Bài tập môn học Giải tích số – Bản 2014
Chương I. Nội suy hàm số (Interpolation)
Bản LaTeX

1. Cho hàm số $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 2x + 1}$. Hãy viết công thức của đa thức nội suy Lagrange cho hàm số này tại các nút nội suy $\boldsymbol{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2}$. Hãy giải thích vì sao trong trường hợp này sai số nội suy bằng 0, nói cách khác, hàm $\boldsymbol{f(x)}$ đã cho và đa thức nội suy của nó bằng nhau.

   Gợi ý: Dựa vào định lý về sự tồn tại duy nhất của đa thức nội suy hoặc công thức của sai số nội suy, chú ý rằng bản thân hàm số đã cho cũng là một đa thức (cùng bậc với đa thức nội suy).

2. Bài tập tương tự đối với hàm $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1}$ và các nút nội suy lần lượt là $\boldsymbol{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2}$.

3. Cho đa thức $\boldsymbol{p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}$. Biết $\boldsymbol{a_3 = 1}$ và $\boldsymbol{p_3(-1) = 3, p_3(1) = 1, p_3(2) = 9}$. Hãy xác định $\boldsymbol{p_3(x)}$.

4. Biết bảng giá trị của hàm số $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$ như sau:

$\boldsymbol{x:}$	$\boldsymbol{-2.0}$	$\boldsymbol{-1.0}$	$\boldsymbol{0.0}$	$\boldsymbol{1.0}$
$\boldsymbol{y:}$	$\boldsymbol{0.25}$	$\boldsymbol{0.5}$	$\boldsymbol{1.0}$	$\boldsymbol{2.0}$

   a, Sử dụng phương pháp nội suy Lagrange và Newton, hãy tính giá trị gần đúng của hàm số tại $\boldsymbol{x = -1.3}$ và $\boldsymbol{x = 0.6}$. Kết quả được qui tròn đến 6 chữ số sau dấu phẩy.

   b, Hãy đánh giá sai số nội suy của các kết quả nhận được và so sánh với sai số thực tế (biết giá trị "chính xác" của hàm số $\boldsymbol{f(-1.3) = 0.406126,\ f(0.6) = 1.515717}$).

5. Biết bảng giá trị của hàm số $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$ như sau:

$\boldsymbol{x:}$	$\boldsymbol{0.1}$	$\boldsymbol{0.2}$	$\boldsymbol{0.3}$	$\boldsymbol{0.4}$	$\boldsymbol{0.5}$
$\boldsymbol{y:}$	$\boldsymbol{0.099833}$	$\boldsymbol{0.198669}$	$\boldsymbol{0.295520}$	$\boldsymbol{0.389418}$	$\boldsymbol{0.479426}$

   a, Sử dụng đa thức nội suy Newton, hãy tính giá trị gần đúng của hàm số tại $\boldsymbol{x = 0.16}$ và $\boldsymbol{x = 0.43}$. Kết quả được qui tròn đến 6 chữ số sau dấu phẩy.

   b, Hãy đánh giá sai số nội suy của các kết quả nhận được và so sánh với sai số thực tế (biết giá trị "chính xác" của hàm số $\boldsymbol{f(0.16) = 0.159318,\ f(0.43) = 0.416871}$).

6. Biết bảng giá trị của hàm số $\boldsymbol{f(x) = \sin(\pi x/4)}$ như sau:

$\boldsymbol{x:}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{-2/3}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{2/3}$	$\boldsymbol{2}$
$\boldsymbol{y:}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{-1/2}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1/2}$	$\boldsymbol{1}$

   a, Sử dụng đa thức nội suy Newton, hãy tính giá trị gần đúng của hàm số tại $\boldsymbol{x = -1.5}$ và $\boldsymbol{x = 0.5}$.

   b, Hãy đánh giá sai số nội suy của các kết quả nhận được và so sánh với sai số thực tế (nếu biết giá trị chính xác của hàm số).

7. Sử dụng bảng giá trị của hàm $f(x) = 2^x$ trong bài 4, hãy tính gần đúng $\log_2 1.5, \log_2 0.5$. Hãy đánh giá sai số của kết quả nhận được.

   Gợi ý: Viết bảng giá trị của hàm ngược $g(x) = \log_2 x$ từ bảng giá trị của hàm thuận đã cho bằng cách hoán đổi vị trí của $x_i,\ y_i$, sau đó áp dụng phương pháp nội suy Lagrange hoặc Newton.

8. Sử dụng bảng giá trị của hàm $f(x) = \sin x$ trong bài 5, hãy tính gần đúng $\arcsin 0.15, \arcsin 0.42$.

9. Cho $n+1$ cặp dữ liệu $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n+1}$. Ký hiệu

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \rho_i = \prod_{j \neq i}(x_i - x_j), \quad i = 0, 1, ..., n.$$

   a. Chứng minh rằng $\rho_i = \omega'(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n.$

   b. Chứng minh rằng đa thức nội suy $P_n(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$P_n(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

10. a. Hãy xác định lưới nội suy tối ưu gồm 3 điểm trên đoạn $[-1, 1]$ và $[-1, 2]$.

    b. Hãy xác định lưới nội suy tối ưu gồm 4 điểm trên đoạn $[-1, 1]$ và $[-2, 1]$.

