*Chương 2*

# PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

## 2.1 ĐẶT BÀI TOÁN

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Nghiệm của phương trình (2.1) là giá trị $\overline{x}$ sao cho $f(\overline{x}) = 0$. Trong giáo trình này ta chỉ xét những nghiệm đơn cô lập. Về mặt hình học, nghiệm của phương trình (2.1) là hoành độ giao điểm của đường cong $y = f(x)$ với trục hoành. Khoảng đóng $[a, b]$ (đôi khi ta cũng xét khoảng mở $(a, b)$) mà trên đó tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình (2.1) được gọi là **khoảng cách li nghiệm**. Vì ta chỉ xét nghiệm đơn của phương trình (2.1), nên nếu hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng cách li nghiệm $[a, b]$ thì $f(a) \cdot f(b) < 0$. Thông thường, để tìm nghiệm của phương trình (2.1) chúng ta tiến hành theo hai bước sau:

*Bước 1:* Tìm tất cả các khoảng cách li nghiệm của phương trình (2.1).

*Bước 2:* Trong từng khoảng cách li nghiệm, tìm nghiệm gần đúng của phương trình bằng một phương pháp nào đó với sai số cho trước.

**Định lí 2.1.** *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và giá trị của hàm trái dấu tại hai đầu mút thì phương trình (2.1) có nghiệm trên $[a, b]$. Thêm vào đó, nếu hàm $f(x)$ đơn điệu thì nghiệm là duy nhất.*

Ý nghĩa hình học của định lí là: một đường cong liên tục nối hai điểm ở hai phía của trục hoành sẽ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm. Nếu đường cong là đơn điệu (tăng hoặc giảm) thì điểm cắt là duy nhất.

Chúng ta có thể tìm các khoảng cách li nghiệm của một phương trình bằng nhiều cách và định lí 2.1 là một công cụ hữu ích cho mục đích này.

**Ví dụ 2.1.** Tìm các khoảng cách li nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0.$$

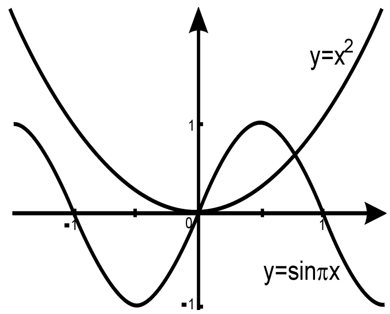
Chúng ta tính giá trị của hàm tại một số điểm đặc biệt và lập bảng giá trị sau:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $3$ | $1$ | $-1$ | $3$ |

Từ bảng trên ta thấy phương trình có nghiệm nằm trong các khoảng không giao nhau (-2, -1), (0, 1), (1, 2). Vì phương trình bậc ba có tối đa ba nghiệm, nên mỗi đoạn trên chứa duy nhất một nghiệm. Vậy chúng là các khoảng cách li nghiệm của phương trình đã cho.

**Ví dụ 2.2.** Xét phương trình $f(x) = x^5 + x - 12 = 0$. Ta có $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ với mọi $x$. Cho nên $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng. Ta cũng có $f(1) < 0$ và $f(2) > 0$, nên phương trình chỉ có duy nhất nghiệm nằm trong $[1, 2]$.

**Ví dụ 2.3.** Xét phương trình $f(x) = x^2 - \sin \pi x = 0$. Chuyển phương trình về dạng tương đương $x^2 = \sin \pi x$. Ta vẽ đồ thị của hai hàm $y = x^2$ và $y = \sin \pi x$ theo hình vẽ dưới đây. Từ hình vẽ, ta nhận thấy phương trình có một nghiệm $x = 0$ và một nghiệm nữa nằm trong đoạn $[1/2, 1]$.




***Hình 2.1:*** *Nghiệm của phương trình* $x^2 - \sin \pi x = 0$

Công thức đánh giá sai số tổng quát của nghiệm gần đúng của phương trình (2.1) được thể hiện qua định lí sau.

**Định lí 2.2.** *Giả sử hàm* $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$*, khả vi trong* $(a, b)$*. Nếu* $x^*$ *là nghiệm gần đúng của nghiệm chính xác* $\overline{x}$ *trong* $[a, b]$ *và* $\forall x \in [a, b]$, $|f'(x)| \geqslant m > 0$*. Thế thì ta có công thức đánh giá sai số tổng quát sau đây*

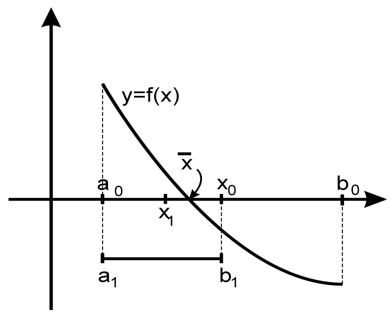
$$|x^* - \overline{x}| \leqslant \frac{|f(x^*)|}{m} \tag{2.2}$$

**Ví dụ 2.4.** Xét phương trình $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12 = 0$ trong $[-2, -1]$ có nghiệm gần đúng $x^* = -1.37$. Khi đó $|f'(x)| = \left|3x^2 - 10x\right| \geqslant 13 = m > 0,\ \forall x \in [-2, -1]$. Do đó: $|\overline{x} - x^*| \leqslant \dfrac{|f(-1.37)|}{13} \approx 0.0034.$

