Lecture 2 new: Phân tích hệ điều khiển

Friday, February 25, 2022 7:00 AM

§2.1. Tính điều khiển được

**Bài toán:** (1) $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u), \\ y = g(t,x,u). \end{cases}$ $x^0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}_{ad}$, (ad: admissible)

**Tính điều khiển được:** (nôm na: nếu máy bay chắc chắn bay qua vị trí $x^1$ thì $\exists t_1 > t_0, \exists u \in \mathcal{U}_{ad}$ s.c. $x(t_1; t_0, x^0, u) = x^1$).

Ta thấy tính điều khiển được k liên quan đến pt đầu ra $\longrightarrow$ bỏ qua pt đầu ra để gọn ký hiệu.

**Đ/n 1:** a) Cho $x^1 \in \mathbb{R}^n$. Hệ (1) được gọi là điều khiển được tới trạng thái $x^1$ trong t/gian $t_1 > t_0$ nếu $\exists u \in \mathcal{U}_{ad}$ s.c. $x(t_1; t_0, x^0, u) = x^1$.
Khi đó ta nói cặp $(t_1, x^1)$ là điều khiển được từ $(t_0, x^0)$.

b) Trạng thái $x^1$ được gọi là điều khiển được từ $x^0$ nếu $\exists t_1 > t_0$ s.c. $(t_1, x^1)$ là điều khiển được từ $(t_0, x^0)$.

c) Hệ (1) được gọi là điều khiển được về 0 (null-controllable) nếu $x^1 = 0$ là điều khiển được từ $x^0$ bất kỳ $\in \mathbb{R}^n$.

d) Hệ (1) được gọi là điều khiển được $\frac{\text{toàn phần}}{\text{toàn bộ}}$ / tuyệt đối / $\mathbb{R}^n$-điều khiển được (completely controllable) iff $x^1$ bất kỳ $\in \mathbb{R}^n$ là điều khiển được từ $x^0$ bất kỳ $\in \mathbb{R}^n$.

**Tính chất 1.** a) Xét hệ điều khiển LTV. Khi đó t/c điều khiển được toàn phần (C-contty) $\Leftrightarrow$ t/c điều khiển được về 0 (null-contty).

b) Điều này 0 còn đúng với hệ phi tuyến.

C/m: BTVN.

**Đ/n 2:** a) Cho trước $x^1 \in \mathbb{R}^n$. Tập điều khiển được (conty-set) ứng với $x^1$ k/h là $C(x^1, t_0) := \bigcup\limits_{t_1 > t_0} C(x^1, t_0, t_1)$,
trong đó $C(x^1, t_0, t_1) := \{x^0 \in \mathbb{R}^n \mid (t_1, x^1) \text{ là điều khiển được từ } (t_0, x^0)\}$.
Như vậy, tập điều khiển được t.ứ với $x^1$ chính là tập tất cả các $x^0$ mà hệ là điều khiển được từ $x^0$ đến $x^1$.

b) Tập đạt được (reachability set) $\mathcal{R}(x^0, t_0) := \{x^1 \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_1 > t_0 \text{ để } (t_1, x^1) \text{ là điều khiển được từ } (t_0, x^0)\}$.

Ta có $x^0 \xrightarrow{u} x^1 \in \mathcal{R}(x^0, t_0)$. forward in time

$x^1 \xleftarrow{u} x^0 \in C(x^1, t_0)$. backward in time

**VD1.** Xét 2 hệ
$$\dot{x}(t) = x(t) + 0 \cdot u(t), \quad t \in [0, \infty) \quad (2)$$
$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{x}(t) + 1 \cdot u(t), \quad t \in [0, \infty) \quad (3)$$
$\rightarrow$ Điều khiển được 0?

(+) Ta thấy (2) có CT n°:
$$x(t) = e^t x(0).$$
Ta thấy với $x^1 = 0$ & $x^0 \neq 0$. $\Rightarrow \nexists t_1 > 0$ & $u$ s.c. $0 = e^{t_1} \cdot x^0$
$\Rightarrow$ Hệ (2) k thể là null-conty. / C-conty.

