Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN
K65TN (Seminar 1)

Bài Tập Lý Thuyết Điều Khiển Hệ Thống
Ngày 28 tháng 3 năm 2023

Bài Tập Lý Thuyết Điều Khiển Hệ Thống - No. 4
Observability of linear systems

Câu 1. *Chuyển hệ điều khiển LTI cấp n sau về hệ điều khiển cấp 1 với biến điều khiển u, biến trạng thái x và xét tính quan sát được của hệ cấp 1 thu được.*

$$x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1\dot{x} + \alpha_0 x = u^{(n)} + \beta_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + \beta_1\dot{u} + \beta_0 u \ . \tag{1}$$

Câu 2. *Các hệ thống sau có quan sát được hay không? Vì sao?*
a) ***Dạng chính tắc điều khiển được (controllability canonical form)***

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & \dots & -\alpha_r \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{2}$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \dots & \beta_r \end{bmatrix} x + Du, \tag{3}$$

trong đó α_i, β_i, D là các hệ số (thực hoặc phức).
b) ***Dạng chính tắc quan sát được (observability canonical form)***

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\alpha_{r-1} & & & & 1 \\ -\alpha_r & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{r-1} \\ \beta_r \end{bmatrix} u, \tag{4}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + Du, \tag{5}$$

trong đó α_i, β_i, D là các hệ số (thực hoặc phức).

Câu 3. *Hệ thống LTV*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{6}$$

được gọi là:
i) ***quan sát được tại*** 0 *nếu tồn tại một thời điểm $t_1 > 0$ sao cho trạng thái ban đầu x_0 được xác định duy nhất dựa trên thông tin $u|_{[0,t_1]}$ và $u|_{[0,t_1]}$.*
ii) ***quan sát được hoàn toàn tại*** 0 *nếu với mọi thời điểm $t_1 > 0$ thì trạng thái ban đầu x_0*

được xác định duy nhất dựa trên thông tin $u|_{[0,t_1]}$ *và* $u|_{[0,t_1]}$.
Hãy xét tính quan sát được tại 0 *và quan sát được hoàn toàn tại* 0 *của hệ sau*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + Bu,$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 - |t-1| \end{bmatrix} x + Du,$$

trong đó B, D *là hai ma trận bất kỳ.*

Câu 4. *Chứng minh hoặc đưa ra phản ví dụ cho các khẳng định sau.*
i) Hệ LTV (6) *nếu quan sát được tại* 0 *thì nó cũng là quan sát được tại mọi* $t > 0$.
ii) Nếu hệ LTV (6) *có* C *là ma trận hằng thì đối với nó 2 tính chất quan sát được tại* 0 *và quan sát được hoàn toàn tại* 0 *là tương đương. Tuy nhiên điều đó không đúng với hệ LTV.*

PHẦN BỔ SUNG

Câu 5. ***Tính tái tạo được & quan sát được của hệ LTV***

Hệ LTV khuyết điều kiện ban đầu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{7}$$

được gọi là:
i) ***tái tạo được (reconstructible)*** *nếu như xét theo chiều thời gian lùi* ($t \leq 0$) *thì với cùng đầu vào* $u(t)$ *và cùng đầu ra* $y(t)$ *thì sẽ dẫn đến cùng trạng thái* $x(t)$, *tức là nếu* $x(t)$ *và* $\tilde{x}(t)$ *là 2 nghiệm của hệ* (7) *và* $y(t) = \tilde{y}(t)$ *với mọi* $t \leq 0$ *thì* $x(t) = \tilde{x}(t)$ *với mọi* $t \leq 0$.
ii) ***quan sát được (observable)*** *nếu thay vì chiều thời gian lùi* $t \leq 0$ *ta xét chiều thời gian tiến* $t \geq 0$.
Ở đây ta cũng có thể nói là từ đầu vào và đầu ra ta có thể xác định duy nhất trạng thái. Tuy nhiên tính tái tạo được sử dụng thông tin quá khứ $t \leq 0$, còn tính quan sát được sử dụng thông tin tương lai $t \geq 0$.

Định lý đối ngẫu: *Hãy chứng minh rằng với hệ LTV là tái tạo được khi và chỉ khi hệ đối ngẫu*

$$\dot{x} = A(-t)^T x(t) + C(-t)^T u(t), \tag{8}$$

là điều khiển được.

Dựa vào Định lý đối ngẫu em hãy xây dựng đặc trưng cho tính tái tạo được thông qua điều kiện Gramian tái tạo.