ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN CƠ TIN HỌC

Sinh viên: Trần Thị Thơm

TIỂU LUẬN CUỐI KỲ
Môn học
Một số vấn đề chọn lọc trong tính toán khoa học

Ngành Toán Tin ứng dụng
(Chương trình đào tạo chuẩn)

Cán bộ hướng dẫn: TS. Hà Phi

Hà Nội - 2020

Bài 1: Cho 1 hệ điều khiển có hàm truyền là

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{s}{s-1} \\ \frac{s^2+2s-9}{(s-1)(s-3)} & \frac{s+4}{s+3} \end{bmatrix}$$

a) *Hãy đi tìm hai nhận dạng chính tắc điều khiển được và chính tắc quan sát được của hàm truyền trên bằng cả lý thuyết lẫn thực hành lập trình.*

b) *Áp dụng lệnh sẵn có minreal trong MATLAB/OCTAVE cho 2 nhận dạng ở trên, hãy đi tìm nhận dạng tối thiểu.*

c) *Sử dụng hệ nhận dạng tối thiểu ở trên, hãy tìm phép đổi biến số thích hợp để chia tỷ lệ (magnitude scaling) sao cho tất cả các biến trạng thái $x_i(t)$ đều có độ lớn bằng với độ lớn tối thiểu đầu ra y(t).*

d) *Nếu mọi tín hiệu đều phải nằm trong phạm vi ±10 V và nếu hàm đầu vào là hàm bước nhảy (step với độ lớn a) thì a tối đa có thể là bao nhiêu?*

Lời giải

a)

$$D = \lim_{s\to\infty} G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}(s) - D = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} - 0 & \frac{s}{s-1} - 1 \\ \frac{s^2+2s-9}{(s-1)(s-3)} - 1 & \frac{s+4}{s+3} - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{-6}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2(s+3)} \begin{bmatrix} s(s+3) & (s-1)(s+3) \\ -6(s-1) & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

Viết lại G(s) = $(s-1)^2$(s + 3) = $s^3+s^2-5s+\ 3$

$\Rightarrow$ $\propto_1$ = 1, $\propto_2$ = 1, $\propto_3$ = 1, r (bậc cao nhất của mẫu số) = 3

N(s) = $N_1.s^2+\ N_2.s$ + N_3 = $\begin{bmatrix} s(s+3) & (s-1)(s+3) \\ -6(s-1) & (s-1)^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} s^2+3\mathrm{s} & s^2+2s-3 \\ -6s-6 & s^2-2s+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

❖ ***Dạng chính tắc điều khiển được***

Số chiều là n = r.p = 3.2 = 6

Hệ không gian trạng thái: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

Với A = $\begin{bmatrix} -\propto_{1.} I_p & -\propto_{2.} I_p & -\propto_{3.} I_p \\ I_p & O_p & 0 \\ 0 & O_p & I_p \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B = $\begin{bmatrix} I_p \\ O_p \\ O_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

C = $[N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

D = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Vậy dạng chính tắc điều khiển được là:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \\ \dot{x_5} \\ \dot{x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

❖ ***Dạng chính tắc quan sát được***

Số chiều là n = r.q = 3.2 = 6

Hệ không gian trạng thái: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

Với A = $\begin{bmatrix} -\propto_1 . I_q & I_q & 0 \\ -\propto_2 . I_q & O_q & I_q \\ -\propto_3 . I_q & 0 & O_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ -3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -6 & 2 \\ 0 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [I_q \quad O_q \quad O_q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