11. Tìm hàm $f(x)$ thoả mãn $f(0) = 0,\ f(1) = 2$ và $f[x_0, x_1, x_2] = 1$ với mọi bộ ba điểm x_0, x_1, x_2.

12. Chứng minh rằng với mọi hệ điểm $x_0 < x_1 < ... < x_n$, luôn tồn tại $\xi \in [x_0, x_n]$ sao cho

$$y[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{y^{(n)}(\xi)}{n!}$$

    với giả thiết hàm $y(x)$ khả vi liên tục n lần.

    Gợi ý : sử dụng công thức nội suy Newton.

13. Chứng minh rằng trong trường hợp lưới nội suy đều, luôn tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$\Delta^n y_0 = h^n y^{(n)}(x_0 + \theta n h)$$

14. Xây dựng đa thức nội suy Hermit (sử dụng phương pháp Lagrange hoặc Newton) cho các bảng giá trị hàm số sau:

$a,$

x :	0	1
y :	0	1
y' :	0	1

$b,$

x :	0	1	2
y :	0	1	0
y' :	0	0	0

15. Xây dựng đa thức nội suy cho hàm $f(x) = ln(x)$ trên lưới $\{0.1, 1, 2, 2.9\}$. Tính giá trị nội suy tại $x = 1.5$ và so sánh với kết quả chính xác và kết quả tương ứng nhận được từ đa thức Hermit bậc ba trên lưới $\{1, 1, 2, 2\}$.

16. Cho bảng tỷ sai phân

x_i	$f[.]$	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$
5	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	-3.0	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
5	$f[x_1]$	5.0	$f[x_1,x_2,x_3]$	
6	4.0	$f[x_2,x_3]$		
4	2.0			

Hãy xác định các hệ số chưa biết.

17. Ký hiệu $\mathcal{P}$ là tập hợp các đa thức bậc n với hệ số đầu bằng 1. Chứng minh rằng

$$min_{P_n(x)\in\mathcal{P}}\{max_{x\in[a,b]}|P_n(x)|\} = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Gợi ý: sử dụng đa thức Chebysev $T_n(x)$.

18. Hãy xác định đa thức $p_3(x) = 2x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ sao cho

$$\max_{x\in[-1,2]} |p_3(x)| \longrightarrow \min .$$

Giá trị nhỏ nhất đạt được tại những giá trị nào của x?

19. a, Cho $f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$. Xác định hàm Hermite bậc 3 trên từng đoạn nội suy f trên lưới $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

    b, Cho $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Xác định hàm Hermite bậc 3 trên từng đoạn nội suy g trên lưới như trên.

20. Hãy chỉ ra rằng hàm sau đây là một hàm ghép trơn (spline) bậc 3 tự nhiên tại các điểm $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,10)$:

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3, & x \in [0,1), \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3, & x \in [1,2), \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

21. Xác định các hệ số a, b, c, d, e, và f sao cho hàm dưới đây là một hàm spline bậc 3:

$$s(x) = \begin{cases} ax^2 + b(x-1)^3, & x \in (-\infty, 1], \\ cx^2 + d, & x \in [1,2], \\ ex^2 + f(x-2)^3, & x \in [2,\infty). \end{cases}$$

Bài tập môn học Giải tích số
Chương II. Xấp xỉ trung bình phương (Least square approximation)

22. Biết bảng giá trị của hàm số dạng $\boldsymbol{f(x) = a + bx}$ như sau:

$\boldsymbol{x}$:	**1.2**	**2.4**	**3.2**	**4.4**	**5.2**
$\boldsymbol{y}$:	**3.1**	**4.3**	**5.3**	**6.5**	**7.1**

a. Hãy xấp xỉ các hệ số $\boldsymbol{a, b}$ bằng phương pháp bình phương tối thiểu và qui tròn kết quả đến 2 chữ số sau dấu phẩy.

b. Tính lại các giá trị mới của hàm số tại các điểm đã cho.

23. Biết bảng giá trị của hàm số dạng $\boldsymbol{f(x) = a + bx + cx^2}$ như sau:

$\boldsymbol{x}$:	**0.78**	**1.56**	**2.34**	**3.12**	**3.81**
$\boldsymbol{y}$:	**2.5**	**1.2**	**1.12**	**2.25**	**4.28**

a. Hãy xấp xỉ các hệ số $\boldsymbol{a, b, c}$ bằng phương pháp bình phương tối thiểu và qui tròn kết quả đến 2 chữ số sau dấu phẩy.

b. Tính lại các giá trị mới của hàm số tại các điểm đã cho.

