

Tìm hiểu toolbox linalg trong Python <https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.15.1/reference/routines.linalg.html>.

Câu 1 a) Với tham số t , sử dụng toolbox linalg hãy đi tìm chuẩn 1, 2, ∞ của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 2t & 1+t^2 \end{bmatrix}$ với $t = 10, 100, 200, \dots, 1000$. Tìm số điều kiện của các ma trận A đó.
b) Tìm chuẩn và số điều kiện của A trong trường hợp tổng quát (t bất kỳ) bằng việc tính toán lý thuyết.

Câu 2 Ma trận Hermit được định nghĩa bởi $H_n = \left[\frac{1}{i+j+1} \right]_{i,j=0}^n$. Hãy đi tìm số điều kiện của H_5, H_{12} theo các chuẩn 1, 2, ∞ .

Câu 3 a) **Lý thuyết:** Sử dụng phương pháp khử Gauss trong lý thuyết để tìm phân tích LU và giải hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3, \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b) **Thực hành:** Viết hàm trong Python để tìm phân tích $A = LU$ và giải hệ phương trình $Ax = b$ ở trên. So sánh kết quả của các em với cách giải sử dụng toolbox linalg trong Python.

Câu 4 a) **Lý thuyết:** Sử dụng phương pháp khử Gauss kết hợp với Pivoting trong lý thuyết để tìm phân tích PLU và giải hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} 3x_1 + 17x_2 + 10x_3 &= 30, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4, \\ 6x_1 + 18x_2 - 12x_3 &= 12. \end{aligned}$$

b) **Thực hành:** Viết hàm trong Python để tìm phân tích PLU của ma trận A và giải hệ phương trình $Ax = b$ ở trên. So sánh kết quả của các em với cách giải sử dụng toolbox linalg trong Python.

Câu 5 a) Tìm hiểu các ma trận Pascal, Leslie và Van der Monde trong module scipy.linalg, ứng với các ma trận cỡ 3×3 hoặc 4×4 .

b) Trong các ma trận cùng cỡ 3×3 hoặc 4×4 ở trên, ma trận nào có số điều kiện lớn nhất (vì sao)? Chú ý kết quả phụ thuộc vào cách chọn ma trận của các em (ngẫu nhiên).

c) Tìm các phân tích LU và PLU của chúng bằng tính toán lý thuyết.

Câu 6 Tìm các phân tích PLU của các ma trận A dưới đây và giải hệ phương trình vi phân tương ứng, với b là random vector, làm tròn 4 chữ số thập phân khi tính toán bằng tay.

$$\begin{aligned} i) A &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} & ii) A &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 10 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \\ iii) A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} & iv) A &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Câu 7 Trong trường hợp ma trận A là đối xứng, xác định dương thì phương pháp Cholesky thường được sử dụng. Hãy đọc phương pháp này trang 116-120 (Giáo trình DHBK) hoặc Section 2.4 (Giáo trình Kiusalass) và tìm hiểu hàm `numpy.linalg.cholesky` trong Python. Áp dụng để giải hệ phương trình sau đối với vế phải b lần lượt bằng $[2 \ 3 \ 0]^T$ và $[2 \ 5 \ -2]^T$.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= b_1, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= b_2, \\ 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Câu 8 Cho hệ phương trình sau, trong đó Δb là các sai số tuyệt đối do quá trình đo đạc, còn Δx là sai số tuyệt đối của nghiệm.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 1 \end{bmatrix} (x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

- a) Tính số điều kiện của ma trận A theo chuẩn ∞ .
 b) Xét theo chuẩn nói trên, nếu sai số tương đối cho phép của nghiệm x là 1%, thì sai số tương đối tối đa của vế phải là bao nhiêu %?

Câu 9 Bạn Hải Anh sau khi học lớp thầy Phi đưa ra kết luận “Nếu số điều kiện của 1 ma trận vuông A là xấu (tức là rất lớn), thì định thức của ma trận A phải rất gần 0 (tức là có giá trị tuyệt đối rất nhỏ).” Hãy khẳng định hoặc phủ định khẳng định trên của Hải Anh, xét trong 3 trường hợp chuẩn 1, ∞ và 2.

Hint: For the 2-norm, one can use SVD, noticing that the 2-norm is preserved under orthogonal transformations.

————— Kết thúc phần 2 —————