BT lớn

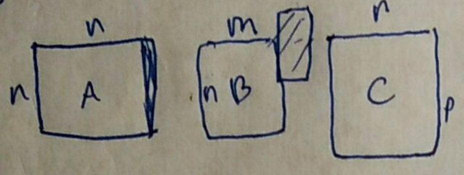
Câu 2:

Xét hệ dương bậc nhất dạng

$\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \quad \forall t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \quad (3)$

$y(t) = C.x(t) \quad (4)$

trong đó A, B, C là các ma trận hệ số. Trong thực tế, ta quan tâm đến hệ dương và ổn định theo nghĩa Lyapunov, tiệm cận, BIBO



a) Cho $C \geq 0$.

ta sẽ cm 1 hệ dương bất kì dạng (3) là ổn định tiệm cận

$\Leftrightarrow$ Mọi hệ số của đa thức đặc trưng $\det(\lambda I - A)$ là dương.

~~CM: Có: hệ (3) là~~

Vì $C \geq 0$ nên hệ (3) (4) (với $u \equiv 0$) là dương $\Leftrightarrow x(t)$ là vector ≥ 0 $\forall$ đkiện bđ $x_0 \geq 0$.

Ta chỉ cần quan tâm đến pt $\dot{x}(t) = A.x(t)$

CM. $\Rightarrow$ • Xét hệ dương $\dot{x} = A.x(t)$ là ổn định tiệm cận

$\Rightarrow$ Mọi giá trị riêng của A đều có pthực < 0.

gtr của A: phức, thực

phức: có liên hợp $(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j)$ $(\lambda^2 \underbrace{- 2\mathrm{Re}\lambda_j}_{>0} + |\lambda_j|^2)$

thực: $(\lambda - \lambda_k)$, $\lambda_k < 0$, $-\lambda_k > 0$

$\det(\lambda I - A)$

$$= \prod_{j=1}^{\ell}\left((\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j)\right)^{n_j} \cdot \prod_{k=1}^{h}(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\left(\text{với: } \sum_{j=1}^{\ell} 2n_j + \sum_{k=1}^{h} m_k = n\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{\ell} P_j(\lambda) \cdot \prod_{k=1}^{h} Q_k(\lambda)$$

. Vì $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $\rightarrow \lambda - \lambda_k = Q_k(\lambda)$ là đa thức có hệ số dương.

. $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ $\rightarrow (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j) = \lambda^2 - 2\mathrm{Re}\lambda_j + |\lambda_j|^2 = P_j(\lambda)$ là đa thức có hệ số dương.

$\rightarrow \det(\lambda I - A)$ là đa thức có hệ số dương $\rightarrow$ Đ

$\Leftarrow$ • Xét hệ dương $\dot{x} = A.x(t)$ có

$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_0$

với $b_{n-1}, \ldots, b_0 > 0$

Xét $B = A - \max_{\lambda \in \rho(A)} Re(\lambda) . I$

ta sẽ CM B có gtr $= 0$.

ta sẽ CM B có gtr bi, -bi $(b \neq 0)$.

Thật vậy, nếu = thì B sẽ có gtr bi, -bi

Gọi v_1, v_2 là 2 vtr phức ứng vs nó.

Trg kg $\mathbb{R}_+^n$, sẽ có vector s sao cho:

$\alpha, \beta \neq (0,0)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$s = \alpha v_1 + \beta v_2 + u$$

$$e^{Bt} s = \underbrace{e^{ibt} . \alpha v_1 + e^{-ibt} . \beta v_2}_{\text{là hàm tuần hoàn}} + \underbrace{e^{Bt} . u}_{\text{tiến đến 0 khi } t \to \infty}$$

Với t đủ lớn ta sẽ có

$$(e^{ibt_1}, e^{-ibt_1}) = (1, 1)$$

và $(e^{ibt_2}, e^{ibt_2}) = (-1, -1)$

khi đó dấu của $e^{Bt_1} s$ và $e^{Bt_2} s$ sẽ ng/c nhau

→ B = còn là hệ dg → vlí.

→ $p = \max_{\lambda \in \rho(A)} Re(\lambda)$ là gtr của A.

Nếu $p \geq 0$ thì ~~A (~~ + $\det(pI - A) \geq b_0 > 0$. → vlí.

+ $p < 0$. → hệ (3) ổn định tiệm cận

2b/. Cho ~~A~~ C>, 0

Ta có:

$$\det(-A + \lambda I_n) = (\lambda)^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_n$$

Với c_k là Σ các định thức con chính cấp k của -A.

~~→ det(-A~~

~~Nếu A^{(3)} là hệ ổn định + c_3, dương~~

~~mọi định thức con chính của~~

~~24x → $c_1, \ldots, c_n$~~ → ~~det (A)~~ $c_1, \ldots, c_n > 0$

⟹ Hệ ổn định tiệm cận → + $\det(-A) = c_n > 0$.

⟹ thu nhỏ lại

$\bar{x} = B . x$ cx ổn đtlc → $\det(-B) > 0$.

ma trận con chính của A

→ mọi đthức con chính của -A đều > 0.

$\Leftarrow$. Nếu mọi đthức con chính cấp k của A đều >0

$\rightarrow c_1, \dots, c_n > 0$.

2a) Hệ ODTC . D.

c) Hệ là ổn định tiệm cận

$\rightarrow \forall x_0$ b/c, $\lim_{t\to\infty} e^{At} . x_0 = 0 \rightarrow \cancel{\|e^{At} . x_0\|}$ ~~b/chặn~~

~~$\|x(t)\|$~~

~~$\rightarrow \|y(t)$~~

~~$\rightarrow$ Hệ là BIBO~~ ~~$\rightarrow \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = B . u(t)$~~

$\rightarrow \|x(t)\| = \|e^{At} . x_0\|$ b/chặn $\rightarrow \|y(t)\| = \|C x(t)\|$ b/c

$\rightarrow$ Hệ là BIBO.