24. Cường độ phóng xạ từ một nguồn phóng xạ được cho bởi công thức $\boldsymbol{y = ae^{bx}}$. Biết bảng giá trị

$\boldsymbol{x}$:	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**
$\boldsymbol{y}$:	**3.16**	**2.38**	**1.75**	**1.34**	**1.00**

a. Hãy xác định các tham số $\boldsymbol{a, b}$.

b. Tính lại các giá trị mới của hàm số tại các điểm đã cho.

25. Hãy tìm nghiệm của hệ xác định quá $\boldsymbol{Ax \approx b}$ theo nghĩa bình phương tối thiểu với

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

bằng

a, hệ phương trình chính tắc.

b, phân tích $\boldsymbol{QR}$.

26. Xác định $\boldsymbol{a, b, c}$ từ điều kiện

$$\boldsymbol{\int_0^1 (3^x - ax^2 - bx - c)^2 dx \to min}$$

27. Xác định $\boldsymbol{a, b, c}$ từ điều kiện

$$\boldsymbol{\int_0^{\pi/2} (\cos x - ax^2 - bx - c)^2 dx \to min}$$

28. Xấp xỉ trung bình phương hàm $f(x) = 2^x$ trên$[-1, 1]$ bằng hệ đa thức trực giao Legendre $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$. Tương tự đối với các hàm số $f(x) = \cos x, \sin x, |x|, e^x$.

29. Xây dựng hệ đa thức trực giao (trực chuẩn) trong không gian $L^2[-1, 2]$ từ hệ đa thức Legendre. Sử dụng để xác định đa thức xấp xỉ tốt nhất các hàm số $f(x) = 2^x, \cos x, \sin x, |x|, e^x, e^{-2x}$.

30. Xác định đa thức bậc 2 xấp xỉ tốt nhất hàm số $f(x) = \exp(-3x)$ trên đoạn $[0, 3]$ sử dụng hệ cơ sở đa thức trực giao.

    Trong tính toán có thể sử dụng công thức sau: nếu $p(x)$ là đa thức bậc n và $a > 0$ thì
$$\int \exp(-ax)p(x)dx = -\frac{\exp(-ax)}{a}\sum_{j=0}^{n}\frac{p^{(j)}(x)}{a^j}$$

31. Giả sử $\phi_0(x),\ \phi_1(x),\ \phi_2(x), ...$ là hệ đa thức trực giao trong không gian $L^2_w[a, b]$ với hàm trọng $w(x) > 0$ nào đó. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là n nghiệm thực của $\phi_n(x)$ (được sắp xếp theo thứ tự tăng dần và nằm trong $[a, b]$). Ký hiệu $L_k(x),\ k = 1, 2, ..., n$ là các đa thức Lagrange cơ bản trên lưới nội suy $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

    a, Chứng minh rằng
$$\int_a^b w(x)L_k(x)L_j(x) = 0 \quad \forall j \neq k,$$
    nói cách khác $L_j(x)$ trực giao với $L_k(x)$.

    b, Giả sử $f(x)$ là một hàm số nào đó và $y_k = f(x_k),\ k = 1, 2, ..., n$. Ký hiệu $p(x)$ là đa thức nội suy bậc $n - 1$ của hàm f trên lưới nội suy $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Chứng minh rằng
$$\|p\|^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2\|L_k\|^2.$$

32. Hãy chứng minh rằng hai hệ đa thức trực giao trong một không gian hàm số $L^2_w[a, b]$ chỉ khác nhau những thừa số hằng số. Hơn nữa, đa thức trực giao bậc n có chính xác n nghiệm thực trên $[a, b]$.

33. Cho
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n \geq 0,\ -1 \leq x \leq 1.$$
    Chứng minh rằng
$$(x^k, P_n(x)) := \int_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = 0 \quad \forall k < n$$
    và
$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Bài tập môn học Giải tích số
Chương III. Tính gần đúng đạo hàm và tích phân
(Numerical differentiation and Integration)

34. a. Sử dụng bảng giá trị của hàm $f(x) = \sin x$ trong bài 5, hãy tính gần đúng đạo hàm cấp 1 và cấp 2 tại $x = \pi/4$ bằng các công thức sai phân với $h = 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-16}$. So sánh với kết quả chính xác và giải thích sự thay đổi của sai số thực tế khi h thay đổi..

    b. Hãy tính gần đúng đạo hàm cấp 1 của hàm $f(x) = \sin x$ tại $x = 0.1$ bằng đa thức nội suy (sử dụng bảng giá trị bài 5).

35. Sử dụng khai triển Taylor để khảo sát sai số của xấp xỉ sau:

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}\left[-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)\right].$$

36. Xét công thức sai phân tiến xấp xỉ đạo hàm cấp 2 có dạng

$$f''(x) \approx Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h).$$

    Xác định các hệ số A, B, C sao cho công thức trên có cấp chính xác cao nhất và xác định sai số công thức trong trường hợp đó.

