Lecture 2: Phân tích Hệ Điều Khiển

Sunday, December 26, 2021 5:04 PM

2.1. Tính điều khiển được

Bài toán $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u), & x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n, \ u: \text{input} \in \mathcal{U}_{ad} \ \text{(tập các đầu vào)} \\ y = g(t,x,u), \end{cases}$

- T/c điều khiển được (controllability) được đ/n chỉ liên quan đến trạng thái $x(t)$, nên pt đầu ra có thể bỏ đi được.

Đ/n: Cho $x^1 \in \mathbb{R}^n$. Ta nói hệ điều khiển với đk ban đầu x^0 là

i) điều khiển được tới trạng thái x^1 trong thời gian $t_1 > t_0$ nếu $\exists$ 1 hàm $u(t) \in \mathcal{U}_{ad}$ sao cho $x(t_1; u) = x^1$.

Khi đó cặp (t_1, x_1) được gọi là "điều khiển được" từ cặp (t_0, x_0).

ii) điều khiển được tới trạng thái x^1 nếu $\exists\, t_1 > t_0$ sao cho cặp (t_1, x_1) là điều khiển được từ cặp (t_0, x_0).

iii) Hệ điều khiển được gọi là "điều khiển được toàn phần (completely controllable)" nếu $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ và $\forall x^1 \in \mathbb{R}^n$ thì x^1 luôn điều khiển được từ x^0.

iv) Tập điều khiển được ứng với x^1 được x/đ bởi $C(x^1, t_0) = \bigcup_{t_1 > t_0} C(x^1, t_0, t_1)$, (controllability set)

trong đó $C(x^1, t_0, t_1) := \{x^0 \in \mathbb{R}^n \mid (t_1, x^1) \text{ là điều khiển được từ } (t_0, x^0)\}$.

Nôm na, tập điều khiển được ứng với x^1 là tập tất cả các giá trị ban đầu x^0 mà x^1 có thể điều khiển được từ x^0.

v) Tập đạt được (reachability set) $\mathcal{R}(x^0, t_0) = \bigcup_{t_1 > t_0} \mathcal{R}(x^0, t_0, t_1)$,

trong đó $\mathcal{R}(x^0, t_0, t_1) := \{x^1 \in \mathbb{R}^n \mid (t_1, x^1) \text{ là điều khiển được từ } (t_0, x^0)\}$.

Nôm na, tập đạt được ứng với x^0 là tập tất cả các trạng thái x^1 mà từ x^0 có thể điều khiển được đến.

Biểu đồ:

$x^0 \longrightarrow \mathcal{R}(x^0, t_0) \ni x^1$: tập đạt được

$x^1 \longrightarrow C(x^1, t_0) \ni x^0$: tập điều khiển được.

Ví dụ 1: Ta xét hệ điều khiển

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \forall t \in [0, +\infty), \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

Từ hệ đã cho ta có
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t). & (1) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) & (2) \end{cases}$$

Q2: VD ta lấy $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \mathcal{R}(x^0, 0) = ?$

Đ/n: $\mathcal{R}(x^0, 0) = \{x^1 \text{ mà } x^1 \text{ là điều khiển được từ } x^0\}$.

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \quad x_2(t) = e^t x_2(0). \quad (3)$$
$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \quad x_1(t) = e^t x_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)} u(s)\, ds \quad (4)$$

Giả sử (t_1, x^1) là điều khiển được từ $(0, x^0)$, khi đó ta có $\begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = x^1 =: \begin{bmatrix} x^{11} \\ x^{21} \end{bmatrix}$.

Từ (3) & (4) ta có hpt
$$\begin{cases} x_1(t_1) = x^{11} \\ x_2(t_1) = x^{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{t_1} \cdot x_1(0) + \int_0^{t_1} e^{(t_1 - s)} u(s)\, ds = x^{11} & (5) \\ e^{t_1} \cdot x_2(0) = x^{21} & (6) \end{cases}$$

Ta chú ý $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1(0) = x_2(0) = 0. \quad (7)$

Thay (7) vào (5) & (6) $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \int_0^{t_1} e^{(t_1 - s)} u(s)\, ds = x^{11} & (8) \\ 0 = x^{21} & (9) \end{cases}$$

