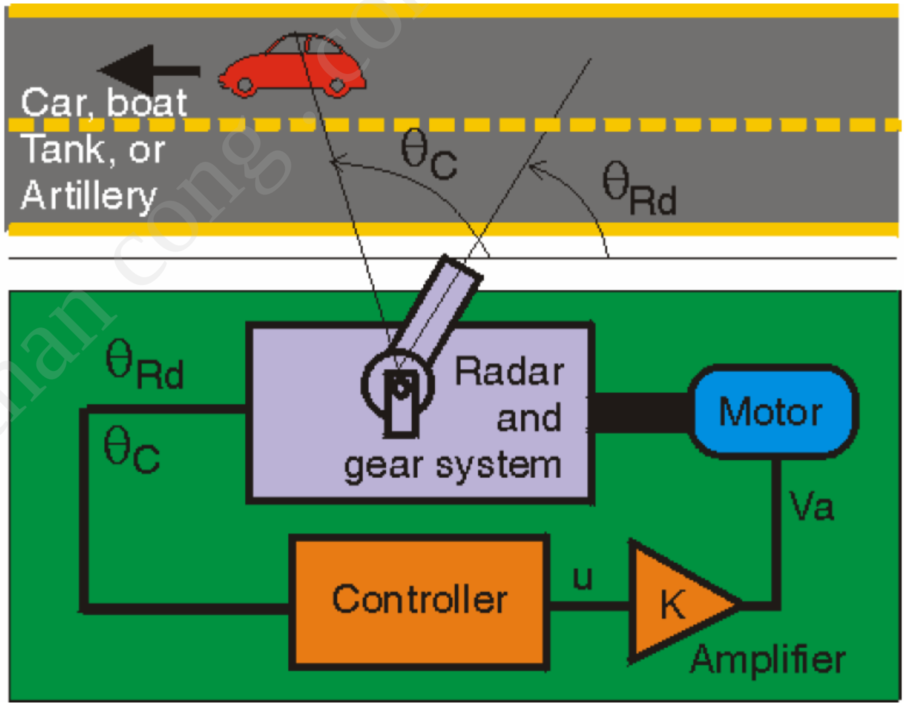
Lý thuyết Điều khiển tự động

Biến đổi Laplace

Tín hiệu và hệ thống



ThS. Đỗ Tú Anh

Bộ môn Điều khiển tự động

Khoa Điện, Trường ĐHBK HN

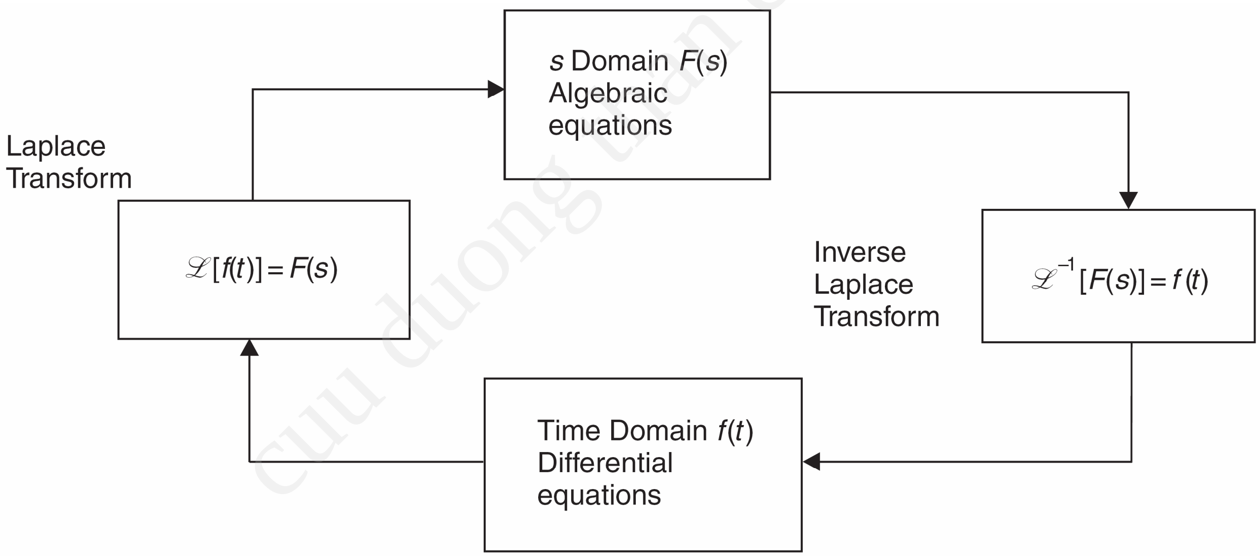
cuu duong than cong . com

Ôn lại về biến đổi Laplace

Biến đổi Laplace là một công cụ toán học để biểu diễn và phân tích các hệ thống tuyến tính sử dụng các phương pháp đại số.

