MAT3342 14-04-21

Friday, May 14, 2021 9:03 AM

Chương 6: Chen (Ctr-ty / Obser-ty)

ODEs: libgen.is — Chincone, Coddington/Levinson, Daletskii - Krein

Nhắc lại:

LTI: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ (1) h² chiều ODEs.

Def:

complete C-cont-y (điều khiển đc tuyệt đối)

a) (A,B) gọi là đ/khiển đc nếu $\forall x(0) = x_0$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}^n$ thì $\exists u$ s.c. $x(t_1; x_0, t_0) = x_1$ với t_1 t/gian hữu hạn. $x_0 \longrightarrow x_1$

b) (1) hay (A,C) đc gọi là quan sát đc nếu $\forall x_0$ (chưa cho trước) mà biết $u(t)$ & $y(t)$ trên 1 đoạn $[0, t_1]$, (với $t_1 < +\infty$) thì ta tìm lại đc x_0. $\longrightarrow$ ta sẽ biết $x(t)$ / $[0, +\infty)$ $y(t)$

DDE (Delay)

$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t)$

Đk b/đầu $\phi \big|_{[-h, 0]}$

Bài toán đkh? (đgv shan chiều)

$u, \phi \rightarrow \phi_1 = x \big|_{[kh, (k+1)h]}$

DAEs (h² chiều)

$\Leftrightarrow$ 1 pt vp chạy trên đa tạp đại số.

$\longrightarrow$ ODE

Alg. $\leftarrow$ ray

ODE $\leftarrow$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = f(t, x_1, x_2, u) \\ 0 = g(t, x_1, x_2, u) \\ y = h(t, x, u) \end{cases}$ Alg. $\leftarrow$

– R₊ n – 1

– Null tr

▶ **Theorem 6.1**

The following statements are equivalent.

1. The n-dimensional pair $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ is controllable.
2. The $n \times n$ matrix
$$\mathbf{W}_c(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}'e^{\mathbf{A}'\tau}\,d\tau = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}'e^{\mathbf{A}'(t-\tau)}\,d\tau \qquad (6.2)$$
is nonsingular for any $t > 0$.
3. The $n \times np$ *controllability matrix* — Kalman control. matrix
$$\mathcal{C} = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\ \cdots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \qquad (6.3)$$
has rank n (full row rank).
4. The $n \times (n+p)$ matrix $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\ \ \mathbf{B}]$ has full row rank at every eigenvalue, λ, of $\mathbf{A}$.[1] — Hautus test
5. If, in addition, all eigenvalues of $\mathbf{A}$ have negative real parts, then the unique solution of — thêm vào
$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}' = -\mathbf{B}\mathbf{B}' \qquad (6.4)$$
W_c là ẩn số của hpt tuyến tính — Lyapunov control. equation

is positive definite. The solution is called the *controllability Gramian* and can be expressed as
$$\mathbf{W}_c = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}'e^{\mathbf{A}'\tau}\,d\tau \qquad (6.5)$$

Chú ý: Tìm W_c trong đk5 thì k sử dụng (6.5)

Giải pt (6.4) $AW_c + W_cA' = -BB'$.

Pt Lyapunov là dạng đb của pt Sylvester $AX + XB = C$.

Để giải: Sử dụng $\begin{cases} \text{toán tử Vec (chuyển ma trận} \rightarrow \text{vector)} \\ \quad \text{vectorized operator} \\ \text{tích Kronecker } \otimes \end{cases}$

$$\begin{cases} A \otimes B = [a_{ij} \cdot B]_{i,j} \\ \text{T/c: } \operatorname{Vec}(AXB) = \underbrace{(B^T \otimes A)}_{\text{known}} \cdot \underbrace{\operatorname{vec}(X)}_{\text{variables}} \end{cases}$$

$AXI_n + I_nXB = C$

$\Rightarrow (I_n \otimes A + B^T \otimes I_n) \cdot \operatorname{vec}(X) = \operatorname{vec}(C)$

Đk $\exists!$ n° là $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$.

