ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIÁO DỤC

\- - - - - - - - - - -

GIANG VĂN TOẢN

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT Ở LỚP 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ SƯ PHẠM TOÁN

Hà Nội - 2016

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIÁO DỤC

GIANG VĂN TOẢN

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT Ở LỚP 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ SƯ PHẠM TOÁN
(BỘ MÔN TOÁN)
Mã số: 60.14.01.11

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. NGUYỄN MINH TUẤN

Hà Nội - 2016

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên của luận văn này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành, sâu sắc tới PGS.TS Nguyễn Minh Tuấn, người thầy không chỉ hướng dẫn và truyền cho tác giả những kinh nghiệm quí báu trong học tập và nghiên cứu khoa học mà còn luôn quan tâm, động viên, khích lệ và tận tình hướng dẫn để tác giả vươn lên trong học tập và vượt qua những khó khăn trong quá trình hoàn thành luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy giáo, cô giáo trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội đã nhiệt tình giảng dạy và hết lòng giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu đề tài.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, các thầy cô trường Trung học phổ thông Chương Mỹ A đã tạo điều kiện giúp đỡ tác giả trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Sự quan tâm giúp đỡ của gia đình, bạn bè và đặc biệt là lớp Cao học Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán khóa 10 trường Đại học Giáo dục là nguồn động viên cổ vũ và tiếp thêm sức mạnh cho tác giả trong suốt những năm học tập và thực hiện đề tài.

Hà Nội, tháng 09 năm 2016

Tác giả

Giang Văn Toản.

Mục lục

Danh sách bảng

Mở đầu

1 Lý do chọn đề tài

Rèn luyện, bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho học sinh là một nhiệm vụ quan trọng của nhà trường phổ thông, đặc biệt trong dạy học môn Toán. Luật giáo dục 2005 sửa đổi bổ sung năm 2009 cũng đặt ra nhiệm vụ phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh: "Phương pháp giáo dục phổ thông phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, sáng tạo của học sinh; phù hợp với đặc điểm của từng lớp học, môn học; bồi dưỡng phương pháp tự học, khả năng làm việc theo nhóm; rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn; tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú học tập cho học sinh".

Theo Nghị quyết số 29-NQ/TW ngày 04 tháng 11 năm 2013 của Hội nghị lần thứ 8 Ban chấp hành Trung ương Đảng (khóa XI) về Đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo, đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa trong điều kiện kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế đề ra quan điểm về phát triển chương trình giáo dục phổ thông: *"Tiếp tục đổi mới mạnh mẽ phương pháp dạy và học theo hướng hiện đại; vận dụng các phương pháp, kĩ thuật dạy học một cách linh hoạt, sáng tạo, hợp lý, phù hợp với với nội dung, đối tượng và điều kiện cụ thể của cơ sở giáo dục phổ thông; phát huy tính tích cực, chủ động, sáng tạo của học sinh; thực hiện phương châm giảng ít, học nhiều, khắc phục lối truyền thụ áp đặt một chiều, ghi nhớ máy móc; tập trung dạy cách học, cách nghĩ, khuyến khích và rèn luyện năng lực tự học, tạo cơ sở để học tập suốt đời, tự cập nhật và đổi mới tri thức, kỹ năng, phát triển năng lực".* Với một trong số các phẩm chất, năng lực và chuẩn đầu ra chương trình giáo dục mỗi cấp học có năng lực sáng tạo.

Theo thang Bloom sáng tạo là cấp độ tư duy cao nhất trong 6 cấp độ: ghi nhớ, hiểu, áp dụng, phân tích, đánh giá, sáng tạo.

Theo [2] tác giả đưa ra tư duy sáng tạo là quá trình suy nghĩ đưa người giải từ không biết cách đạt đến mục đích đến biết cách đạt đến mục đích hoặc từ không biết cách tối ưu đạt đến mục đích đến biết cách tối ưu đạt đến mục đích trong một số cách đã biết. Trong dạy học toán hiện nay giáo viên và học sinh thường quan tâm đến kết quả suy nghĩ, chẳng hạn khi đặt các câu hỏi hoặc yêu cầu giải các bài tập giáo viên thường quan tâm, đánh giá các câu trả lời, lời giải và đáp số mà ít khi đi vào hướng dẫn học sinh quá trình suy nghĩ để có được kết quả đó.

Những biểu hiện của sự sáng tạo trong học toán là biết nhìn bài toán theo một khía cạnh mới, nhìn bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau, nhiều cách giải khác nhau, biết đặt ra giả thuyết khi phải lý giải một vấn đề, biết đề xuất những giải pháp khác nhau khi phải xử lý một tình huống; không hoàn toàn bằng lòng với những lời giải đã có, không máy móc áp dụng những quy tắc, phương pháp đã biết vào những tình huống mới.

Mặt khác chủ đề phương trình mũ và phương trình logarit là một chủ đề khó, chưa gây được hứng thú đối với học sinh Trung học phổ thông. Học sinh với tâm lý ngại và sợ học chủ đề này dẫn tới hiệu quả việc dạy và học không cao. Để cải thiện tình hình nói trên, giáo viên phải có những biện pháp tích cực, chủ động, sáng tạo trong việc lĩnh hội tri thức của học sinh. Thay đổi phương pháp dạy học như thế nào là một bài toán khó, cần nhiều thời gian và công sức tìm tòi của giáo viên, tuy nhiên quan trọng hơn cả là phương pháp dạy học như thế nào để đạt được hiệu quả cao trong quá trình dạy và học.

Với những lí do trên, tôi đã lựa chọn đề tài nghiên cứu luận văn *"Phát triển năng lực tư duy sáng tạo của học sinh thông qua dạy học phương trình mũ và phương trình logarit ở lớp 12"* làm luận văn tốt nghiệp của mình.

2 Nhiệm vụ nghiên cứu

- Hệ thống hóa cơ sở lý luận về phương pháp dạy học rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh.

- Nghiên cứu về nội dung phương trình mũ và logarit trong chương trình Toán Giải tích lớp 12.

- Nghiên cứu thực trạng dạy học phần phương trình mũ và phương trình logarit lớp 12 Trung học phổ thông.

- Thực nghiệm sư phạm để kiểm tra tính hiệu quả của của việc dạy học theo phương pháp đã đề xuất.

3 Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của đề tài nhằm phát triển tư duy sáng tạo của học sinh trong việc dạy và học môn Toán nói chung và phần Phương trình mũ và phương trình logarit trong chương trình toán Trung học phổ thông nói riêng.

4 Phạm vi nghiên cứu

- Nghiên cứu về phần phương trình mũ và phương trình logarit trong chương trình toán Trung học phổ thông.
- Nghiên cứu thực trạng dạy và học phương trình mũ và phương trình logarit ở lớp 12.

5 Mẫu khảo sát

Các dạng phương trình mũ và phương trình logarit lớp 12.

Khách thể nghiên cứu: Học sinh lớp 12 trường Trung học phổ thông Chương Mỹ A.

6 Câu hỏi nghiên cứu

- Thực trạng dạy và học chủ đề phương trình mũ và phương trình logarit lớp 12 như thế nào?
- Dạy học phương trình mũ và phương trình logarit theo hướng rèn luyện tính sáng tạo cho học sinh có phù hợp và có thể nâng cao hiệu quả của việc dạy và học toán hay không?

7 Giả thuyết khoa học

Nếu khai thác và vận dụng phương pháp dạy học rèn luyện và phát triển tư duy, đặc biệt là tư duy sáng tạo trong dạy học nội dung phương trình mũ và phương trình logarit lớp 12 thì học sinh sẽ tích cực chủ động hơn trong học tập, nắm vững các kiến thức về giải phương trình mũ và phương trình logarit; góp phần đổi mới và nâng cao hiệu quả dạy học chủ đề phương trình mũ và phương trình logarit.

8 Phương pháp nghiên cứu

8.1 Phương pháp nghiên cứu lý thuyết

- Nghiên cứu tài liệu: thu thập tài liệu (các văn bản, chỉ thị, luật giáo dục ...), phân tích, tổng hợp tài liệu (xử lý kết quả phân tích tài liệu dùng cái hay của tài liệu vào đề tài đang nghiên cứu).

- Nghiên cứu về lý luận dạy học, các phương pháp dạy học môn Toán, phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề, nội dung chương trình Sách giáo khoa, Sách bài tập, Giải tích 12 cơ bản, nâng cao, nội dung một số sách tham khảo liên quan đến đề tài đang nghiên cứu.

8.2 Phương pháp thực nghiệm sư phạm

- Điều tra, quan sát: Thông qua dự giờ, trao đổi, thảo luận, nghiên cứu lịch trình, giáo án, sổ điểm, nhất là các phương tiện trực quan và cách sử dụng chúng nhằm tìm hiểu việc dạy và học để có thể đánh giá sơ bộ kết quả dạy và học bộ môn.
- Tiến hành giảng dạy theo tiến trình đã soạn thảo.
- Tiến hành giảng dạy theo tiến trình bình thường (đối chứng).
- Dùng thống kê toán học xử lí kết quả thu được rút ra những kết luận của đề tài.

8.3 Phương pháp thống kê Toán học

Xử lý các số liệu thu được từ thực nghiệm sư phạm bằng các phần mềm như Excel, SPSS.

9 Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm 3 chương

Chương 1 Cơ sở lí luận và thực tiễn.

Chương 2 Biện pháp rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh trong dạy học phương trình mũ và phương trình logarit ở lớp 12.

Chương 3 Thực nghiệm sư phạm.

Chương 1

Cơ sở lí luận và thực tiễn

1.1 Tư duy

Thực tiễn cuộc sống luôn đặt con người trước các vấn đề phải quyết định và lựa chọn. Để đưa ra được những quyết định và lựa chọn đó, con người phải nhận biết được thực tiễn, phân tích được các yếu tố bản chất và các mối liên hệ bên trong của mỗi sự vật hiện tượng để khái quát thành quy luật. Quá trình nhận diện, phân tích và đưa ra quyết định đó được gọi là tư duy.
Vậy "Tư duy là một quá trình tâm lý phản ánh các thuộc tính bản chất, các mối liên hệ quan hệ bên trong mang tính quy luật của sự vật hiện tượng trong hiện thực khách quan mà trước đó ta chưa biết". [11]
Tư duy thuộc giai đoạn nhận thức lý tính, nó không chỉ đơn thuần nhận thức sự vật hiện tượng một cách trực tiếp bằng cảm giác và tri giác mà đòi hỏi quá trình phân tích, nhìn nhận các thuộc tính bản chất và quy luật bên trong của sự vật hiện tượng. Đó là quá trình khái quát hóa sự vật hiện tượng và xuất phát từ các hoạt động thực tiễn của con người. Quá trình này sử dụng ngôn ngữ và biểu tượng được truyền đạt qua các thế hệ loài người. Tư duy nhằm mục đích giải quyết các vấn đề, nhiệm vụ mà cuộc sống đặt ra. Do đó, tư duy mỗi người được hình thành và phát triển trong quá trình hoạt động nhận thức tích cực của chính họ, đồng thời nó cũng chịu ảnh hưởng của sự phát triển xã hội trong từng giai đoạn lịch sử.

1.2 Các thao tác của tư duy

1.2.1 Phân tích và tổng hợp

Phân tích là quá trình dùng trí óc để phân chia đối tượng nhận thức thành các bộ phận, các thành phần khác nhau từ đó vạch ra được những thuộc tính, những đặc điểm của đối tượng nhận thức hay xác định các bộ phận của một tổng thể bằng cách so sánh, phân loại, đối chiếu, làm cho tổng thể của đối tượng được bộc lộ. Chẳng hạn phân tích một bài toán được hiểu là tách các yếu tố trong bài toán làm cho nó xuất hiện hết các yếu tố (yếu tố đã cho, yếu tố cần tìm, các số liệu, kích thước, hình vẽ,...), đồng thời làm xuất hiện mối quan hệ giữa các yếu tố (quan hệ bộ phận - tổng thể, tổng thể - bộ phận, quan hệ hơn - kém, quan hệ tỉ lệ thuận - nghịch,...), từ đó xuất hiện cấu trúc, mô hình các dạng toán quen thuộc.

Tổng hợp là quá trình dùng trí óc để hợp nhất, sắp xếp hay kết hợp những bộ phận, những thành phần, những thuộc tính của đối tượng nhận thức đã được tách rời nhờ sự phân tích thành một chỉnh thể để từ đó nhận thức đối tượng một cách bao quát, toàn diện hơn. Tổng hợp còn thể hiện ở khả năng liên kết những sự kiện tưởng như rời rạc không có quan hệ với nhau trước đây thành một tổng thể mạch lạc, có hệ thống chặt chẽ. Trong tư duy, tổng hợp là thao tác được xem là mang dấu ấn sáng tạo và gắn với tư duy sáng tạo. Khi nói người có "đầu óc tổng hợp" thì cũng tương tự như nói người có "đầu óc sáng tạo".

Phân tích và tổng hợp là hai thao tác trong một quá trình thống nhất biện chứng, sự phân tích được tiến hành theo hướng tổng hợp còn sự tổng hợp được thực hiện theo kết quả của phân tích. Đây là hai thao tác cơ bản nhất của mọi quá trình tư duy.

Có thể nói phân tích - tổng hợp là một cặp thao tác tư duy cơ bản và quan trọng nhất để giải quyết vấn đề. Nó được thực hiện trong tất cả các quá trình tư duy của học sinh. Với đặc trưng là phân chia đối tượng nhận thức thành các bộ phận, các thành phần khác nhau sau đó hợp nhất các thành phần đã được tách rời nhờ sự phân tích thành một chỉnh thể, trong môn toán, thao tác phân tích - tổng hợp thường được sử dụng để tìm hiểu đề bài, để nhận diện bài toán thuộc loại nào, phân tích cách diễn đạt các mối quan hệ của bài toán, phân tích thuật ngữ, phân tích cách hỏi, câu hỏi, yêu câu của bài toán, những tình huống,... tổng hợp các yếu tố, điều kiện vừa phân tích trong bài toán để đưa ra điều kiện mới, kết luận mới, tổng hợp các bước giải bộ phận để liên kết tạo thành bài giải hoàn thiện, tổng hợp các bài toán tương tự theo một tiêu chí nhất định thành một mẫu bài toán, tổng hợp các cách giải tạo thành phương pháp giải chung.

Ví dụ 1.2.1 Giải phương trình mũ

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{3x+1} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{5x+7}.$$

Học sinh nhận dạng phương trình đã cho có dạng $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, thông thường đối với dạng bài toán này học sinh sẽ lấy logarit cơ số thích hợp hai vế của phương trình. Giả sử, lấy logarit hai vế cơ số $2+\sqrt{3}$, ta thu được $3x+1 = (5x+7)\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$. Đến đây học sinh cần tìm giá trị của $\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$. Khi đó học sinh để ý rằng $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2-(\sqrt{3})^2 = 1$, từ đó suy ra

$$2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1};\ \log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}) = \log_{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{-1} = -1.$$

Mấu chốt của bài toán là phép biến đổi $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2-(\sqrt{3})^2 = 1$, do đó học sinh có thể tìm được lời giải ngắn gọn hơn. Ta có

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2-(\sqrt{3})^2 = 1.$$

Suy ra

$$2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}.$$

Do đó ta có các phương trình tương đương

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{3x+1} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{5x+7};$$
$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{3x+1} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-5x-7};$$

hay $3x+1 = -5x-7$.

Ta tìm được $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

1.2.2 So sánh và tương tự

So sánh là quá trình dùng trí óc để xác định sự giống nhau hay khác nhau, sự đồng nhất hay không đồng nhất, sự bằng nhau hay không bằng nhau giữa các đối tượng nhận thức. Thao tác này liên quan chặt chẽ với thao tác phân tích và tổng hợp.

Tương tự là một dạng so sánh mà từ hai đối tượng giống nhau ở một số dấu hiệu rút ra kết luận hai đối tượng đó giống nhau ở các dấu hiệu khác.

Người ta thường xét sự tương tự trong toán học trên các khía cạnh sau:

- Hai phép chứng minh là tương tự nếu đường lối, phương pháp chứng minh là giống nhau.
- Hai hình là tương tự nếu chúng có nhiều tính chất giống nhau hay nếu vai trò của chúng giống nhau trong vấn đề nào đó, hoặc giữa các phần tử tương ứng của chúng có quan hệ giống nhau.
- Hai tính chất là tương tự nếu chúng biểu diễn các yếu tố hoặc các thuộc tính của hai hình tương tự.

Tương tự là nguồn gốc của nhiều phát minh. Bên cạnh đó cũng giống như khái quát hóa, tương tự thuộc về những suy luận có lý, do đó cần lưu ý với học sinh những kết luận rút ra từ tương tự có thể dẫn đến những kết luận sai.

Ví dụ 1.2.2 Giải các phương trình mũ sau

a) $3^x + 4^x = 5^x$;

b) $3^x + 5^x = 2.4^x$.

Quan sát hai câu và so sánh học sinh nhận thấy sự giống nhau về hình thức. Vì vậy trong tư duy học sinh nghĩ cách giải hai câu này tương tự nhau. Tuy nhiên ta có hai lời giải khác nhau.

Lời giải. Với câu a) ta khó tìm được mối liên hệ giữa các cơ số. Tuy nhiên ta nhận thấy phương trình có nghiệm $x = 2$. Ta tìm cách chứng minh $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Để làm điều này ta chia hai vế của phương trình cho 5^x (nhằm tạo ra hàm số ở vế trái nghịch biến) ta được

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Đặt

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x,$$

suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến và $f(2) = 1$.
Với $x > 2$ thì $f(x) < f(2) = 1$, phương trình vô nghiệm.
Với $x < 2$ thì $f(x) > f(2) = 1$, phương trình vô nghiệm.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.
Với câu b) phương pháp đánh giá không dùng được vì rất khó đánh giá tính đồng biến, nghịch biến vì vậy ta có lời giải:
Ta có $3^x + 5^x = 2.4^x$, hay $5^x - 4^x = 4^x - 3^x$. Giả sử phương trình ẩn x có nghiệm là α, xét hàm số $f(t) = (t+1)^\alpha - t^\alpha,\ (t > 0)$. Ta có

$$f'(t) = \alpha\left((t+1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right).$$

Hơn nữa $f(4) = f(3)$, và $f(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[3,4]$. Theo định lí Lagrange $\exists c \in [3,4]$ sao cho $f'(c) = 0$ hay $\alpha\left((c+1)^{\alpha-1} - c^\alpha\right) = 0$, suy ra $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$.
Thử lại thấy $x = \alpha = 0$ và $x = \alpha = 1$ đều thỏa mãn phương trình. Từ đó tìm được $x = 0;\ x = 1$ là nghiệm của phương trình.

1.2.3 Khái quát hóa và đặc biệt hóa

Theo G. Pôlya, "Khái quát hóa là chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho đến việc nghiên cứu một tập lớn hơn, bao gồm cả tập hợp ban đầu". [15]
Trong [8] tác giả đã nêu rõ, "Khái quát hóa là chuyển từ một tập hợp đối tượng sang một tập hợp lớn hơn chứa tập hợp ban đầu bằng cách nêu bật một số trong các đặc điểm chung của các phần tử của tập hợp xuất phát".
Theo G. Pôlya, "Đặc biệt hóa là chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho sang việc nghiên cứu một tập hợp nhỏ hơn chứa trong tập hợp đã cho". [15]
Qua đó ta thấy rằng khái quát hóa là quá trình tư duy đi từ nhiều cái riêng đến cái chung cái tổng quát hoặc từ cái tổng quát đến tổng quát hơn.
Đặc biệt hóa là thao tác tư duy ngược với lại khái quát hóa.

Ví dụ 1.2.3 Từ bài toán giải phương trình mũ dạng $m.a^x + b.a^{-x} + p = 0$ này có thể mở rộng thành bài toán đưa được về dạng $m.a^x + b.a^{-x} + p = 0$. Ví dụ từ bài toán giải phương trình mũ

$$\left(5+\sqrt{24}\right)^x + \left(5-\sqrt{24}\right)^x = 10,$$

Với $\left(5+\sqrt{24}\right)\left(5-\sqrt{24}\right) = 5^2 - (\sqrt{24})^2 = 1$, học sinh có thể biến đổi $\left(5+\sqrt{24}\right) = \left(5-\sqrt{24}\right)^{-1}$, sau đó đổi biến $t = \left(5+\sqrt{24}\right)^x$.
Bài toán mở rộng: Giải phương trình

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^x + 16\left(3-\sqrt{5}\right)^x = 2^{x+3}.$$

Để giải bài toán này học sinh cần phân tích, biến đổi phương trình

$$\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4;$$

tương đương

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{3-\sqrt{5}};$$

hay

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}.$$

Từ đó chia cả hai vế của phương trình cho 2^x, rồi đổi biến đưa phương trình về dạng $m.a^x + b.a^{-x} + p = 0$.
Ngoài các thao tác tư duy ở trên còn kể để các thao tác tư duy khác như: Trừu tượng hóa, tương tự hóa, quy lạ về quen, lật ngược vấn đề. Các thao tác tư duy ở trên có quan hệ mật thiết, thống nhất nhau theo một hướng nhất định do nhiệm vụ của tư duy quy định.

1.3 Tư duy sáng tạo

Trước hết, hiểu theo nghĩa đơn giản thì sáng tạo là hoạt động tạo ra cái mới. Theo từ điển Tiếng Việt thì sáng tạo được hiểu là “tìm ra cái mới, cách giải quyết mới, không bị gò bó, phụ thuộc vào cái đã có”.
Theo từ điển Triết học, “Sáng tạo là quá trình hoạt động của con người tạo

ra những giá trị vật chất, tinh thần mới về chất. Các loại hình sáng tạo được xác định bởi đặc trưng nghề nghiệp như khoa học kĩ thuật, tổ chức quân sự. Có thể nói sáng tạo có mặt trong mọi lĩnh vực của thế giới vật chất và tinh thần".

Theo [2] cho rằng "Sáng tạo là hoạt động tạo ra bất kì cái gì có đồng thời tính mới và tính ích lợi".

Sáng tạo là hoạt động chứ không phải chỉ là kết quả, và kết quả sáng tạo phải có 2 đặc điểm: tính mới và tính ích lợi. Quan điểm này cơ bản là đúng đắn. Tuy nhiên thuật ngữ "tính ích lợi" được dùng trong lĩnh vực sáng chế kĩ thuật hơn là trong mọi loại hình sáng tạo. Có những sản phẩm sáng tạo không chỉ là có "tính mới" mà nó là sản phẩm mới hẳn về chất, chẳng hạn những kiệt tác trong văn học, nghệ thuật. Hơn nữa, định nghĩa trên chưa liên hệ "sáng tạo" với "vấn đề". Vấn đề có mối liên hệ chặt chẽ với sáng tạo. Người ta chỉ sáng tạo khi có vấn đề nảy sinh, quá trình giải quyết vấn đề cũng chính là quá trình sáng tạo. Từ đó, trên lập trường duy vật biện chứng, chúng tôi định nghĩa: Sáng tạo là quá trình hoạt động của con người tạo ra cái mới có giá trị giải quyết vấn đề đặt ra một cách hiệu quả, đáp ứng nhu cầu xác định của con người.

Sáng tạo là năng lực đặc trưng vượt trội của con người so với loài vật. Nhờ có sáng tạo con người tạo ra những sản phẩm kì diệu mà thiên nhiên hào phóng không thể có được; tạo ra những sản phẩm vật chất và tinh thần ngày càng phong phú, đa dạng và tinh vi. Sáng tạo có ở trong mọi lĩnh vực hoạt động của con người (khoa học, nghệ thuật, kinh tế, chính trị...). Bởi bất kì hoạt động nào không theo khuôn mẫu cũ khiến nảy sinh vấn đề và có sự giải quyết nó một cách thỏa đáng đều mang tính sáng tạo. Ở điều kiện phát triển bình thường, ai cũng có năng lực sáng tạo, chỉ khác nhau ở chỗ: năng lực sáng tạo cao hay thấp và có khả năng phát huy hay không.

