TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI
PGS. TS. ĐẶNG QUỐC LƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP TÍNH
TRONG KỸ THUẬT

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI
PGS. TS. ĐẶNG QUỐC LƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP TÍNH
TRONG KỸ THUẬT

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2001

Kỷ niệm 40 năm truyền thống đào tạo

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI 1961 - 2001

LỜI NÓI ĐẦU

Trong kỹ thuật, ít khi chúng ta tìm được nghiệm chính xác của các bài toán dưới dạng một biểu thức giải tích. Phương pháp tính (computational methods), hay còn gọi là phương pháp số (numerical method), toán học tính toán (computational mathematics) là môn học cho ta các phương pháp tính gần đúng, tìm nghiệm của phương trình, hệ phương trình đại số; phương trình, hệ phương trình vi phân; cách tính gần đúng đạo hàm, tích phân, xấp xỉ hàm phức tạp, hay hàm cho dưới dạng bảng số bằng các hàm đơn giản.

Phương pháp tính có lịch sử phát triển từ lâu đời, được phát sinh khi giải quyết các bài toán thực tế như tính đường đi của các tàu buôn trên biển, quỹ đạo sao chổi,... Các nhà toán học vĩ đại như Niutơn, Ơle, Gaoxơ,... đã có nhiều công trình đặt nền móng cho môn học này. Ngày nay, với sự phát triển của tin học và sự ra đời của các siêu máy tính, phương pháp tính đã có những ứng dụng rộng rãi trong các ngành kỹ thuật, góp phần giải quyết nhiều bài toán phức tạp.

Giáo trình ***"Phương pháp tính trong kĩ thuật"*** *được biên soạn trên cơ sở các bài giảng cho các lớp cao học xây dựng của Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội trong những năm gần đây. Giáo trình cung cấp cho những sinh viên năm cuối, học viên cao học các ngành kỹ thuật các phương pháp tính gần đúng. Vì đây là cuốn sách dành cho ngành kỹ thuật, nên khi biên soạn chúng tôi không đi sâu về mặt lý thuyết mà chủ yếu là đưa ra các phương pháp tính, nêu các ví dụ minh hoạ, trong đó có nhiều ví dụ là các bài toán kỹ thuật. Sau mỗi chương đều có các bài tập ôn luyện; đặc biệt là sau mỗi phương pháp tính đều có các sơ đồ khối minh hoạ các thuật toán, giúp người đọc dễ dàng lập trình và thực hiện tính toán trên máy vi tính.*

Do thời gian và trình độ có hạn, cuốn sách này không thể tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi mong nhận được ý kiến nhận xét, phê bình của bạn đọc.

Chúng tôi xin chân thành cám ơn Phòng quản lý khoa học, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội đã giúp đỡ chúng tôi xuất bản cuốn sách này.

Tác giả

Chương I

SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1.1. KHÁI NIỆM VỀ SỐ GẦN ĐÚNG

1.1.1. Sai số tuyệt đối

Giả sử a^* là giá trị chính xác của một đại lượng nào đó, số a sai khác a^* không nhiều được gọi là số gần đúng của a^*, hay còn được gọi là xấp xỉ của a^*.

Đại lượng $\Delta = |a - a^*|$ cho ta biết sai số thật sự của số gần đúng a so với a^*. Vì giá trị chính xác a^* của đại lượng chưa biết nên ta cũng không biết được sai số thật sự Δ.

Để ước lượng sai số của a, ta chọn số dương thoả mãn điều kiện:

$$|a - a^*| \le \Delta_a \tag{1-1}$$

Số Δ_a này được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a. Rõ ràng là mọi số $\Delta' > \Delta_a$ đều là sai số tuyệt đối của a. Trong thực tế ta chọn Δ_a là số dương nhỏ nhất có thể được thoả mãn (1-1) làm sai số tuyệt đối của a.

Nếu Δ_a là sai số tuyệt đối của a thì theo (1-1):

$$a - \Delta_a \le a^* \le a + \Delta_a \tag{1-2}$$

và ta quy ước viết:

$$a^* = a \pm \Delta_a \tag{1-3}$$

Ví dụ: $a^* = e = 2{,}718281...$

Vì $2{,}71 < e < 2{,}72 = 2{,}71 + 0{,}01$ nên ta có thể chọn $\Delta_a = 0{,}01$ làm sai số tuyệt đối.

Mặt khác, do $2{,}71 < e < 2{,}7183 = 2{,}71 + 0{,}0083$ nên ta cũng có thể chọn $\Delta_a = 0{,}0083$ làm sai số tuyệt đối.

1.1.2. Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng a là đại lượng δ_a:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \tag{1-4}$$

Chú ý: Sai số tuyệt đối không phản ánh đầy đủ độ chính xác của một số gần đúng. Độ chính xác đó thể hiện qua sai số tương đối.

Ví dụ: Đo độ dài hai đoạn thẳng ta được a = 10m và b = 1m với sai số tuyệt đối bằng nhau $\Delta_a = \Delta_b = 0{,}01$m. Khi đó sai số tương đối là:

$$\delta_a = \frac{0{,}01}{10} = 0{,}1\%$$

còn
$$\delta_b = \frac{0{,}01}{1} = 1\%$$

hay
$$\delta_b = 10\delta_a$$

Rõ ràng phép đo a chính xác hơn phép đo b. Độ chính xác đó được phản ánh qua sai số tương đối.

1.1.3. Chữ số đáng tin và cách viết số gần đúng

Một số thập phân có thể có nhiều chữ số, nhưng chỉ có những chữ số kể từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái qua phải là chữ số có nghĩa.

Ví dụ: Số 3,14 và 0,0314 đều có 3 chữ số có nghĩa là 3, 1, 4.

Mọi số thập phân đều có thể viết dưới dạng:

$$a = \pm \sum \alpha_k 10^k$$

Trong đó: α_k là các số từ 0 đến 9;

$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ví dụ: Số 57,827 có thể được viết dưới dạng:

$$57{,}827 = 5.10^1 + 7.10^0 + 8.10^{-1} + 2.10^{-2} + 7.10^{-3}$$

Giả sử Δ_a là sai số tuyệt đối của a. Nếu $\Delta_a \leq 0{,}5.10^k$ thì ta nói α_k là chữ số đáng tin. Nếu $\Delta_a > 0{,}5.10^k$ thì ta nói α_k là chữ số đáng nghi.

Ví dụ: a = 57,8264. Nếu $\Delta_a = 0{,}0032$ thì các chữ số 5, 7, 8, 2 là các chữ số đáng tin, còn các chữ số 6, 4 là đáng nghi. Nếu $\Delta_a = 0{,}0065$ thì các chữ số 5, 7, 8 là đáng tin, còn các chữ số 2, 6, 4 là đáng nghi.

Để viết số gần đúng ta có hai phương pháp. Phương pháp thứ nhất là viết kèm theo sai số tuyệt đối như công thức (1-3). Phương pháp thứ hai là viết theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin. Theo phương pháp này thì số gần đúng có sai số tuyệt đối không lớn hơn một nửa đơn vị ở hàng cuối cùng. Quy ước này được dùng khi lập các bảng số cho sẵn như bảng lôgarít...

1.1.4. Sai số quy tròn

Khi làm các phép tính đối với các số thập phân có nhiều chữ số đáng nghi, ta thường quy tròn các số bằng cách bỏ đi một vài chữ số ở cuối. Khi quy tròn một số, ta phạm phải một sai số gọi là sai số quy tròn, làm cho sai số tuyệt đối tăng lên.

Thật vậy, nếu gọi $\bar{a}$ là số quy tròn của số gần đúng a thì sai số tuyệt đối của $\bar{a}$ được đánh giá:

$$| a^* - \bar{a} | = | a^* - a + a - \bar{a} | \le | a^* - a | + | a - \bar{a} | = \Delta_a + \theta_a$$

Trong đó: $\theta_a = | a - \bar{a} |$ là sai số quy tròn.

Khi quy tròn số, ta thực hiện quy tắc sau đây:

- Nếu chữ số đầu tiên bỏ đi ≥ 5 thì ta thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng một đơn vị;
- Nếu chữ số đầu tiên bỏ đi < 5 thì để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng.

Ví dụ: Quy tròn số 58,6473 đến chữ số lẻ thập phân thứ nhất được 58,6; đến chữ số lẻ thập phân thứ hai được 58,65.

1.2. SAI SỐ TÍNH TOÁN

Khi giải các bài toán thực tế ta thường gặp phải các sai số sau đây:

- *Sai số các số liệu*: các số liệu trong bài toán thu được bằng cách đo đạc hay làm thực nghiệm, do đó mắc phải sai số. Những sai số này vừa được nghiên cứu ở trên.

- *Sai số giả thiết*: mắc phải khi ta lý tưởng hoá, mô hình hoá bài toán. Sai số này không thể tránh khỏi khi giải các bài toán.

- *Sai số phương pháp*: ta thường phải dùng các phương pháp gần đúng để giải các bài toán phức tạp nên kết quả phạm phải sai số do các phương pháp này gây ra.

- *Sai số tính toán:* khi giải bài toán ta phải thực hiện các phép tính đối với số gần đúng. Qua mỗi phép tính ta lại quy tròn các kết quả trung gian. Sai số mắc phải qua tất cả các quá trình tính toán như vậy gọi là sai số tính toán. Dưới đây ta sẽ đánh giá loại sai số này.

Cho hàm nhiều biến $u = f(x_1, x_2,..., x_n)$ khả vi và liên tục. Giả sử x_i^*, u^* và x_i, u (i = 1, 2,..., n) lần lượt là giá trị chính xác và giá trị gần đúng của các đối số và hàm số. Ta có:

$$\left|u - u^*\right| = \left|f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|f'_i\right| \left| x_i - x_i^* \right|$$

Trong đó $\bar{f}'_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ lấy tại các điểm trung gian. Do $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ liên tục và Δ_{x_i} khá bé nên ta có thể coi sai số tuyệt đối của hàm là:

$$\Delta_u = \sum |f'_i(x_1, x_2,..., x_n)|\, \Delta_{x_i} \tag{1-5}$$

còn sai số tương đối theo (1-4) là:

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln f) \right| \Delta_{x_i} \tag{1-6}$$

Từ công thức tổng quát (1-5), (1-6) ta suy ra sai số của các phép tính cơ bản sau:

1.2.1. Sai số của tổng

Giả sử ta phải tính tổng:

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Vì $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 1$ nên theo (1-5) ta có:

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i} \tag{1-7}$$

Vậy sai số tuyệt đối của một tổng bằng tổng các sai số tuyệt đối của các số hạng.

Chú ý: Xét trường hợp hiệu hai số gần đúng u = x - y, trong đó x, y cùng dấu. Khi đó sai số tương đối của hiệu:

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x - y|}$$

Nếu |x - y| rất nhỏ thì sai số tương đối rất lớn. Vì vậy trong tính toán nên tránh các công thức có hiệu của hai số gần nhau.

cuu duong than cong . com

1.2.2. Sai số của tích và thương

Giả sử

$$u = \frac{x_1.x_2...x_k}{x_{k+1}...x_n}$$

Khi đó:

$$\ln u = \sum_{i=1}^{k} \ln x_i - \sum_{j=k+1}^{n} \ln x_j$$

Do đó, theo (1-6) ta có sai số tương đối:

$$\delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln u) \right| \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{x_i}}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \tag{1-8}$$

Vậy sai số tương đối của một tích hoặc thương bằng tổng sai số tương đối của các số hạng.

1.2.3. Sai số của phép luỹ thừa, khai căn, nghịch đảo

Cho $u = x^{\alpha}$, α là hằng số.

Khi đó:

$$\delta_u = \left|\frac{d}{dx}(\ln u)\right|\Delta x = |\alpha|\frac{\Delta_x}{|x|} = |\alpha|\delta_x \qquad (1\text{-}9)$$

- Nếu $\alpha > 1$ (phép luỹ thừa) thì $\delta_u > \delta_x$ nên phép lũy thừa làm cho sai số tương đối tăng lên.

- Nếu $0 < \alpha < 1$ (phép khai căn) thì $\delta_u < \delta_x$ nên phép khai căn làm cho sai số tương đối giảm đi.

- Nếu $\alpha = -1$ (phép nghịch đảo) thì $\delta_u = \delta_x$ nên phép nghịch đảo không làm thay đổi sai số tương đối.

Ví dụ: Tìm sai số tương đối của hàm:

$$u = \frac{ab}{\sin^2 c}$$

nếu biết $\delta_a = 0{,}02$; $\delta_b = 0{,}01$; $\Delta_c = 0{,}004$; $c = 0{,}62$.

Giải:

Theo các công thức (1-8), (1-9) ta có:

$$\delta_u = \delta_a + \delta_b + \delta_{\sin^2 c}$$

Trong đó:

$$\delta_{\sin^2 c} = 2\delta_{\sin^2 c} = 2\frac{\cos c}{\sin c}\Delta_c = 2\mathrm{cotg}c.\Delta_c$$

Vậy: $\delta_u = 0{,}02 + 0{,}01 + 2.1{,}402.0{,}004 \approx 0{,}04$

Bài tập

1- Xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng sau đây nếu biết sai số tương đối của chúng:

$a = 35{,}72$;	$\delta_a = 1\%$
$b = 0{,}896$;	$\delta_b = 10\%$
$c = 232{,}44$;	$\delta_c = 1\%$

2- Khi đo một số góc ta nhận được kết quả sau:

$a = 45^{\circ}$; $\qquad b = 75^{\circ}20'44''$

Hãy xác định sai số tương đối của các số gần đúng đó, nếu sai số tuyệt đối của phép đo là 1".

3- Xác định số các chữ số đáng tin trong các số gần đúng sau khi biết sai số tuyệt đối của chúng:

$a = 0,1132;$ $\Delta_a = 0,1.10^{-3}$

$b = 2,325;$ $\Delta_b = 0,1.10^{-1}$

$c = 293,481;$ $\Delta_c = 0,1$

4- Hãy xác định số các chữ số đáng tin trong các số gần đúng sau khi biết sai số tương đối của chúng là:

$a = 0,2218;$ $\delta_a = 0,2.10^{-1}$

$b = 0,02425;$ $\delta_b = 0,5.10^{-2}$

$c = 0,000135;$ $\delta_c = 0,15$

5- Quy tròn các số gần đúng dưới đây với ba chữ số có nghĩa đáng tin và xác định sai số tuyệt đối, sai số tương đối của chúng:

a) 1,255; b) -392,85;

c) 0,1545; d) 625,55

6- Đường kính của một đường tròn được đo chính xác tới 1mm là d = 0,842m. Tìm diện tích hình tròn đó.

7- Tìm giá trị hàm $u = xy^2z^3$ nếu:

$x = 37,1;$ $y = 9,87;$ $z = 6,052$

và $\Delta_x = 0,3;$ $\Delta_y = 0,11;$ $\Delta_z = 0,016$

Đáp số

1. $\Delta_a = 0,36$; $\Delta_b = 0,9.10^{-1}$; $\Delta_c = 0,23.10$

2. $\delta_a = 0,62.10^{-5}$; $\delta_b = 0,37.10^{-5}$

3. a) 3; b) 2; c) 3

4. a) 2; b) 2; c) 1

5. a) $a = 1,23;$ $\Delta_a = 0,5.10^{-2};$ $\delta_a = 0,41.10^{-2}$

   b) $b = -393;$ $\Delta_b = 0,15;$ $\delta_b = 0,38.10^{-3}$

   c) $c = 0,155;$ $\Delta_c = 0,5.10^{-3};$ $\delta_c = 0,32.10^{-2}$

   d) $d = 626;$ $\Delta_d = 0,45;$ $\delta_d = 0,72.10^{-3}$

6. $s = 0,557m^2$; $\Delta_s = 0,002$

7. $u = 8,0.10^5$; $\Delta_u = 0,3.10^5$

Chương II
PHÉP TÍNH NỘI SUY

2.1. BÀI TOÁN NỘI SUY

2.1.1. Đặt vấn đề

Trong thực tế ta thường gặp bài toán sau đây: bằng đo đạc hay thực nghiệm ta có được giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại các điểm $x_o, x_1, \ldots, x_n$ trên đoạn $[a, b]$ là $y_o, y_1, \ldots, y_n$ trong khi chưa biết biểu thức giải tích của hàm số đó. Yêu cầu tìm giá trị của hàm tại một số điểm trung gian khác.

Để giải bài toán trên, ta xây dựng hàm $F(x)$ có biểu thức đơn giản, có giá trị trùng với giá trị của hàm $f(x)$ tại các điểm $x_o, x_1, \ldots, x_n$. Còn tại các điểm khác trên đoạn $[a, b]$ thì $F(x)$ khá gần $f(x)$. Bài toán xây dựng hàm $F(x)$ như vậy gọi là bài toán nội suy. Hàm $F(x)$ gọi là hàm nội suy của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$.

Ý nghĩa hình học của bài toán nội suy là xây dựng đường cong đại số $y = F(x)$ đi qua các điểm cho trước (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.

Trong nhiều trường hợp, mặc dù đã biết biểu thức giải tích của hàm $f(x)$ nhưng vì nó quá phức tạp, việc tính toán giá trị hàm tại các điểm mất nhiều công sức. Để cho việc tính toán đơn giản hơn, ta cũng tính giá trị hàm ở $n + 1$ điểm thuộc đoạn $[a, b]$ rồi xây dựng hàm nội suy có biểu thức đơn giản hơn. Việc thay thế hàm $f(x)$ bằng hàm nội suy $F(x)$ gọi là xấp xỉ hàm.

2.1.2. Đa thức nội suy

Có thể có nhiều hàm $F(x)$ thoả mãn các điều kiện của bài toán nội suy, nhưng người ta thường chọn đa thức làm hàm nội suy, vì đa thức là loại hàm đơn giản, luôn có đạo hàm và nguyên hàm, việc tính giá trị của chúng cũng đơn giản. Mặt khác, nếu ta chọn hàm nội suy là đa thức $P_n(x)$ bậc không quá n thì đa thức đó là duy nhất.

Thật vậy, giả sử trên đoạn $[a, b]$ có hai đa thức nội suy bậc n: $P_n(x)$, $Q_n(x)$ của cùng hàm $f(x)$ thoả mãn điều kiện:

$$P_n(x_i) = y_i \,;\, Q_n(x_i) = y_i \,;\, i = 0, 1, \ldots, n.$$

Như vậy đa thức $P_n(x) - Q_n(x)$ có bậc không quá n mà có $n + 1$ nghiệm phân biệt x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, do đó phải đồng nhất bằng không, hay $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

2.2. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRĂNG (LAGRANGE) VỚI NÚT KHÔNG CÁCH ĐỀU

Giả sử trên đoạn $a \le x \le b$ cho một lưới các điểm nút $a \le x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$ và giá trị của hàm $y = f(x)$ tại các điểm nút đó là $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Yêu cầu xây dựng một đa thức bậc n:

$$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

Sao cho $P_n(x)$ trùng với $f(x)$ tại các nút x_i, nghĩa là:

$$P_n(x_i) = y_i \ ; \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Lagrăng đã xây dựng đa thức nội suy dưới dạng:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) \qquad (2\text{-}1)$$

Trong đó:

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)} \qquad (2\text{-}2)$$

Đa thức nội suy Lagrăng (2-1) thoả mãn các điều kiện của bài toán trên. Thật vậy, vì $L_j(x)$ là đa thức bậc n nên (2-1) là đa thức bậc n. Mặt khác vì:

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 \ \text{khi} \ \ i = j \\ 0 \ \text{khi} \ \ i \ne j \end{cases}$$

nên $$P_n(x_i) = y_i \, ; \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Khi thay thế hàm $f(x)$ bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ ta đã phạm phải sai số được xác định theo định lý sau:

Định lý: Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm liên tục đến cấp $n + 1$ trong (a, b) thì sai số nội suy $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ có biểu thức:

$$r_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{\Pi(x)}{(n+1)!} \ ; \ \ c \in [a, b] \qquad (2\text{-}3)$$

Trong đó: $\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$

Nếu gọi $M = \max\left| f^{(n+1)}(x) \right|$; $\forall x \in [a, b]$ thì sai số nội suy:

$$\left| r_n(x) \right| \le \frac{M}{(n+1)!} \left| \Pi(x) \right| \qquad (2\text{-}4)$$

Ví dụ: Cho bảng các giá trị của hàm:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	7
y_i	17,0	17,5	76,0	210,5	1970,0

Hãy lập đa thức nội suy của hàm và tính giá trị hàm tại x = 5.

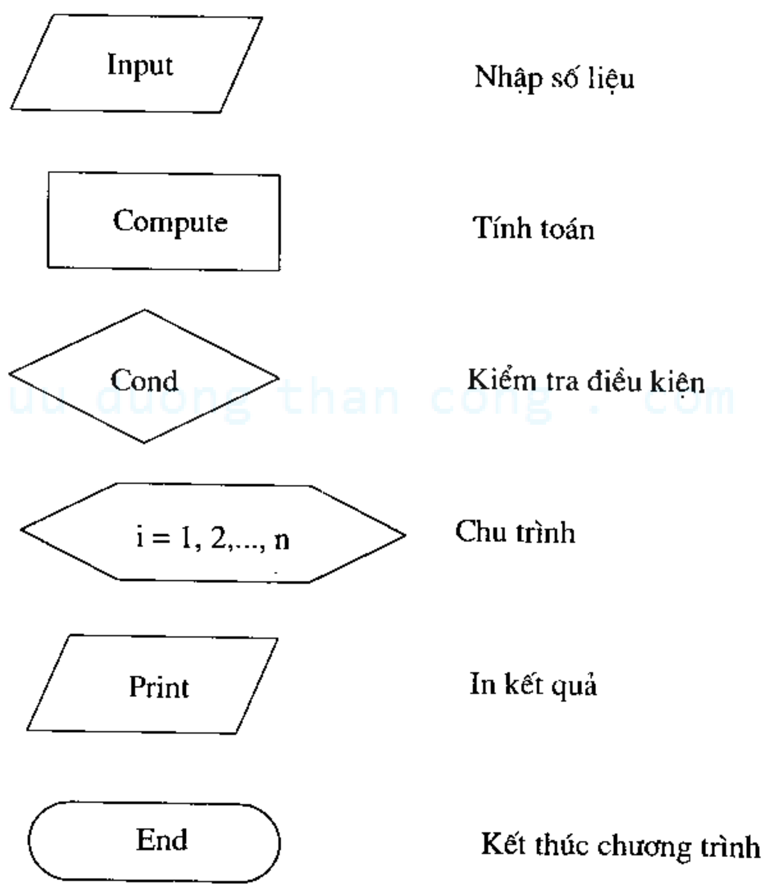
Giải: Đa thức nội suy cần tìm là:

$$P_4(x) = 17\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-7)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-7)} + 17{,}5\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-7)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-7)} +$$
$$+ 76{,}0\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-7)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-7)} + 210{,}5\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-7)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-7)} +$$
$$+ 1970\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(7-1)(7-2)(7-3)(7-4)} = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8{,}5x + 20{,}5$$

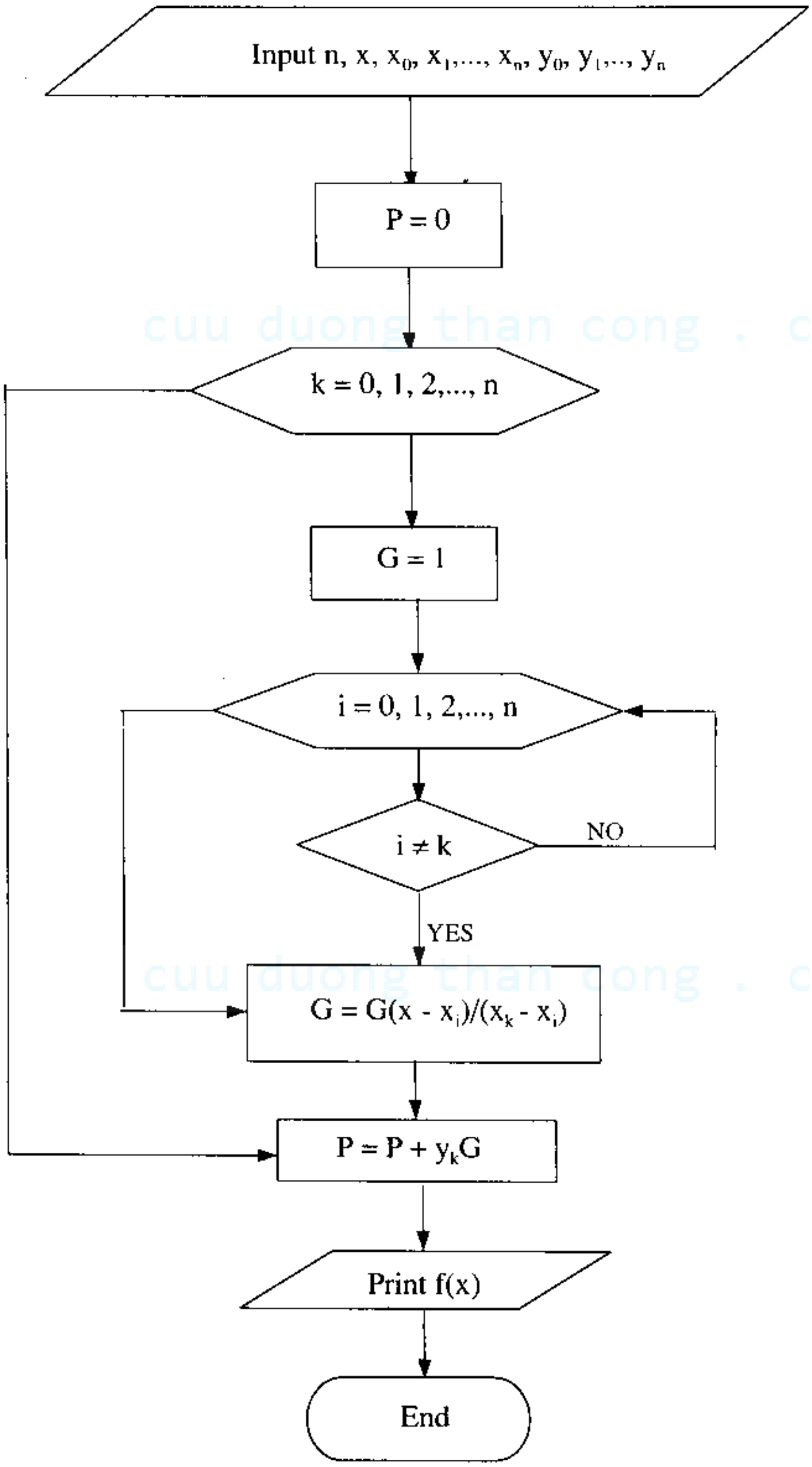
$$P_4(5) = 5^4 - 2.5^3 + 6.5^2 - 8{,}5.5 + 20{,}5 = 503$$

Đa thức nội suy Lagrăng có ưu điểm là đơn giản, nhưng nếu thêm nút nội suy thì phải tính lại toàn bộ, nhược điểm này được khắc phục trong công thức nội suy Niutơn.

Trong giáo trình này, để giúp học viên lập được các chương trình tính toán, chúng tôi sẽ đưa ra các sơ đồ khối mô tả các thuật toán. Sau đây là một số các kí hiệu thường gặp trong các sơ đồ khối:



Sơ đồ khối tính giá trị hàm f(x) theo đa thức nội suy Lagrăng



2.3. ĐA THỨC NỘI SUY VỚI NÚT CÁCH ĐỀU

2.3.1. Sai phân hữu hạn

Giả sử hàm $y = f(x)$ có giá trị $y_i = f(x_i)$ tại các nút x_i cách đều nhau với:

$$x_{i+1} - x_i = h = \text{const};\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ta định nghĩa sai phân hữu hạn của hàm $y = f(x)$ như sau:

- Sai phân cấp 1: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$;
- Sai phân cấp 2: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i =$

$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i;$$

- Sai phân cấp 3: $\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i =$

$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i; \qquad (2\text{-}5)$$

....

- Sai phân cấp n: $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1}(\Delta y_i) =$

$$= \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

Sai phân hữu hạn của hàm số có các tính chất tương tự như các tính chất của vi phân. Giả sử cho hai hàm f(x), g(x) và hằng số c, ta có:

$$\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g;$$

$$\Delta(cf) = c\Delta f; \qquad (2\text{-}6)$$

$$\Delta^n(x^n) = n!h^n \text{ và } \Delta^m(x^n) = 0 \text{ khi } m > n.$$

Cho đa thức bậc n: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, khi đó:

$$\Delta^n(y) = a_0 n! h^n.$$

2.3.2. Bảng sai phân hữu hạn

Về sau, để xây dựng đa thức nội suy ta phải lập bảng sai phân có dạng:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_o	$\Delta^2 y_o$	$\Delta^3 y_o$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^3 y_3$
...	...	...	...	...

Các sai phân Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$,... được tính theo công thức(2-5).

2.3.3. Đa thức nội suy Niutơn (Newton) tiến

Trong trường hợp các nút cách đều $x_i = x_0 + ih$; $i = 0, 1, ..., n$, Niutơn đã xây dựng đa thức nội suy bậc n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

Các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$ được xác định sao cho $P_n(x_i) = y_i$.

Cho $x = x_0$ ta được $a_0 = P_n(x_0) = y_0$

Cho $x = x_1$ ta được $a_1 = \dfrac{P_n(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \dfrac{\Delta y_0}{h}$

Tương tự, cho $x = x_i$ ta được $a_i = \dfrac{\Delta^i y_0}{i!h^i}$ (2-7)

Khi đó đa thức nội suy có dạng:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)...(x - x_{n-1}) \quad (2\text{-}8)$$

Nếu đổi biến $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, suy ra $x = x_0 + th$, ta có:

$$x - x_i = x - x_0 - ih = (t - i)h$$

thay vào (2-8) được:

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (2\text{-}9)$$

Công thức (2-8), (2-9) được gọi là đa thức nội suy Niutơn tiến xuất phát từ x_0 với nút cách đều.

Đa thức nội suy Niutơn tiến thường được dùng để tính giá trị hàm tại x gần x_0 đầu bảng sai phân.

Trường hợp cần tính giá trị hàm tại x gần x_n cuối bảng sai phân, ta dùng đa thức nội suy Niutơn lùi được trình bày dưới đây.

2.3.4. Đa thức nội suy Niutơn lùi

Đa thức nội suy được tìm dưới dạng:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + a_n(x - x_n)...(x - x_1)$$

Các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$ được xác định sao cho $P_n(x_i) = y_i$.

Cho $x = x_n$ ta được $a_0 = P_n(x_n) = y_n$

Cho $x = x_{n-1}$ ta được $y_{n-1} = a_0 + a_1(-h)$, suy ra $a_1 = \dfrac{\Delta y_{n-1}}{h}$

Tương tự, đặt $x = x_i$ ta được:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}\,;\ i = 1, 2,..., n. \tag{2-10}$$

Thay giá trị của a_i vào đa thức trên được:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1) \tag{2-11}$$

Đặt biến mới $t = \dfrac{x - x_n}{h}$, ta có $x = x_n + th$; $x - x_i = x - x_n + x_n - x_i = th + (n - i)h = (t + n - i)h$; thay vào (2-11) được:

$$P_n(x) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{t(t+1)...(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{2-12}$$

Đa thức nội suy (2-11), (2-12) được gọi là đa thức nội suy Niutơn lùi xuất phát từ x_n với nút cách đều.

Chú ý:

a. Đa thức nội suy Niutơn tiến (lùi) chỉ là cách viết khác của đa thức nội suy Lagrăng. Vì vậy, để đánh giá sai số nội suy của các đa thức này ta vẫn dùng các công thức (2-3) và (2-4).

- Đối với đa thức nội suy Niutơn tiến (2-9):

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}t(t-1)...(t-n); \tag{2-13}$$

$$|r_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}h^{n+1}|t(t-1)...(t-n)| \tag{2-14}$$

- Đối với đa thức nội suy Niutơn lùi (2-12):

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}t(t+1)...(t+n); \tag{2-15}$$

$$|r_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!} h^{n+1} |t(t+1)...(t+n)| \qquad (2\text{-}16)$$

b. Dùng đa thức nội suy Niutơn tiến (lùi) không phải tính lại từ đầu, nếu thêm nút nội suy mới. Đây cũng là ưu điểm của đa thức nội suy Niutơn so với đa thức nội suy Lagrăng.

Ví dụ 1: Cho bảng giá trị của hàm y = lgx. Hãy xây dựng đa thức nội suy với bước nội suy h = 10. Sau đó tìm giá trị của lg1001.

Bảng giá trị hàm y = lgx

x	1000	1010	1020	1030	1040	1050
y	3,0000000	3,0043214	3,0086002	3,0128372	3,0170333	3,0211893

Giải: Lập bảng sai phân của hàm y = lgx

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	43214	- 426	8
1010	3,0043214	42788	- 418	9
1020	3,0086002	42370	- 409	8
1030	3,0128372	41961	- 401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

Trong bảng sai phân từ cột thứ 3 trở đi, để đơn giản ta không đánh dấu phẩy mà chỉ ghi phần thập phân đến số lẻ thứ bảy sau dấu phẩy.

Vì phải tính lg1001 mà 1000 < 1001 < 1010, nên ta dùng đa thức nội suy Niutơn tiến với $x_0 = 1000$, h = 10. Mặt khác, các sai phân cấp 3 thay đổi không đáng kể nên ta xem chúng là hằng số, khi đó đa thức nội suy có dạng:

$$P_3(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0;$$

$$P_3(x) = 3{,}0000000 + 0{,}0043214t - 0{,}0000426\ \frac{t(t-1)}{2} + 0{,}0000008\ \frac{t(t-1)(t-2)}{6}$$

Ứng với x = 1001 có $t = \dfrac{x - x_0}{h} = 0{,}1$.

Thay t = 0,1 vào vế phải đa thức trên được:

$$\lg(1001) \approx P_3(1001) = 3{,}0004341$$

Sai số tính theo công thức (2-13). Ở đây n = 3 và f(x) = lgx.