37. Hãy tính gần đúng tích phân

$$\int_0^{0.8} f(x)dx$$

    với $f(x)$ lần lượt là $\sin x, \cos x, \exp(-x), \ln(1+x), 1/(1+x)$ bằng

    a, công thức hình thang, $h = 0.2$ và $h = 0.1$. Hãy đánh giá sai số công thức. (các giá trị hàm số được qui tròn đến 6 chữ số sau dấu phẩy)

    b, công thức Simpson, $h = 0.2$ và $h = 0.1$. Hãy đánh giá sai số công thức. (các giá trị hàm số được qui tròn đến 6 chữ số sau dấu phẩy)

    c, hãy ước lượng độ lớn của h để sai số của CT hình thang và CT Simpson nhỏ hơn 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}.

38. Hãy xây dựng công thức Newton-Cotes để xấp xỉ $\int_0^1 f(x)dx$ sử dụng các nút $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ và 1.

39. Xét công thức xấp xỉ

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\alpha) + f(-\alpha).$$

    a, Xác định α sao cho công thức là chính xác với mọi đa thức bậc bằng hoặc nhỏ hơn 1.

    b, Xác định α sao cho công thức là chính xác với mọi đa thức bậc bằng hoặc nhỏ hơn 3.

    c, Xác định α sao cho công thức là chính xác với mọi đa thức bậc bằng hoặc nhỏ hơn 4.

40. a, Hãy xác định công thức xấp xỉ

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

sao cho công thức là chính xác với mọi đa thức bậc bằng hoặc nhỏ hơn 3.

b, Hãy xác định công thức xấp xỉ

$$\int_0^1 xf(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

sao cho công thức là chính xác với mọi đa thức bậc bằng hoặc nhỏ hơn 3.

41. Hãy viết chương trình (bằng ngôn ngữ lập trình tự chọn) thức hiện việc tính

$$J_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx, \quad J_2 = \int_0^1 xe^{-x}dx$$

a. Sử dụng chương trình để tính với các giá trị

$$h = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002, 0.001.$$

b. So sánh tốc độ giảm của sai số thức tế khi sử dụng công thức hình thang và Simspon.

c. Sử dụng phương pháp Runge, hãy đánh giá sai số và so sánh kết quả đánh giá với sai số thức tế.

42. Hãy viết chương trình thức hiện việc tính xấp xỉ tốt nhất của hàm $f(x) = e^x, e^{-2x}, 3^x$ trong $L^2[-1,1]$ bằng hệ cơ sở đa thức trực giao Legendre. Chương trình bao gồm:

a. Chương trình con (Function) để tính $L_n(x),\ n = 2, 3, ...$ bằng công thức truy hồi. Sử dụng $L_0(x) = 1, L_1(x) = x$.

b. Chương trình con (Procedure hay Function) tính tích phân xác định bằng công thức Simpson. Để đơn giản, chia $[-1, 1]$ thành $n = 100$ đoạn con bằng nhau.

c. Tính các hệ số bằng công thức

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^1 f(x)L_k(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

43. Sử dụng một bộ chương trình phần mềm toán học nào đó (Maple hay Mathematica), hãy xác định bộ hệ số của các công thức Newton-Leibniz với $n = 3, 4, 5, 6$.

44. Nêu ý nghĩa hình học của công thức trung điểm

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(\frac{x_0+x_1}{2}), \quad h = x_1 - x_0.$$

Chứng minh rằng sai số của công thức trên bằng $f''(\xi)h^3/24,\ \xi \in (x_0, x_1)$.

Gợi ý: Sử dụng khai triển Taylor của hàm f xung quanh điểm $\frac{x_0+x_1}{2}$.

45. a, Viết công thức dạng Newton của đa thức Hermit bậc 3 nội suy hàm f và đạo hàm f' tại hai điểm a, b.

b, Chứng minh rằng sử dụng đa thức nội suy Hermit ở câu a, chúng ta nhận được công thức tính tích phân gần đúng sau

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)].$$

Công thức này có tên gọi công thức Hình thang được hiệu chỉnh. Hãy chứng minh rằng sai số của công thức là

$$E(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{720}(b-a)^5.$$

c, Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn con bằng nhau. Hãy xây dựng công thức tính toán toàn phần.

d, Sử dụng kết quả của câu b và c để suy ra rằng sai số toàn phần của công thức hình thang (chưa hiệu chỉnh) có tiệm cận

$$E_{HT}(f) = I - I_{HT} = Ch^2 + O(h^4), \quad h \to 0,$$

trong đó C là hằng số không phụ thuộc vào h.

46. Giả sử hàm f khả vi liên tục $2n$ lần. Chứng minh rằng sai số của công thức cầu phương Gauss là

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{((2n)!)^3(2n+1)}, \quad \xi \in (a, b).$$

Bài tập môn học Giải tích số
Chương IV. Giải gần đúng phương trình phi tuyến
Numerical methods for nonlinear equations

47. a, Có thể sử dụng phương pháp chia đôi để tìm nghiệm của phương trình $f(x) = \sin x + 1 = 0$ hay không? Vì sao?

    b, Phương trình
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x - 2} = 0$$
    có một nghiệm duy nhất $x^* = 1$ trong $[0, 3]$. Có thể sử dụng phương pháp chia đôi với khoảng xuất phát $[0, 3]$ để tìm khoảng này hay không? Vì sao?

