$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2+0} & \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} \\ \frac{1}{3+0} & \frac{1}{3+1} & \frac{1}{3+2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Phương pháp khử Gauss, và các phân tích ma trận LU, PLU

VD1:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b} \rightarrow [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Khử Gauss:
$$[A|b] \xrightarrow[\boxed{H_3 - 7H_1}]{\boxed{H_2 - 4H_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & -21 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{H_3 - 2H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array}\right]$$
m.trận Δ trên

Giải từ dưới lên: $x_3 = \frac{-1}{3}$, $x_2 = 2$, $x_1 = -2$

Khái quát hoá: $Ax = b$. $\xrightarrow{①} L_1 Ax = L_1 . b$ vs $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-4} & 1 & 0 \\ \boxed{-7} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ -(Δ dưới)

p^2 Gauss vs $n=3$

$\xrightarrow{②} L_2 L_1 Ax = L_2 L_1 b$ vs $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$Ux = \tilde{b}$ (giải từ dưới lên tìm x)

Tổng quát: $Ax = b \rightarrow \underbrace{L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1}_{} Ax = L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 b$

$Ux = \tilde{b}$

Phân tích Ma trận: $A = \underbrace{(L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1)^{-1}}_{L} U$

$\Rightarrow A = LU$ (phân tích LU, L ◺, U ◹)

Trong VD trên: $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow (L_2 L_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$

BÀI TẬP VỀ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH $Ax = b$.

Câu 3:
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 11 & 7 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[H_3 - 2H_1]{H_2 - \frac{3}{2}H_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -\frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{H_3 + \frac{3}{5}H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -\frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{29}{10} & -\frac{29}{10} \end{array}\right]$$

$\rightarrow x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 2$

$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (L_2 L_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$

Và $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -13/2 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{10} \end{bmatrix}$

Vậy ptích LU:

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{29}{10} \end{bmatrix}$

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$