Lecture 1 - Exercise

Thursday, December 30, 2021 7:57 AM

Câu 1 *Bài toán 1 (con lắc ngược): Xét mô hình điều khiển của một con lắc ngược (sau khi được tuyến tính hóa) cho bởi một phương trình vi phân bậc hai*

$$\varphi''(t) - \varphi(t) = u(t). \quad (1)$$

Ở đây, $\varphi(t)$ ~~$= \theta(t) - \pi$~~ là độ lệch góc của con lắc so với trạng thái cân bằng thẳng đứng tại thời điểm $t \geq 0$ và $u(t)$ là mômen lực tác dụng.

Hình 1: Con lắc ngược - Điều khiển sao cho con lắc chuyển động hướng về trục thẳng đứng

a) Chứng tỏ rằng đối với phản hồi tỷ lệ thuận (proportional state feedback) $u(t) = -\alpha\varphi(t)$ với $\alpha < 1$, mệnh đề sau là đúng: Nếu các giá trị ban đầu thỏa mãn $\varphi'(0) = -\varphi(0)\sqrt{1-\alpha}$, thì $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$. b) Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định. Xét hàm năng lượng $V(x,y) := \cos x - 1 + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + y^2)$. Chứng minh rằng $V(\varphi(t), \varphi'(t))$ là hằng số dọc theo các nghiệm của phương trình con lắc phi tuyến với phản hồi tỷ lệ thuận, được cho bởi

$$\varphi''(t) - \sin(\varphi(t)) + \alpha\varphi(t) = 0\,. \quad (2)$$

Từ đó kết luận rằng tồn tại các điều kiện ban đầu $\varphi(0) = \varepsilon$; $\varphi'(0) = 0$ sao cho nghiệm của (2) với ε nhỏ tùy ý không thỏa mãn $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty}\varphi'(t) = 0$.

Câu 1. inverted pendulum

$$\varphi''(t) - \varphi(t) = u(t) \quad (1)$$

$\varphi(t) = -\theta(t) - \pi$, $u(t)$: lực tác động
$\hookrightarrow$ biến điều khiển/input

(1) là 1 hệ bậc 2 → thực tế quy về hệ bậc nhất
Đặt $\psi(t) = \varphi'(t)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(t) = \psi(t) \\ \psi'(t) = \varphi(t) + u(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2)$$

Thực tế hệ (2) được dùng để nghiên cứu sự c/động của con lắc ngược

a) $u(t) = -\alpha\varphi(t)$ $(\alpha < 1)$ $\Rightarrow$ ta có $\varphi''(t) - \varphi(t) = -\alpha\varphi(t)$
$\Leftrightarrow \varphi''(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0. \quad (3)$

$\varphi'(0) = -\varphi(0).\sqrt{1-\alpha}$ thì $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0.$

Với (3) ta có pt đặc trưng $\lambda^2 + (\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1-\alpha}$.

CT n°: $\varphi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
$\downarrow$
$\varphi'(t) = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_1 = \sqrt{1-\alpha} > 0 \rightarrow$ giá trị riêng dương (gtr k0 ổ/định).
$\lambda_2 = -\sqrt{1-\alpha} < 0 \rightarrow$ giá trị riêng âm (gtr ổ/định).

Thời điểm b/đầu
$$\begin{cases} \varphi(0) = C_1 + C_2 \\ \varphi'(0) = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \varphi(0) \\ C_1\cancel{\sqrt{1-\alpha}} - C_2\cancel{\sqrt{1-\alpha}} = -\varphi(0)\cancel{\sqrt{1-\alpha}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \varphi(0) \\ C_1 - C_2 = -\varphi(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \varphi(0) \end{cases}$$

N° là $\varphi(t) = -\varphi(0)e^{\lambda_2 t} = -\varphi(0)e^{-\sqrt{1-\alpha}\,t} \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = 0.$

Chú ý: Nếu trong CT n° mà C_1 (t.ứ gtr 0 ổ/đ λ_1) $\neq 0 \Rightarrow$ n° k0 ổ/định.
Nếu " mà $C_1 = 0 \rightarrow$ chỉ còn C_2 (t.ứ gtr ổ/đ λ_2) $\Rightarrow$ n° ổ/đ mũ.