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4}\lg e$$

do đó

$$|f^{(4)}(c)| < \frac{3!}{1000^4}\lg e$$

Với h = 10, t = 0,1, theo (2-13) sai số nội suy là:

$$|r_3(1001)| < \frac{3!}{1000^4}\lg e \times \frac{10^4}{4!}0{,}1.0{,}9.1{,}9.2{,}9 \approx 0{,}5.10^{-9}$$

Như vậy giá trị nhận được của lg(1001) chính xác đến số lẻ thứ 7 sau dấu phẩy. Nó hoàn toàn đúng như trong bảng lôgarit với 7 số lẻ thập phân.

Ví dụ 2: Dùng bảng giá trị của hàm y = sinx tìm sin54° và sin56°. Đánh giá sai số kết quả nhận được.

Bảng giá trị hàm y = sinx

x	30°	35°	40°	45°	50°	55°
y	0,5000	0,5736	0,6428	0,7071	0,7660	0,8192

Giải: Vì 54° < 55° < 56° nên để tính sin54° và sin56°, ta dùng đa thức Niutơn lùi (2-12) với $x_n = 55^0$, $y_n = 0{,}8192$, $h = 5^0 = 0{,}0873$.

Bảng sai phân của hàm y = sinx

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
30°	0,5000	736	- 44	- 5
35°	0,5736	692	- 49	- 5
40°	0,6428	643	- 54	- 3
45°	0,7071	589	- 57	
50°	0,7660	532		
55°	0,8192			

Trong bảng sai phân ta thấy sai phân cấp 3 ít thay đổi, ta coi là hằng số. Khi đó đa thức nội suy (2-12) có 4 số hạng:

$$P_3(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{6}\Delta^3 y_{n-3}$$

a. Tính sin54°

Thay $t = \dfrac{54^\circ - 55^\circ}{5^\circ} = -0{,}2$ vào vế phải được:

$$\sin 54^\circ \approx P_3(54^0) = 0{,}8192 + (-0{,}2).0{,}0532 -$$

$$-\frac{(-0{,}2)0{,}8}{2}\cdot 0{,}0057 - \frac{(-0{,}2).0{,}8.1{,}8}{6}\cdot 0{,}0003 = 0{,}80903$$

Sai số: $$r_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}h^4 t(t+1)(t+2)(t+3)$$

Với $t = -0{,}2$; $h = 5^\circ = 0{,}0873$; $f^{(4)}(c) = \sin c \le 1$, ta có:

$$|r_3(54^\circ)| \le \frac{(0{,}0873)^4}{4!}\cdot 0{,}2.0{,}8.1{,}8.2{,}8 \approx 0{,}2.10^{-5}$$

Như vậy giá trị nhận được của sin54° chính xác đến số lẻ thứ 4 sau dấu phẩy, nên ta lấy sin54° = 0,8090. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với bảng hàm sinx.

b. Tính sin56°

Thay $t = \dfrac{56^\circ - 55^\circ}{5^\circ} = 0{,}2$ vào vế phải của đa thức được:

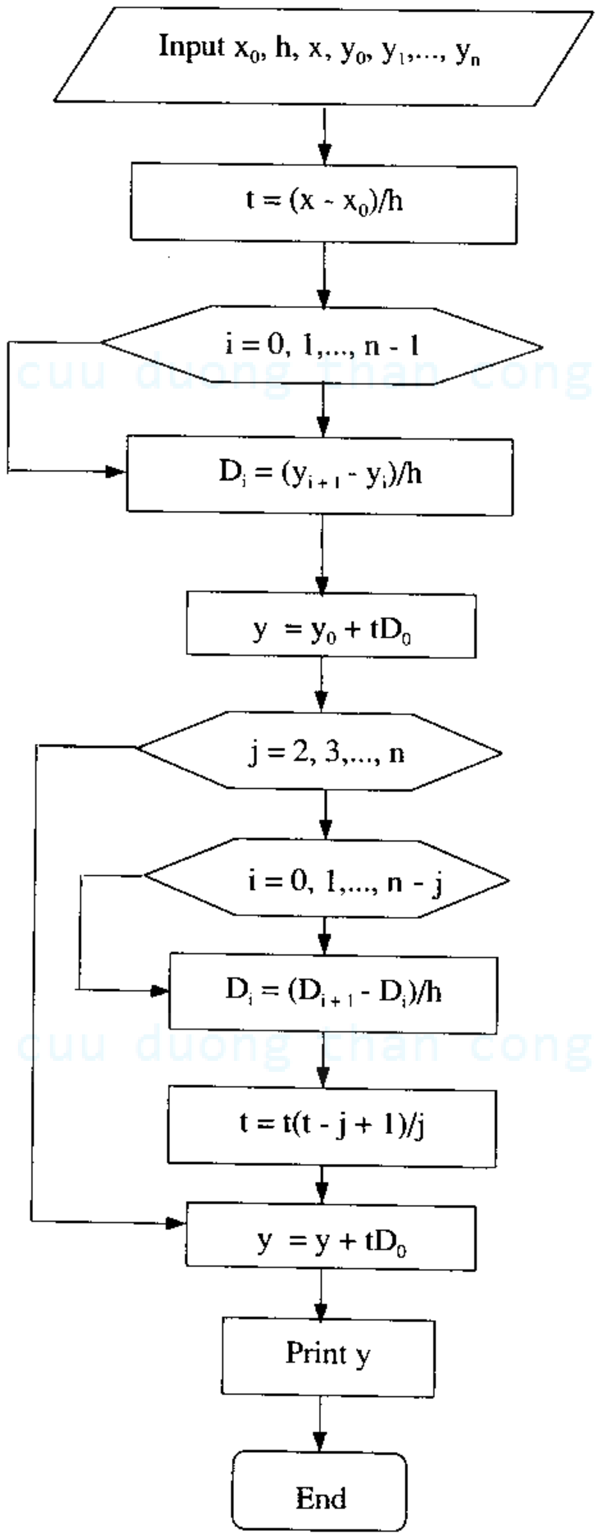
$$P_3(x) = 0{,}8192 + 0{,}2.0{,}0532 - \frac{0{,}2.1{,}2}{2}\cdot 0{,}0057 - \frac{0{,}2.1{,}2.2{,}2}{6}\cdot 0{,}0003 = 0{,}82913$$

Với $t = 0{,}2$; $h = 0{,}0873$; $f^{(4)}(c) = \sin c \le 1$, sai số là:

$$|r_3(56^\circ)| \le \frac{(0{,}087)^4}{4!}\cdot 0{,}2.1{,}2.2{,}2.3{,}2 \approx 0{,}4.10^{-5}$$

Vì vậy ta lấy sin56° = 0,8291.

Sơ đồ khối tính giá trị hàm theo đa thức nội suy Niutơn tiến



2.3.5. Đa thức nội suy trung tâm

a) Bảng sai phân trung tâm

Trong các đa thức nội suy Niutơn tiến, lùi ta chỉ sử dụng giá trị của hàm về một phía của giá trị đầu hoặc cuối mà ta chọn. Để có thể sử dụng giá trị của hàm cả về hai phía của giá trị đầu đã chọn, người ta đã xây dựng các đa thức nội suy trung tâm, trong đó giá trị đầu x_0 ở giữa bảng còn:

$$x_i = x_0 + ih;\ \ y_i = f(x_i);\ i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i;\ \ \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; ...$$

Bảng sai phân này gọi là bảng sai phân trung tâm, các sai phân các cấp đi theo chiều mũi tên gọi là các sai phân trung tâm. Các đa thức nội suy trung tâm dùng để nội suy giá trị của hàm số ở gần giữa bảng.

Bảng sai phân trung tâm

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-5}	y_{-5}						
		Δy_{-5}					
x_{-4}	y_{-4}		$\Delta^2 y_{-5}$				
		Δy_{-4}		$\Delta^3 y_{-5}$			
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$		$\Delta^4 y_{-5}$		
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$		$\Delta^5 y_{-5}$	
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		...
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$		
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$			
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$				
		Δy_4					
x_5	y_5						

b) Đa thức nội suy Gaoxơ I

Đa thức nội suy có dạng "2 tiến 1 lùi":

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$
$$+ a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})...(x - x_{-1})(x - x_0)...(x - x_{n-1}) +$$
$$+ a_{2n}(x - x_{-(n-1)})...(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Cho $x = x_0$ suy ra $a_0 = P(x_0) = y_0$;

Cho $x = x_1$ suy ra $a_1 = \dfrac{\Delta y_0}{1!h}$;

Cho $x = x_{-1}$ suy ra $a_2 = \dfrac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2}$;

Tổng quát:

$$a_{2i-1} = \frac{\Delta^{2i-1} y_{-(i-1)}}{(2i-1)!h^{2i-1}}\,;\ a_{2i} = \frac{\Delta^{2i} y_{-i}}{(2i)!h^{2i}}\,;\ \text{với } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Đổi biến $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ ta có:

$$P(x) = P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} +$$

$$+ \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$

$$+ \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \cdots +$$

$$+ \frac{(t+n-1)\ldots(t+1)t(t-1)\ldots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} +$$

$$+ \frac{(t+n-1)\ldots(t+1)t(t-1)\ldots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (2\text{-}17)$$

Đa thức này chứa các sai phân tạo bởi đường gấp khúc phía dưới theo mũi tên trong bảng sai phân trung tâm.

c) Đa thức nội suy Gaoxơ II

Đa thức nội suy có dạng "1 tiến 1 lùi":

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_{-1})(x - x_0) + a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$

$$+ a_4(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})\ldots(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) +$$

$$+ a_{2n}(x - x_{-n})\ldots(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Cho $x = x_i$; $i = 0, 1, \ldots, n$ ta được:

$$a_0 = y_0;\ a_1 = \frac{\Delta y_{-1}}{1!h}\,;\ a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2}\,;\ a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!h^3}\,;\ \ldots$$

Tổng quát: $a_{2i-1} = \dfrac{\Delta^{2i-1} y_{-i}}{(2i-1)!h^{2i-1}}$; $a_{2i} = \dfrac{\Delta^{2i} y_{-i}}{(2i)!h^{2i}}$

Nếu đổi biến $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, thay vào vế phải đa thức được:

$$P(x) = P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \\ + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \\ + \frac{(t+n-1)\ldots(t+1)t(t-1)\ldots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\ + \frac{(t+n)(t+n-1)\ldots(t+1)t(t-1)\ldots(t-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (2\text{-}18)$$

d) Đa thức nội suy Xteclinh

Lấy trung bình cộng hai đa thức nội suy Gaoxơ I, II tương ứng với (2-17), (2-18) ta được đa thức nội suy Xteclinh:

$$P(x) = P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\cdot\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \\ + \frac{t^2(t^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \\ + \frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \cdots + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} \times \\ \times \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} + \frac{t^2(t^2-1^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (2\text{-}19)$$

cuu duong than cong . com

e) Đa thức nội suy Betxen

Lấy 2n + 2 nút nội suy cách đều nhau $x_{-n}, x_{-(n-1)}, \ldots, x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$ và chọn giá trị xuất phát là x_0. Sử dụng các nút x_k ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n$) thì theo đa thức nội suy Gaoxơ II (2-18) ta được:

$$P(x) = P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_{-1} + \frac{(t+1)t}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \\ + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \frac{(t+n-1)\ldots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\ + \frac{(t+n)(t+n-1)\ldots(t-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (2\text{-}20)$$

Nếu chọn giá trị xuất phát là x_1 và sử dụng các nút x_{k+1} ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$), đồng thời chú ý:

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 + x_0 - x_1}{h} = t - 1$$

Áp dụng công thức (2-18) một lần nữa được:

$$P(x) = y_1 + (t-1)\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$+\frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-1} + \cdots + \frac{(t+n-2)\ldots(t-n)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} +$$

$$+\frac{(t+n-1)\ldots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-(n-1)} \qquad (2\text{-}21)$$

Lấy trung bình cộng hai công thức (2-17), (2-21), sau khi biến đổi được đa thức nội suy Betxen:

$$P(x) = P(x_0 + th) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (t - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} +$$

$$+\frac{(t-1/2)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} +$$

$$+\frac{(t-1/2)t(t-1)(t+1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \cdots \qquad (2\text{-}22)$$

Trường hợp n =1 ta được đa thức nội suy Betxen cấp 2:

$$P(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (t - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}[\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2}] =$$

$$= \frac{y_0 + y_1 - (y_1 - y_0)}{2} + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{4}(\Delta y_0 - \Delta y_{-1} + \Delta y_1 - \Delta y_0) =$$

$$= y_0 + t\Delta y_0 - \frac{t(1-t)}{4}(\Delta y_1 - \Delta y_{-1}) \qquad (2\text{-}23)$$

Chú ý: Kinh nghiệm cho thấy:

- Khi $t \le 0{,}25$ nên dùng đa thức Xteclinh;
- Khi $t \in [0{,}25,\ 0{,}75]$ nên dùng đa thức Betxen;
- Khi $t \approx 0$ (hay $t \approx 1$) nên dùng đa thức Niutơn tiến (hay lùi).

2.4. ĐA THỨC NỘI SUY NIUTƠN VỚI NÚT KHÔNG CÁCH ĐỀU

2.4.1. Tỷ sai phân

Giả sử đã biết giá trị của hàm $y = f(x)$ tại các nút nội suy $y_i = f(x_i)$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Ta định nghĩa:

- Tỷ sai phân cấp 1 của y tại x_i, x_j là :

$$y[x_i, x_j] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

- Tỷ sai phân cấp 2 của y tại x_i, x_j, x_k là:

$$y[x_i, x_j, x_k] = \frac{y[x_i, x_j] - y[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

....

Nếu $y = P_n(x)$ là đa thức bậc n thì:

- Tỷ sai phân cấp 1 tại x, x_0:

$$P_n[x, x_0] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0}$$

là một đa thức bậc n - 1; tỷ sai phân cấp 2 tại x, x_0, x_1:

$$P_n[x, x_0, x_1] = \frac{P_n[x, x_0] - P_n[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

là một đa thức bậc n - 2.

Tiếp tục quá trình này ta được tỷ sai phân cấp n + 1:

$$P_n[x, x_0, \ldots, x_n] = 0$$

2.4.2. Đa thức nội suy Niutơn

Từ các định nghĩa trên ta có:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0)P_n[x, x_0];$$

$$P_n[x, x_0] = P_n[x_0, x_1] + (x - x_1)P_n[x, x_0, x_1];$$

$$P_n[x, x_0, x_1] = P_n[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2)P_n[x, x_0, x_1, x_2];$$

....

$$P_n[x, x_0, \ldots, x_{n-1}] = P_n[x_0, x_1, \ldots, x_n] + (x - x_n)P_n[x, x_0, \ldots, x_n]$$

Vì $P_n[x, x_0, ..., x_n] = 0$ nên sau khi thay thế được:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0)P_n[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)P_n[x_0, x_1, x_2] + \cdots +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})P_n[x_0, ..., x_n]$$

Nếu $P_n(x)$ là đa thức nội suy của hàm $y = f(x)$ thì:

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i;\ i = 0, 1, ..., n.$$

Do đó, các tỷ sai phân từ cấp 1 đến cấp n của $P_n(x)$ và $y(x)$ tại các nút nội suy là bằng nhau. Thay các tỷ sai phân của $P_n(x)$ bằng các tỷ sai phân của y ta được:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0)y[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)y[x_0, x_1, x_2] +$$

$$+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})y[x_0, ..., x_n] \qquad (2\text{-}23)$$

Đa thức này được gọi là đa thức Niutơn tiến xuất phát từ nút x_0 của hàm $y = f(x)$.

Tương tự ta có đa thức Niutơn lùi xuất phát từ nút x_n của hàm $y = f(x)$:

$$P_n(x) = y_n + (x - x_n)y[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1})y[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \cdots +$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1)y[x_n, ..., x_0] \qquad (2\text{-}24)$$

Chú ý: Nếu các nút nội suy cách đều $x_i = x_0 + ih$ thì từ công thức (2-23) có thể suy ra công thức (2-8), từ công thức (2-24) có thể suy ra công thức (2-11). Đó là các đa thức nội suy Niutơn tiến và lùi trong trường hợp các nút nội suy cách đều.

Bài tập

1- Cho bảng giá trị hàm:

x	1,50	1,54	1,56	1,60	1,63	1,70
y	3,873	3,924	3,950	4,000	4,037	4,123

Sử dụng công thức nội suy Lagrăng tìm giá trị hàm tại các điểm:

a) 1,52; b) 1,55; c) 1,58; d) 1,61

2- Cho bảng giá trị hàm:

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y	0,5652	0,6375	0,7147	0,7973	0,8861	0,9817	1,0848	1,1964	1,3172	1,4482	1,5906

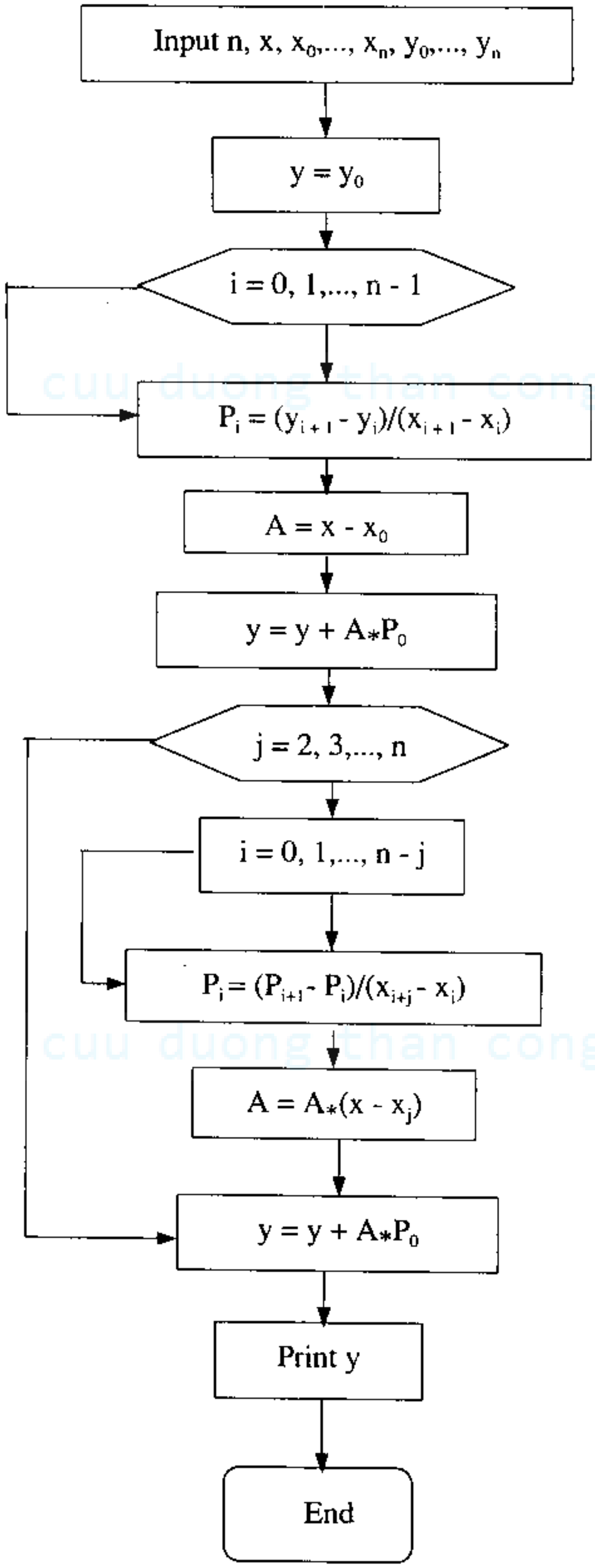
Sử dụng công thức nội suy Niutơn tiến hoặc lùi xác định giá trị hàm tại các điểm :

a) 1,0113; b) 1,0428; c) 1.9592; d) 1,9728

Đáp số

1. a) 3,899; b) 3,937; c) 3,975; d) 4,012
2. a) 0,5732; b) 0,5965; c) 1,5313; d) 1,5510

Sơ đồ khối tính giá trị hàm theo đa thức nội suy Niutơn tiến với nút không cách đều



Chương III

XẤP XỈ HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

3.1. MỞ ĐẦU

Phương pháp xấp xỉ hàm bằng đa thức nội suy được trình bày ở trên có một số nhược điểm:

- Nếu nhiều nút nội suy thì bậc của đa thức nội suy rất lớn, điều này gây nhiều khó khăn trong tính toán.

- Các giá trị y_i; $i = 0, 1, ..., n$; thu được bằng tính toán hay đo đạc thực nghiệm, nên nói chung không chính xác. Việc đòi hỏi $y_i = f(x_i)$ khi xây dựng đa thức nội suy chưa thật hợp lý, do đó sẽ dẫn đến sai số lớn khi dùng phép nội suy.

- Nếu hàm f(x) là các hàm tuần hoàn thì xấp xỉ nó bằng các đa thức nguyên là không thật phù hợp. Trường hợp này, nên tính xấp xỉ hàm bằng các đa thức lượng giác.

Phương pháp bình phương bé nhất khắc phục được những nhược điểm trên. Nội dung của phương pháp là chọn hàm xấp xỉ P(x) thuộc một lớp hàm nào đó đơn giản hơn f(x). Hàm P(x) sẽ phụ thuộc vào một số tham số. Các tham số đó sẽ được xác định sao cho sai số bình phương:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - P(x_i) \right]^2 \tag{3-1}$$

là bé nhất. Ở đây $f(x_i)$ là các giá trị đã biết.

3.2. LẬP CÔNG THỨC THỰC NGHIỆM BẰNG PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

Giả sử hai đại lượng y, x có quan hệ hàm số với nhau. Bằng đo đạc hay thực nghiệm ta thu được giá trị của chúng cho trong bảng sau:

x	x_1	$x_2 \dots x_n$
y	y_1	$y_2 \dots y_n$

Yêu cầu tìm biểu thức của hàm y = f(x).

Căn cứ vào bảng giá trị trên, ta giả thiết hàm số cần tìm thuộc một lớp hàm nào đó, sau đó dùng phương pháp bình phương bé nhất để xác định các tham số của hàm.

3.2.1. Hàm xấp xỉ phụ thuộc các tham số một cách tuyến tính

a) Trường hợp y = ax + b

Giả sử $y = ax + b$, khi đó thay $f(x_i) = y_i$ và $P(x_i) = ax_i + b$ vào (3-1) ta được:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

Trong đó: x_i, y_i ($i = 1, 2,..., n$) đã biết; còn S phụ thuộc a, b.

Để S bé nhất thì a, b phải thoả mãn hệ phương trình:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

hay

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases} \qquad (3\text{-}2)$$

Từ bảng trên ta tính $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i^2$, $\sum x_i y_i$ thay vào hệ phương trình trên sẽ tìm được a, b.

b) Trường hợp y = ax² + bx + c

Khi đó:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

Để S bé nhất thì a, b, c phải thoả mãn hệ phương trình:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0$$

hay

$$\begin{cases} a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum y_i x_i^2 \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum y_i x_i \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum y_i \end{cases} \qquad (3\text{-}3)$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b, c. Nếu P(x) là đa thức bậc cao hơn ta cũng làm tương tự.

c) Trường hợp y = a + bcosx + csinx

Khi đó $S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - b\cos x_i - c\sin x_i)^2$

Các tham số a, b, c được xác định từ hệ 3 phương trình:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0$$

hay

$$\begin{cases} an + b\sum \cos x_i + c\sum \sin x_i = \sum y_i \\ a\sum \cos x_i + b\sum \cos^2 x_i + c\sum \sin x_i \cos x_i = \sum y_i \cos x_i \\ a\sum \sin x_i + b\sum \cos x_i \sin x_i + c\sum \sin^2 x_i = \sum y_i \sin x_i \end{cases}$$

Ví dụ 1: Cho giá trị của hai đại lượng x, y trong bảng sau:

i	1	2	3	4	5
x_i	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
y_i	- 0,80	- 0,97	- 0,98	1,07	3,66

Tìm hàm xấp xỉ dưới dạng bậc 2: $y = ax^2 + bx + c$

Giải:

Các tham số a, b, c được xác định từ hệ phương trình (3-3). Đầu tiên ta lập bảng tính các hệ số của hệ phương trình:

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$y_i x_i^2$
1	0,56	0,314	0,176	0,098	- 0,80	- 0,448	- 0,251
2	0,84	0,706	0,593	0,498	- 0,97	- 0,815	- 0,681
3	1,14	1,300	1,482	1,690	- 0,98	-1,117	-1,274
4	2,44	5,954	14,528	35,450	1,07	2,611	6,371
5	3,16	9,986	31,556	99,720	3,66	11,566	36,549
Σ	8,14	18,260	48,335	137,456	1,98	11,797	40,710

Thay các giá trị đã tính vào hệ phương trình (3-3) được:

cuu duong than cong . com

$$\begin{cases} 137{,}456a + 48{,}335b + 18{,}260c = 40{,}710 \\ 48{,}355a + 18{,}260b + 8{,}14c = 11{,}797 \\ 18{,}260a + 8{,}14b + 5c = 1{,}98 \end{cases}$$

Giải ra ta được a = 1; b = - 2; c = 0.

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^2 - 2x$.

Để đánh giá sai số của hàm xấp xỉ ta lập bảng sau:

x_i	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
$y_i - (x_i^2 - 2x_i)$	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01

Căn cứ vào bảng ta thấy hàm xấp xỉ khá phù hợp, vì giá trị của hàm tại các điểm x_i sai khác rất ít so với giá trị y_i đã cho.

3.3.2. Hàm xấp xỉ phụ thuộc vào các tham số một cách phi tuyến

a) Trường hợp $y = ae^{bx}$, $(a > 0)$

Lấy lôgarít thập phân hai vế ta được: $\lg y = \lg a + bx\lg e$

Đặt $Y = \lg y$, $A = b\lg c$, $B = \lg a$, $X = x$, ta được:

$$Y = AX + B$$

Đây là trường hợp $y = ax + b$ đã xét ở trên.

b) Trường hợp $y = ax^b$, $(a < 0)$

Lấy lôgarít thập phân hai vế ta được: $\lg y = \lg a + b\lg x$

Đặt $Y = \lg y$, $A = b$, $B = \lg a$, $X = \lg x$, ta được:

$$Y = AX + B$$

Đây cũng là quan hệ tuyến tính $y = ax + b$ như trên.

Sau đó ta tiến hành tìm A, B như mục 1, từ đó suy ra a, b.

Bài tập

Cho bảng giá trị hàm:

x	19	22	25	28	32	35
y	0,66	0,367	0,223	0,14	0,084	0,06

Tìm hàm xấp xỉ bằng phương pháp bình phương bé nhất sau đó đánh giá sai số của hàm xấp xỉ nếu:

1. Quan hệ giữa y và x là tuyến tính:

$$y = ax + b;$$

2. Quan hệ giữa y và x là tam thức bậc hai:

$$y = ax^2 + bx + c;$$

3. Quan hệ giữa y và x là hàm mũ:

$$y = ae^{bx}$$

Đáp số

1. $y = 1,176 - 0,034x$;

2. $y = 0,0032x^2 - 0,2076x + 3,4228$;

3. $y = 9,97e^{-0,1488x}$

Chương IV

TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

4.1. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

Giả sử biết giá trị của hàm $y = f(x)$ tại một số điểm trên $[a, b]$, $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ là $y_i = f(x_i)$. Yêu cầu tính đạo hàm $f'(x)$ tại một điểm trung gian nào đó.

Để tính đạo hàm, ta xây dựng đa thức nội suy $P(x)$ và coi đạo hàm của $P(x)$ là đạo hàm của $f(x)$. Đôi khi đã biết biểu thức giải tích của hàm, nhưng vì nó quá phức tạp nên việc tính đạo hàm gặp nhiều khó khăn, ta cũng xây dựng đa thức nội suy của hàm và tính đạo hàm của nó theo cách trên.

4.1.1. Áp dụng đa thức nội suy Lagrăng

Theo (2-1) đa thức nội suy Lagrăng có dạng:

$$P_n(x) = \sum_{i=o}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Trong trường hợp các nút nội suy cách đều $x_i = x_0 + ih$; $i = 0, 1, \ldots, n$.

Đặt $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ suy ra $x = x_0 + th$, còn: $x - x_i = (t - i)h$;

$$x_i - x_k = (i - k)h$$

Đa thức nội suy có dạng:

$$P_n(x) = \sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-i)} \tag{4-1}$$

Ta xét một số trường hợp:

a) Khi n = 2 (3 nút nội suy)

$$P_2(x) = \frac{1}{2} y_0 (t-1)(t-2) - y_1 t(t-2) + \frac{1}{2} y_2 t(t-1)$$

Vì $$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dP}{dt}$$

nên đạo hàm của hàm y = f(x) được tính gần đúng theo công thức:

$$y'(x) \approx P_2'(x) = \frac{1}{h}[\frac{1}{2}y_0(2t-3) - y_1(2t-2) + \frac{1}{2}y_2(2t-1)] \tag{4-2}$$

Đặc biệt, nếu đạo hàm tại các mốc nội suy:

- Tại $x = x_0$; $\quad t = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0$

nên $\quad y'(x_0) = y_0' \approx \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$;

- Tại $x = x_1$; $\quad t = \frac{x_1 - x_0}{h} = 1$

nên $$y'(x_1) = y_1' \approx \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2); \tag{4-3}$$

- Tại $x = x_2$; $\quad t = \frac{x_2 - x_0}{h} = 2$

nên $\quad y'(x_2) = y_2' \approx \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2)$

Bằng phương pháp khai triển Taylor, ta nhận được sai số trong các công thức (4-2), (4-3) có cấp $0(h^2)$.

b) Khi n = 3 (4 nút nội suy)

Từ công thức (4-1), làm tương tự như trên ta nhận được công thức tính đạo hàm tại các nút nội suy với sai số $0(h^3)$ như sau:

$$\begin{aligned}
y_0' &= \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3); \\
y_1' &= \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3); \\
y_2' &= \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3); \\
y_3' &= \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3)
\end{aligned} \tag{4-4}$$

Các công thức (4-3), (4-4) là các công thức tính đạo hàm qua giá trị của hàm tại các nút nội suy trong trường hợp các nút nội suy cách đều.

4.1.2. Áp dụng đa thức nội suy Niutơn

Để tính đạo hàm của hàm $y = f(x)$, ta xấp xỉ hàm bằng đa thức nội suy Niutơn tiến với nút cách đều (2-9):

$$P(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

Trong đó: $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, $h = x_{i+1} - x_i$; $i = 0, 1, \ldots, n$.

hay
$$P(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{(t^2 - t)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$+ \frac{t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t}{4!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

Vì
$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{dP}{dt}$$

nên đạo hàm của hàm $y = f(x)$ có thể tính gần đúng theo công thức:

$$y'(x) \approx P'(x) = \frac{1}{h}\Big[\Delta y_o + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{6}\Delta^3 y_0 +$$

$$+ \frac{2t^3 - 9t^2 + 11t - 3}{12}\Delta^4 y_o + \cdots\Big] \qquad (4\text{-}5)$$

Tương tự, vì
$$P''(x) = \frac{dP'}{dx} = \frac{d(P')}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{d(P')}{dt}$$

nên đạo hàm cấp 2 của y được tính gần đúng theo công thức:

$$y''(x) \approx P''(x) = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0 + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2 - 18t + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots] \qquad (4\text{-}6)$$

Tiếp tục có thể tính gần đúng đạo hàm của y ở cấp bất kỳ. Nếu cần tính đạo hàm của y tại điểm trùng với nút nội suy đã có trong bảng, công thức tính sẽ đơn giản hơn. Vì mỗi giá trị cho trong bảng đều có thể chọn làm giá trị xuất phát nên ta chọn $x = x_0$, do đó $t = \dfrac{x - x_0}{h} = 0$.

Theo (4-5), (4-6) ta có công thức tính gần đúng đạo hàm:

$$y'(x_0) \approx P'(x_0) = \frac{1}{h}[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots]; \qquad (4\text{-}7)$$

$$y''(x_0) \approx P''(x_0) = \frac{1}{h^2}\,[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots] \tag{4-8}$$

Chú ý:

- Trên đây ta đã lập công thức tính đạo hàm của hàm số nhờ đa thức nội suy Niutơn tiến. Công thức này áp dụng thuận lợi với những giá trị x ở gần x_0. Nếu cần tính đạo hàm tại điểm gần x_n, ta nên sử dụng đa thức nội suy Niutơn lùi. Còn nếu x ở gần giữa bảng thì dùng các đa thức nội suy trung tâm.

- Nếu biết được sai số của hàm là:

$$r(x) = f(x) - P_n(x)$$

thì sai số của đạo hàm là:

$$\varepsilon(x) = f'(x) - P'_n(x) = r'(x)$$

Ví dụ: Cho giá trị của hàm y = sh2x tại một số nút với bước nội suy h = 0,05. Tìm đạo hàm cấp một, cấp hai của hàm tại x = 0,0.

Bảng sai phân hàm y = sh2x

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,00	0,00000	10017	100	101	3
0,05	0,10017	10117	201	104	3
0,10	0,20134	10318	305	107	
0,15	0,30452	10623	412		
0,20	0,41075	11035			
0,25	0,52110				

Chọn $x_0 =$ 0,00, theo công thức (4-7) và (4-8) ta có:

$$y'(0{,}00) \approx \frac{1}{h}[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0] =$$

$$= 20[0{,}10017 - \frac{1}{2}0{,}00100 + \frac{1}{3}0{,}00101 - \frac{1}{4}0{,}00003\,] =$$

$$= 20[0{,}10017 - 0{,}00050 + 0{,}00034 - 0{,}00001] = 2{,}00000;$$

$$y''(0{,}00) \approx \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0] =$$

$$= 400[0{,}00100 - 0{,}00101 + 0{,}00003] = 0{,}008$$

4.2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$.

Nếu hàm f(x) liên tục trên [a, b] và có nguyên hàm là F(x) thì theo công thức Niutơn - Lépnit: I = F(b) - F(a).

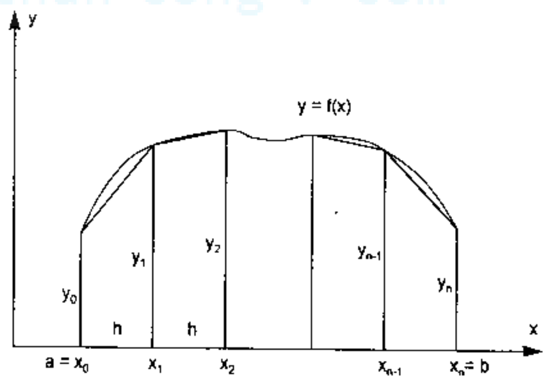
Trong thực tế, việc tìm nguyên hàm nhiều khi khó khăn, vả lại hàm f(x) thường được cho dưới dạng bảng, nên không thể dùng công thức trên được mà phải tính gần đúng tích phân.