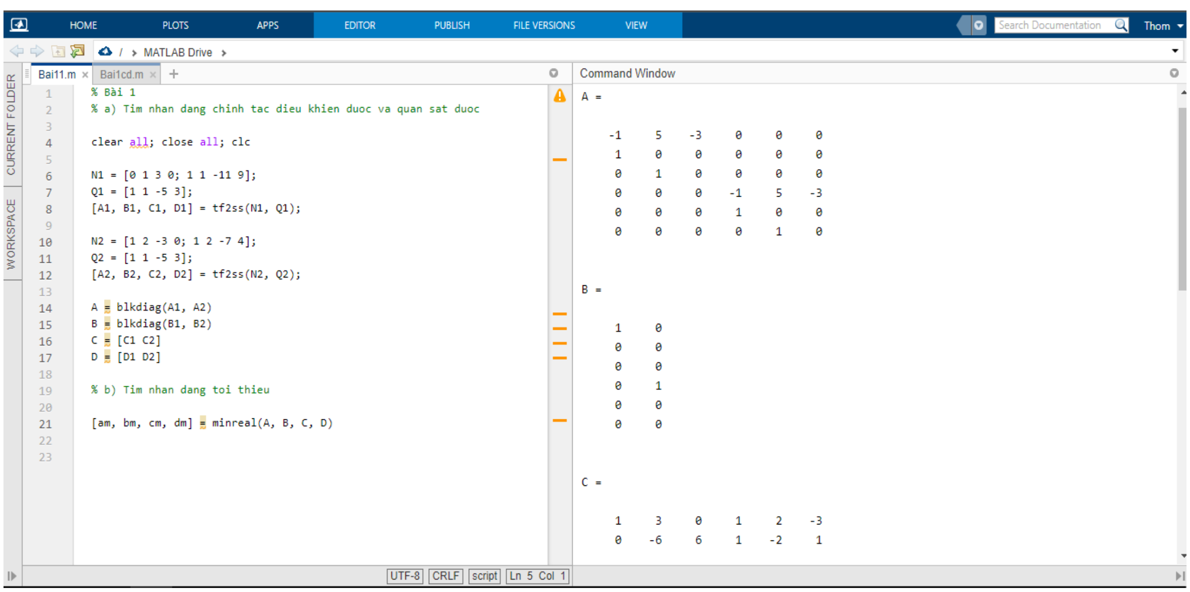
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

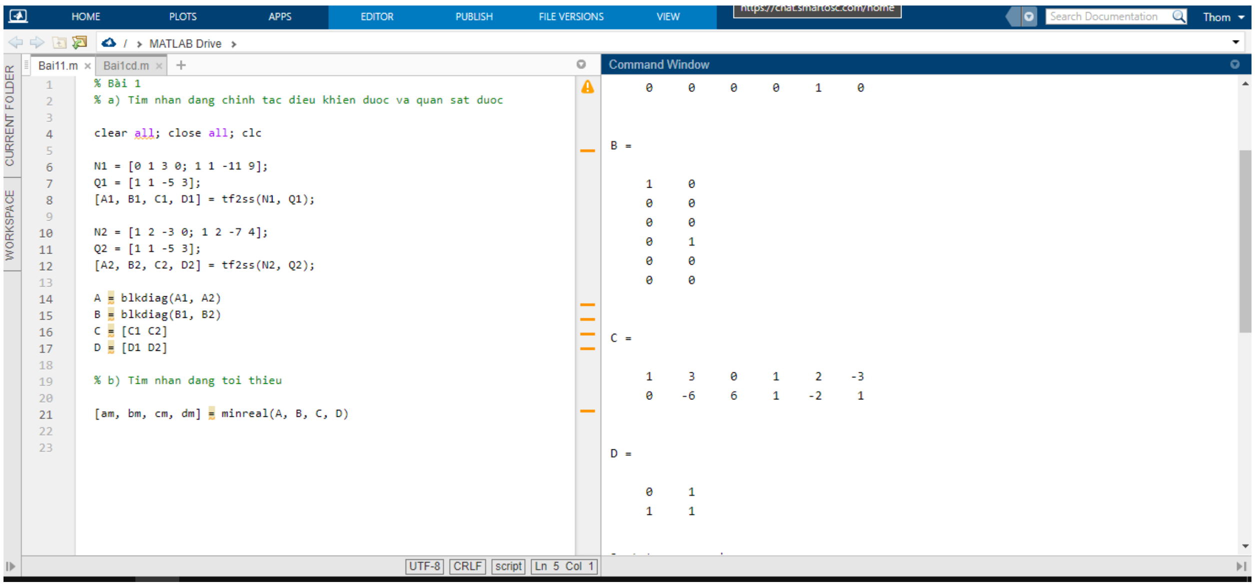
Vậy dạng chính tắc quan sát được là:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -6 & 2 \\ 0 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