6.2.1: Chỉ số điều khiển:

Hệ quả 6.1: (A, B) là đ/khiển đc $\Leftrightarrow$ $C_{n-p+1} = [B\ AB\ \ldots\ A^{n-p}B]$ đủ hạng dòng trong đó $p = \operatorname{rank}(B)$

Đlý 6.2 & 6.3: T/c đ/khiển đc là bất biến đối với phép đổi biến số (biến đổi tương đương hệ).

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = P^{-1}z \\ u = Qv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = PAP^{-1}z + PBQv \\ y = CP^{-1}z + DQv. \end{cases}$$

K/tra t/c đ/khiển đc (PAP^{-1}, PBQ) giống hệt của (A, B).

Observability (tính quan sát đc).

Đlý 6.5: Tính quan sát đc là đối ngẫu (duality) của tính đ/khiển đc, i.e. (A,B) đ/khiển đc $\Leftrightarrow$ (A^T, B^T) là q.sát đc (page 156).

Chú ý: Điều này chỉ đúng cho các hệ LTI (k đúng cho LTV).

Đlý 6.01:

▶ **Theorem 6.O1**

The following statements are equivalent.

1. The n-dimensional pair $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ is observable.

Chú ý: Tính q.sát đc là bất biến dưới các b/đổi tương đương

$x = P^{-1}z$

Đ/lý 6.01.

▶ **Theorem 6.01**

The following statements are equivalent.

1. The n-dimensional pair $(\mathbf{A},\ \mathbf{C})$ is observable.
2. The $n \times n$ matrix

$$\boxed{\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\, d\tau} \tag{6.28}$$

is nonsingular for any $t > 0$.

3. The $nq \times n$ *observability matrix*

Kalman

$$O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

has rank n (full column rank). This matrix can be generated by calling obsv in MATLAB.

4. The $(n+q) \times n$ matrix

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}}$$ Hautus test

has full column rank at every eigenvalue, λ, of $\mathbf{A}$.

5. If, in addition, all eigenvalues of $\mathbf{A}$ have negative real parts, then the unique solution of

$$\mathbf{A}'\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o\mathbf{A} = -\mathbf{C}'\mathbf{C} \tag{6.30}$$

is positive definite. The solution is called the *observability Gramian* and can be expressed as

$$\boxed{\mathbf{W}_o = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\, d\tau} \tag{6.31}$$

Chú ý: Tính qsát đc là bất biến dưới các b/đổi tương đg:

$$\begin{cases} x = P^{-1} z \\ u = Q z. \end{cases}$$

§6.4. Phân tích (Kalman) chính tắc (Kalman/canonical decomposition).

VD1: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \longrightarrow$ ko đ.khiển đc $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ đ.khiển đc, $\leftarrow$ ko đ.khiển đc

K/tra. $\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = 1 < n = 2 \Rightarrow$ hệ ko đ/kh đc.

Câu hỏi: $\dot{x} = Ax + Bu \longrightarrow$ liệu có "tách" x ra đc thành 2 phần đ.khiển đc & 0 đ.khiển đc 0?

Kalman $\longrightarrow$ tách $\bar{x} = Px = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ đ.khiển đc, $\leftarrow$ 0 đ.khiển đc, P là 0 suy biến.

Đặt $n_1 = \operatorname{rank}\underbrace{[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B]}_{C}$ & $P^{-1} := [\underbrace{P_1\ P_2\ \dots\ P_{n_1}}_{\text{là tất cả các cột đl tuyến tính trong } C} \mid \underbrace{P_{n_1+1}\ \dots\ P_n}]$ $\longrightarrow$ chọn tự do s.c. P 0 suy biến

Ta đặt $\bar{x} := Px$ ta chuyển hệ b/đầu thành $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + Du \end{cases}$ Kalman contr-ty dec.

Với $\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \boxed{\bar{A}_{\bar{c}}} \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ đ.khiển đc $\longrightarrow$ 0 đ.khiển đc.