Dưới đây trình bày hai phương pháp tính tích phân bằng số, nghĩa là tính tích phân xác định theo các giá trị bằng số của hàm dưới dấu tích phân.

4.2.1. Công thức hình thang

Giả sử biết giá trị của hàm dưới dấu tích phân tại các nút cách đều nhau $x_i = x_0 + ih$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $i = 0, 1, \ldots, n$ là $y_i = f(x_i)$.

Ta đã biết giá trị của tích phân xác định là diện tích của hình thang cong, nên nếu thay đường cong y = f(x) bằng đường gãy khúc thì giá trị gần đúng của tích phân là tổng diện tích các hình thang:



Hình 4.1

$$S = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h$$

$$= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Vì $h = \dfrac{b-a}{n}$ nên công thức tính gần đúng tích phân là:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \qquad (4\text{-}9)$$

Công thức (4-9) gọi là công thức hình thang.

Người ta chứng minh được sai số của công thức này là:

$$|R| \le \frac{M}{12}h^2(b-a) \qquad (4\text{-}10)$$

Trong đó: $M = \max|f''(x)|$; $a \le x \le b$.

4.2.2. Công thức Simsơn

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$, ta chia đoạn [a, b] thành 2n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia x_i: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$;

$$x_i = a + ih \;;\; i = 0, 1, \ldots, 2n \;;\; h = \frac{b-a}{2n}$$

Giả sử đã biết $y_i = f(x_i)$, khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

Để tính các tích phân ở vế phải, ta thay f(x) bằng đa thức nội suy Niutơn tiến bậc 2, từ (2-9):

$$P_2(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\,\Delta^2 y_0$$

Đổi biến $x = x_0 + ht$, ta có $dx = hdt$, khi đó:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = h\int_0^2 \left[y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 \right] dt =$$

$$= h[y_0 t + \frac{t^2}{2}\,\Delta y_0 + \frac{1}{2}\,(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2})\,\Delta^2 y_0 \Big|_{t=0}^{t=2} =$$

$$= h[2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{2}(\frac{8}{3} - 2)\Delta^2 y_0] =$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

Tương tự $\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}]$

Sau khi cộng tất cả các tích phân ta được:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots +$$

$$+ (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})]$$

Thay $h = \frac{b-a}{2n}$ vào biểu thức trên ta được:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})] \qquad (4\text{-}11)$$

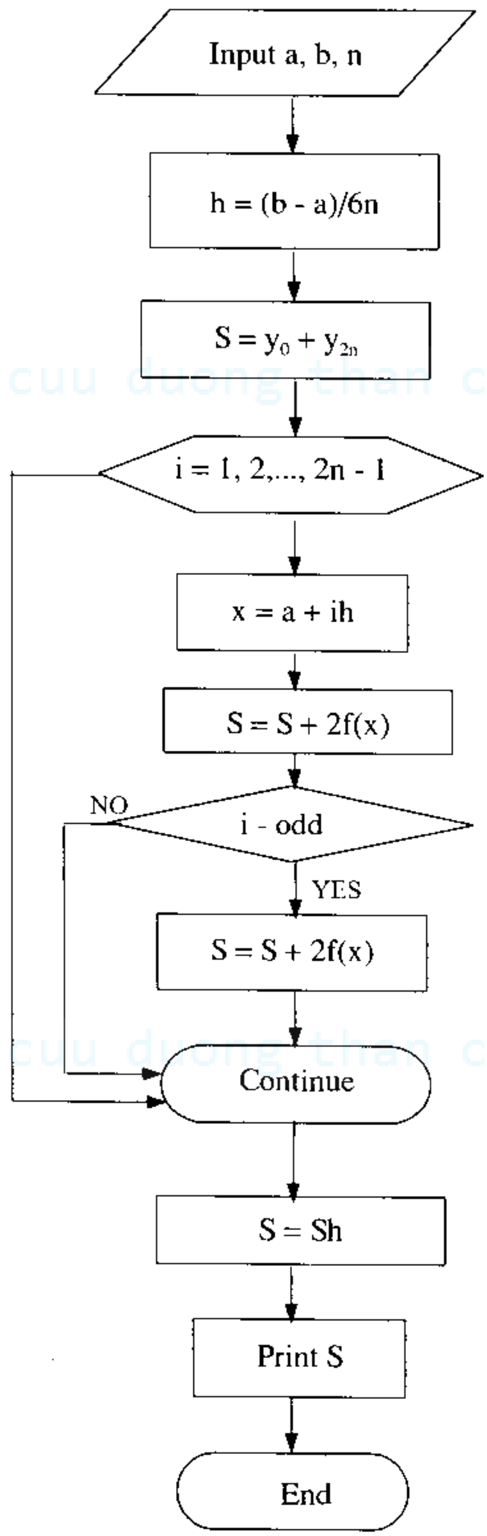
Công thức trên gọi là công thức Simsơn.

Người ta chứng minh sai số của công thức Simsơn là:

$$|R| \le M\frac{h^4}{180}(b-a) \qquad (4\text{-}12)$$

Trong đó: $M = \max|f^4(x)|$; $a \le x \le b$.

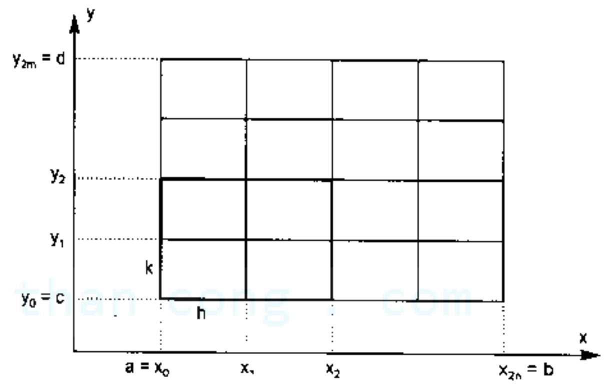
Sơ đồ khối tính tích phân theo công thức Simsơn



4.2.3. Tính tích phân bội

Giả sử cần tính tích phân hai lớp trên miền chữ nhật S: $a \le x \le b$; $c \le y \le d$.

$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$



Hình 4.2

Chia hình chữ nhật S thành các hình chữ nhật con bằng các đường thẳng song song với các trục Ox, Oy với khoảng cách tương ứng:

$$h = \frac{b-a}{2n}\,;\; k = \frac{d-c}{2m}$$

Ký hiệu hàm dưới dấu tích phân là $z = f(x, y)$. Khi đó tại nút (x_i, y_j) hàm $f(x, y)$ có giá trị $z_{ij} = f(x_i, y_j)$.

Đầu tiên ta tính tích phân trên hình chữ nhật con S_1: $x_0 \le x \le x_2$; $y_0 \le y \le y_2$; với $x_0 = a$; $y_0 = c$;

$$I_1 = \iint_{S_1} f(x,y)dxdy = \int_{y_0}^{y_2} dy \int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dx$$

hay $$I_1 = \int_{y_0}^{y_2} Q(y)dy;\ \text{với } Q(y) = \int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dx$$

Áp dụng công thức Simsơn cho tích phân thứ nhất ta được:

$$I_1 \approx \frac{k}{3}(Q_0 + 4Q_1 + Q_2)$$

Áp dụng một lần nữa cho tích phân thứ hai ta có:

$$Q_0 = \int_{x_0}^{x_2} f(x,y_0)dx \approx \frac{h}{3}(z_{00} + 4z_{10} + z_{20});$$

$$Q_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x,y_1)dx \approx \frac{h}{3}(z_{01} + 4z_{11} + z_{21});$$

$$Q_2 = \int_{x_0}^{x_2} f(x,y_1)dx \approx \frac{h}{3}(z_{02} + 4z_{12} + z_{22});$$

Cuối cùng ta có;

$$I_1 \approx \frac{hk}{9}[(z_{00} + z_{02} + z_{20} + z_{22}) + 4(z_{01} + z_{10} + z_{12} + z_{21}) + 16z_{11}]$$

Các tích phân trên các miền chữ nhật còn lại được tính tương tự. Vậy công thức tính gần đúng tích phân hai lớp là:

$$I = \sum_{i=1}^{m.n} I_i$$

Bài tập

1- Hàm y = lgx có giá trị tại x = 50; 55; 60; 65 lần lượt là 1,6990; 1,7404; 1,7782; 1,8219. Tính giá trị đạo hàm của y tại x = 50 và so sánh với kết quả tính trực tiếp.

2- Cho hàm y = f(x) dưới dạng bảng sau:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	12,3	11,1	7,2	4,1	6,3	8,8	9,2	10,8	13,1

Tính tích phân:

$$I = \int_0^8 f(x)dx$$

theo công thức hình thang và công thức Simsơn.

3- Trong kỹ thuật ta thường gặp tích phân xác suất:

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Hãy tính φ(1) theo công thức hình thang nếu chia khoảng tích phân thành 10 phần bằng nhau. Cho bảng giá trị hàm dưới dấu tích phân $y = e^{-\frac{t^2}{2}}$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	0,9950	0,9802	0,9560	0,9231	0,8822	0,8353	0,7827	0,7261	0,6670	0,6065

4- Sử dụng bảng 2 tính φ(0,8) theo công thức Simsơn. Chia đoạn lấy tích phân thành 8 phần bằng nhau.

Đáp số

1. y'(50) = 0,0087 trùng với giá trị khi tính trực tiếp.

2. Theo công thức hình thang I = 70,2; theo công thức Simsơn I = 70,0.

3. $\varphi(1) \approx 0,6827$

4. $\varphi(0,8) \approx 0,57625$

Chương V

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ VÀ SIÊU VIỆT

5.1. MỞ ĐẦU

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu một số phương pháp giải phương trình một ẩn số:

$$f(x) = 0 \qquad (5\text{-}1)$$

Trừ một vài trường hợp đặc biệt, phương trình (5-1) có công thức tìm nghiệm chính xác; còn nói chung ta phải giải gần đúng.

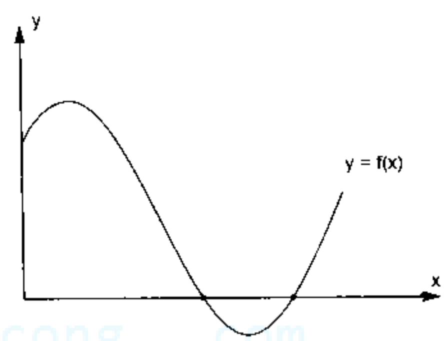
Quá trình giải phương trình (5-1) thường có hai bước:

- Bước 1: Tìm xấp xỉ ban đầu của nghiệm;
- Bước 2: Tìm nghiệm với độ chính xác cần thiết.

Trong bước một, để tìm xấp xỉ ban đầu của nghiệm ta có thể dùng hai phương pháp sau:

5.1.1. Phương pháp đồ thị

Vẽ đồ thị của hàm y = f(x) trên giấy kẻ ô vuông. Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành Ox chính là nghiệm cần tìm.



Hình 5.1

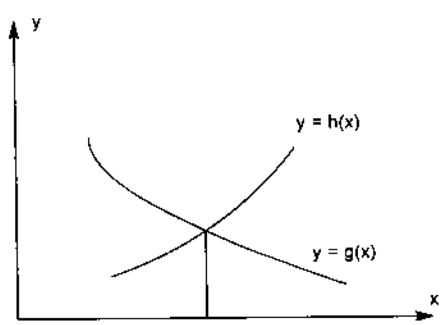
Nếu đồ thị của hàm y = f(x) khó vẽ, ta có thể thay phương trình (5-1) bằng phương trình tương đương:

$$h(x) = g(x) \qquad (5\text{-}2)$$

rồi vẽ đồ thị của hai hàm y = f(x); y = g(x). Hoành độ của giao điểm hai đồ thị là nghiệm của (5-1).

Ví dụ: Phương trình $x^x - 10 = 0$ tương đương với phương trình $\lg x = \dfrac{1}{x}$

- Vẽ đồ thị hai hàm số $y = \lg x$ và $y = \dfrac{1}{x}$, ta thấy hoành độ α của giao điểm hai đồ thị nằm trong khoảng (2, 3). α là xấp xỉ ban đầu của nghiệm.



Hình 5.2

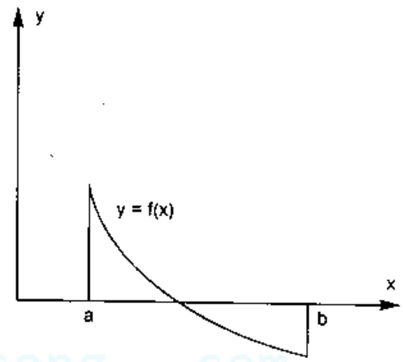
5.1.2. Phương pháp khảo sát sự biến thiên của hàm số y = f(x)

Phương pháp này dựa trên các định lý sau:

Định lý 5.1: Nếu hàm số f(x) liên tục và đơn điệu trên [a, b], đồng thời f(a) và f(b) trái dấu, thì phương trình (5-1) tồn tại một nghiệm duy nhất thuộc (a,b).

Khoảng (a, b) được gọi là khoảng phân ly nghiệm của phương trình (5-1).

Định lý này được minh hoạ bằng đồ thị (hình 5.3)



Hình 5.3

Đồ thị của hàm số y = f(x) cắt một và chỉ một điểm của trục hoành. Vậy phương trình (5-1) có một và chỉ một nghiệm trên (a, b).

Điều kiện hàm f(x) đơn điệu trên [a, b] có thể thay bằng điều kiện đạo hàm của hàm f(x) không đổi dấu trên [a, b]. Ta có:

Định lý 5.2: Nếu hàm số f(x) liên tục và có đạo hàm không đổi dấu trên [a, b], đồng thời f(a) và f(b) trái dấu, thì phương trình (5-1) có một và chỉ một nghiệm thuộc (a, b).

Để tiến hành bước 2: tìm nghiệm với độ chính xác cần thiết, ta có thể dùng các phương pháp sau:

5.2. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

Giả sử α là nghiệm duy nhất của phương trình (5-1) trên [a, b]. Trước hết ta chia đôi [a, b] và gọi $[a_1, b_1]$ là một trong hai nửa của [a, b] thoả mãn điều kiện $f(a_1).f(b_1) < 0$. Khi đó nghiệm α của (5-1) sẽ nằm trong $[a_1, b_1]$ với:

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$$

Tiếp tục chia đôi $[a_1, b_1]$ thành 2 đoạn. Gọi $[a_2, b_2]$ là một trong hai đoạn và thoả mãn điều kiện $f(a_2).f(b_2) < 0$. Khi đó α sẽ nằm trong đoạn $[a_2, b_2]$ với:

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}(b - a)$$

Tiếp tục quá trình đó đến lần thứ n ta được $[a_n, b_n]$ thoả mãn:

$$a_n \le \alpha \le b_n \, , \; b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

Vậy có thể lấy a_n hay b_n làm giá trị gần đúng của nghiệm α với sai số:

$$[\alpha - a_n] \le \frac{1}{2^n}(b - a);$$

cuu duong than cong . com

$$[\alpha - b_n] \leq \frac{1}{2^n}(b-a) \tag{5-3}$$

Vì khi $n \to \infty$ thì $a_n \to \alpha$, $b_n \to \alpha$, do đó phương pháp chia đôi hội tụ.

Chú ý:

- Nếu trong quá trình chia đôi gặp một điểm chia mà giá trị của f tại đó bằng không thì nghiệm đúng là hoành độ của điểm chia;
- Ưu điểm của phương pháp chia đôi là thuật toán đơn giản, do đó dễ lập trình trên máy tính;
- Nhược điểm của phương pháp này là hội tụ chậm.

Ví dụ: Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm của phương trình:

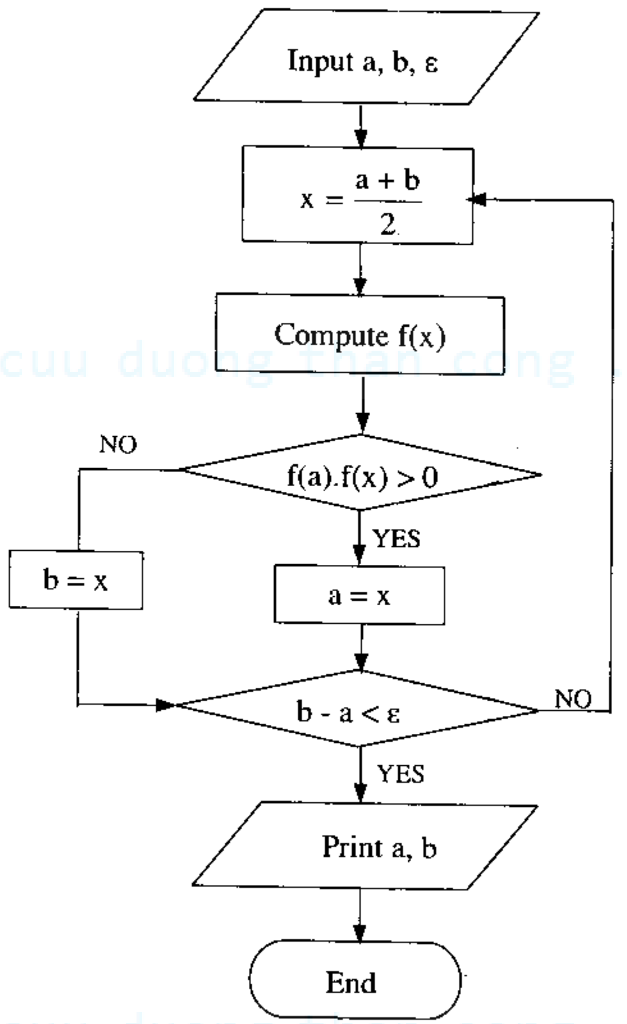
$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

Giải:

Vì	$f(0) = -1$; $f(1) = 1$	nên $\alpha \in [0, 1]$;
	$f(0{,}5) = -1{,}19$	nên $\alpha \in [0{,}5, 1]$;
	$f(0{,}75) = -0{,}59$	nên $\alpha \in [0{,}75, 1]$;
	$f(0{,}875) = 0{,}05$	nên $\alpha \in [0{,}75, 0{,}875]$;
	$f(0{,}8125) = -0{,}304$	nên $\alpha \in [0{,}8125, 0{,}875]$;
	$f(0{,}8438) = -0{,}135$	nên $\alpha \in [0{,}8438, 0{,}875]$;
	$f(0{,}8594) = 0{,}043$	nên $\alpha \in [0{,}8594, 0{,}875]$

Vậy $\alpha \approx \frac{1}{2}[0{,}859 + 0{,}875] = 0{,}867$

Sơ đồ khối giải phương trình f(x) = 0 bằng phương pháp chia đôi



5.3. PHƯƠNG PHÁP LẶP

Giả sử phương trình (5-1) có nghiệm phân ly trong [a, b]. Để giải phương trình này ta đưa nó về dạng:

$$x = g(x) \qquad (5\text{-}4)$$

Chọn $x_0 \in [a, b]$ làm xấp xỉ đầu của nghiệm rồi tính dãy số x_n theo công thức:

$$x_n = g(x_{n-1})\ ;\ n = 1, 2, ... \qquad (5\text{-}5)$$

Giả sử khi $n \to \infty$ thì $x_n \to$ nghiệm α của (5-1), ta nói phương pháp này hội tụ và coi x_n là nghiệm gần đúng của (5-1).

Quá trình tìm nghiệm lặp đi lặp lại nên phương pháp này gọi là phương pháp lặp. Để xét xem phương pháp lặp có hội tụ không ta có định lý:

Định lý:

Xét phương pháp lặp (5-5), giả sử:

- [a, b] là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (5-1);
- Mọi x_n tính theo (5-5) đều thuộc [a, b]; (5-6)
- Hàm g(x) có đạo hàm thoả mãn:

$$|g'(x)| \leq q < 1;\ a < x < b. \tag{5-7}$$

Thế thì, với mọi $x_0 \in [a, b]$ phương pháp lặp (5-5) hội tụ:

$$x_n \to \alpha \text{ khi } n \to \infty$$

và $$|\alpha - x_n| \leq (b - a)q^n \tag{5-8}$$

Chứng minh:

Vì α là nghiệm của (5-1) nên nó cũng là nghiệm của (5-4) và thoả mãn:

$$\alpha = g(\alpha)$$

Đem trừ đẳng thức này cho (5-5) được:

$$|\alpha - x_n| = |g(\alpha) - g(x_{n-1})| \tag{1}$$

Theo định lý Lagrăng:

$$|g(\alpha) - g(x_{n-1})| = |g'(c)|\ |\alpha - x_{n-1}|\ ;\ c \in [a, b]$$

Do đó, theo (1) và (5-7) ta được:

$$|\alpha - x_n| = |g'(c)|\ |\alpha - x_{n-1}| \leq q\ |\alpha - x_{n-1}|$$

Áp dụng bất đẳng thức trên liên tiếp từ x_n đến x_0 ta được:

$$|\alpha - x_n| \leq q|\alpha - x_{n-1}| \leq q^2|\alpha - x_{n-2}| \leq \ldots \leq q^n\ |\alpha - x_0|$$

cuu duong than cong . com

Vì $|\alpha - x_0| \leq b - a$ nên theo trên ta có:

$$|\alpha - x_n| \leq q^n(b - a)$$

Theo giả thiết $0 < q < 1$ nên khi $n \to \infty$ vế phải $\to 0$.

Vì vậy: $|\alpha - x_n| \to 0$ khi $n \to \infty$, phương pháp lặp hội tụ.

Chú ý:

a. Nếu hàm g(x) đã thoả mãn điều kiện (5-7) thì việc thoả mãn điều kiện (5-6) phụ thuộc vào cách chọn x_0:

- Nếu $g'(x) > 0$ ta có thể chọn x_0 bất kỳ $\in [a, b]$;
- Nếu $g'(x) < 0$ thì x_0 được chọn như sau:

$$x_0 = a \text{ khi } a < \alpha < \frac{a+b}{2};$$

$$x_0 = b \text{ khi } \frac{a+b}{2} < \alpha < b \tag{5-9}$$

- Muốn biết α thuộc khoảng nào của [a, b] ta tính $f(\frac{a+b}{2})$ và so sánh dấu của nó với f(b).

b. Để đánh giá sai số của nghiệm gần đúng x_n so với nghiệm đúng α của phương trình (5-4) ta có thể dùng bất đẳng thức (5-8), nhưng công thức này thường cho sai số quá lớn so với thực tế, nên khi ước lượng sai số ta thường dùng công thức sau:

$$|\alpha - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \tag{5-10}$$

Ta chứng minh công thức (5-10) như sau:

Đặt $h(x) = x - g(x)$ (a)

Với mọi $x \in [a, b]$ ta có:

$$|h'(x)| = |1 - g'(x)| \ge 1 - |g'(x)| \ge 1 - q > 0 \tag{b}$$

Vì α là nghiệm của (5-4) nên $h(\alpha) = \alpha - g(\alpha) = 0$, do đó:

$$|x_n - x_{n+1}| = |x_n - g(x_n)| = |h(x_n) - h(\alpha)| \tag{c}$$

Vì h(x) liên tục trên [a, b] và có đạo hàm trên (a, b) nên theo định lý Lagrăng:

$$|h(x_n) - h(\alpha)| = |h'(d)|\,|x_n - \alpha|;\ d \in (a, b)$$

Theo (b) thì $|h'(d)| \ge 1 - q > 0$, nên từ (c) và đẳng thức trên ta có:

$$|x_n - x_{n+1}| \ge (1 - q)\,|x_n - \alpha| \tag{d}$$

Mặt khác, do

$$|x_n - x_{n+1}| = |g(x_{n-1}) - g(x_n)| = |g'(c)|\,|x_n - x_{n-1}| \le q|x_n - x_{n-1}| \tag{e}$$

nên từ (d) và (e) suy ra:

$$(1 - q)|x_n - \alpha| \le q\,|x_n - x_{n-1}|$$

hay

$$|x_n - \alpha| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Tuy nhiên trong thực tế ta thường dừng quá trình tính toán khi $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

c. Phương pháp lặp đơn có những ưu điểm sau:

- Xấp xỉ đầu x_0 không nhất thiết phải thật gần α;

- Phép lặp có khả năng tự sửa sai. Nếu xấp xỉ thứ k là x_k mắc sai số thì có thể coi như xấp xỉ ban đầu mới;

- Có các đánh giá sai số thích hợp;
- Dễ lập trình trên máy tính.

Nhược điểm của phương pháp là khi hệ số q gần 1 thì phép lặp hội tụ rất chậm.

Ví dụ: Giải phương trình sau bằng phép lặp:

$$x + 0{,}13\ln x - 2 = 0$$

Giải:

Đưa phương trình về dạng:

$$x = g(x) = 2 - 0{,}13\ln x$$

Bằng phương pháp đồ thị ta thấy phương trình có một nghiệm duy nhất trong khoảng (1,2).

Trong khoảng đó:

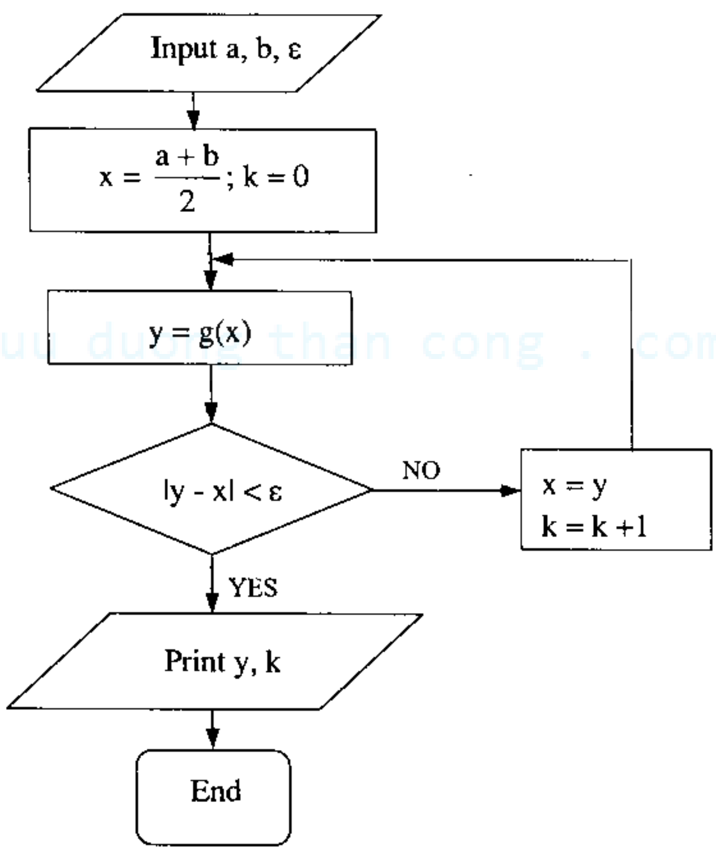
$$|g'(x)| = \frac{0{,}13}{x} \le 0{,}13 < 1$$

Vậy phép lặp hội tụ.

Chọn $x_0 = 1$, với phép lặp $x_n = 2 - 0{,}13\ln x_{n-1}$ ta tính được dãy nghiệm gần đúng cho trong bảng bên. Vậy $x \approx 1{,}915$.

x_{n-1}	x_n
1	2
2	1,910
1,910	1,916
1,916	1,915
1,915	1,915

Sơ đồ khối giải phương trình f(x) = 0 bằng phương pháp lặp



5.4. PHƯƠNG PHÁP NIUTƠN (PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN)

Giả sử phương trình (5-1) có nghiệm duy nhất trên [a, b] và f'(x), f''(x) không đổi dấu trên [a, b].

Nghiệm đúng α của phương trình (5-1) là hoành độ giao điểm của đường cong $y = f(x)$ với trục hoành Ox.

Nội dung của phương pháp tiếp tuyến là thay đường cong $y = f(x)$ bằng tiếp tuyến kẻ từ A(a, f(a)) hay B(b, f(b)), coi hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành Ox là nghiệm gần đúng của (5-1).

Đặt $x_0 = a$ nếu tiếp tuyến kẻ từ A, $x_0 = b$ nếu tiếp tuyến kẻ từ B; x_0 là xấp xỉ đầu của α.

Phương trình tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại điểm $(x_0, f(x_0))$ có dạng:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành là x_1 thoả mãn phương trình trên, với $y_1 = 0$:

$$- f(x_0) = f'(x_0)\,(x_1 - x_0)$$

suy ra:

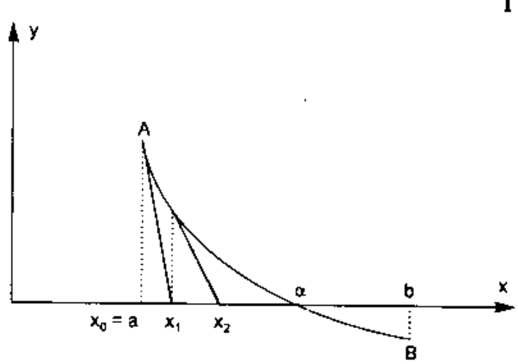
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Tiếp tục vẽ tiếp tuyến của đường cong tại điểm có toạ độ $(x_1, f(x_1))$, tương tự ta có xấp xỉ tiếp theo:

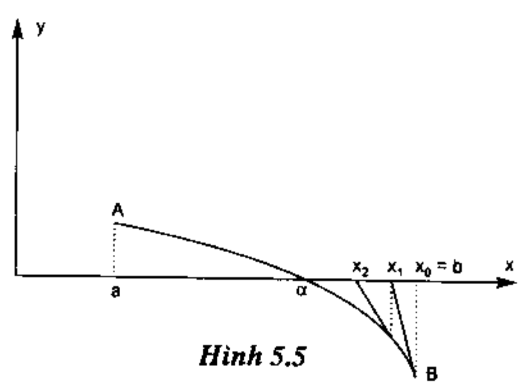
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Tổng quát ta có:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (5\text{-}11)$$



Hình 5.4



Hình 5.5

Xấp xỉ đầu x_0 được chọn là a hay b sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với $f''(x)$. Khi đó x_n được tính theo công thức (5-11) sẽ hội tụ về nghiệm đúng α khi $n \to \infty$.

Sai số của phương pháp được đánh giá như sau:

Giả sử $|f'(x)| > m > 0$ với mọi $x \in [a, b]$, ta có:

$$|f(x_n)| = |f(x_n) - f(\alpha)| = |f'(c)|\,|x_n - \alpha| \geq m\,|x_n - \alpha|$$

suy ra:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \qquad (5\text{-}12)$$

Tuy nhiên trong thực tế người ta thường dừng quá trình tính toán khi:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \text{ (sai số cho phép).} \qquad (5\text{-}13)$$

Chú ý:

- Phương pháp Niutơn còn được gọi là phương pháp tuyến tính hoá vì ta đã thay đường cong $y = f(x)$ bằng đường thẳng;

- Từ công thức (5-11) ta thấy phương pháp Niutơn là phương pháp lặp với $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ là hàm lặp;

- Phương pháp Niutơn hội tụ rất nhanh so với phương pháp lặp đơn và phương pháp chia đôi.

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình sau bằng phương pháp Niutơn:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

Giải: Vì $f(-10) = -1050$; $f(-11) = 3453$; nên nghiệm đúng $\alpha \in (-11, -10)$.

Ngoài ra $\quad f'(x) = 4x^3 - 6x + 75 < 0, \ \forall x \in (-11, -10);$

$$f''(x) = 12x^2 - 6 > 0, \quad \forall x \in (-11, -10);$$

nên phương pháp Niutơn hội tụ.

Vì $f(-11)$ và $f''(x)$ cùng dấu nên chọn $x_0 = -11$.