b) Nhắc lại hàm năng lượng (energy function/ hàm Liapunov)

$V(x,y) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + y^2)$. Ta đi xét hàm $V(x,y)$ dọc theo quỹ đạo n° của pt $\varphi''(t) - \sin(\varphi(t)) + \alpha\varphi(t) = 0. \quad (3)$

$$V(\varphi(t), \varphi'(t)) = \cos(\varphi(t)) - 1 + \frac{1}{2}(\alpha\,\varphi(t)^2 + \varphi'(t)^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}V(\varphi, \varphi') = -\sin(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) + \frac{1}{2}\cdot\left(2\alpha\cdot\varphi(t)\,\varphi'(t) + 2\,\varphi'(t)\,\varphi''(t)\right)$$

$$= \varphi'(t)\cdot\left[-\sin\varphi(t) + \alpha\varphi(t) + \varphi''(t)\right] \overset{(3)}{=} 0$$

Do đó $V(\varphi(t), \varphi'(t)) = \text{const}$ $\forall t \geq 0$. (đpcm)

$$\varphi''(t) - \sin(\varphi(t)) + \alpha\varphi(t) = 0\,. \quad (2)$$

Từ đó kết luận rằng tồn tại các điều kiện ban đầu $\varphi(0) = \varepsilon$; $\varphi'(0) = 0$ sao cho nghiệm của (2) với ε nhỏ tùy ý không thỏa mãn $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty}\varphi'(t) = 0$.

Ta phản chứng, g/s $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$ nào đó ta luôn có $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to\infty}\varphi'(t) = 0 \quad (4)$

trong đó $\varphi(t)$ là n° của bài toán (IVP) $\begin{cases} \varphi''(t) - \sin\varphi(t) + \alpha\varphi(t) = 0 \\ \varphi(0) = \varepsilon,\ \varphi'(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$

Nhắc lại $V(\varphi(t), \varphi'(t)) = \cos(\varphi(t)) - 1 + \frac{1}{2}(\alpha\,\varphi(t)^2 + \varphi'(t)^2)$

Cho $t \to +\infty$, theo (4) ta có $\lim_{t\to+\infty} V(\varphi(t), \varphi'(t)) = \cos(0) - 1 + \frac{1}{2}(\alpha.\,0^2 + 0^2) = 0$ //

(điều này mâu thuẫn với việc $V(\varphi(t), \varphi'(t))$ là hằng số dọc theo quỹ đạo n° của hệ (5) $\Rightarrow$ $V(\varphi(t), \varphi'(t)) = V(\varphi(0), \varphi'(0)) = \cos(\varepsilon) - 1 + \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2$

Theo khai triển Taylor

$$\approx -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

$$\approx \frac{-1}{2}(1-\alpha)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

$\neq 0$ (vì $\alpha < 1$ và $\varepsilon \neq 0$).

Từ mâu thuẫn này → g/s² là sai → đpcm.

Câu 2 *(tính ổn định của hệ thống LTI): Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Chứng minh các khẳng định sau:*

a) PTVP $x'(t) = Ax(t)$ là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \det(\lambda I - A) =$

Câu 2) PTVP $x'(t) = Ax(t)$ ổn n°

$\neq 0$ (vì $\alpha < 1$ và $\varepsilon \neq 0$) .)

Từ mâu thuẫn này → g/s² là sai → đpcm.

Câu 2 *(tính ổn định của hệ thống LTI)*: Cho $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Chứng minh các khẳng định sau:

a) PTVP $x'(t) = Ax(t)$ là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I - A) = 0\} \subset \mathbb{C}_-$ và $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

b) PTVP $x'(t) = Ax(t)$ là ổn định ~~tiệm cận~~ khi và chỉ khi $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I - A) = 0\} \subset \mathbb{C}_-$ và các giá trị riêng thuần ảo là đơn (bội 1).