Sáng tạo là hoạt động của con người gắn liền với tư duy giải quyết vấn đề nhưng không đồng nhất với tư duy. Bởi, một mặt nếu không có tư duy của chủ thể tìm lời giải cho vấn đề thì nó không thể được giải quyết, thiếu tư duy không thể có sáng tạo. Mặt khác, tùy theo trường hợp cụ thể, để giải quyết vấn đề, hình thành sản phẩm sáng tạo, thì không chỉ có vai trò chi phối của tư duy (của chủ thể) mà còn có sự tham gia của các yếu tố khác nữa (như giác quan, ý chí, tình cảm, thể lực... và những yếu tố bên ngoài như: công cụ, tư liệu, môi trường xã hội). Cho nên, có bốn bộ phận hợp thành trong hoạt động sáng tạo của con người, đó là

(i) Chủ thể sáng tạo;

(ii) Vấn đề sáng tạo;

(iii) Những điều kiện khách quan của sáng tạo (gồm: công cụ, phương tiện, tư liệu và môi trường sáng tạo);

(iv) Sản phẩm sáng tạo.

Cả bốn bộ phận này có sự tác động tương hỗ lẫn nhau trong đó chủ thể sáng tạo là trung tâm, vấn đề sáng tạo là điểm khởi đầu (nảy sinh vấn đề sáng tạo ở chủ thể), sản phẩm sáng tạo là kết quả. Ở bộ phận thứ 3 (những điều kiện khách quan của sáng tạo) môi trường sáng tạo là yếu tố tác động tất yếu lên chủ thể sáng tạo, vì con người luôn nằm trong các mối quan hệ xã hội và trong đại đa số trường hợp, sự sáng tạo của chủ thể không thể thiếu những tư liệu, công cụ hay phương tiện vật chất. Giữa sản phẩm sáng tạo và ba bộ phận còn lại có mối quan hệ nhân quả. Nhìn chung, thiếu một trong 4 bộ phận trên thì không thể có sáng tạo.

Trong các bộ phận của hoạt động sáng tạo thì chủ thể sáng tạo giữ vai trò trung tâm. Trong chủ thể sáng tạo, yếu tố cốt lõi là năng lực sáng tạo của chủ thể. Nghiên cứu về sáng tạo, phương pháp sáng tạo cũng chỉ nhằm nâng cao năng lực sáng tạo của con người. Vậy năng lực sáng tạo là gì?

Trong Tâm lí học, năng lực được định nghĩa "Là tổ hợp các thuộc tính độc đáo của cá nhân, phù hợp với những yêu cầu của một hoạt động nhất định, đảm bảo cho hoạt động đó có kết quả".[14]

Kế thừa những quan điểm trên, chúng tôi định nghĩa Năng lực sáng tạo là khả năng tạo ra cái mới có giá trị của cá nhân dựa trên tổ hợp các phẩm chất độc đáo của cá nhân đó.

Năng lực sáng tạo là cái tiềm ẩn bên trong cá nhân, sáng tạo là sự hiện thực hóa năng lực sáng tạo của chủ thể bằng những sản phẩm sáng tạo. Một khi có năng lực sáng tạo thì liệu có ngay sản phẩm sáng tạo hay không? Trong đa số trường hợp, có năng lực sáng tạo của bản thân cá nhân thì chưa đủ, cần phải có điều kiện, môi trường sáng tạo để năng lực sáng tạo đó phát huy. Một kĩ sư có ý tưởng rất độc đáo về một loại máy bay đặc biệt nhưng nếu không có tiền, không có nhà xưởng, máy móc thiết bị để thiết kế thử nghiệm thì mãi mãi chỉ nằm ở dạng ý tưởng đơn thuần, không thể trở thành sản phẩm sáng tạo cụ thể, chưa kể đến môi trường sáng tạo có thuận lợi hay không; ủng hộ, khuyến khích hay chê bai, chế nhạo ý tưởng đó.

"Năng lực sáng tạo dựa trên tổ hợp phẩm chất độc đáo của cá nhân đó", vậy tổ hợp đó ở đây là gì? Đó chính là những đặc điểm về tâm - sinh lí (thể lực, trí tuệ...) của chủ thể, nhưng không phải là toàn bộ những yếu tố tâm - sinh lí mà chỉ có những yếu tố nào góp phần (hay tham gia) đáng kể vào việc hình thành nên sản phẩm sáng tạo. Xét về tổng thể, có thể kể đến ba thành phần cơ bản trong năng lực sáng tạo, đó là tư duy sáng tạo, động cơ sáng tạo và ý chí.

Tư duy sáng tạo là hệ thống những thao tác, cách thức của não bộ xử lí, biến đổi các dữ liệu, thông tin nhằm hình thành ý tưởng, lời giải của vấn đề sáng tạo. Do vậy, tư duy sáng tạo phải bao gồm 4 yếu tố hợp thành, đó là

(i) Thông tin, dữ liệu làm chất liệu đầu vào của tư duy. Chúng có thể được khai thác từ các nguồn: tri thức, kinh nghiệm (của bản thân và tiếp thu từ xã hội, nhưng chủ thể sáng tạo không trở thành "nô lệ" cho tri thức, kinh nghiệm đã có), khả năng của các giác quan nắm bắt đối tượng.

(ii) Vấn đề sáng tạo (đối tượng, mục đích mà tư duy hướng đến): Tư duy nảy sinh từ những tình huống có vấn đề, tư duy (hay tư duy sáng tạo) luôn có mục đích, do vậy hoạt động của nó mang tính hướng đích, chứ không phải là suy nghĩ lan man, không định hướng.

(iii) Hệ thống những thao tác, cách thức của não bộ xử lí, biến đổi (các dữ liệu, thông tin): Hệ thống này hoạt động trên cả 3 bình diện: tự ý thức, tiềm thức và vô thức. Hệ thống này bao gồm những thành tố, cách thức quan trọng như:

- Năng lực tưởng tượng là khả năng không thể thiếu của tư duy sáng tạo. Có thể nói những người có năng lực sáng tạo cao đều phải là người có khả năng tưởng tượng tốt. Người bình thường đều có khả năng tưởng tượng và khả năng này sẽ được phát huy, nâng cao khi tư duy tập luyện. Trí tưởng tượng vừa thao tác vừa tạo ra dữ liệu cho tư duy.
- Trực giác là khả năng quan trọng trong phát minh khoa học, sáng chế. Trực giác là kết quả xử lí thông tin ở cấp độ tiềm thức và vô thức. Biểu hiện ở

tầng tự ý thức là sự "lóe sáng", sự thấu hiểu đột ngột. Trực giác không tự dưng xuất hiện, nó chỉ xuất hiện ở chủ thể sau khi đã có quá trình tư duy lâu dài.

- Khả năng liên tưởng là sự liên tưởng đưa đến những dữ liệu, thông tin và ý tưởng.
- Những thao tác, cách thức tư duy sáng tạo quan trọng khác như:

+ Biến đổi, liên kết thông tin, dữ liệu một cách đa dạng, nhiều chiều.

+ Nhạy bén nắm bắt sự tương đồng giữa các đối tượng khác nhau.

+ Năng lực tổng hợp, khái quát hóa, trừu tượng hóa, quy nạp ở mức cao.

(iv) Kết quả của tư duy sáng tạo là những ý tưởng (đa dạng), lời giải cho vấn đề sáng tạo. Nhiệm vụ quan trọng của tư duy sáng tạo là đưa ra lời giải của vấn đề sáng tạo. Nếu tư duy sáng tạo không đưa ra được lời giải có còn gọi là tư duy sáng tạo hay không? Khi ta coi ai đó là người có tư duy sáng tạo trong một lĩnh vực nhất định, thì có nghĩa người đó có năng lực tư duy sáng tạo và có khả năng đưa ra những ý tưởng, lời giải cho các vấn đề sáng tạo ở lĩnh vực đó (chỉ có điều mức độ sáng tạo như thế nào mà thôi). Nhưng điều này không đồng nhất với việc mọi lần thực hiện tư duy, người đó cũng hình thành được ý tưởng, lời giải, mà cũng có những lần thất bại.

Trong bốn yếu tố trên, yếu tố thứ ba có thể coi là đặc trưng của tư duy sáng tạo.

Động cơ sáng tạo là cái thúc đẩy chủ thể thực hiện hoạt động sáng tạo. Động cơ bao gồm động cơ bên trong (nhu cầu, xúc cảm, tình cảm… biểu hiện là mong muốn, cảm hứng, thích, say mê sáng tạo) và động cơ bên ngoài (tác động của xã hội: nhu cầu xã hội, tâm lí xã hội). Xét ở cá nhân thì động cơ bên trong là cơ bản, tuy nhiên nếu xét trên bình diện xã hội thì sự tạo động lực hay sự cản trở của xã hội có vai trò không nhỏ bởi nó ảnh hưởng đến việc phát huy năng lực sáng tạo ở đại đa số cá nhân trong xã hội đó.

Nếu động cơ thúc đẩy hành vi sáng tạo, tư duy đảm bảo hoạt động sáng tạo đưa ra lời giải của vấn đề thì ý chí sẽ giúp chủ thể vượt qua những khó khăn, cản trở trong quá trình sáng tạo nhằm đi tới đích. Sáng tạo đòi hỏi lòng kiên trì, can đảm, kiên định vượt qua những khó khăn, rào cản từ bản thân, điều kiện (thời gian, tài chính, phương tiện), định kiến xã hội và cả những thất bại tạm thời để hướng tới kết quả cuối cùng. Vì vậy, ý chí là yếu tố không thể thiếu ở cá nhân sáng tạo. Năng lực sáng tạo của cá nhân không phải là một hằng số mà nó thay đổi trong cuộc đời của cá nhân, lúc thăng lúc trầm. Làm thế nào để đánh giá được năng lực sáng tạo của cá nhân? Năng lực sáng tạo được biểu hiện qua trình độ sáng tạo. Trình độ sáng tạo của cá nhân là sự biểu hiện ra bên ngoài của năng lực sáng tạo, bằng những sản phẩm sáng tạo mà cá nhân đã tạo ra. Tuy nhiên, nếu nhìn vào một sản phẩm sáng tạo không thể đánh giá hết năng lực sáng tạo của cá nhân mà phải thông qua nhiều sản phẩm mới đánh giá được đầy đủ.

1.4 Một số thành tố đặc trưng của tư duy sáng tạo

Các nghiên cứu của nhiều nhà tâm lý học, giáo dục học đã đưa ra năm thành tố cơ bản của tư duy sáng tạo: Tính mềm dẻo, tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo, tính hoàn thiện, tính nhạy cảm vấn đề

1.4.1 Tính mềm dẻo

Tính mềm dẻo, linh hoạt là khả năng chủ thể biến đổi thông tin, kiến thức đã tiếp thu được một cách dễ dàng, nhanh chóng từ góc độ và quan niệm này sang góc độ và quan niệm khác, chuyển đổi sơ đồ tư duy có sẵn trong đầu sang một hệ tư duy khác, chuyển từ phương pháp tư duy cũ sang hệ thống phương pháp tư duy mới, chuyển đổi từ hành động trở thành thói quen sang hành động mới, gạt bỏ sự cứng nhắc mà con người đã có để thay đổi nhận thức dưới một góc độ mới, thay đổi cả những thái độ đã cố hữu trong hoạt động tinh thần trí tuệ. Tính mềm dẻo của tư duy sáng tạo có các đặc trưng:
- Tính mềm dẻo của tư duy là năng lực dễ dàng đi từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, từ thao tác tư duy này sang thao tác tư duy khác, vận dụng linh hoạt các hoạt động trí tuệ như: Phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hoá, khái quát hóa, cụ thể hoá và các phương pháp suy luận như quy nạp, suy diễn, tương tự, dễ dàng chuyển từ giải pháp này sang giải pháp khác, điều chỉnh kịp thời hướng suy nghĩ khi gặp trở ngại.
- Tính mềm dẻo của tư duy còn là năng lực thay đổi dễ dàng, nhanh chóng trật tự của hệ thống tri thức chuyển từ góc độ quan niệm này sang góc độ quan niệm khác, định nghĩa lại sự vật, hiện tượng, gạt bỏ sơ đồ tư duy có

sẵn và xây dựng phương pháp tư duy mới, tạo ra sự vật mới trong những quan hệ mới, hoặc chuyển đổi quan hệ và nhận ra bản chất sự vật và điều phán đoán. Suy nghĩ không rập khuôn, không áp dụng một cách máy móc các kiến thức kỹ năng đã có sẵn vào hoàn cảnh mới, điều kiện mới, trong đó có những yếu tố đã thay đổi, có khả năng thoát khỏi ảnh hưởng kìm hãm của những kinh nghiệm, những phương pháp, những cách suy nghĩ đã có từ trước.

- Nhận ra vấn đề mới trong điều kiện quen thuộc, nhìn thấy chức năng mới của đối tượng quen biết.

Ví dụ 1.4.1 Giải phương trình

$$3^x = 4 - x.$$

Đối với bài toán này học sinh sẽ nghĩ ngay đến phương pháp đánh giá. Học sinh thấy ngay vế phải của phương trình là hàm số đồng biến và vế trái là hàm số nghịch biến, vì vậy nếu giữ nguyên hai vế của phương trình để đánh giá ta có lời giải.

Đặt $f(x) = 3^x,\ g(x) = 4 - x$. Ta có $f(x)$ là hàm số đồng biến, $g(x)$ là hàm só nghịch biến và $x = 1$ là một nghiệm của phương trình. Ta chứng minh $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Với $x > 1$, ta có $f(x) > f(1) = 3;\ g(x) < g(1) = 3$ hay $f(x) > 3 > g(x)$ do đó phương trình vô nghiệm.

Với $x < 1$, ta có $f(x) < f(1) = 3;\ g(x) > g(1) = 3$ hay $f(x) < 3 < g(x)$ do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Tuy nhiên học sinh có thể sử dụng phép biến đổi đơn giản làm cho lời giải bài toán ngắn gọn và sáng sủa hơn, ta có $3^x = 4 - x$ hay $3^x + x = 4$, khi đó vế trái của phương trình là hàm số đồng biến và $x = 1$ là một nghiệm của phương trình và đây cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

1.4.2 Tính nhuần nhuyễn của tư duy

Tính nhuần nhuyễn của tư duy thể hiện ở năng lực tạo ra một cách nhanh chóng sự tổ hợp giữa các yếu tố riêng lẻ của các tình huống, hoàn cảnh, đưa ra giả thuyết mới. Các nhà tâm lý học rất coi trọng yếu tố chất lượng của ý tưởng sinh ra, lấy đó làm tiêu chí để đánh giá sáng tạo. Tính nhuần nhuyễn được đặc trưng bởi khả năng tạo ra một số lượng nhất định các ý tưởng. Số ý tưởng nghĩ ra càng nhiều thì càng có nhiều khả năng xuất hiện ý tưởng độc đáo, trong trường hợp này số lượng làm nảy sinh ra chất lượng.

Tính nhuần nhuyễn của tư duy thể hiện ở hai đặc trưng:

- Tính đa dạng của các cách xử lý khi giải toán; khả năng tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ và tình huống khác nhau. Đứng trước một vấn đề phải giải quyết, người có tư duy nhuần nhuyễn nhanh chóng tìm và đề xuất được nhiều phương án khác nhau và từ đó tìm được phương án tối ưu.
- Khả năng xem xét đối tượng dưới nhiều khía cạnh khác nhau; có cái nhìn sinh động từ nhiều phía đối với các sự vật và hiện tượng chứ không phải cái nhìn bất biến, phiến diện, cứng nhắc.

Ví dụ 1.4.2 Giải phương trình mũ

$$3^{1-x} - 3^x + 2 = 0.$$

Đây là một phương trình mũ đơn giản, khi đọc bài toán này học sinh có lẽ cũng sẽ nghĩ tới phương pháp đặt ẩn phụ trước tiên, lời giải cũng khá đơn giản.

Cách 1 *(Đặt ẩn phụ)*. Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{3^x} - 3^x + 2 = 0$$

hay $-(3^x)^2 + 2.3^x + 3 = 0$.

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$. Khi đó ta có $-t^2 + 2t + 3 = 0$, phương trình có nghiệm $t = -1$ (không thỏa mãn), $t = 3$ (thỏa mãn).

Với $t = 3$, ta có $3^x = 3$ hay $x = 1$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$.

Đối với bài toán này học sinh có tính nhuần nhuyễn sẽ có thể đưa ra được nhiều cách giải khác mà không phải học sinh nào cũng nghĩ tới.

Cách 2 *(Đặt nhân tử chung đưa về phương trình tích)*. Ta có các phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&-(3^x)^2 + 2.3^x + 3 = 0; -(3^x)^2 + 2.3^x + 2 + 1 = 0;\\
&\left[1 - (3^x)^2\right] + [2.3^x + 2] = 0; (1 - 3^x)(1 + 3^x) + 2(1 + 3^x) = 0;\\
&(1 + 3^x)(1 - 3^x + 2) = 0; (1 + 3^x)(3 - 3^x) = 0;
\end{aligned}$$

Suy ra $3 - 3^x = 0$ hay $x = 1$ (vì $1 + 3^x > 0, \forall x$).
Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$.
Cách 3 *(Ứng dụng của đạo hàm).* Xét hàm số $f(x) = 3^{1-x} - 3^x + 2$, Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3^{1-x}\ln 3 - 3^x.\ln 3 \\ &= -(3^{1-x}\ln 3 + 3^x.\ln 3) < 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$, nên hàm số có nghiệm duy nhất. Ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình.
Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$.

1.4.3 Tính độc đáo của tư duy

Tính độc đáo được đặc trưng bởi các khả năng:
- Khả năng tìm ra những liên tưởng và những kết hợp mới.
- Khả năng tìm ra những mối liên hệ trong những sự kiện bên ngoài tưởng như không có liên hệ với nhau.
- Khả năng tìm ra giải pháp lạ tuy đã biết những giải pháp khác.

Ví dụ 1.4.3 Giải phương trình mũ

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Trong Ví dụ 1.2.2 ở trên ta đã trình bày lời giải của bài toán theo cách thiết lập hàm số và dùng tính đơn điệu để suy ra nghiệm của phương trình. Tuy nhiên, học sinh có tư duy sáng tạo không dừng lại ở đó mà có thể đưa ra cách giải ngắn gọn hơn. Ta có $x = 2$ là nghiệm của phương trình

$$3^x + 4^x = 5^x. \tag{1.1}$$

Phương trình (1.1) tương đương

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Ta thấy Vế trái là hàm số nghịch biến, Vế phải là hàm hằng suy ra, Nếu phương trình có nghiệm thì có nghiệm duy nhất.
Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1.1).
Cách giải này độc đáo ở chỗ là học sinh phải nắm được kiến thức về số nghiệm của phương trình khi xét tính đồng biến nghịch biến hai vế của phương trình, sau đó chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất sau khi nhẩm được một nghiệm của phương trình đã cho.

1.4.4 Tính hoàn thiện

Tính hoàn thiện là khả năng lập kế hoạch, phối hợp các ý nghĩa và hành động, phát triển ý tưởng, kiểm tra và kiểm chứng ý tưởng.
Ví dụ 1.4.4 Giải phương trình

$$\log_5\left(6-5^{2x}\right)=x+1.$$

Đối với bài toán trên, ta thấy biểu thức của logarit có chứa hàm số mũ $6-5^{2x}$ và có cơ số 5, nên đầu tiên học sinh sẽ nghĩ tới việc mũ hóa để đưa phương trình về dạng phương trình mũ đơn thuần $\log_5\left(6-5^{2x}\right)=x+1$.
Phương trình này tương đương

$$6-5^{2x}=5^{x+1},\text{ hay }5^{2x}+5.5^x-6=0.$$

Đến đây hoàn toàn học sinh có thể đặt ẩn phụ để giải phương trình.
Đặt $t=5^x,\ t>0$, phương trình trở thành $t^2+5t-6=0$. Việc giải phương trình bậc hai này không có gì khó khăn, tuy nhiên ở đây giáo viên có thể phát triển cho học sinh phát triển ý tưởng như sau:
Phương trình $5^{2x}+5.5^x-6=0$ có dáng dấp của phương trình bậc hai, mà như chúng ta đã biết một phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 (hoặc $x_1=x_2$) có thể biến đổi thành $a\left(x-x_1\right).\left(x-x_2\right)=0$. Trên cơ sở đó học sinh hoàn toàn có thể bỏ qua việc đặt ẩn phụ và đưa phương trình mũ về dạng tích và giải.

1.4.5 Tính nhạy cảm vấn đề

Theo tác giả [17] tính nhạy cảm vấn đề là năng lực phát hiện vấn đề, mâu thuẫn, sai lầm, bất hợp lý một cách nhanh chóng, có sự tinh tế của các cơ quan cảm giác, có năng lực trực giác, có sự phong phú về cảm xúc, nhạy cảm, cảm nhận được ý nghĩ của người khác. Tính nhạy cảm vấn đề biểu hiện sự thích ứng nhanh, linh hoạt. Tính nhạy cảm còn thể hiện ở chỗ trong những điều kiện khắc nghiệt, khó khăn, gấp rút về mặt thời gian mà chủ thể vẫn tìm ra được giải pháp phù hợp, tối ưu.
Tính nhạy cảm của quá trình tư duy vô cùng cần thiết cho việc học Toán. Dù rằng khả năng nhạy cảm của một học sinh phần nào đó phụ thuộc mức độ thông minh của trí tuệ, nhưng đó mới chỉ là điều kiện cần. Muốn rèn luyện

khả năng nhạy cảm của tư duy trước một vấn đề toán học nào đó, điều chủ yếu người học cần có một vốn trí thức phong phú, vốn phương pháp và kĩ thuật đa dạng để có sự phản xạ nhanh chóng, từ đó dễ dàng chuyển hóa nội dung bài toán từ “miền ngôn ngữ” này sang “miền ngôn ngữ” khác. Bên cạnh yếu tố cần đó, không thể không có điều kiện đủ là phải thường xuyên luyện tập thông qua giải bài tập toán. Lười nhác ỷ vào một số năng lực vốn có mà không chịu rèn luyện là trở ngại chủ yếu để rèn luyện khả năng này đối với học sinh.

Các yếu tố cơ bản trên không tách rời nhau mà trái lại, chúng quan hệ mật thiết với nhau, hỗ trợ bổ sung cho nhau. Khả năng dễ dàng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác (tính mềm dẻo) tạo điều kiện cho việc tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ và tình huống khác nhau (tính nhuần nhuyễn) và nhờ đề xuất được nhiều phương án khác nhau mà có thể tìm được phương án lạ, đặc sắc (tính độc đáo). Các yếu tố cơ bản này lại có quan hệ khăng khít với các yếu tố khác như: tính chính xác, tính hoàn thiện, tính nhạy cảm. Tất cả các yếu tố đặc trưng nói trên cùng góp phần tạo nên tư duy sáng tạo, đỉnh cao nhất trong các hoạt động trí tuệ của con người.

1.4.6 Làm thế nào để phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh trong dạy học Toán ở trường phổ thông

Có thể rèn luyện, phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh:
- Theo năm thành phần của tư duy sáng tạo.
- Dựa trên các hoạt động trí tuệ: Dự đoán, bác bỏ, khái quát hóa, tương tự hóa.
- Tìm nhiều lời một bài toán, tìm được lời giải hay và ngắn gọn cho một bài toán, khai thác, đào sâu kết quả một bài toán.