48. Cho hàm số $\varphi(x) = (x^2 + 4)/5$.

    a, Tìm các điểm bất động của $\varphi(x)$.

    b, Công thức lặp $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ có hội tụ đến điểm bất động trên đoạn $[0, 2]$ với mọi giá trị xuất phát $x_0 \in [0, 2]$ hay không? Vì sao?

49. Xét phương trình $a = y - \epsilon \sin y$, trong đó $0 < \epsilon < 1$ và $a \in [0, \pi]$ được cho trước. Chứng minh rằng phương trình này có nghiệm duy nhất. Hãy viết một công thức lặp hội tụ đến nghiệm.

50. Hàm số $\varphi(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + x + 2)$ có một điểm bất động là $x^* = 1$. Xuất phát với $x_0 = 0.5$, sử dụng công thức lặp $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, chúng ta nhận được dãy $\{0.5, 1.1250, 0.9297, 1.0327, 0.9831, \dots\}$. Dãy này có hội tụ đến x^* không? Nếu có thì hội tụ như thế nào?

51. Cho phương trình $3(2x - 1) = \cos x$.

    a, CMR phương trình trên có nghiệm trong $(0, 1)$ và nghiệm này là nghiệm duy nhất của phương trình.

    b, Hãy xác định một công thức lặp hội tụ và kiểm tra điều kiện hội tụ của công thức đó. Hãy tính $x_i, i = 1, 2, 3$ với $x_0 = 0$. Viết công thức đánh giá sai số. Hãy đánh giá số lần lặp cần thiết để sai số nhỏ hơn $10^{-3}, 10^{-6}$.

    c, Hãy viết công thức dây cung để giải gần đúng phương trình trên. Kiểm tra điều kiện hội tụ. Viết công thức đánh giá sai số. Xác định điểm xuất phát x_0. Hãy tính $x_i, i = 1, 2, 3$.

    d, Hãy viết công thức Newton giải gần đúng phương trình trên. Xác định điểm xuất phát x_0. Hãy tính $x_i, i = 1, 2, 3$. Viết công thức đánh giá sai số hậu nghiệm và áp dụng để đánh giá sai số của x_3.

52. Cho phương trình $x^4 - 2x - 3 = 0$.

    a, CMR phương trình trên có nghiệm duy nhất trong $(1, 2)$.

    b, Hãy xác định một công thức lặp hội tụ và kiểm tra điều kiện hội tụ của công thức đó. Hãy tính $x_i, i = 1, 2, 3$ với $x_0 = 1$. Viết công thức đánh giá sai số. Hãy đánh giá số lần lặp cần thiết để sai số nhỏ hơn $10^{-3}, 10^{-6}$.

c, Hãy viết công thức dây cung để giải gần đúng phương trình trên. Kiểm tra điều kiện hội tụ. Viết công thức đánh giá sai số. Xác định điểm xuất phát x_0. Hãy tính $x_i, i = 1, 2, 3$.

d, Hãy viết công thức Newton giải gần đúng phương trình trên. Xác định điểm xuất phát x_0. Hãy tính $x_i, i = 1, 2, 3$. Viết công thức đánh giá sai số hậu nghiệm và áp dụng để đánh giá sai số của x_3.

53. Hãy viết chương trình (bằng ngôn ngữ lập trình tự chọn) thực hiện việc giải gần đúng hai phương trình trên bằng:

    a. Phương pháp chia đôi

    b. Phương pháp dây cung

    c. Phương pháp lặp đơn (với một công thức lặp hội tụ)

    d. phương pháp lặp Newton

    với giới hạn sai số lần lượt là $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$. Hãy đếm số vòng lặp của từng phương pháp, qua đó so sánh và rút ra kết luận về tốc độ hội tụ của từng phương pháp.

54. Tìm nghiệm dương của phương trình $e^x - 2 = \ln(x + 2)$ với 4(8) chữ số đáng tin.

55. Để tìm nghiệm dương của phương trình $x = a - bx^2,\ (a, b > 0)$ người ta dùng phép lặp $x_{n+1} = a - bx_n^2$. Với những a, b nào thì phép lặp trên hội tụ.

56. Xét phương trình $x^k = \cos x,\ k \in \mathbb{N}$.

    a. Chứng minh rằng phương trình trên có một nghiệm trong $(0, 1)$ và nghiệm này cũng là nghiệm duy nhất của phương trình nếu k lẻ.

    b. Ký hiệu nghiệm nói trên là $x_k^* \in (0, 1)$. Chứng minh rằng $\lim_{k\to\infty} x_k^* = 1$.

    c. Hãy minh hoạ số cho kết quả của câu b bằng cách tính gần đúng $x_k^*,\ k = 1, 2, 3, 4, 5$ sử dụng phương pháp lặp Newton với điều kiện dừng$|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-5}$.