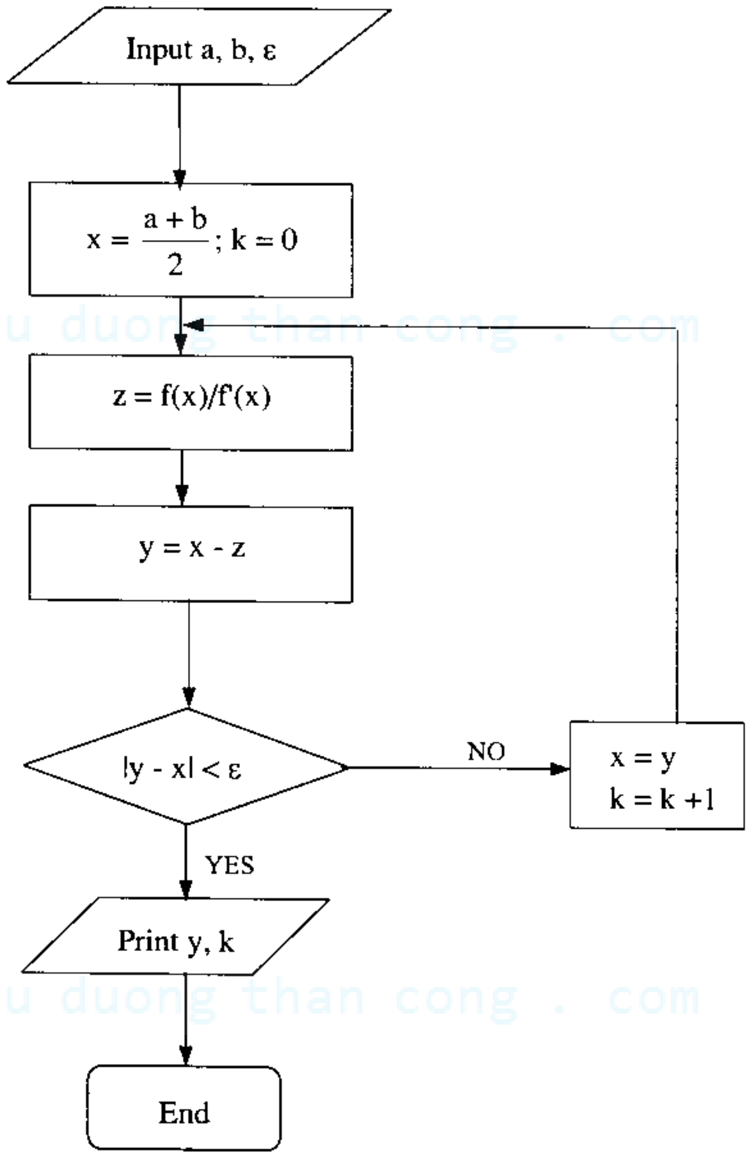
Áp dụng công thức (5-11) ta được:

$$x_3 = -10,261; \qquad f(x_3) = 0,2 > 0$$

Tiếp theo $f(x_3 + 0,001) = f(-10,260) < 0$

Vậy $\alpha \in (-10,261, -10,260)$, ta lấy $\alpha \approx -10,2605$

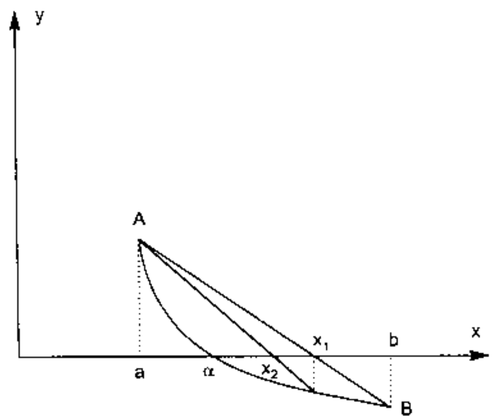
Sơ đồ khối giải phương trình f(x) = 0 theo phương pháp Niutơn



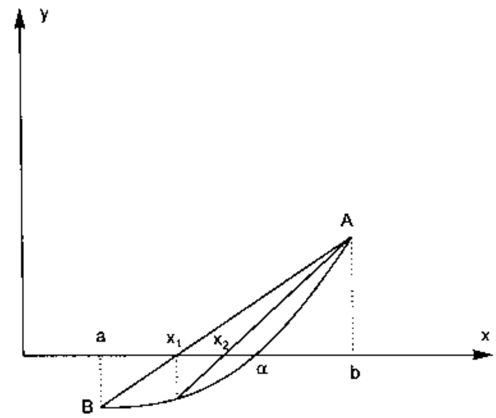
5.5. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

Giả sử phương trình (5-1) có nghiệm duy nhất trên [a, b], các đạo hàm cấp một và cấp hai của f(x) không đổi dấu trên [a, b]. Trong phương pháp tiếp tuyến ta đã thay đường cong y = f(x) bằng tiếp tuyến của đường cong, trong phương pháp dây cung ta thay bằng dây cung nối hai điểm A(a, f(a)), B(b,f(b)).

Coi hoành độ của giao điểm giữa dây cung AB và trục hoành Ox là nghiệm gần đúng x_1 của phương trình (5-1).



Hình 5.6



Hình 5.7

Phương trình dây cung AB có dạng:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Tại giao điểm của dây cung và trục hoành có $y = 0$, $x = x_1$ nên:

$$\frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

suy ra:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \qquad (5\text{-}14)$$

Sau khi tìm được x_1 ta có khoảng phân ly nghiệm mới bé hơn khoảng phân ly cũ, tiếp tục áp dụng phương pháp dây cung ta tìm được xấp xỉ nghiệm x_2. Cứ tiếp tục quá trình này ta được dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ đơn điệu giảm hoặc đơn điệu tăng (xem hình 5-6, hình 5-7) tiến dần đến nghiệm đúng α.

Sai số của phương pháp được đánh giá theo công thức (5-12) hay (5-13).

Ví dụ: Tìm nghiệm dương của phương trình sau bằng phương pháp dây cung với độ chính xác $\varepsilon = 0{,}02$:

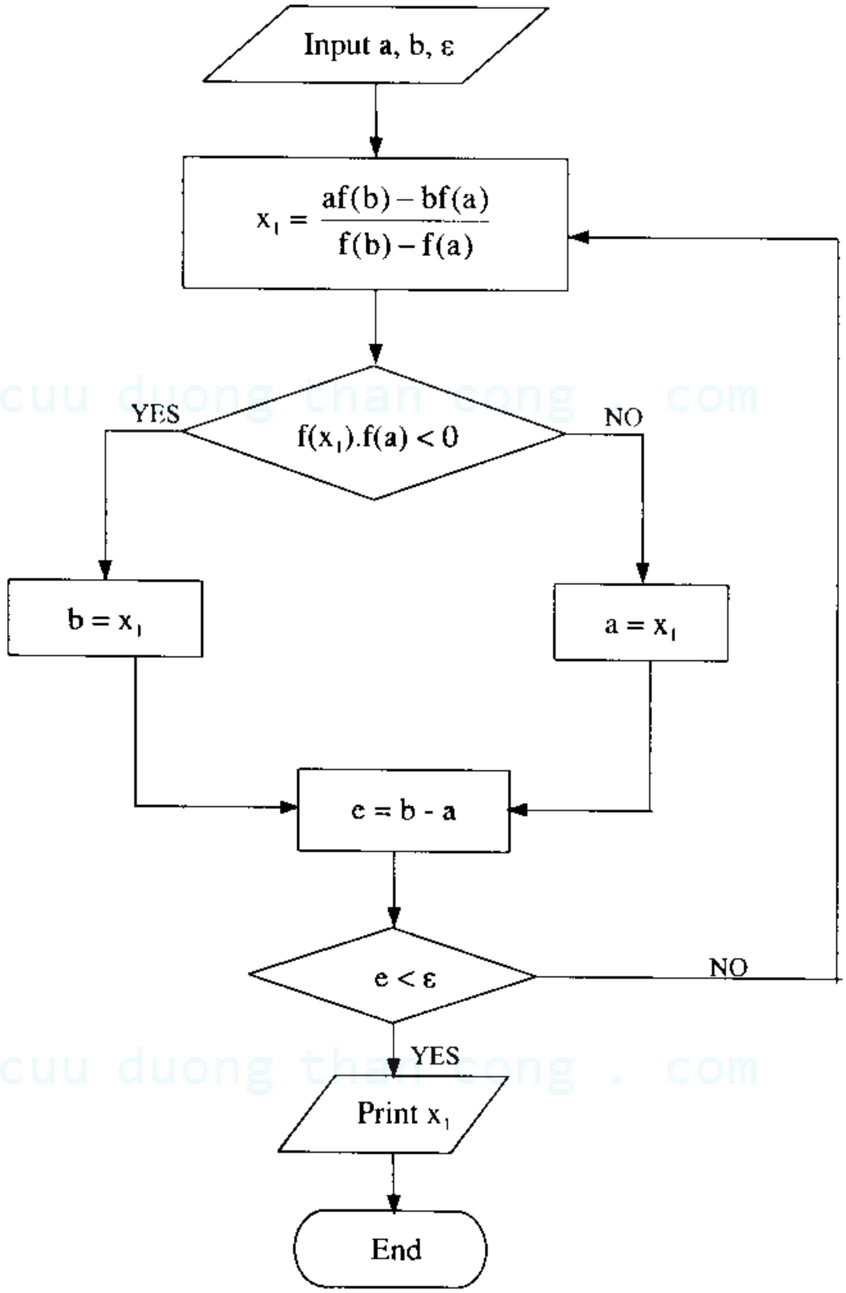
$$f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$$

Giải:

Vì $f(1) = -0{,}6$; $f(1{,}5) = 1{,}425$, nên nghiệm đúng $\alpha \in (1; 1{,}5)$.

Do $f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x - 0{,}2 > 0$; $f''(x) = 6x - 0{,}4 > 0$ với mọi $x \in (1, 1{,}5)$ nên phương pháp hội tụ.

Sơ đồ khối giải phương trình f(x) = 0 theo phương pháp dây cung



Chọn $x_0 = 1$ là xấp xỉ ban đầu, theo (5-14):

$$x_1 = \frac{1.1,452 - 1,5(-0,6)}{1,425 - (-0,6)} = 1,1615$$

Tiếp tục áp dụng công thức 5.14 ta tính được các giá trị gần đúng tiếp theo.

Bài tập

1- Không giải phương trình:

$$x^4 + 4x^3 + 3z^2 - 4x - 4 = 0$$

Hãy xác định trong khoảng nào phương trình có nghiệm thực dương, âm?

2- Tìm nghiệm của phương trình:

$$x^2 = e^{-x}$$

với độ chính xác ε = 0,01 bằng phương pháp lặp.

3- Tìm nghiệm của phương trình:

$$\ln x = \frac{1}{x}$$

trong khoảng (1, 2) bằng phương pháp chia đôi với độ chính xác ε = 0,01.

4- Tìm nghiệm của phương trình:

$$x^2 \ln x = 1$$

bằng phương pháp Niutơn với độ chính xác ε = 0,01.

Đáp số

1. $0 < x \le 5$; $-5 \le x \le -0,5$
2. $x = 0,70$
3. $x = 1,76$
4. $x = 1,53$

Chương VI
GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

6.1. MỞ ĐẦU

6.1.1. Hệ phương trình đại số tuyến tính

Xét hệ phương trình đại số tuyến tính có n phương trình, n ẩn số:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{6-1}$$

Trong đó đã biết các hệ số a_{ij}, b_i. Yêu cầu tìm các ẩn số x_i ; i, j = 1, 2,..., n.

Ta ký hiệu ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6-2}$$

là ma trận các hệ số của hệ phương trình (6-1).

Các véctơ cột n phần tử:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

là các véctơ vế phải và véctơ ẩn.

Khi đó hệ phương trình (6-1) có dạng ma trận:

$$Ax = b \tag{6-4}$$

6.1.2. Giải hệ phương trình đại số tuyến tính bằng quy tắc Crame

Trong phần này ta chỉ xét hệ phương trình (6-4) với ma trận A không suy biến, có nghĩa là định thức Δ của ma trận A khác 0. Để giải phương trình (6-4) ta dùng định lý sau:

Định lý Crame: Nếu A là ma trận không suy biến thì hệ phương trình (6-4) có nghiệm duy nhất, cho bởi công thức:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \ i = 1, 2, ..., n. \tag{6-5}$$

Trong đó Δ_i là định thức suy ra từ định thức Δ bằng cách thay cột thứ i bằng cột vế phải.

Chú ý: Quy tắc Crame tìm nghiệm của hệ phương trình (6-4) chỉ có ý nghĩa về mặt lý thuyết, còn trong thực tế khó áp dụng vì số phép tính phải thực hiện quá lớn. Với hệ phương trình n ẩn, ta cần (n + 1)!n phép tính. Sau đây là các phương pháp tìm nghiệm mất ít công sức hơn.

6.2. PHƯƠNG PHÁP GAOXƠ (GAUSS)

6.2.1. Nội dung của phương pháp

Giả sử ta phải giải hệ phương trình (6-1). Để tránh việc phải tính các định thức, ta khử dần các ẩn, đưa hệ về hệ tương đương có dạng tam giác trên rồi giải hệ này từ dưới lên trên.

Để dễ hiểu, ta xét hệ chỉ có 3 phương trình 3 ẩn số:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} & (6\text{-}5a) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} & (6\text{-}5b) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} & (6\text{-}5c) \end{cases}$$

Bằng phép biến đổi tương đương ta đưa hệ về dạng tam giác trên:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14} \\ \qquad\quad x_2 + b_{23}x_3 = b_{24} \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = b_{34} \end{cases} \tag{6-6}$$

Sau đó giải tìm ẩn số từ phương trình cuối ngược lên.

Quá trình đưa hệ từ dạng đã cho (6-5) về dạng tam giác (6-6) gọi là quá trình thuận. Quá trình giải hệ (6-6) gọi là quá trình ngược.

6.2.2. Quá trình thuận

a. Bước 1: khử x_1

Giả sử $a_{11} \neq 0$, chia hai vế của phương trình đầu cho a_{11} ta được:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \tag{6-7}$$

Trong đó:

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}; \ j = 2, 3, 4 \tag{6-8}$$

Để khử x_1 ở phương trình (6-5b), ta nhân (6-7) với a_{21} (hệ số của x_1 ở (6-5b)) được:

$$a_{21}x_1 + a_{21}a_{12}^{(1)}x_2 + a_{21}a_{13}^{(1)}x_3 = a_{21}a_{14}^{(1)}$$

rồi lấy phương trình (6-5b) trừ đi phương trình này được:

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \tag{6-9}$$

Trong đó:

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - a_{21}a_{1j}^{(1)}; \ j = 2, 3, 4 \tag{6-10}$$

Tương tự, để khử x_1 ở phương trình (6-5c), ta nhân (6-7) với a_{31} (hệ số của x_1 ở (6-5c)) được:

$$a_{31}x_1 + a_{31}a_{12}^{(1)}x_2 + a_{31}a_{13}^{(1)}x_3 = a_{31}a_{14}^{(1)}$$

rồi lấy (6-5c) trừ đi phương trình này được:

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \tag{6-11}$$

Trong đó:

$$a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - a_{31}a_{1j}^{(1)}; \ j = 2, 3, 4 \tag{6-12}$$

Như vậy hai phương trình (6-9), (6-11) không chứa x_1 nữa:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases}$$

Đây là hệ hai phương trình hai ẩn. Ta lại áp dụng phương pháp trên để khử x_2.

b. Bước 2: khử x_2

Giả sử $a_{22}^{(1)} \neq 0$, chia (6-9) cho $a_{22}^{(1)}$ ta được:

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \tag{6-13}$$

Trong đó: $$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \ j = 3, 4 \tag{6-14}$$

Nhân (6-13) với $a_{32}^{(1)}$ được:

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{32}^{(1)}a_{23}^{(2)}x_3 = a_{32}^{(1)}a_{24}^{(2)}$$

Lấy (6-11) trừ phương trình này ta được:

$$a^{(2)}_{(33)}x_3 = a^{(2)}_{34} \qquad (6\text{-}15)$$

Trong đó: $$a^{(2)}_{3j} = a^{(1)}_{3j} - a^{(1)}_{32}a^{(2)}_{2j}\ ;\ j = 3,4 \qquad (6\text{-}16)$$

Như vậy phương trình (6-15) không chứa x_2 nữa.

c. Bước 3 (bước cuối cùng đối với hệ 3 ẩn)

Giả sử $a^{(2)}_{33} \neq 0$, chia (6-15) cho $a^{(2)}_{33}$ được:

$$x_3 = a^{(3)}_{34} \qquad (6\text{-}17)$$

Trong đó: $$a^{(3)}_{34} = a^{(2)}_{34} / a^{(2)}_{33} \qquad (6\text{-}18)$$

Hệ 3 phương trình (6-7), (6-13), (6-17) có dạng tam giác trên:

$$\begin{cases} x_1 + a^{(1)}_{12}x_2 + a^{(1)}_{13}x_3 = a^{(1)}_{14} \\ \qquad\quad x_2 + a^{(2)}_{23}x_3 = a^{(2)}_{24} \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = a^{(3)}_{34} \end{cases} \qquad (6\text{-}19)$$

6.2.3. Quá trình ngược

Giải hệ phương trình (6-19) từ phương trình cuối ngược lên ta được:

$$x_3 = a^{(3)}_{34}\ ;$$

$$x_2 = a^{(2)}_{24} - a^{(2)}_{23}a^{(3)}_{34}\ ;$$

$$x_1 = a^{(1)}_{14} - a^{(1)}_{12}(a^{(2)}_{24} - a^{(2)}_{23}a^{(3)}_{34}) - a^{(1)}_{13}a^{(3)}_{34}$$

Chú ý:

- Trong quá trình thuận ta đã giả thiết $a_{11} \neq 0$, $a^{(1)}_{22} \neq 0$, $a^{(2)}_{33} \neq 0$. Nếu một trong các hệ số đó bằng không, ta phải hoán vị các phương trình cho nhau để có được hệ số mới khác không thì mới có thể tiếp tục tính toán được. Ví dụ $a_{11} = 0$, còn $a_{21} \neq 0$ thì ta phải hoán vị hai phương trình thứ nhất và thứ hai cho nhau. Nếu cả ba hệ số a_{11}, a_{21}, a_{31} đều bằng không thì hệ phương trình là suy biến.

- Ta đã biết sai số tính toán của phép chia càng bé khi số chia có giá trị tuyệt đối càng lớn. Vì vậy, để giảm sai số tính toán, ở bước 1 ta nên hoán vị các phương trình sao cho a_{11} là số có giá trị tuyệt đối lớn nhất trong các số a_{11}, a_{21}, a_{31}. Ở các bước tiếp theo ta cũng làm tương tự.

- Khối lượng tính toán theo phương pháp Gaoxơ giảm rất nhiều so với phương pháp giải theo quy tắc Crame. Nếu hệ có n ẩn thì số phép tính cần thực hiện là $\frac{4n^3+9n^2-7n}{6}$

- Sử dụng phương pháp Gaoxơ có thể tính được định thức Δ và ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gaoxơ:

$$\begin{cases} 2{,}0x_1 + 1{,}0x_2 - 0{,}1x_3 + 1{,}0x_4 = 2{,}7 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 4{,}0x_3 - 8{,}5x_4 = 21{,}9 \\ 0{,}3x_1 - 1{,}0x_2 + 1{,}0x_3 + 5{,}2x_4 = -3{,}9 \\ 1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 2{,}5x_3 - 1{,}0x_4 = 9{,}9 \end{cases}$$

Giải:

Quá trình tính toán được ghi vào bảng sau:

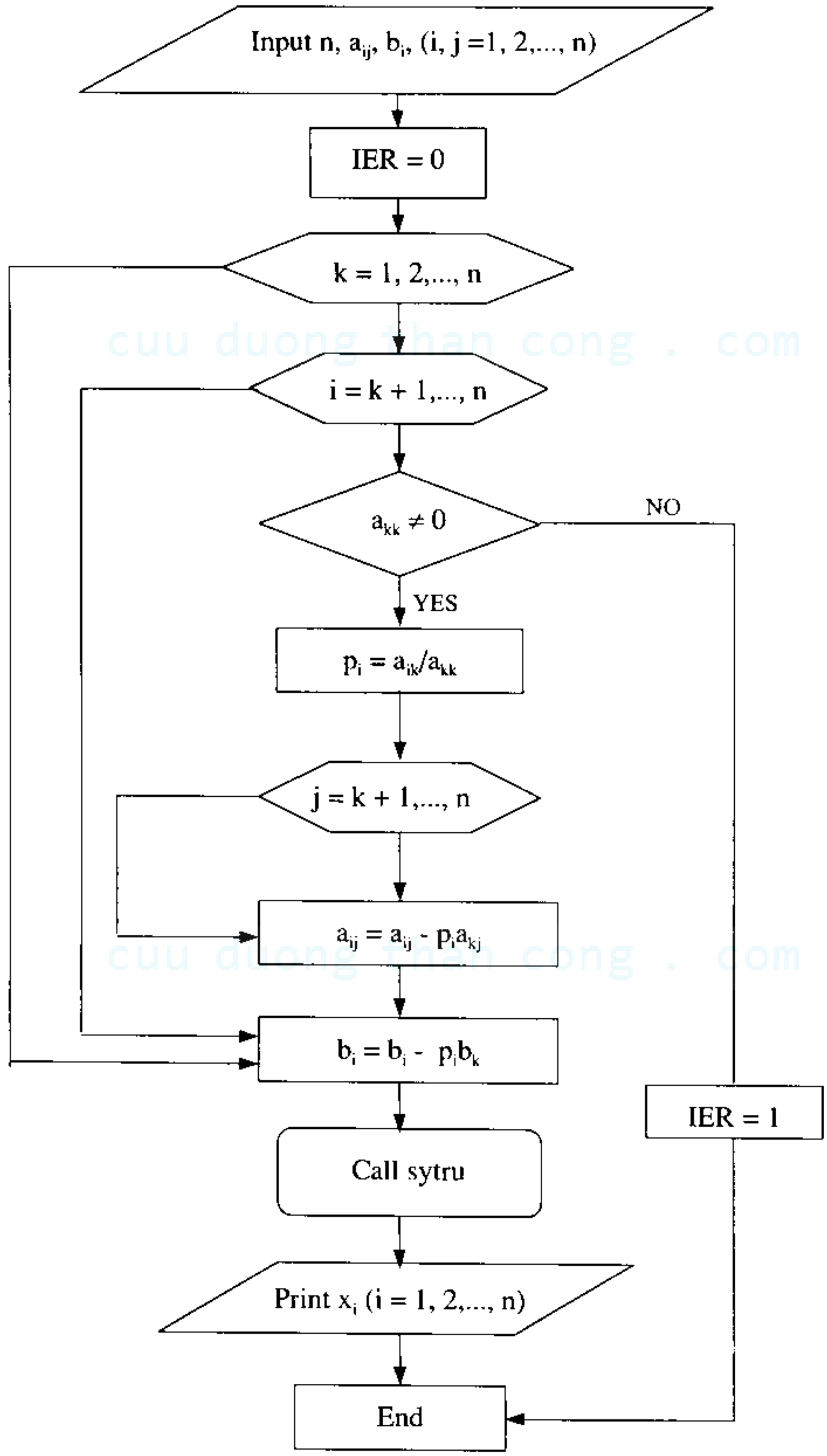
Bảng Gaoxơ

Hệ số x_1	Hệ số x_2	Hệ số x_3	Hệ số x_4	Vế phải
2,0	1,0	- 0,1	1,0	2,7
0,4	0,5	4,0	-8,5	21,9
0,3	-1,0	1,0	5,2	-3,9
1,0	0,2	2,5	-1,0	9,9
1	0,5	- 0,05	0,5	1,35
	0,30	4,02	-8,70	21,36
	-1,15	1,015	5,05	- 4,035
	- 0,30	2,55	-1,50	8,55
	1	13,40	-29,00	71,20
		16,425	-28,300	77,575
		6,570	-10,200	29,910
		1	-1,72298	4,72298
			1,1198	-1,1198
			1	-1,00000
		1		3,00000
	1			2,00000
1				1,00000

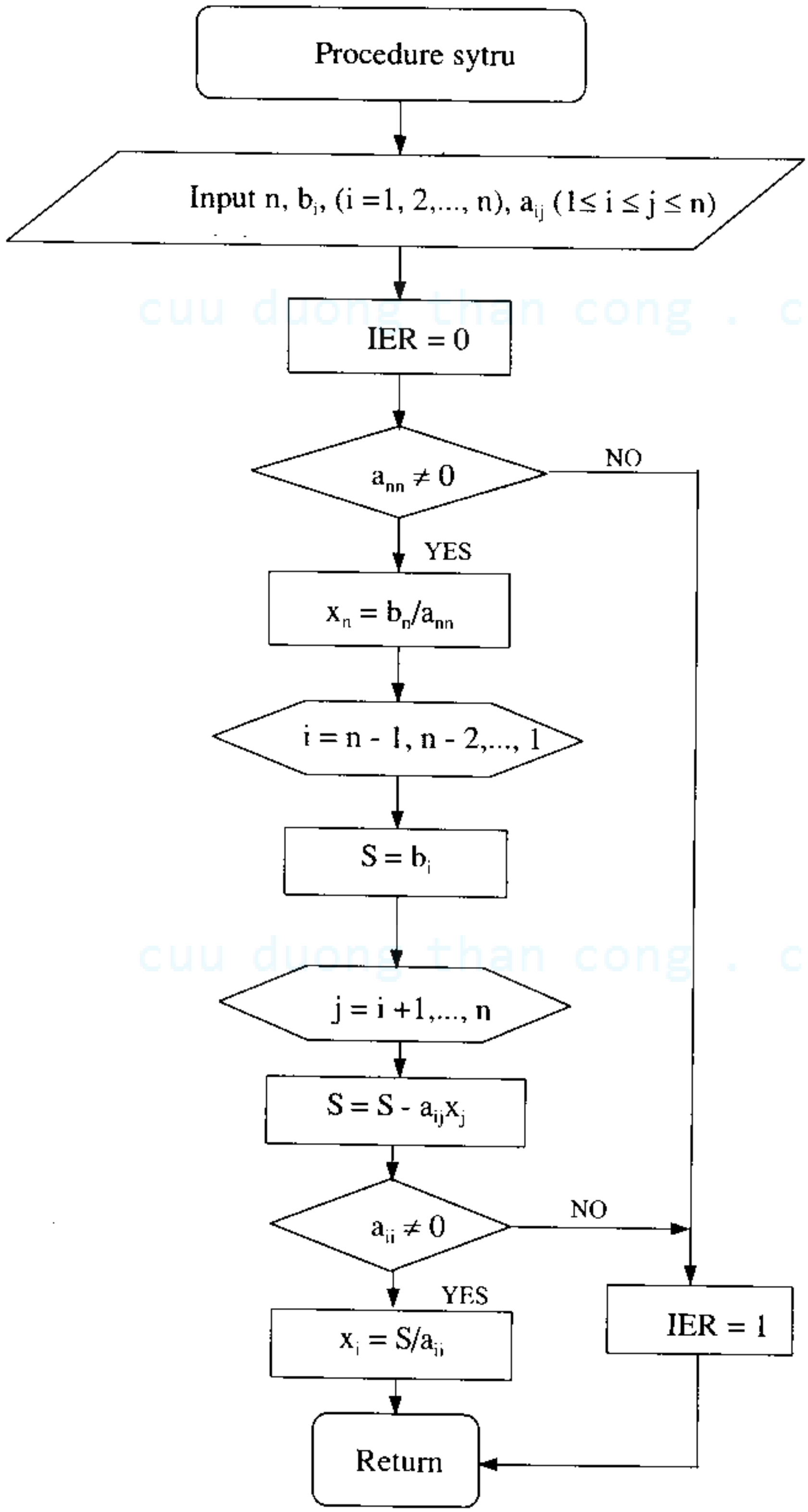
Như vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$x_1 = 1\,;\ x_2 = 2\,;\ x_3 = 3\,;\ x_4 = -1$$

Sơ đồ khối giải hệ phương trình đại số tuyến tính bằng phương pháp Gaoxơ



Quá trình ngược giải hệ phương trình đại số tuyến tính tam giác trên được thực hiện bằng sơ đồ khối sau:



Ví dụ:

Ma trận A			Véctơ b
1,000	2,000	3,000	14,000
4,000	5,000	6,000	32,000
7,000	8,000	9,000	50,000

Kết quả $x_1 = 0{,}000$; $x_2 = 4{,}000$; $x_3 = 2{,}000$

6.3. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

6.3.1. Khái niệm về chuẩn của véctơ

Cho véctơ $V = (V_1, V_2,..., V_n)$.

a) Định nghĩa

Chuẩn của véctơ V là số thực không âm ký hiệu là:

$$\| V \|_1 = \max | V_i | ; \qquad 1 \le i \le n \tag{6-20}$$

$$\| V \|_2 = \sum_{i=1}^{n} | V_i | \tag{6-21}$$

$\| V \|_1$ được gọi là chuẩn cực đại, $\| V \|_2$ được gọi là chuẩn tuyệt đối. Sau này khi viết $\| V \|$ thì có thể hiểu đó là một trong hai chuẩn trên.

b) Các tính chất

Chuẩn của véctơ có các tính chất sau:

$$\begin{aligned} &\| V \| = 0 \text{ khi và chỉ khi } V_i = 0 \text{ với mọi } i = 1, 2,..., n; \\ &\| V + U \| \le \| V \| + \| U \|; \\ &\| \lambda V \| = | \lambda | \, \| V \|; \ \lambda \text{ là một số thực.} \end{aligned} \tag{6-22}$$

c) Giới hạn của dãy véctơ

Dãy véctơ $V^{(k)} = (V_1^{(k)}, V_2^{(k)},..., V_n^{(k)})$; k = 1, 2,..., n, được gọi là hội tụ về véctơ V $(V_1, V_2,..., V_n)$ nếu khi $k \to \infty$ thì $\| V^{(k)} - V \| \to 0$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{k \to \infty} V^{(k)} = V$

Khi $k \to \infty$ để cho $V^{(k)} \to V$ thì điều kiện cần và đủ là: $V_i^{(k)} \to V_i$ với mọi i = 1, 2,..., n.

6.3.2. Khái niệm về chuẩn của ma trận

Cho ma trận vuông $C = [C_{ij}]$ cấp n.

a) Định nghĩa

Chuẩn của ma trận C là số thực không âm ký hiệu là:

$$\| C \|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} | C_{ij} |; \tag{6-23}$$

$$\| C \|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} | C_{ij} | \tag{6-24}$$

Các chuẩn $\| C \|_1$, $\| C \|_2$ tương ứng với các chuẩn $\| V \|_1$, $\| V \|_2$ của véctơ V. Sau này để cho đơn giản, ta không ghi chỉ số 1, 2 mà ký hiệu chung chuẩn của ma trận C là $\| C \|$.

b) Các tính chất

Chuẩn của ma trận có các tính chất giống các tính chất của chuẩn véctơ:

$\| C \| = 0$ khi và chỉ khi $C_{ij} = 0$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

$\| \lambda C \| = | \lambda | \, \| C \|$; λ là một số thực;

$\| B + C \| \le \| B \| + \| C \|$; B là ma trận vuông cùng cấp với C;

$\| C.V \| \le \| C \| \, \| V \|$; V là véctơ có số chiều bằng cấp của C. (6-25)

6.3.3. Giải hệ phương trình đại số tuyến tính bằng phương pháp lặp đơn

Quy tắc Crame và phương pháp Gaoxơ cho ta cách tìm nghiệm đúng của hệ phương trình (6-1) nếu như các phép tính sơ cấp được làm đúng hoàn toàn. Sau đây ta sẽ nghiên cứu phương pháp lặp đơn là phương pháp đúng dần tìm nghiệm của hệ (6-1).

a) Nội dung phương pháp

Để giải hệ phương trình $Ax = b$ ta biến đổi nó về dạng:

$$x = Cx + g \tag{6-26}$$

Trong đó: $C = [C_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) là ma trận vuông cấp n;

g là véc tơ cột n chiều.

C, g được suy ra từ A và b.

Sau đó ta chọn véctơ $x^{(0)}$ nào đó làm nghiệm gần đúng đầu tiên của hệ và tính các nghiệm gần đúng tiếp theo $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ theo công thức lặp:

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g; \ (k \ge 1) \tag{6-27}$$

Phương pháp tính nghiệm lặp đi lặp lại với cùng một thuật toán nên được gọi là phương pháp lặp.

b) Sự hội tụ và sai số của phương pháp

Định nghĩa: Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ là nghiệm của hệ (6-26). Nếu $x_i^{(k)} \to \alpha_i$ khi $k \to \infty$ $(i = 1, 2, ..., n)$ thì ta nói phương pháp lặp (6-27) hội tụ.

Như vậy theo định nghĩa giới hạn của véctơ, phương pháp lặp hội tụ khi và chỉ khi $\| x^{(k)} - \alpha \| \to 0$ khi $k \to \infty$.

Định lý: Nếu $\| C \| < 1$ thì phương pháp lặp (6-27) hội tụ với bất kỳ xấp xỉ đầu $x^{(0)}$ nào. Hơn nữa ta có các đánh giá sai số:

$$\| x^{(k)} - \alpha \| \le \frac{\| C \|}{1 - \| C \|} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|; \tag{6-28}$$

$$\| x^{(k)} - \alpha \| \le \frac{\| C \|^k}{1 - \| C \|} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \tag{6-29}$$

Chứng minh: Vì α là nghiệm của hệ (6-26) nên:

$$\alpha = C\alpha + g$$

Lấy (6-27) trừ đi hệ thức này vế với vế ta được:

$$x^{(k)} - \alpha = C\,(x^{(k-1)} - \alpha)$$

Vì vậy theo tính chất của chuẩn ta có:

$$\| x^{(k)} - \alpha \| = \| C\,(x^{(k-1)} - \alpha) \| \le \| C \| \, \| x^{(k-1)} - \alpha \| \tag{1}$$

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức này từ (k) đến (0) được:

$$\| x^{(k)} - \alpha \| \le \| C \| \, \| x^{(k-1)} - \alpha \| \le \| C \|^2 \, \| x^{(k-2)} - \alpha \| \le ... \le \| C \|^k \, \| x^{(0)} - \alpha \|$$

Vì $\| C \| < 1$ nên khi $k \to \infty$ thì $\| C \|^k \to 0$ và do đó $\| x^{(k)} - \alpha \| \to 0$, hay phương pháp lặp hội tụ.

Bây giờ ta chứng minh các công thức (6-28), (6-29).

Vì: $$x^{(k)} = C\,x^{(k-1)} + g;$$

$$x^{(k-1)} = C\,x^{(k-2)} + g$$

trừ vế với vế hai đẳng thức này ta được:

$$x^{(k)} - x^{(k-1)} = C\,(x^{(k-1)} - x^{(k-2)})$$

Do đó: $$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| = \| C \| \, \| x^{(k-1)} - x^{(k-2)} \|$$

Theo tính chất của chuẩn:

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \le \| C \| \, \| x^{(k-1)} - x^{(k-2)} \|$$

Áp dụng liên tiếp bất đẳng này từ (k) đến (1) ta được:

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \le \| C \|^{k-1} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \qquad (2)$$

Mặt khác ta có:

$$\| x^{(k-1)} - \alpha \| = \| x^{(k-1)} - x^{(k)} + x^{(k)} - \alpha \|$$

Theo tính chất của chuẩn:

$$\| x^{(k-1)} - \alpha \| \le \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| + \| x^{(k)} - \alpha \|$$

Theo bất đẳng thức (1) và bất đẳng thức trên ta có:

$$\| x^{(k)} - \alpha \| \le \| C \| \{ \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| + \| x^{(k)} - \alpha \| \}$$

suy ra:

$$\| x^{(k)} - \alpha \| (1 - \| C \|) \le \| C \| \, \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|$$

Vì $(1 - \| C \|) > 0$ nên ta có đánh giá sai số:

$$\| x^{(k)} - \alpha \| \le \frac{\| C \|}{1 - \| C \|} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|$$

Từ (2) ta có đánh giá sai số:

$$\| x^{(k)} - \alpha \| \le \frac{\| C \|^k}{1 - \| C \|} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$$

c) Ví dụ

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn, tiến hành lặp 3 lần sau đó đánh giá kết quả nhận được:

$$\begin{cases} 1{,}02\,x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795 \\ -0{,}11x_1 + 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849 \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12\,x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398 \end{cases}$$

Đầu tiên ta đưa hệ về dạng (6-26). Vì các phần tử nằm trên đường chéo chính của hệ gần bằng 1, còn các phần tử còn lại nhỏ hơn 1 nhiều, nên ta viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}10x_3 + 0{,}795 \\ x_2 = 0{,}11x_1 - 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}849 \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}12\,x_2 - 0{,}04x_3 + 1{,}398 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có dạng x = Cx + g.