## 2.2 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

Xét phương trình (2.1) có nghiệm chính xác $\overline{x}$ trong khoảng cách li nghiệm $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Đặt $a_0 = a, b_0 = b, d_0 = b_0 - a_0 = b - a$ và $x_0$ là điểm giữa của đoạn $[a_0, b_0]$. Tính giá trị $f(x_0)$. Nếu $f(x_0) = 0$ thì $x_0$ chính là nghiệm và quá trình dừng lại. Ngược lại ta xét dấu của $f(x_0)$. Nếu $f(x_0)f(a_0) < 0$, đặt $a_1 = a_0, b_1 = x_0$. Nếu $f(x_0)f(b_0) < 0$, đặt $a_1 = x_0, b_1 = b_0$. Như vậy ta thu được $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ và độ dài $d_1 = b_1 - a_1 = \dfrac{d_0}{2} = \dfrac{b-a}{2}$. Tiếp tục quá trình chia đôi như vậy đến n lần, ta được các kết quả sau:

$$\begin{cases} a_n \leqslant \overline{x} \leqslant b_n, \quad a_n \leqslant x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leqslant b_n, \\ f(a_n)f(b_n) < 0, \quad d_n = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \end{cases} \forall n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$




***Hình 2.2:*** *Phương pháp chia đôi*

Như vậy ta được $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy tăng và bị chặn trên, còn $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy giảm và bị chặn dưới. Do đó chúng cùng hội tụ. Từ (2.3) ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

Thông thường ta sử dụng công thức đánh giá sai số sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{b-a}{2^{n+1}} \tag{2.4}$$

**Ví dụ 2.5.** Cho phương trình $f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$ trong khoảng cách li nghiệm $[0, 1]$. Bằng phương pháp chia đôi, hãy tìm nghiệm gần đúng $x_5$ và đánh giá sai số của nó. Kết quả được cho trong bảng sau:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n(-)$ | 0 | 0 | 1/4 | 3/8 | 7/16 | 15/32 |
| $b_n(+)$ | 1 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 |
| $x_n$ | 1/2 | 1/4 | 3/8 | 7/16 | 15/32 | 31/64 |
| $\operatorname{sign} f(x_n)$ | + | − | − | − | − | |

Như vậy $x_5 = \dfrac{31}{64}$ và $\Delta_{x_5} = \dfrac{1-0}{2^6} = \dfrac{1}{64}$. Vậy $\overline{x} = \dfrac{31}{64} \pm \dfrac{1}{64}$.

**Ví dụ 2.6.** Xét phương trình $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ có nghiệm trong khoảng cách li nghiệm $[1, 2]$. Thuật toán của phương pháp chia đôi cho ta bảng sau

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $f(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0 | 2.0 | 1.5 | +2.375 |
| 1 | 1.0 | 1.5 | 1.25 | −1.79678 |
| 2 | 1.25 | 1.5 | 1.375 | +0.16211 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 8 | 1.36328125 | 1.3671875 | 1.365234375 | +0.000072 |
| 9 | 1.36328125 | 1.365234375 | 1.364257813 | −0.01605 |
| 10 | 1.364257813 | 1.365234375 | 1.364746094 | −0.00799 |
| 11 | 1.364746094 | 1.365234375 | 1.364990235 | −0.00396 |
| 12 | 1.364990235 | 1.365234375 | 1.365112305 | −0.00194 |

Sau lần lặp thứ $12$, theo công thức (2.4), giá trị $x_{12} = 1.365112305$ sẽ xấp xỉ nghiệm chính xác $\overline{x}$ với sai số $|\overline{x} - x_{12}| \leqslant (2-1)/2^{13} \approx 0.000123$. Từ bảng trên ta cũng nhận thấy $|f(x_{12})| = 0.00194$ trong khi $|f(x_8)| = 0.000072$. Để ý rằng nghiệm chính xác đến chín chữ số lẻ sau dấu phẩy thập phân là $\overline{x} = 1.365230013$. Khi đó nghiệm $x_8 = 1.365234375$ có năm chữ số lẻ đáng tin sau dấu phẩy thập phân và nó xấp xỉ $\overline{x}$ tốt hơn nghiệm $x_{12}$.

Phương pháp chia đôi là phương pháp đơn giản nhất để tìm nghiệm gần đúng của phương trình (2.1), tuy nhiên độ chính xác không cao. Thông thường phương pháp chia đôi được sử dụng nếu không thể sử dụng các phương pháp khác hoặc với mục đích thu hẹp khoảng cách li nghiệm.

Thuật toán của phương pháp chia đôi được thể hiện trong Chương trình 2.1. Đối số của chương trình gồm: **`f`** là biểu thức của hàm $f(x)$, **`a`** và **`b`** là hai điểm biên của khoảng cách li nghiệm $[a, b]$, **`eps`** là sai số cho trước (giá trị mặc định là $10^{-6}$) và **`N`** là số lần lặp tối đa cho phép (giá trị mặc định là $100$). Kết quả trả về của chương trình gồm **`x`** là vectơ nghiệm chứa dãy lặp $\{x_n\}$, **`fx`** là vectơ chứa giá trị của hàm $f(x_n)$ và **`n`** là số lần lặp thực tế.