Từ (9) ta thấy rằng $x^1 = \begin{bmatrix} x^{11} \\ x^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{11} \\ \cdots \end{bmatrix}$

$$\qquad 0 \quad = x^{1} \qquad (9)$$

Từ (9) ta thấy rằng $x^1 = \begin{bmatrix} x^{11} \\ x^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{11} \\ 0 \end{bmatrix}$

Từ (8) ta thấy (8) $\Leftrightarrow e^{t_1} \cdot \int_0^{t_1} e^{-s} u(s)\, ds = x^{11}$. (10)

Ta thấy với $x^{11} \in \mathbb{R}$ b/kỳ ta luôn chọn đc 1 thời điểm t_1 & 1 input u sao cho (10) đc t/mãn, v.d. $t_1 = 1$, $u(s) = \frac{x^{11}}{e(1-e)}$ $\forall s \in [0, t_1]$.

thì VT của (10) $= e \cdot \int_0^1 e^{-s} \cdot \frac{x^{11}}{e(1-e)}\, ds = x^{11}$.

Từ đó ta có $\mathcal{R}\left(x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t_0 = 0\right) = \left\{ \begin{bmatrix} x^{11} \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x^{11} \in \mathbb{R} \right\}$.

→ Hệ của chúng ta 0 phải là đkhiển đc toàn phần.

→ Chỉ các trạng thái có dạng $\begin{bmatrix} x^{11} \\ 0 \end{bmatrix}$ mới có thể đkhiển đc từ gốc toạ độ.

Sau đây ta sẽ tập trung nghiên cứu t/c đkhiển đc cho các hệ tuyến tính (LTV / LTI)

(LTV) $\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u$ hoặc (LTI) $\dot{x} = Ax + Bu$.

Đ/lý 1 a) Xét hệ LTV với g/s $\Phi(t,s)$ là họ tiến hóa (ng cơ bản) của pt $\dot{x}(t) = A(t)x$, tức là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(t,s)}{\partial t} = A(t)\Phi(t,s) \quad \forall t \geq s. \\ \Phi(t,t) = I_n. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)u(s)\, ds.$$

b) T/H hệ LTI ta có $\Phi(t,s) = e^{A(t-s)} \Rightarrow x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds$.

Hệ quả: Nếu ta xét đầu ra $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ hay $y = Cx + Du$ thì ta sẽ có axạ đầu vào - đầu ra

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x^0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)u(s)\, ds + D(t)u(t). \quad \text{(LTV)}$$

$$y(t) = Ce^{At}\left(x^0 + \int_0^t e^{-As} Bu(s)\, ds\right) + Du(t). \quad \text{(LTI)}$$

Điểm tốt của i-o mapping là k cần giải PTVP, điều này rất qtrọng nếu số chiều của x lớn hơn nhiều so với số chiều của y & u.

Trong thực tế nhiều khi ng ta qtâm đến việc đkhiển về trạng thái 0 ($x^1 = \vec{0}$), còn gọi là null-controllability. Từ Đlý 1 ta có ngay hệ quả.

Hệ quả: Trạng thái ban đầu x^0 là đkhiển đc về 0 $\Leftrightarrow \exists\, u \in \mathcal{U}_{ad}$ sao cho

(Bổ đề 2.4)

$$\boxed{x^0 = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,s)B(s)u(s)\, ds}$$

C/m: G/sử x^0 đkhiển đc về 0 $\Leftrightarrow x^1 = 0$. Do đó ta có

$$0 = \Phi(t_1,t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t,s)B(s)u(s)\, ds. \quad (1)$$

Ta chú ý t/c của họ tiến hóa $\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t,s)\Phi(s,t_0)$ $\forall t \geq s \geq t_0$.

Ta chú ý t/c của họ tiến hóa $\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t,s)\,\Phi(s,t_0) \quad \forall\, t \geq s \geq t_0$.

$$\Phi(t,s) = (\Phi(s,t))^{-1}\ \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

Từ (1) ta có $\quad 0 = \Phi(t_1,t_0)\cdot\left(x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,s)B(s)u(s)\,ds\right)$

$$\Leftrightarrow\ 0 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,s)B(s)u(s)\,ds.$$

∎

Đ/n (ma trận Gramian). Cho hàm số $G \in PC((t_0,\infty);\mathbb{R}^{n,m})$. (k.g không gian các hàm liên tục từng khúc). Khi đó ma trận

$$P(t_0,t_1) := \int_{t_0}^{t_1} G(s)\,G^T(s)\,ds$$

được gọi là (t_0,t_1)-Gramian của G.