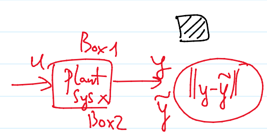
(++) Xét hệ (3) ta có CT n°: $\tilde{x}(t) = e^t \tilde{x}(0) + \int_0^t e^{(t-s)} u(s)\, ds$. (4)

Ta c/m hệ (3) là C-conty = Đ/N. Với $\tilde{x}^1 \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ, $\tilde{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ ta c/m $\exists u$ t/m (4)

Với $t_1 > 0$ bất kỳ, ta có
$$\tilde{x}(t_1) - e^{t_1} \tilde{x}(0) = e^{t_1} \cdot \int_0^{t_1} e^{-s} \underline{u(s)}\, ds \qquad (5).$$

Ta chọn $u(s) = e^s \cdot \bar{u}$, với $\bar{u} \in \mathbb{R}$ được chọn sau. Khi đó (5) trở thành.
$$(5) \Leftrightarrow \frac{e^{-t_1} \tilde{x}(t_1) - \tilde{x}(0)}{t_1} = \bar{u} \longrightarrow \bar{u} \text{ cần tìm.}$$

**Q1:** Xét hệ LTI. $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases}$ $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$.




**Thực tế:** i) $m \ll n$, $p \ll n$ $\rightarrow$ giải số $\dot{x} = Ax + Bu$ rất tốn time, CPU.

Bản kẽ. $\longrightarrow$ MODEL REDUCTION.

(1 ẢNH 5MB $\longrightarrow$ ẢNH 512KB $\rightarrow$ giảm nhưng giữ nguyên chất lg).

ii) Tìm vị trí ... tối ưu ... để ...

(1 ẢNH 5MB → ẢNH 512KB → gần như giữ nguyên chất lg).

ii) Tìm $n^o$ đk đại số tuyến tính để kiểm tra tính đ/khiển đc của hệ hay 0 ?
$A, B, C, D$.

(tốt hơn nhiều so với việc giải $x(t)$).

Bình luận: 4 phép toán $+, -, *, \div \Rightarrow 1$ flop ($\sim 1$ sec.). K/tra $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ khả nghịch o?

i) $\det(A) \xrightarrow{\text{Laplace}}$ ? flops. $\longrightarrow O(n!)$ $n = 10^3 \to$ năm.
ii) $A \xrightarrow{\text{LU dec.}} LU$ (L: ◺, U: ◹) cost $\frac{2}{3}n^3$ flops.

$\exists i$ để $U_{ii} == 0$ ?

$\to n \le 10^5$ đơn giản & rất nhanh.

6 decompositions $LU$, $LDL^T$, Schur, QZ, SVD, Jordan, QR

MIT Open Course Ware / Coursera.

---

## §2.2. Tính đ/khiển đc của các hệ LTV/LTI.

Trước tiên ta xét (1) $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \\ y = C(t)x + D(t)u, \quad t \in [t_0, t_f] \end{cases}$

Ta g/sử pt $\dot{x}(t) = A(t)x$ có họ tiến hoá $\{\Phi(t,s)\}_{t \ge s \ge t_0}$, tức là

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,s) = A(t)\Phi(t,s), \ \forall t \ge s \ge t_0 \\ \Phi(t,t) = I_n, \quad \forall t \ge t_0. \end{cases}$$

$\{\Phi(t,s)\}_{t\ge s\ge t_0} \xrightarrow{t_0} \{\hat{\Phi}(t,s)\}_{t\le s\le t_0}$

Khi đó ta có CT biến thiên hằng số cho $n^o$ của pt $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t,t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)u(s)ds, \ \forall t \ge s \ge t_0. \quad (2)}$$

→ Ta đi tìm $C(x^1 \equiv 0; t_0)$

Hệ quả 1: Hệ (1) là null-ctrl'ty $\Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{U}_{ad}$ s.c.

$$\boxed{x^0 = -\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,s)B(s)u(s)ds. \quad (3)}$$

(vì theo t/c họ tiến hoá $\Phi(t,t_0)^{-1} = \Phi(t_0,t)$ & $\Phi(t,s)\Phi(s,r) = \Phi(t,r)$)

Khi đó ta có tập đ/khiển đc là về 0

$$C(x^1 \equiv 0, t_0) = \{x^0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ s.c. } x^0 = -\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\Phi(t_0,s)B(s)}_{G(s)}u(s)ds, \ \exists t_1 > t_0\}$$

Ở trên, đã có là với hệ LTV thì C-ctrl'ty $\Leftrightarrow$ 0-ctrl'ty.