57. Chứng minh rằng đa thức

$$P_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}$$

    không có nghiệm thực nếu k chẵn và có duy nhất 1 nghiệm thực nếu k lẻ.

    Với $k = 3, 5, 7$, hãy tính nghiệm thực duy nhất đó bằng phương pháp lặp Newton với điều kiện dừng $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-8}$.

58. a. Sử dụng một chương trình phần mềm toán học hãy vẽ đồ thị của hàm $f(x) = \alpha \cosh(x/4) - x$ với $\alpha = 2$ và $\alpha = 10$ để minh hoạ rằng phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $\alpha = 2$ và không có nghiệm khi $\alpha = 10$.

    b. Hãy xác định giá trị α để phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất.

    Gợi ý câu b: cần xác định giá trị α^* để hai đồ thị $y = x$ và $y = \alpha \cosh(x/4)$ tiếp xúc nhau tại một điểm x^* nào đó, dẫn đến một hệ phương trình đối với α và x. Sau khi khử α và giải phương trình phi tuyến đối với x, chúng ta nhận được x^*, từ đó tính được giá trị của α^*.

59. Tìm $\boldsymbol{\alpha > 0}$ nhỏ nhất sao cho

    a. $\boldsymbol{\alpha\sqrt{x} \geq \sin x \quad \forall x > 0.}$

    b. $\boldsymbol{e^{-\alpha x} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x > 0.}$

60. Phương pháp Steffensen được định nghĩa bằng công thức

$$\boldsymbol{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{g_k},} \quad \text{trong đó } \boldsymbol{g_k = \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}.}$$

Chứng minh rằng với một số giả thiết nhất định, phương pháp này hội tụ cấp 2.

Bài tập môn học Giải tích số
Chương V. Giải gần đúng hệ phương trình đại số tuyến tính
Numerical methods for systems of linear equations

61. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss và phương pháp phần tử trội từng phần:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{2x_1 + x_2 + x_3 = 3}\\&\boldsymbol{x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5}\\&\boldsymbol{3x_1 - x_2 - x_3 = 2}\end{aligned}$$

Hãy tính định thức của ma trận hệ số.

62. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss và phương pháp phần tử trội từng phần:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3}\\&\boldsymbol{3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3}\\&\boldsymbol{4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 4}\end{aligned}$$

Hãy tính định thức của ma trận hệ số.

63. Hãy xác định phân tích LU của ma trận hệ số trong các bài 61 và 62 và tính nghịch đảo của các ma trận đó sử dụng phân tích LU đã tính được.

64. Cho ma trận

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

a, Viết phân tích $\boldsymbol{A = LU}$ của ma trận trên. Tính định thức của $\boldsymbol{A}$.

b, Giải hệ phương trình $\boldsymbol{Ax = b}$ với vế phải $\boldsymbol{b = (2, 1, 2)^T}$ (sử dụng phân tích $\boldsymbol{A = LU}$).

65. Cho ma trận

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

a, Viết phân tích $\boldsymbol{A = LU}$ của ma trận trên.

b, Viết phân tích $\boldsymbol{A = LL^T}$ của ma trận trên.

66. Giả sử ma trận $\boldsymbol{A}$ thỏa mãn $\boldsymbol{PA = LU}$, trong đó

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1/3} & \mathbf{1/4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

a, Hãy sử dụng các ma trận trên để giải hệ phương trình $\boldsymbol{Ax = b}$ với $\boldsymbol{b = (2, 10, -12)^T}$ mà không cần tính $\boldsymbol{A}$ hay nghịch đảo của bất kỳ ma trận nào.

b, Có thể thấy ma trận $\boldsymbol{P}$ nhận được từ ma trận đơn vị bằng cách hoán vị các hàng. Hãy nêu ý nghĩa của việc nhân một ma trận bất kỳ với $\boldsymbol{P}$ từ bên trái.

67. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cholesky

$$\begin{aligned}&4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6\\&2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8\\&2x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 20\end{aligned}$$

Hãy tính định thức của ma trận hệ số.

68. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Giải hệ phương trình $Ax = b$ bằng phương pháp Cholesky với vế phải b lần lượt là $(2,3,0)^T$ và $(2,5,-2)^T$. Tính nghịch đảo của A.

69. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a, Hãy tính $\|A\|_1$ và $\|A\|_\infty$.

b, Hãy tính số điều kiện của A theo 2 chuẩn ở câu a.

70. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Jacobi và phương pháp Gauss-Seidel

$$\begin{aligned}&4x_1 + 0.4x_2 - 0.4x_3 = 8\\&0.3x_1 - 3x_2 - 0.6x_3 = -9\\&0.5x_1 + 0.5x_2 + 5x_3 = 5\end{aligned}$$

a, Viết công thức lặp Jacobi. Kiểm tra điều kiện hội tụ.

b, Với $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, tính $x^{(i)}, i = 1,2,3$.

c, Viết các công thức đánh giá sai số và áp dụng để đánh giá sai số của kết quả $x^{(3)}$ ở câu trên.

d, Hãy đánh giá số lần lặp cần thiết để sai số nhỏ hơn $10^{-3}, 10^{-6}$.

e, Viết công thức lặp Gaus-Seidel cho hệ trên. Tính lại $x^{(i)}, i = 1,2,3$.

71. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 10x_3 & = & 11 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 & = & 12 \\ -2x_1 - 10x_2 + x_3 & = & 9 \end{cases}$$

a. Hãy biến đổi để đưa hệ phương trình về dạng có ma trận hệ số chéo trội. Xây dựng công thức lặp Jacobi giải gần đúng hệ này.

b. Với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. Tính $x^{(1)}$, $x^{(2)}$. Đánh giá số lần lặp cần thiết để sai số không lớn hơn 10^{-3} (sử dụng chuẩn maximum của véctơ).

72. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 & = & b_1 \\ \alpha x_1 + x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

a. Viết công thức lặp Jacobi để giải gần đúng hệ trên. Xác định điều kiện về $\boldsymbol{\alpha}$ để sự hội tụ được đảm bảo.

b. Viết công thức lặp Gauss-Seidel để giải gần đúng hệ trên. Xác định điều kiện về $\boldsymbol{\alpha}$ để sự hội tụ được đảm bảo.

c. Từ các tính toán ở hai câu trên, hãy so sánh tốc độ hội tụ của hai phương pháp.

73. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + \alpha x_2} & = \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{\alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3} & = \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{\alpha x_2 + x_3} & = \boldsymbol{b_3} \end{cases}$$

a. Viết công thức lặp Jacobi để giải gần đúng hệ trên. Xác định điều kiện về $\boldsymbol{\alpha}$ để sự hội tụ được đảm bảo.

b. Viết công thức lặp Gauss-Seidel để giải gần đúng hệ trên. Xác định điều kiện về $\boldsymbol{\alpha}$ để sự hội tụ được đảm bảo.

Bài tập môn học Giải tích số
Chương VI. Giải gần đúng phương trình vi phân
(Numerical solutions for differential equations)

74. Chứng minh rằng hàm số $y(t) = t^2/4$ là lời giải của bài toán giá trị ban đầu $y' = \sqrt{y},\ y(0) = 0$. Áp dụng phương pháp Euler với bước đi h bất kỳ, xác định lời giải số. Vì sao lời giải số khác với lời giải $t^2/4$ nói trên.

75. Áp dụng phương pháp hình thang hiển cho phương trình $y' = \lambda y$ với bước đi h. Hãy chỉ ra rằng $y_{k+1} = (1 + \lambda h + \lambda^2 h^2/2) y_k$, từ đó suy ra sai số (chặt cụt) địa phương là $O(h^3)$.

76. (Viết chương trình) Cho bài toán Cauchy

    $y' = -xy,$

    $y(0) = 1.$

    trên đoạn $[0, 1.0]$. Hãy thực hiện hai bước với bước đi $h = 0.2$ bằng

    a, công thức Euler

    b, công thức Runge-Kutta "hình thang" hiển:

    $$(s = 2, a_2 = 1, b_{21} = 1, c_1 = c_2 = 1/2)$$

    Tính sai số thực tế $e_i = y(x_i) - y_i$, biết nghiệm chính xác $y(x) = e^{-x^2/2}.$

    Thực hiện lại tính toán với $h = 0.1$ và $h = 0.05$; so sánh các lời giải số.

    Hãy viết chương trình Matlab thực hiện việc giải bài toán bằng các phương pháp nói trên. Vẽ đồ thị của lời giải số và so sánh với đồ thị của lời giải chính xác.

77. (Viết chương trình) Cho bài toán Cauchy

    $y' = x - y,$

    $y(0) = 1.$

    trên đoạn $[0, 1.0]$. Hãy thực hiện hai bước với bước đi $= 0.2$ bằng

    a, công thức Euler

    b, công thức Runge-Kutta "trung điểm" hiển:

    $$(s = 2, a_2 = 1/2, b_{21} = 1/2, c_1 = 0, c_2 = 1)$$

    Tính sai số thực tế $e_i = y(x_i) - y_i$, biết nghiệm chính xác $y(x) = 2e^{-x} + x - 1.$

    Thực hiện lại tính toán với $h = 0.1$ và $h = 0.05$; so sánh các lời giải số.

    Hãy viết chương trình Matlab thực hiện việc giải bài toán bằng các phương pháp nói trên. Vẽ đồ thị của lời giải số và so sánh với đồ thị của lời giải chính xác.

