{cases} x = a(\cos t + \ln \tg \frac{t}{2}) \\ y = a \sin x \end{cases}$, tính độ dài cung khi t biến thiên từ $\frac{\pi}{3}$ đến $\frac{\pi}{2}$
- 3.98 Tính độ dài cung của đường cong $y = \ln \cos x$ với $0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$.
- 3.99 Tính độ dài cung của đường cong $y^2 = 8x$ với $0 \leq x \leq 2$
- 3.100 Tính độ dài cung của đường cong $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ với $1 \leq x \leq e$

IV. Phần 4

4.1 Cho hàm số $z = \arctg \frac{y}{x} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, tính:

$$dz(1,0); A = (x+y)z'_x - (x-y)z'_y, d^2z(1,0), B = z''_{xx} + z''_{yy}$$

4.2 Cho hàm số $z = e^{x+y} \sin(x-y)$, tính $dz(0,0)$ và kiểm tra đẳng thức $z \cdot z''_{xx} - z'^2_x = z \cdot z''_{yy} - z'^2_y$. Chứng minh đẳng thức $a^2(z \cdot z''_{xx} - z'^2_x) = b^2(z \cdot z''_{yy} - z'^2_y)$ khi $z = f(ay + bx)\varphi(bx - ay)$ với f, φ là các hàm khả vi 2 lần. ($a \neq 0, b \neq 0$)

4.3 Tìm hằng số m để cho biểu thức $(e^x \sin y + 2m^2 x \cos y)dx + (e^x \cos y - mx^2 \sin y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm hai biến $F(x, y)$. Tìm hàm $F(x, y)$ nếu $F(0, \frac{\pi}{2}) = 2$ và $mm = -1$.

4.4 Tìm hàm số $h(x)$ sao cho $h(x)[(x^3 + xy)dx + (xy + x^2)dy]$ là vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y)$. Tính $f(x, y)$ nếu $f(1,0) = 1$ và $f'_x(1,0) = 1$.

4.5 Tìm hàm số $h(y)$ sao cho $h(y)[(y^2 - \sin^2 x)dy + y \sin 2x dx]$ là vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y)$. Tính $f(x, y)$ nếu $f(\frac{\pi}{4}, 1) = 2$ và $f'_y(\frac{\pi}{4}, 1) = 1$

4.6 Tìm hàm số $h(x^2 - y^2)$ sao cho $h[(x^2 + y^2 + 1) - 2xy]dy$ là vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y)$. Tính $f(x, y)$ nếu $f(0,0) = 1$ và $f'_y(1,1) = 2$

4.7 Cho hàm số $z = \ln(6x^2 + 13xy + 6y^2)$ tính: $\frac{\partial^{1998} z}{\partial x^{1998}}(1,0), \frac{\partial^{1999} z}{\partial y^{1999}}(1,0), \frac{\partial^{2000} z}{\partial x^{1000} \partial y^{1000}}(1,0)$

4.8 Cho hàm số $z(x, y)$ xác định bởi $x + \frac{z}{y} = e^{y + \frac{z}{x}}$. Chứng minh rằng $xz'_x + yz'_y = z - xy$. Từ

đó chứng minh đẳng thức trên vẫn đúng khi z xác định bởi $F(x + \frac{z}{y}; y + \frac{z}{x}) = 0$ với F là

hàm tùy ý khả vi.

4.9 Cho hàm số

4.10 Tìm cực trị hàm số $z = 2x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y$

4.11 Tìm cực trị hàm số $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$

4.12 Tìm a, b, c để hàm số $z = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + ax + by + c$ có cực trị tại $M(1,1)$ và $z(M) = 0$

4.13 Cho hàm số $z(x, y)$ xác định bởi $z + e^z(x^2 + y^2) = 0$. Tìm cực trị hàm số $z(x, y)$.

4.14 Tính giá trị lớn nhất và nhỏ của hàm số $z = \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y)$ trong hình vuông $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$

4.15 Tìm hàm số $z(x, y)$ nếu $z'_x = -(y \sin x + 1)y \cos x; z'_{yy} = \cos^2 x$

4.16 Tìm nghiệm của phương trình $z''_{yy} = 2$ thỏa mãn $z(x,0) = 1, z'_y(x,0) = x$

4.17 Chứng minh rằng nếu $x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ thì $\forall xy > 0$ ta có $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$