**Chương trình 2.1.** - c2bisect : Phương pháp chia đôi.

```
function [x,fx,n] = c2bisect(f,a,b,eps,N)
if nargin < 5, N = 100; end;
if nargin < 4, eps = 1.0E-6; end;
if nargin < 3, error('Hàm phải có tối thiểu 3 đối số.');
end;
fa = feval(f,a);x=[];fx=[];n=0;err=eps+1;
while (n<N & err>eps)
ptbh n=n+1;c = a+(b-a)/2;fc = feval(f,c);
  x=[x;c];fx=[fx,fc];
  if fa*fc > 0, a = c;fa = fc;else, b = c;end;
  err = b-a;
end;
```

## 2.3 PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Đây là phương pháp phổ biến để giải phương trình (2.1) trong khoảng cách li nghiệm $[a, b]$. Trước tiên ta chuyển từ phương trình (2.1) về dạng tương đương trong $[a, b]$

$$x = g(x). \tag{2.5}$$

Khi đó nghiệm của phương trình (2.5) còn được gọi là điểm bất động của hàm $g(x)$. Chọn một giá trị ban đầu $x_0 \in [a, b]$ tùy ý. Xây dựng dãy lặp $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ theo công thức lặp

$$x_n = g(x_{n-1}) \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.6}$$

Bài toán của chúng ta là khảo sát sự hội tụ của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; dãy có hội tụ về nghiệm của phương trình (2.5) hay không; sự hội tụ và giới hạn của dãy phụ thuộc như thế nào vào giá trị lặp ban đầu $x_0$; và cuối cùng là công thức đánh giá sai số.

**Định nghĩa 2.1.** *Hàm $g(x)$ được gọi là hàm co trong đoạn $[a, b]$ nếu $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, tồn tại một số $q : 0 \leqslant q < 1$, gọi là hệ số co, sao cho*

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant q\,|x_1 - x_2|$$

**Ví dụ 2.7.** Xét hàm $g(x) = \sqrt{x}$ trong đoạn [1, 2]. Ta có $\forall x_1, x_2 \in [1, 2]$,

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\,|x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2|$$

Do đó hàm $g(x) = \sqrt{x}$ là hàm co trong đoạn $[1, 2]$ với hệ số co là $q = 0.5$.

Ta có các định lí sau đây.

**Định lí 2.3.** *Nếu $g(x)$ là hàm co trên $[a, b]$, thì nó liên tục trên đó.*

**Định lí 2.4.** *Nếu hàm $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trong $(a, b)$ và $\exists q : 0 \leqslant q < 1$ sao cho $\forall x \in (a, b)$, $|g'(x)| \leqslant q$, thì $g(x)$ là hàm co trên $[a, b]$ với hệ số co là $q$.*

**Ví dụ 2.8.** Xét hàm $g(x) = \sqrt[3]{10 - x}$ trên đoạn $[0, 1]$. Ta có $|g'(x)| = \left|\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(10 - x)^2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt[3]{9^2}} \approx 0.078 = q < 1$. Do đó nó là hàm co trên $[0, 1]$.

**Ví dụ 2.9.** Bây giờ xét hàm $g(x) = \dfrac{x^2 - \mathrm{e}^x + 2}{3}$ trên đoạn $[0, 1]$. Ta có $g'(x) = \dfrac{2x - \mathrm{e}^x}{3}$. Khảo sát hàm $g'(x)$ trên đoạn $[0, 1]$ cho ta

$$\max_{x \in [0,1]} g'(x) = \frac{2\ln 2 - 2}{3} \approx -0.2046 \quad \textit{và} \quad \min_{x \in [0,1]} g'(x) = -\frac{1}{3}$$

Từ đây ta được $\forall x \in [0, 1],\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3} = q < 1$. Do đó nó là hàm co trên $[0, 1]$.

Ta phát biểu và chứng minh một định lí quan trọng, thường được gọi là nguyên lí ánh xạ co. Định lí này là cơ sở của phương pháp lặp đơn.

**Định lí 2.5 (Nguyên lí ánh xạ co).** *Giả sử* $g(x)$ *là hàm co trên đoạn* $[a, b]$ *với hệ số co là* $q$. *Đồng thời,* $\forall x \in [a, b], g(x) \in [a, b]$. *Khi đó với mọi giá trị* $x_0$ *ban đầu trong* $[a, b]$, *dãy lặp* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *xác định theo công thức (2.6) sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất* $\overline{x}$ *của phương trình (2.5) và ta có công thức đánh giá sai số*

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \tag{2.7}$$

*hoặc*

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \tag{2.8}$$

*Chứng minh.* Trước tiên ta có: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leqslant q\, |x_n - x_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant q^n\, |x_1 - x_0| \tag{2.9}$$

