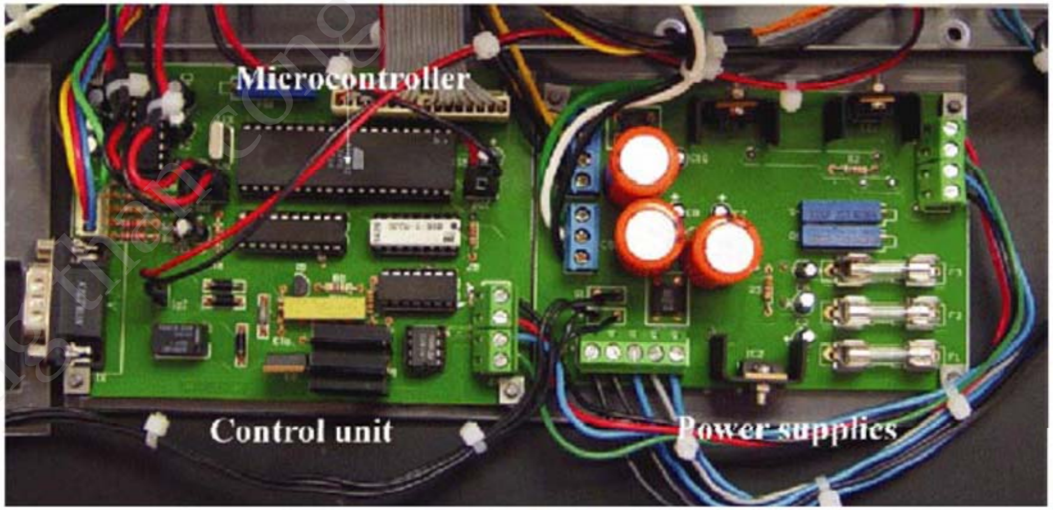
Lý thuyết Điều khiển tự động 1

Khảo sát hệ thống rời rạc tuyến tính

Tính ổn định



ThS. Đỗ Tú Anh
Bộ môn Điều khiển tự động
Khoa Điện, Trường ĐHBK HN

Khảo sát hệ thống

Khảo sát hệ thống dựa trên phương trình sai phân

Ví dụ

Xét hệ thống được mô tả bởi

$$y(k) = u(k) + ay(k-1) \quad \text{với} \quad a = 0.5$$

Khảo sát hệ thống (tiếp)

Khảo sát hệ thống dựa trên hàm truyền đạt

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad \Longrightarrow \quad y(k) = Z^{-1}\left[Y(z)\right] = Z^{-1}\left[G(z)U(z)\right]$$

Ví dụ

Xét hệ thống được mô tả bởi

$$G(z) = \frac{z}{z-a}$$

Với tín hiệu vào là dãy bước nhảy đơn vị, tức là $U(z) = Z[\beta(k)] = \dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)} = \frac{1}{1-a}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-a}\right]$$

Lấy ảnh Z ngược, dẫn đến

$$y(k) = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a}a^{k+1}$$

Khảo sát hệ thống (tiếp)

Khảo sát hệ thống dựa trên mô hình trạng thái

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \qquad (1)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \qquad (2)$$

Từ (1) ta có

$$k = 0 : \mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)$$
$$k = 1 : \mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)$$
$$= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)$$
$$k = 2 : \mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(2)$$
$$= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2)$$

Tiếp tục với $k = 3, 4, 5, \ldots$ ta đi đến biểu thức tổng quát

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}^{k-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \cdots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)$$

hay

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}(k) = \mathbf{A}^k}$$

Ma trận chuyển trạng thái

Khảo sát hệ thống (tiếp)

Đồng thời từ (2):

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-i-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

Ma trận chuyển trạngthái còn có thể được tính như sau

$$\boldsymbol{\phi}(k) = \mathbf{A}^k = Z^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Bảng so sách các phương pháp mô tả giữa các hệ liên tục và rời rạc

Description method	Continuous-time system	Discrete-time system
State-space equations	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$) $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$
Transition matrix	$\phi(t) = e^{\mathbf{F}t}$	$\boldsymbol{\phi}(k) = \mathbf{A}^k$
L/Z-transform of transition matrix	$\boldsymbol{\phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$	$\boldsymbol{\phi}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
Transfer function matrix	$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\boldsymbol{\phi}(s)\mathbf{G} + \mathbf{D}$	$\mathbf{H}(z) = z^{-1}\mathbf{C}\boldsymbol{\phi}(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}$

Khảo sát hệ thống (tiếp)

Ví dụ

Xác định ma trận chuyển trạng thái, vector trạng thái và vector tín hiệu ra của hệ thống rời rạc với các sơ kiện bằng 0, $u(k) = \beta(k)$ và

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ và } \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tính ổn định

Cho hệ thống rời rạc với đa thức đặc tính

$$a(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

Hệ thống ổn định nếu tất cả các nghiệm của đa thức đặc tính (các điểm cực của hệ) đều nằm bên trong đường tròn đơn vị

Sử dụng phép đổi biến Möbius

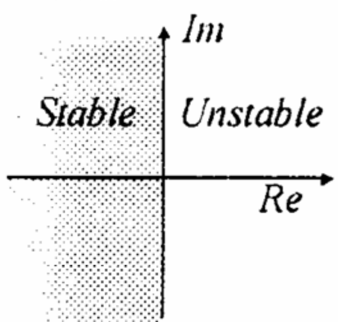
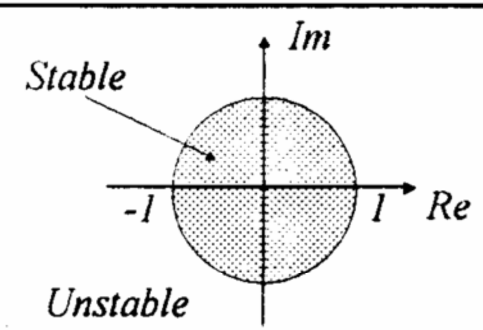
$$z = \frac{v+1}{v-1} \quad \text{hay} \quad v = \frac{z+1}{z-1}$$

thì điều kiện $|z_i| < 1$ được chuyển thành điều kiện $\mathrm{Re}(v_i) < 0$

⇨ Có thể áp dụng các tiêu chuẩn (đại số) xét ổn định đã học của hệ thống liên tục

Tính ổn định (tiếp)

Bảng so sách tính ổn định giữa hệ liên tục và hệ rời rạc

	Continuous – time systems	*Discrete – time systems*
State – space equations	$\dot{x}(t) = \boldsymbol{F}x(t) + \boldsymbol{G}u(t)$ $y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$	$x[(k+1)T] = \boldsymbol{A}x(kT) + \boldsymbol{B}u(kT)$ $y(kT) = \boldsymbol{C}x(kT) + \boldsymbol{D}u(kT)$
Characteristic equation	$\lvert \lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{F} \rvert = 0$	$\lvert \lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \rvert = 0$
Stability definition	$Re\{\lambda_i\} < 0$	$\lvert \lambda_i \rvert < 1$
Stability description		

Tính ổn định (tiếp)

Ví dụ

Xét tính ổn định của hệ thống sau

$$G(z)=\frac{0.3z^{-1}+0.2z^{-2}}{1-z^{-1}+0.6z^{-2}}$$