. Ngc lại $\neq$ đúng. Glsử A có ~~vector~~ giá trị riêng ảo ~~vs~~, là no đtn của đtđt A

~~thì~~ và Re (gtrị của A) ≤ 0.

thì A ổn định BIBO nhưng $\neq$ ổn định t/cận.

Câu 1.

a). ~~Cho~~ ĐK chỉ: $B = 0$,

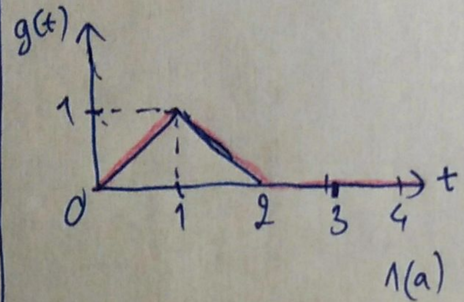
Khi đó $\dot{x}(t) = -K . \cancel{\&} x(t)$, Cho $-K = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

$a_1, \dots a_n > 0$.

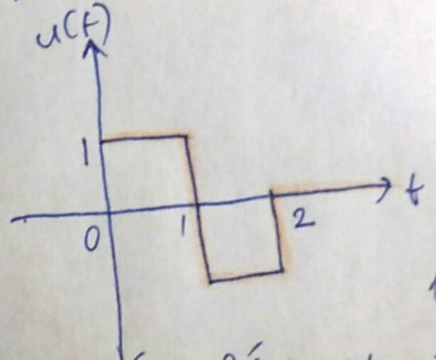
Đó $\neq$ phải là đk cần.

Câu 3:

a) Xem xét 1 hệ thống có phản hồi xung như hình 1(a)



1(a)



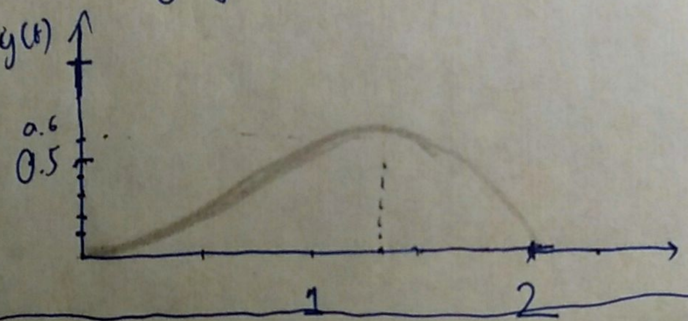
1(b)

Tìm phản hồi trạng thái 0 đc kích thích bởi đầu vào u(t) đc thể hiện trong hình (b)

Ta có mô tả của phản hồi y(t)

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau).u(\tau)d\tau$$

↙ vẽ trên máy tính



b) Xét 1 hệ 2 đầu vào và 2 đầu ra đc biểu diễn bởi pt:

$$D_{11}(p)y_1(t) + D_{12}(p)y_2(t) = N_{11}(p)u_1(t) + N_{12}(p)u_2(t)$$

$$D_{21}(p)y_1(t) + D_{22}(p)y_2(t) = N_{21}(p).u_1(t) + N_{22}(p)u_2(t)$$

u_1, u_2 → □ → y_1, y_2

trong đó N_{ij}, D_{ij} là các đa thức của $p := \frac{d}{dt}$

Tìm ma trận hàm truyền của hệ

$m = \max\{\deg N_{ij}, D_{ij}\}$

Ta có ~~trạng thái~~ đầu vào $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_1^{(m)}(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_2^{(m)}(t) \end{pmatrix}$, thu đầu ra $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_1^{(m)}(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_2^{(m)}(t) \end{pmatrix}$

$$A \leftarrow \begin{pmatrix} a_0 \cdots a_m & b_0 \cdots b_m \\ c_0 \cdots c_m & d_0 \cdots d_m \end{pmatrix} \times y(t) = \begin{pmatrix} a_0' \cdots a_m' & b_0' \cdots b_m' \\ c_0' \cdots c_m' & d_0' \cdots d_m' \end{pmatrix}_{:B} \times u(t).$$

Các hệ số của đa thức D_{ij}

Các hệ số của đa thức N_{ij}

Có: $A . y(t) = B . u(t)$.

$\rightarrow A . \hat{y}(s) = B . \hat{u}(s)$

mà: $$\hat{y}(s) = \begin{pmatrix} \hat{y}_1(s) \\ -y_1(0) + s . \hat{y}_1(s) \\ -y_1'(0) - s y_1(0) + s^2 . \hat{y}_1(s) \\ \vdots \\ -\sum_{k=0}^{m-1} s^k . y_1^{(m-1-k)}(0) + s^m . \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \\ \vdots \\ -\sum_{k=0}^{m-1} s^k . y_2^{(m-1-k)}(0) + s^m . \hat{y}_2(s) \end{pmatrix}$$

thế vs $\hat{u}(s)$ nên có:

đa thức của s

$$C(s) . \begin{pmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \end{pmatrix} = D(s) . \begin{pmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \end{pmatrix} + h(s)$$

biến s ✓

Với $C(s)$, $D(s)$ là các ma trận cỡ 2×2, các phần tử của ~~nó~~ cỡ là đa thức.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \end{pmatrix} = \underbrace{\left(C(s)\right)^{-1} . D(s)}_{\hat{G}(s)} . \begin{pmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \end{pmatrix} + \left(C(s)\right)^{-1} . h(s)$$

$\hat{G}(s)$ là ma trận hàm truyền