Khi đó $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leqslant q^{n+p-1}\, |x_1 - x_0| + q^{n+p-2}\, |x_1 - x_0| + \cdots + q^n\, |x_1 - x_0| \\ &= q^n\, |x_1 - x_0| \left(q^{p-1} + q^{p-2} + \cdots + 1\right) \\ &= q^n\, |x_1 - x_0| \frac{1 - q^p}{1 - q}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Vì $0 < q < 1$ và $|x_1 - x_0| \dfrac{1 - q^p}{1 - q}$ là một đại lượng bị chặn với mọi $p$, nên vế phải của (2.10) là một vô cùng bé khi $n$ tiến ra vô cùng. Do đó dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy. Cho nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. Đồng thời vì hàm $g(x)$ liên tục, nên khi chuyển qua giới hạn trong (2.6) ta thu được:

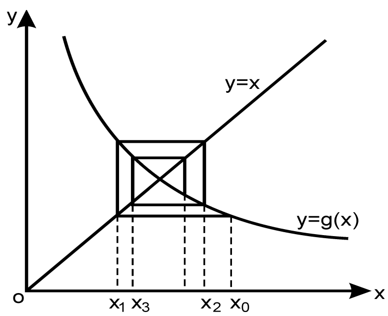
$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(\xi)$$

Và như vậy $\xi \equiv \overline{x}$ chính là nghiệm của phương trình (2.5). Bây giờ, trong công thức (2.10), cố định $n$ và cho $p$ tiến ra vô cùng, ta thu được công thức đánh giá sai số (2.7). Mặt khác, nếu trong (2.9) ta sử dụng bất đẳng thức $|x_{n+1} - x_n| \leqslant q\, |x_n - x_{n-1}|$, thì (2.10) sẽ có dạng

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant q\, |x_n - x_{n-1}| \frac{1 - q^p}{1 - q}$$

Cũng cố định $n$ và cho $p$ tiến ra vô cùng, ta thu được công thức đánh giá sai số (2.8). Định lí được chứng minh hoàn toàn.

Ý nghĩa hình học của phương pháp lặp được thể hiện qua hình vẽ sau.




***Hình 2.3:*** *Ý nghĩa hình học của phương pháp lặp.*

**Ví dụ 2.10.** Xét phương trình $x^3+x-1000=0$ trong khoảng cách li nghiệm $[9,10]$. Chuyển phương trình đã cho về dạng: $x=g(x)=\sqrt[3]{1000-x}$ Khi đó $g'(x)=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}}$ và $\forall x\in[9,10], |g'(x)|\leqslant 0.0034 = q<1$. Do đó $g(x)$ là hàm co trên [9, 10]. Ta cũng dễ dàng kiểm tra rằng $\forall x\in[9,10], g(x)\in[9,10]$. Do đó phương pháp lặp hội tụ. Chọn $x_0=10$, xây dựng dãy lặp theo công thức $x_{n+1}=\sqrt[3]{1000-x_n}, \forall n=0,1,2,\dots$. Từ công thức (2.8) ta có sai số của nghiệm gần đúng $x_n$ là $|x_n-\overline{x}|\leqslant 0.0034116\,|x_n-x_{n-1}|=\Delta_{x_n}$ Ta có bảng sau:

| $n$ | $x_n$ | $\Delta_{x_n}$ |
|---|---|---|
| 0 | 10 | |
| 1 | 9.966554934 | $0.1127\times10^{-3}$ |
| 2 | 9.966667166 | $0.3779\times10^{-6}$ |
| 3 | 9.966666789 | $0.1270\times10^{-8}$ |
| 4 | 9.966666791 | $0.6735\times10^{-11}$ |

**Ví dụ 2.11.** Bây giờ ta xét phương trình $x=g(x)=\cos x$ có nghiệm duy nhất trong đoạn [0, 1]. Dễ thấy $g(x)$ là hàm co trong [0, 1] với hệ số co $q = \sin 1 \approx 0.85$, và $\forall x \in [0,1], g(x) = \cos x \in [0,1]$. Chọn $x_0 = 1$, phương pháp lặp cho ta bảng sau:

| $n$ | $x_n$ | $\Delta_{x_n}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | |
| 1 | 0.5403023059 | 2.6049536001 |
| 2 | 0.8575532158 | 1.7977551565 |
| 3 | 0.6542897905 | 1.1518260770 |
| ... | ...... | ...... |
| 32 | 0.7390859996 | 0.0000121985 |
| 33 | 0.7390845496 | 0.0000082171 |
| 34 | 0.7390855264 | 0.0000055351 |

Qua hai ví dụ vừa nêu, ta nhận thấy rằng tốc độ hội tụ (thể hiện qua số lần lặp) của phương pháp lặp phụ thuộc vào giá trị của hệ số co $q$. Nếu hệ số co càng bé (gần với $0$), thì phương pháp lặp hội tụ càng nhanh. Ngược lại, nếu hệ số co là lớn (gần với $1$), thì phương pháp lặp hội tụ rất chậm. Ví dụ trước ($q = 0.0034$) cho thấy đến lần lặp thứ $4$, ta đã có nghiệm gần đúng với $9$ chữ số lẻ đáng tin sau dấu phảy thập phân. Còn trong ví dụ sau ($q = 0.85$), để đạt được $4$ chữ số lẻ đáng tín, ta phải cần đến khoảng hơn $30$ lần lặp.