Trong đó:

$$C = \begin{pmatrix} -0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}11 & -0{,}03 & 0{,}05 \\ 0{,}11 & 0{,}12 & -0{,}04 \end{pmatrix}; \qquad g = \begin{pmatrix} 0{,}795 \\ 0{,}849 \\ 1{,}398 \end{pmatrix}$$

Để kiểm tra điều kiện hội tụ, ta tính:

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{1j}| = 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}17 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{2j}| = 0{,}11 + 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}19 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{3j}| = 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}27 < 1$$

Như vậy $\|C\| = \max\{0{,}17;\ 0{,}19;\ 0{,}27\} = 0{,}27 < 1$ nên phương pháp lặp hội tụ.

Chọn xấp xỉ ban đầu là véctơ gần bằng véctơ g:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}80 \\ 0{,}85 \\ 1{,}40 \end{pmatrix}$$

Sau đó tính các xấp xỉ tiếp theo bằng công thức lặp:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = -0{,}02x_1^{(k-1)} + 0{,}05x_2^{(k-1)} + 0{,}10x_3^{(k-1)} + 0{,}795 \\ x_2^{(k)} = 0{,}11x_1^{(k-1)} - 0{,}03x_2^{(k-1)} + 0{,}05x_3^{(k-1)} + 0{,}849 \\ x_3^{(k)} = 0{,}11x_1^{(k-1)} + 0{,}12\,x_2^{(k-1)} - 0{,}04x_3^{(k-1)} + 1{,}398 \end{cases}$$

Kết quả cho trong bảng sau:

k	0	1	2	3
$x_1^{(k)}$	0,80	0,962	0,978	0,980
$x_2^{(k)}$	0,85	0,982	1,002	1,004
$x_3^{(k)}$	1,40	1,532	1,560	1,563

Sai số:

$$\|x^{(3)} - \alpha\| \le \frac{0{,}27}{1-0{,}27}\|x^{(3)} - x^2\| \le \frac{0{,}27}{1-0{,}27}\cdot 3.10^{-3}$$

hay $$\|x^{(3)} - \alpha\| \le 1{,}1.10^{-3}$$

6.4. PHƯƠNG PHÁP ZAYĐEN (SEIDEL)

6.4.1. Nội dung phương pháp

Giả sử phải giải hệ phương trình Ax = b.

Trong phương pháp lặp đơn ta đã đưa hệ phương trình về dạng:

$$x = Cx + g$$

Để tăng nhanh tốc độ hội tụ của nghiệm ta phân tích ma trận C thành tổng hai ma trận $C = C_1 + C_2$.

Trong đó:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ c_{21} & 0 \dots 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ c_{n1} & c_{n2} \dots 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1n} \\ 0 & c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 \dots c_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó hệ trên có dạng:

$$x = C_1x + C_2x + g \tag{6-30}$$

Ta tiến hành lặp theo công thức:

$$x^{(k)} = C_1x^{(k)} + C_2x^{(k-1)} + g; \ (k \geq 1) \tag{6-31}$$

hay dưới dạng toạ độ:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_j^{(k-1)} + g_i \ ; \ i = 1, 2, \dots, n; \ (k \geq 1) \tag{6-32}$$

Như vậy so với phương pháp lặp đơn (6-27), phương pháp Zayđen hợp lý hơn ở chỗ các thành phần $x_j^{(k)}$, (j = 1, 2,..., i - 1), vừa tính được đã được sử dụng ngay để tính thành phần $x_i^{(k)}$.

Chú ý:

- Có thể chứng minh được phép lặp Zayđen hội tụ nếu $\| C \| < 1$;
- Nói chung phương pháp Zayđen hội tụ nhanh hơn phương pháp lặp đơn;
- Phương pháp Zayđen cho ta tiết kiệm bộ nhớ vì các thành phần vừa tính toán trước được sử dụng ngay để tính các thành phần tiếp theo.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phép lặp Zayđen:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Ta đưa hệ về dạng x = Cx + g:

$$\begin{cases} x_1 = -\ 0,1x_2 - 0,1x_3 + 1,2 \\ x_2 = -0,2x_1 - 0,1x_3 + 1,3 \\ x_3 = -0,2\,x_1 - 0,2x_2 + 1,4 \end{cases}$$

Trong đó:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad g = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

Để kiểm tra điều kiện hội tụ ta tính:

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{1j}| = 0 + 0,1 + 0,1 = 0,2;$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{2j}| = 0,2 + 0 + 0,1 = 0,3;$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{3j}| = 0,2 + 0,2 + 0 = 0,4$$

Do $\| C \| = \max_i \sum_{j=1}^{3} | C_{ij} | = \max\{0,2;\ 0,3;\ 0,4\} = 0,4 < 1$, nên phép lặp Zayđen hội tụ.

Ta tiến hành lặp theo công thức sau:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = -0,1x_2^{(k-1)} - 0,1x_3^{(k-1)} + 1,2 \\ x_2^{(k)} = -0,2x_1^{(k)} - 0,3x_3^{(k-1)} + 1,3 \\ x_3^{(k)} = -0,2x_1^{(k)} - 0,2\,x_2^{(k)} + 1,4 \end{cases}$$

Chọn $x^{(0)} = (1,2,\ 0,\ 0\ )$ ta được kết quả ở bảng sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1,2000	0,0000	0,0000
1	1,20000	1,0600	0,9480
2	0,9992	1,0054	0,9991
3	0,9996	1,0001	1,0001
4	1,0000	1,0000	1,0000
5	1,0000	1,0000	1,0000

Vậy nghiệm đúng của hệ là $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

6.5. PHƯƠNG PHÁP GAOXƠ - ZAYĐEN

Ma trận $A = (a_{ij})$ được gọi là ma trận đường chéo trội, nếu một trong hai điều kiện sau đây thoả mãn:

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}| ; \quad \forall\, i = 1, 2, ..., n; \tag{6-33}$$

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{jj}| ; \quad \forall\, j = 1, 2, ..., n.$$

Khi giải phương trình $Ax = b$, nếu A là ma trận đường chéo trội, ta viết phương trình dưới dạng:

$$a_{ii}x_i + \sum_{j<i} a_{ij}x_j + \sum_{j \geq i} a_{ij}x_j = b_i$$

hay

$$x_i = - \sum_{j<i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j \geq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Vì A là ma trận đường chéo trội nên ma trận C, với:

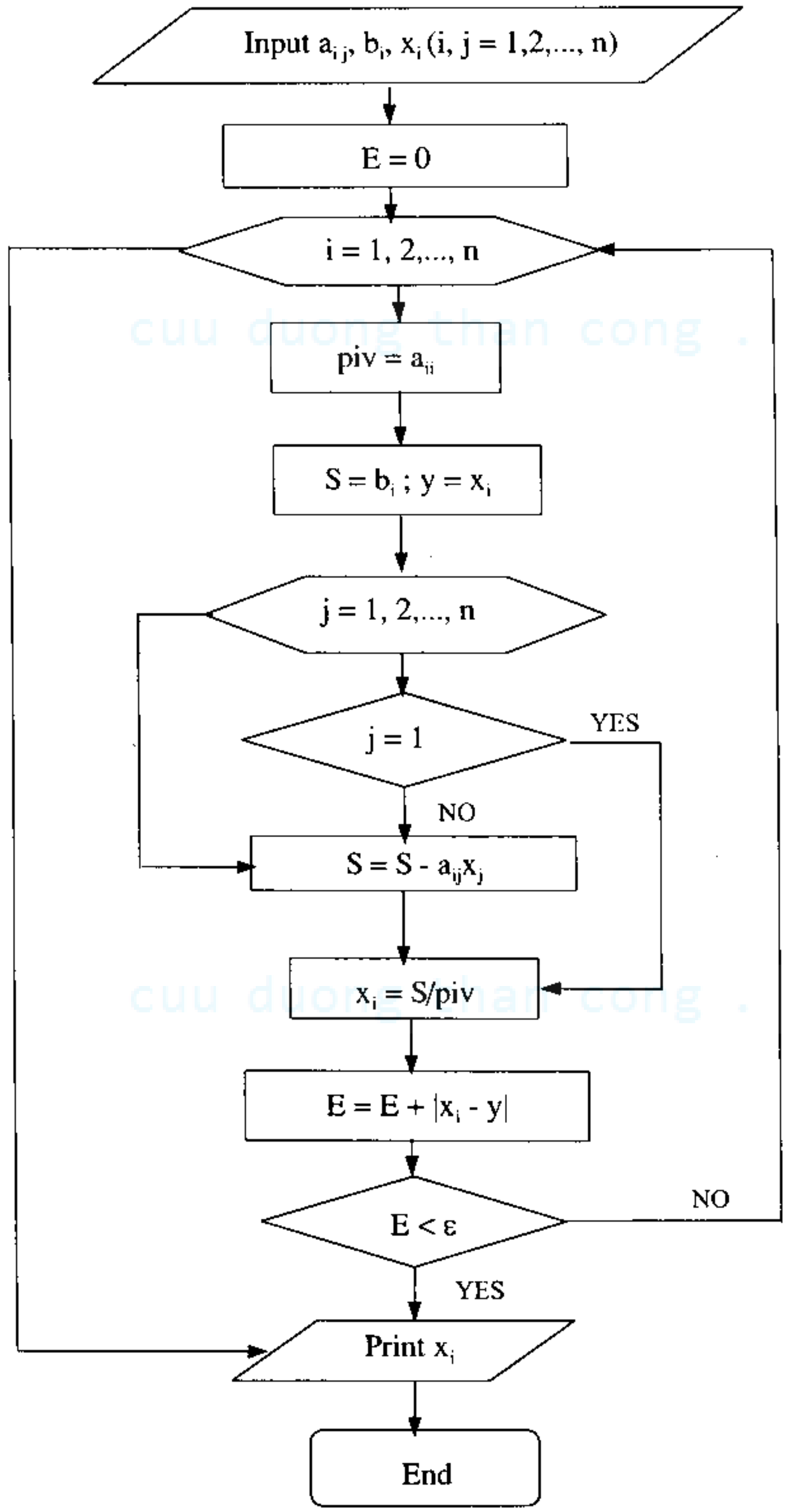
$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{khi } i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{khi } i \neq j \end{cases}$$

có $\| C \| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} | C_{ij} | = \max\limits_i \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{| a_{ij} |}{| a_{ii} |} < 1$, do đó phép lặp sau đây hội tụ:

$$x_i^{(k)} = - \sum_{j<i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j \geq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}} ; \; i = 1, 2, ..., n \tag{6-34}$$

Phương pháp tìm nghiệm của phương trình (6-4) bằng phép lặp trên gọi là phương pháp Gaoxơ - Zayđen.

Sơ đồ khối giải hệ phương trình đại số tuyến tính bằng phương pháp Gaoxơ - Zayđen



B. HỆ PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

Hệ n phương trình phi tuyến với n ẩn số có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{6-35a}$$

hay dưới dạng véctơ:

$$F(X) = 0 \tag{6-35b}$$

Dạng tổng quát (6-35a) có thể được đưa về dạng chuẩn:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{6-36a}$$

Dạng véctơ của (6-36a) là:

$$X = G(X) \tag{6-36b}$$

Ví dụ hệ phương trình phi tuyến:

$$\begin{cases} 2(x_1^2 + x_2^2) - 5 = 0 \\ 4x_1x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

có thể được đưa về dạng chuẩn:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 - k_1[2(x_1^2 + x_2^2) - 5] \\ x_2 = x_2 - k_2(4x_1x_2 - 3) \end{cases}$$

Trong đó: k_1, k_2 là hai hằng số.

6.6. PHƯƠNG PHÁP LẶP

Nội dung của phương pháp này cũng giống như phương pháp lặp đã sử dụng trong bài 5.3 khi giải phương trình một ẩn số. Đầu tiên ta đưa hệ phương trình về dạng chuẩn (6-36), chọn xấp xỉ ban đầu:

$$X^{(0)} = \begin{Bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{Bmatrix}$$

và tính xấp xỉ thứ nhất:

$$x_i^{(1)} = g_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)});\ i = 1, 2,..., n.$$

hay

$$X^{(1)} = G(X^{(0)})$$

Tương tự, xấp xỉ thứ k được tính từ xấp xỉ thứ k - 1:

$$X^{(k)} = G(X^{(k-1)}) \tag{6-37}$$

Nếu như dãy $X^{(0)}, X^{(1)},..., X^{(k)}$ có giới hạn:

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} X^{(k)} \tag{6-38}$$

thì giới hạn đó chính là nghiệm của hệ phương trình (6-36).

Nhận thấy rằng, để có giới hạn (6-38) thì điều kiện cần và đủ là:

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = \alpha_i;\ i = 1, 2,..., n$$

Trong tính toán thực tế, quá trình lặp sẽ dừng lại nếu bất đẳng thức sau được thoả mãn:

$$\max_i \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \le \varepsilon \tag{6-39}$$

Trong đó: ε là sai số tính toán cho trước; x_i (i = 1, 2,..., n) được coi là nghiệm gần đúng của phương trình phi tuyến (6-36).

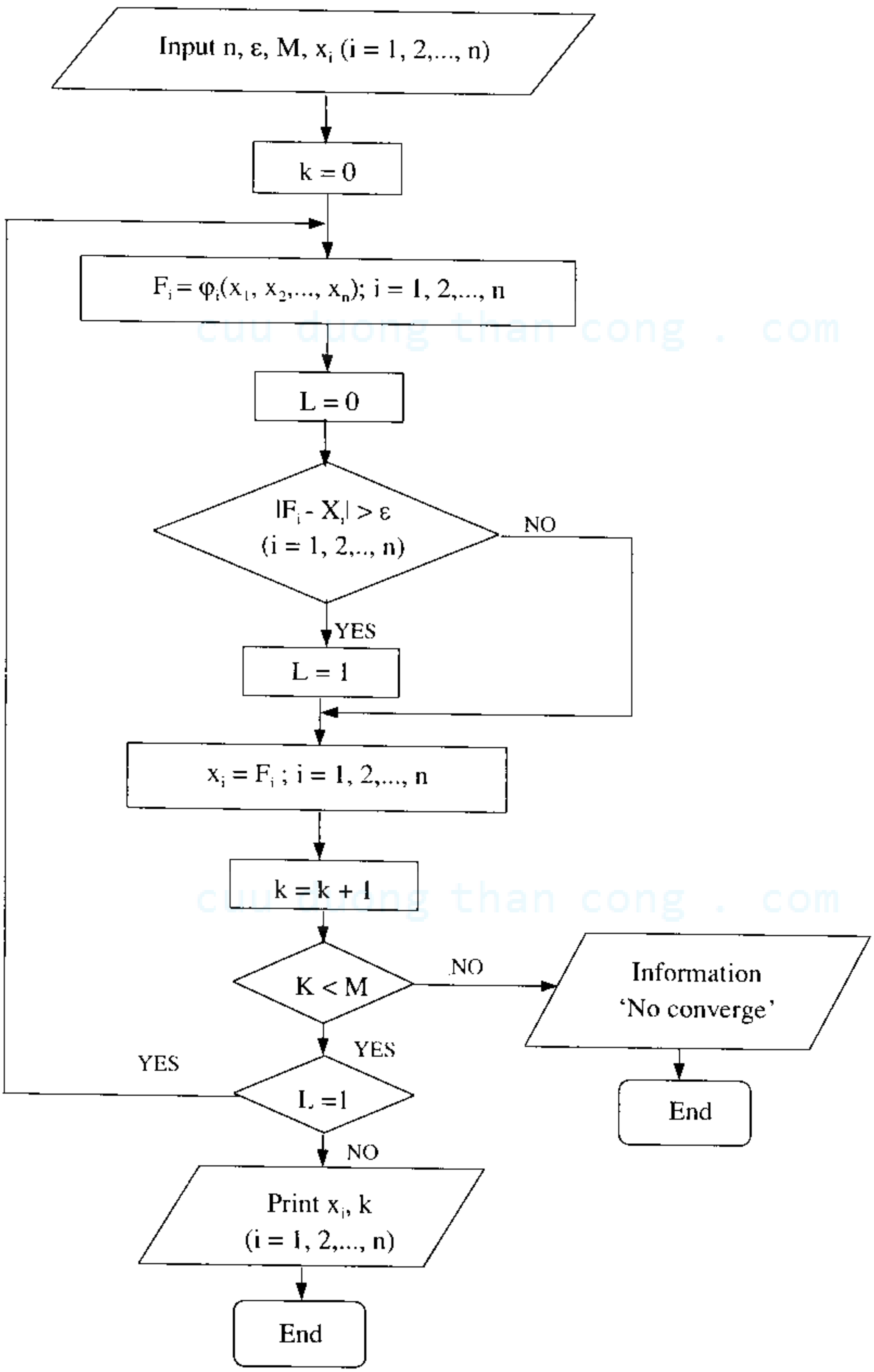
Thuật toán giải hệ phương trình (6-36) bằng phương pháp lặp được cho trước dưới dạng sơ đồ khối, trong đó n là số phương trình; M là số lần lặp; x_i (i = 1, 2,..., n) là xấp xỉ ban đầu. Nếu số lần lặp đã thực hiện k = M thì nhận được thông báo "quá trình không hội tụ" và chương trình dừng tính toán.

Chú ý:

Để quá trình lặp hội tụ nhanh hơn, công thức lặp (6-37) có thể được cải tiến theo ý tưởng của phương pháp lặp Zayđen như khi giải hệ phương trình đại số tuyến tính như sau:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = g_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = g_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2^{(k)} = g_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) \end{cases} \tag{6-40}$$

Sơ đồ khối giải hệ phương trình phi tuyến bằng phương pháp lặp



6.7. PHƯƠNG PHÁP NIUTƠN

Phương pháp Niutơn giải hệ phương trình phi tuyến cũng tương tự như phương pháp đã dùng để giải phương trình một ẩn số f(x) = 0 trong chương V.

Để giải phương trình (6-35b): F(X) = 0, ta khai triển Taylor hàm F(X) sau khi bỏ qua vô cùng bé bậc cao và gọi $\overline{X}$ là nghiệm gần đúng, ta có:

$$F(\overline{X}) = F(X) + \frac{dF}{dX}(\overline{X} - X) = 0$$

hay
$$\frac{dF}{dX}(\overline{X} - X) = -F(X) \qquad (6\text{-}41)$$

Trong đó: $\frac{dF}{dX}$ là ma trận các đạo hàm riêng có các phần tử: $f_{ij} = \frac{\partial f_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j}$

Để tìm nghiệm gần đúng của (6-35b), ta chọn xấp xỉ ban đầu $X^{(0)}$ và xác định $\Delta X^{(1)} = X^{(1)} - X^{(0)}$ từ phương trình (6-41):

$$\begin{cases} f_{11}^{(0)}\Delta x_1^{(1)} + f_{12}^{(0)}\Delta x_2^{(1)} + \cdots + f_{1n}^{(0)}\Delta x_n^{(1)} = -f_1^{(0)} \\ f_{21}^{(0)}\Delta x_1^{(1)} + f_{22}^{(0)}\Delta x_2^{(1)} + \cdots + f_{2n}^{(0)}\Delta x_n^{(1)} = -f_2^{(0)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}^{(0)}\Delta x_1^{(1)} + f_{n2}^{(0)}\Delta x_2^{(1)} + \cdots + f_{nn}^{(0)}\Delta x_n^{(1)} = -f_n^{(0)} \end{cases} \qquad (6\text{-}42)$$

Trong đó: $f_i^{(0)} = f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$;

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial f_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j}, \text{ khi } X = X^{(0)}; \text{ với } i, j = 1, 2, ..., n.$$

Nghiệm gần đúng đầu tiên $X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X^{(1)}$ được sử dụng để tính các nghiệm gần đúng tiếp theo. Như vậy, khi biết nghiệm gần đúng thứ (k - 1) là $X^{(k-1)}$ ta tính được nghiệm gần đúng thứ k là $X^{(k)} = X^{(k-1)} + \Delta X^{(k)}$. Trong đó $\Delta X^{(k)}$ được xác định từ hệ phương trình:

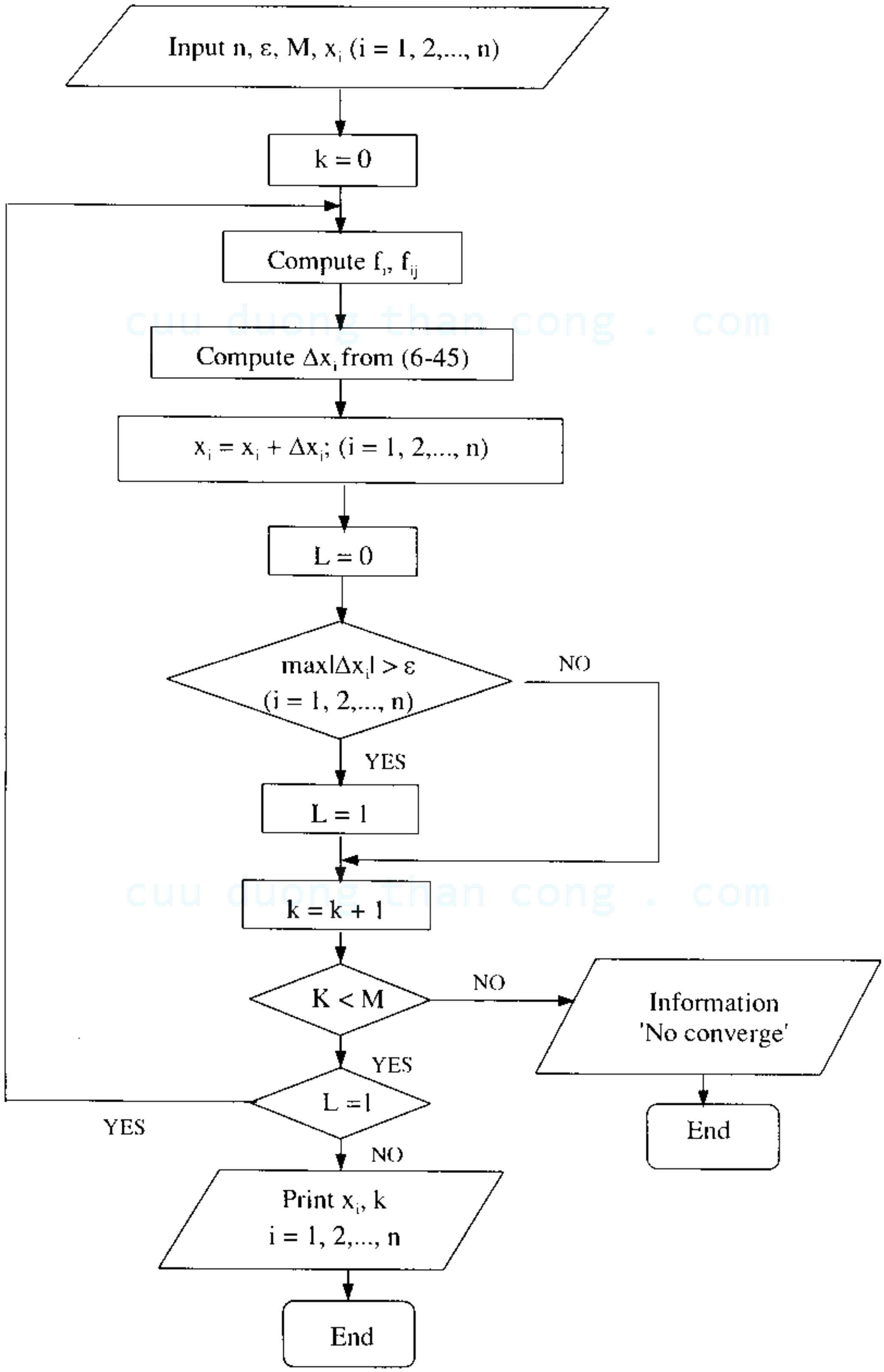
$$\begin{cases} f_{11}^{(k-1)}\Delta x_1^{(k)} + f_{12}^{(k-1)}\Delta x_2^{(k)} + \cdots + f_{1n}^{(k-1)}\Delta x_n^{(k)} = -f_1^{(k-1)} \\ f_{21}^{(k-1)}\Delta x_1^{(k)} + f_{22}^{(k-1)}\Delta x_2^{(k)} + \cdots + f_{2n}^{(k-1)}\Delta x_n^{(k)} = -f_2^{(k-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}^{(k-1)}\Delta x_1^{(k)} + f_{n2}^{(k-1)}\Delta x_2^{(k)} + \cdots + f_{nn}^{(k-1)}\Delta x_n^{(k)} = -f_n^{(k-1)} \end{cases} \qquad (6\text{-}43)$$

Ở đây: $f_i^{(k-1)} = f_i(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, ..., x_n^{(k-1)})$;

$$f_{ij}^{(k-1)} = \frac{\partial f_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j}, \text{ khi } X = X^{(k-1)}; \text{ với } i, j = 1, 2, ..., n.$$

Quá trình giải kết thúc khi điều kiện (6-39) được thoả mãn.

Sơ đồ khối giải hệ phương trình phi tuyến bằng phương pháp Niutơn



Bài tập

1- Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gaoxơ:

a. $$\begin{cases} 2,1x_1 - 4,5x_2 - 2,0x_3 = 19,07 \\ 3,0x_1 + 2,5x_2 + 4,3x_3 = 3,21 \\ -6,0x_1 + 3,5x_2 + 2,5x_3 = -18,25 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} 8,64x_1 + 1,71x_2 + 5,42x_3 = 10,21 \\ -6,39x_1 + 4,25x_2 + 1,84x_3 = 3,41 \\ 4,21x_1 + 7,92x_2 - 3,41x_3 = 12,29 \end{cases}$$

Các phép tính lấy đến 5 số lẻ thập phân.

2- Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn, tiến hành lặp cho đến khi:

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_1 < \varepsilon$$

a. $$\begin{cases} 1,02x_1 - 0,25x_2 - 0,30x_3 = 0,515 \\ -0,41x_1 + 1,13x_2 - 0,15x_3 = 1,555 \\ -0,25x_1 - 0,14x_2 + 1,21x_3 = 2,780 \end{cases}$$

với $\varepsilon = 10^{-3}$. So sánh với nghiệm chính xác $x_1 = 2,0$, $x_2 = 2,5$, $x_3 = 3,0$.

b. $$\begin{cases} 8,714x_1 + 2,180x_2 + 5,684x_3 = 49,91 \\ -1,351x_1 + 10,724x_2 + 5,224x_3 = 50,17 \\ 2,489x_1 - 0,459x_2 + 6,799x_3 = 32,68 \end{cases}$$

với $\varepsilon = 10^{-4}$.

3- Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Zayđen, với $\varepsilon = 0,04$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 11 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Đáp số

1. a) $x_1 = 1,34$; $x_2 = -4,76$; $x_3 = 2,58$

   b) $x_1 = 0,58000$; $x_2 = 1,45834$; $x_3 = 0,49908$

2. b) $x_1 = 2,9274$; $x_2 = 3,0505$; $x_3 = 4,8286$

3. $x_1 = 0,990$; $x_2 = 2,001$; $x_3 = 1,006$; $x_4 = 1,995$

Chương VII
GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

7.1. MỞ ĐẦU

Rất nhiều các bài toán trong kỹ thuật dẫn đến việc phải giải các phương trình vi phân thường. Tuy nhiên, chỉ có một số phương trình vi phân đơn giản mới có lời giải chính xác. Vì vậy, các phương pháp giải gần đúng phương trình vi phân có ý nghĩa rất quan trọng khi giải quyết các bài toán thực tế.

Các bài toán về phương trình vi phân thường gặp trong thực tế có thể được phân làm hai loại: bài toán Côsi (Cauchy) và bài toán biên.

7.1.1. Bài toán Côsi hay bài toán trị ban đầu là bài toán dạng phương trình vi phân với điều kiện bổ sung đã cho tại không quá một điểm. Ví dụ bài toán Côsi đối với phương trình vi phân cấp một được phát biểu như sau:

Tìm hàm $y = y(x)$ xác định trên đoạn $[x_o, \bar{x}]$ và thoả mãn:

$$y' = f(x, y)\ ;\quad x_0 \le x \le \bar{x} \tag{7-1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{7-2}$$

Trong đó: $f(x, y)$ là hàm số đã biết; còn y_0 là số thực cho trước.

7.1.2. Bài toán biên là bài toán dạng phương trình vi phân, với điều kiện bổ sung được cho tại nhiều hơn một điểm. Ví dụ bài toán biên đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có dạng:

Tìm hàm $y = y(x)$ trên $[a, b]$ thoả mãn:

$$y' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\ ;\ a \le x \le b \tag{7-3}$$

với điều kiện:

$$y(a) = \alpha\ ;\ \ y(b) = \beta \tag{7-4}$$

Để giải gần đúng các phương trình vi phân, người ta thường dùng hai phương pháp:

- Phương pháp giải tích là phương pháp tìm nghiệm phương trình vi phân dưới dạng biểu thức giải tích.

- Phương pháp số là phương pháp tìm nghiệm dưới dạng một bảng số. Trong phương pháp này ta chỉ tìm được nghiệm của phương trình vi phân tại một số điểm mà thôi.

7.2. GIẢI BÀI TOÁN CÔSI BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

7.2.1. Phương pháp chuỗi Taylor

Giả sử tìm nghiệm của phương trình vi phân:

$$y' = f(x, y); \quad x_0 \le x \le \bar{x} \tag{7-5}$$

thoả mãn điều kiện:

$$y(x_0) = y_0 \tag{7-6}$$

Trong đó: f(x,y) là hàm liên tục và có đạo hàm riêng các cấp liên tục tại điểm (x_0, y_0).

Ta tìm nghiệm của bài toán trên dưới dạng khai triển Taylor của hàm:

$$\begin{aligned} y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \cdots \end{aligned} \tag{7-7}$$

Để xác định y(x) ta cần xác định $y(x_0)$ và các đạo hàm $y^{(k)}(x_0)$.

Theo giả thiết (7-6) $\quad y(x_0) = y_0$;

Theo (7-5) $\quad y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) \quad$ (7-8)

Đạo hàm (7-5) ta sẽ được các đạo hàm cấp cao tiếp theo. Ví dụ:

$$y'' = (y')' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

Thay $x = x_0$ vào biểu thức trên được:

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) f(x_0, y_0)$$

Tiếp tục ta có thể tìm được các hệ số còn lại của chuỗi (7-7).

Người ta đã chứng minh được rằng với x khá gần x_0, chuỗi (7-7) sẽ hội tụ về nghiệm của bài toán (7-5), (7-6) và do đó tổng riêng thứ n của chuỗi là nghiệm gần đúng của bài toán. Độ chính xác của nghiệm càng cao nếu n càng lớn.

Ưu điểm của phương pháp chuỗi Taylor là đơn giản nhưng tính toán mất rất nhiều công sức, hơn nữa bán kính hội tụ của chuỗi (7-7) lại khó xác định.

Ví dụ: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân:

$$y' = 2x - 1 + y^2 \tag{1}$$

với điều kiện $y(0) = 1$.

Giải: Ta tìm nghiệm dưới dạng chuỗi Taylor (7-7).

Theo đề bài $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y'(0) = 2.0 - 1 + 1^2 = 0$ (2)

Đạo hàm (1) được:

$$y'' = 2 + 2yy' \tag{3}$$

Vậy $y''(0) = 2 + 2.1.0 = 2$

Đạo hàm (3) ta có:

$$y''' = 2y'^2 + 2yy''$$

Do đó $y'''(0) = 2.0 + 2.1.2 = 4$

Tiếp tục ta tính được: $y^{(4)}(0) = 8; \ldots$

Thay các kết quả tính được vào (7-7) ta được nghiệm gần đúng của bài toán:

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \cdots$$

7.2.2. Phương pháp xấp xỉ liên tiếp Pica (Picard)

Giả sử các điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (7-5), (7-6) được thoả mãn. Ta nhận thấy rằng việc giải bài toán này hoàn toàn tương đương với việc tìm nghiệm của phương trình tích phân:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\,dt \tag{7-9}$$

Nội dung phương pháp xấp xỉ liên tiếp Pica là tìm nghiệm gần đúng thứ n của bài toán (7-5), (7-6) theo công thức quy nạp:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt \tag{7-10}$$

Trong đó, để đơn giản ta chọn nghiệm gần đúng đầu tiên là:

$$y(x_0) = y_0$$

Theo lý thuyết phương trình vi phân, nếu hàm $f(x, y)$ xác định liên tục trong miền $G\{|x - x_0| \le a; |y - y_0| \le b$, đồng thời thoả mãn điều kiện Lipsit theo biến y thì quá trình xấp xỉ liên tiếp (7-10) hội tụ đều về nghiệm duy nhất của (7-9) trong đoạn:

$$|x - x_0| \le h \;\; ; \;\; h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

Trong đó: $M = \max|f(x, y)|$; $\forall (x, y) \in G$.

Sai số của nghiệm gần đúng thứ n là:

$$\varepsilon_n = |y(x) - y_n(x)| \le MN^n \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (7\text{-}11)$$

Trong đó hằng số Lipsit N thoả mãn:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N\,|y_1 - y_2| \qquad (7\text{-}12)$$

Ví dụ: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân sau theo phương pháp xấp xỉ liên tiếp Pica:

$$y' = x - y$$
$$y(0) = 1$$

Giải:

Chọn $y_0(x) = y(0) = 1$. Theo (7-10):

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x - 1)dx = 1 - x + \frac{x^2}{2};$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[x - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right]dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6};$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left[x - \left(1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\right]dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24};$$

cuu duong than cong . com

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left[x - \left(1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}\right)\right]dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120};$$

....

$$y_n(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3.4} - \frac{x^5}{3.4.5} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{3.4.5...(n+1)}$$

Để đánh giá sai số ta xét miền G $\{0 \le x \le a;\ |y| \le b\}$.