❖ Code

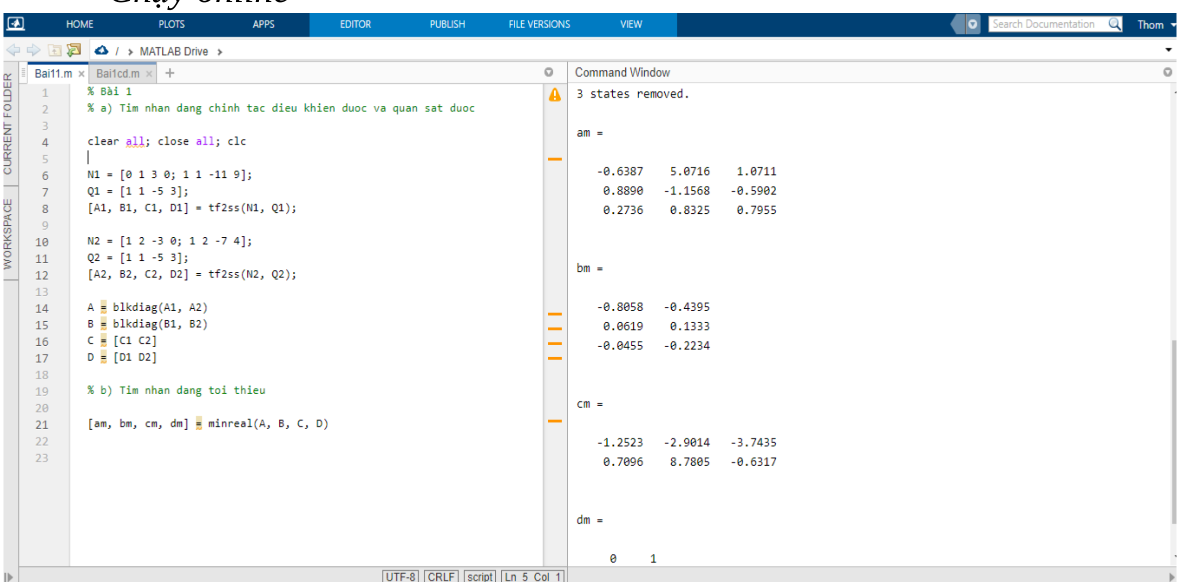
- *Chạy online (giống kết quả chạy máy)*





b) Nhận dạng tối thiểu

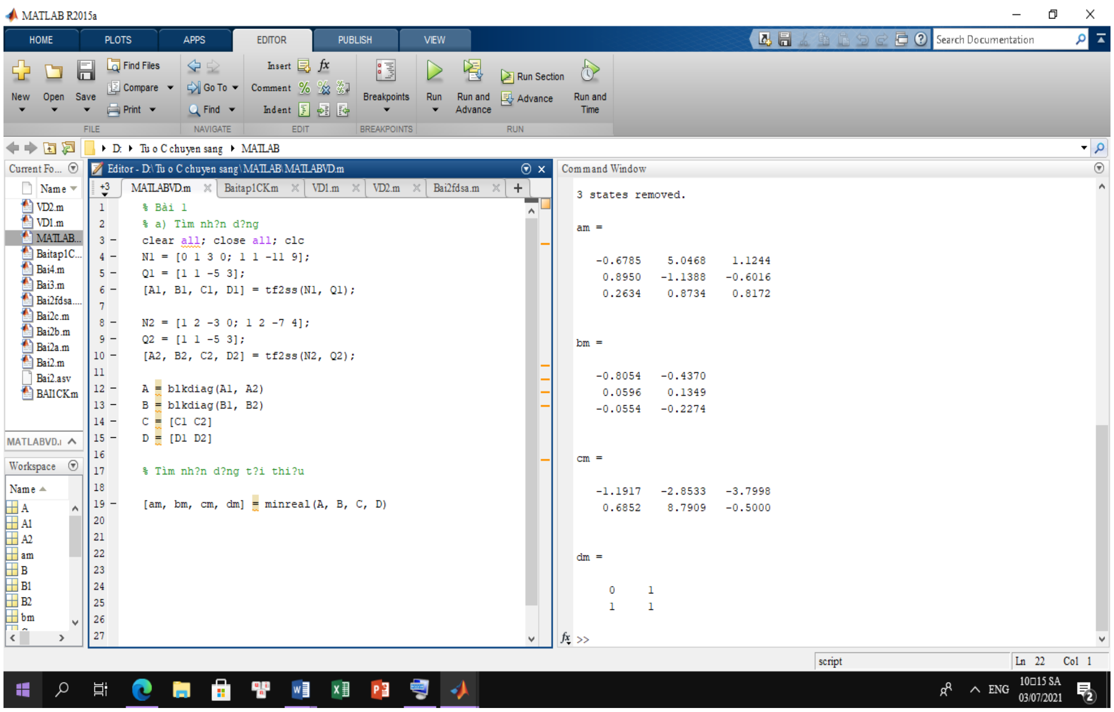
- *Chạy online*



Vậy tìm được nhận dạng tối thiểu là:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0.6387 & 5.0716 & 1.0711 \\ 0.8890 & -1.1568 & -0.5902 \\ 0.2736 & 0.8325 & 0.7955 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.8058 & -0.4395 \\ 0.0619 & 0.1333 \\ -0.0454 & -0.2234 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} -1.2523 & -2.9014 & -3.7435 \\ 0.7096 & 8.7805 & -0.6317 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