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

trong đó s là biến phức $\sigma \pm j\omega$ đgl toán tử Laplace



Biến đổi Laplace ngược

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{st}ds$$

CuuDuongThanCong.com

https://fb.com/tailieudientucntt

Ôn lại về biến đổi Laplace

Bảng 2.1 Các cặp biến đổi Laplace thông dụng

	Time function $f(t)$	Laplace transform $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$
1	unit impulse $\delta(t)$	1
2	unit step 1	$1/s$
3	unit ramp t	$1/s^2$
4	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)}$
6	$1 - e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
7	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
8	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$
9	$e^{-at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
10	$e^{-at}(\cos \omega t - \dfrac{a}{\omega} \sin \omega t)$	$\dfrac{s}{(s+a)^2 + \omega^2}$

cuu duong than cong . com

CuuDuongThanCong.com

https://fb.com/tailieudientucntt

Các tính chất của biến đổi Laplace

a) Tính tuyến tính $L\left[c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)\right] = c_1 F_1(s) \pm c_2 F_2(s).$

b) Phép dịch trục $L\left[f(t-T)\right] = e^{-Ts} F(s)$ với $T>0$.

c) Ảnh của tích chập $L\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s).$

d) Ảnh của tích phân $L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}.$

e) Ảnh của đạo hàm $L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0).$

f) Định lý về giá trị đầu $f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s).$

g) Định lý về giá trị cuối $f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s).$

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

Các khai triển thông dụng

i) Nghiệm đơn

$$\frac{K}{s(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a)}$$

ii) Nghiệm kép

$$\frac{K}{s^2(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s+a)}$$

iii) Nghiệm thực bậc hai ($b^2 > 4ac$)

$$\frac{K}{s(as^2+bs+c)} = \frac{K}{s(s+d)(s+e)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+d)} + \frac{C}{(s+\mathrm{e})}$$

iv) Nghiệm phức bậc hai ($b^2 > 4ac$)

$$\frac{K}{s(as^2+bs+c)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{as^2+bs+c} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

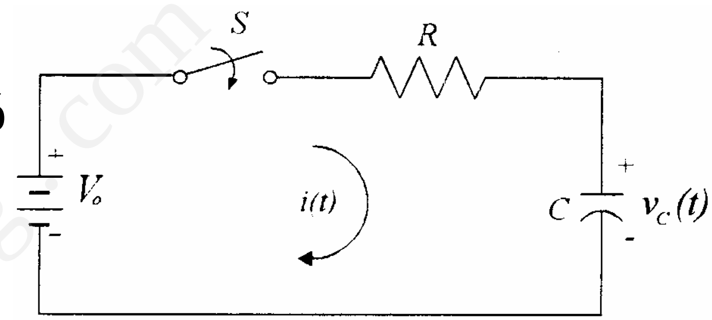
Chú ý: hệ số a thường được đưa về giá trị 1

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ứng dụng của biến đổi Laplace

Ví dụ

Mạch điện RC



Từ định luật về điện áp của Kirchhoff, ta có

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t = V_0$$

Áp dụng biến đổi Laplace

$$RI(s) + \frac{1}{C}\left[\frac{I(s)}{s} + \frac{i^{(-1)}(0)}{s}\right] = \frac{V_0}{s}$$

trong đó $I(s) = L\{i(t)\}$ và

$$i^{(-1)}(0) = \int_{-\infty}^{0} i(t)\,\mathrm{d}t = Cv_{\mathrm{c}}(0) = 0.$$

Do đó

$$I(s)\left[\frac{1}{Cs} + R\right] = \frac{V_0}{s}$$

hay

$$I(s) = \frac{V_0/R}{s + 1/RC}$$

Áp dụng biến đổi Laplace ngược $i(t) = L^{-1}\{I(s)\} = \dfrac{V_0}{R}\,\mathrm{e}^{-t/RC}$

Vậy điện áp của tụ điện sẽ là

$$v_{\mathrm{c}}(t) = V_0 - Ri(t) = V_0 - V_0\mathrm{e}^{-t/RC} = V_0[1 - \mathrm{e}^{-t/RC}]$$

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

Tín hiệu tiền định

ĐN 2.1 Tín hiệu tiền định được định nghĩa là một *hàm số phụ thuộc thời gian* mang thông tin về các thông số kỹ thuật được quan tâm trong hệ thống và được *truyền tải bởi những đại lượng vật lý*.