Câu 2) PTVP $x'(t) = Ax(t)$ có n°

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad \forall t \geq 0. \qquad (0)$$

$$e^{At} \underset{\text{Taylor}}{\overset{\text{kt}}{=}} I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots + \frac{A^n}{n!}t^n + \dots \qquad (1)$$

Ta có khai triển Jordan $A = T^{-1}JT$ trong đó $J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix}$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix} \text{ hoặc } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Từ (1) $\Rightarrow$ $e^{At} = T^{-1}.e^{Jt}.T \Rightarrow Te^{At}T^{-1} = e^{Jt}$ (2).

T/c ổ/đ của hệ (0) $\Leftrightarrow$ t/c ổ/đ của hệ $y'(t) = Jy(t)$ (3) $\leftarrow$ nghiên cứu hệ (3) là đủ.

(trong đó $x(t) = Ty(t)$ là phép đổi biến cho hệ (0)).

a) Ta xét 1 block Jordan là đủ, vì $e^{Jt} = \text{blkdiag}(e^{J_1t}, e^{J_2t}, \dots, e^{J_kt})$
(Matlab) $\triangleq \begin{bmatrix} e^{J_1t} & & 0 \\ & e^{J_2t} & \\ 0 & & e^{J_kt} \end{bmatrix}$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & * & \cdots & * \\ & e^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \xrightarrow{t \to +\infty} \text{cần} \to 0 \text{ (ổ/đ tiệm cận)} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

b) TH $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ → ta đi xét block 2x2 là đủ, $\lambda_{1,2} = \pm\alpha i$, với $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} &= C_1e^{\alpha i t} + C_2e^{-\alpha i t} \\ &= C_1(\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t)) + C_2.(\cos(-\alpha t) + i\sin(-\alpha t)). \end{aligned}$$

N° của pt $y'(t) = Jy(t)$ có dạng $= (C_1 + C_2)\underline{\cos(\alpha t)} + i.(C_1 - C_2)\underline{\sin(\alpha t)}$.

Ta thấy 2 hàm $\sin(\alpha t)$, $\cos(\alpha t)$ đều tuần hoàn, và với $\alpha \neq 0$ thì

$$\nexists \lim_{t\to\infty} \cos(\alpha t), \quad \nexists \lim_{t\to\infty} \sin(\alpha t). \quad \Rightarrow \text{hệ 0 ổ/đ.}$$

TH n° đơn → như câu a ta có giá trị riêng đơn $\lambda = 0$.
Khi đó n° $y'(t) = 0$. $y(t) = 0 \Longrightarrow y(t) = \text{const} \to$ ổ/đ.

Minh họa rõ hơn trong Matlab.

Câu 6 *a) Cho trước ma trận $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Chứng minh rằng* $\|A\|_2 = \max\{\lambda \mid \det(\lambda I - A^TA) = 0\}$.

b) Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ khả nghịch, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{p,n}$, $D \in \mathbb{R}^{p,m}$. Chứng minh rằng $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ khả nghịch khi và chỉ khi ma trận $\underline{M := D - CA^{-1}B}$ là khả nghịch.

c) Xét TH đặc biệt $p = m$ và $D \in \mathbb{R}^{m,m}$ là xác định âm. Chứng minh rằng ma trận $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$ là (nửa) xác định âm khi và chỉ khi M là (nửa) xác định âm.

Schur complement.

Câu 7 *Cặp ma trận vuông $(E, A) \in (\mathbb{R}^{n,n})^2$ được gọi là chính quy nếu $\det(sE - A) \neq 0$ với số $s \in \mathbb{C}$ nào đó. Giả sử rằng cặp ma trận vuông (E, A) là chính quy, hãy chứng minh các khẳng định sau.*

a) Tồn tại 1 ma trận K khả nghịch sao cho KE và KA là giao hoán.

b) Tồn tại 2 ma trận khả nghịch W, T sao cho $WET = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, $WAT = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ trong đó J có dạng Jordan, N là ma trận lũy linh.

c) Từ đó hãy tìm dạng tổng nghiệm tường minh của phương trình

$$Ex'(t) = Ax(t) + f(t),$$

giả sử rằng hàm $f(t)$ là đủ trơn.