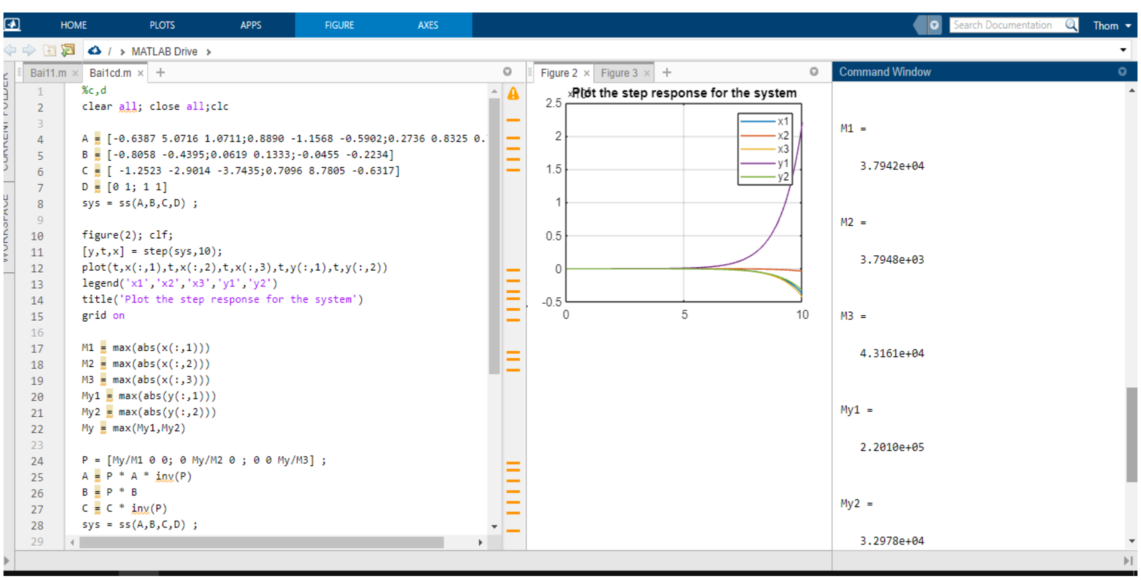
- *Chạy máy*

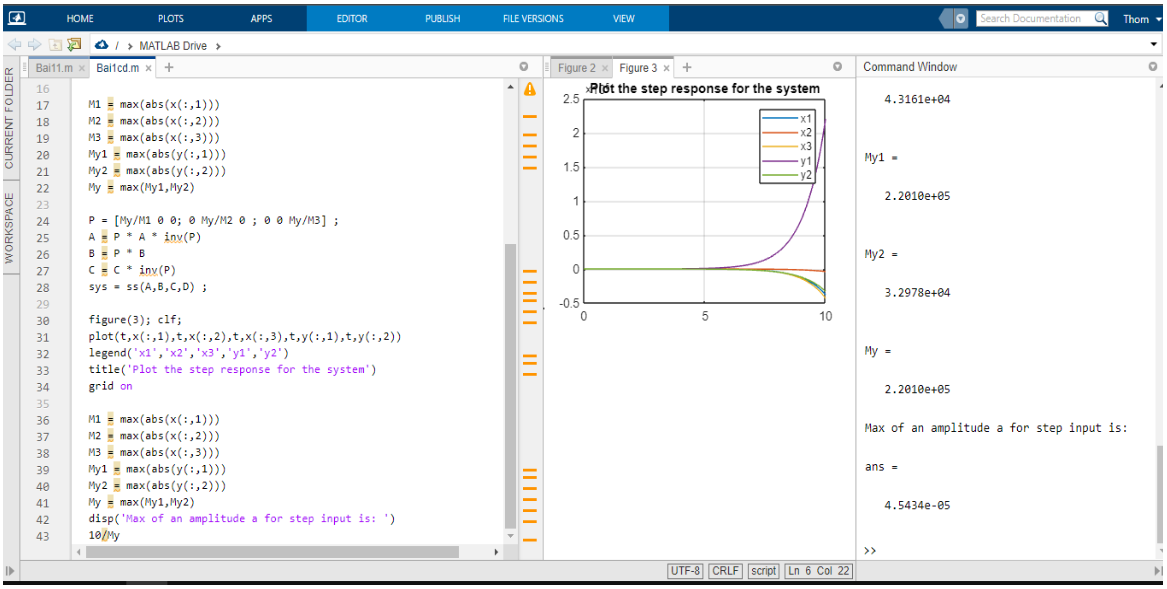


$$
\begin{cases}
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.6785 & 5.0468 & 1.1244 \\ 0.8950 & -1.1388 & -0.6016 \\ 0.2634 & 0.8734 & 0.8172 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.8054 & -0.4370 \\ 0.0596 & 0.1349 \\ -0.0554 & -0.2274 \end{bmatrix} \\
y = \begin{bmatrix} -1.1917 & -2.8533 & -3.7998 \\ 0.6852 & 8.7909 & -0.5000 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{cases}
$$