**Đn 2.** (Gramian) Cho 1 hàm số $G \in PC([t_0,\infty), \mathbb{R}^{n,m})$ (lớp các hàm liên tục từng khúc). Khi đó ma trận

$P(t_0,t_1) := \int_{t_0}^{t_1} G(s)G^T(s)ds$ đc là $(t_0,t_1)$-Gramian của G.

Jørgen P. Gram (1850 – 1916) Denmark G–S & G-matx. R. Kalman 1950s.

**T/chất 2.** i) $P(t_0,t_1)$ là đx lứng, x/đ 0 âm.

ii) $\ker(P(t_0,t_1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid G^T(s)x = 0 \ \forall s \in [t_0,t_1]\}$.

iii) $x \in \mathrm{im}(P(t_0,t_1)) \Leftrightarrow \exists u$ s.c $x = \int_{t_0}^{t_1} G(t)u(t)\,dt$.

Cm: i) Hiển nhiên

ii) $x^T P(t_0,t_1)x = \int_{t_0}^{t_1} x^T G(s)\,G^T(s)x\,ds = \int_{t_0}^{t_1} \|G^T(s)x\|^2 ds$

$\Rightarrow x \in \ker(P(t_0,t_1)) \Leftrightarrow \|G^T(s)x\| = 0 \quad \forall s \in [t_0,t_1],$
$\Leftrightarrow G^T(s)x = 0 \quad \forall s \in [t_0,t_1].$

iii) Đặt $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \text{ s.c. } x = \int_{t_0}^{t_1} G(t)u(t)dt\}$. Ta cm $\mathrm{im}(P(t_0,t_1)) = \mathcal{L}$.

iii) Đặt $\mathcal{L} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists u$ s.c. $x = \int_{t_0}^{t_1} G(t)\, u(t)\, dt \}$. Ta c/m $\mathrm{im}(P(t_0,t_1)) = \mathcal{L}$.

[$\Rightarrow$] Nếu $x \in \mathrm{im}(P(t_0,t_1)) = \mathrm{im}\left( \int_{t_0}^{t_1} G(t)\, G^T(t)\, dt \right) \Rightarrow \exists u_0$ để $x = \int_{t_0}^{t_1} G(t) G^T(t) u_0\, dt$

Chọn $u := G^T(t) u_0$ thì có ngay $x \in \mathcal{L}$. Do đó $\mathrm{im}\, P(t_0,t) \subseteq \mathcal{L}$.

[$\Leftarrow$] Vì $\mathrm{im}\, P(t_0,t_1) \subseteq \mathcal{L} \Rightarrow \dim(\mathcal{L}) \geq \dim(\mathrm{im}\, P(t_0,t_1)) = n - \dim(\ker P(t_0,t_1))$ (4).

Ta c/m $\mathcal{L} \cap \ker P(t_0,t_1) = \{\vec{0}\}$ = phản chứng.

G/s $\exists x \neq \vec{0}$, $x \in \mathcal{L} \cap \ker P(t_0,t_1)$. Khi đó $\exists u \in \mathcal{U}_{ad}$ s.c.

$$x = \int_{t_0}^{t_1} G(t) u(t)\, dt. \qquad (5)$$

Vì $x \in \ker P(t_0,t_1) \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} G^T(t)\, x = 0 \quad \forall t \in [t_0,t_1]$ (6)

Do đó, từ (5) ta có $x^T x = \int_{t_0}^{t_1} x^T G(t)\, u(t)\, dt \overset{(6)}{=\!=} \int_{t_0}^{t} 0 \,.\, u(t) dt = 0$.

(mâu thuẫn vì $x \neq \vec{0}$)

Vì vậy $\mathcal{L} \cap \ker P(t_0,t_1) = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(\mathcal{L}) \leq n - \dim(\ker P(t_0,t_1))$ (7)

Từ (4) & (7) $\Rightarrow$ dấu = xảy ra, tức là $\mathrm{im}\, P(t_0,t_1) = \mathcal{L}$. ▨

---

## §2.2: Cont'y LTV & LTI (cont').

Ta có $x^0 \in C(x^1 \equiv 0, t_0) \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{U}_{ad}$ s.c. $x^0 = -\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\Phi(t_0,s) B(s)}_{G(s)} u(s) ds$

$$\overset{\text{T/c trên}}{\Leftrightarrow} \quad x^0 \in \mathrm{im}\left( P(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} G(s)\, G^T(s)\, ds \right)$$

(ma trận) Gramian điều khiển / Controllability Gramian.

$$(1) \qquad W_c(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,s) B(s) B^T(s) \Phi(t_0,s)^T ds$$

TH hệ LTI $\rightarrow$ ma trận.