Thuật toán của phương pháp lặp đơn được thể hiện trong Chương trình 2.2. Đối số của chương trình gồm: **g** là biểu thức của hàm lặp $g(x)$, **x0** là giá trị lặp ban đầu, **q** là hệ số co, **eps** là sai số cho trước (giá trị mặc định là $10^{-6}$) và **N** là số lần lặp tối đa cho phép (giá trị mặc định là $100$). Kết quả trả về của chương trình gồm **x** là vectơ nghiệm chứa dãy lặp $\{x_n\}$, **ss** là vectơ chứa sai số và **n** là số lần lặp thực tế.

**Chương trình 2.2. - c2iteration : Phương pháp lặp đơn.**

```
function [x,ss,n] = c2iteration(g,x0,q,eps,N)
if nargin < 5, N = 100; end;
if nargin < 4, eps = 1.0E-6; end;
if nargin < 3, error('Hàm phải có tối thiểu 3 đối số.');
end;
```

```
if (q<0)||(q>=1), error('Không là hàm co.'); end;
x=[];ss=[];x=[x;x0];n=1;err=eps+1;ss=[ss;err];
while (n<N & abs(err)>eps)
  x1 = feval(g,x0); err=q/(1-q)*abs(x1-x0);
  n=n+1; x=[x;x1]; ss=[ss;err]; x0=x1;
end;
```

Bây giờ chúng ta sẽ xét một số khái niệm liên quan đến tốc độ hội tụ của phương pháp lặp. Giả sử dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định theo công thức (2.6) hội tụ về nghiệm chính xác $\overline{x}$ của phương trình (2.5). Đặt $e_n = x_n - \overline{x}$ là đại lượng đặc trưng cho độ lệch giữa nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác của phương trình (2.5). Vì phương pháp lặp hội tụ nên $e_n \to 0$. Giả sử $g(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $[a, b]$ và sử dụng khai triển Taylor đến cấp hai của hàm $g(x)$ tại $\overline{x}$, ta có:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - \overline{x} = g(x_n) - g(\overline{x}) \\ &= g'(\overline{x})e_n + \frac{g''(\overline{x})}{2}e_n^2 + o(e_n^2) \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Công thức (2.11) nói lên mối quan hệ giữa độ lệch của nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác ở bước hai lần lặp kế tiếp nhau. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(\overline{x}) = q$$

Do $g(x)$ là hàm co cho nên $|q| < 1$. Chúng ta xét hai trường hợp sau:

*Trường hợp* $q \neq 0$ : Khi đó có thể chứng minh được rằng tồn tại một giá trị $c$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{q^n} = c$$

và ta có xấp xỉ $e_n \approx cq^n$. Lấy logarithm thập phân của trị tuyệt đối hai vế, ta được: $\log|e_n| \approx n\log|q| + \log|c|$.

Logarithm của sai số là một xấp xỉ tuyến tính theo $n$. Điều này có nghĩa là số chữ số zero sau dấu chấm thập phân của sai số tăng tuyến tính theo số lần lặp. Dạng hội tụ như vậy được gọi là **hội tụ tuyến tính** hoặc **hội tụ cấp một**.

*Trường hợp* $q = g'(\overline{x}) = 0$ : Đây là trường hợp đặc biệt. Giả sử $g''(\overline{x}) \neq 0$ và sử dụng đẳng thức (2.11) ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2} g''(\overline{x})$$

Khi đó ta có: $e_{n+1} \approx a e_n^2$, và $\log|e_{n+1}| \approx 2\log|e_n| + \log|a|$.

Ta thấy logarithm của sai số nhân đôi sau mỗi lần lặp và do đó số chữ số zero sau dấu chấm thập phân của sai số cũng nhân đôi sau mỗi bước lặp. Sự hội tụ như vậy được gọi là **hội tụ bình phương** hoặc **hội tụ cấp hai**.

## 2.4 PHƯƠNG PHÁP NEWTON

Sử dụng khái niệm tốc độ hội tụ, ta xây dựng phương pháp lặp đơn giản nhưng có tốc độ hội tụ cấp hai. Xét phương trình (2.1). Ta sẽ tìm cách chuyển về dạng (2.5) sao cho dãy lặp xác định theo công thức (2.6), nếu hội tụ, thì sẽ hội tụ với tốc độ hội tụ cấp hai.

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục và các đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ không đổi dấu trong khoảng cách li nghiệm [a, b] chứa nghiệm chính xác $\overline{x}$. Nếu $h(x)$ là hàm khác không với mọi $x \in [a, b]$, thì phương trình (2.1) trong [a, b] sẽ tương đương với phương trình

$$x = g(x) = x - h(x)f(x)$$

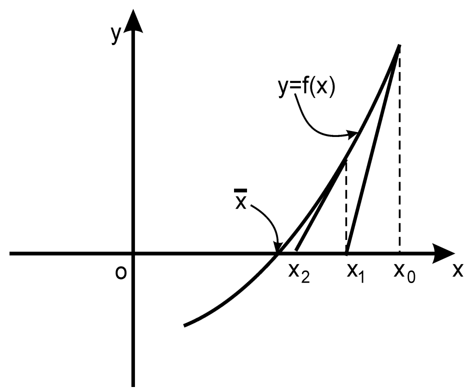
Chúng ta sẽ tìm $h(x)$ sao cho $g'(\overline{x}) = 0$. Ta có

$$g'(x) = 1 - h'(x)f(x) - h(x)f'(x)$$

và từ điều kiện $g'(\overline{x}) = 0$ với $f(\overline{x}) = 0$ ta thu được $h(\overline{x}) = \dfrac{1}{f'(\overline{x})}$. Hàm $h(x)$ đơn giản nhất thoả mãn điều kiện này là $h(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$ và chúng ta đi đến công thức lặp