4.18 Cho u, v là các hàm số của x, y xác định bởi hệ thức $\begin{cases} u + v = x + y \\ y \sin u - x \sin v = 0 \end{cases}$, tính

$$du, dv, d^2u, d^2v$$

4.19 Tìm hàm số $z(x, y)$ sao cho $y \cdot z'_x = x z'_y$ bằng cách đổi biến $u = x, v = x^2 + y^2$

4.20 Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

4.21 Cho u, v là các hàm số của x, y xác định bởi hệ thức $\begin{cases} e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$, tính

$$du, dv, d^2u, d^2v \text{ khi } x = y = 1, u = 0, v = \frac{\pi}{4}$$

4.22 Cho u, v là các hàm số của x, y xác định bởi hệ thức $\begin{cases} x e^{u+v} + 2uv = 1 \\ y e^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$, tính

$$du(1,2), dv(1,2) \text{ khi } u(1,2) = v(1,2) = 0.$$

4.23 Cho u, v là các hàm số của x, y xác định bởi hệ thức $\begin{cases} e^{uv} + u + v = x + 1 \\ uv + u^2 + v = x + y \end{cases}$ với $u(0,0) = 0, v(0,0) = 0$. Tính $du(0,0), dv(0,0)$

4.24 Tìm cực trị hàm số $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ($x > 0, y > 0$).

4.25 Tìm cực trị hàm số $z = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$

4.26 Tìm cực trị hàm số $z = \frac{2x + 2y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$

4.27 Tìm cực trị hàm số $z = \frac{1-2x-2y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$

4.28 Cho hàm số $z = x e^{\frac{y}{x}}$, kiểm tra lại đẳng thức sau: $x^2 z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{y^2} = 0$

4.29 Cho hàm số $z = x \sin \frac{y}{x}$, kiểm tra lại đẳng thức sau: $x^2 z''_{x^2} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{y^2} = 0$

4.30 Cho hàm số $z = x \arctg \frac{x}{y} - x^2 - y^2$. Chứng minh rằng $xz'_x + yz'_y = z - x^2 - y^2$

4.31 Cho $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$ với φ, ψ là các hàm tùy ý khả vi hai lần, chứng minh rằng $z''_{x^2} - 2z''_{xy} + z''_{y^2} = 0$

4.32 Tìm các hằng số α, β để phép đổi biến $z = u e^{\alpha x + \beta y}$ để phương trình

$$z''_{xy} + \alpha z'_x + \beta z'_y + cz = 0 \text{ về phương trình } u''_{xy} + C_1 x = 0. \text{ Với } \alpha, \beta, c \text{ là các hằng số. Tính } C_1 \text{ theo } \alpha, \beta, c.$$

- 4.33 Giải phương trình $yz''_{y^2} + 2z'_y = \frac{2}{x}$ bằng phép đổi biến $u = \frac{x}{y}, v = x, w = xz - y$.
- 4.34 Giải phương trình $z''_{yy} = a^2 z''_{xx}$ bằng phép đổi biến $u = x - ay, v = x + ay, a \neq 0$
- 4.35 Giải phương trình $(x + y)z'_x - (x - y)z'_y = 0$ bằng phép đổi biến $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, v = \arctg \frac{y}{x}$
- 4.36 Tìm hàm số $z(x, y)$ thỏa mãn điều kiện $z''_{xx} = 12x^2y + 2, z'_y = x^4 - 30xy^5$ và các điều kiện $z(0,0) = 1, z(1,1) = -2$
- 4.37 Biến đổi biểu thức $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$ khi $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 4.38 Tìm cực trị hàm số $z = x + y - xe^y$
- 4.39 Cho z là các hàm theo x, y xác định bởi $z = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Tìm z'_x, z'_y, z''_{xy}
- 4.40 Cho hàm số $z = x^2 - y^2$
- Tìm cực trị hàm số
 - Tính giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trong miền $x^2 + y^2 \leq 2$
- 4.41 Cho $z = f(u) + g(v)$ với $u = xy, v = \frac{x}{y}$ trong đó f, g là các hàm khả vi đến cấp 2. Chứng minh $x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} + xz'_x - yz'_y = 0$
- 4.42 Tính gần đúng giá trị $z(0,002; 0,99)$ với z xác định bởi $z - ye^{\frac{x}{z}} = 0$
- 4.43 Cho $f(x) = (x - 2y) \sin(x - 2y) + \arctg(x + 2y)$. Tính $I = z''_{yy} - 4z''_{xx}$
- 4.44 Áp dụng vi phân tính gần đúng
- $A = \ln\sqrt{1,01^{0,09}}$
 - $B = \sqrt[3]{(2,01)^2 + (1,96)^2}$
- 4.45 Chứng minh rằng hàm số $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$ thỏa mãn phương trình $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ với a là hằng số khác 0.
- 4.46 Cho $P(x, y) = \frac{x+2y}{(x+y)^n}, Q(x, y) = \frac{y}{(x+y)^n}$. Tìm n để $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ nào đó.
- 4.47 Cho hàm số $z = 4x - x^3 - xy^2$ (1)
- Tìm cực trị hàm số
 - Coi (1) là phương trình, xác định hàm ẩn x theo các biến y, z
- 4.48 Cho hàm số $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ (1)
- Tìm cực trị hàm số
 - Coi (1) là phương trình, xác định hàm ẩn x theo các biến y, z
- 4.49 Tìm cực trị hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$
- 4.50 Tìm hàm $z(x, y)$ nếu $z'_x = \frac{x^2 + y^2}{x}$ và $z(1, y) = \sin y$

