Họ tên: Lê Hoàng Long

Bài tập lớn: Lý thuyết hệ điều khiển tuyến tính

Câu 1. Với $M = I_n$, ta viết lại hệ

$$\ddot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t), \text{ với mọi } t \geq 0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0,\ x(0) = x_0 \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + \tilde{D}u(t) \quad (2)$$

a) Ta chứng minh $B, C, \tilde{D}, -K \geq 0$ là một điều kiện đủ để hệ là dương trong.

Đặt $z(t) = \dot{x}(t)$ và $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ thì $\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t)$

Do $B, -K \geq 0$ nên $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} \geq 0$ và $\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \geq 0$ suy ra với mọi $u(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$ và mọi $X(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} \geq 0$ ta luôn có $X(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, nói riêng $x(t) \geq 0$ $\forall t \geq 0$

Kéo theo $y(t) = Cx(t) + \tilde{D}u(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$

b) Đầu tiên ta chứng minh là hệ dương trong thì kéo theo $B, C, \tilde{D} \geq 0$.

- Chọn $x(0) = 0, u(t) \equiv e_j$ thì $\tilde{D}[i,j] = y_i(0) \geq 0$, với mọi $1 \leq j \leq p$, mọi $1 \leq i \leq q$, suy ra $\tilde{D} \geq 0$.

- Chọn $x(0) = e_j, u(t) \equiv 0$ thì $C[i,j] = y_i(0) \geq 0$, với mọi $1 \leq j \leq n$ và $1 \leq i \leq q$, suy ra $C \geq 0$.

- Chọn $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $u(t) \equiv e_j$ thì $\ddot{x}_i(0) = B[i,j]$. Nếu tồn tại $B[i,j] < 0$ thì $\ddot{x}_i(0) < 0$ và do đó tồn tại $a < 0$ và $t_0 > 0$ sao cho $\ddot{x}_i(t) \leq a$ với mọi $t \in [0, t_0]$, suy ra $\dot{x}_i(t) \leq at$ với mọi $t \in [0, t_0]$, suy ra $x_i(t_0) \leq at_0^2/2 < 0$, mâu thuẫn do hệ dương. Vậy ra phải có $B[i,j] \geq 0$ với mọi i, j hay $B \geq 0$.

Ta sẽ chứng minh $-K$ là ma trận Metzler.

Chọn $x(0) = e_j$, $\dot{x}(0) = 0$, $u \equiv 0$ thì $\ddot{x}_i(0) + K[i,j] = 0$. Khi đó chứng minh tương tự trên với nhận xét rằng $x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0$ khi $i \neq j$ ta suy ra $-K[i,j] \geq 0$ với $1 \leq i \neq j \leq n$, tức là $-K$ là ma trận Metzler.

Đặt $z(t) = \dot{x}(t)$ và $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ thì $\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t)$

Suy ra $X(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} t\right) X(0) + \int_0^t \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} (t-s)\right) \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(s)ds$

Ta có $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix}^{2m} = \begin{bmatrix} (-K)^m & 0 \\ 0 & (-K)^m \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix}^{2m+1} = \begin{bmatrix} 0 & (-K)^m \\ (-K)^{m+1} & 0 \end{bmatrix}$ với mọi $m \in \mathbb{N}$, suy ra

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} t\right) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} & \sum\limits_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^m t^{2m+1} \\ \sum\limits_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^{m+1} t^{2m+1} & \sum\limits_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} \end{bmatrix}$$

Chọn $u(t) \equiv 0$ thì được

$$x(t) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} x(0) + \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^m t^{2m+1} \dot{x}(0)$$

Suy ra để $x(t) \geq 0$ với mọi $x(0) \geq 0$ và $\dot{x}(0) \geq 0$ thì phải có

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} \geq 0 \text{ và } \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^m t^{2m+1} \geq 0 \text{ với mọi } t \geq 0 \ (*)$$

Ta chứng minh (*) cùng với $B, C, \tilde{D} \geq 0$ cũng đồng thời là điều kiện đủ để hệ là dương trong.

Từ (*) suy ra $\begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} t\right) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} X(t) \\ &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} t\right) X(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} (t-s)\right) \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(s)ds \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

với mọi $t \geq 0$ khi $X(0) \geq 0$, $B \geq 0$ và $u(t) \geq 0$, suy ra $y(t) = Cx(t) + \tilde{D}u(t) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$ khi $C, \tilde{D} \geq 0$. Ta có điều cần chứng minh.

c) Phản ví dụ: Chọn ma trận $C = 0$ thì $y = \tilde{D}u(t)$, và do đó hệ là dương ngoài với $\tilde{D} \geq 0$. Hệ này không nhất thiết dương trong: Ví dụ lấy $B = 0$ và $K = diag[-1, 0, \cdots, 0]$, khi đó với $x(0) = e_1$, $\dot{x}(0) = 0$ thì $x_1(t) = \cos(t)$ không là hàm không âm trên $[0, +\infty)$.

