

Bài Thi Cuối Kỳ - Thực Hành Tính Toán (MAT3525)

Đề 1 - Thời gian 60 phút.

Câu 1. (1+2 điểm) a) Phát biểu định nghĩa về bài toán cương. Bài toán giải phương trình vi phân

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} x(t), \quad \forall t \in [0, 10], \quad (1)$$

có cương hay không? Vì sao?

b) Sử dụng phương pháp Euler ẩn để giải bài toán giá trị ban đầu sau.

$$(1+t)y'(t) = ty(t) + e^t, \quad y(0) = 1, \quad \forall 0 \leq t \leq 1, \quad (2)$$

với bước $h = 0.5$. Tính toán chính xác đến 2 chữ số thập phân.

Câu 2. (2 + 1 điểm) Con lắc vật lý OA có khối lượng m và khối tâm tại C , $OC = \ell$, chịu một lực tác động $u(t)$, mô-men quán tính với trục quay O là J_0 , có phương trình mô tả chuyển động là 1 phương trình vi phân bậc 2 dạng

$$J_0 \varphi''(t) = u(t) - m g \ell \varphi(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (3)$$

trong đó $g = 9.8m/s^2$ là gia tốc trọng trường.

a) Hãy chuyển hệ bậc 2 nói trên với điều kiện ban đầu $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\varphi'(t_0) = \varphi_1$ về dạng bài toán giá trị ban đầu cho hệ phương trình vi phân bậc nhất.

b) Sử dụng phương pháp Heun để tính xấp xỉ $\varphi(0.1)$ của hệ bậc nhất thu được trong câu a) biết $J_0 = 1$, $u = 2 \sin(5t)$, $m = 3$, $\ell = 4$, $t_0 = 0$, bước $h = 0.1$, $\varphi_0 = \varphi_1 = 1$.

Trong phần tự chọn dưới đây sinh viên chọn làm 1 trong 2 câu

Câu 3. (2 + 2 điểm)

Cho 2 ma trận: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Hãy tìm biểu diễn của ma trận \mathbf{A} trong cơ sở $\{\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \mathbf{A}^3\mathbf{b}\}$.

b) Tính $e^{\mathbf{A}t}$.

Câu 4. (2 + 2 điểm)

a) Vẽ sơ đồ Simulink để mô phỏng hệ thống điều khiển: $3x''(t) + 39x'(t) + 120x(t) = u(t)$.

b) Cho hệ thống điều khiển tuyến tính

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \quad (4)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 3u(t). \quad (5)$$

Hỏi hệ thống trên có ổn định không, điều khiển được không, quan sát được không, biết rằng

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.4 & 2.2 \end{bmatrix} = 2, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 1.25 & 2 \end{bmatrix} = 2.$$

Hết