Lecture 3 new: Controllability of LTI

Sunday, February 13, 2022 9:34 PM

Nhắc lại: (LTV)

- Điều khiển được hoàn phần (C-con'ty) $\Leftrightarrow$ Null-con'ty: điều khiển được về 0.
- Gramian: (t_0, t_1) Gramian $\int_{t_0}^{t_1} G(t)\, G^T(t)\, dt$
- Gramian điều khiển (controllability Gramian)

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\, B(t)\, B^T(t)\, \Phi(t_0, t)^T\, dt$$

- Tính điều khiển được hoàn phần $\Leftrightarrow$ $W_c(t_0, t_1)$ x/đ dương với $t_1 > t_0$ nào đó.
- Tính điều khiển được cần được nghiên cứu trong mối liên hệ với hệ đối ngẫu (adjoint).

$$\dot{z}(t) = -A(t)^T z(t).$$

$$\Phi_z(t, s) = \Phi_x(s, t)^T$$

- Tập điều khiển được về 0

$$\begin{cases} C(0, t_0, t_1) = \operatorname{im} W_c(t_0, t_1). \\ \ker W_c(t_0, t_1) = \bigcap_{t \in [t_0, t_1]} \ker \left(\Phi(t_0, t) B(t) \right)^T \end{cases}$$

- Kiểm tra tính C-con'ty mà 0 cần tính họ tiến hoá $\{\Phi(t,s)\}$.

Đ/k đủ: $\operatorname{rank} [M_0(t_1) \quad M_1(t_1) \quad \dots \quad M_{n-1}(t_1)] = n$

trong đó

$$\begin{cases} M_0(t) := B(t) \\ M_{i+1}(t) := -A(t) M_i(t) + \dfrac{d}{dt} M_i(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hệ điều khiển được tại t_0.

Hôm nay: (LTI)

Ma trận điều khiển Kalman $K(A, B) = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$.

Đ/lý 2.11: $\forall t$ thì $C(0; 0, t) = \operatorname{im} W_c(0, t) = \operatorname{im} K(A, B)$

$\rightarrow$ điều khiển được trong thời gian t nhỏ tuỳ ý.

Đlý 2.12: (Hautus-Popov test) Cho hệ LTI $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, với $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$.

Khi đó 4 mệnh đề sau tương đương.

a) Hệ là C-điều khiển được $\triangleq$ (A, B) là điều khiển được.

b) $\operatorname{rank} K(A, B) = n$.

c) Nếu $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ là vectơ riêng trái của A (tức là $v^H A = \lambda v^H$ với $\lambda \in \mathbb{C}$) (tức là v là vectơ riêng của A^H, với $A^H = \overline{A^T}$) thì $v^H B \neq 0$.

$\Leftrightarrow \nexists\, v \neq \vec{0}$ s.c. $v^H [\lambda I - A, B] = 0$.

d) $\operatorname{rank} [A - \lambda I, B] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

hoặc $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

C/m: a) $\Leftrightarrow$ b) theo Đlý 2.11.

c) $\Leftrightarrow$ d) Ta có $v^H [A - \lambda I, B] = [v^H A - \lambda v^H, v^H B]$.

Do đó nếu $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ là vectơ riêng trái của A, thì $v^H A - \lambda v^H = 0$.

Khi đó ta có $v^H B \neq 0 \Leftrightarrow v^H [A - \lambda I, B] \neq 0$.

Vì v là vectơ riêng trái b/kỳ $\Rightarrow$ đk $v^H B \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} [A - \lambda I, B] = n$.

Do đó nếu $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ là vectơ riêng trái của A, thì $v^H A - \lambda v^H = 0$.
Khi đó ta có $\quad v^H B \neq 0 \iff v^H [A - \lambda I,\ B] \neq 0$.
Vì v là vectơ riêng trái bất kỳ $\Rightarrow$ đ/k $v^H B \neq 0 \iff \operatorname{rank}[A - \lambda I, B] = n$.

b) $\Rightarrow$ d) Ta sử dụng phản chứng, g/s $\operatorname{rank}[A - \lambda I,\ B] < n$ với λ nào đó.
Khi đó $\exists\, v \neq \vec{0}$ s/c $\quad v^H [A - \lambda I,\ B] = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^H A = \lambda v^H & (i) \\ v^H B = 0. & (ii) \end{cases}$$

Quy nạp ta có $\quad v^H A^k B = \lambda v^H A^{k-1} B = \dots \lambda^k v^H B = 0 \ \forall k \geq 1$.
Do đó $\quad v^H [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B] = 0$

$$\Rightarrow v^H \mathcal{K}(A,B) = 0 \Rightarrow \text{mâu thuẫn vì } \mathcal{K}(A,B) \text{ đủ hạng dòng.}$$

d) $\Rightarrow$ b) Ta c/m gián tiếp, tức là $\overline{b)} \Rightarrow \overline{d)}$. (0 có b) thì 0 có d))
G/sử $\operatorname{rank} \mathcal{K}(A,B) = r < n$.
Khi đó $\exists$ 1 cơ sở trực chuẩn $\{v_1, \dots, v_r\}$ của k/gian $\operatorname{im} \mathcal{K}(A,B)$.
Ta có thể bổ sung thêm $n-r$ vectơ trực chuẩn để tạo thành 1 cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$, k/h $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$.