Tín hiệu là một *hình thức biểu diễn thông tin.*

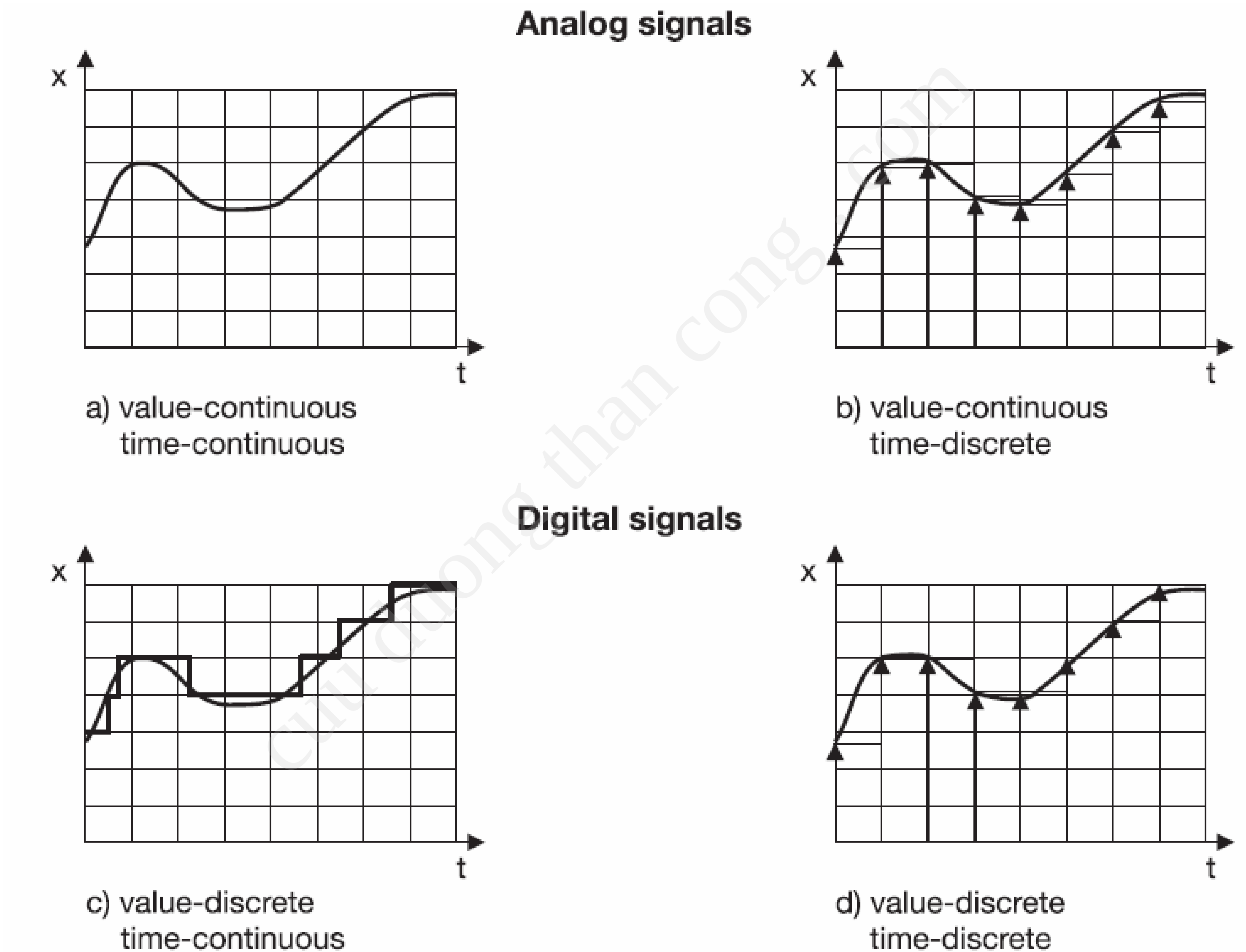
Ví dụ

Trong điều khiển nhiệt độ, giá trị nhiệt độ tại thời điểm *t* được đo bởi cảm biến và chuyển đổi thành một đại lượng dòng điện *i(t)* có đơn vị là *Ampe*.