Một học sinh có tư duy sáng tạo thì biểu hiện của tính sáng tạo là:
- Nhìn nhận một sự vật theo một khía cạnh mới, nhìn nhận sự vật dưới nhiều góc độ khác nhau.
- Biết đặt ra nhiều giả thuyết khi phải lí giải một hiện tượng.
- Biết đề xuất những giải pháp khác nhau khi phải xử lí một tình huống.

Học sinh học tập một cách sáng tạo không vội vã bằng lòng với giải pháp đã có, không suy nghĩ cứng nhắc theo những mô hình đã gặp để ứng xử trước những tình huống mới. Việc đánh giá tính sáng tạo được căn cứ vào số lượng tính mới mẻ, tính độc đáo, tính hữu ích của các đề xuất. Tuy nhiên tính sáng tạo cũng có tính chất tương đối: Sáng tạo với ai? Sáng tạo trong điều kiện nào?

Để học sinh có thể tích cực, chủ động sáng tạo trong học tập, người giáo viên cần tạo ra không khí giao tiếp thuận lợi giữa thầy và trò, giữa trò và trò bằng cách tổ chức và điều khiển hợp lí các hoạt động của từng cá nhân và tập thể học sinh. Tốt nhất là tổ chức các tình huống có vấn đề đòi hỏi dự đoán, nêu giả thuyết, tranh luận giữa những ý kiến trái ngược. Những tình huống đó cần phù hợp với trình độ học sinh. Một nội dung quá dễ hoặc quá khó đều không gây được hứng thú. Người thầy cần biết dẫn dắt học sinh luôn luôn tìm thấy cái mới, có thể tự giành lấy kiến thức, luôn cảm thấy mình mỗi ngày một trưởng thành. Để học tập sáng tạo cần tạo tình huống chứa một số điều kiện xuất phát, từ đó giáo viên yêu cầu học sinh đề xuất càng nhiều giải pháp càng tốt, càng tối ưu càng tốt.

Học tập sáng tạo là cái đích cần đạt. Tính sáng tạo liên quan với tính tích cực, chủ động, độc lập. Muốn phát triển trí sáng tạo, cần chú trọng để học sinh tự lực khám phá kiến thức mới, dạy cho các em phương pháp học mà cốt lõi là phương pháp tự học, chính qua các hoạt động tự lực, được giao cho từng cá nhân hoặc cho nhóm nhỏ mà tiềm năng sáng tạo của mỗi học sinh được bộc lộ và phát huy.

Bồi dưỡng Tư duy sáng tạo là một quá trình lâu dài, cần tiến hành thường xuyên hết tiết học này sang tiết học khác, năm này sang năm khác trong tất cả các khâu của quá trình dạy học, trong nội khóa cũng như các hoạt động ngoại khóa. Cần tạo điều kiện cho học sinh có dịp được rèn luyện khả năng tư duy sáng tạo trong việc toán học hóa các tình huống thực tế, trong việc viết báo toán với những đề toán tự sáng tác, những cách giải mới, những kết quả mới khai thác từ các bài tập đã giải.

Một vấn đề rất đáng được quan tâm là vấn đề kiểm tra, đánh giá. Các đề kiểm tra, các đề thi cần soạn với yêu cầu kiểm tra được năng lực tư duy sáng tạo của học sinh. Học sinh chỉ có thể làm được hoàn chỉnh các kiểm tra đó trên cơ sở bộc lộ rõ nét năng lực tư duy sáng tạo của bản thân.

1.5 Kế hoạch giảng dạy phương trình mũ và phương trình logarit trong chương trình toán Trung học phổ thông

1.5.1 Chuẩn môn học

Sau khi kết thúc nội dung phần phương trình mũ và phương trình logarit học sinh phải đạt:

Kiến thức

- Nắm được định nghĩa và tính chất, các phép biến đổi cơ bản, điều kiện xác định của phương trình mũ và phương trình logarit.
- Hiểu rõ được các phương pháp thường dùng, các phương pháp đặc biệt để giải các dạng phương trình mũ và phương trình logarit cơ bản, nâng cao.

Kỹ năng

- Vận dụng thành thạo các phương pháp giải phương trình mũ và phương trình logarit vào bài tập.
- Biết sử dụng các phép biến đổi đơn giản đến phức tạp về lũy thừa và logarit vào việc giải phương trình mũ và phương trình logarit.

Thái độ

- Giáo dục cho học sinh tính cần cù, cẩn thận, kỉ luật, không ngại khó, phương pháp làm việc khoa học, khả năng tư duy nhạy bén, năng động, sáng tạo.
- Hình thành và phát triển năng lực làm việc nhóm, năng lực tự học, tự nghiên cứu.

1.5.2 Khung phân phối chương trình

Bảng 1.1: Khung phân phối chương trình

Nội dung bắt buộc/ số tiết					Nội dung tự chọn	Tổng số tiết
Lý thuyết	Bài tập	Thực hành	Ôn tập	Kiểm tra		
35-37 (3 tiết)	38 (1 tiết)	39 (1 tiết)	40 (1 tiết)	41 (1 tiết)		7

1.6 Thực trạng dạy học phương trình mũ và phương trình logarit ở trường Trung học phổ thông đối với yêu cầu phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh

1.6.1 Chương trình và sách giáo khoa

Sách giáo khoa nâng cao chỉnh lí hợp nhất năm 2008, chủ đề phương trình mũ và phương trình logarit được trình bày trong 4 tiết của chương 2 - Hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit 3 tiết lí thuyết và 1 tiết bài tập. Bài tập chính trong sách gồm có 9 bài, không có bài tập ứng dụng vào thực tiễn. Bài tập làm thêm gồm 10 bài tập trong sách bài tập.

1.6.2 Một số nhận xét của cá nhân

Nhìn chung, có thể nói rằng chủ đề có yêu cầu nhẹ nhàng hơn rất nhiều so với trước đây, mặc dù nội dung cơ bản có vẻ như không khác mấy. Điều đó được thể hiện cụ thể như sau:
- Sách giáo khoa chỉ yêu cầu học sinh nắm được các phương pháp và giải được các phương trình có các dạng nêu trong bài học. Không xét các phương trình đòi hỏi biến đổi các biểu thức lũy thừa và logarit quá phức tạp.
- Sách giáo khoa không xét các phương trình có chứa tham số. Điều này sẽ làm cho yêu cầu về kỹ năng giải bài tập của học sinh được giảm nhẹ nhiều. Bởi vì khi giải các phương trình mũ, phương trình logarit có chứa tham số thì học sinh thường phải xét các điều kiện cho cơ số dẫn đến sự biện luận khá phức tạp.
- Sách giáo khoa không xét phương trình logarit mà ẩn có mặt đồng thời ở cả cơ số lẫn trong biểu thức lấy logarit. Trong một số ví dụ và bài tập, các tác giả có đưa ra một số bài toán về phương trình, trong đó có chứa ẩn nằm trong cơ số của logarit, chẳng hạn như $\log_x 2$. Tuy nhiên đó chỉ là cách viết khác đi của $\log_2 x$, $(0 < x \neq 1)$ nên không gây ra điều gì qua phức tạp cho học sinh.

Phần bài tập, học sinh chuẩn bị ở nhà hoặc chuẩn bị một ít phút trước khi lên lớp sau đó giáo viên gọi học sinh khá lên chữa bài. Như vậy mô hình chung giáo viên đã bỏ qua lớp học sinh có lực học trung bình và yếu. Do đó học sinh yếu ngày càng sợ học hơn, ngày càng bị bỏ rơi. Còn đối với những học sinh khá giỏi thì hệ thống các bài tập và đòi hỏi chưa cao dẫn đến việc thiếu hứng thú trong học tập và học sinh chưa biết được những ứng dụng của nội dung này.

Việc rèn luyện tư duy logic cho học sinh chưa đầy đủ, thường các thầy cô chú ý đến việc rèn luyện khả năng suy diễn, chưa chú ý đến khả năng quy nạp cho học sinh. Thời gian không cho phép dạy học toán nói chung và dạy học nội dung phương trình mũ và phương trình logarit nói riêng.

Hình thức học nói chung còn chưa đa dạng, phong phú, cách truyền đạt đôi lúc chưa cuốn hút học sinh vào bài học. Học sinh tiếp nhận kiến thức còn thụ động.

Vai trò của giáo viên chủ yếu vẫn là thông báo kiến thức, cao hơn nữa cũng chỉ là dạy cách giải, cách phán đoán và một số kĩ năng nhất định chứ chưa làm được vai trò của người khơi nguồn sáng tạo, kích thích học sinh tìm tòi.

Thuận lợi cho việc dạy học phương trình mũ và phương trình logarit là ở chỗ đây là một bài toán có mặt rất thường xuyên trong các đề thi đại học và là câu để học sinh gỡ điểm vì vậy hầu hết học sinh vẫn muốn tìm hiểu và nắm chắc kiến thức phương trình mũ và phương trình logarit.

1.7 Kết luận chương 1

Trong chương này, luận văn đã làm rõ các khái niệm tư duy, tư duy sáng tạo, nêu được các yếu tố đặc trưng của tư duy sáng tạo và vận dụng tư duy biện chứng để phát triển tư duy sáng tạo, đồng thời nêu được một số biện pháp để phát triển tư duy sáng tạo.

Việc bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho học sinh thông qua quá trình dạy học giải bài tập là rất cần thiết, qua đó chúng ta giúp học sinh học tập chủ động, tích cực hơn, kích thích được tính sáng tạo của học sinh trong học tập và trong cuộc sống.

Như vậy, trong quá trình dạy học, mỗi giáo viên cần tìm ra các biện pháp nhằn rèn luyện và phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh, có thể bồi dưỡng tư duy sáng tạo theo các yếu tố đặc trưng của nó.

Chương 2

Biện pháp rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh trong dạy học phương trình mũ và phương trình logarit ở lớp 12

Trong chương này, tác giả sẽ trình bày về các ví dụ minh họa cho các phương pháp giải phương trình mũ và phương trình logarit, xây dựng phương trình mũ và phương trình logarit và ứng dụng của logarit trong chương trình toán phổ thông dựa trên việc định hướng phát triển năng lực tư duy sáng tạo đã được trình bày trong chương 1.

2.1 Phương trình mũ, phương trình logarit cơ bản

2.1.1 Phương trình mũ cơ bản

Dạng 1. Phương trình có dạng $a^{f(x)} = b$, trong đó $a > 0, a \neq 1$.

Với $b > 0$ thì ta có $a^{f(x)} = b$ hay $f(x) = \log_a b$;

Với $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

Dạng 2. Phương trình có dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, trong đó $a > 0, a \neq 1$.

Phương trình tương đương với $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 2.1.1 Giải các phương trình mũ sau

a) $3^{x^2-5x+8} = 9$;

b) $1,5^{4x-6} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}$.

Phân tích. Kĩ năng cần thiết đối với học sinh khi giải các phương trình này là tìm ra cơ số thích hợp.

Lời giải. a) Đưa hai vế về cùng cơ số 3, ta được phương trình đã cho tương đương với các phương trình

$$3^{x^2-5x+8} = 3^2;\ x^2 - 5x + 8 = 2;\ x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này ta được hai nghiệm $x = 2$ và $x = 3$.

Nhận xét 2.1. (i). Phương trình (a) có dạng 1, ta viết (a) tương đương với

$$x^2 - 5x + 8 = \log_3 9.$$

(ii). Ta cũng có thể hiểu là lấy logarit hai vế với cơ số 3 để được phương trình trên. Hơn nữa nếu lấy logarit hai vế với cơ số a $(a > 0, a \neq 1)$ bất kì thì vẫn tìm được ra nghiệm của bài toán. Cụ thể, phương trình (a) tương đương với các phương trình

$$\log_a 3^{x^2-5x+8} = \log_a 9;\ (x^2 - 5x + 8)\log_a 3 = \log_a 9;$$
$$x^2 - 5x + 8 = \log_3 9;\ x^2 - 5x + 8 = 2.$$

Như vậy nếu chọn được số a thích hợp sẽ tránh việc tính toán phức tạp. Việc lấy logarit đã khử được ẩn ở mũ.

(iii). Với nhận xét (ii) ta có thể giải quyết được lớp các phương trình phức tạp hơn $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $(0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$ bằng cách lấy logarit hai vế với cơ số nào đó, chẳng hạn cơ số a, đưa phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ về thành $f(x) = g(x)\log_a b$. Hoặc với ý tưởng đưa các lũy thừa về cùng một cơ số, ta có các biến đổi tương đương

$$a^{f(x)} = b^{g(x)};\ a^{f(x)} = \left(a^{\log_a b}\right)^{g(x)};\ a^{f(x)} = a^{\log_a b.g(x)};\ f(x) = g(x).\log_a b.$$

Lớp các phương trình $k.a^{f(x)} = h.b^{g(x)},\ (0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1;\ k,\ h \in \mathbb{R})$ cũng có thể làm tương tự.

(iv). Trường hợp đặc biệt của dạng trên, phương trình có dạng

$$k.a^{f(x)} = h.b^{g(x)} \text{ với } (0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1;\ k \neq 0)$$

có thể đưa về dạng 1 bằng biến đổi, $k.a^{f(x)} = h.b^{g(x)}$ tương đương với

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \frac{h}{k}.$$

b) Nhận thấy $\dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = 1,5^{-1}$, phương trình sẽ có dạng 2.

Đưa về cùng cơ số 1,5 phương trình đã cho tương đương với

$$1,5^{4x-6} = 1,5^{-x-1} \text{ hay } 4x - 6 = -x - 1,$$

giải phương trình ta được $x = 1$.
Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.
Ví dụ 2.1.2 Giải các phương trình mũ sau

a) $7^{x-1} = 3^x$;

b) $8^{\frac{4}{3}x^3-2x^2+2} = 4^{x^2+x+1}$;

c) $0,75^{2x-3} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{5-x}$;

d) $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$.

Lời giải. a) Từ *nhận xét 2.1 (iii)*, Phương trình đã cho tương đương

$$\log_7 7^{x-1} = \log_7 3^x \text{ hay } x - 1 = x.\log_7 3.$$

Hoặc từ nhận xét 2.1 (iv), Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{1}{7}.7^x = 2^x \text{ hay } \left(\frac{7}{2}\right)^x = 7.$$

b) Đưa hai vế về lũy thừa cơ số 2 hoặc lấy logarit cơ số 2 hai vế (cơ số 2 là cơ số tối ưu nhất).
c) Tương tự câu b) với cơ số $\dfrac{3}{4}$.
d) Vế trái gồm các hạng tử đồng dạng với 5^x, tương tự vế phải là 2^x. Rút gọn hai vế và làm theo nhận xét (iv).

2.1.2 Phương trình logarit cơ bản

Dạng 1. Phương trình có dạng $\log_a f(x) = b$ thì $f(x) = a^b$ với $f(x) > 0$.
Dạng 2. Phương trình có dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ thì $f(x) = g(x)$ với $f(x) > 0$.
Nhận xét 2.2. Dạng 2 cũng là trường hợp riêng của dạng 1.
Các quy tắc tính logarit
Cho $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$,

1. Logarit của một tích $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$.
2. Logarit của một thương $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
3. Logarit của một lũy thừa $\log_a b^\alpha = \alpha.\log_a b$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

4a) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $(c \neq 1)$.

4b) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $(b \neq 1)$.

4c) $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} log_a b$, $(\alpha \neq 0)$.

Ví dụ 2.1.3 Giải các phương trình logarit sau

a) $\log x + \log(x+9) = 1$;

b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

c) $\log_5 x^3 + 3\log_{25} x + \log_{\sqrt{125}} \sqrt{x^3} = \dfrac{11}{2}$;

d) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$.

Lời giải. Khi chữa bài giáo viên cần nhấn mạnh hai vấn đề chính:

- Hướng giải quyết vấn đề.

- Dùng công thức nào để biến đổi (giúp học sinh thành thạo các quy tắc tính logarit).

Việc nêu ý tưởng lời giải cần mạch lạc, có đường lối rõ ràng để học sinh dễ nắm bắt, qua đó có thể làm được các bài tập tương tự và khó hơn. Giáo viên cũng cần ý thức cho học sinh đặt điều kiện cho các biểu thức dưới dấu logarit, đặt điều kiện cho các biểu thức trong phương trình có nghĩa. Phát triển cho học sinh tư duy logic.

a) Dùng quy tắc 1 tính logarit của một tích để đưa về dạng 1 và chú ý đặt điều kiện cho các biểu thức dưới dấu logarit.

b) Dùng công thức 4c đổi cơ số để đưa ba logarit về thành đồng dạng (dạng $t.\log_2 x,\ t \in \mathbb{R}$). Sau đó rút gọn đưa về dạng 1, $\log_2 x = b$.

c) Dùng quy tắc 3 tính logarit của một lũy thừa, để đưa ba logarit trên có cùng một biểu thức dưới dấu logarit, các logarit giờ chỉ khác nhau về cơ số. Bài toán lúc này tương tự câu b.

d) Dùng công thức 4a và 4c đổi cơ số để đưa ba logarit về thành đồng dạng, dù chọn cơ số nào cũng có lòi giải, nhưng nếu chọn cơ số 2 sẽ đơn giản cho tính toán. Làm tiếp giống câu b.

Ví dụ 2.1.4 Giải các phương trình logarit sau

a) $\ln\,(x+1) + \ln\,(x+3) = \ln\,(x+7)$;

b) $\log x^4 + \log(4x) = 2 + \log x^3$;

c) $\dfrac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log \sqrt[3]{x-40}} = 3$;

d) $\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x = 2$.

Lời giải. a) Điều kiện $x + 1 > 0;\ x + 3 > 0;\ x + 7 > 0$ hay $x > -1$. Phương trình tương đương với

$$\ln\ [(x+1)(x+3)] = \ln\ (x+7),$$

giải phương trình này ta thu được $x = -4,\ x = 1$. Kết hợp với điều kiện ta được $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

b) Sử dụng quy tắc 1 cho hai vế để đưa phương trình về dạng 2, hoặc dùng quy tắc 1 và 3 đưa ba logarit này về đồng dạng với để rút gọn sẽ được phương trình dạng 1.

Với điều kiện $x > 0$, phương trình tương đương với các phương trình

$$\log(x^4.4x) = \log(10^2.x^3);\ 45x^5 = 100x^3;\ x^2 = 25;\ x = 5.$$

Hoặc biến đổi thành các phương trình tương đương

$$4\log x + \log 4 + \log x = 2 + 3\log x;\ 2\log x = 2 - \log 4;$$
$$2\log x = \log 100 - \log 4;\ 2\log x = \log 25;\ 2\log x = \log 5^2;$$
$$\log x = \log 5;\ x = 5.$$

Giáo viên nên khuyến khích học sinh làm bài theo nhiều cách để tạo sự linh hoạt trong tư duy. Những biến đổi trên có vẻ rườm rà nhưng những biến đổi đơn giản đó rất tốt để khắc sâu công thức và hoàn thiện kỹ năng tính toán cho học sinh, nhất là khi bắt đầu học về dạng bài này. Giáo viên không nên câu nệ cách giải dài hay ngắn, mỗi cách giải đều có những ưu điểm riêng của nó.

c) Điều kiện $x+1 \geq 0;\ \sqrt[3]{x-40} > 0;\ \log\sqrt[3]{x-40} \neq 0$ hay $x > 40;\ x \neq 41$. Với điều kiện trên ta có các phương trình tương đương

$$\log(\sqrt{x+1}+1) = 3\log\sqrt[3]{x-40};\ \log(\sqrt{x+1}+1) = \log(x-40);$$
$$\sqrt{x+1}+1 = x-40;\ \sqrt{x+1} = x-41.$$

Suy ra với $x - 41 \geq 0$, ta có $x + 1 = (x-41)^2$, hay $x^2 - 83x + 1680 = 0$.

Ta có $x = 48$ là nghiệm của phương trình thỏa mãn $x - 41 \geq 0$.

Vậy $x = 48$ là nghiệm của phương trình.

Tuy nhiên nếu dùng công thức đổi cơ số 4a cho vế trái, ta cũng có một lời giải khác rất tự nhiên. Ta có

$$\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}} = 3.$$

Tương đương với các phương trình

$$\log_{\sqrt[3]{x-40}}(\sqrt{x+1}+1) = 3;\ \left(\sqrt[3]{x-40}\right)^3 = \sqrt{x+1}+1;\ \sqrt{x+1} = x-41.$$

d) Điều kiện $x > 0$; $\log_2 x > 0$; $\log_4 x > 0$ hay $x > 1$. Nhận thấy các hạng tử của vế trái đồng dạng với $\log_2\log_2 x$. Rút gọn vế trái

$$\begin{aligned}\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x &= \frac{1}{2}\log_2\log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)\\ &= \frac{1}{2}\log_2\log_2 x + \log_2\frac{1}{2} + \log_2\log_2 x = \frac{3}{2}\log_2\log_2 x - 1.\end{aligned}$$

Do đó phương trình đã cho tương đương với các phương trình

$$\frac{3}{2}\log_2\log_2 x = 3;\ \log_2\log_2 x = 3;\ \log_2 x = 4,\ \text{hay } x = 16.$$

Giáo viên chú ý cho học sinh về việc phát hiện và biến đổi các hạng tử thành đồng dạng để có thể rút gọn. Từ lời giải ví dụ trên, giáo viên có thể xây dựng các ví dụ tương tự, chẳng hạn với $\log_3\log_7 x$, ta đưa ra một biểu thức gồm các hạng tử đồng dạng với nó như $\log_{\frac{1}{3}}\log_7 x^3 + \log_3(\log_7 x.\log_{\sqrt[3]{7}} x^2)$. Ta có

$$\begin{aligned}&\log_{\frac{1}{3}}\log_7 x^3 + \log_3(\log_7 x.\log_{\sqrt[3]{7}} x^2)\\ &= -\log_3(3.\log_7 x) + \log_3\log_7 x + \log_3(6.\log_7 x)\\ &= -1 + \log_3 6 + \log_3\log_7 x = \log_3 2 + \log_3\log_7 x.\end{aligned}$$

Khi đó, có thể đưa ra bài toán giải phương trình

$$\log_{\frac{1}{3}}\log_7 x^3 + \log_3(\log_7 x.\log_{\sqrt[3]{7}} x^2) = 1.$$

Với điều kiện $x > 1$, phương trình này tương đương với

$$\log_3\log_7 x = \log_3\frac{3}{2}\ \text{hay } \log_7 x = \frac{3}{2}.$$

Bài toán có nghiệm $x = \sqrt{343}$.