Chọn $a \ge 1$, $b \ge 1$. Với $(x, y) \in G$ ta có:

$$|f(x, y)| = |x - y| \le |x| + |y| \le a + b = M$$

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(a, \frac{b}{a+b}\right) = \frac{b}{a+b}; \text{ (vì } a \geq 1)$$

Chọn $a = 1$; $b = 2 \rightarrow h = \frac{2}{3}$

$$N = \max |f_y'(x, y)| = 1$$

Áp dụng công thức (7-12) cho $x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ ta có sai số:

$$\varepsilon_n \leq MN^n \cdot \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} = 3 \cdot \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^{n+1}}{3^n(n+1)!}$$

Với $n = 4$: $\varepsilon_4 \leq \frac{2^5}{3^4.5!} \approx 3.10^{-3}$

7.3. GIẢI BÀI TOÁN CÔSI BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỐ

7.3.1. Phương pháp Ơle (Euler)

Để tìm nghiệm của bài toán Côsi (7-5), (7-6) trên đoạn $[x_0, \bar{x}]$ ta chia đoạn này thành n đoạn con có độ dài h bằng nhau: $h = \frac{\bar{x} - x_0}{n}$ bởi các điểm chia x_i : $x_i = x_0 + ih$; $i = 1, 2, ..., n$.

Theo công thức Taylor:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(c_i)}{2!}(x - x_i)^2$$

Trong đó:

$$c_i = x_i + \theta(x - x_i);\ 0 < \theta < 1$$

Thay $x = x_{i+1}$ vào trong công thức trên ta được:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2}y''(c_i)$$

Gọi y_i là giá trị gần đúng của hàm $y(x)$ tại giá trị x_i. Nếu h bé thì số hạng cuối ở vế phải cũng bé, có thể bỏ qua được. Khi đó trong công thức trên, nếu thay $y(x_i)$ bằng giá trị gần đúng y_i ta được:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}13)$$

Công thức này cho phép tính được giá trị gần đúng của hàm y(x) tại x_{i+1} khi biết giá trị gần đúng của hàm tại giá trị x_i. Nếu ta chọn $y(x_0) = y_0$, từ công thức này ta tính được y_1, sau đó ta tính tiếp được $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Phương pháp tìm nghiệm gần đúng của bài toán Côsi như trên gọi là phương pháp Ơle. Phương pháp này rất đơn giản, độ chính xác không cao nhưng nếu tăng số đoạn chia lên thì nghiệm tìm được sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác.

Ví dụ: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân:

$$y' = \frac{xy}{2}$$

thoả mãn $y(0) = 1$ trong đoạn $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Giải:

Theo đề bài $f(x,y) = \frac{xy}{2}$, $x_0 = 0$, $\bar{x} = \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$.

Chọn h = 0,1; áp dụng liên tiếp công thức (7-13) ta được kết quả ghi trong bảng. Để tính sai số ở cột cuối bảng ta ghi giá trị của nghiệm đúng:

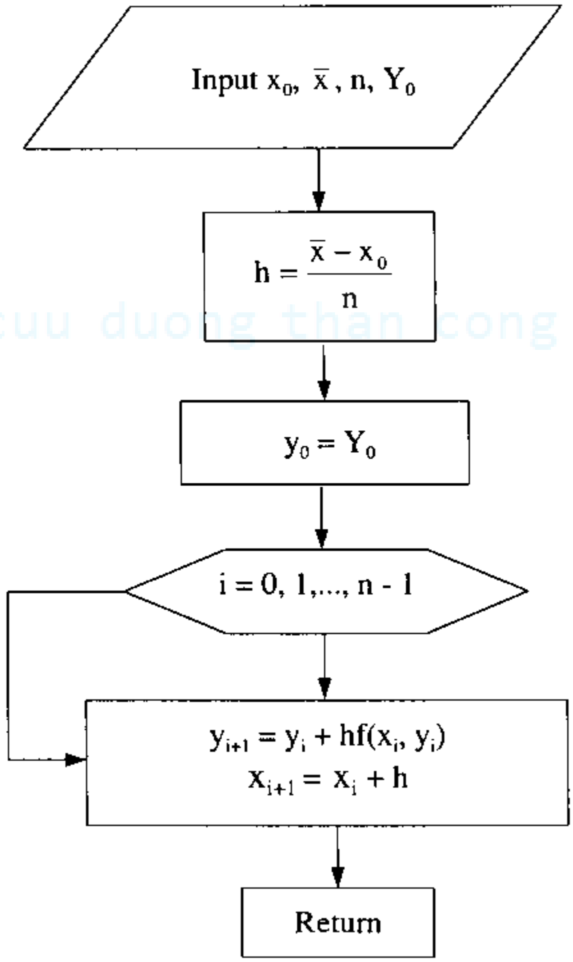
$$y(x) = e^{\frac{x^2}{4}}$$

Bảng 7.1

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$hf(x_i, y_i)$	$y(x_i) = e^{\frac{x_i^2}{4}}$
0	0	1	0	0	1
1	0,1	1	0,05	0,005	1,0025
2	0,2	1,005	0,1005	0,0101	1,0100
3	0,3	1,0151	0,1523	0,0152	1,0227
4	0,4	1,0303	0,2067	0,0207	1,0408
5	0,5	1,0510	0,2627	0,0263	1,0645

Theo kết quả trong bảng ta thấy sai số mắc phải ≈ 0,01 = h^2.

Sơ đồ khối tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân theo phương pháp Ơle



7.3.2. Phương pháp Ơle cải tiến

Phương pháp Ơle bên trên có nhược điểm là khi tính y_{i+1} theo công thức (7-13), ta đã bỏ qua sự thay đổi của $y' = f(x, y)$ trong đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, coi giá trị đó là hằng số đúng bằng $f(x_i, y_i)$. Như vậy, trong khoảng nào mà $f(x, y)$ thay đổi nhiều thì sai số mắc phải sẽ lớn. Để tránh nhược điểm này, người ta thường sử dụng phương pháp Ơle - Côsi hay còn được gọi là phương pháp hình thang dưới đây.

Trong công thức (7-13) ta thay $f(x_i, y_i)$ bằng $f[c_i, y(c_i)]$. Trong đó:

$$f[c_i, y(c_i)] = \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]; \; x_i \le c_i \le x_{i+1}$$

Như vậy công thức Ơle sẽ có dạng:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \tag{7-14}$$

Để tính y_{i+1} trong biểu thức $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ ta dùng công thức Ơle:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Vì vậy, để xác định nghiệm của phương trình (7-5), (7-6) ta có thể dùng công thức:

$$y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{7-15}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})]$$

Ví dụ: Giải bài toán Côsi sau theo phương pháp Ơle cải tiến:

$$y' = y - \frac{2x}{y};\ 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1.$$

Giải:

Trong bài toán này $x_0 = 0$; $\bar{x} = 1$; $y_0 = 1$; $f(x, y) = y - \dfrac{2x}{y}$

Chia đoạn [0, 1] thành 5 đoạn con bằng nhau, bởi các điểm chia $x_i = ih$; $i = 0, 1, ..., 5$; $h = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

Các công thức tính:

$$y^*_{i+1} = y_i + h\left(y_i - \frac{2x_i}{y_i}\right) = y_i + hf_i;$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[\left(y_i - \frac{2x_i}{y_i}\right) + \left(y^*_{i+1} - \frac{2x_{i+1}}{y^*_{i+1}}\right)\right] =$$

$$= y_i + \frac{h}{2}(f_i + f^*_{i+1})$$

Kết quả tính toán cho trong bảng sau. Để đánh giá sai số, ở cột cuối của bảng ghi kết quả nghiệm chính xác của bài toán:

$$y = \sqrt{2x+1}$$

Bảng 7-2

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2}f_i$	x_{i+1}	y^*_{i+1}	$\frac{h}{2}f^*_{i+1}$	$\frac{h}{2}(f_i+f^*_{i+1})$	Nghiệm chính xác $y=\sqrt{2x+1}$
0	0	1	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867	1,0000
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,0767	0,1617	1,1832
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454	1,3416
3	0,6	1,4938	0,0690	0,8	1,6180	0,0651	0,1341	1,4832
4	0,8	1,6272	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263	1,6124
5	1,0	1,7542						1,7320

So sánh giá trị của nghiệm gần đúng ở cột 3 với giá trị của nghiệm chính xác ở cột cuối ta thấy sai số mắc phải cỡ 0,01.

Chú ý:

- Để tính được nghiệm gần đúng theo công thức (7-14) chính xác hơn, ta có thể dùng phép lặp đơn theo công thức:

$$y^{(0)}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i); \qquad (7\text{-}16)$$

$$y^{(k)}_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{(k-1)}_{i+1})]$$

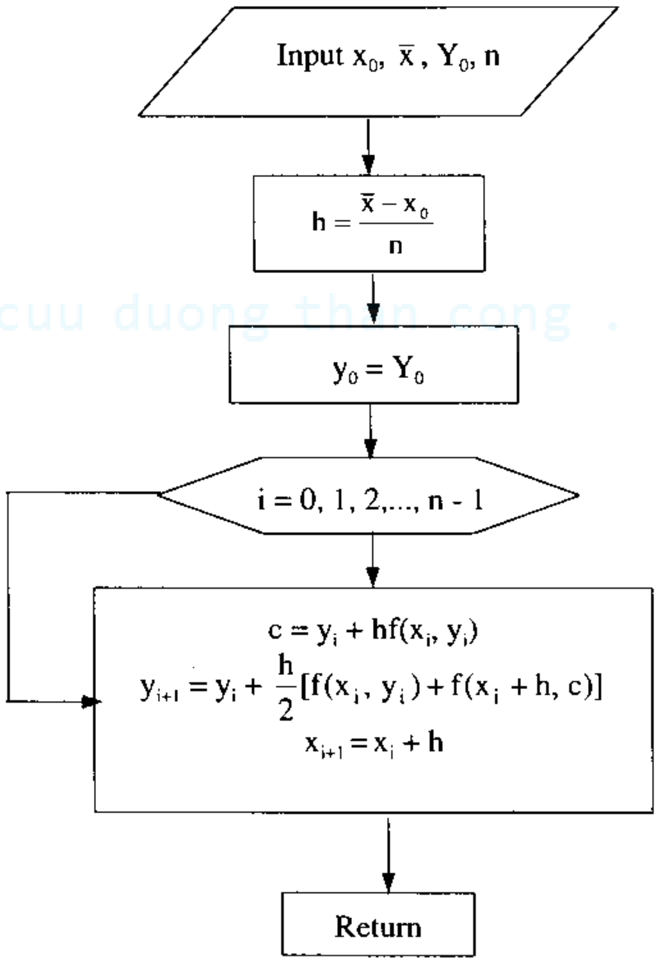
Quá trình lặp được dừng lại ở bước k khi:

$$\left| y^{(k)}_{y+1} - y^{(k-1)}_{i+1} \right| \le \varepsilon;\ \varepsilon \text{ là sai số cho trước.}$$

- Người ta chứng minh được rằng phương pháp Ơle cải tiến có độ chính xác cấp hai:

$$| y_i - y(x_i) | = 0(h^2)$$

Sơ đồ khối tìm nghiệm phương trình vi phân cấp một theo phương pháp Ơle - Côsi



7.3.3. Phương pháp Runge - Kutta

Hai nhà toán học Đức Runge và Kutta đã đề xuất một phương pháp để nâng cao độ chính xác nghiệm của bài toán phương trình vi phân phân cấp một (7-5), (7-6).

Ý tưởng của phương pháp này là tăng độ chính xác của giá trị y_{i+1} tại điểm $x_i + h$, ta đưa vào một vài điểm trung gian trong đoạn $[x_i, x_i + h]$ (chẳng hạn điểm $x_i + \frac{h}{2}$). Các hằng số trong công thức Runge - Kutta sẽ được xác định sao cho giá trị y_{i+1} có độ chính xác cao nhất.

Công thức Runge - Kutta cấp 4 như sau:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7-17}$$

Trong đó:

$$k_1 = hf(x_i, y_i);$$
$$k_2 = hf(x_i + 0{,}5h, y_i + 0{,}5k_1);$$
$$k_3 = hf(x_i + 0{,}5h, y_i + 0{,}5k_2); \qquad (7\text{-}18)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Người ta chứng minh rằng công thức Runge - Kutta có độ chính xác cấp 4, nghĩa là:

$$|y_i - y(x_i)| = 0(h^4)$$

Để áp dụng công thức Runge - Kutta (7-17), ta xuất phát từ $y(x_0) = y_0$ rồi tính y_1 tại điểm $x_1 = x_0 + h$, tiếp theo ta sử dụng y_1 để tính y_2 tại điểm $x_2 = x_1 + h$,..., cuối cùng ta tính được y_n tại điểm $x_n = \bar{x}$.

Phương pháp Runge - Kutta có ưu điểm là muốn tính y_{i+1} ta chỉ cần biết giá trị của y_i mà không cần biết các giá trị khác trước nó, đồng thời bước tính h cũng không nhất thiết phải bằng nhau. Phương pháp lại có độ chính xác cao, đơn giản và dễ lập trình.

Trong trường hợp các điểm chia đoạn $[x_0, \bar{x}]$ cách đều nhau có bước là h = const, ta có thể sử dụng bảng dưới đây để tính:

Bảng 7-3

i	x	y	k = hf(x, y)	Δy
0	x_0	y_0	k_1^0	k_1^0
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^0}{2}$	k_2^0	$2k_2^0$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^0}{2}$	k_3^0	$2k_3^0$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^0$	k_4^0	k_4^0
				Δy_0
1	x_1	y_1		

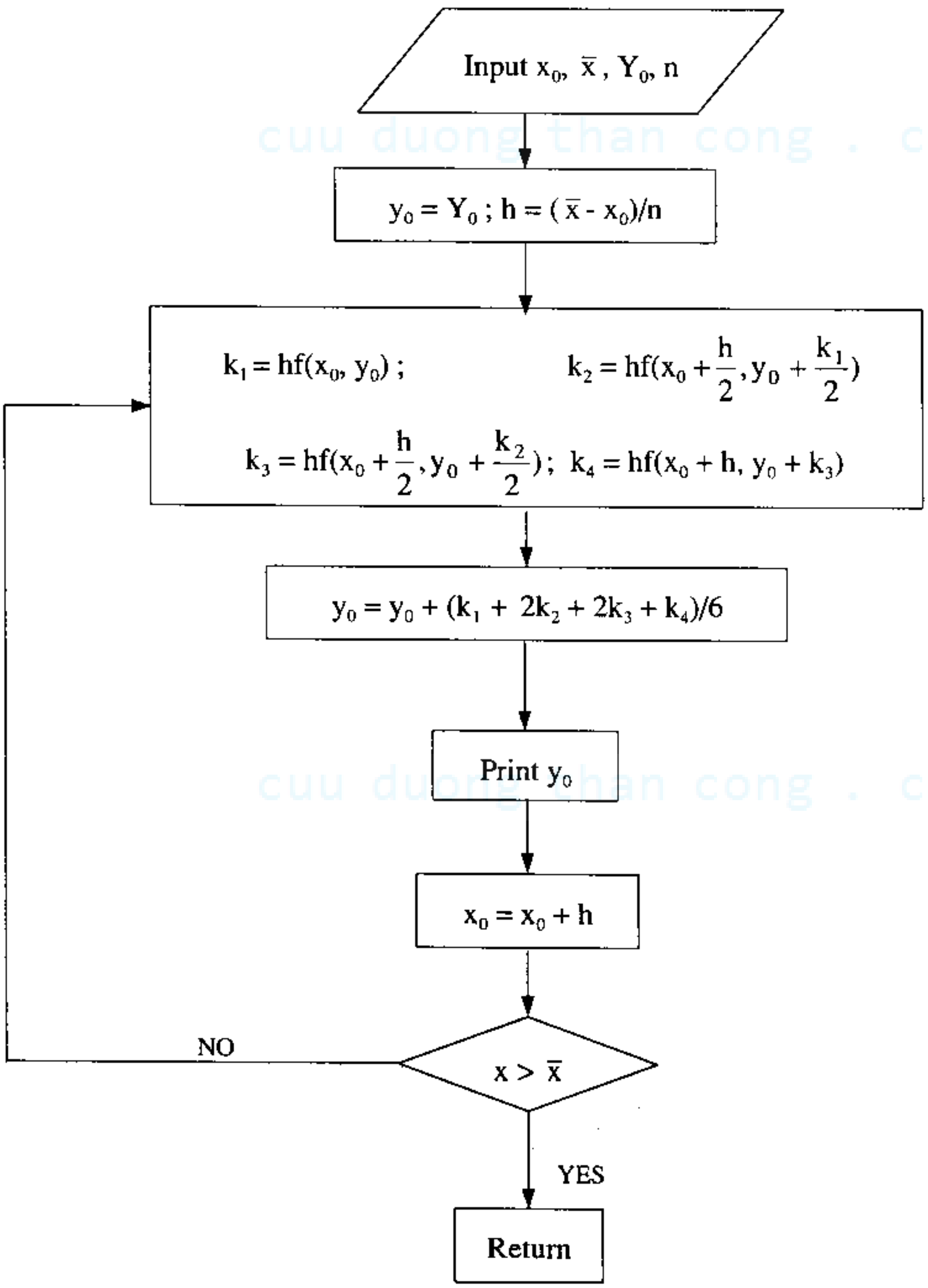
Trình tự tính toán được tiến hành như sau:

Đầu tiên ghi vào hàng thứ nhất giá trị x_0, y_0 đã biết, rồi tính k_1^0 theo công thức (7-18), sau đó điền vào hàng thứ nhất. Lần lượt tính các giá trị của hàng thứ hai, thứ ba, thứ tư.

Căn cứ vào cột cuối tính được $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, từ đó suy ra y_1. Quá trình tính toán ở bước hai để tìm giá trị y_2 lặp lại hoàn toàn giống quá trình tính y_1 ở bước 1.

Cứ tiến hành theo trình tự này, cuối cùng ta tìm được giá trị y_n tại $x_n = \bar{x}$.

Sơ đồ khối giải phương trình vi phân cấp một bằng phương pháp Runge - Kutta



7.4. GIẢI BÀI TOÁN CÔSI ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

Đối với hệ phương trình vi phân cấp một, bài toán Côsi được phát biểu như sau:

Cho khoảng $[x_0, \bar{x}]$, tìm các hàm một biến $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ xác định trên khoảng $[x_0, \bar{x}]$ và thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \quad (7\text{-}19)$$

với điều kiện:

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, y_2(x_0) = y_{2,0}, ..., y_n(x_0) = y_{n,0} \quad (7\text{-}20)$$

Trong đó: $f_1, f_2, ..., f_n$ là các hàm đã biết.

Để giải hệ phương trình (7-19) với điều kiện (7-20), ta có thể dùng tất cả các phương pháp như khi giải bài toán Côsi đối với phương trình vi phân cấp một.

7.4.1. Phương pháp chuỗi Taylor

Nghiệm gần đúng của hệ phương trình (7-19) với điều kiện (7-20) theo phương pháp chuỗi Taylor có dạng:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_1(x_0) + (x - x_0)y'_1(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2} y_1''(x_0) + \cdots \\ y_2(x) = y_2(x_0) + (x - x_0)y'_2(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2} y''_2(x_0) + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = y_n(x_0) + (x - x_0)y'_n(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2} y''_n(x_0) + \cdots \end{cases} \quad (7\text{-}21)$$

Trong đó:

$y_1(x_0) = y_{1,0}$; $y_2(x_0) = y_{2,0}$;...; $y_n(x_0) = y_{n,0}$;

$y'_1(x_0) = f_1(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0),..., y_n(x_0)) = f_1(x_0, y_{1,0}, y_{2,0},..., y_{n,0})$;

$y'_2(x_0) = f_2(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0),..., y_n(x_0)) = f_2(x_0, y_{1,0}, y_{2,0},..., y_{n,0})$;

....

$y'_n(x_0) = f_n(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0),..., y_n(x_0)) = f_n(x_0, y_{1,0}, y_{2,0},..., y_{n,0})$

Các đạo hàm từ cấp hai trở lên tại điểm x_0 của các hàm $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ được xác định bằng cách lấy đạo hàm hệ phương trình (7-19).

7.4.2. Phương pháp Ơle

Chia đoạn $[x_0, \bar{x}]$ thành n phần bằng nhau với các điểm chia:

$$x_i = x_0 + ih;\ h = \frac{\bar{x} - x_0}{n};\ i = 0, 1, 2,..., n.$$

Theo Ơle, nghiệm của bài toán Côsi đối với hệ phương trình vi phân cấp một có dạng:

$$y_{j,i+1} = y_{j,i} + hf_j\,(x_i, y_{1,i}, y_{2,i},..., y_{n,i}) \qquad (7\text{-}22)$$

Trong đó:

$$y_{j,i} = y_j(x_i);\ j = 1, 2,..., n.$$

Vì $y_{1,0}, y_{2,0},..., y_{n,0}$ đã biết nên ta có thể xác định giá trị của các hàm $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ tại các điểm chia.

7.4.3. Phương pháp Ơle cải tiến

Tương tự như công thức (7-15), nghiệm của bài toán Côsi đối với hệ phương trình vi phân cấp một có dạng:

$$y^*_{j,i+1} = y_{j,i} + hf_j(x_i, y_{1,i}, y_{2,i},..., y_{n,i}); \qquad (7\text{-}23)$$

$$y_{j,i+1} = y_{j,i} + \frac{h}{2}[\, f_j(x_i, y_{1,i}, y_{2,i},..., y_{n,i}) + f_j(x_{i+1}, y^*_{1,i+1},...,y^*_{n,i+1})]$$

Cho i = 0 ta tính được $y^*_{j,1}$ (j = 1, 2,..., n). Thay giá trị này vào công thức thứ hai ta xác định được $y_{j,1}$ (j = 1, 2,..., n).

Cho i = 1, tương tự như trên ta sẽ xác định được $y_{j,2}$.

Tiếp tục quá trình này sẽ tính được $y_{j,3}, y_{j,4},..., y_{j,n}$. Đó là các giá trị gần đúng của hàm $y_j(x)$ tại các điểm chia.

Để nâng cao độ chính xác của nghiệm khi đã biết $y_{j,i}$, ta có thể tính $y_{j,i+1}$ theo phép lặp sau:

$$y^{(0)}_{j,i+1} = y_{j,i} + hf_j(x_i, y_{1,i}, y_{2,i},..., y_{n,i});$$

$$y^{(k+1)}_{j,i+1} = y_{j,i} + \frac{h}{2}[\, f_j(x_i, y_{1,i}, y_{2,i},..., y_{n,i}) + f_j(x_{i+1}, y^{(k-1)}_{1,i+1},..., y^{(k-1)}_{n,i+1})];$$

với k = 0, 1, 2,...

Quá trình lặp sẽ dừng lại khi:

$$\left| y^{(k)}_{j,i+1} - y^{(k-1)}_{j,i+1} \right| < \varepsilon;\ \varepsilon > 0 \text{ là sai số cho trước.}$$

7.4.4. Phương pháp Runge - Kutta

Theo phương pháp Runge - Kutta, nghiệm của bài toán (7-19), (7-20) là :

$$y_{j,i+1} = y_{j,i} + \frac{1}{6}(k_{j,1} + 2k_{j,2} + 2\,k_{j,3} + k_{j,4}) \qquad (7\text{-}24)$$

Trong đó:

$y_{j,0}$; $j = 1, 2, 3,..., n$ đã biết theo (7-20);

$$k_{j,1} = hf_j(x_i, y_{1,i}, y_{2,i},..., y_{n,i}); \qquad (7\text{-}25)$$

$$k_{j,2} = hf_j(x_i + 0{,}5h, y_{1,i} + 0{,}5k_{1,1}, y_{2,i} + 0{,}5k_{2,1},..., y_{n,i} + 0{,}5k_{n,1});$$

$$k_{j,3} = hf_j(x_i + 0{,}5h, y_{1,i} + 0{,}5k_{1,2}, y_{2,i} + 0{,}5k_{2,2},..., y_{n,i} + 0{,}5k_{n,2});$$

$$k_{j,4} = hf_j(x_i + 0{,}5h, y_{1,i} + 0{,}5k_{1,3}, y_{2,i} + 0{,}5k_{2,3},..., y_{n,i} + 0{,}5k_{n,3})$$

7.5. GIẢI BÀI TOÁN CÔSI ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

Bài toán Côsi đối với phương trình vi phân cấp cao được phát biểu như sau:

Tìm hàm số $y = y(x)$ xác định trên đoạn $[x_0, \bar{x}]$ thoả mãn phương trình vi phân:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}) \qquad (7\text{-}26)$$

với các điều kiện:

$$y(x_0) = y_{1,0}, y'(x_0) = y_{2,0},..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n,0} \qquad (7\text{-}27)$$

Bài toán này có thể đưa về bài toán Côsi đối với hệ phương trình vi phân cấp một với cách đặt như sau:

$$y_1 = y, y_2 = y',..., y_n = y^{(n-1)}$$

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ .... \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

với điều kiện:

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, y_2(x_0) = y_{2,0},..., y_n(x_0) = y_{n,0}$$

Đây là hệ phương trình vi phân cấp một, ta có thể dùng các phương pháp trong mục 7.4 để giải.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân cấp hai sau bằng phương pháp Ơle:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0;\ 1 \le x \le 1{,}5$$

với điều kiện:

$$y(1) = 0{,}77,\ y'(1) = -0{,}44;\ \text{với bước } h = 0{,}1.$$

Giải:

Đặt $y' = z$, $y'' = z'$; ta đưa phương trình trên về hệ phương trình:

$$y' = z;\ \ z' = -\frac{z}{x} - y$$

với điều kiện:

$$y(1) = -0{,}77,\ \ z(1) = -0{,}44$$

Như vậy $\qquad f_1(x, y, z) = z;\ f_2(x, y, z) = -\frac{z}{x} - y$

Theo công thức (7-22) của phương pháp Ơle ta có:

$$y_{i+1} = y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i); \qquad (1)$$

$$z_{i+1} = z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i) \qquad (2)$$

Kết quả tính toán theo công thức trên được đưa vào bảng dưới đây.

Bảng 7.4

i	x_i	y_i	Δy_i	$f_{1i} = z_i$	Δz_i	$f_{2i} = -\frac{z_i}{x_i} - y_i$
0	1,0	0,77	- 0,044	- 0,44	- 0,033	- 0,33
1	1,1	0,726	- 0,047	- 0,473	- 0,030	- 0,296
2	1,2	0,679	- 0,050	- 0,503	- 0,026	- 0,260
3	1,3	0,629	- 0,053	- 0,529	- 0,022	- 0,222
4	1,4	0,576	- 0,055	- 0,551		
5	1,5	0,521				

Trình tự tính toán được tiến hành như sau:

Ghi vào hàng thứ nhất $i = 0$; $x_0 = 1{,}0$; $y_0 = 0{,}77$; $z_0 = -0{,}44$

Sau đó tính: $\qquad f_{10} = f_1(x_0, y_0, z_0) = z_0 = -0{,}44;$

$$f_{20} = f_2(x_0, y_0, z_0) = -\frac{z_0}{y_0} - y_0 = -0,33$$

Theo (1), (2) ta có:

$$\Delta y_0 = hf_{10} = 0,1(-0,44) = -0,044,\ \ y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0,726;$$

$$\Delta z_0 = hf_{20} = 0,1(-0,33) = -0,033,\ \ z_1 = z_0 + \Delta z_0 = -0,473$$

Các hàng sau của bảng được tính tương tự như hàng thứ nhất.

7.6. GIẢI BÀI TOÁN BIÊN BẰNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN

7.6.1. Bài toán biên tuyến tính

Tìm hàm y(x) trên [a, b] thoả mãn phương trình vi phân:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x);\ a \le x \le b \tag{7-28}$$

thoả mãn điều kiện biên:

$$k_0 y(a) + k_1 y'(a) = A; \tag{7-29}$$

$$l_0 y(b) + l_1 y'(b) = B \tag{7-30}$$

Trong đó: p(x), q(x), f(x) là các hàm đã biết;

k_0, k_1, l_0, l_1, A, B là các hằng số đã biết.

Để giải bài toán trên, ta chia đoạn [a, b] thành n phần bằng nhau bởi các điểm x_i với

$x_i = x_0 + ih$; $i = 0, 1,.., n$; $x_0 = a$; $x_n = b$; $h = \dfrac{b-a}{n}$

Gọi tập hợp các điểm $\{x_i\}$ là lưới sai phân, các điểm x_i là các nút của lưới. Gọi h là bước của lưới, nếu h = const ta có lưới đều.

Giả sử y(x) là nghiệm đúng của bài toán. Mục đích của phương pháp này là tìm giá trị gần đúng y_i của y(x) tại các nút x_i của lưới sai phân, nên nó được gọi là phương pháp sai phân.

Khai triển Taylor của hàm y(x) tại $x_i \pm h$ có dạng:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \frac{h}{1!}y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i) + 0(h^4);$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - \frac{h}{1!}y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i) + 0(h^4)$$

Thay giá trị của hàm y(x) và các đạo hàm của nó bằng các giá trị gần đúng vào hai công thức trên ta được:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1!}y'_i + \frac{h^2}{2!}y''_i + \frac{h^3}{3!}y'''_i + \frac{h^4}{4!}y_i^{(4)} + 0(h^4); \quad (1)$$

$$y_{i-1} = y_i - \frac{h}{1!}y'_i + \frac{h^2}{2!}y''_i - \frac{h^3}{3!}y'''_i + \frac{h^4}{4!}y_i^{(4)} + 0(h^4) \quad (2)$$

Cho i = 0, từ (1) suy ra:

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + 0(h)$$

Cho i = n, từ (2) suy ra:

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + 0(h) \quad (7\text{-}31)$$

Lấy đẳng thức (1) trừ đẳng thức (2) vế với vế ta được:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 0(h^2) \quad (7\text{-}32)$$

Lấy (1) cộng (2) ta được:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 0(h^2) \quad (7\text{-}33)$$

Đặt $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$. Thay các giá trị của hàm số và đạo hàm vào ta được các phương trình sai phân:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i;\ i = 1, 2,..., n - 1 \quad (7\text{-}34)$$

$$k_0 y_0 + k_1\frac{y_1 - y_0}{h} = A \quad (7\text{-}35)$$

$$l_0 y_n + l_1\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \quad (7\text{-}36)$$

Phương trình (7-34) có dạng:

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = h^2 g_i;\ i = 1, 2,..., n - 1 \quad (7\text{-}37)$$

Trong đó: $m_i = \dfrac{2(q_i h^2 - 2)}{2 + p_i h}$; $n_i = \dfrac{2 - p_i h}{2 + p_i h}$; $g_i = \dfrac{2f_i}{2 + p_i h}$ (7-38)

Như vậy ta có n + 1 phương trình đại số tuyến tính để tìm n + 1 ẩn số là $y_0, y_1,..., y_n$. Áp dụng các phương pháp giải hệ phương trình đại số tuyến tính trong chương VI, ta có thể tìm được các ẩn số chính là giá trị gần đúng của hàm y(x) tại các nút sai phân x_i.

Người ta chứng minh được công thức đánh giá sai số của phương pháp sai phân hữu hạn như sau:

$$|y_i - y(x_i)| \le \frac{h^2 M_4}{96}(b-a)^2 \tag{7-39}$$

Trong đó: $M_4 = \max|y^{(4)}(x)|$, với mọi $x \in [a, b]$.

Dưới đây giới thiệu một phương pháp thường dùng để giải các phương trình sai phân (7-35), (7-36), (7-37).

7.6.2. Phương pháp khử lặp

Nội dung của phương pháp này là đưa hệ ba đường chéo (7-35), (7-36), (7-37) về hệ hai đường chéo nhờ một "bước thuận". Sau đó đưa hệ hai đường chéo về hệ đường chéo bằng "bước ngược".

a) Bước thuận

Ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$y_i = c_i(d_i - y_{i+1}) \tag{7-40}$$

hay

$$y_{i-1} = c_{i-1}(d_{i-1} - y_i)$$

Thay y_{i-1} vào (7-37) ta được:

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1}(d_{i-1} - y_i) = g_i h^2$$

suy ra:

$$y_i = \frac{(g_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}) - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}} \equiv c_i(d_i - y_{i+1});$$

Từ đây ta có công thức truy hồi:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}; \quad d_i = g_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}$$

Các giá trị ban đầu c_0, d_0 được xác định từ (7-35). Thật vậy, vì:

$$y_0 = \frac{Ah - k_1 y_1}{k_0 h - k_1} = c_0(d_0 - y_1)$$

nên

$$c_0 = \frac{k_1}{k_0 h - k_1}; \quad d_0 = \frac{Ah}{k_1}$$

Như vậy c_i, d_i với mọi $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ hoàn toàn xác định.

b) Bước ngược

Đầu tiên, theo (7-36), (7-40) ta có:

$$l_0 y_n + l_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B\,;$$

$$y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n)$$

suy ra
$$y_n = \frac{Bh + l_1 c_{n-1} d_{n-1}}{l_0 h + l_1 + l_1 c_{n-1}}$$

Sử dụng công thức (7-40) ta lần lượt tính được y_{n-1}, y_{n-2},..., y_0. Như vậy, dùng phương pháp khử lặp ta xác định được tất cả các giá trị của nghiệm tại các nút. Phương pháp này rất thuận lợi cho việc lập trình trên máy tính.

Ví dụ 1: Dùng phương pháp khử lặp tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân:

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x$$

thoả mãn điều kiện:

$$y(0) - y'(0) = 0\,;\; 2y(1) - y'(1) = 1.$$

Giải: Chia đoạn [0, 1] thành 10 đoạn bằng nhau với h = 0,1.