Hiển nhiên $P(t_0,t_1)$ là 1 ma trận đối xứng, x/đ 0 âm. Thêm vào đó ta có

$$\ker(P(t_0,t_1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid G^T(t)x \equiv 0\ \forall t \in [t_0,t_1]\}.$$

C/m: $\quad x^T P(t_0,t_1)x = \int_{t_0}^{t_1} x^T G(s)\,G^T(s)x\,ds = \int_{t_0}^{t_1} \|G^T(s)x\|_2^2\,ds$

Do đó $x \in \ker(P(t_0,t_1)) \Leftrightarrow G^T(s)x \equiv 0\ \forall s \in [t_0,t_1]$. ∎

Bổ đề 2.7: Cho $G \in PC((t_0,\infty),\mathbb{R}^{n,m})$. Khi đó $x \in im(P(t_0,t_1)) \Leftrightarrow \exists u$ s.c.

$$x = \int_{t_0}^{t_1} G(t)u(t)\,dt.$$

C/m: Đặt $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ để } x = \int_{t_0}^{t_1} G(t)u(t)\,dt\}$.

Ta đi c/m $\mathcal{L} = im(P(t_0,t_1))$.

[⇒]. Đ/n $\quad im(P(t_0,t_1)) = im\left(\int_{t_0}^{t_1} \underline{G(t)}\,G^T(t)\,dt\right)$.

Nếu lấy $x \in im(P(t_0,t_1))$ bất kỳ $\Rightarrow \exists z$ s.c.

$x = \int_{t_0}^{t_1} G(t)\,\boxed{G^T(t)z}\,dt$. Chọn $u(t) = G^T(t)z$.

$\Rightarrow x \in \mathcal{L}$. $\qquad$ Do đó $im(P(t_0,t_1)) \subseteq \mathcal{L}$.

[⇐] Ta c/m $\mathcal{L} \cap \ker P(t_0,t_1) = \{0\}$. Thật vậy nếu $x \in \ker P(t_0,t_1)$

$\Rightarrow G^T(s)x = 0\ \forall s \in [t_0,t_1] \Rightarrow x^T x = x^T\cdot\int_{t_0}^{t_1} G(s)u(s)\,ds \quad$ (vì $x \in \mathcal{L}$)

$\Rightarrow x^T x = \int_{t_0}^{t_1} x^T G(s)u(s)\,ds = \int_{t_0}^{t_1} 0\cdot u(s)\,ds = 0$.

$\Rightarrow x = 0$.

Mặt khác ta có

$$n \geq \dim(\mathcal{L} + \ker P(t_0,t_1)) = \dim(\mathcal{L}) + \dim(\ker P(t_0,t_1))$$

$$\geq \dim(im P(t_0,t_1)) + \dim(\ker P(t_0,t_1)) = n.$$

Vì vậy ta có $\quad \mathcal{L} = im\,P(t_0,t_1)$. ∎

Lec. 2. (cont') 05/01/22

Nhắc lại: Bổ đề 2.4: x^0 điều khiển được về $x^1 = 0$ (null-contr.)

$$\Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ s.c. } x^0 = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, s) B(s) u(s)\, ds$$

Bổ đề 2.7: $x \in im\left(P(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} G(s) G^T(s)\, ds\right) \Leftrightarrow \exists u$ s.c $x = \int_{t_0}^{t_1} G(t) u(t)\, dt$

Chọn hàm $G(s) = -\Phi(t_0,s) B(s) u(s)$ ta có

(2.11) $$\boxed{P(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t) B(t) B^T(t) \Phi(t_0,t)^T dt \Rightarrow (t_0,t_1)\text{-Gramian điều khiển (controllability Gramian).}}$$

Đ/lý 2.8: (Đ khiển về 0) Cho $x^1 = 0$. Khi đó hệ tuyến tính $\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}}$ (1.6)

với $P(t_0,t_1)$ x/đ bởi CT (2.11) t/mãn các khẳng định sau:

i) Tập điều khiển được $C(0,t_0,t_1) = im(P(t_0,t_1))$.

ii) $P(t_0,t_1)x = 0 \Leftrightarrow x^T \Phi(t_0,t).B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0,t_1]$.