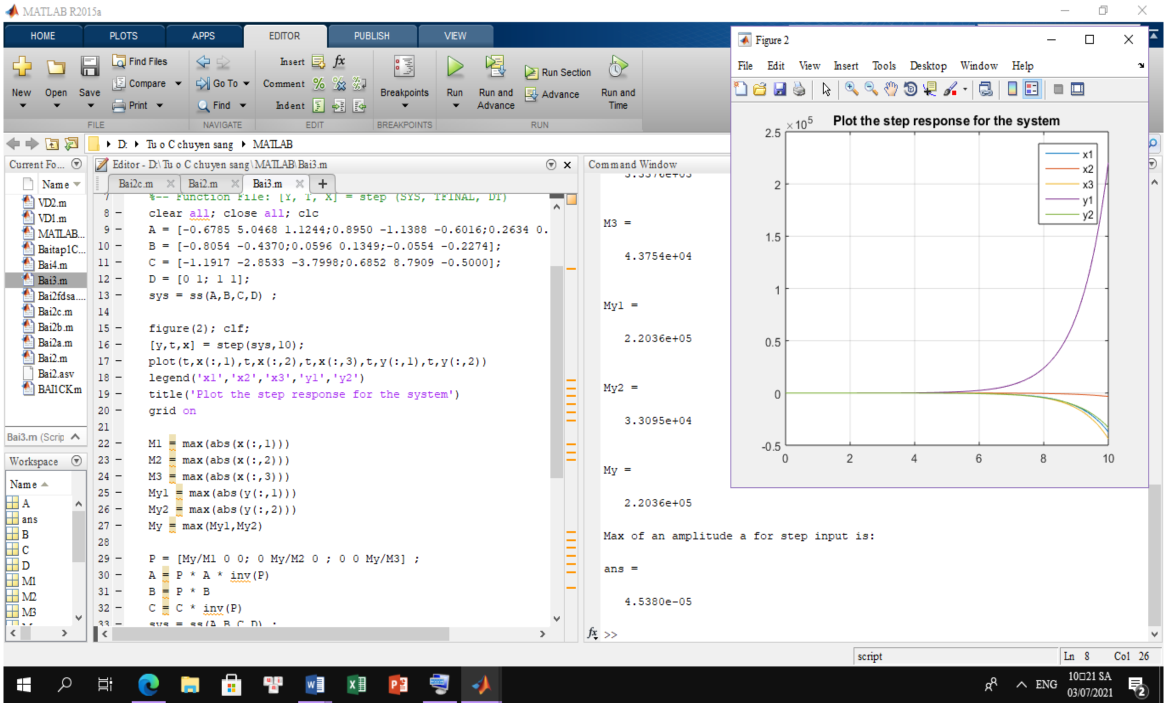
c) d) **Code**

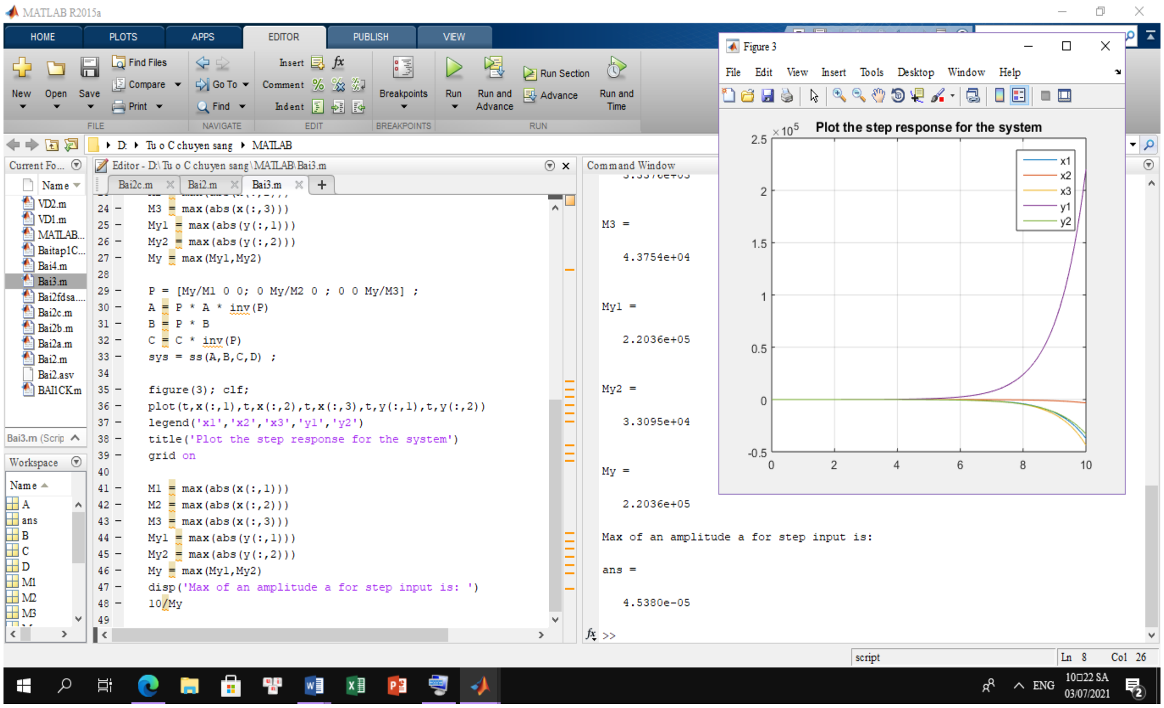
- Chạy online




Plot the step response for the system
x1
x2
x3
y1
y2
M1 = max(abs(x(:,1)))
M2 = max(abs(x(:,2)))
M3 = max(abs(x(:,3)))
My1 = max(abs(y(:,1)))
My2 = max(abs(y(:,2)))
My = max(My1,My2)
P = [My/M1 0 0; 0 My/M2 0 ; 0 0 My/M3] ;
A = P * A * inv(P)
B = P * B
C = C * inv(P)
sys = ss(A,B,C,D) ;
figure(3); clf;
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3),t,y(:,1),t,y(:,2))
legend('x1','x2','x3','y1','y2')
title('Plot the step response for the system')
grid on
disp('Max of an amplitude a for step input is: ')
10/My
Command Window
4.3161e+04
My1 =
2.2010e+05
My2 =
3.2978e+04
My =
2.2010e+05
Max of an amplitude a for step input is:
ans =
4.5434e-05

- *Chạy máy*


MATLAB R2015a
Figure 2
Plot the step response for the system
x1
x2
x3
y1
y2
clear all; close all; clc
A = [-0.6785 5.0468 1.1244;0.8950 -1.1388 -0.6016;0.2634 0.
B = [-0.8054 -0.4370;0.0596 0.1349;-0.0554 -0.2274];
C = [-1.1917 -2.8533 -3.7998;0.6852 8.7909 -0.5000];
D = [0 1; 1 1];
sys = ss(A,B,C,D) ;
figure(2); clf;
[y,t,x] = step(sys,10);
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3),t,y(:,1),t,y(:,2))
legend('x1','x2','x3','y1','y2')
title('Plot the step response for the system')
grid on
Command Window
M3 =
4.3754e+04
My1 =
2.2036e+05
My2 =
3.3095e+04
My =
2.2036e+05
Max of an amplitude a for step input is:
ans =
4.5380e-05



Bài 2

a) *Cho các biến trạng thái là $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ và $x_3 = i$. Xây dựng mô hình không gian trạng thái của hệ thống khi đầu ra mong muốn là vị trí góc của tải θ.*

Ta có $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] = [\theta \quad \dot{\theta} \quad i]$

Vậy $\dot{x_1} = \dot{\theta} = x_2$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{NK_m}{J_e} x_3 - \frac{T_d(t)}{J_e}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{di}{dt} = \frac{-NK_m}{L} x_2 - \frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} v(t)$$

Tính được $J_e = J + N^2 J_m = 0{,}02 + 12^2 . 0{,}0008 = 0.1352$

Hệ phương trình là:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{NK_m}{J_e} \\ 0 & \frac{-NK_m}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{J_e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_d(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{750}{169} \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1250}{169} & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_d(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \dot{x} = A.x(t) + B.u(t)$

$y = x_3$

Vậy ta có

A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{750}{169} \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix}$,

B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1250}{169} & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$,

C = [0 0 1], D = [0 0]