Ở đây: $p(x) = -2x$; $q(x) = -2$; $f(x) = -4x$;

$$p_i = -2x_i\,; \quad q_i = -2; \quad f_i = -4x_i\,; \text{ với } x_i = 0{,}1i;$$

$$m_i = \frac{2(q_i h^2 - 2)}{2 + p_i h} = \frac{2(1 + h^2)}{1 - x_i h}\,;\; n_i = \frac{2 - p_i h}{2 + p_i h} = \frac{1 + x_i h}{1 - x_i h}\,;$$

$$g_i = \frac{2f_i}{2 + p_i h} = -\frac{4x_i}{1 - x_i h}\,;$$

$$k_0 = -1;\; k_1 = -1;\; l_1 = -1;\; l_0 = 2;\; A = 0;\; B = 1$$

a. Bước thuận

$$c_0 = -\frac{k_1}{k_0 h - k_1} = \frac{-1}{0{,}1 + 1} = -0{,}909;\; d_0 = \frac{Ah}{k_1} = 0$$

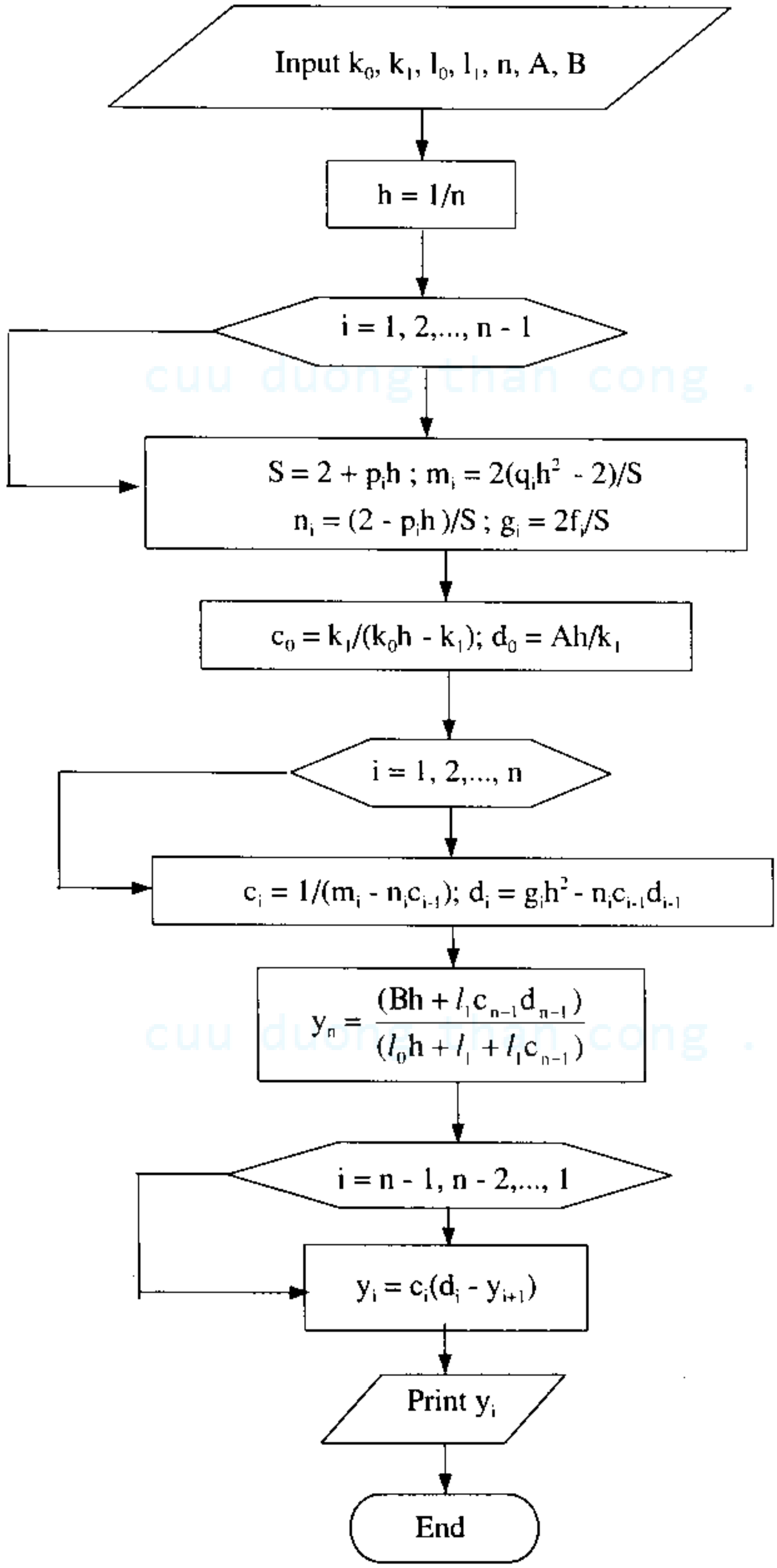
Tính: $$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}\,;\; d_i = g_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}\,;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

b. Bước ngược

Tính: $$y_n = \frac{Bh + l_1 c_{n-1} d_{n-1}}{l_0 h + l_1 + l_1 c_{n-1}} = y_{10} = 3{,}73$$

$$y_i = c_i(d_i - y_{i+1})\,;\; i = 9, 8, \ldots, 1, 0.$$

Sơ đồ khối giải bài toán biên bằng phương pháp khử lặp



Kết quả tính cho trong bảng. Để đánh giá sai số giữa nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác, ở cột cuối ghi giá trị của nghiệm chính xác:

$$y = x + e^{x^2}$$

i	x_i	m_i	n_i	g_i	Bước thuận		Bước ngược	$y(x_i)$
					c_i	d_i	y_i	
0	0,0				- 0,909	0	1,03	1,00
1	0,1	- 2,040	1,020	- 0,4	- 0,899	- 0,004	1,13	1,11
2	0,2	- 2,061	1,040	- 0,8	- 0,889	- 0,012	1,26	1,24
3	0,3	- 2,083	1,062	- 1,2	- 0,878	- 0,023	1,41	1,39
4	0,4	- 2,105	1,083	- 1,7	- 0,868	- 0,039	1,60	1,57
5	0,5	- 2,127	1,105	- 2,1	- 0,856	- 0,058	1,81	1,78
6	0,6	- 2,149	1,128	- 2,5	- 0,845	- 0,081	2,06	2,03
7	0,7	- 2,172	1,151	- 3,0	- 0,833	- 0,109	2,36	2,33
8	0,8	- 2,196	1,174	- 3,5	- 0,822	- 0,142	2,72	2,70
9	0,9	- 2,220	1,198	- 4,0	- 0,810	- 0,180	3,17	3,15
10	1,0	- 2,244	1,222	- 4,4	- 0,797	- 0,222	3,73	3,72

Ví dụ 2: Mômen uốn của dầm chịu tải trọng phân bố được xác định bởi phương trình vi phân:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q \tag{1}$$

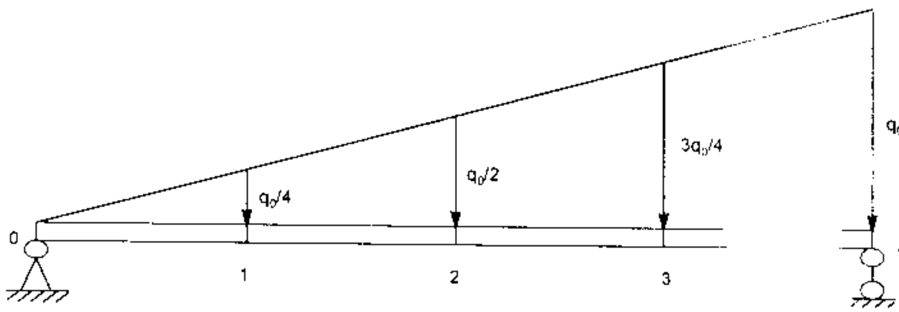
Độ võng của dầm (có chiều cao tiết diện không đổi) thỏa mãn phương trình:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \tag{2}$$

Trong đó:

- M là mômen uốn, có giá trị dương nếu thớ trên của tiết diện chịu nén;
- q là cường độ tải trọng phân bố, có dấu dương nếu hướng từ dưới lên;
- y là độ võng của dầm, mang dấu dương khi hướng lên trên;
- E là môđun đàn hồi của vật liệu;
- J là mômen quán tính của tiết diện ngang của dầm.

Áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn, hãy xác định mômen uốn và độ võng của dầm có chiều dài l chịu tải trọng phân bố tam giác với $q_{max} = q_0$ như hình vẽ 7.1.



Hình 7.1

Giải:

Để tìm nghiệm của (1) và (2) theo phương pháp sai phân, ta chia dầm thành 4 đoạn bằng nhau với:

$$h = \frac{l}{4}$$

Viết phương trình sai phân của phương trình (1) cho 3 điểm 1, 2, 3 bên trong dầm ta được:

$$\begin{cases} M_0 - 2M_1 + M_2 = -\dfrac{q_0 h^2}{4} \\ M_1 - 2M_2 + M_3 = -\dfrac{q_0 h^2}{2} \\ M_2 - 2M_3 + M_4 = -\dfrac{3q_0 h^2}{4} \end{cases}$$

Điều kiện biên: tại hai đầu dầm mômen uốn bằng không $M_0 = M_4 = 0$.

Giải hệ phương trình trên ta tìm được:

$$\begin{cases} M_1 = 0{,}625q_0h^2 = 0{,}0391q_0l^2; \\ M_2 = \qquad q_0h^2 = 0{,}0625q_0l^2; \\ M_3 = 0{,}873q_0h^2 = 0{,}0547q_0l^2 \end{cases}$$

Để xác định độ võng của dầm, ta viết phương trình sai phân của phương trình (2) cho các điểm 1, 2, 3 như sau:

$$\begin{cases} y_0 - 2y_1 + y_2 = \dfrac{h^2}{EJ}\,(0{,}625q_0h^2) \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = \dfrac{h^2}{EJ}\,(q_0h^2) \\ y_2 - 2y_3 + y_4 = \dfrac{h^2}{EJ}\,(0{,}873q_0h^2) \end{cases}$$

Các điều kiện biên: tại hai đầu dầm độ võng bằng không $y_0 = y_4 = 0$.

Giải hệ phương trình trên ta được:

$$y_1 = -1{,}187\ \frac{q_0 h^4}{EJ} = -\ 0{,}00463\ \frac{q_0 l^4}{EJ};$$

$$y_2 = -1{,}749\ \frac{q_0 h^4}{EJ} = -\ 0{,}00682\ \frac{q_0 l^4}{EJ};$$

$$y_3 = -1{,}311\ \frac{q_0 h^4}{EJ} = -\ 0{,}00513\ \frac{q_0 l^4}{EJ}$$

Nếu giải bằng phương pháp chính xác ta được:

$$y_1 = -\ 0{,}0043\ \frac{q_0 l^4}{EJ};\ y_2 = -\ 0{,}00652\ \frac{q_0 l^4}{EJ};\ y_3 = -\ 0{,}00486\ \frac{q_0 l^4}{EJ}$$

Sai số lớn nhất $\varepsilon \approx 10^{-3}$.

Ví dụ 3: Phương trình vi phân của dầm trên nền đàn hồi:

$$EJ\ \frac{d^4 y}{dx^4} = -\ ky + q \tag{3}$$

Trong đó: y là độ võng của dầm;

- k là hệ số nền;
- q là cường độ tải trọng phân bố.

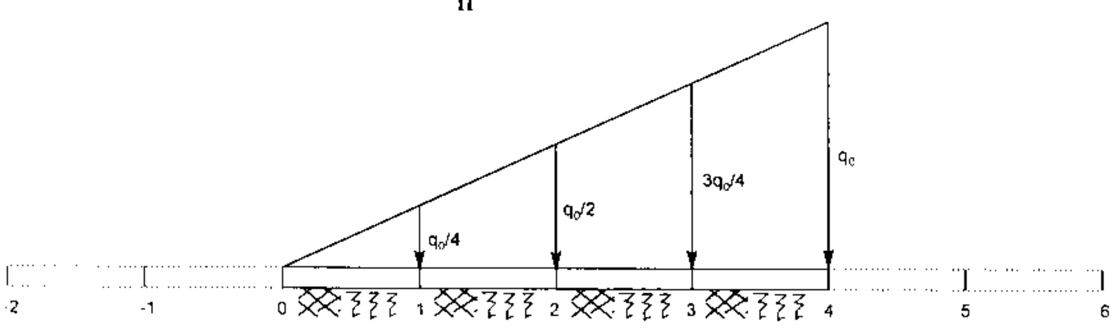
Hãy tìm độ võng của dầm trên nền đàn hồi có độ dài l, chịu tải trọng phân bố theo quy luật tam giác với $q_{max} = q_0$ như hình vẽ 7.2.

Giải:

Để tìm độ võng của dầm theo phương pháp sai phân ta chia dầm thành 4 đoạn bằng nhau: $h = \dfrac{l}{4}$

a. Sai phân hoá phương trình vi phân (3)

Ta đã có công thức: $\quad y_i'' = \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$



Hình 7.2

Do đó: $y_i^{(4)} = \frac{1}{h^2}(y''_{i+1} - 2y''_i + y''_{i-1}) =$

$$= \frac{1}{h^4}[(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) - 2(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + (y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2})]$$

hay $$y_i^{(4)} = \frac{1}{h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) \tag{4}$$

Vì vậy phương trình sai phân của phương trình (3) là:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EJ}(-ky_i + q_i) \tag{5}$$

Gọi $B = l\sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}$ là độ cứng tương đối của nền thì phương trình (5) được viết lại là:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + \left(6 + \frac{B^4}{n^4}\right)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EJ}q_i \tag{6}$$

Trong đó: n là số đoạn chia của dầm;

q_i là cường độ tải trọng tại điểm thứ i.

Nếu giả thiết B = 4 và n = 4 thì theo (6) phương trình sai phân tại các điểm là:

- Tại điểm 0:

$$y_{-2} - 4y_{-1} + 7y_0 - 4y_1 + y_2 = 0$$

- Tại điểm 1:

$$y_{-1} - 4y_0 + 7y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{h^4}{EJ}0{,}25q_0$$

- Tại điểm 2:

$$y_0 - 4y_1 + 7y_2 - 4y_3 + y_4 = \frac{h^4}{EJ}0{,}50q_0 \tag{7}$$

- Tại điểm 3:

$$y_1 - 4y_2 + 7y_3 - 4y_4 + y_5 = \frac{h^4}{EJ}0{,}75q_0$$

- Tại điểm 4:

$$y_2 - 4y_3 + 7y_4 - 4y_5 + y_6 = \frac{h^4}{EJ}q_0$$

b. Sai phân hoá các điều kiện biên

Điều kiện biên tại hai đầu dầm (điểm 0, điểm 4) là mômen uốn và lực cắt bằng không:

$$M = EJ\frac{d^2y}{dx^2} = 0\,;\; Q = \frac{dM}{dx} = EJ\frac{d^3y}{dx^3} = 0 \qquad (8)$$

Trước hết ta tính sai phân cấp 3 tại i:

$$y_i''' = (y_i'')' = \frac{y_{i+1}'' - y_{i-1}''}{2h} =$$

$$= \frac{1}{2h^3}[(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) - (y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2})]$$

hay $$y_i''' = \frac{1}{2h^3}[y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}]$$

- Tại điểm 0:

$$y_0'' = 0 \rightarrow y_{-1} - 2y_0 + y_1 = 0 \rightarrow y_{-1} = 2y_0 - y_1\,;$$

$$y_0''' = 0 \rightarrow y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2} = 0$$

$$\rightarrow y_{-2} = y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} = y_2 - 4y_1 - 4y_0$$

- Tại điểm 4:

$$y_4'' = 0 \rightarrow y_5 - 2y_4 + y_3 = 0 \rightarrow y_5 = 2y_4 - y_3\,;$$

$$y_4''' = 0 \rightarrow y_6 - 2y_5 + 2y_3 - y_2 = 0$$

$$\rightarrow y_6 = 2y_5 - 2y_3 + y_2 = 4y_4 - 4y_3 + y_2$$

c. Tìm nghiệm

Thay giá trị độ võng tại các điểm ảo: -2, -1, 5, 6 vào hệ phương trình (7) ta được:

$$\begin{cases} 3y_0 - 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ -2y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = \dfrac{h^4}{EJ}\cdot 0{,}25q_0 \\ y_0 - 4y_1 + 7y_2 - 4y_3 + y_4 = \dfrac{h^4}{EJ}\cdot 0{,}50q_0 \\ y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 2y_4 = \dfrac{h^4}{EJ}\cdot 0{,}75q_0 \\ 2y_2 - 4y_3 + 3y_4 = \dfrac{h^4}{EJ}\cdot q_0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được:

$$y_0 = 0{,}007\frac{q_0h^4}{EJ}\,;\; y_1 = 0{,}245\frac{q_0h^4}{EJ}\,;$$

$$y_2 = 0{,}493\frac{q_0h^4}{EJ};\ y_3 = 0{,}751\frac{q_0h^4}{EJ};\ y_4 = \frac{q_0h^4}{EJ}$$

Lực cắt và mômen uốn tại điểm i được xác định theo công thức sau:

$$Q_i = EJ\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_i = EJ\left(\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3}\right);$$

$$M_i = EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = EJ\left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}\right)$$

Ví dụ tại điểm 2:

$$Q_2 = \frac{q_0h}{2}(1{,}00 - 1{,}502 + 0{,}490 - 0{,}007) = 0{,}0095q_0h$$

$$M_2 = q_0h^2(0{,}751 - 0{,}986 + 0{,}245) = 0{,}010q_0h^2$$

Ví dụ 4: Xác định tần số dao động riêng của dầm có tiết diện ngang không đổi, khối lượng phân bố đều m, một đầu ngàm, một đầu gối tựa đơn giản.

Giải: Phương trình vi phân dao động riêng của dầm có dạng:

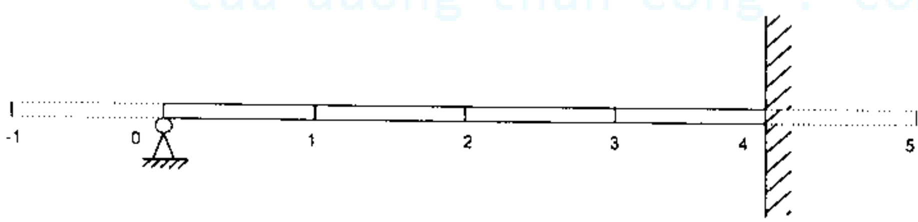
$$EJ\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = \omega^2 my$$

Trong đó: E là môđun đàn hồi của vật liệu;

J là mômen quán tính tiết diện ngang của dầm;

ω là tần số dao động riêng của dầm;

y là độ võng của dầm.



Hình 7.3

Đặt $\lambda^2 = \dfrac{\omega^2 mh^4}{EJ}$ và dùng công thức (4) để sai phân hoá phương trình vi phân (9) ta được phương trình sai phân:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6-\lambda)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = 0 \tag{10}$$

Chia dầm thành 4 đoạn bằng nhau.

Điều kiện biên tại gối tựa đơn: $y_0 = 0$; $M_0 = 0$

hay $y_0 = 0$, $y''_0 = 0 \rightarrow y_{-1} - 2y_0 + y_1 = 0 \rightarrow y_{-1} = -y_1$ (11)

Điều kiện biên tại đầu ngàm: $y_4 = 0$; $y'_4 = 0$ hay $y_4 = 0$; $y_5 - y_3 = 0 \rightarrow y_5 = y_3$ (12)

Khi thay các điều kiện biên vào các phương trình sai phân (10) tại các điểm 1, 2, 3 ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} -y_1 + (6-\lambda)y_1 - 4y_2 + y_3 = 0 \\ -4y_1 + (6-\lambda)y_2 - 4y_3 = 0 \\ y_1 - 4y_2 + (6-\lambda)y_3 + y_3 = 0 \end{cases}$$

Sau khi rút gọn ta được:

$$\begin{cases} (5-\lambda)y_1 - 4y_2 + y_3 = 0 \\ -4y_1 + (6-\lambda)y_2 - 4y_3 = 0 \\ y_1 - 4y_2 + (7-\lambda)y_3 = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Để tồn tại dao động riêng tức là để cho các chuyển vị tại các nút không đồng thời bằng không thì định thức ma trận các hệ số của hệ phải bằng không:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & 1 \\ -4 & 6-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Đây là phương trình bậc 3 đối với λ. Giải phương trình ta tìm được 3 nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Tần số dao động riêng của dầm được xác định theo công thức:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i}{h^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}\,; \; i = 1, 2, 3.$$

Bài tập

1- Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình vi phân sau bằng phương pháp chuỗi Taylor:

a) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$;

b) $y' = \cos(x + y)$, $y(0) = 0$;

c) $y' = e^y + x^2$, $y(1) = 0$

2- Tìm hai xấp xỉ liên tiếp của nghiệm phương trình vi phân sau:

a) $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$;

b) $y' = 2x - 1 + y^2$, $y(0) = 1$

3- Dùng phương pháp Ơle tìm nghiệm bằng số của các phương trình vi phân trên đoạn [a, b] với bước $h = 0{,}1$:

a) $y' = \frac{1}{2}xy$, $y(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$;

b) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $a = 0$, $b = 1$

4- Dùng phương pháp Ơle cải tiến tìm nghiệm bằng số của các phương trình vi phân sau:

a) $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $h = 0{,}03$. Tìm $y(0{,}3)$?

b) $y' = 1 + x - y^2$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}02$. Tìm $y(0{,}1)$?

5- Áp dụng phương pháp Runge - Kutta với bước $h = 0{,}2$ tìm nghiệm của các phương trình vi phân trên đoạn [a, b]:

a) $y' = y - x$, $y(0) = 1{,}5$, $a = 0$, $b = 1$;

b) $y' = \frac{y}{x} - y^2$, $y(1) = 1$, $a = 1$, $b = 2$

6- Tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình sau bằng phương pháp chuỗi Taylor:

$$\begin{cases} y' = xy + z \\ z' = y - z \qquad y(0) = 0;\ z(0) = 1 \end{cases}$$

7- Áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn tìm nghiệm của bài toán biên sau:

a) $x^2y'' + xy' = 1$; $y(1) = 0$, $y(1{,}4) = 0{,}0566$ với bước lưới $h = 0{,}1$;

b) $y'' - (1 + x^2)y = -1$, $y(-1) = y(1) = 0$

Đáp số

1. a) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{27}{4}\cdot\frac{x^4}{4!} + \cdots$

b) $y = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{7}x^7 + \cdots$

c) $y = 2(x-1) + 2(x-1)^2 + \frac{5}{3}(x-1)^3 + \frac{7}{4}(x-1)^4 + \cdots$

2. a) $y_1 = \dfrac{x^3}{3}$; $y_2 = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^7}{63}$

b) $y_1 = 1 + x^2$; $y_2 = 1 + x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{x^5}{5}$

3. a) $y_1 = 1$, $y_2 = 1{,}005000$, $y_3 = 1{,}010025$, $y_4 = 1{,}025175$,

$y_5 = 1{,}045679$, $y_6 = 1{,}07821$, $y_7 = 1{,}103976$,

$y_8 = 1{,}142615$, $y_9 = 1{,}188320$, $y_{10} = 1{,}241794$

b) $y_1 = 0$, $y_2 = 0{,}001$, $y_3 = 0{,}005$, $y_4 = 0{,}014002$,

$y_5 = 0{,}030022$, $y_6 = 0{,}055112$, $y_7 = 0{,}091416$,

$y_8 = 0{,}141252$, $y_9 = 0{,}207247$, $y_{10} = 0{,}295542$

4. a) 0,0451;

b) 1,0047

5. a) $y(1) = 3{,}36$;

b) $y(2) = 0{,}80$

6. a) $y = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$

$z = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{7}{24}x^4 + \cdots$

7. a) $y_0 = 0$; $y_1 = 0{,}0046$; $y_2 = 0{,}0167$;

$y_3 = 0{,}0345$; $y_4 = 0{,}0566$

Chương VIII
GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN

8.1. MỞ ĐẦU

Khi giải các bài toán cơ học, ta thường phải tìm nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng trên miền D với các điều kiện biên khác nhau. Thí dụ:

- Phương trình Laplaxơ (Laplace): $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

- Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

- Phương trình dây rung: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Người ta thường tìm nghiệm chính xác của các phương trình trên dưới dạng một tích phân hay một chuỗi. Tuy nhiên, phạm vi những bài toán giải được theo cách này rất hẹp, đòi hỏi phải có những kiến thức nhất định về giải tích hàm, hàm phức. Đó là một khó khăn đối với những người làm công tác kỹ thuật.

Phương hướng chủ yếu để giải các bài toán phương trình đạo hàm riêng là dùng các phương pháp gần đúng, trong đó phương pháp sai phân hữu hạn có ứng dụng rất rộng rãi. Phương pháp này có ưu điểm là khá tổng quát, cho phép tìm lời giải gần đúng của một lớp khá rộng các bài toán biên, trong các miền có hình dạng tuỳ ý, với các điều kiện biên khác nhau.

Khi giải các bài toán phương trình đạo hàm riêng bằng phương pháp sai phân hữu hạn ta phải tiến hành các bước sau:

- Bước thứ nhất: rời rạc hoá miền D. Thay miền D liên tục bằng một số hữu hạn các điểm gọi là các nút của lưới sai phân. Ta sẽ tìm nghiệm của bài toán chỉ tại các nút này. Tuỳ từng bài toán cụ thể, ta có thể chọn các lưới sai phân khác nhau, đơn giản nhất là lưới hình vuông, hình chữ nhật.

- Bước hai: sai phân hoá phương trình đạo hàm riêng. Thay các đạo hàm riêng của hàm cần tìm bằng các tỷ sai phân, như vậy ta đã chuyển phương trình đạo hàm riêng thành một hệ các phương trình đại số, mà ẩn số là giá trị của hàm cần tìm tại các điểm nút.

- Bước ba: sai phân hoá các điều kiện biên. Thay các điều kiện biên bằng các phương trình đại số có chứa giá trị của hàm tại các nút gần biên hay ở ngay trên biên.

Tập hợp các phương trình đại số khi sai phân hoá phương trình đạo hàm riêng và các điều kiện biên được gọi là một lược đồ sai phân.

- Bước bốn: giải hệ phương trình đại số tìm giá trị của hàm tại các điểm nút. Đó là nghiệm gần đúng của bài toán.

Tất nhiên, khi tiến hành 4 bước trên ta phải chọn lưới sai phân và xây dựng lược đồ sai phân sao cho:

- Hệ phương trình đại số có nghiệm duy nhất;

- Nghiệm gần đúng của bài toán hội tụ về nghiệm chính xác với tốc độ hội tụ cao (khi bước lưới ngày càng nhỏ), hay nói cách khác, lược đồ sai phân ổn định;

- Khối lượng tính toán là ít nhất.

Sau đây ta sẽ áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn để giải một số bài toán phương trình đạo hàm riêng thường gặp.

8.2. BÀI TOÁN ĐIRICHLÊ (DIRICHLET)

8.2.1. Bài toán

Tìm hàm u (x, y) trên miền D thoả mãn phương trình:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (8\text{-}1)$$

và thoả mãn điều kiện biên:

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \qquad (8\text{-}2)$$

với mọi (x, y) trên biên S của miền D.

Trong đó $\varphi(x, y)$ là hàm liên tục trên S.

8.2.2. Giải bài toán

a) Rời rạc hoá miền

Trong mặt phẳng Oxy chứa miền D, ta xây dựng hai họ đường thẳng song song:

$$x = x_0 + ih; \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$y = y_0 + jl; \qquad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Giao điểm của các đường thẳng này là các điểm lưới (nút). Tập hợp các điểm lưới gọi là lưới sai phân, h được gọi là bước lưới theo x và l là bước lưới theo y.

Ta chia các điểm lưới $M_{ij} = (x_i, y_j)$ nằm trong miền D thành hai loại:

- M_{ij} là "điểm trong" của D nếu 4 điểm lân cận nó: $M_{i-1,j}$; $M_{i+1,j}$; $M_{i,j-1}$; $M_{i,j+1}$ đều nằm trong D.

- M_{ij} là điểm biên nếu nó không phải là "điểm trong" (các điểm được đánh dấu* trên hình 8.1).

b) Sai phân hoá phương trình đạo hàm riêng

Tương tự như khi giải phương trình vi phân bằng phương pháp sai phân, ta cũng thay các đạo hàm riêng bằng các tỷ sai phân.

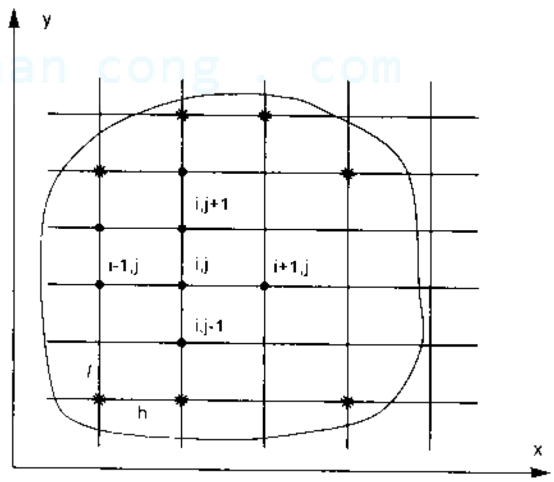
Nếu ký hiệu $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ ta có:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \qquad (8\text{-}3)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l} \qquad (8\text{-}4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}; \qquad (8\text{-}5)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2} \qquad (8\text{-}6)$$



Hình 8.1

Thay các giá trị gần đúng của các đạo hàm riêng vào (8-1) ta được phương trình sai phân:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2} = f_{ij} \qquad (8\text{-}7)$$

Trong đó: $f_{ij} = f(x_i, y_j)$.

c) Xấp xỉ các điều kiện biên

Nếu miền D là hình vuông hay hình chữ nhật, ta chọn lưới sao cho biên S nằm trên lưới sai phân. Khi đó giá trị của hàm tại các điểm trên biên $u_{ij} = \varphi_{ij}$ đã biết.

Nếu miền D là miền bất kỳ được bao bởi biên S là đường cong, thì giá trị của hàm tại các điểm biên được tính qua giá trị của hàm tại các điểm trong và điều kiện biên theo phương pháp nội suy tuyến tính.

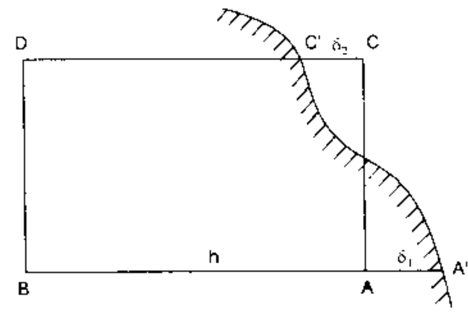
$$u_A = \frac{\delta_1 u_B + h u_{A'}}{\delta_1 + h}; \qquad (8\text{-}8)$$

$$u_{C} = \frac{\delta_2 u_D - h u_{C'}}{\delta_2 - h}$$

Trong đó: A', c' là những điểm nằm trên biên S;

$$\delta_1 = AA'; \qquad \delta_2 = CC';$$

$$u_{A'} = \varphi(A'); \quad u_{C'} = \varphi(C')$$



Hình 8.2

d) Giải hệ phương trình tìm nghiệm

Tập hợp các phương trình (8-7), (8-8) của các điểm lưới lập thành một hệ phương trình đại số tuyến tính. Giải hệ phương trình này ta sẽ tìm được giá trị của hàm u(x, y) tại các điểm lưới.

Nếu miền D là hình chữ nhật và l = h thì hệ phương trình này đơn giản nhất. Khi đó (8-7) có dạng:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f_{ij} \qquad (8\text{-}9)$$

Nếu f(x, y) = 0 thì phương trình (8-1) được gọi là phương trình Laplaxơ, phương trình sai phân tương ứng có dạng:

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) \qquad (8\text{-}10)$$

8.2.3. Sai số

Sai số khi thay thế phương trình đạo hàm riêng bằng phương trình sai phân được đánh giá như sau:

$$|R_{ij}| \le \frac{h^2}{6} M_4 \qquad (8\text{-}11)$$

Trong đó:

$$M_4 = \max_D \left\{ \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right| \right\}$$

Chú ý: Sai số của nghiệm gần đúng tìm được bằng phương pháp sai phân là do các nguyên nhân sau gây ra:

- Thay thế phương trình đạo hàm riêng bằng phương trình sai phân;
- Xấp xỉ các điều kiện biên;
- Hệ phương trình sai phân được giải bằng các phương pháp gần đúng.

Ví dụ 1: Biến dạng đàn hồi của tấm mỏng hình vuông dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều được mô tả bằng phương trình Poátxông:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1$$

với điều kiện biên $u(x, y)|_S = 0$.

Tìm nghiệm của bài toán bằng phương pháp sai phân. Biết cạnh hình vuông bằng 1 và bước lưới $h = l = 1/4$.

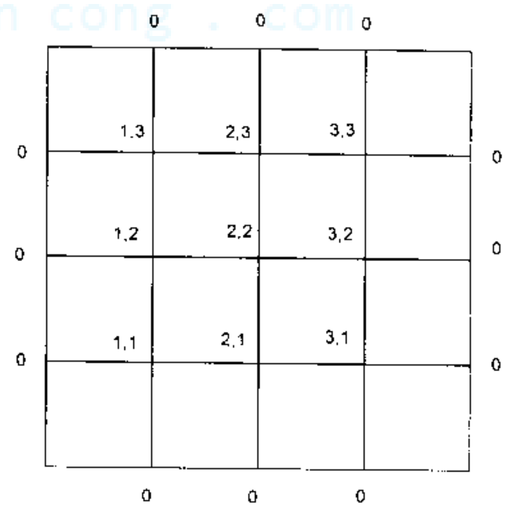
Giải:

Do tính chất hoàn toàn đối xứng của bài toán, ta chỉ cần xác định giá trị của hàm u(x, y) tại các điểm: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) là đủ.