C/m: i) Hiển nhiên theo 2 bổ đề 2.4 & 2.7.
ii) Hiển nhiên theo bổ đề 2.6.

Đ/n: Phương trình liên hợp (adjoint equation) của PTVP $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ có dạng

$$\dot{z}(t) = -A(t)^T z(t). \quad (2.12)$$

Pt l/hợp có n° $z(t)$ t/mãn t/c $\langle z(t), x(t)\rangle = const$. Thật vậy

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), z(t)\rangle = \langle \dot{x}(t), z(t)\rangle + \langle x(t), \dot{z}(t)\rangle$$
$$= \langle A(t)x(t), z(t)\rangle + \langle x(t), -A(t)^T z(t)\rangle$$
$$= z(t)^T A(t) x(t) + \left(-A(t)^T z(t)\right)^T x(t)$$
$$= z^T(t) A(t) x(t) + z^T(t).(-A(t)).x(t)$$
$$= 0.$$

T/c của họ tiến hoá: Nếu $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s\geq t_0}$ là họ tiến hoá của pt $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

thì $\{\Phi(s,t)^T\}_{t\geq s\geq t_0}$ " " pt $\dot{z}(t) = -A^T(t) z(t)$

$$\Phi(t,s)^{-T} = \left(\Phi(t,s)^{-1}\right)^T = \Phi(s,t)^T$$

> Đ/lý 2.9: (tính điều khiển được toàn phần) Các k/định sau là tương đương:
> i) Hệ LTV (1.6) là điều khiển được toàn phần, tức là $\forall (x^0,x^1) \in (\mathbb{R}^n)^2$ ta luôn tìm được $u \in \mathcal{U}_{ad}$ s.c x^1 là điều khiển được tới x^0.
> ii) Đối với pt liên hợp (2.12) ta có t/c
> $$z^T(t) B(t) \equiv 0 \text{ trên } [t_0,\infty) \Rightarrow z(t) \equiv 0.$$
> iii) $\exists t_1 > t_0$ s.c. Gramian điều khiển $P(t_0,t_1)$ là xác định dương.

C/m: $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$.

$a \Rightarrow b)$ G/s (1.6) là điều khiển được toàn phần, và đối với (2.12) thì $z^T(t)B(t) \equiv 0$ trên $[t_0,\infty)$.
Ta đi c/m $z(t) \equiv 0$ bằng phản chứng, tức là ta giả sử $\exists \hat{t}$ s.c. $z(\hat{t}) \neq 0$, $\hat{t} > t_0$.
Ta thấy theo CT n° của (2.12)

a ⇒ b) G/s (2.6) là đ.kh đc toàn phần, ta đã với (2.12) thì $z^T(t)B(t) \equiv 0$ trên $[t_0,\infty)$.
Ta đi c/m $z(t) \equiv 0$ bằng phản chứng, tức là ta giả sử $\exists\, \hat{t}$ s.c. $z(\hat{t}) \neq 0$, $\hat{t} > t_0$.
Ta thấy theo CT n° của (2.12)

$$z(t) = \Phi(t,t_0)^{-T} z(t_0) = \Phi(t_0,t)^T z(t_0).$$

Vì $z(\hat{t}) \neq 0$ mà $\Phi(t_0,t)$ khả nghịch, nên $z(t_0) \neq 0$.
Ta chọn x^0 s.c. $\langle x^0, z(t_0)\rangle \neq 0$. Khi đó ta có $\forall t \geq t_0$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle x(t), z(t)\rangle &= \langle \dot{x}(t), z(t)\rangle + \langle x(t), \dot{z}(t)\rangle \\ &= \langle A(t)x(t) + B(t)u(t), z(t)\rangle + \langle x(t), -A^T(t)z(t)\rangle \\ &= z^T(t).\ A(t)x(t) + \underbrace{z^T(t)B(t)}_{\equiv 0} u(t) - z^T(t)A(t)x(t) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Do đó $\langle x(t), z(t)\rangle = \text{const}\quad \forall t \geq t_0. \Rightarrow \langle x(t), z(t)\rangle = \langle x^0, z(t_0)\rangle \neq 0.$
Tuy nhiên vì hệ điều khiển được về 0 $\Rightarrow \exists\, t_1 > t_0$ s.c. $x(t_1) = 0 \Rightarrow \langle x(t_1), z(t_1)\rangle = 0$

mâu thuẫn

Vậy g/s sai, nên $z(t) = 0\ \forall t \geq t_0$.

