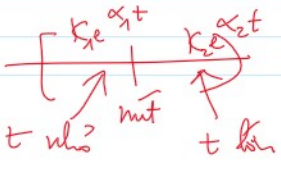
Tuesday, June 15, 2021 3:56 PM

$\|x(t)\| \le K_1 e^{\alpha_1 t} \le K_2 e^{\alpha_2 t}$ $\quad K_1 < K_2$, $\alpha_2 < \alpha_1$ $\}$ → cái nào "tốt" hơn?

tốt hơn nghĩa là $\|x(t) - K_i e^{\alpha_i t}\|$ cũng bé cũng tốt. $t \in [0, +\infty)$.

Nếu t đủ lớn, $t \ge N \Rightarrow K_2 e^{\alpha_2 t} < K_1 e^{\alpha_1 t}$

Nếu t đủ nhỏ $\Rightarrow K_1 e^{\alpha_1 t} < K_2 e^{\alpha_2 t}$



VD: $K_1 = 1$, $\alpha_1 = -1$ → $K_1 e^{\alpha_1 t} = 1 \cdot e^{-t} = \frac{1}{e^t}$

$K_2 = 2$, $\alpha_2 = -2$ → $K_2 e^{\alpha_2 t} = 2 \cdot e^{-2t} = \frac{2}{e^{2t}}$

$\frac{1}{e^t} < \frac{2}{e^{2t}} \Leftrightarrow e^t < 2 \Leftrightarrow t < \ln 2$

Nếu $t < \ln 2$ thì $K_1 e^{\alpha_1 t} < K_2 e^{\alpha_2 t}$ → $K_1 e^{\alpha_1 t}$ tốt hơn/tốt hơn.

Nếu $t > \ln 2$ thì $K_2 e^{\alpha_2 t} < K_1 e^{\alpha_1 t}$ → $K_2 e^{\alpha_2 t}$

Page 9: Nếu $t \in (0, h)$ thì $P_1(t) \le K_1 e^{\alpha t} \|x_0\|$ (1.28) $\le K_1 e^{\alpha t} \Phi_h$.

$P_2(t) \le K_3 e^{\alpha t} \Phi_h$ (1.29)

(1.28) $P_1(t) \le \|e^{(A-\alpha I)t} \cdot x_0\| e^{\alpha t} \le \|e^{(A-\alpha I)t}\| \cdot \|x_0\| \cdot e^{\alpha t}$

$K_1 e^{\alpha t} \cdot \|x_0\|$.

$\|x(t)\| \le (K_1 + K_3) \cdot e^{\alpha t} \Phi_h$ (1) (2) → (3)

$\|x_0\| = \|x(0)\| \le \sup_{t \in [-h, 0]} \|x(t)\| =: \Phi_h$

Nếu $t \in [h, +\infty)$ thì $P_1(t) \le K_2 e^{\alpha t} \|x_0\|$ (1.30) $\le K_3 e^{\alpha t} \Phi_h$

$P_2(t) \le K_4 e^{\alpha t} \Phi_h$ (1.31)

$\} \rightarrow \|x(t)\| \le (K_2 + K_4) \cdot e^{\alpha t} \Phi_h$ (3) (1) → (4)

(1.28) & (1.30) $\Rightarrow P_1(t) \le \max\{K_1, K_2\} \cdot e^{\alpha t} \|x_0\| \le \max\{K_1, K_3\} \cdot e^{\alpha t} \Phi_h$ $\forall t \in (0, +\infty)$

(1.29) & (1.31) $P_2(t) \le \max\{K_3, K_4\} \cdot e^{\alpha t} \Phi_h$ $\forall t \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow \|x(t)\| \le \|P_1(t)\| + \|P_2(t)\| \le \left(\max\{K_1, K_2\} + \max\{K_3, K_4\}\right) \cdot e^{\alpha t} \Phi_h$.

$=: K$ (3 + 2 = (5))

(Xem thêm [Dua12])

Nxét: Đối với K & α như trên vẫn còn khá thô, K tốt nhất phải là $\max\{K_1 + K_3, K_2 + K_4\}$.

Bên cạnh đó, đánh giá đẹp hơn (thể hiện vai trò của $x(0)$) là

$\|P_1(t)\| \le \max\{K_1, K_2\} e^{\alpha t} \|x_0\|$,

$$\|P_1(t)\| \le \max\{K_1, K_2\}\, e^{\alpha t}\, \|x_0\|,$$
$$\|P_2(t)\| \le \max\{K_3, K_4\}\, e^{\alpha t}\, \bar{\Phi}_h .$$