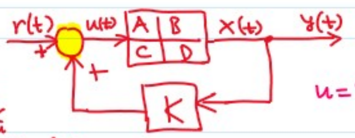
Lecture 11

Sunday, April 3, 2022 2:01 PM

§1. Điều khiển phản hồi (feedback control)

Mô hình LTI $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ (1) hở



$u = r + Kx.$

Phản hồi: $u(t) = Kx(t) + r(t)$ ⇒ phản hồi trạng thái (state feedback)

$u(t) = Ky(t) + r(t)$ $(D = 0)$ → phản hồi đầu ra (output feedback)

Output feedback: $u(t) = Ky(t) + r(t) = KCx(t) + r(t).$

Hệ thống mới: $\begin{cases} \dot{x}(t) = (A+BK)x(t) + Br(t) \\ y(t) = (C+DK)x(t) + Dr(t) \end{cases}$ (2) hệ kín/đóng

2 hệ thống này có gì giống nhau, ≠ nhau về tính chất của hàm truyền.

$$G_{hở}(s) = D + C(sI-A)^{-1}B \quad \& \quad G_{kín}(s) = D + (C+DK)(sI-(A+BK))^{-1}B$$

Hàm truyền $G(s) = D + \dfrac{N(s)}{\mathcal{D}(s)} = \dfrac{D\mathcal{D}(s) + N(s)}{\mathcal{D}(s)}$ ← không điểm (zeros) ; ← cực (poles).

Các cực của hệ hở/kín chính là các giá trị riêng của A / $A+BK$.

T/c: Feedback trạng thái có thể thay đổi cực của hàm truyền. bằng việc chọn ma trận K phù hợp.

(Sau này ta sẽ thấy nếu phổ $\sigma(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ và cho trc 1 bộ n số phức bất kỳ $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ thì ta có thể tìm được K để

$$\sigma(A+BK) = \{\beta_1, \dots, \beta_n\},$$ nếu g/sử cặp (A,B) là điều khiển đc).

Được gọi là bài toán gán phổ / pole placement.

Ví dụ 1: Cho 1 hệ điều khiển $\dot{x}(t) = 2x(t) + 1 \cdot u(t) \Rightarrow A = 2, B = 1.$

Ta thấy ptvp $\dot{x}(t) = 2x(t)$ là 0 ổ/định

ta muốn tìm $K \in \mathbb{R}$ sao cho $\sigma(A+BK) = \beta$ cho trc.

Vì cặp $(A,B) = (2,1)$ là đkhiển đc $(K_c(A,B) = [B] = 1 \Rightarrow rank(K_c(A,B)) = 1)$

Ta thấy $\sigma(A+BK) = 2 + 1 \cdot K \boxed{=} \beta \Leftrightarrow K = \beta - 2.$

T/c2: Feedback trạng thái sẽ 0 thay đổi không điểm của hàm truyền.

C/m: Ta so sánh hệ thống kín $\begin{bmatrix} sI-(A+BK) & B \\ C & -D \end{bmatrix} =: S_{kín}$

hệ thống hở $\begin{bmatrix} sI-A & B \\ C & -D \end{bmatrix} =: S_{hở}$

Ta giả sử s không phải là 1 cực của hàm truyền, khi đó ta có các ma trận $sI-A$ & $sI-(A+BK)$ là khả nghịch.

Bổ đề (Bổ đề hay Guttman) Cho 1 ma trận vuông $\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ với P là khả nghịch.

