

Tên học phần: **Tính Toán Khoa Học**

Mã học phần: **MAT3525** Số tín chỉ: **03** Đề số: **01**

Thời gian làm bài: **90 phút** (không kể thời gian phát đề) Đề bao gồm: **02 trang**

Câu 1 Cho hệ thống điều khiển với các tham số thực $a_i, b_i, i = 0, \dots, 3$ như sau

$$\ddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2\dot{u} + b_3u. \quad (1)$$

Ta biết rằng tồn tại một phép biến đổi hệ về dạng hệ điều khiển bậc nhất sau

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u(t), \quad (2)$$
$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t) + \beta_0 u,$$

trong đó $\beta_i, i = 0, \dots, 3$ là các tham số thực được xác định theo $a_i, b_i, i = 0, \dots, 3$.

a) Dựa vào hệ (2) hãy tìm công thức của x_1, x_2, x_3 theo $y, \beta_1, \beta_2, \beta_3, u, \dot{u}, \ddot{u}, \ddot{u}$.

b) Hãy lập được hệ phương trình để tính $\beta_i, i = 0, \dots, 3$ theo $a_i, b_i, i = 0, \dots, 3$, **chú ý không cần giải cụ thể**.

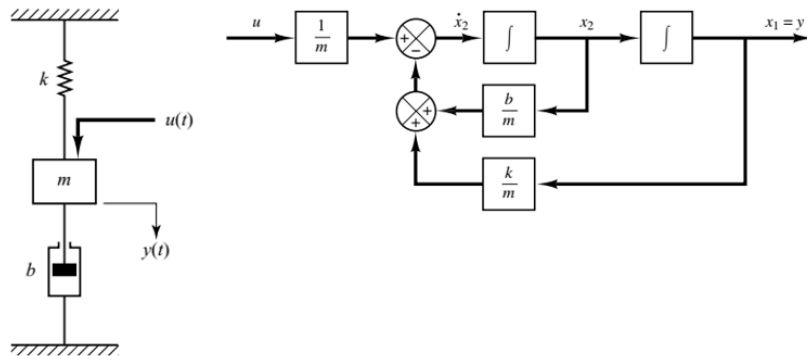
c) Cho $\vec{a} := [a_1 \ a_2 \ a_3] = [4 \ 5 \ 2]$, $\vec{b} := [b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3] = [2 \ 1 \ 1 \ 2]$. Hãy xác định cụ thể công thức của hệ (2).

d) Xác định tính ổn định của hệ hở bằng cách tính các giá trị riêng của hệ.

e) Xác định tính điều khiển được, quan sát được của hệ. **Chú ý: Không cần trình bày chi tiết việc tính hạng ma trận.**

f) Từ tính điều khiển được và quan sát được của hệ, hãy xét xem nhận dạng tối thiểu của hệ sẽ có số chiều bằng bao nhiêu? Vì sao?

Câu 2 Một hệ thống điều khiển trong cơ khí có dạng như trong Hình 1 dưới đây.



Hình 1: Hệ thống điều khiển cơ học gồm cả lò xo, pittông và vật nặng.

- a) Từ biểu đồ mô phỏng bên phải hãy viết công thức không gian trạng thái của hệ thống điều khiển đó.
- b) Ý nghĩa của đầu vào u , đầu ra y và vector trạng thái x là gì?
- c) Hãy tìm hàm truyền của hệ và các không điểm, cực của hàm truyền, cho $k = 12$, $b = 10$, $m = 2$. Tính gần đúng đến 3 chữ số thập phân.
- d) Hãy tìm điều kiện cần và đủ của k (**độ cứng lò xo**), b (**hệ số damping**), m (**khối lượng vật nặng**) sao cho hệ hở là ổn định.

————— Hết —————

Bài 1 (6 điểm)

a) Công thức như sau

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u, \\
x_2 &= \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u, \\
x_3 &= \dot{x}_2 - \beta_2 u = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u.
\end{aligned}$$

0.5đ

b) Hệ phương trình như sau

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0, \\
\beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0, \\
\beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0, \\
\beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0.
\end{aligned}$$

1đ

c) Công thức cụ thể của hệ là

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -7 \\ 19 \\ -43 \end{bmatrix} u, \quad (3)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] x + 2u. \quad (4)$$

1đd) Tính ổn định của hệ: Ta tính được $\sigma(A) = \{-1, -1, -2\}$. Do đó **Hệ ổn định**.**0.5đ**

e) Tính điều khiển được và quan sát được

$$Kc = \begin{bmatrix} -7 & 19 & -43 \\ 19 & -43 & 91 \\ -43 & 91 & -187 \end{bmatrix}$$

 $\text{rank}(Kc) = 2$, do đó hệ không điều khiển được.**1đ**

$$Ko = I_3,$$

 $\text{rank}(Kc) = 3$, do đó hệ quan sát được.**1đ**Vì $\text{rank}(Kc * Ko) = 2$ nên hệ tối thiểu có số chiều là 2.**1đ**

Bài 2 (4 điểm)

a) Từ biểu đồ mô phỏng trên, ta có hệ điều khiển

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u, \quad (5)$$

0.5đ

và bằng phép đặt ẩn phụ ta có thể chuyển về hệ điều khiển bậc nhất

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u, \quad (6)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x. \quad (7)$$

0.5đ

b) Ý nghĩa của u : lực tác động lên vật nặng; y : độ lệch của vật nặng so với vị trí cân bằng ban đầu; $x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$. **1đ**

c) Công thức hàm truyền

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(sI_2 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned}$$

0.5đ

Với $k = 12$, $b = 10$, $m = 2$ ta có cực của hàm truyền là $\{-2, -3\}$. Hàm truyền không có không điểm. **0.5đ**

d) Ta thấy các cực của hệ được cho bởi phương trình $ms^2 + bs + k = 0$. Phương trình này luôn có 2 nghiệm với phần thực âm thực sự, vì vậy hệ luôn luôn ổn định. **1đ**