V. Phần 5

- 5.1 Giải phương trình vi phân $y^2 dx + (2xy + 3)dy = 0$
- 5.2 Giải phương trình vi phân $2xy' y'' = y'^2 - 1$
- 5.3 Giải phương trình vi phân $e^x (2 + 2x - y^2)dx - 2e^x y dy = 0$
- 5.4 Giải phương trình vi phân $y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$
- 5.5 Giải phương trình vi phân $y' + \frac{1}{2x - y^2} = 0$
- 5.6 Giải phương trình vi phân $y'' + y' = x + e^{-x}$
- 5.7 Giải phương trình vi phân $(x + 1)y'' + x(y')^2 = y'$
- 5.8 Giải phương trình vi phân $2y'' + 5y' = 29x \sin x$
- 5.9 Giải phương trình vi phân $(y^2 + 1)^{3/2} dx + (y^2 + 3xy \sqrt{1 + y^2}) dy = 0$
- 5.10 Giải phương trình vi phân $\sqrt{y} \cdot y'' = y'$
- 5.11 Giải phương trình vi phân $a(xy' + 2y) = xyy'$
- 5.12 Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' + 5y = x \sin 3x$
- 5.13 Giải phương trình vi phân $(y \cos^2 x - \sin x) dy = y \cos x (y \sin x + 1) dx$
- 5.14 Giải phương trình vi phân $y'' = y' e^y$
- 5.15 Giải phương trình vi phân $x^2 y' = y(x + y)$
- 5.16 Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' - 3y = x e^{4x} + x^2$
- 5.17 Giải phương trình vi phân $(2x + 3x^2 y) dx = (3y^2 - x^3) dy$
- 5.18 Giải phương trình vi phân $xy'' = y' + x^2$
- 5.19 Giải phương trình vi phân $y'^2 + yy'' = yy'$
- 5.20 Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' + y = 1 + \frac{e^x}{x}$
- 5.21 Giải phương trình vi phân $y'' + y' = x e^{-x}$
- 5.22 Giải phương trình vi phân $y e^y = y'(y^3 + 2x e^y)$ với $y(0) = -1$
- 5.23 Giải phương trình vi phân $\left(\frac{x}{\sin y} + 2 \right) dx - \frac{(x^2 + 1) \cos y}{2 \sin^2 y} dy = 0$
- 5.24 Giải phương trình vi phân $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} + \cos x$
- 5.25 Giải phương trình vi phân $xy'' = y' + x$
- 5.26 Giải phương trình vi phân $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ với $y(1) = e$
- 5.27 Giải phương trình vi phân $y'' + 4y' + 4y = 1 + e^{-2x} \ln x$
- 5.28 Giải phương trình vi phân $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$, với $y(1) = \frac{\pi}{2}$
- 5.29 Giải phương trình vi phân $y'' + y' = e^{-x} (\sin x - \cos x)$

- 5.30 Giải phương trình vi phân $y' + xy = x^3$
- 5.31 Giải phương trình vi phân $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$
- 5.32 Giải phương trình vi phân $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$
- 5.33 Giải phương trình vi phân $(x^2 - y)dx + xdy = 0$
- 5.34 Giải phương trình vi phân $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5 + 2e^x \cos \frac{x}{2}$
- 5.35 Giải phương trình vi phân $y' - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$ với $y(1) = 1$
- 5.36 Giải phương trình vi phân $y'' - 4y = (2 - 4x)e^{2x}$
- 5.37 Giải phương trình vi phân $y^2 + x^2 y' = xyy'$
- 5.38 Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} + \cos x$
- 5.39 Giải phương trình vi phân $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$
- 5.40 Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' + 2y = x(e^x + 1)$
- 5.41 Giải phương trình vi phân $(x + 1)(y' + y^2) = -y$
- 5.42 Giải phương trình vi phân $y'' + 2y' + y = \sin x + \frac{e^{-x}}{x}$
- 5.43 Giải phương trình vi phân $y'' - 3y' + 2y = 2e^{ax}$
- 5.44 Giải phương trình vi phân $y''(1 + y) = y'^2 + y'$
- 5.45 Giải phương trình vi phân $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
- 5.46 Giải phương trình vi phân $xydy = (y^2 + x)dx$
- 5.47 Giải phương trình vi phân $yy'' + y'^2 = 1$
- 5.48 Giải phương trình vi phân $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$
- 5.49 Giải phương trình vi phân $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$
- 5.50 Giải phương trình vi phân $2x(1 + x)y' - (3x + 4)y + 2x\sqrt{1+x} = 0$