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.12}$$

Công thức (2.12) được gọi là công thức lặp Newton và phương pháp xây dựng dãy lặp theo công thức (2.12) được gọi là phương pháp Newton[1]. Về mặt hình học, để xác định phần tử $x_n$, xuất phát từ điểm có hoành độ $x_{n-1}$ trên đồ thị của đường cong $y = f(x)$, ta kẽ tiếp tuyến với đường cong. Hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành sẽ là $x_n$. Vì lí do đó, phương pháp Newton cũng còn được gọi là phương pháp tiếp tuyến (hình 2.4). Nói chung, sự hội tụ của dãy lặp Newton phụ thuộc vào cách chọn giá trị lặp ban đầu $x_0$.




***Hình 2.4:*** *Ý nghĩa hình học của phương pháp Newton.*

**Định lí 2.6.** *Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục và các đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a,b]$. Khi đó nếu chọn $x_0$ thõa điều kiện Fourier $f(x_0)f''(x_0) > 0$, thì dãy lặp $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định theo công thức (2.12) sẽ hội tụ về nghiệm $\overline{x}$ của phương trình* (2.1).

Chú ý:

- Để đánh giá sai số của phương pháp Newton, ta sử dụng công thức đánh giá sai số tổng quát (2.2).

[1] *Còn được gọi là phương pháp Newton-Raphson*

- Điều kiện Fourier chỉ là điều kiện đủ, không phải là điều kiện cần. Từ điều kiện Fourier, ta có thể đưa ra qui tắc chọn giá trị ban đầu $x_0$ như sau: Nếu đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai cùng dấu, thì chọn $x_0 = b$, ngược lại chọn $x_0 = a$.

- Trong phương pháp Newton, điều kiện $f'(x) \neq 0$ trong khoảng cách li nghiệm $[a, b]$ là tiên quyết. Nếu có một điểm $c \in [a, b]$ để cho $f'(c) = 0$ thì phương pháp thường dùng là chia đôi để loại bỏ điểm $c$ đó trước khi sử dụng phương pháp Newton.

**Ví dụ 2.12.** Cho một số $A > 0$. Chúng ta muốn tính gần đúng $\overline{x} = \sqrt{A} \in [a, b]$ với $0 < a < b$. Ta có $\overline{x}$ là nghiệm của phương trình $f(x) = x^2 - A = 0$ và công thức lặp Newton có dạng

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - A}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right)$$

với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$, và thoả công thức đánh giá sai số:

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{\left|x_n^2 - A\right|}{2a} = \Delta_{x_n}$$

Có thể chứng tỏ rằng dãy lặp hội tụ về $\sqrt{A}$ với mọi giá trị lặp dương ban đầu. Với trường hợp $A = 2$, $\overline{x} = \sqrt{A} \in [1, 2]$, $x_0 = 1$ ta có bảng sau

| $n$ | $x_n$ | $\Delta_{x_n}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.0000000000 | |
| 1 | 1.5000000000 | $1.25 \times 10^{-1}$ |
| 2 | 1.4166666667 | $3.48 \times 10^{-3}$ |
| 3 | 1.4142156863 | $3.01 \times 10^{-6}$ |
| 4 | 1.4142135624 | $2.26 \times 10^{-12}$ |

**Ví dụ 2.13.** Bây giờ xét phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ trong khoảng cách li nghiệm [0, 1]. Ta nhận thấy $f'(x) = 3x^2 - 3$ triệt tiêu tại $x = 1 \in [0, 1]$. Do đó ta dùng phương pháp chia đôi để thu hẹp khoảng cách li nghiệm. Vì $f(0) > 0$ và $f(\frac{1}{2}) < 0$ nên nghiệm thuộc

$[0, \frac{1}{2}]$, mà trong đó $f'(x) < 0$. Dễ thấy $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], |f'(x)| \geqslant \dfrac{9}{4} = m$ và $f''(x) = 6x \geqslant 0$. Vì đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai khác dấu, chọn $x_0 = 0$, xây dựng dãy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ theo công thức:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3} = \frac{2x_{n-1}^3 - 1}{3x_{n-1}^2 - 3}.$$

Khi đó nghiệm gần đúng $x_n$ thoả mãn đánh giá:

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{\left|x_n^3 - 3x_n + 1\right|}{9/4} = \Delta_{x_n}.$$