Câu 6.

a) Nếu Q là 1 ma trận trực giao thì nó bảo toàn $\|\cdot\|_2$, tức là

$\forall x \in \mathbb{R}^n \to \|Qx\|_2 = \|x\|$

$\|QA\|_2 = \|A\|$.

SVD = singular value decomposition → phân tích giá trị kì dị

$$A \in \mathbb{R}^{m,n} \to \exists\, \underbrace{U \in \mathbb{R}^{m,m}, V \in \mathbb{R}^{n,n}}_{\text{trực giao}}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{bmatrix}, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0 \text{ (singular value)}$$

s.c. $A = U^T\Sigma V$. → Dr. SVD . Gene Golub. (SIAM)

$\Rightarrow \|A\|_2 = \|U^T\Sigma V\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \sigma_1$. ①

$A^TA = V^T\Sigma^T \cancel{U} \cancel{U^T}\Sigma V = \underline{V}^T(\Sigma^T\Sigma)\underline{V}$

↳ $\lambda_i(A^TA) = \lambda_i(\Sigma^T\Sigma) = \sigma_i$ ② $\forall i = 1, \dots, k$.

Từ ① & ② thì ta có $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$.

Chú ý: Đặc biệt ưa thích sử dụng ma trận trực giao (orthogonal matrices) trong tính toán gần đúng để đảm bảo sự chính xác của n°.

VD: $\begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100.01 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to x = ?$

QA → $\neq$ khá xa nhau.

VD:

QA $\rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100.01 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = ?$

$\neq$ khác xa nhau.

$\rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100.001 \end{bmatrix} \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{x} = ?$

Sensitivity độ nhạy với nhiễu ~ chaotic systems

robustness: tính bền vững (ít chịu tác động của nhiễu).

$Q \rightarrow A x = b$

$Q \rightarrow A x = b \rightarrow$

Câu 7 *Cặp ma trận vuông $(E, A) \in (R^{n,n})^2$ được gọi là chính quy nếu $\det(sE - A) \neq 0$ với số $s \in C$ nào đó. Giả sử rằng cặp ma trận vuông (E, A) là chính quy, hãy chứng minh các khẳng định sau.*

a) Tồn tại 1 ma trận K khả nghịch sao cho KE và KA là giao hoán.

b) Tồn tại 2 ma trận khả nghịch W, T sao cho $WET = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, $WAT = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ trong đó J có dạng Jordan, N là ma trận lũy linh.

c) Từ đó hãy tìm công thức nghiệm tường minh của phương trình

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),$$

giả sử rằng hàm $f(t)$ là đủ trơn.

BONUS POINT.

Câu 7:

a) $K = (sE - A)^{-1}$

với s t/ý thì $sE - A$ khả nghịch

$\rightarrow (KE, KA)$ là cặp giao hoán.

c) $WET\dot{z} = WATz + Wf$

$x = Tz$

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \rightarrow$ PTVP

$\rightarrow$ CT Đại số của z_2.

$\rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = Jz_1 + f_1 \rightarrow \text{PTVP} \\ N\dot{z}_2 = z_2 + f_2 \rightarrow \left(I - N\frac{d}{dt}\right) z_2 = -f_2. \end{cases}$

N lũy linh $\rightarrow$ Neumann

$I - N$

$\left(I - N\frac{d}{dt}\right)^{-1} = I + N\frac{d}{dt} + \left(N\frac{d}{dt}\right)^2 + \dots + \left(N\frac{d}{dt}\right)^{\nu-1}$

ν: cấp lũy linh của N

$A \in \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow$ Jordan.

$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$

t.ư các giá trị riêng $\neq 0$

$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ block thứ 1 ... $\rightarrow$ k

$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$ hoặc $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 \neq 0$

Đ/n: N lũy linh (nilpotent) nếu $\exists \nu \in \mathbb{N}$ s.c. $N^\nu = 0$.

$\min\{\nu \mid N^\nu = 0\}$ gọi là cấp lũy linh

nilpotency index

$[A, B] := AB - BA$ nếu $A, B \in \{\ \}$