Khi đó với phần bù Schur (schur complement) $M := S - RP^{-1}Q$ thì ta có đẳng thức

$$rank\left(\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}\right) = rank(P) + rank(M)$$

C/m: $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & * \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ Ý tưởng

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ RP^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P^{-1}Q \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ RP^{-1} & I \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} I & P^{-1}Q \\ 0 & I \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

khả nghịch

$$\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(P) + \operatorname{rank}(M).$$

Áp dụng bổ đề Guttman cho 2 ma trận $S_{kín}$ & $S_{hở}$, ta có

$$\operatorname{rank}(S_{hở}) = \operatorname{rank}(sI - A) + \operatorname{rank}(-D - C(sI-A)^{-1}B) = n + \operatorname{rank}(G_{hở}(s))$$

$$\operatorname{rank}(S_{kín}) = \operatorname{rank}(sI - (A+BK)) + \operatorname{rank}(-D - C(sI-(A+BK))^{-1}B) = n + \operatorname{rank}(G_{kín}(s))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rank}(G_{hở}(s)) = \operatorname{rank}(S_{hở}) - n \\ \operatorname{rank}(G_{kín}(s)) = \operatorname{rank}(S_{kín}) - n \end{cases} \quad (3)$$

Ta lại có $\begin{bmatrix} sI - (A+BK) & B \\ C+DK & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI-A & B \\ C & -D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(S_{kín}) = \operatorname{rank}(S_{hở}) \quad \forall s \notin \sigma(A) \cup \sigma(A+BK). \quad (4).$$

Từ (3) & (4) $\Rightarrow \operatorname{rank}(G_{hở}(s)) = \operatorname{rank}(G_{kín}(s))$.

$\Rightarrow$ $G_{hở}(s)$ & $G_{kín}(s)$ phải có cùng các không điểm.

TH Output Feedback: G/sử $D = 0$, $u(t) = Ky(t) + r(t) = KC\,x(t) + r(t)$.

Khi đó output feedback cho ta hệ kín $\begin{cases} \dot{x}(t) = (A+BKC)\,x(t) + B\,r(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$

$$S_{kín} = \begin{bmatrix} sI - (A+BKC) & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} sI-A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{S_{hở}}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -KC & I \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(S_{kín}) = \operatorname{rank}(S_{hở})$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(G_{kín}) = \operatorname{rank}(G_{hở})$.

Khi đó, output feedback sẽ không thay đổi các không điểm của hàm truyền.

Đối với các cực của hàm truyền, nó có thể thay đổi, ví dụ trong t/h $C = I_p$

nó cũng có thể giữ nguyên các cực, kể cả khi cặp (A,B) là đ.khiển được,

Ví dụ $C = 0_p \Rightarrow A + BKC = A + 0 = A \Rightarrow \forall K$ thì các cực của hàm truyền 0 đổi.

Do đó, bài toán gán phổ sẽ phức tạp hơn nếu dùng output feedback.

---

§2. Công thức Ackerman

Bài toán gán phổ (pole placement): Cho 1 ma trận $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ có phổ $\sigma(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

G/sử cặp (A,B) là đ.khiển được, ta đi tìm 1 ma trận K (t.ứ phản hồi trạng thái $u = Kx$) sao cho

hệ kín có ma trận $A + BK$ có phổ là $\sigma(A+BK) = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ cho trước.

Ý tưởng (Ackerman)
1. Chuyển (A,B) về dạng chính tắc điều khiển được. (khó hơn)
2. Tìm K dựa trên (làm trước).

Bước 2: G/sử (A,B) đã có dạng chính tắc đ.khiển được (controllable canonical form)

$$(*) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

$$\vec{\alpha} := [\alpha_1 \dots \alpha_n]$$

$$\vec{\beta} := [\beta_1 \dots \beta_n]$$

Với $K = [k_1\ k_2\ \dots\ k_n] \Rightarrow BK = [0] [k_1\ k_2\ \dots\ k_n] = [0\ \dots\ 0]$

$$\begin{bmatrix} & & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{\beta} := [\beta_1 \dots \beta_n]$$

Với $K = [k_1\ k_2 \dots k_n] \Rightarrow BK = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1\ k_2 \dots k_n] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ k_1 & \dots & k_n \end{bmatrix}$

Khi đó $A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ k_1 - \alpha_1 & \dots & k_{n-1} - \alpha_{n-1} & k_n - \alpha_n \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A+BK) = \{\alpha_1 - k_1, \alpha_2 - k_2, \dots, \alpha_n - k_n\}$

Nếu ta muốn gán $\sigma(A+BK) = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ thì ta chỉ cần chọn $\alpha_i - k_i = \beta_i \quad \forall i = 1,n$.