2.2 Phương trình mũ, phương trình logarit đưa về phương trình mũ và phương trình logarit cơ bản

2.2.1 Phương pháp đưa về cùng một cơ số

1) Đối với phương trình mũ: biến đổi phương trình về dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.
- Nếu cơ số a là một số dương khác 1 thì

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \text{ khi và chỉ khi } f(x) = g(x).$$

- Nếu cơ số a thay đổi thì

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \text{ khi và chỉ khi } a > 0 \text{ và } (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] = 0.$$

2) Đối với phương trình logarit ta biến đổi phương trình về dạng

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \text{ hay } f(x) = g(x) \text{ với } 0 < a \neq 1;\ f(x) > 0.$$

Ví dụ 2.2.1 Giải các phương trình sau
a) $3^{x^2-5x+4} = 81$;
b) $\log_2(3x-7) = 3$;
c) $\log_x 2.\log_{2x} 2 = \log_{16x} 2$;
d) $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$.
Lời giải. a) Ta có các phương trình sau tương đương

$$3^{x^2-5x+4} = 81;\ 3^{x^2-5x+4} = 3^4;\ x^2 - 5x + 4 = 4;\ x^2 - 5x = 0;\ x(x-5) = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm $x = 0;\ x = 5$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 5$.
b) Điều kiện $3x - 7 > 0$ hay $x > \dfrac{7}{3}$. Ta có các phương trình sau tương đương

$$\log_2(3x-5) = 3; \log_2(3x-7) = \log_2 2^3;$$
$$3x - 7 = 2^3; 3x - 7 = 8;\ 3x = 15;\ x = 5.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 5$.
c) Điều kiện $x > 0;\ x \neq 1,\ x \neq \dfrac{1}{2},\ x \neq \dfrac{1}{16}$. Phương trình đã cho tương đương với các phương trình

$$\frac{1}{\log_2 x}.\frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 16x};\ \frac{1}{\log_2 x}.\frac{1}{1+\log_2 x} = \frac{1}{4+\log_2 x};$$
$$4 + \log_2 x = (1 + \log_2 x)\,.\log_2 x;\ \log_2^2 x = 4; \log_2 x = \pm 2,$$

hay $x = 4;\ x = \dfrac{1}{4}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 4;\ x = \dfrac{1}{4}$.

d) Điều kiện $x > \dfrac{1}{2};\ x \neq 1$. Phương trình đã cho tương đương với các phương trình sau

$$2\log_3|x-1| + 2\log_3(2x-1) = 2;$$
$$\log_3|x-1| + \log_3(2x-1) = 1;$$

hay

$$\log_3[|x-1|(2x-1)] = 1 \Leftrightarrow |x-1|(2x-1) = 3\,. \tag{2.1}$$

Xét $\dfrac{1}{2} < x < 1$: phương trình (2.1) tương đương

$$(1-x)(2x-1) = 3 \text{ hay } 2x^2 - 3x + 4 = 0 \text{ (phương trình vô nghiệm).}$$

Xét $x > 1$ phương trình (2.1) tương đương

$$(x-1)(2x-1) = 3 \text{ hay } 2x^2 - 3x - 2 = 0,$$

phương trình có hai nghiệm $x = 2$ (thỏa mãn); $x = -\dfrac{1}{2}$ (không thỏa mãn).

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 2$.

Chú ý 2.3. Đây là phương pháp cơ bản để giải phương trình mũ và phương trình logarit, nhưng chỉ giải được một số không nhiều các phương trình, đối với phương trình mũ và phương trình logarit có cơ số chứa ẩn thì nên đặt điều kiện để phương trình có nghĩa rồi biến đổi.

Cần chú ý học sinh khi áp dụng nhóm công thức:

Nếu $0 < a \neq 1;\ b_1.b_2 > 0$ thì,

i. $\log_a(b_1b_2) = \log_a|b_1| + \log_a|b_2|\,.$

ii. $\log\dfrac{b_1}{b_2} = \log_a|b_1| - \log_a|b_2|\,.$

iii. $\log_a b^{2k} = 2k.\log_a|b|\,,\ k \in \mathbb{Z}^+.b \neq 0.$

2.2.2 Phương pháp mũ hoá và logarit hoá

Trong một số phương trình, để đưa về cùng cơ số hoặc khử biểu thức mũ, logarit chứa ẩn số, ta thường lấy mũ hoặc logarit các vế. Chúng ta áp dụng các công thức:

$a^M = a^N$ khi và chỉ khi $M = N$,
$\log_a M = \log_a N$ khi và chỉ khi $M = N$,
$\log_a N = M$ khi và chỉ khi $N = a^M$.

Ví dụ 2.2.2 Giải các phương trình sau

a) $3^x.2^{x^2} = 1$;

b) $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$.

Lời giải. a) Lấy logarit hai vế với cơ số 3, ta được $\log_3\left(3^x.2^{x^2}\right) = \log_3 1$, suy ra $\log_3 3^x + \log_3 2^{x^2} = 0$. Từ đó ta có

$$x + x^2\log_3 2 = 0 \text{ hay } x(1 + x\log_3 2) = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -\dfrac{1}{\log_3 2} = -\log_2 3$. [4]

b) Điều kiện $5 - 2^x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với phương trình $2^{\log_2(5-2^x)} = 2^{2-x}$. Từ đó ta có

$$5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \text{ hay } 2^{2x} - 5.2^x + 4 = 0.$$

Đặt $t = 2^x, (t > 0)$, ta có phương trình bậc hai $t^2 - 5t + 4 = 0$ với hai nghiệm dương $t = 1;\ t = 4$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0, x = 2$. [4]

Từ những phương trình mũ và phương trình logarit sử dụng phương pháp logarit hóa và mũ hóa cơ bản giáo viên đưa ra ví dụ về phương trình mũ và phương trình logarit đòi hỏi học sinh phải nhạy bén trong việc phân tích hai vế của phương trình sau đó áp dụng phương pháp logarit hóa và mũ hóa với cơ số thích hợp.

Ví dụ 2.2.3 Giải các phương trình sau

a) $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$;

b) $8^{\frac{x}{x+2}} = 36.3^{2-x}$;

c) $2^x.5^x = 0,2.\left(10^{x-1}\right)^5$;

d) $3^{4^x} = 4^{3^x}$.

Lời giải. a) Điều kiện $x \neq 0$. Khi đó các phương trình sau tương đương

$5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$; $5^x.2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 5^3.2^2$; $2^{\frac{3(x-1)}{x}-2} = 5^{3-x}$; $\log_2 2^{\frac{3(x-1)}{x}-2} = \log_2 5^{3-x}$;
$\dfrac{x-3}{x} = (3-x)\log_2 5$; $(x-3)(1 + x\log_2 5) = 0$.

Giải phương trình ta thu được $x = 3$ và $x = -\dfrac{1}{\log_2 5} = -\log_5 2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -\log_5 2$.

b) Điều kiện $x \neq -2$. Ta có các phương trình sau tương đương

$$8^{\frac{x}{x+2}} = 36.3^{2-x};\ 2^{\frac{3x}{x+2}} = 2^2.3^2.3^{2-x}; 2^{\frac{3x}{x+2}-2} = 3^{4-x}; \log_2\left(2^{\frac{x-4}{x+2}}\right) = \log_2\left(3^{4-x}\right);$$
$$\frac{x-4}{x-2} = (4-x)\log_2 3; (x-4)\left(\frac{1}{x+2} + \log_2 3\right) = 0.$$

Phương trình có nghiệm là $x = 4$ và $x = -\log_3 18$.
Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 4; x = -\log_3 18$.
c) Ta có các phương trình tương đương sau

$$2^x.5^x = 0,2.\left(10^{x-1}\right)^5; 10^x = \frac{1}{5}.10^{5(x-1)}; \log\left(10^x\right) = \log\frac{2}{10} + \log 10^{5(x-1)};$$
$$x = \log 2 - 1 + 5x - 5; 4x = 6 - \log 2; x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\log 2.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4}\log 2$.
d) Ta có phương trình $3^{4^x} = 4^{3^x}$ tương đương với

$$\log_3\left(3^{4^x}\right) = \log_3\left(4^{3^x}\right); 4^x = 3^x \log_3 4,$$

hay $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x = \log_3 4$, phương trình có nghiệm $x = \log_{\frac{4}{3}}\left(\log_3 4\right)$.
Chú ý 2.4. Khi gặp các phương trình có hai vế đều dương và tích của nhiều lũy thừa có cơ số và số mũ khác nhau (không thể đưa về cùng cơ số, hoặc cùng số mũ được), nếu lấy logarit với cơ số thích hợp ta có thể đưa phương trình đã cho thành phương trình đơn giản hơn đã biết cách giải.

2.2.3 Phương pháp đặt ẩn phụ

Đối với một số phương trình mũ và logarit phức tạp hơn, chúng ta không thể sử dụng cách đưa về cùng một cơ số mà nên dùng phương pháp đặt ẩn phụ để được phương trình hoặc hệ phương trình đại số thông thường.
Chú ý 2.5. Khi đặt ẩn phụ, ta nên tìm điều kiện của ẩn phụ (tuỳ thuộc vào điều kiện của ẩn cần tìm).
Ví dụ 2.2.4 Giải các phương trình mũ sau

a) $2^{2x+1} - 2^{x+3} = 64$;
b) $e^{2x} - 4e^{-2x} = 3$;
c) $6.4^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x}} + 6.9^{\frac{1}{x}} = 0$;

d) $8^x + 18^x = 2.27^x$.

Lời giải. a) Với bài toán này, ta nhận thấy rằng các hạng tử trong phương trình đều có lũy thừa của 2, do đó, đầu tiên ta sẽ triệt tiêu các lũy thừa này. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$2.(2^x)^2 - 2^3.2^x = 64, \text{ hay } (2^x)^2 - 4.2^x - 32 = 0.$$

Đến đây, học sinh dễ dàng có được cách đặt ẩn phù hợp. Đặt $t = 2^x (t > 0)$ thì phương trình trở thành $t^2 - 4t - 32 = 0$. Đây là phương trình bậc hai với ẩn số t, ta tìm được $t = 8$ hoặc $t = -4$. Tuy nhiên $t > 0$ nên chỉ có $t = 8$ là thoả mãn.

Thay lại để tìm x, ta có $x = 3$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 3$.

b) Đặt $t = e^{2x}$ $(t > 0)$, ta có phương trình

$$t - \frac{4}{t} = 3 \text{ hay } t^2 - 3t - 4 = 0.$$

Phương trình bậc hai ẩn t này chỉ có một nghiệm dương $t = 4$, suy ra $e^{2x} = 4$, hay $x = \dfrac{1}{2}\ln 4$.

c) Điều kiện $x \neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình cho $6^{\frac{1}{x}} > 0$, ta có

$$6.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - 13.1 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, (t > 0)$. Phương trình trở thành $6t - 13 + \dfrac{6}{t} = 0$ hay $6t^2 - 13t + 6 = 0$.

Phương trình bậc hai trên có hai nghiệm dương $t = \dfrac{3}{2};\ t = \dfrac{2}{3}$.

Với $t = \dfrac{3}{2}$ thì $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{3}{2}$ hay $x = 1$.

Với $t = \dfrac{2}{3}$ thì $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{2}{3}$ hay $x = -1$.

Phương trình có hai nghiệm $x = 1;\ x = -1$.

d) Phương trình đã cho tương đương $2^{3x} + 2^x.3^{2x} = 2.3^{2x}$, hay

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, (t > 0)$ thì phương trình trở thành

$$t^3 + t + 2 = 0 \text{ hay } (t+1)\left(t^2 + t + 2\right) = 0.$$

Do

$$t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

nên $t - 1 = 0$ hay $t = 1$. Từ đó suy ra $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, do đó $x = 0$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 2.2.5 Giải các phương trình logarit sau

a) $\frac{1}{4 + \log_3 x} + \frac{1}{2 - \log_3 x} = 1$;

b) $-\log^3 x + 2\log^2 x = 2 - \log x$;

c) $x^{\log^2 x^2 - 3\log x - \frac{9}{2}} = 10^{-2\log x}$;

d) $\log_2 \sqrt{|x|} - 4\log_4 \sqrt{|x|} - 5 = 0$.

Lời giải. a) Điều kiện $x > 0; 4 + \log_2 x \neq 0, 2 - \log_2 x \neq 0$. Đặt $t = \log_2 x$ thì điều kiện của t là $t \neq -4,\ t \neq 2$ và phương trình trở thành

$$\frac{1}{4+t} + \frac{1}{2-t} = 1,$$

phương trình này tương đương với các phương trình

$$2 - t + 4 + t = (4+t)(2-t);t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Giải phương trình ta được $t = -1;\ t = -2$ đều thỏa mãn.
Với $t = -1$ thì $\log_2 x = -1$ hay $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.
Với $t = -2$ thì $\log_2 x = -2$ hay $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{2};\ x = \frac{1}{4}$.
b) Điều kiện $x > 0$, đặt $t = \log x, (t \in \mathbb{R})$, phương trình trở thành

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0, \text{ hay } (t-1)(t+1)(t-2) = 0.$$

Do đó t nhận các giá trị là $-1, 1$ hoặc 2.
Với $t = 1$ thì $\log x = 1$ hay $x = 10^1 = 10$.
Với $t = -1$ thì $\log x = -1$ hay $x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$.

Với $t = 2$ thì $\log x = 2$ hay $x = 10^2 = 100$.
Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = 10;\ x = \dfrac{1}{10};\ x = 100$.
c) Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với các phương trình

$$x^{\log^2 x^2 - 3\log x - \frac{9}{2}} = \left(10^{\log x}\right)^{-2} = x^{-2};\ \log^2 x^2 - 3\log x - \frac{9}{2} = -2;$$

$$8\log^2 x - 6\log x - 5 = 0.$$

Đặt $t = \log x, (t \in \mathbb{R})$ thì phương trình trở thành $8t^2 - 6t - 5 = 0$; giải phương trình ta thu được $t = -\dfrac{1}{2};\ t = \dfrac{5}{4}$.
Với $t = -\dfrac{1}{2}$ thì $\log x = 2$ hay $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
Với $t = \dfrac{5}{4}$ thì $\log x = \dfrac{5}{4}$ hay $x = \sqrt[4]{10^5}$.
Phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ và $x = \sqrt[4]{10^5}$.
d) Điều kiện $x \neq 0;\ \log_2 |x| \geq 0$ hay $|x| \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương

$$\log_2 |x|^{\frac{1}{2}} - 4\sqrt{\log_{2^2} |x|} - 5 = 0, \text{ hay } \frac{1}{2}\log_2 |x| - 4\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 |x|} - 5 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{1}{2}\log |x|}, (t \geq 0)$ thì phương trình trở thành $t^2 - 4t - 5 = 0$, phương trình này có hai nghiệm $t = -1$; $t = 5$. Do $t \geq 0$ nên $t = 5$. Suy ra $\dfrac{1}{2}\log_2 |x| = 25$ hay $\log_2 |x| = 50$, suy ra $|x| = 50$ (thỏa mãn).
Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm 2^{50}$.
Nhận xét 2.6. Ta sẽ đặt ẩn phụ khi gặp những bài toán (tương đối phức tạp) có cơ số giống nhau hoặc có cơ số liên quan nhau bằng các lũy thừa.
- Không phải bài toán nào ta cũng đặt ẩn phụ được ngay. Chẳng hạn như khi giải phương trình $\left(2 - \sqrt{3}\right)^x + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 14$ ta phải nhận thấy rằng

$$\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2,$$

suy ra $2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{-1}$ và nếu đặt $t = \left(2 - \sqrt{3}\right)^x$ thì

$$\frac{1}{t} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x.$$

Tương tự như vậy đối với phương trình $\left(\log_{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} x\right)^2 - \log_{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} x = 2$. Muốn đặt được ẩn phụ, ta phải nhận thấy được mối liên hệ

$$2\sqrt{2}+\sqrt{7}=\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}=(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^{-1}.$$

Thậm chí, một số phương trình còn khó nhìn ra để đặt ẩn phụ hơn. Chẳng hạn khi giải phương trình $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{2}-1\right)^x+3$ ta cần nhận thấy

$$\left(\sqrt{2}-1\right).\left(\sqrt{2}+1\right)=1$$

và

$$3+2\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}+1\right)^2.$$

Từ đó nếu đặt $2t=\left(\sqrt{2}+1\right)^x$, $(t>0)$ thì ta có

$$4t^2=\frac{1}{2t}+3 \text{ hay } 4t^3-3t=\frac{1}{2}.$$

(Chú ý rằng $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}$. Đáp số: $x=\log_{\sqrt{2}+1}\left(2\cos\frac{\pi}{9}\right)$).

- Bên cạnh đó, cũng có những bài toán mà chúng ta phải đặt nhiều hơn một ẩn phụ. Khi đó phương trình đã cho được đưa về một hệ phương trình đại số. Ví dụ sau đây sẽ minh chứng cho nhận định này.

Ví dụ 2.2.6 Giải các phương trình

a) $2^{2x}-\sqrt{2^x+6}=6$;

b) $\sqrt{3+\log_2(x^2-4x+5)}+2\sqrt{5-\log_2(x^2-4x+5)}=6$.

Lời giải. a) Đặt $u=2^x,\ (u>0)$ thì phương trình trở thành $u^2-\sqrt{u+6}=6$. Tiếp tục đặt $v=\sqrt{u+6}\,(v>\sqrt{6})$ thì $v^2=u+6$ và ta có hệ phương trình đối xứng

$$\begin{cases} u^2=v+6\\ v^2=u+6.\end{cases}$$

Trừ vế với vế ta được $u^2-v^2=-(u-v)$, hay $(u-v)(u+v+1)=0$. Suy ra $u-v=0$ hoặc $u+v+1=0$.

Với $u=v$ ta được $u^2=u+6$ hay $u=-2$; $u=3$; suy ra $2^x=3$ hay $x=\log_2 3$;

Với $u+v+1=0$ ta được $u^2+u-5=0$ hay $u=\frac{-1+\sqrt{21}}{2};\ u=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, do đó $2^x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ hay $x=\log_2\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \log_2 3$; $x = \log_2 \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$.
b) Điều kiện $2-\sqrt{29} \le x \le 2+\sqrt{29}$. Đặt

$$u = \sqrt{3+\log_2\left(x^2-4x+5\right)};\ v = \sqrt{5-\log_2\left(x^2-4x+5\right)};\ \ u>0, v>0.$$

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u+2v=6 \\ u^2+v^2=8. \end{cases}$$

Ta có $u=2;\ v=2$ hoặc $u=\dfrac{2}{5};\ v=\dfrac{14}{5}$ là hai nghiệm của hệ phương trình. Từ đó suy ra $\log_2\left(x^2-4x+5\right)=1$ hoặc $\log_2\left(x^2-4x+5\right)=-\dfrac{71}{25}$ và tìm được 4 nghiệm của phương trình.
Nhận xét 2.7. Đối với một số phương trình ẩn x, sau khi đặt ẩn phụ thì trong phương trình vẫn còn ẩn x (không biểu diễn hết được theo ẩn phụ), ta vẫn giải bình thường bằng cách coi x lúc đó là hệ số tự do, và tính ẩn phụ theo x rồi thay lại để tìm x. Ví dụ sau minh họa điều này.
Ví dụ 2.2.7 Giải các phương trình

a) $25^x - 2(3-x).5^x + 2x - 7 = 0$;

b) $x.2^x = x(3-x) + 2(2^x - 1)$;

c) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2x - 6 = 0$.

Lời giải. a) Đặt $t=5^x$, $(t>0)$ thì phương trình trở thành

$$t^2 - 2(3-2)t + 2x - 7 = 0.$$

Phương trình bậc hai (ẩn t) này thoả mãn điều kiện $a-b+c=0$ nên có một nghiệm $t=-1$ và nghiệm còn lại là $t=-2x+7$. Vì $t>0$ nên $t=-2x+7$. Khi đó

$$5^x = -2x + 7. \tag{2.2}$$

Đến đây ta có hai cách lập luận để tìm được x. Cách 1. Ta thấy $x=1$ là một nghiệm của (2.2) vì $5^1 = -2+7$.
Nếu $x>1$ thì $5^x > 5 > -2x+7$, do đó (2.2) vô nghiệm.
Nếu $x<1$ thì $5^x < 5 < -2x+7$, do đó (2.2) cũng vô nghiệm.
Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của.
Cách 2. Ta thấy $y=f(x)=5^x$ là hàm số đồng biến và $y=g(x)=-2x+7$

là hàm số nghịch biến. Do đó, đồ thị của chúng cắt nhau tại nhiều nhất là một điểm. Mặt khác $f(1) = g(1) = 5$ nên đồ thị của chúng cắt nhau tại điểm duy nhất là $(1;5)$.
Do đó phương trình (2.2) có duy nhất một nghiệm $x = 1$.
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.
b) Đặt $2^x = y$, $(y > 0)$ thì phương trình trở thành

$$xy = x(3-x) + 2(y-1).$$

Phương trình này tương đương với các phương trình

$$\begin{aligned}
&y(x-2) + x^2 - 3x + 2 = 0;\\
&y(x-2) + (x-1)(x-2) = 0;\\
&(x-2)(y+x-1) = 0.
\end{aligned}$$

Hay $x = 2$; và

$$2^x = 1 - x. \tag{2.3}$$

Tương tự câu a) ta cũng lập luận được $x = 0$ là nghiệm duy nhất của (2.3).
Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$; $x = 2$.
c) Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, $(t \in \mathbb{R})$ thì phương trình trở thành

$$t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0.$$

Phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned}
&t^2 - t - 6 + x(t+2) = 0; \ (t+2)(t-3) + x(t+2) = 0;\\
&(t+2)(t-3+x) = 0.
\end{aligned}$$

Giải phương trình ta thu được $t = -2$; $t = 3 - x$.
Với $t = -2$ thì $\log_2 x = -2$ hay $x = \dfrac{1}{4}$.
Với $t = 3 - x$ thì

$$\log_2 x = 3 - x. \tag{2.4}$$

Nhận thấy vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến và $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (2.4). Do đó phương trình (2.4) có nghiệm duy nhất $x = 2$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{1}{4}$, $x = 2$.
Chú ý 2.8. Khi đặt ẩn phụ ta chọn ẩn phụ thích hợp để đưa phương trình

mũ, phương trình logarit về dạng đại số với ẩn mới, giải phương trình này tìm nghiệm thế vào ta sẽ thu được phương trình cơ bản hoặc phương trình đơn giản hơn.

- Khi đặt ẩn phụ ta cần đặt điều kiện thích hợp cho ẩn mới, để rút ngắn bớt ở các bước giải tiếp theo và nhất là trong các bài biện luận số nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2.2.8 Tìm m để phương trình $4^x + 5.2^x + m = 0$ có nghiệm.

Lời giải. Đặt $t = 2^x,\ t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 + 5t + m = 0$. Suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình $t^2 + 5t + m = 0$ có nghiệm $t > 0$.

Đến đây một số học sinh có thể sử dụng phương pháp nguyên thủy đó là tính Δ để tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm $t > 0$.

Tuy nhiên giáo viên có thể gợi ý cho học sinh cô lập tham số m về một vế và đánh giá.

Với $t > 0$ ta có hàm $f(t) = t^2 + 5t > 0$ và liên tục nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-m > 0$ hay $m < 0$.

Vậy với $m < 0$ thì phương trình có nghiệm.

2.3 Phương trình mũ, phương trình logarit với một số phương pháp giải đặc biệt

2.3.1 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

- Hàm số có dạng $y = a^x, 0 < a \neq 1$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$, tức là:

Nếu $a > 1$ thì với $x_1 > x_2$ ta có $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Nếu $0 < a < 1$ thì với $x_1 > x_2$ ta có $a^{x_1} < a^{x_2}$.

$x_1 = x_2$ khi và chỉ khi $a^{x_1} = a^{x_2}$.