$\bar{C} = [\bar{C}_c\ \ \boxed{\bar{C}_{\bar{c}}}]$

Tương tự ta có p.tích Kalman cho tính quan sát đc.

Đặt $n_2 = \operatorname{rank}\underbrace{[C; AC; A^2C; \dots; A^{n-1}C]}_{O}$, lập P tương tự như phần về t/c đ.khiển

$\begin{bmatrix} C \\ AC \\ \vdots \\ A^nC \end{bmatrix} \rightarrow n_2$ hàng đltt

$P = [\underbrace{P_1; P_2; \dots; P_{n_2}}_{n_2 \text{ hàng đltt của } O};\ |\ P_{n_2+1}; \dots; P_n]$

Ta có $\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & \bar{A}_{12} \\ 0 & \boxed{\bar{A}_{\bar{o}}} \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ \boxed{B_{\bar{o}}} \end{bmatrix}$ $\quad$ o: qsát đc $\longrightarrow$ $\bar{o}$: 0 qsát đc

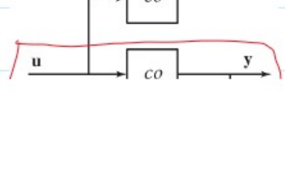
$\bar{C} = [\bar{C}_o\ \ 0]$,

MATLAB: ctrbf & obsvf

▶ **Theorem 6.7**

Every state-space equation can be transformed, by an equivalence transformation, into the following canonical form

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{c\bar{o}} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{co} \\ \bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{co} \\ \bar{\mathbf{B}}_{c\bar{o}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{u} \tag{6.45}$$



$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\,\hat{u}(s)$

canonical form

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{c\bar{o}} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{co} \\ \bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{co} \\ \bar{\mathbf{B}}_{c\bar{o}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{6.45}$$

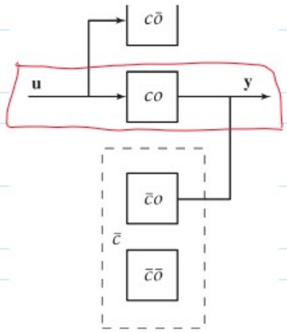
$$\mathbf{y} = [\bar{\mathbf{C}}_{co} \ \ \mathbf{0} \ \ \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}o} \ \ \mathbf{0}]\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

where the vector $\bar{\mathbf{x}}_{co}$ is controllable and observable, $\bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}}$ is controllable but not observable, $\bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o}$ is observable but not controllable, and $\bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}}$ is neither controllable nor observable. Furthermore, the state equation is zero-state equivalent to the controllable and observable state equation

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co} &= \bar{\mathbf{A}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \bar{\mathbf{B}}_{co}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}} \tag{6.46}$$

and has the transfer matrix

$$\hat{\mathbf{G}}(s) = \bar{\mathbf{C}}_{co}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{co})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_{co} + \mathbf{D}$$



$\hat{y}(s) = G(s)\, u(s)$

Chú ý: * Cách chọn P như trên là tốt về lý thuyết nhưng 0 tốt về thực hành, bởi vì P là khả nghịch chứ 0 trực giao.

* Tính nhận biết được (dectectability) & tính ổn định hóa được (stabilizability)

Hệ mở (open loop) $\dot{x} = Ax + Bu$. Giả sử A 0 phải ma trận ổn định → Bài toán ổn định hóa tức là $u = Kx$ (state feedback / phản hồi trạng thái)

↳ closed loop $\dot{x} = (A+BK)x$ là ổn định.

$\sigma(A+BK) \subseteq \mathring{\mathbb{C}}_-$

* Phân tích bậc thang (Staircase form) → Paul van Dooren.
được sử dụng để tính gần đúng các phân tích Kalman & nghiên cứu các t/c đó khi.

* Trong Matlab: chuyển hệ b đầu → về hệ co ⇒ bài toán nhận dạng tối thiểu (minimal realization) Chapter 7 / Chen.
function: minreal.