$\Leftrightarrow \vec{k} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (CT.Ackerman)

Bước 1: (A,B) ta điều khiển được thì $\exists$ ma trận T sao cho ta chuyển được hệ về dạng chính tắc điều khiển được = phép đổi biến $\bar{x} = T^{-1} x$

Khi đó $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$ sẽ có dạng (*).

P² của Ackerman: $K_c = [B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B] \xrightarrow{SI}$ khả nghịch

(với hệ là SI)

Xét phép đổi biến $\tilde{x} = K_c x$, thì ta sẽ có

$\tilde{A} = K_c^{-1} A K_c \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 0 & & & -\alpha_1 \\ 1 & \ddots & & -\alpha_2 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \\ & & & -\alpha_n \end{bmatrix}$ (6), $\tilde{B} = K_c^{-1} B \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (BT)

Xét $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \end{bmatrix}$ & $\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ là dạng chính tắc điều khiển được

Khi đó với $\hat{K}_c = [\hat{B}\ \hat{A}\hat{B}\ \dots\ \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$ thì ta sẽ có $\hat{K}_c$ khả nghịch.

Bên cạnh đó $A = \hat{K}_c^{-1} \hat{A} \hat{K}_c$. (7).

Từ (6) & (7) $\Rightarrow \tilde{A} = K_c^{-1} \hat{K}_c^{-1} \hat{A} \hat{K}_c K_c = (\hat{K}_c K_c)^{-1} \cdot \hat{A} \cdot (\hat{K}_c K_c)$.

Như vậy, qua phép đổi biến số $\bar{x} = \hat{K}_c K_c$ ta được dạng chính tắc điều khiển được $(\hat{A}, \hat{B})$.

Thuật toán: Ackerman chỉ giải quyết T/H: SI và bao gồm việc chuyển hệ

$$(A,B) \xrightarrow[\tilde{x} = K_c x]{} (\tilde{A}, \tilde{B}) \xrightarrow[\bar{x} = \hat{K}_c \tilde{x}]{} (\hat{A}, \hat{B})$$

Chú ý:
i) P² Ackerman được dùng để giải bài toán gán phổ cho hệ SI.
ii) Về việc tính toán số thì $K_c, \hat{K}_c$ ko phải ma trận trực giao, nên P² Ackerman ko bền vững (robust)
iii) MATLAB: Giải bài toán gán phổ → acker (SI), place (SI & MI)
iv) place thì bền vững, nhưng 0 sử dụng được trong T/H giá trị riêng lặp tức là $\vec{\beta} = [\beta_1 \dots \beta_n]$ có $\beta_i = \beta_j$ $(i \neq j)$
v) MATLAB thì A − BK thay vì A + BK như lí thuyết.

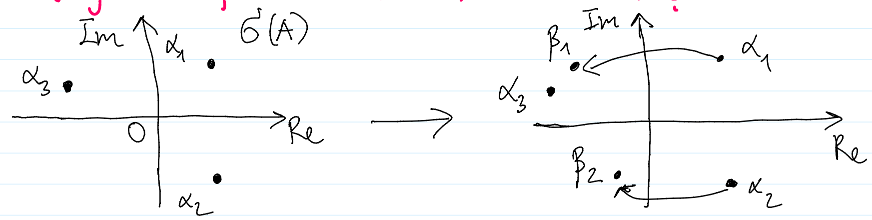
tức là $\vec{\beta} = [\beta_1 \cdots \beta_n]$ có $\beta_i = \beta_j$ $(i \neq j)$

v) MATLAB thì $A-BK$ thay vì $A+BK$ như lý thuyết.

§3. Bài Toán Ổn Định Hóa (Stabilization)

Bài toán: Nếu hệ $\dot{x} = Ax$ là 0 ổn định mũ, tức là $\sigma(A) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset$ thì ?$\exists$ state feedback $u = Kx$ sao cho hệ kín $\dot{x} = (A+BK)x$ là ổn định 0?