78. Xét lời giải số của bài toán Cauchy

$y' = y, \quad 0 \leq x \leq 1$

$y(0) = 1$

bằng công thức Euler. Hãy chứng minh rằng sai số địa phương thỏa mãn

$$|\varepsilon(h)| \leq eh^2/2$$

và sai số toàn phần thỏa mãn

$$|e_n(h)| \leq e(e-1)h/2.$$

(giả thiết sai số ban đầu $e_0(h) = y(x_0) - y_0 = 0$.)

79. Xác định các đánh giá sai số tương tự cho lời giải số của bài toán 77 bằng công thức Euler.

80. Viết sơ đồ tính toán và giải các bài toán Cauchy trong bài 76 và 77 bằng phương pháp dự báo hiệu chỉnh dạng PECE trong đó P là công thức Euler hiển và C là công thức hình thang ẩn.

81. Sử dụng khai triển Taylor, hãy xác định sai số công thức địa phương của

a, Phương pháp Runge-Kutta (hiển) dạng trung điểm.

b, Phương pháp Adams-Bashforth (hiển) 2 bước.

c, Phương pháp Adams-Moulton (ẩn) 1 bước dạng hình thang.

82. Khảo sát cấp chính xác, tính ổn định, và hội tụ của các phương pháp đa bước sau

a, $y_{n+1} - y_n = h\left[\frac{3}{2}f(t_n, y_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, y_{n-1})\right]$ (Adams hai bước)

b, $\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = f(t_n, y_n)$ (BDF hai bước)

a, $y_n - y_{n-2} = 2hf_{n-1}$ (Nyström hai bước)

b, $y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} = h(f_n - f_{n-1})$

c, $y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = h(f_n - 2f_{n-1})$

83. Để tìm nghiệm của bài toán Cauchy tại $x_1 = x_0 + h$ bằng công thức Euler. có thể làm theo hai cách sau:

a. dùng một bước đi h: $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$

b. dùng hai bước đi $h/2$:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{1/2} &= y_0 + (h/2)f(x_0, y_0)\\ \bar{y}_1 &= \bar{y}_{1/2} + (h/2)f(x_0 + h/2, \bar{y}_{1/2}).\end{aligned}$$

Chứng minh rằng tổ hợp tuyến tính $\hat{y}_1 = 2\bar{y}_1 - y_1$ cho kết quả có cấp chính xác tốt hơn cả hai lời giải trên.

84. Cho bài toán biên tuyến tính

$$\begin{aligned}&y''(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad a < x < b,\\&y(a) = A,\ y(b) = B.\end{aligned}$$

Viết hệ ĐSTT nhận được khi sai phân hóa hệ này. Chứng minh rằng hệ này có nghiệm duy nhất nếu $q(x) \le 0,\ \forall x \in [a, b]$. Xây dựng công thức khử lặp cụ thể.

85. Hãy viết hệ phương trình đại số tuyến tính nhận được khi giải các bài toán biên sau bằng phương pháp sai phân với $h = 1/N,\ N = 10, 20, \ldots$ vv.

a.

$$\begin{aligned}&y''(x) - y(x) = x, \quad 0 < x < 1,\\&y(0) = 1; y(1) - y'(1) = 0.\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}&y''(x) - x^2 y(x) = 0, \quad 0 < x < 1,\\&y(0) = 0; y(1) = 1.\end{aligned}$$

Một số bài tập khác (Some other problems)

86. Hãy trình bày các bước chính của phương pháp sai phân với lược đồ ẩn 4 điểm giải bài toán sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u(0,t) = \psi_1(t),\ u(1,t) = \psi_2(t)$$

($a > 0$ là hằng số, các hàm số φ, ψ_1, ψ_2 liên tục)

Viết ma trận hệ số của hệ phương trình đstt cần giải trong mỗi bước ?

Khảo sát tính ổn định của lược đồ bằng phương pháp phổ Neumann.

87. Hãy trình bày các bước chính của phương pháp sai phân với lược đồ 5 điểm giải bài toán sau:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$$
$$u(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in \Gamma \text{ (biên của hình vuông đơn vị).}$$

Hãy chọn bước lưới $h = l = 1/5,\ (N = 5)$ và đánh số các điểm trong theo kiểu (bàn cờ) "trắng-đen" như sau

14	**7**	**16**	**8**
4	**13**	**6**	**15**
10	**3**	**12**	**5**
1	**9**	**2**	**11**

Viết hệ phương trình đstt nhận được. Khi áp dụng để giải hệ này, công thức lặp Gauss-Seidel sẽ có điểm đặc biệt gì ?

88. Tìm giá trị riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

bằng phương pháp Krylov.

89. Hãy xác định giá trị riêng gần đúng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bằng phương pháp lặp và lặp ngược sau 5 bước lặp với $x^{(0)} = (1,0)^T$.

90. Sử dụng quá trình trực giao hóa Hilbert-Schmidt để tính phân tích QR của các ma trận hệ số trong các bài 61 và 62 và tính nghịch đảo của các ma trận đó sử dụng phân tích QR đã tính được.