- Hàm số có dạng $y = \log_a x,\ 0 < a \neq 1$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$, tức là:

Nếu $a > 1$ thì với $x_1 > x_2 > 0$ ta có $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

Nếu $0 < a < 1$ thì với $x_1 > x_2 > 0$ ta có $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

$x_1 = x_2 > 0$ khi và chỉ khi $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Ví dụ 2.3.1 Giải phương trình

$$2^x = 3^{\frac{x}{2}} + 1.$$

Lời giải. Chia hai vế của phương trình cho 2^x ta được

$$1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Xét hàm số

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

Ta có

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác

$$f(2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$. Ta chứng minh đây là nghiệm duy nhất của phương trình. Thật vậy, do $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên,
Với $x > 2$ thì $f(x) < f(2)$ hay $f(x) < 1$.
Với $x < 2$ thì $f(x) > f(2)$ hay $f(x) > 1$.
Ví dụ 2.3.2 Giải phương trình

$$\log_2 x = 3 - x.$$

Lời giải. Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương $\log_2 x + x = 3$.
Xét hàm số $f(x) = \log_2 x + x$ với $x > 0$ có

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 1 > 0, \forall x > 0.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến, mặt khác $f(2) = 3$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.
Ví dụ 2.3.3 Giải phương trình

$$\log_8 (3 + x) = \log_{27} (1 - 2x).$$

Lời giải. Điều kiện $-3 < x < \dfrac{1}{2}$. Đặt

$$t = \log_8 (3 + x) = \log_{27} (1 - 2x) . \qquad (2.5)$$

Suy ra $3 + x = 8^t$ và $1 - 2x = 27^t$, hay

$$2.8^t + 27^t = 7. \qquad (2.6)$$

Xét hàm số $f(t) = 2.8^t + 27^t$, ta có

$$f'(t) = 2.8^t \ln 8 + 27^t \ln 27 > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình (2.6) có nghiệm duy nhất. Mặt khác

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 7 = f(t),$$

suy ra $t = \dfrac{1}{3}$. Thay $t = \dfrac{1}{3}$ vào (2.5) ta được $x = -1$ thoả mãn điều kiện.
Vậy $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2.3.4 Giải phương trình

$$3^x.2x = 3^x + 2x + 1.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$3^x (2x - 1) = 2x + 1. \qquad (2.7)$$

- Nhận xét: $x = \dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình.
- Với $x \neq \dfrac{1}{2}$ thì phương trình (2.7) tương đương

$$3^x = \frac{2x + 1}{2x - 1}. \qquad (2.8)$$

Đặt $f(x) = 3^x;\ g(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$.
Xét trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$, ta có
$f'(x) = 3^x \ln 3 > 0$ nên $f(x)$ là hàm luôn đồng biến trên $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$,
$g'(x) = \dfrac{-4}{(2x - 1)^2} < 0$ nên $g(x)$ là hàm luôn nghịch biến trên $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$,

Suy ra phương trình (2.10) có nghiệm duy nhất trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$, Ta thấy $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2.7) trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Xét trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, ta có $f'(x)=3^x\ln 3>0$ nên $f(x)$ là hàm luôn đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$,

$g'(x)=\dfrac{-4}{(2x-1)^2}<0, \forall x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ nên $g(x)$ là hàm luôn nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Suy ra phương trình (2.10) có nghiệm duy nhất trên $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, Ta thấy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2.7) trên $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\pm 1$.

Ví dụ 2.3.5 Giải phương trình

$$2^{2^x}+3^{2^x}=2^x+3^{x+1}+x+1.$$

Lời giải. Đưa phương trình về dạng $2^{2^x}+3^{2^x}+2^x=2.2^x+3^{x+1}+x+1$ hay $2^{2^x}+3^{2^x}+2^x=2^{x+1}+3^{x+1}+x+1$ và đặt $u=2^x, v=x+1$, khi đó ta được phương trình $2^u+3^u+u=2^v+3^v+v$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t+3^t+t$ có $f'\left(t\right)=2^t\ln 2+3^t\ln 3+1>0, \forall t\in R$, suy ra $f\left(t\right)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, từ phương trình ta có $f\left(u\right)=f\left(v\right)$ khi và chỉ khi $u=v$ và phương trình ban đầu tương đương với $2^x=x+1$ hay $2^x-x-1=0$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=2^x-x-1$ có $g'\left(x\right)=2^x\ln 2-1$, do đó $g'\left(x\right)=0$ khi và chỉ khi $2^x=\dfrac{1}{\ln 2}$ hay $x=\log_2\dfrac{1}{\ln 2}$.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^x-x-1\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2^x-x-1\right)=+\infty$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$ là

x	$-\infty$		$\log_2\dfrac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\log_2\dfrac{1}{\ln 2})$	$\nearrow$	$+\infty$

(trong đó $g\left(\log_2\dfrac{1}{\ln 2}\right) = 2^{\log_2\frac{1}{ln2}} - \log_2\dfrac{1}{\ln 2} - 1 < 0$).
Căn cứ vào bảng biến thiên ta nhận thấy phương trình $g\left(x\right) = 0$ chỉ có nhiều nhất là hai nghiệm. Mặt khác $g\left(0\right) = g\left(1\right) = 0$, vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 1$.
Chú ý 2.9. Đây là dạng toán khó, khi giải phương trình ta khéo léo đưa phương trình thành dạng có hai vế là hàm số có tính đơn điệu khác nhau, chỉ ra nghiệm và kết luận nghiệm đó là duy nhất.
- Nếu phương trình có nhiều hơn môt nghiệm ta cần dựa vào bảng biến thiên để suy ra kết luận.

2.3.2 Phương pháp biến thiên hằng số

Trong phương pháp này, ta đổi vai trò của ẩn cần tìm với hằng số: coi hằng số là ẩn và ẩn là hằng số.
Ví dụ 2.3.6 Giải phương trình

$$4^{2x} + 2^{3x+1} + 2^{x+3} - 16 = 0.$$

Lời giải. Đặt $t = 2^x, (t > 0)$ thì phương trình trở thành

$$t^4 + 2t^3 + 8t - 16 = 0.$$

Ta viết lại phương trình này thành

$$4^2 - 2t.4 - (t^4 + 2t^3) = 0.$$

Bây giờ ta coi $4 = u$ là một ẩn của phương trình, còn t là số đã biết. Phương trình trở thành phương trình bậc hai đối với ẩn u. Tính Δ', ta có

$$\Delta' = (-t)^2 + (t^4 + 2t^3) = (t^2 + t)^2.$$

Do đó
$u = t - t(t+1)$ hay $4 = -t^2 + t + 1$, phương trình này vô nghiệm;
$u = t + t(t+1)$ hay $t^2 + 2t - 4 = 0$, phương trình này có hai nghiệm.
$t = -1 - \sqrt{5}$, (không thỏa mãn); $t = -1 + \sqrt{5}$ (thỏa mãn). Suy ra $2^x = \sqrt{5} - 1$ hay $x = \log_2(\sqrt{5} - 1)$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \log_2(\sqrt{5} - 1)$.

2.3.3 Đưa về phương trình tích, tổng hai số không âm, nghiệm phương trình bậc hai

Ví dụ 2.3.7 Giải các phương trình sau

a) $12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20$;

b) $\log_2(3x-4).\log_2 x = \log_2 x$;

c) $(9^x - 2.3^x - 3)\log_3(x-1) + \log_{\frac{1}{3}} 27 = \dfrac{2}{3}.9^{\frac{x+1}{2}} - 9^x$.

Lời giải. a) Phương trình đã cho tương đương các phương trình

$$12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} - 20 = 0; 3.3^x(4+5^x) - 5.(5^x+4) = 0;$$
$$(5^x+4).(3.3^x-5) = 0.$$

Suy ra $5^x + 4 = 0$ (vô nghiệm) hoặc $3.3^x - 5 = 0$, phương trình này có nghiệm $x = \log_3\dfrac{5}{3}$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \log_3\dfrac{5}{3}$.

b) Điều kiện $3x - 4 > 0$; $x > 0$ hay $x > \dfrac{4}{3}$. Ta có phương trình đã cho tương đương

$$\log_2(3x-4).\log_2 x = \log_2 x, \text{ hay } \log_2 x\left[\log_2(3x-4) - 1\right] = 0.$$

Giải phương trình ta thu được $x = 1$; $x = 2$. Do $x > \dfrac{4}{3}$ nên phương trình có một nghiệm là $x = 2$.

c) Điều kiện $x > 1$. Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương

$$\left(3^{2x} - 2.3^x - 3\right)\log_3(x+1) - 3 = 2.3^x - 3^{2x}, \text{ hay}$$
$$(3^x-3)(3^x+1)\left[\log_3(x-1) + 1\right] = 0.$$

Giải phương trình ta được $x = 1$ (không thỏa mãn); $x = \dfrac{4}{3}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = \dfrac{4}{3}$.

Ví dụ 2.3.8 Giải các phương trình mũ sau

a) $2\left(x^2 - 3^{x+1}\right) = 3x(1 - 4.3^x) - 1$;

b) $x^2.5^{x-1} - \left(3^x - 3.5^{x-1}\right) + 2.5^{x-1} - 3^x = 0$.

Ở ví dụ này học sinh có thể nghĩ tới phương pháp đưa về phương trình tích, nhưng giáo viên có thể khéo léo hướng dẫn học sinh quan sát phương trình đã cho có hình bóng của một phương trình bậc hai. Từ đó cho học sinh đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai và sử dụng kết quả đã có để tìm nghiệm của phương trình bậc hai theo x.

Lời giải. a) Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 - 3\left(1 - 4.3^x\right).x - 6.3^x + 1 = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta &= 9\left(1 - 8.3^x + 16.9^x\right) - 8.\left(-6.3^x + 1\right)\\ &= 144.9^x - 24.3^x + 1 = \left(12.3^x - 1\right)^2.\end{aligned}$$

Suy ra $x = \dfrac{3 - 12.3^x + 12.3^x - 1}{4}$ hay $x = \dfrac{1}{2}$,

và $x = \dfrac{3 - 12.3^x - 12.3^x + 1}{4} = 1 - 6.3^x$ hay $3^x = \dfrac{1}{6} - \dfrac{x}{6}$.

Ta có $x = -1$ là một nghiệm của phương trình $3^x = \dfrac{1}{6} - \dfrac{x}{6}$, và

Hàm số $f(x) = 3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$,

Hàm số $g(x) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{x}{6}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $3^x = \dfrac{1}{6} - \dfrac{x}{6}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1;\ x = \dfrac{1}{2}$.

b) Phương trình tương đương $5^x.x^2 - \left(5.3^x - 3.5^x\right).x + 2.5^x - 5.3^x = 0$. Ta có

$$\Delta = \left(5.3^x - 3.5^x\right) - 4.5^x.\left(2.5^x - 5.3^x\right) = \left(5.3^x - 5^x\right)^2.$$

Suy ra $x = -1$ và $x = -2 + 5.\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ hay $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \dfrac{x+2}{5}$. Phương trình $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \dfrac{x+2}{5}$ có một nghiệm $x = 1$.

Hàm số $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

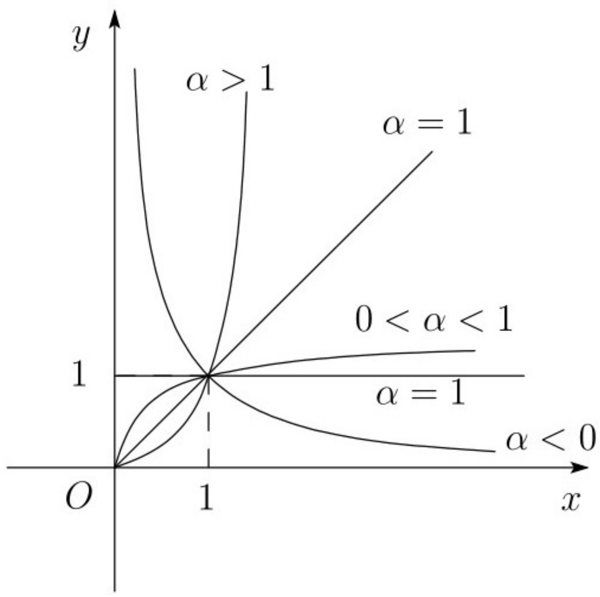
Hàm số $g(x) = \dfrac{x+2}{5}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó ta có $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \dfrac{x+2}{5}$.

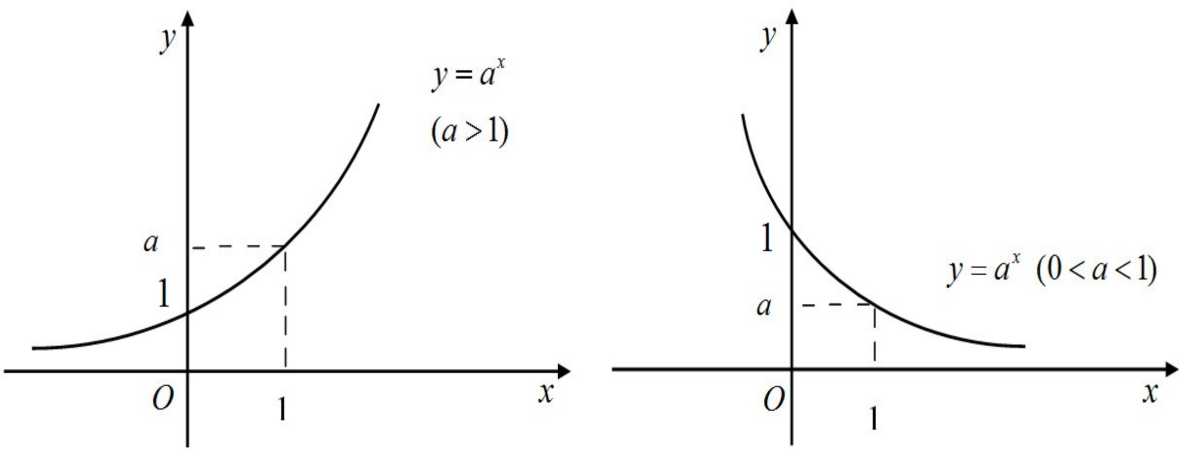
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pm 1$.

2.3.4 Phương pháp đồ thị

Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = \alpha^x$ trên khoảng $(0, +\infty)$ tương ứng các giá trị khác nhau của α. (hình 2.1)



Hình 2.1



Hình 2.2

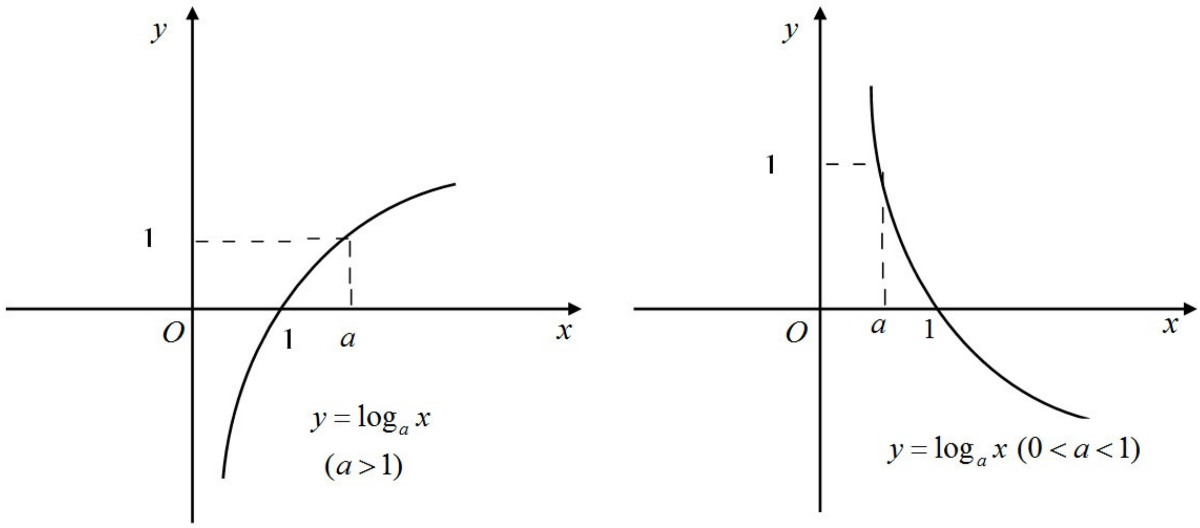
Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = a^x$ trên $\mathbb{R}$ tương ứng các giá trị khác nhau của a.(hình 2.2)

Nhận xét:

Khi $a > 1$ hàm số luôn đồng biến;

Khi $0 < a < 1$ hàm số luôn nghịch biến.

Đồ thị có tiệm cận ngang là Ox và luôn đi qua các điểm $(0, 1)\,, (1, a)$ và nằm phía trên trục hoành.



Hình 2.3

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ trên khoảng $(0, +\infty)$ tương ứng các giá trị khác nhau của a (hình 2.3).

Nhận xét:

Khi a> 1 thì hàm số luôn đồng biến;

Khi $0 < a < 1$ thì hàm số luôn nghịch biến.

Đồ thị có tiệm cận đứng là Oy và luôn đi qua các điểm $(1, 0)$, $(a, 1)$ và nằm phía bên phải trục tung.

Giáo viên hướng dẫn cho học sinh giải các bài toán dạng

$$a^x = f(x), (0 < a \neq 1)$$

giải bằng phương pháp đồ thị.

Bài toán. Giải phương trình dạng $a^x = f(x)$, $(0 < a \neq 1)$.

Phương trình đã cho là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y = a^x$, $(0 < a \neq 1)$ và $y = f(x)$. Khi đó ta thực hiện 2 bước

Bước 1. Vẽ đồ thị các hàm số $y = a^x$, $(0 < a \neq 1)$ và $y = f(x)$.

Bước 2. Kết luận nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của 2 đồ thị.

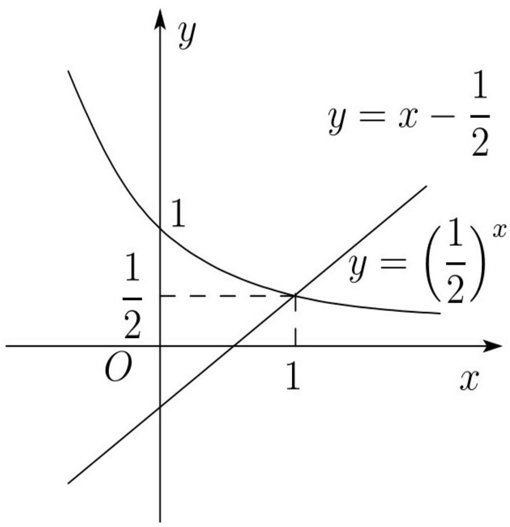
Ví dụ 2.3.9 Giải phương trình

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}.$$

Nhận xét 2.10. Phương trình đã cho có thể giải bằng nhiều phương pháp nhưng trước hết ta sử dụng phương pháp đồ thị xem ưu điểm và nhược điểm so với các phương pháp khác.

Để giải phương trình chúng ta vẽ đồ thị của các hàm số (học sinh chọn hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thích hợp và biến đổi phương trình về dạng $f(x) = g(x)$ nếu cần thiết) trong phương trình cần giải trên cùng một hệ trục tọa độ. Sau đó tìm giao điểm của chúng và biện luận, kết luận nghiệm của phương trình là hoành độ của các giao điểm đó.

Lời giải. Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ và đường thẳng $y = x - \dfrac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy (hình 2.4). Ta thấy chúng cắt nhau tại điểm duy nhất có hoành độ $x = 1$. Thử lại ta thấy giá trị này thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ là hàm số nghịch biến, $y = x - \dfrac{1}{2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.



Hình 2.4

Giáo viên mở rộng cho học sinh các bài toán giải phương trình mũ, phương trình logarit bằng phương pháp đồ thị ra các bài toán có kết hợp thêm đặt ẩn phụ.

Ví dụ 2.3.10 Giải các phương trình

a) $3.4^x + (3x - 10)\,.2^x + 3 - x = 0$;

b) $9^x - 2\,(x + 5)\,.3^x + 9(2x + 1) = 0$.

Lời giải. a. Đặt $t = 2^x,\ t > 0$. Ta có phương trình

$$t^2 + (3x - 10)\,t + 3 - x = 0. \tag{2.9}$$

Ta xem (2.9) là phương trình bậc hai ẩn t và x là tham số. Phương trình này có

$$\Delta = (3x-10)^2 - 12(3-x) = (3x-8)^2.$$

Suy ra phương trình (2.9) có hai nghiệm $t = \dfrac{1}{3}$ hoặc $t = -x+3$.

Với $t = \dfrac{1}{3}$ thì $2^x = \dfrac{1}{3}$ hay $x = -\log_2 3$.

Với $t = -x+3$ thì $2^x = -x+3$ hay $x = 1$ (Do Vế trái là một hàm đồng biến).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\log_2 3;\ x = 1$.

b. Đặt $t = 3^x,\ t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) = 0, \tag{2.10}$$

Phương trình này có biệt số

$$\Delta' = (x+5)^2 - 9(2x+1) - (x-4)^2.$$

Vì $\Delta' \geq 0$ nên phương trình (2.10) có 2 nghiệm $t = 9$ hoặc $t = 2x+1$.

Với $t = 9$ thì $3^x = 9$ hay $x = 2$;

Với $t = 2x+1$ thì $3^x = 2x+1$.

Xét $f(x) = 3^x$ và $g(x) = 2x+1$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, đồ thị của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai giao điểm có hoành độ $x = 0$ và $x = 1$. Như vậy, $x = 0$ và $x = 1$ là nghiệm phương trình.

Vậy phương trình cho có 3 nghiệm $x = 0;\ x = 1;\ x = 2$.

Ví dụ 2.3.11 Giải phương trình

$$4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}.$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq -2$. Phương trình tương đương

$$4^{\sqrt{x+2}+2}\left(4^{2x-2}-1\right) + 2^{x^3}\left(1-4^{2x-2}\right) = 0, \text{ hay}$$
$$\left(4^{2x-2}-1\right)\left(4^{\sqrt{x+2}+2} - 2^{x^3}\right) = 0;$$

Suy ra $4^{2x-2} = 1;\ 4^{\sqrt{x+2}+2} = 2^{x^3}$.

Với $4^{2x-2} = 1$ thì $2x-2 = 0$ hay $x = 1$;

Với $4^{\sqrt{x+2}+2} = 2^{x^3}$ ta có các phương trình tương đương

$$2\sqrt{x+2} + 4 = x^3; \left(x^3-8\right) - 2\left(\sqrt{x+2}-2\right) = 0;$$

$$(x-2)\left(x^2+2x+4\right) - \frac{2(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} = 0;$$

hay

$$(x-2)\left(x^2+2x+4-\frac{2}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0. \qquad (2.11)$$

Do

$$x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geq 3;\ \frac{2}{\sqrt{x+2}+2}\leq 1,$$

suy ra

$$x^2+2x+4-\frac{2}{\sqrt{x+2}+2}>0.$$

Suy ra phương trình (2.11) có nghiệm $x=2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1;\ x=2$.

Chú ý 2.11. Giáo viên có thể hướng dẫn học sinh giải phương trình

$$4^{\sqrt{x+2}+2}=2^{x^3} \qquad (2.12)$$

như sau. Ta thấy (2.12) có nghiệm thì $x\geq\sqrt[3]{4}$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-2\sqrt{x+2}-4,\ \ x\in\left[\sqrt[3]{4};+\infty\right)$, có $f(2)=0$ và

$$f'(x)=3x^2-\frac{1}{\sqrt{x+2}}>0,$$

suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[\sqrt[3]{4};+\infty\right)$. Suy ra (2.12) có nghiệm duy nhất $x=2$.

2.3.5 Phương pháp đánh giá

Ví dụ 2.3.12 Giải phương trình

$$2^{x^2+1}=2-\sqrt{x}.$$

Lời giải. Điều kiện $x\geq 0$. Ta có

Vế trái$=2^{x^2+1}\geq 2^{0+1}=2$ và Vế phải $=2-\sqrt{x}\leq 2-0=2$.

Suy ra Vế trái $\geq$ Vế phải, dấu bằng xảy ra khi $x=0$.

Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 2.3.13 Giải phương trình

$$1-4^x+2^{x+1}=2^x+2^{-x}.$$

Lời giải. Ta có phương trình $1-4^x+2^{x+1}=2^x+2^{-x}$ tương đương

$$2-(4^x-2.2^x+1)=2^x+2^{-x}, \text{ hay } 2-(2^x-1)^2=2^x+2^{-x}.$$

Vế trái$=2-(2^x-1)^2\le 2-0=2$ và Vế phải$=2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x.2^{-x}}=2$.
Suy ra Vế trái $\le$Vế phải, dấu bằng xảy ra khi $2^x-1=0$; $2^x=2^{-x}$ hay $x=0$.
Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.
Ví dụ 2.3.14 Giải phương trình

$$\log_3\left(9-\sqrt{x-1}\right)=\log_2\left(x^2-2x+5\right).$$

Lời giải. Điều kiện $x-1\ge 0$; $9-\sqrt{x-1}>0$; $x^2-2x+5>0$ hay $x\ge 1$; $x<82$; $(x-1)^2+4>0$ suy ra $x\in[1;82)$ Ta có
Vế trái$=\log_3\left(9-\sqrt{x-1}\right)\le \log_3 9=2$ và
Vế phải$=\log_2\left(x^2-2x+5\right)=\log_2\left[(x-1)^2+4\right]\ge\log_2 4=2$.
Suy ra Vế trái$\le$Vế phải, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x-1}=0;(x-1)^2=0 \text{ hay } x=1.$$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.
Ví dụ 2.3.15 Giải phương trình sau

$$\log_2\left(4x^2+8x+4\right)-\log_2 x=-2x^2+4x+2. \tag{2.13}$$

Lời giải. Điều kiện $x>0$. Phương trình (2.13) tương đương

$$\log\left(4x+\frac{4}{x}+8\right)=4-2(1-x)^2.$$

Ta có

$$\frac{4}{x}+4x\ge 8 \text{ hay } \frac{4}{x}+4x+8\ge 16$$

tương đương

$$\log_2\left(\frac{4}{x}+4x+8\right)\ge 4.$$

Vậy Vế trái(2.13)$\ge$ 4; Vế phải(2.13)$\le$ 4. Do đó Vế trái(2.13)=Vế phải(2.13) khi và chỉ khi $4x=\dfrac{4}{x}$ và $x-1=0$ hay $x=1$ (thỏa mãn).
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.
Ví dụ 2.3.16 Giải phương trình

$$\log_x(x+1)=\log 2.$$

Lời giải. Điều kiện $0 < x \neq 1$. Nếu $0 < x < 1$ thì $x + 1 > 1$, ta có

$$\log_x (x+1) < \log_x 1 = 0 = \log 1 < \log 2.$$

Nếu $x > 1$ thì $x + 1 > x$, ta có

$$\log_x (x+1) > \log_x x = 1 = \log 10 > \log 2.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2.3.17 Giải phương trình

$$\log_2 x + \log_3 (x+1) = \log_4 (x+2) + \log_5 (x+3).$$

Lời giải. Điều kiện $x > 0$. Kiểm tra $x = 2$ là một nghiệm của phương trình.

Nếu $0 < x < 2$ thì $\dfrac{x}{2} > \dfrac{x+2}{4} > 1$ và $\dfrac{x+1}{3} > \dfrac{x+3}{5} > 1$,

Do đó,

$\log_2 \dfrac{x}{2} > \log_2 \dfrac{x+2}{4} > \log_4 \dfrac{x+2}{4}$ hay $\log_2 x > \log_4 (x+2)$,

$\log_3 \dfrac{x+1}{3} > \log_3 \dfrac{x+3}{5} > \log_5 \dfrac{x+3}{5}$ hay $\log_3 (x+1) > \log_5 (x+3)$.

Suy ra $\log_2 x + \log_3 (x+1) > \log_4 (x+2) + \log_5 (x+3)$.

Giáo viên hướng dẫn học sinh là cho trường hợp $x > 2$. Tương tự cho trường hợp $x > 2$, ta được

$$\log_2 x + \log_3 (x+1) < \log_4 (x+2) + \log_5 (x+3).$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

2.3.6 Sử dụng định lí Lagrange, định lí Rolle

Định lí Lagrange: Giả sử $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn:

i)f liên tục trên $[a; b]$;

ii) f có đạo hàm trên $(a; b)$.

Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Định lí Rolle (hệ quả của định lí Lagrange): Giả sử là hàm $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn

i) f liên tục trên $[a; b]$;

ii)f có đạo hàm trên $(a; b)$;

iii)$f(a) = f(b)$.

Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Ví dụ 2.3.18 Giải phương trình

$$4^{\log_3 x} + 2^{\log_3 x} = 2x.$$

Lời giải. Điều kiện $x > 0$. Đặt $u = \log_3 x$ thì $x = 3^u$. Khi đó phương trình trở thành $4^u + 2^u = 2.3^u$, hay $4^u - 3^u = 3^u - 2^u$. Giả sử phương trình ẩn u này có nghiệm là α, tức là $4^\alpha - 3^\alpha = 3^\alpha - 2^\alpha$.
Xét hàm số $f(t) = (t+1)^\alpha - t^\alpha,\ t > 0$, ta có

$$f'(t) = \alpha\left[(t+1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right].$$

Khi đó ta có $f(3) = f(2)$, $f(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;3]$. Theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in [2;3]$ sao cho $f'(c) = 0$ hay $\alpha\left[(t+1)^{\alpha-1} - t^{\alpha}\right] = 0$, suy ra $\alpha = 0;\ \alpha = 1$. Thử lại thấy $u = \alpha = 0$ và $u = \alpha = 1$ đều thoả mãn. Từ đó tìm được $x = 1;\ x = 3$.

2.4 Xây dựng các bài toán phương trình mũ, phương trình logarit

2.4.1 Xây dựng phương trình mũ và phương trình logarit từ những phương trình mũ, phương trình logarit cơ bản

Bài toán 2.4.1 Giải phương trình

$$2^{x^2+3x} = 16.$$

Đối với bài toán này học sinh có thể đưa ra một vài cách giải nhanh như sau:
Đưa về cùng cơ số: Ta có các phương trình sau tương đương

$$2^{x^2+3x} = 16;\ 2^{x^2+3x} = 2^4;\ x^2+3x = 4;\ x^2+3x-4 = 0.$$

Suy ra $x = 1;\ x = -4$. Lấy logarit hai vế với cơ số 2: Ta có các phương trình tương đương

$$2^{x^2+3x} = 16;\ \log_2 2^{x^2+3x} = \log_2 16;\ x^2+3x = 4;\ x^2+3x-4 = 0.$$

Suy ra $x = 1;\ x = -4$.
Giáo viên có thể khuyến khích học sinh làm bằng một số cách giải khác có

thể không tối ưu như hai cách giải trên.

Đưa về phương trình tích: Phương trình tương đương với các phương trình

$$2^{x^2+3x} = 16;\ 2^4.2^{x^2+3x-4} - 2^4 = 0;\ 2^4\left(2^{x^2+3x-4} - 1\right) = 0;$$
$$2^{x^2+3x-4} = 1; 2^{x^2+3x-4} = 2^0;\ x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Bây giờ xét bài toán từ phương trình cơ bản $x^2 + 3x - 4 = 0$ giáo viên cho học sinh sáng tạo ra các bài toán khác nhau mà khi giải ta thu được phương trình bậc hai trên.

Hướng 1. Từ $x^2 + 3x - 4 = 0$, lấy logarit cơ số 2 hai vế ta được $2^{x^2+3x-4} = 1$.

Hướng 2. Từ $x^2 + 3x - 4 = 0$, biến đổi $x^2 + 3x - 1 = 3$, rồi lấy logarit cơ số 2 hai vế ta được $2^{x^2+3x-1} = 2^3$ hay $2^{x^2+3x-1} = 8$.

Hoặc học sinh có thể chọn cơ số khác tùy ý: Lấy logarit cơ số 3 hai vế ta được $3^{x^2+3x-1} = 3^3$ hay $3^{x^2+3x-1} = 27$.

Hướng 3. Từ $x^2 + 3x - 4 = 0$, ta có $x^2 - x - 1 = 3 - 4x$, lấy logarit cơ số 2 hai vế ta được $2^{x^2-x-1} = 2^{3-4x}$.

Học sinh có thể biến đổi thêm cho phương trình nhìn trông khó hơn: từ phương trình $2^{x^2-x-1} = 2^{3-4x}$ biến đổi thành

$$2^{x^2-x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-3} \text{ hoặc } 2^{x^2-x-1} = (0,5)^{4x-3}.$$

Hướng 4. $x^2 + 3x - 4 = 0$ tương đương $x^2 + x - 4 = -2x$, lấy logarit cơ số 2 hai vế ta có

$$2^{x^2+4x-4} = 2^x \text{ hay } 2^{x^2+4x-4} = 2^{x+1}.\frac{1}{2} \text{ hoặc } 2^{x^2+4x-4} = \sqrt{2^x.\sqrt{4^{x+2}}}.$$

Bài toán 2.4.2 Giải phương trình

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2(4x).$$

Với bài toán này học sinh có tư duy nhuần nhuyễn có thể đưa ra định hướng giải là đưa các logarit về cùng cơ số là 2. Khi đó ta có các phương trình tương đương

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2(4x);$$
$$\frac{1}{2}\log_{2^{\frac{1}{2}}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_{2^2}(x-1)^8 = \log_2(4x);$$
$$\frac{2}{2}\log_2(x+3) + \frac{1}{8}\log_2(x-1)^8 = \log_2(4x);$$
$$\log_2(x+3) + \log_2|x-1| = \log_2(4x);$$

hay

$$\log_2\left[(x+3)\,.\,|x-1|\right] = \log_2(4x)\,. \tag{2.14}$$

Chú ý 2.13. Trước khi biến đổi giáo viên cho học sinh tìm điều kiện của bài toán.

Điều kiện: $x+3>0;\;\; 4x>0$ hay $x>0$. Do điều kiện của bài toán là $x>0$ nên khi biến đổi phương trình

$$\frac{1}{8}\log_2(x-1)^8 = \log_2\Big((x-1)^8\Big)^{\frac{1}{8}} = \log_2|x-1|$$

học sinh phải thêm dấu giá trị tuyệt đối và xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $0<x<1$, phương trình (2.14) tương đương với phương trình $\log_2\left[(x+3)\,.\,(1-x)\right] = \log_2 4x$. Hay tương đương với các phương trình sau

$$(x+3)\,.\,(1-x) = 4x; -x^2-2x+3 = 4x; -x^2-6x+3 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm $x=-3+2\sqrt{3}$ (thỏa mãn), $x=-3-2\sqrt{3}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2. $x>1$, phương trình (2.14) tương đương

$$\log_2\left[(x+3)\,.\,(x-1)\right] = \log_2 4x.$$

Hay tương đương với các phương trình

$$(x+3)\,.\,(x-1) = 4x;\;\; x^2+2x-3 = 4x;\;\; x^2-2x-3 = 0.$$

Giải phương trình ta thu được $x=-1$ (không thỏa mãn), $x=3$ (thỏa mãn).

Tương tự xuất phát từ phương trình $\log_2\left[(x+3)\,.\,(x-1)\right] = \log_2 4x$, giáo viên có thể cho học sinh sáng tạo ra các phương trình logarit khác nhưng có thêm vấn đề đặt ra là khi biến đổi học sinh chú ý tùy điều kiện ban đầu ta đặt ra mà kết quả và biến đổi của bài toán có thể khác nhau.

Với $\log_2\left[(x+3)\,.\,(x-1)\right] = \log_2 4x$ nếu đặt điều kiện luôn cho phương trình này thì ta có điều kiện $(x+3)(x-1)>0;\;\; 4x>0$ hay $x>1$. Khi đó có thể biến đổi tương đương các phương trình

$$\begin{aligned}&\log_2\left[(x+3)\,.\,(x-1)\right] = \log_2 4x;\;\; \log_2(x+3)+\log_2(x-1) = \log_2(4x)\,;\\ &\log_2(x+3)+2\log_4(x-1) = 2+3\log_8 x.\end{aligned}$$

Học sinh cũng có thể biến đổi thêm các phương trình tương đương khác

$$\log_2[(x+3).(x-1)] = \log_2 4x;$$
$$\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = \log_2(4x);$$
$$\log_2(x+3) + 2\log_4(x-1) = 2 + 3\log_8 x;$$
$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{2}\log_4(x-1)^4 = 2 + 3\log_8 x.$$

Đến đây ta có phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{2}\log_4(x-1)^4 = 2 + 3\log_8 x$, điều kiện của phương trình này so với phương trình ban đầu đã có sự thay đổi là $x > 0$. Khi ta tách $\log_2[(x+3).(x-1)]$ ra thành hai logarit thì điều kiện vẫn chưa thay đổi mà khi ta biến đổi $2\log_4(x-1) = \frac{1}{2}\log_4(x-1)^4$ thì điều kiện với có sự thay đổi. Đến đây ta thử với việc nâng lũy thừa với số mũ lẻ.

Phương trình $\log_2(x+3) + 2\log_4(x-1) = 2 + 3\log_8 x$, tương đương với

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{2}{3}\log_4(x-1)^3 = 2 + 3\log_8 x.$$

Từ đó ta được phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{2}{3}\log_4(x-1)^3 = 2 + 3\log_8 x$.

Vì vậy khi hướng dẫn học sinh sáng tạo ra các phương trình giáo viên có thể đưa ra hai hướng:

Hướng 1. Đặt điều kiện và biến đổi khéo léo sao cho phương trình thu được tương đương với phương trình logarit cơ bản ban đầu.

Hướng 2. Cho học sinh biến đổi mà chưa cần đặt điều kiện, khi đó phương trình thu được là hệ quả của phương trình logarit cơ bản ban đầu.

2.4.2 Xây dựng phương trình mũ và phương trình logarit được giải bằng hệ phương trình

Ví dụ 2.4.1 Chọn một phương trình chỉ có hai nghiệm là 0 và 1 là

$$11^x = 10x + 1.$$

Từ phương trình này ta thiết lập một hệ đối xứng loại hai, sau đó lại quay về phương trình như sau.

Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} 11^x = 10y + 1 \\ 11^y = 10x + 1, \end{cases}$$

Ta biến đổi thành

$$\begin{cases} y = \log_{11}(10x+1) \\ 11^x = 10y+1, \end{cases}$$

Hay

$$\frac{11^x - 1}{10} = \log_{11}(10x+1)$$

Suy ra $11^x = 10\log_{11}(10x+1) + 1$ hay $11^x = 2\log_{11}(10x+1)^5 + 1$. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 2.4.3 Giải phương trình

$$11^x = 2\log_{11}(10x+1)^5 + 1.$$

Lời giải. Điều kiện $x > -\dfrac{1}{10}$. Đặt $y = \log_{11}(10x+1)$, khi đó $11^y = 10x+1$. Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 11^x = 10y+1 & (2.15a) \\ 11^y = 10x+1. & (2.15b) \end{cases}$$

Lấy (2.15a) trừ (2.15b) theo vế ta được

$$11^x - 11^y = 10y - 10x$$

Tương đương với

$$11^x + 10x = 11^y + 10y. \tag{2.16}$$

Xét hàm số $f(t) = 11^t + 10t$. Ta có

$$f'(t) = 11^t \ln 11 + 10 > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà (2.16) chính là $f(x) = f(y)$ nên $x = y$. Thay vào (2.15a) ta được $11^x = 10x + 1$, Hay

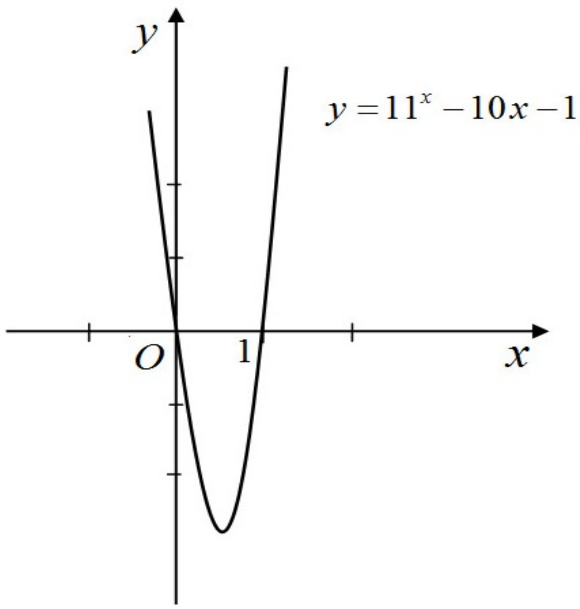
$$11^x - 10x - 1 = 0. \tag{2.17}$$

Xét hàm số $g(x) = 11^x - 10x - 1$ trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{10}, +\infty\right)$. Ta có

$$g'(x) = 11^x \ln 11 - 10;\ g''(x) = 11^x (\ln 11)^2 > 0.$$

Vậy hàm số g có đồ thị luôn lõm trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{10}, +\infty\right)$ (hình 2.5), suy ra đồ thị của hàm g và trục hoành có với nhau không quá hai điểm chung, suy ra (2.17) có không quá 2 nghiệm. Mà $g(1) = 0, g(0) = 0$ nên $x = 0$ và $x = 1$ là tất cả các nghiệm của (2.17).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$ và $x = 1$.



Hình 2.5

Ví dụ 2.4.2 Ta sẽ sử dụng phương pháp lặp để sáng tác phương trình từ hệ phương trình đối xứng loại hai. Xuất phát từ

$$\begin{cases} 2^u = \sqrt{\dfrac{3}{2}x + 1} \\ 2^x = \sqrt{\dfrac{3}{2}u + 1}. \end{cases}$$

Ta biến đổi phương trình thứ nhất

$$2^u = \sqrt{\frac{3}{2}x + 1}$$

Suy ra

$$u = \frac{1}{2}.\log_2\left(\frac{3}{2}x + 1\right).$$

Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$2^x = \sqrt{\frac{3}{4}\log_2\left(\frac{3}{2}x + 1\right) + 1},$$

Tương đương với phương trình

$$4^x = \frac{3}{4}\log_2\left(\frac{3}{2}x + 1\right) + 1.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 2.4.4 Giải phương trình

$$4^{x+1} = 3\log_2\left(\frac{3}{2}x+1\right)+4.$$

Lời giải. Điều kiện $x > -\dfrac{2}{3}$. Trước khi đổi biến giáo viên hướng dẫn học sinh biến đổi khéo léo các phương trình tương đương

$$4^{x+1} = 3.\log_2\left(\frac{3}{2}x+1\right)+4;\ 4^x = \frac{3}{4}\log_2\left(\frac{3}{2}x+1\right)+1;$$
$$4^x = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\log_2\left(\frac{3}{2}x+1\right)+1;\ 2^x = \sqrt{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\log_2\left(\frac{3}{2}x+1\right)+1}.$$

Vì sao ta có các biến đổi tương đương như vậy? Giáo viên chú ý cho học sinh cơ số của $\log_2(x+3)$ là 2 và có thể viết $4^{x+1} = 4.(2^x)^2$, do đó ta biến đổi cơ số của hàm mũ và hàm logarit về thành cơ số tối giản nhất là cơ số 2. Đặt $u = \dfrac{1}{2}\log_2(\dfrac{3}{2}x+1)$, khi đó

$$2^u = \sqrt{\frac{3}{2}x+1}.$$

Kết hợp với phương trình ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^u = \sqrt{\dfrac{3}{2}x+3} \\ 2^x = \sqrt{\dfrac{3}{2}u+3}. \end{cases}$$

Tương đương với

$$\begin{cases} 4^u = \dfrac{3}{2}x+1 \\ 4^x = \dfrac{3}{2}u+1. \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình ta được

$$4^u - 4^x = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}u,$$

Suy ra

$$4^u + \frac{3}{2}u = 4^x + \frac{3}{2}x.$$

Xét hàm số $f(t) = 4^t + \frac{3}{2}t$. Ta có

$$f'(t) = 4^t \ln 4 + \frac{3}{2} > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f(x) = f(u)$ nên $x = u$, suy ra

$$2^x = \sqrt{\frac{3}{2}x + 1}.$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - \sqrt{\frac{3}{2}x + 1}$ trên $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Ta có

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - \frac{3}{4\sqrt{\frac{3}{2}x + 1}};$$

$$g''(x) = 2^x (\ln 2)^2 + \frac{9}{16\left(\sqrt{\frac{3}{2}x + 1}\right)^3} > 0, \forall x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

Vậy hàm g có đồ thị luôn lõm trên $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$, do đó đồ thị của g và trục hoành có tối đa hai điểm chung, suy ra $g(x) = 0$ không quá hai nghiệm.
Ta có $g(0) = 0,\ g(2) = 0$ nên $x = 0,\ x = 2$ là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0;\ x = 2$.
Nhận xét 2.14. Từ đây giáo viên có thể hướng đã giao cho học sinh tự sáng tác ra các phương trình mũ, phương trình logarit dựa vào việc thiết lập hệ phương trình hoặc sử dụng phương pháp lặp để sáng tác phương trình từ hệ phương trình đối xứng loại hai.

2.4.3 Xây dựng phương trình mũ, phương trình logarit dựa vào tính đơn điệu của hàm số

Ví dụ 2.4.3 Xét hàm số đồng biến trên khoảng $(0, +\infty)$ là

$$f(t) = \log_2 t - 2t + t^2, \forall t > 0.$$

Cho $f\left(\sqrt{x+2}\right) = f\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ ta được

$$\log_2\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + x + 2 = \log_2\left(2+\frac{1}{x}\right) - 2\left(2+\frac{1}{x}\right) + \left(2+\frac{1}{x}\right)^2$$

Hay

$$\frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

Ta có bài toán sau:

Bài toán 2.4.5 Giải phương trình

$$\frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

Lời giải. Điều kiện $x \in (-2, +\infty)$; $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$ hay $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$.

Khi đó phương trình viết lại

$$\log_2\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + x + 2 = \log\left(2+\frac{1}{x}\right) - 2\left(2+\frac{1}{x}\right) + \left(2+\frac{1}{x}\right)^2. \tag{2.18}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - 2t + t^2, \forall t > 0$. Ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} + 2t - 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{t\ln 2}.2t} - 2 \geq 2\sqrt{\frac{2}{\ln 2}} - 2 > 0.$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0, +\infty)$, do đó phương trình (2.18) tương đương

$$f\left(\sqrt{x+2}\right) = f\left(2+\frac{1}{x}\right),$$

Hay

$$\sqrt{x+2} = 2 + \frac{1}{x}. \tag{2.19}$$

Với điều kiện $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$, bình phương hai vế phương trình (2.19) ta được

$$x + 2 = 4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}, \text{ hay } x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Giải phương trình ta được ba nghiệm $x = -1$; $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Kết hợp với điều kiện, ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1$ và $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2.5 Ứng dụng của logarit trong chương trình Toán phổ thông

2.5.1 Tính các giới hạn vô định dạng $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Trong giải tích đôi khi ta cần tính các giới hạn vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$ đó là các giới hạn có dạng $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ trong đó a có thể hữu hạn hoặc vô cùng. Trong trường hợp 1^∞ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, chẳng hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x,$$

tương tự cho các trường hợp $0^0, \infty^0$. Nghiên cứu các tài liệu tham khảo, chúng tôi thấy có nhiều kĩ thuật tìm giới hạn của các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$ nhưng phổ biến nhất và chung cho cả ba dạng trên là kĩ thuật sử dụng logarit.

Ví dụ 2.5.1 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$ (Giới hạn vô định dạng 0^0).

Lời giải. Đặt $y = (\sin x)^{\tan x}$. Lấy logarit nêpe hai vế có

$$\ln\, y = \tan x.\ln\,\ (\sin x) = \frac{\ln\,\ (\sin x)}{\cot x}.$$

Mặt khác

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\,\ (\sin x)}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}(-\cos x.\sin x) = 0.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\, y = 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\ln\, y = e^0 = 1$.