Kết quả tính toán cho ta bảng sau:

| $n$ | $x_n$ | $\Delta_{x_n}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.0000000000 | |
| 1 | 0.3333333333 | $1.65 \times 10^{-2}$ |
| 2 | 0.3472222222 | $8.70 \times 10^{-5}$ |
| 3 | 0.3472963532 | $2.55 \times 10^{-9}$ |

Thuật toán của phương pháp Newton được thể hiện trong Chương trình 2.3. Đối số của chương trình gồm: **f** và **f1** là biểu thức của hàm $f(x)$ và đạo hàm của nó, **x0** là giá trị lặp ban đầu, **m** là giá trị nhỏ nhất của đạo hàm cấp một, **eps** là sai số cho trước (giá trị mặc định là $10^{-6}$) và **N** là số lần lặp tối đa cho phép (giá trị mặc định là 100). Kết quả trả về của chương trình gồm **x** là vectơ nghiệm chứa dãy lặp $\{x_n\}$, **ss** là vectơ chứa sai số và **n** là số lần lặp thực tế.

**Chương trình 2.3. - c2newton : Phương pháp Newton.**

```
function [x,ss,n] = c2newton(f,f1,x0,m,eps,N)
if nargin < 6, N = 100; end;
if nargin < 5, eps = 1.0E-6; end;
if nargin < 4
  error('Hàm phải có tối thiểu 4 đối số.');
end;
x=[];ss=[];x=[x;x0];n=1;err=eps+1;ss=[ss;err];
```

```
while (n<N & err>eps)
  x1 = x0-feval(f,x0)/feval(f1,x0);
  err=feval(f,x1)/m;
  n=n+1; x=[x;x1]; ss=[ss;err]; x0=x1;
end;
```

## 2.5 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

Trong phần này ta sử dụng ý tưởng của phương pháp Newton để giải hệ đơn giản gồm hai phương trình phi tuyến với hai ẩn. Trường hợp số phương trình và số ẩn nhiều hơn ta cũng xét tương tự. Xét hệ

$$F(x,y)=0,\ G(x,y)=0, \tag{2.13}$$

với $F(x,y)$, $G(x,y)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng theo các biến $x$ và $y$ liên tục trong lân cận của nghiệm $(\overline{x},\overline{y})$. Giả sử

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} F_x^{'} & F_y^{'} \\ G_x^{'} & G_y^{'} \end{vmatrix} \neq 0,$$

với mọi $(x,y)$ trong lân cận của nghiệm. Khi đó nếu chọn $(x_0,y_0)$ đủ gần nghiệm $(\overline{x},\overline{y})$ thì hai dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ thu được từ công thức:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{J(x_{n-1},y_{n-1})}\begin{vmatrix} F(x_{n-1},y_{n-1}) & F_y^{'}(x_{n-1},y_{n-1}) \\ G(x_{n-1},y_{n-1}) & G_y^{'}(x_{n-1},y_{n-1}) \end{vmatrix},$$
$$y_n = y_{n-1} - \frac{1}{J(x_{n-1},y_{n-1})}\begin{vmatrix} F_x^{'}(x_{n-1},y_{n-1}) & F(x_{n-1},y_{n-1}) \\ G_x^{'}(x_{n-1},y_{n-1}) & G(x_{n-1},y_{n-1}) \end{vmatrix}$$

sẽ hội tụ về nghiệm của hệ phương trình (2.13).

**Ví dụ 2.14.** Xét hệ phương trình

$$F(x,y)=x^2+xy-10=0,\ G(x,y)=y+3xy^2-57=0$$

Chọn $x_0=1.5; y_0=3.5$. Ta có:

$$\begin{array}{lll} F(x_0,y_0)=-2.5 & \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=6.5 & \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=1.5 \\ G(x_0,y_0)=1.625 & \dfrac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0)=36.75 & \dfrac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)=32.5 \end{array}$$

Như vậy $$x = 1.5 - \frac{-2.5(32.5) - 1.625(1.5)}{6.5(32.5) - 1.5(36.75)} = 2.03603$$

$$y = 3.5 - \frac{-2.5(36.75) - 1.625(6.5)}{6.5(32.5) - 1.5(36.75)} = 2.84388$$

## 2.6 BÀI TẬP

1. Tìm những khoảng cách li nghiệm thực của các phương trình sau đây:
   (a) $x^4 - 4x + 1 = 0$;
   (b) $\mathrm{e}^x - x^2 + 3x - 2 = 0$;
   (c) $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$;
   (d) $4 \sin x + 1 - x = 0$;
   (e) $1 - x - \mathrm{e}^{-2x} = 0$;
   (f) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8 = 0$;
   (g) $\mathrm{e}^x - x^2 + x = 0$;
   (h) $3x^2 + \ln x = 0$.

2. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng ở lần lặp thứ 5 ($x_5$) của phương trình $\sqrt{x} - \cos x = 0$ trong [0,1]. Sử dụng công thức đánh giá sai số tổng quát, tính sai số của nó và so sánh với sai số tính công thức đánh giá sai số của phương pháp chia đôi.

3. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn $10^{-2}$ của các phương trình sau:
   (a) $x = \mathrm{tg}\, x$ trong $[4, 4.5]$;
   (b) $2 + \cos(\mathrm{e}^x - 2) - \mathrm{e}^x = 0$ trong $[0.5, 1.5]$.