$\Leftrightarrow$



TH1: Nếu (A,B) là điều khiển được $\to$ ta gán được phổ bất kỳ $\Rightarrow$ hệ ổn định hoá được.

TH2: Nếu (A,B) là 0 điều khiển được $\to$?$\exists$ K

$$\dot{x} = Ax + Bu \xrightarrow[\text{Kalman ctrb. decp.}]{} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$\to$ mode điều khiển được

$\to$ mode 0 điều khiển được

Ta thấy nếu hệ là ổn định hoá được

$\Rightarrow$ phần 0 điều khiển được $\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{\bar{c}} \bar{x}_2$ phải là ổn định

Phần $\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_c \bar{x}_1 + \bar{B}_1 u + \bar{A}_{12} \bar{x}_2$ thì 0 đáng lo vì cặp $(\bar{A}_c, \bar{B}_1)$ là điều khiển được.

Kết luận: Hệ là ổn định hoá được $\Leftrightarrow$ các mode 0 điều khiển được đều $\in \mathring{\mathbb{C}}_-$.

Đ/lý: Hệ $\dot{x} = Ax + Bu$ là ổn định hoá được = state feedback $(u = Kx)$ $\Leftrightarrow$ nó thỏa mãn 1 trong các điều kiện tương đương sau.

i) Các mode 0 điều khiển được đều $\in \mathring{\mathbb{C}}_-$ $(\mathrm{Re} < 0)$

ii) Các mode 0 ổn định $(\mathrm{Re} \geq 0)$ đều là điều khiển được.

iii) $\forall s \in \sigma(A)$ mà $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ thì ma trận $[sI-A, B] \cdot [sI-A, B]^T$ là khả nghịch.

Hautus iv) $\forall s \in \sigma(A)$ mà $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ thì ma trận $[sI-A, B]$ đủ hạng dòng.

Đây là đK quan trọng để k/tra trong MATLAB.

C/m:

i) $\Leftrightarrow$ ii) & iii) $\Leftrightarrow$ iv) : Hiển nhiên

ii) $\Leftrightarrow$ iv). Xét $s \in \sigma(A)$ mà $\mathrm{Re}(s) \geq 0 \Rightarrow s$ là mode 0 ổn định.

Giả sử $\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$, $\bar{B} = TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Chú ý: T là ma trận trực giao $(T^T = T^{-1})$

Ta có $[sI - \bar{A}, \bar{B}] = T\,[sI - A, B] \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{rank}\,[sI - \bar{A}, \bar{B}] = \mathrm{rank}\,[sI - A, B] \quad \forall s \in \mathbb{C}$.

ii) $\Leftrightarrow$ $\sigma(\bar{A}_c)$ chứa tất cả các mode 0 ổn định $\Leftrightarrow$ $\sigma(\bar{A}_{\bar{c}})$ chỉ chứa các mode ổn định

Vì cặp $(\bar{A}_c, \bar{B}_1)$ là điều khiển được $\Rightarrow [sI-\bar{A}_c, \bar{B}_1]$ đủ hạng dòng $\forall s \in \mathbb{C}$.

$\Leftrightarrow sI - \bar{A}_c$ khả nghịch $\forall s \in \mathbb{C}_+$ (8)

$$\Rightarrow [sI-\bar{A}, \bar{B}] = \left[\begin{array}{cc|c} sI-\bar{A}_c & -\bar{A}_{12} & \bar{B}_1 \\ 0 & sI-\bar{A}_{\bar{c}} & 0 \end{array}\right]$$ có đủ hạng dòng $\forall s \in \mathbb{C}_+$

$\Leftrightarrow sI - \bar{A}_{\bar{c}}$ đủ hạng dòng $\forall s \in \mathbb{C}_+$ (9). Từ (8) & (9) $\Rightarrow$ đpcm. $\blacksquare$