→ *i(t)* là một hàm của thời gian mang thông tin về nhiệt độ trong phòng tại thời điểm *t* và được truyền tải bởi đại lượng vật lý là dòng điện

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

Phân loại tín hiệu



CuuDuongThanCong.com

https://fb.com/tailieudientucntt

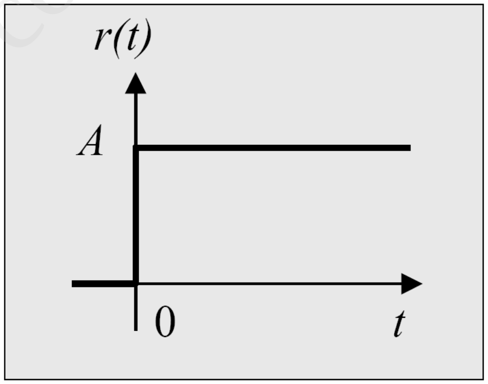
Các tín hiệu thử (Test signals)

- Tín hiệu bước nhảy

  (*Step input*)

$$r(t) = \begin{cases} A & \text{khi} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$R(s) = \frac{A}{s}.$$

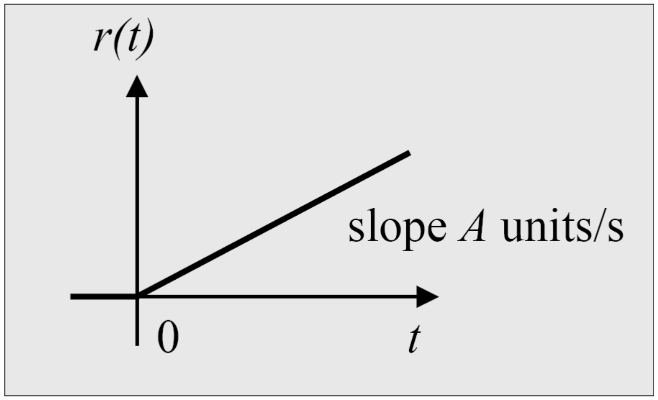


- Tín hiệu dốc

  (*Ramp input*)

$$r(t) = \begin{cases} At & \text{khi} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$R(s) = \frac{A}{s^2}.$$



CuuDuongThanCong.com

https://fb.com/tailieudientucntt

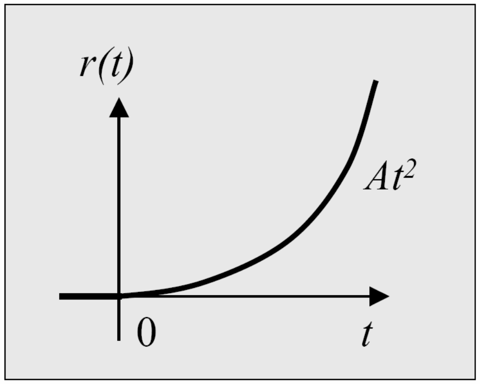
Các tín hiệu thử (Test signals)

- Tín hiệu parabol

  (*Parabolic input*)

$$r(t)=\begin{cases}At^2 & \text{khi} \quad t\ge 0\\ 0 & \text{khi} \quad t<0\end{cases}$$

$$R(s)=2\frac{A}{s^3}.$$



- Tín hiệu xung đơn vị

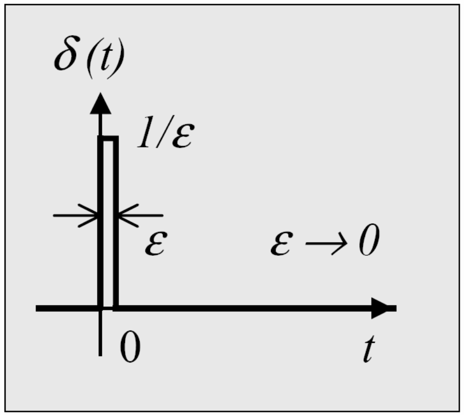
  (*Unit impluse input*)

  Chú ý

  $$\int_0^\infty \delta(t)dt=1$$

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & \text{khi} \quad t<0\\ \to\infty & \text{khi} \quad t=0\\ 0 & \text{khi} \quad t>0\end{cases}$$

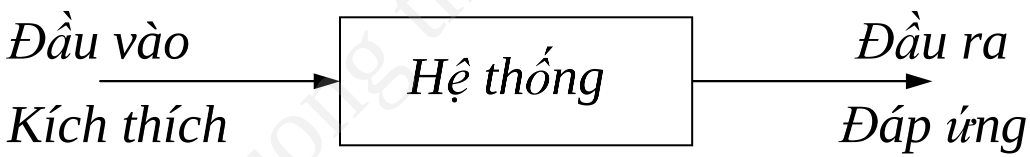
$$R(s)=1.$$



cuu duong than cong . com
CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

Mô tả hệ thống

- Mô tả hệ thống là biểu thức toán học biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng vật lý bên trong các thành phần của hệ thống.
- Mô hình toán học của một hệ thống là biểu diễn toán học thể hiện mối quan hệ giữa đầu vào, hệ thống, đầu ra. Mối quan hệ này phải đảm bảo rằng đáp ứng đầu ra của hệ thống có thể được xác định nếu biết trước kích thích đầu vảo.