Ví dụ 2.5.2 Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ (Giới hạn vô định dạng 1^∞).

Lời giải. Đặt $A = (\sin x)^{\tan x} = [1+(\sin x - 1)]^{\tan x}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\ln\, A = \tan x.\ln\,\ (1+(\sin x-1)) &= \frac{\ln\,\ (1+(\sin x-1))}{\cot x}\\ &= \frac{\ln\,\ (1+(\sin x-1))}{\sin x - 1}.\frac{\sin x-1}{\cot x}.\end{aligned}$$

Và

$$\frac{\sin x-1}{\cot x} = \sin x.\frac{\sin x - 1}{\cos x}.$$

Do đó

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cot x} = 0.$$

Cuối cùng $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln A = 0$, nghĩa là $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1$. [12]

Nhận xét 2.15. Từ hai ví dụ trên ta thấy logarit tham gia vào kĩ thuật tìm giới hạn vô định dạng $1^\infty, 0^0$ ở góc độ tác động vào biểu thức $f(x)^{g(x)}$ và biến nó thành $g(x).\ln\ [f(x)]$. Từ đó thay vì tính giới hạn trực tiếp, logarit chuyển hàm số $f(x)^{g(x)}$ về dạng đơn giản hơn $g(x).\ln\ [f(x)]$và áp dụng công thức L'Hospital hoặc $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\ln\ (1+a)}{a} = 1$ để tính. Mục đích tính toán được thực hiện thông qua sự biến đổi của logarit.

Bài tập: Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Hướng dẫn. Ta thấy $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$ có dạng vô định ∞^0. Học sinh có thể áp dụng kĩ thuật tương tự để tìm giới hạn.

2.5.2 Tính đạo hàm các hàm số có dạng $y = f(x)^{g(x)}; y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$

Giáo viên hướng dẫn học sinh tìm hiểu ứng dụng logarit tính đạo hàm hàm số có dạng $y = f(x)^{g(x)}$.

Ví dụ 2.5.3 Tính đạo hàm của các hàm số $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Lời giải. Để ý rằng hàm số $y = x^{\frac{1}{x}}$ không thuộc dạng a^x (vì x không phải là hằng số), cũng không thuộc dạng x^α (vì $\dfrac{1}{x}$ không phải hằng số), do đó, muốn tính y' nhất thiết phải lấy logarit của hai vế và khi đó ta có

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x.$$

Và

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}.\ln x + \frac{1}{x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x).$$

Do đó $y' = \dfrac{y}{x^2}(1 - \ln x) = \dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln x)$. [12]

Nhận xét 2.16. Rõ ràng, hàm số $y = f(x)^{g(x)}$ trong ví dụ trên có đặc điểm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ không là hàm hằng nên hàm số không phải là hàm số mũ và cũng không là hàm lũy thừa, kéo theo ta $y = f(x)^{g(x)}$ không thể tính đạo hàm bằng công thức thông thường được. Việc lấy đạo hàm được thực hiện bằng cách lấy logarit nêpe hai vế của phương trình $y = f(x)^{g(x)}$, biến đổi về dạng $\ln y = g(x).\ln f(x)$ và lấy đạo hàm theo biến x hai vế. Dù không trực tiếp đưa ra đạo hàm của hàm số $y = f(x)^{g(x)}$ nhưng logarit cho phép chuyển hàm số về dạng đơn giản $\ln y = g(x).\ln f(x)$ và tạo điều kiện thuận lợi cho việc tính đạo hàm.

Không chỉ riêng những hàm số có dạng $y = f(x)^{g(x)}$, hàm số cho bởi công thức $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ cũng có thể được tính đạo hàm thông qua sự tác động của logarit.

Ví dụ 2.5.4 Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$, $x \neq \pm 1$. [12]

Lời giải. Trước tiên ta biến đổi hàm số về dạng mũ. Ta có $\forall x \neq \pm 1$ thì

$$|y| = \left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right|^{\frac{1}{3}}.$$

Suy ra

$$\ln\ |y| = \frac{1}{3}.\left[\ln\ \left|1+x^3\right| - \ln\ \left|1-x^3\right|\right].$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{1+x^3} + \frac{3x^2}{1-x^3}\right) = x^2.\left[\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1-x^3}\right].$$

Do đó

$$y' = \frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}, x \neq \pm 1.$$

Hàm số cho trong ví dụ trên không có dạng $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ nhưng ta có thể chuyển được về $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ nhờ các tính chất của lũy thừa mũ số thực. Logarit đã tham gia như thế nào trong kĩ thuật tính đạo hàm của hàm số $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$.

Nhận xét 2.17. Việc lấy logarit hai vế phương trình $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ không phải được thực hiện một cách tùy ý, mà biến đổi được tiến hành trên những giá trị x mà hàm số có đạo hàm và $f_i(x) > 0$ hoặc $|f_i(x)| > 0, \forall i = \overline{1,n}$. Ở ví dụ trên, tại những giá trị $x \neq \pm 1$ hàm số luôn có đạo hàm và $\left|\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right| > 0$ nên việc lấy logarit nêpe hai vế của $|y| = \left|\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right|^{\frac{1}{3}}$ hoàn toàn có thể thực hiện được. Theo đó, một cách tổng quát logarit tác động vào hai vế của $|y| = |f_1(x)|^{\alpha_1}.|f_2(x)|^{\alpha_2}...|f_n(x)|^{\alpha_n}$, biến đổi nó thành $\ln\ |y| = \alpha_1 \ln\ |f_1(x)| + \alpha_2 \ln\ |f_2(x)| + ... + \alpha_n \ln\ |f_n(x)|$,và việc tính đạo hàm của hàm số ban đầu đã được chuyển về tính tổng đạo hàm của các hàm số đơn giản hơn. Như vậy, logarit tham gia vào kĩ thuật tính đạo hàm của các hàm số dạng $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ như là công cụ biến đổi hàm số cho dưới dạng tích về hàm số đơn giản hơn. Thông qua biến đổi đó cho phép ta thực hiện được mục đích tính toán.

2.5.3 Giải phương trình mũ dạng $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $(0 < a \neq 1,\ b > 0)$

Từ thực tế cuộc sống, có nhiều sự kiện dẫn đến việc giải phương trình dạng

$$a^{f(x)} = b,\ (0 < a \neq 1, b > 0),$$

chẳng hạn:

- Tính số năm gởi tiền N từ công thức lãi kép $C = A.(1+r)^N$ biết số tiền gởi ban đầu A, lãi suất $r\%$ mỗi năm, tổng số tiền bao gồm cả lãi lẫn vốn sau N năm.[1]
- Tính thời gian phân rã t của các chất phóng xạ từ công thức $m = m_o e^{-\lambda t}$ biết $m_o,\ m$ là khối lượng ban đầu, khối lượng còn lại sau thời gian t của chất phóng xạ.

Học sinh có thể giải phương trình mũ bằng kĩ thuật đưa về cùng cơ số bởi biến đổi b thành $a^{\log_a b}$ và dẫn đến kết quả $f(x) = \log_a b$ hoặc $f(x) = g(x).\log_a b$. Hoặc giáo viên có thể hướng dẫn học sinh giải bằng kĩ thuật sử dụng logarit.

Ví dụ 2.5.5 Giải phương trình $e^{5-3x} = 10$.

Lời giải. Lấy logarit nêpe hai vế của phương trình ta có các phương trình tương đương

$$\ln\ \left(e^{5-3x}\right) = \ln\ 10;\ 5 - 3x = \ln\ 10;\ x = \frac{1}{3}\left(5 - \ln\ 10\right).$$

Ví dụ 2.5.6 (Bài 2.98) Giải phương trình $5^{7^x} = 7^{5^x}$. [3]

Lời giải. Lấy logarit cơ số 5 hai vế rồi chia cả hai vế cho 5^x, ta được

$$\left(\frac{7}{5}\right)^x = \log_5 7 \text{ hay } x = \log_{\frac{7}{5}} \log_5 7. \text{ [3]}$$

Nhận xét 2.18. Từ hai ví dụ ta tổng quát được logarit cơ số a tác động của hai vế phương trình $a^{f(x)} = b, a^{f(x)} = b^{g(x)}$ và biến đổi nó thành

$$f(x) = \log_a b \text{ và } f(x) = g(x)\log_a b.$$

Từ đó, thay vì giải trực tiếp các phương trình $a^{f(x)} = b, a^{f(x)} = b^{g(x)}$ ta giải các phương trình $f(x) = \log_a b$, $f(x) = g(x)\log_a b$ bằng các kĩ thuật giải phương trình đại số thông thường.

Dù chưa đưa ra nghiệm cụ thể cho phương trình ban đầu, nhưng logarit được xem như một phần không thể thiếu trong kĩ thuật giải phương trình $a^{f(x)} = b$ và phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)}$. Qua kĩ thuật giải phương trình $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, logarit nổi bật với ứng dụng giải hai loại phương trình đó nhưng quan trọng hơn là vai trò công cụ cho phép chuyển việc tìm nghiệm của phương trình có dạng mũ về tìm nghiệm của phương trình đơn giản hơn.

2.5.4 Tính số các chữ số của một số nguyên dương

Trong tính toán, đôi khi ta cần phải xác định một số nguyên dương có bao nhiêu chữ số. Có nhiều cách tính số các chữ số, có thể tính bằng cách đếm từng chữ số một. Chẳng hạn với số 17021991, bằng cách đếm ta xác định được nó có 8 chữ số. Tuy nhiên, ta không thể xác định bằng cách đếm có bao nhiêu chữ số của 2^{2016} khi viết trong hệ thập phân. Nhưng logarit cho phép làm được điều đó.

Giả sử x là một số nguyên dương cho trước cần xác định số các chữ số. Theo tính chất của số tự nhiên, ta tìm được một số tự nhiên n sao cho

$$10^n \leq x < 10^{n+1}. \tag{2.20}$$

Lấy logarit cơ số 10 hai vế của (2.20) ta được $n \leq \log x < n + 1$. Điều này chứng tỏ $n = [\log x]$. Do đó, số chữ số của số nguyên dương x là $[\log x] + 1$. Từ lập luận trên ta tính được số chữ số của số 2^{2016} là $\left[\log 2^{2016}\right] + 1 = 607$ chữ số. Như vậy, logarit được xem như là một công cụ tốt để tính số các chữ số của một số nguyên dương bất kì.

Kết luận

Logarit không chỉ đơn thuần là công cụ hỗ trợ tính nhân, chia, căn bậc hai, căn bậc ba, mà trong chương trình Toán phổ thông nó còn được biết đến với ứng dụng giải phương trình, bất phương trình mũ; tính số các chữ số của một số nguyên dương, tính giới hạn vô định dạng $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$; tính đạo hàm của các hàm số có dạng $y = f(x)^{g(x)}$ và $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$;... Qua các ứng dụng đó, logarit nổi bật với vai trò công cụ tính số các chữ số của một số nguyên dương cho trước, công cụ chuyển các đại lượng có phạm vi quá rộng hoặc quá hẹp về phạm vi có thể kiểm soát được và công cụ cho phép đơn giản hóa các biểu thức phức tạp có dạng tích, thương, lũy thừa về các dạng đơn giản hơn.

2.6 Kết luận chương 2

Trong phần này đã nêu lên những biện pháp sư phạm cơ bản để có thể rèn luyện năng lực tư duy cũng như phát triển năng lực tư duy sáng tạo cho học sinh lớp 12 Trung học phổ thông qua hệ thống chuyên đề, bài tập về phương trình mũ và phương trình logarit. Trong đó đã nêu ra biện pháp sư phạm cụ thể thông qua việc lựa chọn nội dung, ứng dụng của các bài tập, ví dụ đã xây dựng được vào trong các giờ học như thế nào?
Để xem xét hiệu quả của việc xây dựng lý thuyết và bài tập nhằm rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh trong dạy học phương trình mũ và phương trình logarit cũng như việc thực hiện các biện pháp sư phạm ở chương này, chúng ta sang tiếp chương sau.

Chương 3

Thực nghiệm sư phạm

3.1 Mục đích thực nghiệm

Kiểm tra tính đúng đắn của giả thuyết khoa học: Nếu khai thác và vận dụng phương pháp dạy học rèn luyện và phát triển tư duy, đặc biệt là tư duy sáng tạo trong dạy học nội dung phương trình mũ và phương trình logarit lớp 12 thì học sinh sẽ tích cực chủ động hơn trong học tập, nắm vững các kiến thức về giải phương trình mũ và phương trình logarit; góp phần đổi mới và nâng cao hiệu quả dạy học chủ đề phương trình mũ và phương trình logarit.

3.2 Tổ chức và nội dung thực nghiệm

3.2.1 Tổ chức thực nghiệm

Đề tài được tiến hành thử nghiệm thực nghiệm tại trường Trung học phổ thông Chương Mỹ A, trong năm học 2015-2016.

Thời gian thực nghiệm sư phạm: 8 tuần kể từ ngày 19/10/2015 đến ngày 19/12/2015 khi các em học về nội dung chương 2 - Hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit.

Lớp thực nghiệm 12A1, Giáo viên dạy lớp thực nghiệm Cô Trương Hồng Hà.

Lớp đối chứng 12A3, Giáo viên dạy lớp đối chứng Cô Nguyễn Thanh Thương.

Được sự đồng ý của Ban giám hiệu và tổ toán các lớp khối 12 trường Trung học phổ thông Chương Mỹ A, chúng tôi đã tìm hiểu về kết quả học tập của các lớp khối 12 của trường và nhận thấy học sinh lớp 12A1, 12A3 là hai lớp học sách giáo khoa nâng cao, và là hai lớp có học sinh định hướng thi đại học khối A và A1, có trình độ học lực là tương đương nhau. Đa số học sinh có lực học môn Toán từ trung bình khá trở lên.

Chúng tôi đề xuất được thực nghiệm tại lớp 12A1 và lấy lớp 12A3 làm lớp đối chứng. Ban giám hiệu nhà trường và các thầy cô giáo tổ toán đã chấp nhận đề xuất này và tạo điều kiện thuận lợi cho chúng tôi tiến hành thực nghiệm.

3.2.2 Nội dung thực nghiệm

Giáo án thực nghiệm

Các tiết lý thuyết, bài tập, ôn tập đã được thiết kế thành giáo án lên lớp theo Sách giáo khoa giải tích 12. Có bổ sung tình huống và bài tập thuộc hệ thống các ví dụ đã nêu trong chương 2 của luận văn.

Giáo án Luyện tập sau được chúng tôi tiến hành giảng dạy trong 3 tiết, bao gồm 1 tiết luyện tập theo chương trình chuẩn và 2 tiết tự chọn.

LUYỆN TẬP

I. Mục tiêu

1. Kiến thức

Củng cố:

- Phương pháp giải một số dạng phương trình mũ và phương trình logarit cơ bản.
- Phương pháp giải một số dạng phương trình mũ và phương trình logarit đặc biệt.

2. Kĩ năng

- Nhận dạng được phương trình, nhanh chóng đưa được ra một số phương pháp giải và lựa chọn được phương pháp giải tối ưu nhất.
- Thành thạo trong việc biến đổi phương trình mũ và phương trình logarit, đặt điều kiện cho từng phương trình, từng biến đổi (nếu cần thiết)
- Học sinh biết vận dụng sáng tạo, tạo ra các bài tập tương tự các dạng bài tập đã được học.

3. Tư duy, thái độ

- Rèn luyện tính cẩn thận, chính xác.
- Tư duy các vấn đề toán học một cách lôgic và hệ thống.
- Tư duy sáng tạo trong học tập.

II. Chuẩn bị

Giáo viên: Giáo án. Hệ thống bài tập.

Học sinh: SGK, vở ghi. Ôn tập các kiến thức đã học về phương trình mũ và phương trình logarit.

III. Phương pháp dạy học

Phát hiện và giải quyết vấn đề kết hợp thảo luận nhóm

IV. Tiến trình dạy học

1. Ổn định tổ chức. Kiểm tra sĩ số lớp.

2. Kiểm tra bài cũ. (Lồng vào quá trình luyện tập)

3. Giảng bài mới

Các bài tập cho học sinh và tình huống dạy học được trình bày trong chương 1, bao gồm:

Các ví dụ tổng hợp, gởi mở: 1.4.2, 1.4.4.

Hoạt động của giáo viên	**Hoạt động của học sinh**
Bài 1. (Ví dụ 1.4.2) Giải phương trình mũ $3^{1-x} - 3^x + 2 = 0$. Giáo viên hỏi đáp, gợi mở học sinh tìm thêm các cách giải khác? Giáo viên nhận xét lời giải và cho học sinh trình bày lời giải. Giáo viên: Cho học sinh nhận xét ưu điểm, nhược điểm của từng cách giải. Từ đó khuyến khích học sinh tìm tòi lời giải hay, độc đáo cho các bài toán khác.	- Học sinh đưa ra lời giải theo cách 1. - Học sinh tìm tòi lời giải? - Học sinh trình bày lời giải trên bảng?
Bài 2. (Ví dụ 1.4.4) Giải phương trình $\log_5\left(6 - 5^{2x}\right) = x + 1$. - Giáo viên yêu cầu học sinh nêu định hướng lời giải cho bài toán. - Ngoài cách đặt ẩn phụ, chúng ta có thể giải bài toán như cách 2 của bài toán 1. Tại sao chúng ta có thể đưa phương trình về dạng tích, qua đó có thể trình bày lời giải ngắn gọn hơn không?	- Học sinh đưa ra các bước: + Mũ hóa, + Đặt ẩn phụ, + Đưa ra lời giải cụ thể. Phương trình $5^{2x} + 5.5^x - 6 = 0$ có dáng dấp của phương trình bậc hai, mà như chúng ta đã biết một phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 (hoặc $x_1 = x_2$) có thể biến đổi thành $a\left(x - x_1\right).\left(x - x_2\right) = 0$.

Các ví dụ về phương trình mũ và phương trình logarit cơ bản: 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4

Hoạt động của giáo viên	**Hoạt động của học sinh**
Bài 3. (Ví dụ 2.1.1) Giải các phương trình mũ sau a) $3^{x^2-5x+8} = 9$; b) $1,5^{4x-6} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}$. - Đối với dạng phương trình mũ cơ bản, khi giải ta cần chú ý điều gì?	- Khi giải các phương trình này kĩ năng cần thiết là tìm ra cơ số thích hợp. - Học sinh đưa ra lời giải cho câu a.
Giáo viên đưa ra nhận xét 2.1. **Bài 4.** (Ví dụ 2.1.3) Giải các phương trình logarit sau a) $\log x + \log(x+9) = 1$; b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$; c) $\log_5 x^3 + 3\log_{25} x + \log_{\sqrt{125}} \sqrt{x^3} = \dfrac{11}{2}$; d) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$. - Giáo viên cho học sinh viết lại các quy tắc tính logarit. - Chia lớp thành 4 nhóm, mỗi nhóm làm việc và trình bày lời giải lên bảng. - Giáo viên cho học sinh nhận xét lời giải và trình bày của các nhóm khác. - Giáo viên nhận xét, nhấn mạnh các quy tắc tính logarit	- Học sinh trình bày lên bảng. - Học sinh hoạt động và trình bày kết quả. - Học sinh nhận xét.
Bài 5. (Ví dụ 2.1.4) Giải các phương trình logarit sau a) $\ln\,(x+1) + \ln\,(x+3) = \ln\,(x+7)$; b) $\log x^4 + \log(4x) = 2 + \log x^3$; c) $\dfrac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}} = 3$; d) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$. Giáo viên cho học sinh nhận xét và tìm thêm các lời giải khác cho mỗi câu trong giải bài toán? Giáo viên đưa ra bài toán tương tự $\log_{\frac{1}{3}} \log_7 x^3 + \log_3(\log_7 x . \log_{\sqrt[3]{7}} x^2) = 1$.	- Học sinh tiến hành giải bài toán - Học sinh ghi chép Bài tập về nhà.

Phương pháp giải phương trình mũ và phương trình logarit cơ bản: 2.2.1, 2.2.2, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.7.

Hoạt động của giáo viên	**Hoạt động của học sinh**
Phương pháp đưa về cùng cơ số. **Bài 6.** (Ví dụ 2.2.1) Giải các phương trình sau a) $3^{x^2-5x+4} = 81$; b) $\log_2(3x-7) = 3$; c) $\log_x 2.\log_{2x} 2 = \log_{16x} 2$; d) $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$. Các phương trình đã cho ngoài việc đưa về cơ số thì còn có thể giải bằng các phương pháp nào nữa không? Khi biến đổi câu d ta cần chú ý điều gì?	- Học sinh tiến hành giải. - Có thể giải các phương trình trên bằng phương pháp mũ hóa, logarit hóa ở câu a, b. - Khi biến đổi $\log_3(x-1)^2$ thành $2\log_3\|x-1\|$ cần chú ý thêm dấu giá trị tuyệt đối, sau đó chia trường hợp và giải.
Giáo viên đưa ra chú ý 2.3. **Bài 7.** (Ví dụ 2.2.2) Giải các phương trình sau a) $3^x.2^{x^2} = 1$; b) $\log_2(5-2^x) = 2-x$. Giáo viên đưa ra nhận xét 2.4 hướng học sinh đến Ví dụ 2.2.3.	- Học sinh giải. - Học sinh ghi chép Ví dụ 2.2.3, về nhà làm và giáo viên kiểm tra vào buổi học sau.
Phương pháp đặt ẩn phụ. Chú ý 2.6. **Bài 8.** (Ví dụ 2.2.4) Giải các phương trình mũ sau a) $2^{2x+1} - 2^{x+3} = 64$; b) $e^{2x} - 4e^{-2x} = 3$; c) $6.4^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x}} + 6.9^{\frac{1}{x}} = 0$; d) $8^x + 18^x = 2.27^x$. Giáo viên chia lớp thành 4 nhóm và tiến hành giải. Giáo viên cho học sinh nhận xét kết quả các nhóm, sau đó nhận xét. - Giáo viên khuyến khích các nhóm tìm thêm lời giải khác. (Xem như bài tập về nhà).	- Các nhóm tiến hành giải. - Từng nhóm học sinh lên trình bày ý tưởng và các bước giải. - Học sinh ghi chép nhiệm vụ.

Bài 9. (Ví dụ 2.2.5) Giải các phương trình logarit sau a) $\frac{1}{4+\log_3 x}+\frac{1}{2-\log_3 x}=1$; b) $-\log^3 x+2\log^2 x=2-\log x$; c) $x^{\log^2 x^2-3\log x-\frac{9}{2}}=10^{-2\log x}$; d) $\log_2\sqrt{\lvert x\rvert}-4\log_4\sqrt{\lvert x\rvert}-5=0$. Giáo viên đặt câu hỏi gợi mở cho học sinh, đưa ra nhận xét 2.7.	Học sinh tiến hành giải.
Bài 10. (Ví dụ 2.2.7) Giải các phương trình a) $25^x-2(3-x).5^x+2x-7=0$; b) $x.2^x=x(3-x)+2(2^x-1)$; c) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x+2x-6=0$. Giáo viên hướng học sinh đặt ẩn phụ không hoàn toàn. Hướng dẫn học sinh lập luận, giải phương trình tiếp theo bằng nhiều cách.	Học sinh xây dựng bài. Học sinh phát hiện và giải quyết vấn đề giáo viên đặt ra. Học sinh thảo luận, đưa ra lời giải.

Phương pháp giải phương trình mũ và phương trình logarit đặc biệt: 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.6, 2.3.7, 2.3.9, 2.3.11, 2.3.12, 2.3.13, 2.3.14, 2.3.17, 2.3.18.