4. Mỗi một hàm sau đây đều có cùng chung điểm bất động $\overline{x}$ là nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ :
   (a) $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$
   (b) $g_2(x) = \left(\dfrac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$
   (c) $g_3(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$
   (d) $g_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$
   
   Hãy thực hiện bốn lần lặp cho mỗi hàm $g_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$ xác định ở trên với cùng giá trị lặp ban đầu $x_0 = 1$ và so sánh các

kết quả với nhau. Hàm nào cho chúng ta dãy lặp hội tụ về nghiệm tốt hơn?

5. Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn $10^{-3}$ cho các phương trình sau:
   (a) $x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ trong đoạn $[3, 4]$, chọn $x_0 = 3.5$;
   (b) $x^3 - x - 1 = 0$ trong đoạn $[1, 2]$, chọn $x_0 = 1.5$;
   (c) $x = \dfrac{x^2 - \mathrm{e}^x + 2}{3}$ trong đoạn $[0, 1]$, chọn $x_0 = 0.5$.

6. Xét phương trình $x + \mathrm{e}^x = 2$. Hãy chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm duy nhất trong đoạn [0,1]. Nếu sử dụng công thức lặp $x_{n+1} = 2 - \mathrm{e}^{x_n}$ ta có thể tìm được nghiệm gần đúng của phương trình hay không? Nếu không, hãy chỉ ra công thức lặp khác tốt hơn. Hãy giải thích tại sao?

7. Với các phương trình dưới đây, hãy xác định khoảng [a, b] mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác $10^{-4}$.
   (a) $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$;
   (b) $x = (\mathrm{e}^x/3)^{1/2}$;
   (c) $x = 6^{-x}$;
   (d) $x = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$.

8. Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau với độ chính xác $10^{-5}$.
   (a) $\mathrm{e}^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ trong đoạn $[1, 2]$;
   (b) $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ trong đoạn $[1.3, 2]$;
   (c) $2x\cos 2x - (x-2)^2 = 0$ trong đoạn $[2, 3]$ và $[3, 4]$;
   (d) $(x-2)^2 - \ln x = 0$ trong đoạn $[1, 2]$ và $[e, 4]$;
   (e) $\mathrm{e}^x - 3x^2 = 0$ trong đoạn $[0, 1]$ và $[3, 5]$;
   (f) $\sin x - \mathrm{e}^{-x} = 0$ trong đoạn $[0, 1]$, $[3, 4]$ và $[6, 7]$.

9. Sử dụng phương pháp Newton để giải phương trình
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x = 0$$
với giá trị lặp ban đầu $x_0 = \pi/2$ với sai số nhỏ hơn $10^{-5}$. Giải thích tại sao kết quả dường như không bình thường đối với phương pháp Newton. Hãy giải phương trình với $x_0 = 5\pi$ và $x_0 = 10\pi$.

10. Đa thức $P(x) = 10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - 0.21141 = 0$ có nghiệm $\overline{x} = 0.29$. Sử dụng phương pháp Newton với giá trị lặp ban đầu $x_0 = 0.28$ để tìm nghiệm này. Giải thích điều gì xảy ra.

11. Trong các hệ phương trình sau đây, hãy tìm $x_1, y_1$ theo phương pháp Newton.
    (a) $\begin{cases} y = -x^2 + x + 0.5 \\ y + 5xy = x^3 \end{cases}$ chọn $x_0 = y_0 = 1.2$;
    (b) $\begin{cases} y + 1 = x^2 \\ 5 - y^2 = x^2 \end{cases}$ chọn $x_0 = y_0 = 1.75$;
    (c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^3 \end{cases}$ chọn $x_0 = 0.5,\ y_0 = 0.8$;
    (d) $\begin{cases} \sin(x + y) = 1 \\ x^3 - 3xy + y^3 = 1 \end{cases}$ chọn $x_0 = 0.2,\ y_0 = 1.2$.

12. Vận tốc rơi của một vật được tính theo công thức:
$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-(c/m)t}\right),$$
với $g = 9.8m/s^2$. Biết $c = 13.5kg/s$, hãy xác định khối lượng $m$ để cho $v = 36m/s$ tại thời điểm $t = 6s$. Tính đến ba chữ số đáng tin sau dấu chấm thập phân.

13. Phương trình Van der Waals đối với chất khí có dạng
$$\left(p + \frac{a}{\nu^2}\right)(\nu - b) = RT,$$
với $R = 0.082054L \cdot atm/(mol \cdot K)$, $a, b$ là các hằng số phụ thuộc vào chất khí cụ thể; $p$ là áp suất; $T$ là nhiệt độ, $V$ là thể tích;

$n$ là số mole, $\nu = V/n$ là thể tích mole. Hãy xác định thể tích mole $\nu$ của hai chất khí là carbon dioxide $(CO_2)$ và oxygen $(O_2)$ dưới áp suất $1$, $10$ và $100$ *atm* và ở nhiệt độ $300$, $500$ và $700K$. Biết rằng đối với carbon dioxide ta có $a = 3.592$, $b = 0.04267$; còn đối với oxygen ta có $a = 1.360$, $b = 0.03183$.