Đlý 2.8: (Null-Cont'y) a) Xét hệ LTV. Khi đó ta có tập đkhđ về 0 t/m

$$C(0; t_0, t_1) = \mathrm{im}(W_c(t_0,t_1)).$$

Ngoài ra, $W_c(t_0,t_1)\, x = 0 \Leftrightarrow x^T \Phi(t_0,t) B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0,t_1]$.

b) Hệ LTV là đkhđ được về 0 $\Leftrightarrow$ hệ t/m 1 trong 2 đk tương đương sau

i) $\exists t_1 > t_0$ s.c Gramian đkhđ $W_c(t_0,t_1)$ là x/đ dương.

ii) Đối với n° $z(t)$ của PT liên hợp $\dot{z}(t) = -A^T(t)\, z(t)$ ta có t/c

$$\boxed{z^T(t) B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0,\infty) \quad \Rightarrow \quad z(t) \equiv 0}$$

C/m: a) Hiển nhiên // b/i) Hiển nhiên.

b/ii) [$\Rightarrow$] Giả sử hệ LTV là đkhđ được về 0. $\Leftrightarrow$ đkhđ được hoàn phần. Xét n° $z(t)$ của pt liên hợp mà t/m $z^T(t) B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0,\infty)$.

Phản chứng g/sử $z(t) \not\equiv 0$.

$\Rightarrow \exists \hat{t} > t_0$ s.c. $z(\hat{t}) \neq 0 \Rightarrow z(t_0) \neq 0$. (1)

Từ pt liên hợp $\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -A^T(t)\, z(t) \\ \dot{x}(t) &= A(t)\, x(t) \end{aligned}\right| \Rightarrow$ ta có họ tiến hoá $\left.\begin{aligned} &\{\Phi_z(t,s)\} \\ &\{\Phi_x(t,s)\} \end{aligned}\right|$ t/m

$$\Phi_z(t,s) = \Phi_x(s,t)^T$$

$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ | $\{\Phi_X(t,s)\}$ |

$$\Phi_Z(t,s) = \Phi_X(s,t)^T$$

Do đó ta có CT n° của pt liên hợp là $z(t) = \Phi_Z(t,t_0)\, z(t_0) = \Phi_X(t_0,t)^T z(t_0)$.

Vì vậy $0 = z^T(t)B(t) = z(t_0)^T \Phi_X(t_0,t)B(t) \quad \forall t \in [t_0,+\infty)$ ②

Do đó, $z(t_0)^T W_c(t_0,t_1)\, z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \| z(t_0)^T \Phi_X(t_0,t)B(t)\|_2^2\, dt \overset{②}{=} 0 \quad \forall t_1 > t_0$. ③

Ta thấy ① & ③ mâu thuẫn vì $z(t_0) \neq 0$ và $W_c(t_0,t_1)$ là x/đ dương với $t_1$ đủ lớn.

Vì vậy g/sử sai $\Rightarrow z(t) \equiv 0 \ \forall t \geq t_0$.

[⇐] G/s có b/ii) ta cần c/m Gramian đkđ $W_c(t_0,t_1)$ là x/đ dương với $t_1 > t_0$ nào đó.
Phản chứng, g/s $W_c(t_0,t)$ là suy biến $\forall t > t_0$.

- Cố định $t_1 > t_0 \Rightarrow \exists z_0 \in \ker W_c(t_0,t_1)$, $\|z_0\| = 1$.
- Ta có t/c $z_0 \in \ker W_c(t_0,t_1) \Leftrightarrow z_0^T \Phi_X(t_0,t)B(t) = 0 \ \forall t \in [t_0,t_1]$.
- Theo t/c của pt liên hợp ở trên, ta có $z^T(t)B(t) = 0 \ \forall t \in [t_0,t_1]$.

Ta đi chọn 1 dãy $\{t_k\}$ s.c $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ & dãy $\{z_0^{(k)}\}$ t/mãn $\|z_0^{(k)}\|_2 = 1 \ \forall k$

và n° của (IVP) $\begin{cases} \dot{z}(t) = -A^T(t)z(t), \\ z(t_0) = z_0^{(k)} \end{cases}$

t/mãn $z^T(t)B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_k]$.