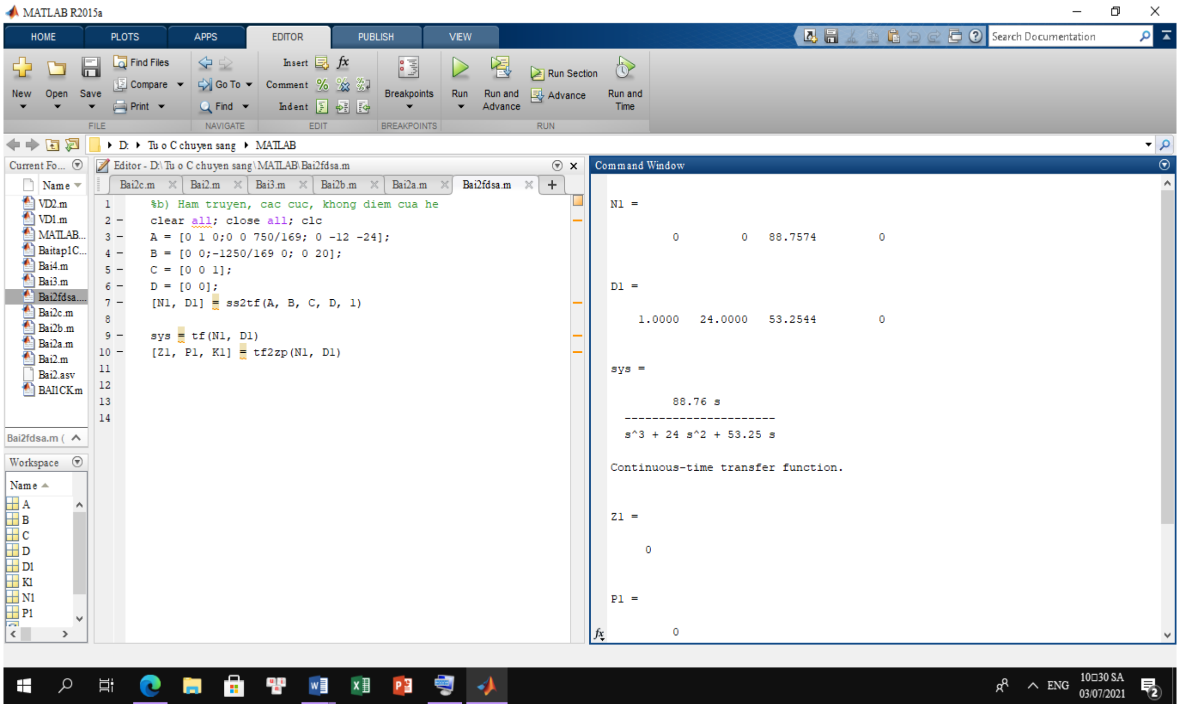
b) *Tìm hàm truyền của hệ, tìm các cực, không điểm của hệ*

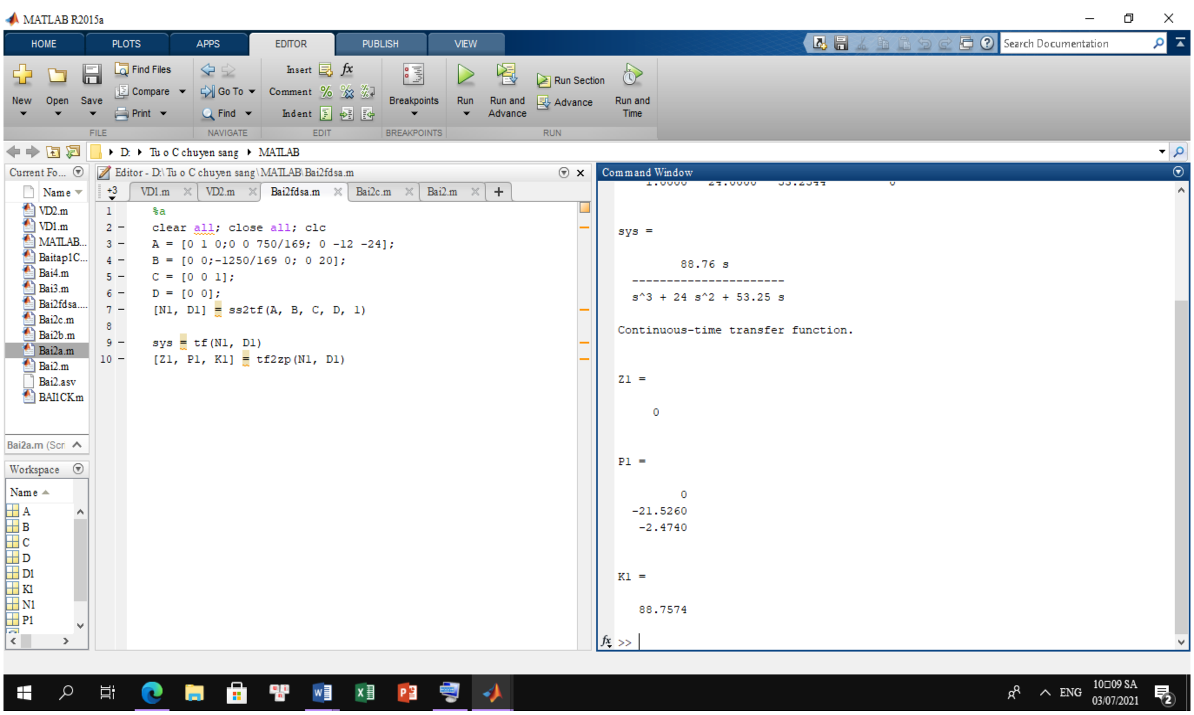
- Hàm truyền của hệ là:

$$\hat{G}(s) = \frac{88{,}67s}{s^3 + 24s^2 + 53{,}25s}$$

- Các cực và không điểm của hệ là:

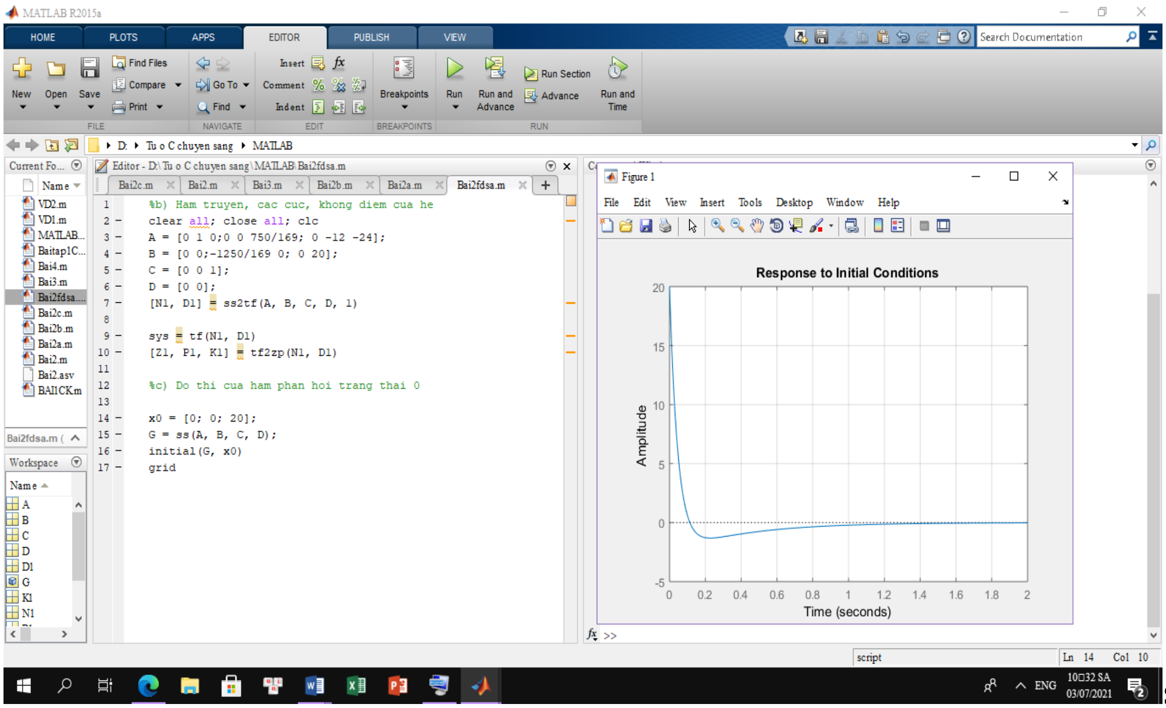
$$Z_1 = 0, P_1 = [0 - 21{,}526 - 2{,}474], K_1 = 88{,}7574$$





c) *Sử dụng hàm đầu vào u là hàm xung và hàm bước nhảy hãy vẽ đồ thị của hàm phản hồi trạng thái o (với 2 hàm đầu vào trên) trong khoảng thời gian [0, 20].*

Code



s

d) *Ước lượng gần đúng cực đại, cực tiểu của đầu ra trong khoảng thời gian [0,20], với u là hàm bước nhảy. Tìm thời điểm t mà ở đó đầu ra đạt giá trị cực đại.*

- Thời điểm t mà đầu ra đạt giá trị cực đại là t = 2

Code