b ⇒ c) Ta nhắc lại $P(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0,t)\,dt$

là ma trận đối xứng, nửa x/đ dương $\forall t_1 \geq t_0$.
Ta c/m = phản chứng, tức là g/s $\nexists\, t_1 > t_0$ để $P(t_0,t_1)$ là x/đ dương ⇔ $P(t_0,t_1)$ suy biến $\forall t_1 > t_0$.

G/s ta có định một giá trị $t_1 > t_0$. ⇒ $\exists$ vectơ $z_0 \in \ker(P(t_0,t_1))$, $\|z_0\| = 1$.
Theo Bổ đề 2.6,

$$z_0 \in \ker(P(t_0,t_1)) \Leftrightarrow z_0^T\Phi(t_0,t)B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0,t_1].$$

Mặt khác ta chú ý CT n° của pt liên hợp là $z(t) = \Phi(t_0,t)^T z_0 \Rightarrow z^T(t) = z_0^T\Phi(t_0,t)$.
Do đó ta có $\quad z^T(t)B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0,t_1]$.

Từ đó ta có thể chọn 1 dãy $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ s.c. $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$

và dãy các đ/k b.đầu $\{z_0^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.ư sao cho n° của bài toán (IVP)

$$② \begin{cases}\dot{z}(t) = -A^T(t)z(t), \\ z(t_0) = z_0^{(k)},\ \|z_0^{(k)}\| = 1\ \forall k \in \mathbb{N},\end{cases}$$

k/h là $z^{(k)}(t)$ t/m $\quad z^{(k)}(t)^T.\ B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t^{(k)}]$.

Từ dãy $\{z_0^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \partial B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ ta có thể trích ra 1 dãy hội tụ (t/c của tập compact)

$$\lim_{n\to+\infty} z_0^{(k_n)} = z_0^* \in \partial B(0,1), \quad \text{tức là } \|z_0^*\| = 1.$$

Vì n° $z(t)$ của IVP ② phụ thuộc liên tục vào đ/k ban đầu, nên ta có

$$z(t; t_0, z_0^*) = \lim_{k_n\to+\infty} z(t; t_0, z_0^{(k_n)})$$

mà $\quad z(t; t_0, z_0^{(k_n)})^T B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_{k_n}]$
và $\lim_{k_n\to+\infty} t_{k_n} = +\infty$.

$$\Rightarrow \quad z(t; t_0, z_0^*)^T B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0,+\infty) \overset{b)}{\Rightarrow} z(t) \equiv 0, \forall t \in [t_0,+\infty)$$

mâu thuẫn vì $z(t_0) = z_0^* \neq 0$, $\|z_0^*\| = 1$.

Do đó, $\exists\, t_1$ s.c. $P(t_0,t_1)$ là x/đ dương.

c ⇒ a) $\quad \exists\, t_1$ để $P(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0,t)\,dt$ là x/đ dương.
Để c/m hệ là điều khiển được toàn phần ta lấy $(x^0, x^1) \in (\mathbb{R}^n)^2$ b/kỳ.

$c \Rightarrow a)$ $\exists\, t_1$ để $P(t_0,t_1) = \int_{t_0} \Phi(t_0,t) B(t) B'(t) \Phi'(t_0,t)\, dt$ là x/đ dương.

Để c/m hệ là đkhđ toàn phần ta lấy $(x^0, x^1) \in (\mathbb{R}^n)^2$ bất kỳ.

Theo CT n° $\quad x^1 = x(t_1; t_0, x^0) = \Phi(t_1, t_0)\left(x^0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) u(t)\, dt\right)$.

$$\Leftrightarrow \quad \Phi(t_0,t_1)x^1 - x^0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t) B(t)\, u(t)\, dt \qquad (3)$$

Chọn $u(t) = B^T(t)\, \Phi^T(t_0,t).v$, với $v \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ Vế phải của (3) $= P(t_0,t_1).v$.