Ta thấy $V = [\underbrace{v_1 \dots v_r}_{V_1} \mid \underbrace{v_{r+1} \dots v_n}_{V_2}]$ là ma trận trực giao, và

$$v_{r+1}^T \mathcal{K}(A,B) = \dots = v_n^T \mathcal{K}(A,B) = \vec{0} \Rightarrow V_2^T B = 0. \ (iii)$$

Theo đ/lý Cayley-Hamilton A^n là 1 tổ hợp tuyến tính của $I_n, \dots, A^{n-1}$,
do đó

$$\operatorname{im} \mathcal{K}(A,B) \supseteq \operatorname{im}(A\,\mathcal{K}(A,B))$$

$\Rightarrow \mathcal{K}(A,B)$ là 1 k/gian con bất biến dưới ma trận $A \Rightarrow A V_1 = V_1 A_{11}$
với $A_{11} \in \mathbb{R}^{r,r}$.

Do đó, $$AV = A[V_1 \mid V_2] = V \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad (iv)$$

Ta lấy $\tilde{v}_2 \neq \vec{0}$ là vectơ riêng trái của A_{22},
tức là $\quad \tilde{v}_2^H A_{22} = \lambda \tilde{v}_2^H \quad$ với $\lambda \in \sigma(A_{22}) \subseteq \sigma(A)$.

Ta xây dựng $v = V \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}$ thì $\quad v^H B = [0 \ \ \tilde{v}_2^H] V^T B = [0 \ \ \tilde{v}_2^H] \cdot \begin{bmatrix} V_1^T B \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ (v)
(chú ý theo iii) thì $V_2^T B = 0$)

$$v^H A = [0 \ \ \tilde{v}_2^H] V^T A = [0 \ \ \tilde{v}_2^H] \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} V^T \quad (\text{theo (iv)})$$

$$= [0 \ \ \tilde{v}_2^H A_{22}] V^T = [0 \ \ \lambda \tilde{v}_2^H] V^T = \lambda \underbrace{[0 \ \ \tilde{v}_2^H] V^T}_{v^H} = \lambda \cdot v^H \quad (vi)$$

Từ (v) & (vi) $\Rightarrow \left.\begin{matrix} v^H [A - \lambda I,\ B] = 0. \\ v \neq \vec{0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{rank}[A - \lambda I,\ B] < n$. ▨

Chú ý: Để k/tra tính đ.đ.k đc thì về mặt lý thuyết có thể dùng cả c) & d).
Tuy nhiên, thực tế người ta 0 dùng c) vì 2 lí do
i) phải đi tính các vectơ riêng trái của A $\Rightarrow$ đắt & rất nhạy với nhiễu.
ii) k/tra đ/k $v^H B \neq 0$ rất dễ nhầm do sai số. $(10^{-32} \approx 0)$.
Thực tế dùng phân tích trong c/m d) $\Rightarrow$ b) (phân tích Kalman)
là công cụ chính trong MATLAB, PYTHON.

Phân tích (đ.đ.k) Kalman: • Tìm ma trận trực giao $V = [V_1 \ \ V_2]$, và công cụ chính trong MATLAB, PYTHON.

<u>Phân tích (điều khiển) Kalman</u>: • Tìm ma trận trực giao $V = [V_1 \quad V_2]$,

$V_1 = \text{orth}(\mathcal{K}(A,B))$ $\quad (V_2 = \text{null}(\mathcal{K}(A,B)^T))$

• Tính $V^T A V = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, $V^T B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ta có cặp (A_{11}, B_1) là điều khiển được.

$A_{11} \in \mathbb{R}^{r,r}$, với $r = \text{rank}(\mathcal{K}(A,B))$.

• Đổi biến $\tilde{x} := V^T x$ thì ta có $\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 + B_1 u \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \qquad\qquad A_{22}\tilde{x}_2 \end{cases}$

$\tilde{x}_1$ là đ khiển đc

$\tilde{x}_2$ là 0 đ khiển đc.

• Trong MATLAB: ctrb cho ta $\mathcal{K}(A,B)$

gram cho ta Gramian điều khiển trong t/h hệ ổ/định mũ, tức là $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}^-$

khi đó $W_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$.

• Thực tế W_c được tính = cách giải pt Lyapunov (c/m)

$$A W_c + W_c A' + B B' = 0,$$

Hàm Lyapunov $x^T W_c x$.