Câu 2.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \text{ với mọi } t \geq 0,\ x(0) = x_0 \quad (3)$$
$$y(t) = Cx(t) \quad (4)$$

Ta có nghiệm của (3) là $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$

a) Nhận xét rằng hệ $\dot{x} = Ax$ là ổn định tiệm cận nếu và chỉ nếu $\Re(\lambda) < 0$ với mọi $\lambda \in \sigma(A)$
- Nếu hệ $\dot{x} = Ax$ là ổn định tiệm cận, ta có

$$\det(\lambda I - A) = \prod_{\alpha\in\sigma(A)\cap\mathbb{R}} (\lambda - \alpha) \prod_{\beta\in\sigma(A)\setminus\mathbb{R}} (\lambda^2 - 2\Re(\beta) + |\beta|^2)$$

Kết hợp nhận xét trên suy ra mọi hệ số của $\det(\lambda I - A)$ là dương
- Nếu mọi hệ số của $\det(\lambda I - A)$ là dương, từ nhận xét trên ta suy ra chỉ cần chứng minh mọi nghiệm phức của $\det(\lambda I - A)$ đều có phần thực âm. Ta có bổ đề sau:
Bổ đề: Ma trận vuông M là dương thì có một giá trị riêng thực không âm λ_M sao cho với mọi $\lambda \neq \lambda_M$ là giá trị riêng của M thì $|\lambda| \leq \lambda_M$.
Áp dụng bổ đề, do hệ $\dot{x} = Ax$ là hệ dương nên A là ma trận Metzler, do đó tồn tại $k > 0$ sao cho $A + kI$ là ma trận dương. Xét $M = A + kI$ thì $\sigma(M) = \sigma(A) + k$. Do $\det(\lambda I - A)$ có hệ số dương nên mọi giá trị riêng thực của A đều âm nên $k < \lambda_M$. Xét λ_0 là một giá trị riêng của A thì $\lambda_0 + k$ là một giá trị riêng của M nên $Re(\lambda_0) = Re(\lambda_0 + k) - k \leq |\lambda_0 + k| - k \leq \lambda_M - k < 0$. Ta có điều cần chứng minh.

b) **Bổ đề**: Ma trận vuông dương M với giá trị riêng thực λ_M như trong bổ đề ở trên. Khi đó số thực $\lambda > \lambda_M$ khi và chỉ khi $M_\lambda = \lambda I - M$ có các định thức con góc trái là dương.
Do hệ (3) dương nên A là ma trận Metzler, do đó tồn tại $k > 0$ để $M = A + kI > 0$.
- Nếu (3) là ổn định tiệm cận thì do $\sigma(M) = \sigma(A) + k$ nên $\lambda_M - k \in \sigma(A)$ nên $\sigma_M - k < 0$. Áp dụng bổ đề suy ra $M_k = kI - M = -A$ có các định thức con góc trái là dương.
- Nếu các định thức con góc trái của $-A = M_k$ là dương thì theo bổ đề ta có $k > \lambda_M$. Với $z \in \sigma(A)$ thì $z + k \in \sigma(M)$ nên $\Re(z) = \Re(z+k) - k \leq |z+k| - k \leq \lambda_M - k < 0$ và do đó hệ $\dot{x} = Ax$ à ổn định tiệm cận.

c) Do hệ $\dot{x} = Ax$ ổn định tiệm cận nên các giá trị riêng của ma trận A có phần thực âm. Khi đó tồn tại các số thực dương a, b sao cho $\left\|e^{At}\right\| \leq ae^{-bt}$ với mọi $t \geq 0$.
Đặt $M = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\| < +\infty$ do u bị chặn đều. Ta có $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$ và $y(t) = Cx(t)$, suy ra với mọi $t \geq 0$ thì

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\leq \|C\| \left\|e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds\right\| \\
&\leq \|C\| \left(\left\|e^{At}\right\| \|x(0)\| + \int_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\| \|B\| \|u(s)\| ds\right) \\
&\leq \|C\| \left(ae^{-bt} \|x(0)\| + \int_0^t ae^{-b(t-s)} \|B\| M ds\right) \\
&\leq \|C\| \left(a\|x(0)\| + \frac{a\|B\| M}{b}(1 - e^{-bt})\right) \leq \|C\| \left(a\|x(0)\| + \frac{a\|B\| M}{b}\right)
\end{aligned}$$

Vậy hệ là ổn định BIBO.
Ngược lại không đúng: Lấy $B = 0, C = Id$ thì $y(t) = e^{At}x(0)$. Tính bị chặn của y nói chung không suy ra tính ổn định tiện cận. Ví dụ lấy $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ thì với $x(0) = [x_1, x_2]^T$ ta có

$$y(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} \cos(t)x_1 - \sin(t)x_2 \\ \sin(t)x_1 + \cos(t)x_2 \end{bmatrix}$$

Suy ra $\|y(t)\| = (\cos(t)x_1 - \sin(t)x_2)^2 + (\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 = \|x(0)\|$ là bị chặn đều với mọi đầu vào u (và do đó ổn đinh BIBO) nhưng tất nhiên không ổn định tiệm cận.