Để (3) t/m ta chỉ cần chọn $v := (P(t_0,t_1))^{-1}.(\Phi(t_0,t_1)x^1 - x^0)$,

điều này thực hiện đc vì $P(t_0,t_1)$ là khả nghịch (x/đ dương). $\blacksquare$

TH hệ LTI: $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$, $\forall t \geq t_0$ thì

$$P(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} B B^T e^{A^T(t_0-t)} dt$$

Nếu $t_0 = 0$ $\quad \Rightarrow \quad P(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt$.

Ngoài ra $x \in \ker(P(0,t_1)) \Leftrightarrow B^T e^{-A^T t} x = 0 \quad \forall t \in [0, t_1]$.

Kiểm tra t/c đkhđ toàn phần (hay về 0) = Gramian thì phải tính $\int_{t_0}^{t_1}$, với t_1 đủ lớn $\Rightarrow$ 0 tốt.

Đ/n: Ma trận điều khiển Kalman (Kalman cont'y matrix)

$$K(A,B) := [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n, nm}$$

Đ/lý: Với hệ LTI thì không gian sinh bởi các cột của ma trận điều khiển Kalman chính là tập điều khiển đc về 0, tức là $\quad C(0;0,t) = \operatorname{im} K(A,B)\ \forall t > 0$.

Hệ quả là, hệ LTI là đkhđ toàn phần $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(K(A,B)) = n$.

C/m: Trước hết ta đi c/m $C(0;0,t) \subseteq \operatorname{im} K(A,B)$.

Ta chú ý: $C(0;0,t) = \operatorname{im}(P(0,t)) = \operatorname{im}\left(\int_{t_0} e^{-As} B\, \underline{\underline{B^T e^{-A^T s}}}\, ds\right)$

$$\subseteq \operatorname{im}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-As} B\, ds\right). \qquad (1)$$

Theo Đ/lý Cayley-Hamilton, ma trận A chính là n° của đa thức đặc trưng $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

$\Rightarrow \forall k \geq n$ thì A^k là 1 tổ hợp tuyến tính của $I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

Mặt khác, $e^{-As} = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i . \frac{(-s)^i}{i!} \quad \Rightarrow e^{-As} \in \operatorname{im}[I, A, \dots, A^{n-1}]$.

$$\Rightarrow \quad e^{-As}B \in \operatorname{im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \operatorname{im} K(A,B) \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow C(0;0,t) \subseteq \operatorname{im} K(A,B)$. $\qquad (3)$

Bước 2. Ta c/m $C(0;0,t) \supseteq \operatorname{im} K(A,B)$. Ta c/m gián tiếp = cách c/m

$$C(0;0,t)^{\perp} \subseteq (\operatorname{im} K(A,B))^{\perp}.$$

Ta có $C(0;0,t)^{\perp} = (\operatorname{im} P(0,t))^{\perp} = \ker P(0,t)$. (vì $P(0,t)$ là ma trận đối xứng).

Với vectơ x bất kỳ $\in C(0;0,t)^{\perp} \Rightarrow x \in \ker P(0,t) \Leftrightarrow B^T e^{-A^T s} x = 0 \ \forall s \in [0,t]$.

Ta thấy $B^T e^{-A^T s} x =: g(s)$ là 1 hàm số theo s.

Vì $g(s) = 0 \ \forall s \in [0,t] \Rightarrow$ thay $s=0$ ta có $B^T x = 0 \Leftrightarrow x^T B = 0$

vì $g'(s) = 0 \Rightarrow B^T(-A^T) \cdot e^{-A^T s} x = 0 \Rightarrow (AB)^T \cdot e^{-A^T s} x = 0$.
$\forall s \in [0,t)$

Cho $s=0 \longrightarrow (AB)^T x = 0 \Leftrightarrow x^T \cdot AB = 0$.

cứ tiếp tục lấy liên tiếp các đ/hàm của $g(s)$, ta có

$$\Rightarrow x^T A^k B = 0 \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

Do đó, $x^T \cdot \underbrace{[B \ \ AB \ \ A^2B \ \ \dots \ \ A^{n-1}B]}_{K(A,B)} = 0 \Rightarrow x^T \in \ker K(A,B)$

$$\Rightarrow x \in \ker K(A,B)^T = (\operatorname{im} K(A,B))^{\perp}.$$

Vì vậy $C(0;0,t)^{\perp} \subseteq (\operatorname{im} K(A,B))^{\perp}$. (đpcm) ▨