Theo t/c của tập compact $\partial B(0,1)$ ta trích được 1 dãy con hội tụ $\{z^{(k_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.c.

$$\lim_{n\to+\infty} z^{(k_n)} = z_0^* \in \partial B(0,1), \text{ tức là } \|z_0^*\| = 1.$$

Ta có theo t/c đặt chỉnh của IVP (phụ thuộc liên tục vào đk ban đầu), ta có n°

$z(t;t_0,z_0^*)$ của (IVP) $\begin{cases} \dot{z}(t) = -A^T(t)z(t), \\ z(t_0) = z_0^* \end{cases}$ t/mãn

$z(t;t_0,z_0^*)^T B(t) = 0 \ \forall t \in [t_0, t_{k_n}]$, $\lim_{n\to\infty} t_{k_n} = +\infty$

$\Rightarrow z(t;t_0,z_0^*)^T B(t) = 0 \ \forall t \in [t_0,+\infty)$.

$\overset{b/ii)}{\Longrightarrow} z(t) \equiv 0$ trên $[t_0,+\infty)$ >< vì $\|z_0^*\| = 1$.

## Kiểm tra T/c điều khiển được toàn phần mà 0 cần giải (IVP)/ODE

G/s $A(t), B(t)$ là đủ trơn/ trơn đến cấp $n-1$.
Ta xây dựng họ ma trận $M(t)$

(4) $\begin{cases} M_0(t) = B(t) \\ M_{m+1}(t) = -A(t)M_m(t) + \frac{d}{dt}M_m(t) \end{cases}$

(Nếu T/H LTI $\to M_m = -A^m B \ \forall m$)

Ta có t/c. $\boxed{\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\Phi(t_2,t)B(t)\right) = \Phi(t_2,t)M_m(t) \quad \forall t_2 > t_0}$ (5)

C/m:
Xét $\{X(t)\}$ là họ ma trận n° cơ bản của pt $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$,
$X(t) = \Phi(t,t_0) \quad \forall t \geq t_0$.

Xét $\{X(t)\}$ là họ ma trận n° cơ bản của pt $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $\forall t \geq t_0$.
$X(t) = \Phi(t, t_0)$

Khi đó $\frac{d}{dt}\left(X(t)X^{-1}(t)\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t)$

$$= -X^{-1}(t)A(t) \qquad (6)$$

Với $m=0$ ta có $\frac{\partial^0}{\partial t^0}\left(\Phi(t_2,t)B(t)\right) = \Phi(t_2,t)M_0(t) \to$ hiển nhiên đúng.

G/s đã c/m (5) với $m-1$. Khi đó ta có

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\Phi(t_2,t)B(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\left(\Phi(t_2,t)B(t)\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(t_2,t)M_{m-1}(t)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_2,t)M_{m-1}(t) + \Phi(t_2,t).\dot{M}_{m-1}(t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(X(t_2).X^{-1}(t)\right)M_{m-1}(t) + \Phi(t_2,t).\dot{M}_{m-1}(t)$$

$$= -\Phi(t_2,t)A(t)M_{m-1}(t) + \Phi(t_2,t)\dot{M}_{m-1}(t)$$

$$= \Phi(t_2,t).\left(-A(t)M_{m-1}(t) + \dot{M}_{m-1}(t)\right) = \Phi(t_2,t).M_m(t) \Rightarrow \text{đpcm} \quad \blacksquare$$

**Đlý 1:** Xét hệ LTV với $A, B$ là trơn cấp $n-1$. Ta xây dựng họ $\{M_m(t)\}$ như trong (5).
Khi đó, hệ LTV là C-cntý $\Leftrightarrow \exists$ hàm ma trận điều khiển Kalman

$$K(t) := [M_0(t) \ M_1(t) \ \ldots \ M_{n-1}(t)]$$ là đủ hạng dòng, với $t_1 > t_0$ nào đó.

C/m: Ta c/m Gramian đ.khiển $W_c(t_0, t_1)$ là x/đ dương.
Hint: với $G(t) := \Phi(t_0,t)B(t) \Rightarrow \frac{d^m}{dt}G(t) = \Phi(t_0,t)M_m(t)$.
} BTVN.

VD1. Hãy xét tính đ.khiển được của 2 hệ đ.khiển sau

a) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$

b) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{bmatrix}u$