Phương trình sai phân cho các điểm đó là:

$$\begin{cases} u_{12} + u_{21} - 4u_{11} = -0{,}0625 \\ u_{22} + 2u_{11} - 4u_{12} = -0{,}0625 \\ u_{22} + 2u_{11} - 4u_{21} = -0{,}0625 \\ 2u_{12} + 2u_{21} - 4u_{22} = -0{,}0625 \end{cases}$$

Vì $u_{12} = u_{21}$ nên hệ phương trình trên được viết lại là:



Hình 8.3

$$\begin{cases} -4u_{11} + 2u_{12} = -0{,}0625 \\ 2u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = -0{,}0625 \\ 4u_{12} - 4u_{22} = -0{,}0625 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được:

$$u_{11} = 0{,}0429\ ;\ u_{12} = u_{21} = 0{,}0547;\ u_{22} = 0{,}0703$$

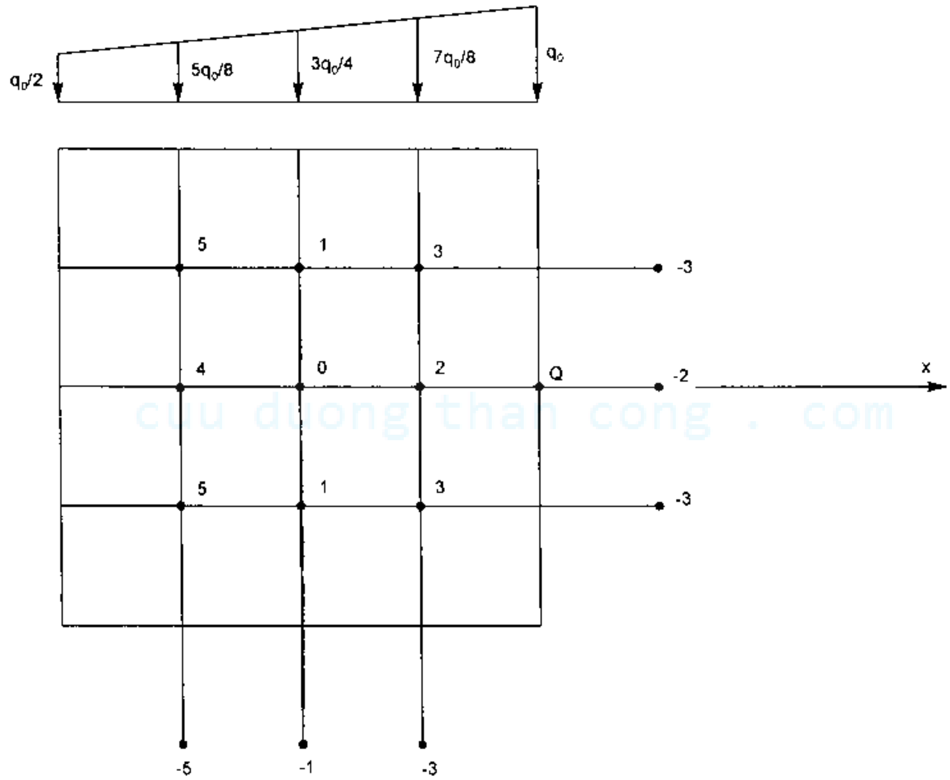
Ví dụ 2: Tìm chuyển vị và nội lực của tấm vuông, chu vi gối tựa đơn, cạnh a, chịu tải trọng phân bố hình thang như hình 8.4. Biết chuyển vị của tấm thoả mãn phương trình:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \qquad (1)$$

Trong đó: q là cường độ tải trọng phân bố;

D là độ cứng chống uốn của tấm;

U là chuyển vị của tấm.



Hình 8.4

Giải:

Để giải bài toán bằng phương pháp sai phân, ta chia 2 cạnh của tấm thành 4 đoạn bằng nhau $h = \frac{a}{4}$. Vì 4 cạnh của tấm đều tựa đơn, nên chuyển vị thẳng và nội lực của các điểm trên biên tấm đều bằng không. Ta chỉ phải xác định chuyển vị và nội lực của tấm tại 9 điểm trong của tấm. Tuy nhiên do tính chất đối xứng của bài toán, chỉ có 6 điểm độc lập là 0, 1, 2, 3, 4, 5 được đánh số như trên hình 8.4. Ngoài ra ta đưa thêm vào các điểm lưới ảo -1, -2, -3, -5 đối xứng với các điểm lưới 1, 2, 3, 5 qua biên của tấm.

- Bây giờ ta sai phân hoá phương trình (1).

Theo công thức (8-5) ta có:

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)''_{ij} = \frac{1}{h^2}(u''_{i+1,j} - 2u''_{i,j} + u''_{i-1,j}) =$$

$$= \frac{1}{h^4}\left[(u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}) - 2(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j})\right]$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ij} \approx \frac{1}{h^4}\left(u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}\right)$$

Tương tự:

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ij} \approx \frac{1}{h^4}\left(u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 6u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}\right);$$

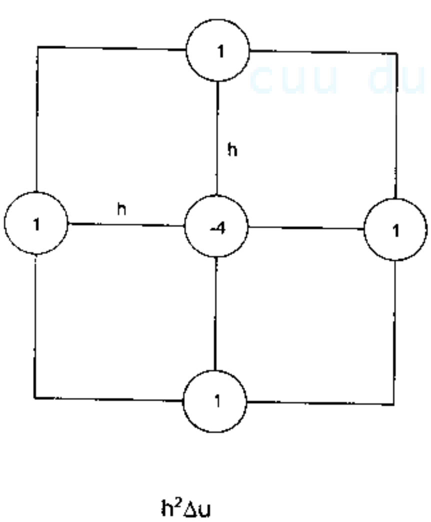
$$\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right]_{ij} = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]_{ij} \approx \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}\right)\right]_{ij} =$$

$$= \frac{1}{h^4}\left[\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}\right) - 2\left(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}\right) + \left(u_{i-1,j+1} - 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}\right)\right]$$

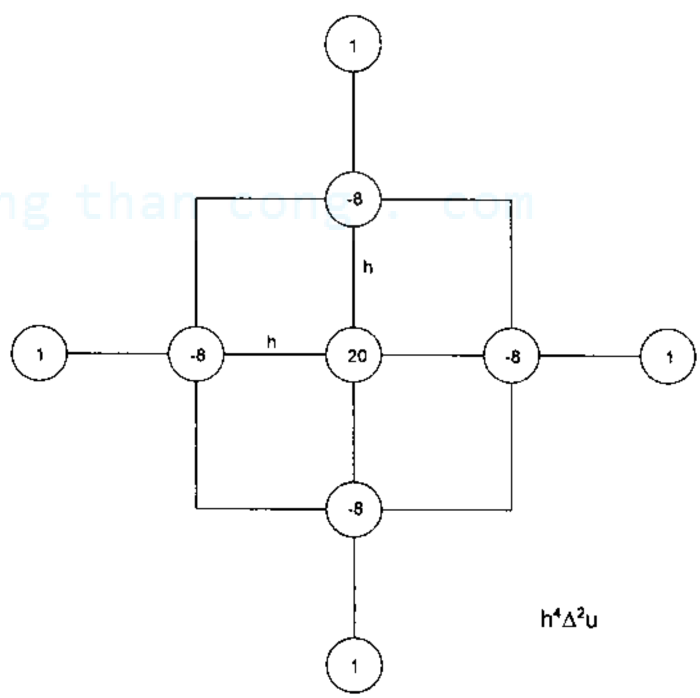
Vậy:

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{h^4}\left[\left(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}\right) - 2\left(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j}\right) + 4u_{i,j}\right]$$

Thay các biểu thức đạo hàm riêng trên vào (1) ta được phương trình sai phân. Để tiện cho việc viết các phương trình sai phân, ta lập sơ đồ biểu diễn các toán tử. Với các chữ số ở các nút là hệ số của hàm tại nút đó. Các sơ đồ dưới đây viết cho mạng lưới vuông, bước lưới là h.



Hình 8.5



Hình 8.6

Ở đây, ta đã ký hiệu toán tử Laplaxơ là Δu:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

và toán tử song điều hoà là $\Delta^2 u$ với:

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \tag{3}$$

- Sai phân hoá các điều kiện biên.

Vì 4 cạnh của tấm đều tựa đơn, nên chuyển vị thẳng và mômen uốn của các điểm lưới Q nằm trên mép tấm đều bằng không, do đó:

$$M_x = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{4}$$

Do mép của tấm tựa lên gối nên:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ suy ra } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Sai phân hoá phương trình này theo (8-5) và hình 8.4 được:

$$u_2 - 2.0 + u_{-2} = 0$$

Do đó $\quad u_{-2} = -u_2$

Tương tự ta có: $\quad u_{-1} = -u_1$; $u_{-3} = -u_3$; $u_{-5} = -u_5$

Như vậy ta đã biểu diễn được chuyển vị của tất cả các nút ảo qua chuyển vị của các nút thực.

Viết phương trình sai phân của phương trình (1) cho 6 điểm độc lập ta được 6 phương trình đại số tuyến tính để tìm chuyển vị của 6 điểm độc lập này.

Dưới đây ta sẽ giải bài toán trên theo cách khác.

Nếu đặt
$$F = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5}$$

thì phương trình (1) được viết dưới dạng:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{q}{D} \tag{6}$$

Đầu tiên, ta tìm F từ phương trình (6), với điều kiện F = 0 trên biên.

Viết phương trình sai phân cho 6 điểm trong của tấm. Theo sơ đồ ở hình 8.5 ta được hệ phương trình:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_o \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}75 \\ 0875 \\ 0{,}875 \\ 0{,}625 \\ 0{,}625 \end{pmatrix} \left(\frac{-q_0 h^2}{D} \right)$$

Nghiệm của hệ:

$F_0 = 0{,}844.\ q_0h^2/D;$ $\qquad$ $F_3 = 0{,}560.\ q_0h^2/D;$

$F_1 = 0{,}656.\ q_0h^2/D;$ $\qquad$ $F_4 = 0{,}653.\ q_0h^2/D;$

$F_2 = 0{,}710.\ q_0h^2/D;$ $\qquad$ $F_5 = 0{,}471.\ q_0h^2/D$

Thay giá trị của F vừa tìm được vào phương trình (5), sau khi đã sai phân hoá tại 6 điểm trong của tấm ta được hệ phương trình:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_o \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}844 \\ 0{,}656 \\ 0{,}710 \\ 0{,}560 \\ 0{,}653 \\ 0{,}471 \end{pmatrix} \left(\frac{q_0 h^4}{D} \right)$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được:

$u_0 = -\ 0{,}773.\ q_0h^4/D;$ $\qquad$ $u_3 = -\ 0{,}427.\ q_0h^4/D;$

$u_1 = -\ 0{,}563.\ q_0h^4/D;$ $\qquad$ $u_4 = -\ 0{,}541.\ q_0h^4/D;$

$u_2 = -\ 0{,}584.\ q_0h^4/D;$ $\qquad$ $u_5 = -\ 0{,}394.\ q_0h^4/D$

Để tìm nội lực của tấm tại các nút, ta sai phân hoá biểu thức mômen uốn:

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right);$$

$$M_y = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Chẳng hạn ở nút 0:

$$M_{x0} = D\left(\frac{u^2 - 2u_0 + u_4}{h^2} + \mu\frac{u_1 - 2u_0 + u_1}{h^2}\right) =$$

$$= (0{,}421 + 0{,}420\mu)q_0h^2;$$

$$M_{y0} = D\left(\frac{u_1 - 2u_0 + u_1}{h^2} + \mu\frac{u_2 - 2u_0 + u_4}{h^2}\right) =$$

$$= (0{,}420 + 0{,}421\mu)q_0h^2$$

Lực cắt Q cũng được tìm tương tự.

8.3. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG PARABOLIC

Xét bài toán biên hỗn hợp đối với phương trình truyền nhiệt: Tìm hàm u(x, y) thoả mãn phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8-12}$$

và điều kiện ban đầu:

$$u(x, 0) = f(x);\ 0 < x < s \tag{8-13}$$

đồng thời thoả mãn điều kiện biên:

$$u(0, t) = \varphi(t)\ ;\ \ u(s, t) = \psi(t);\ t \geq 0 \tag{8-14}$$

Trong đó: f(x), φ(t), ψ(t) là các hàm đã biết.

Để giải bài toán trên theo phương pháp sai phân, ta chia miền D ($t \geq 0$, $0 \leq x \leq s$) bằng hai họ đường thẳng song song:

$$x = ih;\ i = 0, 1, 2,...$$

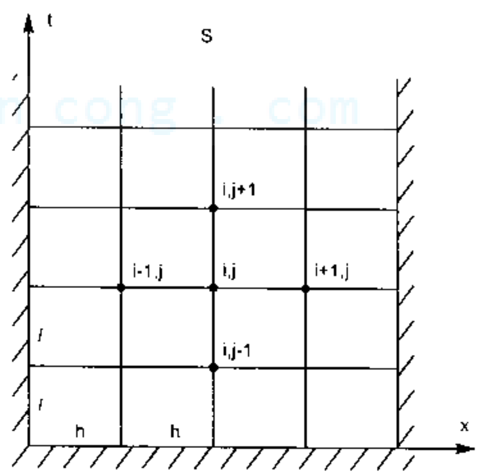
$$t = jl;\ j = 0, 1, 2,...$$

Ký hiệu: $x_i = ih$; $t_j = jl$;

$$u(x_i, t_j) = u_{i,j}$$

Tại mỗi điểm trong (x_i, t_j), thay thế đạo hàm bằng tỷ sai phân:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}; \tag{8-15}$$



Hình 8.7

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} \tag{8-16}$$

hay

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l} \tag{8-17}$$

Khi đó, phương trình sai phân của (8-12) có dạng:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

hay $$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Đặt $\sigma = l/h^2$, hai phương trình trên có dạng:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}); \tag{8-18}$$

$$(1 + 2\sigma)u_{ij} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0. \tag{8-19}$$

Cần lưu ý, nên chọn số $\sigma = l/h^2$ trong các phương trình (8-18) và (8-19) sao cho:

- Sai số do việc thay phương trình đạo hàm riêng bằng phương trình sai phân là nhỏ nhất;

- Nghiệm của phương trình sai phân phải hội tụ về nghiệm của phương trình đạo hàm riêng, nói cách khác lược đồ sai phân phải ổn định.

Người ta đã chứng minh rằng, phương trình (8-18) ổn định với $0 < \sigma \le \frac{1}{2}$, còn phương trình (8-19) ổn định với mọi σ.

Phương trình (8-18) có dạng tiện lợi nhất khi $\sigma = \frac{1}{2}$, khi đó:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \tag{8-20}$$

và khi $\sigma = 1/6$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}) \tag{8-21}$$

Người ta đã tìm được công thức đánh giá sai số nghiệm gần đúng của các phương trình (8-20), (8-21), (8-19) lần lượt là:

$$|u - \tilde{u}| \le \frac{T}{3} M_1 h^2;\ 0 \le x \le s \qquad (8\text{-}22)$$

$$|u - \tilde{u}| \le \frac{T}{135} M_2 h^4;\ 0 \le t \le T \qquad (8\text{-}23)$$

$$|u - \tilde{u}| \le T\left(\frac{l}{2} + \frac{h^2}{12}\right) M_1 \qquad (8\text{-}24)$$

Trong đó: u là nghiệm chính xác của bài toán (8-12), (8-13), (8-14);

$$M_1 = \max\{|f^{(4)}(x)|, |\psi''(t)|, |\psi''(t)|\};$$

$$M_2 = \max\{|f^{(6)}(x)|, |\psi^{(4)}(t)|, |\psi^{(4)}(t)|\}$$

với mọi t, x thoả mãn $0 \le t \le T$; $0 \le x \le s$.

Ví dụ: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

thoả mãn các điều kiện:

$$u(x, 0) = \sin\pi x,\ \ (0 \le x \le 1)$$

và $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $(0 \le t \le 0)$ theo phương trình sai phân (8-20):

Giải:

Chọn $h = 0,1$ vì $\sigma = \frac{1}{2}$ nên $l = \frac{h^2}{2} = 0,005$. Ta lập bảng tính giá trị hàm u(x, t):

Đưa vào hàng thứ nhất của bảng giá trị hàm tại $t = 0$ theo điều kiện biên $u(x, 0) = \sin\pi x$. Do tính đối xứng, ta chỉ đưa vào bảng các giá trị x = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Tính giá trị của hàm với $j = 0$ theo công thức (8-20):

$$u_{i,1} = \frac{u_{i+1,0} + u_{i-1,0}}{2}$$

ta được:

$$u_{1,1} = \frac{1}{2}(u_{2,0} + u_{0,0}) = \frac{1}{2}(0,5878 + 0) = 0,2939;$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{2}(u_{3,0} + u_{1,0}) = \frac{1}{2}(0,8090 + 0,3090) = 0,5590$$

Tương tự, ta tính được $u_{3,1}$, $u_{4,1}$, $u_{5,1}$. Đưa các giá trị này vào hàng thứ hai của bảng.

Tiếp theo cho j = 1, thay vào công thức (8-20) ta tìm được $u_{1,2}$, $u_{2,2}$, $u_{3,2}$, $u_{4,2}$, $u_{5,2}$. Đưa các giá trị này vào hàng thứ ba.

Tiếp tục cho j = 2, 3, 4 ta tìm được giá trị của hàm ứng với t = 0,015; 0,020; 0,025.

Hai hàng cuối cùng của bảng là giá trị nghiệm chính xác $\tilde{u}(x, t) = e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$ và trị tuyệt đối $|u - \tilde{u}|$ khi t = 0,025.

j	t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,000	0	0,3090	0,5878	0,8090	0,9511	1,0000
1	0,005	0	0,2939	0,5590	0,7699	0,9045	0,9511
2	0,010	0	0,3795	0,5316	0,7318	0,8602	0,9045
3	0,015	0	0,2658	0,5056	0,6959	0,8182	0,8602
4	0,020	0	0,2528	0,4808	0,6619	0,7780	0,8182
5	0,025	0	0,2404	0,4574	0,6294	0,7400	0,7780
$\tilde{u}(x, t)$	0,025	0	0,2414	0,4593	0,6321	0,7431	0,7813
$\|u - \tilde{u}\|$	0,025	0	0,0010	0,0019	0,0027	0,0031	0,0033

Để so sánh, ta đánh giá sai số theo công thức (8-22).

Ở đây $|f^{(4)}(x)| = \pi^4 |\sin\pi x| \le \pi^4$; $\varphi(t) = \psi(t) = 0$.

Do đó $M_1 = \pi^4$ theo (8-22):

$$|u - \tilde{u}| \le \frac{0,025}{3} \cdot \pi^4 h^2 = \frac{0,025}{3} \cdot 97,22 \ . \ 0,01 = 0,0081$$

8.4. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG HYPERBOLIC

Xét bài toán biên hỗn hợp đối với phương trình dây rung:

Tìm hàm u (x, t) thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8-25}$$

và điều kiện ban đầu:

$$u(x, 0) = f(x)\ ;\ u'_t(x, 0) = g(x)\ ;\ 0 \le x \le s \tag{8-26}$$

đồng thời thỏa mãn các điều kiện biên:

$$u(0, t) = \varphi(t);\ u(s, t) = \psi(t);\ t \ge 0 \tag{8-27}$$

Trên miền D [t ≥ 0; 0 ≤ x ≤ s], xây dựng hai họ đường thẳng song song:

$x = ih;$ $\qquad$ $i = 0, 1, 2,..., n.$

$t = jl;$ $\qquad$ $j = 0, 1, 2,..., n.$

Thay thế đạo hàm trong phương trình (8-25) bằng tỷ sai phân được:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2}$$

Đặt $\alpha = l/h$ ta được phương trình sai phân:

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \alpha^2(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \qquad (8\text{-}28)$$

Người ta đã chứng minh rằng, với $\alpha \le 1$ phương trình này ổn định. Đặc biệt, nếu $\alpha = 1$, phương trình này có dạng đơn giản nhất:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \qquad (8\text{-}29)$$

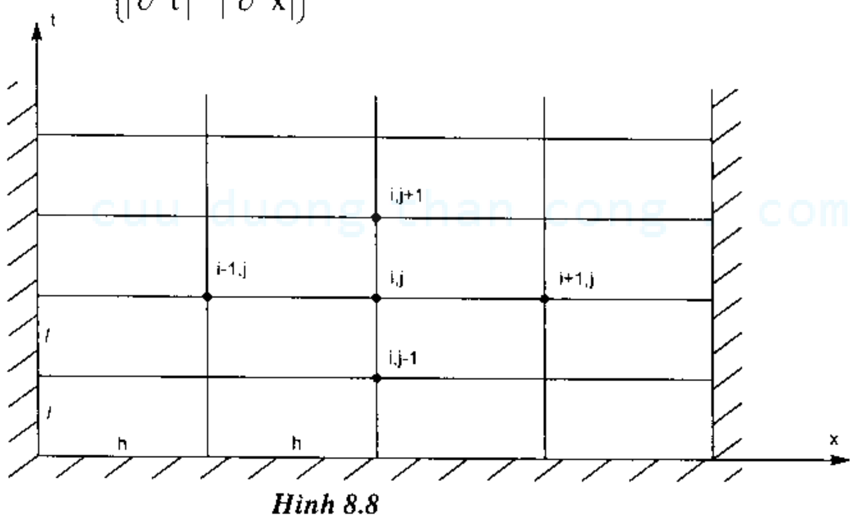
với mọi x, t thoả mãn $0 \le x \le s$; $0 < t \le T$.

Sai số của nghiệm gần đúng tính theo phương trình (8-28) là:

$$|\tilde{u} - u| \le \frac{h^2}{12} \cdot \left[(M_4 h + 2M_3)T + T^2 M_4\right]$$

Trong đó: $\tilde{u}$ là nghiệm chính xác;

$$M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial^k t}\right| ; \left|\frac{\partial^k u}{\partial^k x}\right|\right\}, (k = 3, 4).$$



Hình 8.8

Theo công thức (8-29), để xác định được giá trị của hàm cần tìm, ta cần biết giá trị của hàm tại hai hàng đầu tiên. Những giá trị này được xác định từ điều kiện ban đầu theo các phương pháp sau:

a) Phương pháp 1

Thay đạo hàm $u'_t(x, 0)$ trong điều kiện ban đầu (8-26) bằng tỷ sai phân:

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{l} = g(x_i) = g_i$$

Để xác định giá trị của u(x, t) ứng với j = 0, j = 1 ta lấy:

$$u_{i,0} = f_i;\ \ u_{i,1} = u_{i,0} + lg_i$$

Khi đó, sai số của $u_{i,1}$ được đánh giá:

$$\left|\tilde{u}_{i,1} - u_{i,1}\right| \le \frac{\alpha h}{2} M_2$$

Trong đó: $M_2 = \max\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$

b) Phương pháp 2

Thay thế đạo hàm $u'_t(x, 0)$ bằng tỷ sai phân $\frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2l}$. Trong đó: $u_{i,-1}$ là giá trị của hàm u(x, t) trên hàng j = -1.

Sau đó, từ điều kiện ban đầu (8-26) suy ra:

$$u_{i,0} = f_i;\ \ \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2l} = g_i \tag{1}$$

Ứng với j = 0, phương trình (8-28) có dạng:

cuu duong than cong . com

$$u_{i,1} = u_{i+1,0} + u_{i-1,0} - u_{i,-1} \tag{2}$$

Khử $u_{i,-1}$ từ các phương trình (1), (2) ta được:

$$u_{i,0} = f_i;\ u_{i,1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + lg_i \tag{3}$$

Sai số của $u_{i,1}$ là:

$$|\tilde{u}_{i,1} - u_{i,1}| \le \frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3 \tag{4}$$

Trong đó: $M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|;\ \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|\right\};\ (k = 3, 4).$

c) Phương pháp 3

Giả sử hàm f(x) có đạo hàm cấp hai hữu hạn.

Theo công thức khai triển Taylor:

$$u_{i,1} \approx u_{i,0} + l\frac{\partial u_{i,0}}{\partial t} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial t^2} \qquad (5)$$

Từ phương trình (8-24) và điều kiện ban đầu (8-25) ta có:

$$u_{i,0} = f_i; \ \frac{\partial u_{i,0}}{\partial t} = g_i; \ \frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial x^2} = f_i''$$

Thay các giá trị này vào (5) ta được:

$$u_{i,1} \approx f_i + lg_i + \frac{l^2}{2}f_i'' \qquad (6)$$

Sai số của $u_{i,1}$ tính theo công thức này có cấp $0(l^3)$.

Ví dụ: Tìm nghiệm của bài toán sau bằng phương pháp sai phân:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (7)$$

$$u(x, 0) = 0,2x(1 - x)\sin\pi x; \ u_t'(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Giải: Chọn lưới hình vuông với bước lưới **h** = l = 0,05. Xác định giá trị của hàm u(x, t) ở hai hàng đầu bằng phương pháp 2.

Ở đây: $g(x) = 0; f(x) = 0,2x(1 - x)\sin\pi x$

Ta có: $u_{i,0} = f_i$; $i = 0, 1, 2, ..., 10;$

$$u_{i,1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) \qquad (8)$$

Ta lập bảng dưới đây để ghi giá trị hàm cần tìm tại các điểm lưới:

- Tính giá trị $u_{i,0} = f(x_i)$, với $x_i = ih$ và đưa vào hàng thứ nhất của bảng (ứng với t = 0). Vì bài toán là đối xứng nên ta chỉ ghi vào bảng giá trị của hàm ứng với $0 \le x \le 0,5$. Giá trị biên ứng với $x_0 = 0$ được ghi vào cột thứ nhất.

- Tìm $u_{i,1}$ theo công thức (8) rồi ghi vào hàng hai của bảng.

- Tính giá trị $u_{i,j}$ của các hàng sau theo công thức (8-29). Đối với **j** =1 ta có:

$$u_{1,2} = u_{2,1} + u_{0,1} - u_{1,0} = 0{,}0065 + 0 - 0{,}0015 = 0{,}0050;$$

$$u_{2,2} = u_{3,1} + u_{1,1} - u_{2,0} = 0{,}0122 + 0{,}0028 - 0{,}0056 = 0{,}0094;$$

....

$$u_{10,2} = u_{11,1} + u_{01} - u_{10,0} = 0{,}0478 + 0{,}0478 - 0{,}0500 = 0{,}0456$$

Khi j = 2, 3,..., 10 ta cũng làm tương tự.

Hàng cuối cùng của bảng là giá trị nghiệm chính xác của bài toán tại t = 0,5.

t_j \ x_i	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
0,00	0	0,0015	0,0056	0,0116	0,0188	0,0265
0,05	0	0,0028	0,0065	0,0122	0,0190	0,0264
0,10	0	0,0050	0,0094	0,0139	0,0198	0,0260
0,15	0	0,0066	0,0124	0,0170	0,0209	0,0256
0,20	0	0,0074	0,0142	0,0194	0,0228	0,0251
0,25	0	0,0076	0,0144	0,0200	0,0236	0,0249
0,30	0	0,0070	0,0134	0,0186	0,0221	0,0236
0,35	0	0,0058	0,0112	0,0155	0,0186	0,0199
0,40	0	0,0042	0,0079	0,0112	0,0133	0,0144
0,45	0	0,0021	0,0042	0,0057	0,0070	0,0074
0,50	0	- 0,0001	- 0,0001	0,0000	- 0,0002	0,0000
$\tilde{u}(x_i, 0{,}5)$	0	0	0	0	0	0

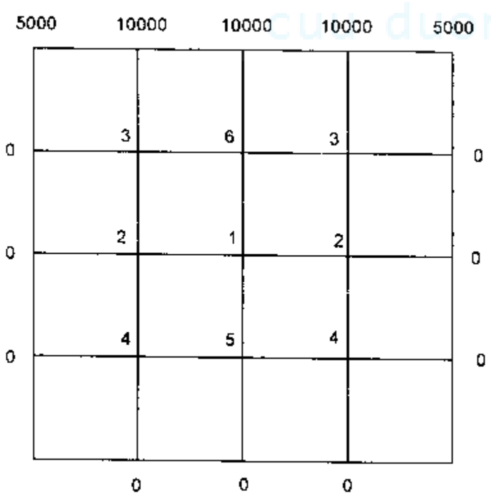
t_j \ x_i	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,00	0,0340	0,0405	0,0457	0,0489	0,0500
0,05	0,0335	0,0398	0,0447	0,0478	0,0489
0,10	0,0322	0,0377	0,0419	0,0447	0,0456
0,15	0,0302	0,0343	0,0377	0,0397	0,0405
0,20	0,0277	0,0302	0,0321	0,0335	0,0338
0,25	0,0251	0,0255	0,0260	0,0262	0,0265
0,30	0,0227	0,0209	0,0196	0,0190	0,0186
0,35	0,0194	0,0168	0,0139	0,0120	0,0115
0,40	0,0140	0,0124	0,0092	0,0064	0,0054
0,45	0,0074	0,0064	0,0042	0,0026	0,0013
0,50	- 0,0002	- 0,0001	- 0,0002	- 0,0002	- 0,0002
$\tilde{u}(x_i, 0{,}5)$	0	0	0	0	0

Bài tập

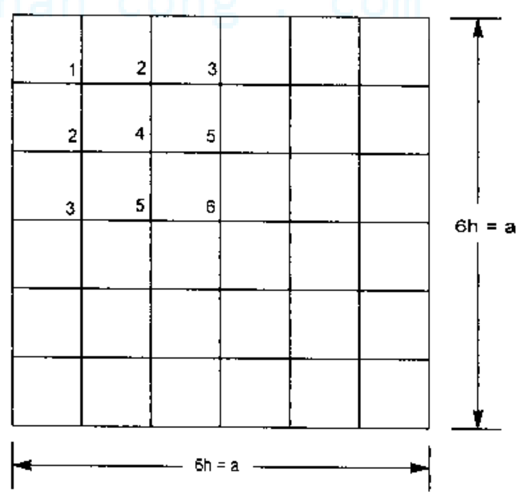
1- Phương trình phân bố nhiệt trên một tấm vuông có cạnh bằng 1, với điều kiện biên trên mỗi cạnh không đổi, có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Tìm giá trị hàm u(x, y) nếu chia tấm bằng lưới vuông, bước lưới $h = \frac{1}{4}$. Điều kiện biên cho trên hình 8.9.



Hình 8.9



Hình 8.10

2- Chuyển vị của màng mỏng được mô tả bằng phương trình:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{p}$$

Trong đó: q là tải trọng thẳng góc tác dụng lên một đơn vị diện tích bề mặt màng; p là lực kéo phân bố đều trên một đơn vị chiều dài của chu tuyến màng.

Tìm chuyển vị tại các nút của một màng vuông cạnh a với điều kiện chuyển vị trên biên bằng không, màng được chia bằng lưới có bước $h = \frac{a}{6}$ như hình 8.10.

3- Áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn tìm nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

thoả mãn điều kiện biên:

$$u(x, 0) = 1{,}1(x^2 + 1)\sin\pi x;\ \ 0 \le x \le 1$$

$$u(0, t) = 0;\ \ u(1, t) = 0;\ 0 \le t \le 0{,}02.$$

Sử dụng lưới chữ nhật có bước $h = 0{,}1$; $l = 0{,}05$ và công thức sai phân (8-20).

4- Tìm nghiệm gần đúng của phương trình đạo hàm riêng sau bằng phương pháp sai phân hữu hạn:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

thoả mãn điều kiện biên:

$u(x, 0) = f(x)$ có giá trị cho trong bảng, $a = 0{,}975$

$u_1(x, 0) = 0;\ \ u(0, t) = 0;\ u_1(0, t) = 0.$

với $0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 0{,}5.$

Sử dụng lưới chữ nhật có bước $h = 0{,}1$; $l = 0{,}05$.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0	0,0145	0,0511	0,0921a	0,1114	0,1825/a	0,1902	0,1481a	0,1028	0,0502

Đáp số

1. $u_1 = 2500$, $u_2 = 1875$, $u_3 = 4286$,

   $u_4 = 714$, $u_5 = 982$, $u_6 = 5268$

2. $w_1 = 0{,}0264qa^2/p$, $w_2 = 0{,}0402qa^2/p$, $w_3 = 0{,}0428qa^2/p$,

   $w_4 = 0{,}0588qa^2/p$, $w_5 = 0{,}0650qa^2/p$, $w_6 = 0{,}0718qa^2/p$

3.

t	$u_{1,j}$	$u_{2,j}$	$u_{3,j}$	$u_{4,j}$
0,020	0,31065	0,60232	0,85466	1,04521
0,015	0,31969	0,62129	0,88494	1,08803
0,010	0,32821	0,63939	0,91437	1,13049
0,005	0,33607	0,65641	0,94271	1,17234
0,000	0,34315	0,67213	0,96967	1,21330

t	$u_{5,j}$	$u_{6,j}$	$u_{7,j}$	$u_{8,j}$	$u_{9,j}$
0,020	0,14988	1,14460	1,01787	0,76358	0,41201
0,015	1,20549	1,21172	1,08370	0,82401	0,44346
0,010	1,26168	1,28049	1,16177	0,88692	0,48625
0,005	1,31826	1,35103	1,24272	0,97251	0,53111
0,000	1,37500	1,42322	1,32705	1,06222	0,61797

4.

t	$u_{1,j}$	$u_{2,j}$	$u_{3,j}$	$u_{4,j}$	$u_{5,j}$
0,5	0,08071	0,02200	0,06760	0,02070	0,02950
0,4	0,02391	0,11710	0,05860	0,08210	0,03520
0,3	0,03640	0,06051	0,13160	0,07310	0,11870
0,2	0,03660	0,05090	0,07501	0,16820	0,10949
0,1	0,01450	0,05110	0,08749	0,11140	0,19211
0,0	0,01450	0,05110	0,08749	0,11140	0,19211

t	$u_{6,j}$	$u_{7,j}$	$u_{8,j}$	$u_{9,j}$
0,5	- 0,01500	0,01590	- 0,03120	0,00191
0,4	0,06610	0,02140	0,03980	0,04951
0,3	0,07160	0,09000	0,10211	0,03790
0,2	0,14260	0,15231	0,08810	0,05260
0,1	0,19020	0,14070	0,10280	0,05020
0,0	0,19020	0,14070	0,10280	0,05020

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tạ Văn Đĩnh, Lê Trọng Vinh: **Phương pháp tính**, Nhà xuất Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1983.
2. Phan Văn Hạp, Nguyễn Quý Hỷ, Hoàng Đức Nguyên, Nguyễn Công Thuý: **Cơ sở phương pháp tính,** Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1970.
3. N. V. Kopchenova and I. A. Maron: **Computational Mathematics worked examples and problems with elements of theory**, Mir publishers. Moscow, 1981.
4. А. И. Супрун, В. В. Наиденко: **Вычислительная математика,** для инженеров - экологов (Методическое пособи). Издательство А. С. В. Москва. 1996.

MỤC LỤC

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TRONG KĨ THUẬT

Chịu trách nhiệm xuất bản:
BÙI HỮU HẠNH

Biên tập:	ĐÀO NGỌC DUY
Chế bản:	PHẠM HỒNG LÊ
Sửa bản in:	ĐÀO NGỌC DUY
Trình bày bìa:	NGUYỄN HỮU TÙNG

In 1000 cuốn, khổ 19 x 27cm, tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 829/XB-QLXB-3 ngày 18-6-2001. In xong nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2001.

cuu duong than cong . com

29 - 2001

Giá : 17.000đ