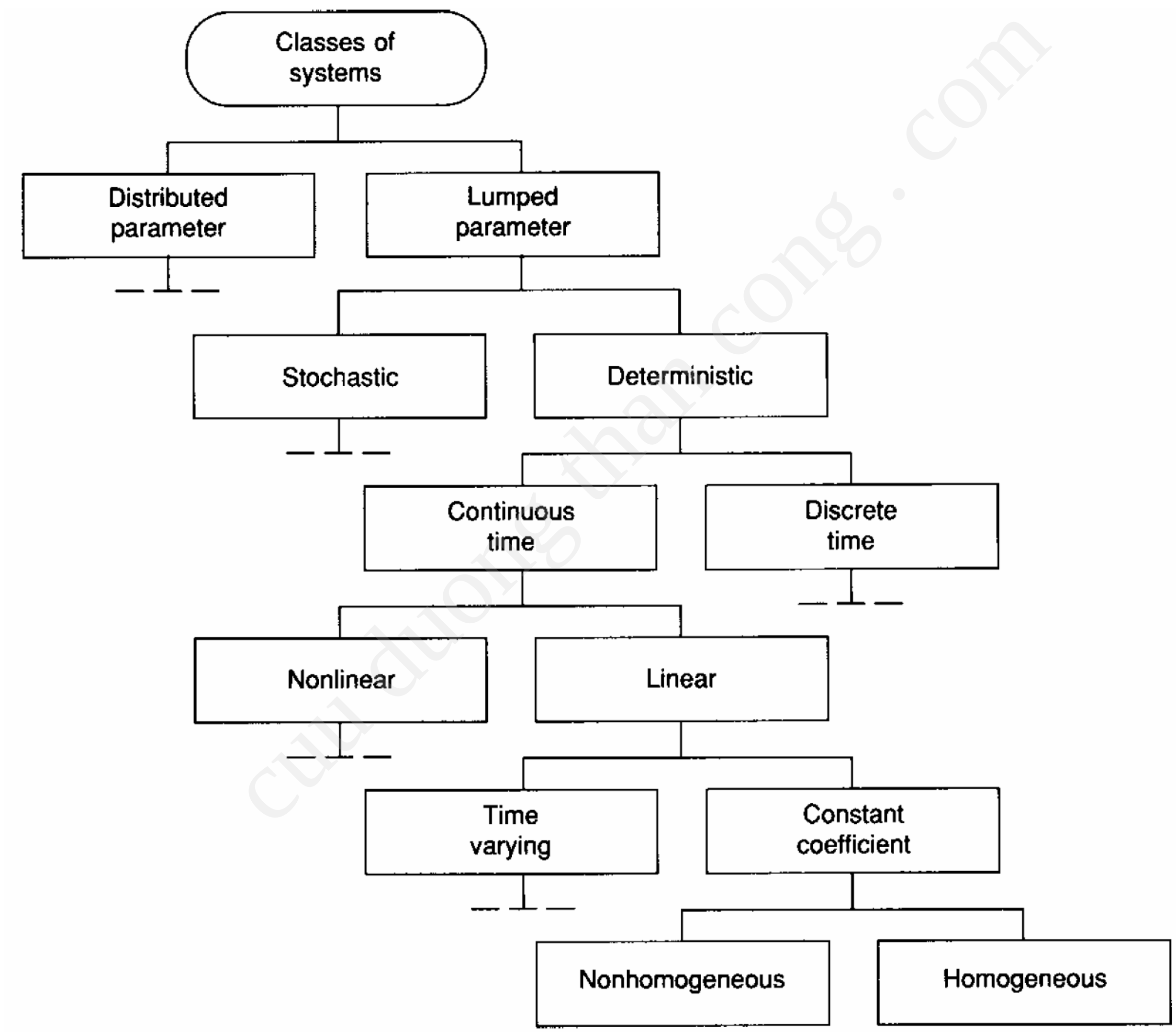
Mục đích

- Để khảo sát tính ổn định và các đặc tính khác của hệ thống
- Để thiết kế bộ ĐK nhằm nâng cao chất lượng hệ thống
- Để mô phỏng hệ thống trên máy tính

…

cuu duong than cong . com
CuuDuongThanCong.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Phân loại mô hình hệ thống



CuuDuongThanCong.com
https://fb.com/tailieudientucntt