Câu 3.

a) Ta có phản hồi xung $g(t) = \begin{cases} t,\ 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t,\ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$ và đầu vào $u(t) = \begin{cases} 1,\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0,\ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$
Phản hồi trạng thái 0 cho bởi công thức

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- Với $t \leq 0$ thì $y(t) = 0$
- Với $0 \leq t \leq 1$ thì $y(t) = \int_0^t (t-\tau)d\tau = \dfrac{t^2}{2}$

- Với $1 \leq t \leq 2$ thì $y(t) = \int_0^{t-1}(2-t+\tau)d\tau + \int_{t-1}^{1}(t-\tau)d\tau - \int_1^t(t-\tau)d\tau = \dfrac{-3t^2}{2} + 4t - 2$
- Với $t \geq 2$ thì $y(t) = \int_0^2 g(t-\tau)u(\tau)d\tau = 0$

b) Ta xét trường hợp hệ là nhân quả, thư giãn tại 0 (có thể thay bằng t_0 bất kì).
Khi đó $U(t) = 0$ khi $t \leq 0$ và $Y(t) = \int_0^t G(t,\tau)U(\tau)d\tau = 0$ khi $t \leq 0$ với $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ và $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, nói riêng $\dfrac{d^kY}{dt^k}(0) = \dfrac{d^kU}{dt^k}(0) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$
Khi đó

$$\widehat{y_1^{(k)}(t)}(s) = s^k\widehat{y_1(t)}(s) - \sum_{l=1}^{k} s^{k-l}y_1^{(l-1)}(0) = s^k\widehat{y_1(t)}(s) \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}$$

Suy ra $D_{11}\widehat{(p)y_1}(t)(s) = D_{11}(s)\widehat{y_1(t)}(s)$
Tương tự ta có được biến đổi Laplace cho hệ ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} D_{11}(s)\widehat{y_1(t)}(s) + D_{12}(s)\widehat{y_2(t)}(s) &= N_{11}(s)\widehat{u_1(t)}(s) + N_{12}(s)\widehat{u_2(t)}(s) \\ D_{21}(s)\widehat{y_1(t)}(s) + D_{12}(s)\widehat{y_2(t)}(s) &= N_{21}(s)\widehat{u_1(t)}(s) + N_{22}(s)\widehat{u_2(t)}(s) \end{aligned}$$

Hay

$$\begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & D_{22}(s) \end{bmatrix} \widehat{Y}(s) = \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix} \widehat{U}(s)$$

Do đó ma trận hàm truyền của hệ là

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & D_{22}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix}$$

c) Với $r(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ ta có

- Xét hệ thống phản hồi dương $\begin{cases} v(t) = r(t) + y(t) \\ u(t) = av(t) \\ y(t) = u(t-1) \end{cases}$ thì

$$\begin{aligned} y(t) = av(t-1) = a(r(t-1) + y(t-1)) &= ar(t-1) + ay(t-1) \\ &= \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a^k r(t-k) = \sum_{k=1}^{[t]} a^k \end{aligned}$$

Với $a = 1$ thì $y(t) = [t]$ còn với $a = 0.5$ thì $y(t) = \sum_{k=1}^{[t]} \dfrac{1}{2^k} = 1 - \dfrac{1}{2^{[t]}}$ và ta có các đồ thị như hình.

- Xét hệ thống phản hồi âm $\begin{cases} v(t) = r(t) - y(t) \\ u(t) = av(t) \\ y(t) = u(t-1) \end{cases}$ thì

$$\begin{aligned} y(t) = av(t-1) = a(r(t-1) - y(t-1)) = ar(t-1) - ay(t-1) = \cdots \\ = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a^k r(t-k) = \sum_{k=1}^{[t]}(-1)^{k-1}a^k \end{aligned}$$

Với $a = 1$ thì $y(t) = \sum_{k=1}^{[t]}(-1)^{k-1} = \begin{cases} 1 \text{ nếu [t] lẻ} \\ 0 \text{ nếu [t] chẵn} \end{cases}$ và $a = 0.5$ thì $y(t) = \sum_{k=1}^{[t]}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2^k} = \dfrac{1}{3}\left(1 - \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{[t]}\right)$ và ta có các đồ thị như hình vẽ.