

PHẦN I: PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU DẠNG BẢNG

BÀI TẬP LÝ THUYẾT

Trong các bài tập từ 1-4, hãy sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu theo cả 2 cách: lập phương trình chính tắc, và sử dụng phương pháp QR.

Câu 1 Hãy tìm hàm $f(x) = ax + b$ để xấp xỉ tốt nhất bảng số liệu sau theo phương pháp bình phương tối thiểu

x	1	2	3	4
y	0	1	1	2

Câu 2 Độ nhớt của một chất lưu là thông số đại diện cho ma sát trong của dòng chảy. Độ nhớt được biểu diễn qua một hàm bậc hai của nhiệt độ T , tức là $V = a + bT + cT^2$. Hãy tìm hàm xấp xỉ tốt nhất bảng số liệu sau theo phương pháp bình phương tối thiểu.

T	1	2	3	4	5	6	7
V	2.31	2.01	1.80	1.66	1.55	1.47	1.41.

Câu 3 a) Cường độ phóng xạ của một nguồn phóng xạ được cho bởi công thức $y = ae^{bx}$. Hãy xác định các tham số để xấp xỉ tốt nhất bảng số liệu sau theo phương pháp bình phương tối thiểu.

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	3.16	2.38	1.75	1.34	1.00

b) Câu hỏi tương tự phần a) nếu như hàm số được xét có dạng $y = (ax + b)^{-1}$.

Câu 4 Cho bảng số liệu sau.

x	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

- Hãy tìm đa thức bậc 1 (tuyến tính) tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.
- Hãy tìm đa thức bậc 2 tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.
- Hãy tìm đa thức bậc 3 tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.
- Hãy tìm hàm xấp xỉ dạng be^{ax} tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.
- Hãy tìm hàm xấp xỉ dạng bx^a tốt nhất theo nghĩa bình phương tối thiểu. Tìm sai số.

BÀI TẬP LẬP TRÌNH

Câu 5 Viết 2 hàm trong Python như sau. Hàm 1 để giải bài toán min $\|Ax - b\|$ có dạng

```
def least_square(A, b):  
return x
```

để tìm bình phương tối thiểu. Cho trước A, b , đi tìm x bằng 2 cách: phương trình chính tắc và QR. Chú ý có thể gọi ngay `numpy.linalg.qr` nếu cần thiết.

Hàm 2 để giải bài toán curve fitting có dạng

```
def curve_fitting(x, y, n):  
return p
```

trong đó x, y là các vector lưu dữ liệu, n là bậc của đường cong đa thức, tức là $y \approx p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n$. Vector output $p = [p_0 \ p_1 \ \dots \ p_n]$.

Câu 6 Giải 4 bài tập trên bằng hai hàm các em vừa viết. So sánh kết quả vừa tìm được với kết quả của việc dùng 2 built-in function trong Python.

`numpy.linalg.lstsq` : giải bài toán tìm bình phương tối thiểu,

<https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.polyfit.html>

`numpy.polyfit` : tìm các hệ số của đa thức xấp xỉ tốt nhất cho dữ liệu dạng bảng.

<https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.lstsq.html#numpy.linalg.lstsq>

Hết

Câu 7 Để tìm hàm nghiệm dạng $g(x) = a + bx^{-1} + cx^{-2}$ của bài toán tìm bình phương tối thiểu của một bảng số liệu dạng

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

một sinh viên quyết định biến đổi bài toán thành tìm nghiệm dạng $x^2g(x) = ax^2 + bx + c$ của bài toán mới tương ứng với bảng số liệu

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	$x_0^2y_0$	$x_1^2y_1$	\dots	$x_n^2y_n$

Hỏi kết quả hàm $g(x)$ trong hai bài toán này có trùng nhau không? Vì sao? Gợi ý: thử lập phương trình chính tắc cho TH $n=2$ xem.

PHẦN II: PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU TRÊN $L_2[a, b]$

Câu 8 Tìm đa thức nghiệm dạng $ax + b$ cho bài toán bình phương tối thiểu của hàm số $f(x)$ trong các trường hợp sau đây

- a. $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $[-1, 1]$; b. $f(x) = x^3$, $[-1, 1]$; c. $f(x) = \frac{1}{x}$, $[-1, 1]$;
d. $f(x) = e^x$, $[0, 2]$; e. $f(x) = 1/2\cos x + 1/3\sin 2x$, $[0, 1]$; f. $f(x) = x \ln x$, $[1, 3]$.

Câu 9 Xét hàm $f(x) = e^{2x}$ trên đoạn $[0, \pi]$. Chúng ta muốn xấp xỉ nó bằng đa thức lượng giác có dạng $p(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x)$. Hãy lập hệ phương trình và tìm a, b, c dựa vào phương pháp bình phương tối thiểu.

Câu 10 Đối với hệ phương trình tuyến tính dạng $Ax = b$, bài toán (và cả ma trận A) gọi là có **điều kiện xấu** nếu như số điều kiện $\text{cond}(A)$ là lớn. Sử dụng hàm cond trong Matlab/Octave, hãy kiểm tra điều kiện của hệ phương trình chuẩn tắc tương ứng với các trường hợp sau:

- a) $\min \|f - P\|_{L_2}$ với $f(x) = e^{2x}$, $[a, b] = [0, \pi]$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
b) $\min \|f - P\|_{L_2}$ với $f(x) = e^{2x}$, $[a, b] = [0, \pi]$, $p(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)$.
c) $\min \|f - P\|_{L_2}$ với $f(x) = e^{2x}$, $[a, b] = [0, \pi]$, $p(x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x)$, trong đó $L_i(x)$ là đa thức Legendre bậc i .

So sánh sai số (chính là $\min \|f - P\|_{L_2}$) trong 3 trường hợp trên và đưa ra kết luận.

Hết