Hoạt động của giáo viên	**Hoạt động của học sinh**
Sử dụng tính đơn điệu của hàm số **Bài 11.** (Ví dụ 2.3.1) Giải phương trình $2^x=3^{\frac{x}{2}}+1$. (Ví dụ 2.3.2) Giải phương trình $\log_2 x=3-x$. (Ví dụ) 2.3.3 Giải phương trình $\log_8(3+x)=\log_{27}(1-2x)$. Giáo viên chia lớp thành 3 nhóm, tiến hành thảo luận và giải phương trình. - Giáo viên nhận xét góp ý, định hướng học sinh phát hiện sai lầm và trình bày lời giải hoàn chỉnh.	Học sinh thảo luận nhóm và trình bày kết quả. - Học sinh rút kinh nghiệm và trình bày lời giải hoàn chỉnh.

Phương pháp biến thiên hằng số **Bài 12.** (Ví dụ 2.3.6) Giải phương trình $4^{2x} + 2^{3x+1} + 2^{x+3} - 16 = 0$. Giáo viên nêu ý tưởng chính của phương pháp. Giáo viên hướng dẫn học sinh đặt ẩn phụ, Ta viết lại phương trình này thành $4^2 - 2t.4 - \left(t^4 + 2t^3\right) = 0$. Thực hiện đổi vai trò của ẩn cần tìm và hằng số. Bây giờ ta coi $4 = u$ là một ẩn của phương trình, còn t là số đã biết.	- Học sinh tiến hành đặt ẩn phụ Đặt $t = 2^x\,(t > 0)$ thì phương trình trở thành $t^4 + 2t^3 + 8t - 16 = 0$ Học sinh tính Δ' và giải phương trình ẩn $4 = u$. Học sinh lên bảng trình bày kết quả.
Đưa về phương trình tích, tổng hai số không âm, nghiệm phương trình bậc hai **Bài 13.** (Ví dụ 2.3.7). Giáo viên tổ chức học sinh thảo luận và giải.	Học sinh thảo luận và trình bày lời giải.
Phương pháp đồ thị **Bài 14.** (Ví dụ 2.3.9) Giải phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = x - \dfrac{1}{2}$. Giáo viên đưa ra nhận xét 2.10. Giáo viên minh họa bằng hình ảnh và cho học sinh khám phá lời giải. Giáo viên mở rộng cho học sinh các bài toán giải phương trình mũ, phương trình logarit bằng phương pháp đồ thị ra các bài toán có kết hợp thêm đặt ẩn phụ.	Học sinh theo dõi hình vẽ minh họa, phán đoán nghiệm và trình bày lời giải.
Bài 15. (Ví dụ 2.3.11) Giải phương trình $4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x+4}$	Học sinh thảo luận và trình bày lời giải.

Phương pháp đánh giá **Bài 16.** (Ví dụ 2.3.12) Giải phương trình $2^{x^2+1} = 2 - \sqrt{x}$. (Ví dụ 2.3.13) Giải phương trình $1 - 4^x + 2^{x+1} = 2^x + 2^{-x}$. (Ví dụ 2.3.14) Giải phương trình $\log_3\left(9 - \sqrt{x-1}\right) =$ $\log_2\left(x^2 - 2x + 5\right)$. (Ví dụ 2.3.17) Giải phương trình $\log_2 x + \log_3(x+1) =$ $\log_4(x+2) + \log_5(x+3)$. Giáo viên chia lớp thành 4 nhóm và tiến hành thảo luận. Giáo viên cho học sinh nhận xét.	Học sinh thảo luận và trình bày kết quả. Học sinh nhận xét, rút kinh nghiệm.
Bài 17. (Ví dụ 2.3.18) Giải phương trình $4^{\log_3 x} + 2^{\log_3 x} = 2x$. Giáo viên hướng học sinh khai thác, khắc sâu định lí trong lời giải bài toán.	Học sinh cùng hợp tác với giáo viên, tự mình áp dụng định lí theo hướng dẫn của giáo viên.

Giáo viên chia lớp thành 2 nhóm tự đọc, tự nghiên cứu các bài toán và ví dụ sau:

Xây dựng phương trình mũ và phương trình logarit: Bài toán 2.4.1, 2.4.2; Ví dụ 2.4.1, 2.4.2, 2.4.1

Ứng dụng của logarit: 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.5

Hai nhóm sẽ trình bày kết quả thu được bao gồm:

- Nhóm 1: Xây dựng phương trình mũ và phương trình logarit từ phương trình logarit cơ bản, từ hệ phương trình, từ tính đơn điệu của hàm số.

Nhóm 2: Trình bày về ứng dụng của logarit trong chương trình Toán phổ thông, ứng dụng trong các lĩnh vực khác.

V. Bài tập về nhà

Các ví dụ 2.1.2, 2.2.3, 2.2.6, 2.2.8, 2.3.4, 2.3.5, 2.3.8, 2.3.10, 2.3.15, 2.3.16

Bài toán phát triển từ Ví dụ 2.1.4, 2.5.2, 2.5.4, 2.5.6.

Kiểm tra đánh giá

Để đánh giá hiệu quả của việc dạy học phương trình mũ và phương trình logarit theo hướng rèn luyện năng lực tư duy sáng tạo cho học sinh trong quá trình thực hiện các bài thực nghiệm, chúng tôi tiến hành tổ chức cho mỗi lớp làm một bài kiểm tra 45 phút sau khi thực hiện xong các bài thực nghiệm. Mục đích nhằm đánh giá việc nắm kiến thức sau mỗi bài học, đánh giá về ý thức học tập và rèn luyện năng lực tư duy sáng tạo của học sinh. Thông qua đó thấy được tính khả thi của dạy học theo hướng rèn luyện tư duy cho học sinh. Nội dung đề kiểm tra như sau

ĐỀ KIỂM TRA

(Thời gian 45 phút)

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $4^{x^2+2x} = 64$.

b) $49^x + 7^{x+1} - 8 = 0$.

c) $\log^2_{\sqrt{7}} x^3 - 12\log_7 x - 24 = 0$.

Bài 2. Giải phương trình $\log_3 \left(3^{x+2} - 6\right) = 2x + 1$.

Bài 3. Giải phương trình $\log_3 (x + 1) + \log_5 (3x + 1) = 4$.

Nhận xét đề kiểm tra

Đề kiểm tra như trên phù hợp với trình độ học tập và có tính phân loại học sinh tương đối tốt. Mỗi bài toán được đưa ra với mục đích sư phạm khác nhau nhằm kiểm tra và giúp cho những biểu hiện của tính sáng tạo của học sinh được bộc lộ rõ nét hơn, cụ thể

Đối với bài 1, mục đích yêu cầu của bài này là đòi hỏi học sinh phải nắm vững kiến thức cơ bản về phương trình mũ, phương trình logarit, thành thạo các biến đổi. Riêng ở bài 1c) ta có lời giải sau:

Phương trình $\log^2_{\sqrt{7}} x^3 - 12\log_7 x - 24 = 0$ tương đương với

$$(2.3.\log_7 x)^2 - 12\log_7 x - 24 = 0$$

Hay

$$36\log^2_7 x - 12\log_7 x - 24 = 0.$$

Ở đây bài toán đòi hỏi cao hơn đó là tính nhuần nhuyễn, tính mềm dẻo của tư duy sáng tạo để định hướng, biến đổi trước khi ta đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản, quen thuộc.

Đặt $t = \log_7 x$, phương trình trở thành: $36t^2 - 12t - 24 = 0$, phương trình có hai nghiệm $t = -\dfrac{2}{3};\ t = 1$. Một số học sinh mắc phải sai lầm ở bước này

đó là khi đặt $t = \log_7 x$ đã kèm theo điều kiện $t > 0$ dẫn đến kết quả sai là đã loại đi nghiệm $t = -\dfrac{2}{3}$.
Với $t = -\dfrac{2}{3}$ thì $\log_7 x = -\dfrac{2}{3}$ hay $x = 7^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{49}}$.
Với $t = 1$ thì $\log_7 x = 1$ hay $x = 7$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{49}};\ x = 7$.
Đối với bài 2, mục đích chủ yếu của bài này là rèn luyện cho học sinh tính mềm dẻo của tư duy sáng tạo thông qua việc khéo léo trong biến đổi và linh hoạt trong các bước giải. Ngoài ra còn phát triển cho học sinh tính hoàn thiện thông qua việc định hướng, lập kế hoạch để giải phương trình đã cho.
Bài toán giải phương trình $\log_3\left(3^{x+2} - 6\right) = 2x + 1$.
Điều kiện $3^{x+2} - 6 > 0$ hay $x > \log_3 \dfrac{2}{3}$.
Học sinh đưa phương trình ban đầu về dạng phương trình mũ: Phương trình tương đương với

$$3^{x+2} - 6 = 3^{2x+1};\ 3^{x+2} - 6 = 3.3^{2x};\ 3.3^{2x} - 9.3^x + 6 = 0.$$

Đến đây đa số học sinh đưa ra phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình mũ $3.3^{2x} - 9.3^x + 6 = 0$,
Đặt $t = 3^x, t > 0$. Phương trình tương đương $3.t^2 - 9.t + 6 = 0$ phương trình này có hai nghiệm $t = 1;\ t = 2$.
Với $t = 1$ thì $3^x = 1$ hay $x = 0$ (thỏa mãn).
Với $t = 2$ thì $3^x = 2$ hay $x = \log_3 2$.
Một số học sinh dùng phương pháp biến đổi về dạng tích:
Phương trình $3.3^{2x} - 3.3^x - 6.3^x + 6 = 0$; Tương đương với

$$3.3^x\left(3^x - 1\right) - 6\left(3^x - 1\right) = 0;$$

Hay

$$\left(3^x - 1\right)\left(3.3^x - 6\right) = 0;$$

Do đó hoặc $3^x - 1 = 0$ hoặc $3.3^x - 6 = 0$ hay $x = 0;\ x = \log_3 2$.
Phương pháp đặt ẩn phụ giúp học sinh đưa bài toán về dạng toán quen thuộc và gọn gàng hơn, tuy nhiên quá lạm dụng việc đặt ẩn phụ ngay cả với các dạng phương trình mũ đơn giản này đôi khi lại làm học sinh thực hiện một cách máy móc. Qua đó, học sinh có thể tiếp tục biến đổi trực tiếp bằng việc

đưa về phương trình tích, vừa giảm phát sinh biến (khi phát sinh biến học sinh không để ý việc đặt điều kiện cho ẩn mới có thể làm thay đổi kết qảu của bài toán), vừa giúp học sinh tránh được việc giải máy móc và hình thức.
Đối với bài 3, giải phương trình $\log_3(x+1) + \log_5(3x+1) = 4$, mục đích của bài này là yêu cầu học sinh phát huy tính nhuần nhuyễn, hoàn thiện thông qua việc kiểm tra, đánh giá bài toán và tính độc đáo trong việc phát hiện ra lời giải mới độc đáo hơn.
Đây là bài tương đối khó nhưng có một số học sinh hai lớp giải được bằng sử dụng tổng hợp phương pháp cho phương trình logarit khác cơ số:
Cách giải 1: Điều kiện $x+1>0$; $3x+1>0$ hay $x > -\dfrac{1}{3}$.
Đầu tiên là bước đặt ẩn phụ, đưa bài toán về dạng phương trình bao gồm hàm logarit và hàm số bậc 1.
Đặt $t = \log_3(x+1)$, suy ra $x+1 = 3^t$ hay $3x+1 = 3.3^t - 2$. Phương trình trở thành

$$t + \log_5\left(3.3^t - 2\right) = 4;$$

Tương đương với các phương trình

$$\begin{aligned}
&\log_5\left(3.3^t - 2\right) = 4 - t;\\
&3.3^t - 2 = 5^{4-t};\\
&3.3^t - 2 = \frac{625}{5^t};\\
&3.15^t - 2.5^t = 625;
\end{aligned}$$

hay

$$3 = 625.\left(\frac{1}{15}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^t. \tag{3.1}$$

Hàm số

$$y = 625.\left(\frac{1}{15}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^t$$

là tổng của hai hàm nghịch biến nên nghịch biến, $y = 3$ là hàm hằng nên phương trình (3.1) có nghiệm duy nhất.
Ta có (3.1) có nghiệm $t = 2$, suy ra $x + 1 = 3^2$ hay $x = 8$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 8$.
Có hai học sinh ở lớp thực nghiệm đưa ra cách giải độc đáo hơn cho bài này.
Cách giải 2. Ta thấy $x = 8$ là nghiệm của phương trình.
Với $x > 8$ thì $\log_3(x+1) > \log_3(8+1) = \log_3 9 = 2$; và

$\log_5(3x+1) > \log_5(3.8+1) = \log_5 25 = 2;$
suy ra $\log_3(x+1) + \log_5(3x+1) > 4$.
Với $x < 8$ thì $\log_3(x+1) < \log_3(8+1) = \log_3 9 = 2$; và
$\log_5(3x+1) < \log_5(3.8+1) = \log_5 25 = 2;$
suy ra $\log_3(x+1) + \log_5(3x+1) < 4$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 8$.

3.3 Đánh giá kết quả thực nghiệm

3.3.1 Đánh giá định tính

Thông qua quá trình thực nghiệm, quan sát chất lượng trả lời câu hỏi, cũng như lời giải các bài tập của học sinh, có thể rút ra một số nhận xét như sau Chủ đề phương trình mũ và phương trình logarit được giới thiệu trong Chương trình Giải tích ở lớp 12 không khó. Nhưng khi đứng trước các bài toán giải phương trình mũ và phương trình logarit được biến đổi phức tạp hơn thì học sinh rất lúng túng khi chọn lựa phương pháp cũng như biến đổi trong giải toán. Các công thức biến đổi hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit tương đối nhiều và học sinh thường có cách học thuộc công thức một cách máy móc nên khi áp dụng rất dễ nhầm lẫn.

Học sinh hay quên đặt điều kiện của ẩn, hoặc nếu đặt trước được điều kiện của ẩn thì việc kiểm tra và loại các giá trị không thích hợp cũng rất khó khăn.

Khi giải các bài toán có dạng lũy thừa bậc chẵn của hàm số logarit học sinh khi biến đổi thường quên đi việc đặt dấu giá trị tuyệt đối, thay đổi của điều kiện nếu không đặt dấu giá trị tuyệt đối so với bài toán ban đầu.

Năng lực liên tưởng và huy động kiến thức cũng rất hạn chế. Khi đứng trước một bài toán, ít có thói quen xem xét các biểu thức, các con số,... có mặt trong bài toán ấy liên quan gì đến những đến những kiến thức được học hay không.

Sau khi nghiên cứu kỹ và vận dụng các biện pháp sư phạm được xây dựng vào quá trình dạy học, các giáo viên dạy thực nghiệm có các ý kiến chủ yếu sau:

- Các giờ học được tiến hành theo hướng trên dễ điều khiên học sinh tham gia vào hoạt động học tập, thu hút được nhiều đối tượng tham gia. Khi tham gia vào các hoạt động học tập học sinh nắm ngay kiến thức cơ bản trên lớp. Giáo viên dễ dàng phát hiện những sai lầm học sinh thường mắc phải để có hướng khắc phục.

- Học sinh tham gia các tiết học sôi nổi nhiệt tình và hào hứng hơn. Trong các giờ học, học sinh đều tự mình hoàn thành các bài tập vì thế học sinh học tập tích cực, chủ động, sáng tạo hơn.
- Học sinh khi được nghiên cứu về ứng dụng của logarit trong toán học và trong thực tế cảm thấy hứng thú hơn, tự mình tìm hiểu thêm những ứng dụng của logarit trong các lĩnh vực khác.

3.3.2 Đánh giá định lượng

Chúng tôi xin trình bày kết quả thực nghiệm, cụ thể:

Bảng 3.5: Thống kê kết quả kiểm tra sau thực nghiệm

Nhóm	Lớp	Số bài	SỐ BÀI KIỂM TRA ĐẠT ĐIỂM Xi										
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
TN	12A1	43	0	0	1	1	2	5	6	14	7	4	3
ĐC	12A3	44	0	0	2	5	5	8	9	8	5	2	0

Bảng 3.6: Xử lí số liệu

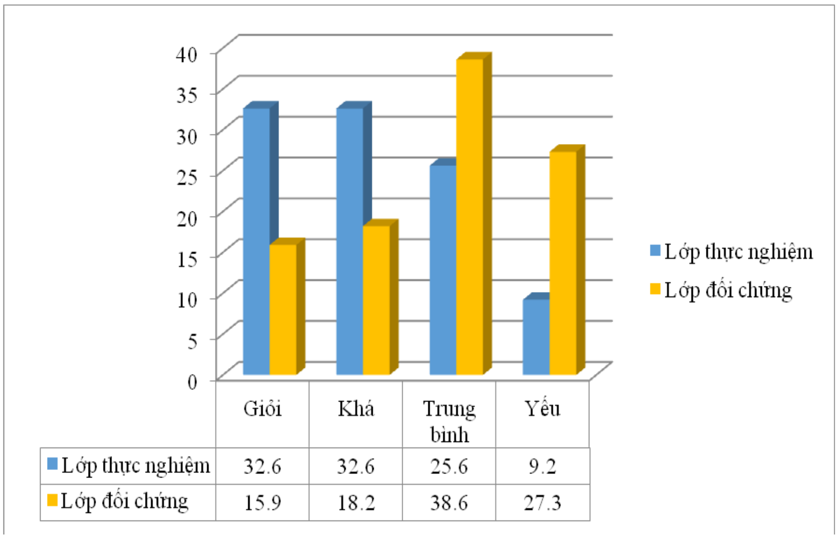
	12A1	12A3
Trung bình	6.8	5.6
Trung vị	7.0	6.0
Yếu vị	7.0	6.0
Phương sai	3.19	3.36
Độ lệch chuẩn	1.79	1.83
Min	2.0	2.0
Max	10.0	9.0

Bảng 3.7: Thống kê % xếp loại kết quả kiểm tra

Nhóm	Lớp	Số bài	SỐ BÀI KIỂM TRA ĐẠT ĐIỂM Xi							
			Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu	
			Số lượng	%	Số lượng	%	Số lượng	%	Số lượng	%
TN	12A1	43	14	32,6	14	32,6	11	25,6	4	9,2
ĐC	12A3	44	7	15,9	8	18,2	17	38,6	12	27,3

Từ bảng 3.5 và bảng 3.6 ta có nhận xét:
- Ta thấy điểm trung bình của lớp thực nghiệm cao hơn lớp đối chứng là 1,2 điểm và xếp ở mức khá.
- Điểm chủ yếu của lớp thực nghiệm là 7 điểm, trong khi lớp đối chứng là 6 điểm.
- Độ lệch chuẩn của hai lớp xếp ở mức cao, cho ta thấy độ chênh lệch giữa học sinh nhóm trên và học sinh yếu kém vẫn cao.
- Lớp đối chứng không có điểm 10 trong khi lớp thực nghiệm có 3 điểm 10.

Biểu đồ 3.1 Kết quả kiểm tra sau thực nghiệm



Từ nhận xét, bảng 3.7 và biểu đồ 3.1 ta thấy kết quả thu được từ lớp thực nghiệm là tốt hơn so với lớp đối chứng. Do đó khẳng định thêm được tính hiệu quả của đề tài.

3.4 Kết luận chương 3

Quá trình thực nghiệm cùng những kết quả rút ra sau thực nghiệm cho thấy rằng: mục đích thực nghiệm đã được hoàn thành, tính khả thi và tính hiệu quả của các biện pháp đã được khẳng định. Thực hiện được các biện pháp đó sẽ góp phần rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh qua các bài toán về phương trình mũ và phương trình logarit ở nhà trường phổ thông, góp phần nâng cao hiệu quả dạy học môn toán cho học sinh ở nhà trường phổ thông.

Kết luận

Qua quá trình nghiên cứu đề tài “Phát triển năng lực tư duy sáng tạo cho học sinh trong dạy học phương trình mũ và phương trình logarit ở lớp 12” tác giả đã thu được kết quả chính sau:
1. Đã hệ thống hóa, phân tích, diễn giải được các khái niệm tư duy và tư duy sáng tạo. Phân tích các thao tác của tư duy và các thành tố đặc trưng của tư duy sáng tạo.
2. Trình bày được làm thế nào để phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh trong dạy học môn Toán ở trường Trung học phổ thông.
3. Thống kê được các dạng bài tập và phương pháp giải phương trình mũ và phương trình logarit trong chương trình Toán bậc Trung học phổ thông và bổ sung thêm một số phương pháp giải đặc biệt.
4. Xây dựng được một số biện pháp sư phạm để rèn luyện từng yếu tố của tư duy sáng tạo thông qua việc tìm tòi lời giải các bài tập phương trình mũ và phương trình logarit, từ đó góp phần rèn luyện và phát triển tư duy sáng tạo cho các em học sinh.
5. Trình bày được một số ứng dụng của logarit trong chương trình toán phổ thông, góp phần tạo hứng thú trong học tập nội dung phương trình mũ và phương trình logarit nói riêng và toán học nói chung.
6. Đã tổ chức thực nghiệm sư phạm để kiểm chứng tính khả thi và hiệu quả của những biện pháp sư phạm được để xuất. Qua những nhận xét trên, có thể khẳng định rằng: Mục đích nghiên cứu đã được thực hiện. Nhiệm vụ nghiên cứu đã hoàn thành. Giả thiết khoa học là chấp nhận được.

Tài liệu tham khảo

[1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2006), *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán,*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Phan Dũng (2010), *Giới thiệu: Phương pháp luận sáng tạo và đổi mới (quyển một của bộ sách "Sáng tạo và đổi mới")*, Nhà xuất bản Trẻ, TPHCM.

[3] Nguyễn Huy Đoan (2007), *Bài tập giải tích 12 nâng cao,* Nhà xuất bản Giáo dục.

[4] Trần Văn Hạo (2007), *Giải tích 12,* Nhà xuất bản Giáo dục.

[5] Nguyễn Viết Hiếu (2013), *Vấn đề dạy học logarit trong chương trình phổ thông và những điều cần biết về logarit,* Tạp chí Khoa học ĐHSP TPHCM.

[6] Nguyễn Anh Huy và các tác giả (2012), *Chuyên đề Phương trình và hệ phương trình.*

[7] Nguyễn Bá Kim (2004), *Phương pháp dạy học môn Toán,* Nhà xuất bản Đại học sư phạm.

[8] Nguyễn Bá Kim, Vũ Dương Thụy (1992), *Phương pháp dạy học môn Toán,* Nhà xuất bản Giáo dục.

[9] Huỳnh Văn Sơn (2009), *Tâm lí học sáng tạo,* Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[10] Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Nguyễn Huy Đoan và các tác giả khác, (2009), *SGK Giải tích 12 – Nâng cao,* Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[11] Đinh Thị Kim Thoa (2015), *Tập bài giảng Tâm lí học.*

[12] Nguyễn Đình Trí (2009), *Bài tập toán cao cấp: Phép tính giải tích một biến số,* Nhà xuất bản Giáo dục.

[13] Vũ Tuấn (2007), *Bài tập giải tích 12,* Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[14] Nguyễn Quang Uẩn (chủ biên) (2005), *Tâm lí học đại cương,* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[15] G. Pôlya (1995), *Toán học và những suy luận có lí,* Nhà xuất bản Giáo dục.

[16] G. Pôlya (1997), *Sáng tạo toán học,* Nhà xuất bản Giáo dục.

[17] Lowenfeld V. (1962), *Creativity: Education's Stepchild, In A Source Book from Creative Thinking,* Scribners, New York.

[18] *http://www.dinhpsy.com/2013/01/phan-tich-dac-diem-cua-tu-duy.html*

[19] *http://mathblog.org/phuong-trinh-mu-va-logarit-co-ban/.*