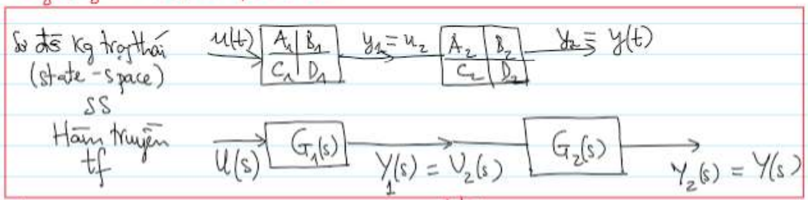
Có 3 loại cơ bản: Mắc nối tiếp – Mắc song song – Kết nối phản hồi.

I) 2 hệ thống mắc nối tiếp.



Hình 1

Biến đổi laplace: chuyển tín hiệu từ miền t.gian t → miền tần số s,

$$U(s)=\mathcal{L}[u(t)](s) := \int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt$$

Mô hình ss: $G(s) = D + C(sI-A)^{-1}B$.

Mô hình tf: $Y(s) = G(s)U(s)$, với $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$

Đlý 1: Cho 2 hệ đ.khiển mắc nối tiếp như Hình 1. Khi đó hàm truyền của hệ thống tổng & 2 hệ thống con thỏa

$$G(s) = G_2(s)\cdot G_1(s)$$

Chứng minh (C1) $Y(s) = G_2(s)U_2(s)$

$$= G_2(s).Y_1(s) = G_2(s).G_1(s).U(s) \Rightarrow G(s) = G_2(s)\cdot G_1(s).$$

(C2) Ta có CT: $G_1(s) = D_1 + C_1(sI-A_1)^{-1}B_1$, $G_2(s) = D_2 + C_2(sI-A_2)^{-1}B_2$. (1)

Hệ tổng có mô hình ss là
$$\begin{cases}\dot{x} = \begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{bmatrix}u\\ y = \begin{bmatrix}D_2C_1 & C_2\end{bmatrix}x + D_2D_1u\end{cases}$$

$$\Rightarrow G(s) = D_2D_1 + \begin{bmatrix}D_2C_1 & C_2\end{bmatrix}.\left(sI - \begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{bmatrix} \quad (2)$$

Ta cần c/m $G(s) = G_2(s).G_1(s)$.

Hint: $$\left(sI - \begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}sI-A_1 & 0\\ B_2C_1 & sI-A_2\end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix}(sI-A_1)^{-1} & 0\\ -(sI-A_2)^{-1}B_2C_1(sI-A_1)^{-1} & (sI-A_2)^{-1}\end{bmatrix} \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta sẽ có đpcm. ∎

Q1: Khi nào thì hệ thống tổng là 0 đ.khiển được, 0 qsát được? Giả sử 2 hệ thống con là tối thiểu (minimal) (vừa đ.khiển được, vừa qsát được)

Ta sử dụng t/c v) Hệ đ.khiển được $\Leftrightarrow \forall w \neq \vec{0}$ t/mãn $w^H(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow w^H B \neq 0$.

$\Leftrightarrow$ Hệ 0 đ.khiển được $\Leftrightarrow \exists w \neq \vec{0}$ t/mãn $w^H(\lambda I - A) = 0$ & $w^H B = 0$.

Xét hệ thống tổng $A = \begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}w^H A = \lambda w^H\\ w^H B = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\begin{bmatrix}w_1^H & w_2^H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}w_1^H & w_2^H\end{bmatrix} & (4a)\\ \begin{bmatrix}w_1^H & w_2^H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{bmatrix} = 0 & (4b)\end{cases}$$

Chú ý: $w_2 \neq 0$. Vì phản chứng, nếu $w_2 = 0$ thì (4a) $\Rightarrow w_1^H A_1 = \lambda w_1^H$ } $\Rightarrow$

$\begin{bmatrix} \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} = 0$

Chú ý: $w_2 \neq 0$. Vì phản chứng, nếu $w_2 = 0$ thì (4a) $\Rightarrow$ $w_1^H A_1 = \lambda w_1^H$
(4b) $\Rightarrow$ $w_1^H B_1 = 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (A_1, B_1) là O điều khiển được (mâu thuẫn)

Từ (4a) $\Rightarrow$ $w_2^H A_2 = \lambda w_2^H$ $\Rightarrow$ λ là 1 giá trị riêng của A_2 tức là cực của $G_2(s)$ (poles) (5)

(4a) $\Rightarrow$ $w_1^H A_1 + w_2^H B_2 C_1 = \lambda w_1^H$ $\Rightarrow w_1^H(\lambda I - A_1) = w_2^H B_2 C_1$

G/sử $\lambda \notin \sigma(A_1)$ (tức là λ k phải cực của $G_1(s)$) $\Rightarrow$ $\lambda I - A_1$ khả nghịch $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad w_1^H = w_2^H B_2 C_1 (\lambda I - A_1)^{-1} \qquad (6)$$

Thay (6) vào (4b) $\Rightarrow$ $w_2^H B_2 C_1 (\lambda I - A_1)^{-1} B_1 + w_2^H B_2 D_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad w_2^H B_2 \cdot \underbrace{\left(D_1 + C_1 (\lambda I - A_1)^{-1} B_1\right)}_{G_1(\lambda)} = 0 \qquad (7)$$

Chú ý từ (5) mà cặp (A_2, B_2) là điều khiển được $\Rightarrow$ $w_2^H B_2 \neq 0$ (8)

Từ (7) & (8) ta thấy nếu hệ là SISO thì $G_1(\lambda) = 0$ $\Rightarrow$ λ là 1 không điểm của G_1 (zero) (9)

hàm phân thức $G(s) = \dfrac{N(s) \longrightarrow \text{zeros}}{D(s) \longrightarrow \text{poles}}$

$G(s) = D + C(sI - A)^{-1} B$

$= \dfrac{|sI - A + BC|}{|sI - A|} - 1 + D$ $\qquad G(\text{poles}) = \infty$, $G(\text{zero}) = 0$.

$\Rightarrow$ $N(s) = |sI - A + BC| + (D - 1)|sI - A|$

$D(s) = |sI - A|$ $\Rightarrow$ $\sigma(A)$ are poles.

Kết luận 1. Hệ là O điều khiển được nếu $\exists$ 1 số phức $\lambda \in \mathbb{C}$ mà λ là cực của $G_2(s)$ & là zero của $G_1(s)$.

pole/zero cancellation $\approx$ khử cực - không điểm.

Ví dụ: $G_1(s) = \dfrac{s+1}{s+2}$, $G_2(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)(s+3)}$ $\Rightarrow$ $G(s) = \dfrac{2s+1}{(s+2)(s+3)}$

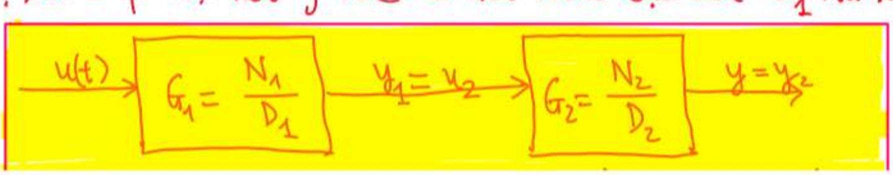
$s = -1$ là zero của $G_1(s)$ & là cực của $G_2(s)$ $\Rightarrow$ hệ O điều khiển được.

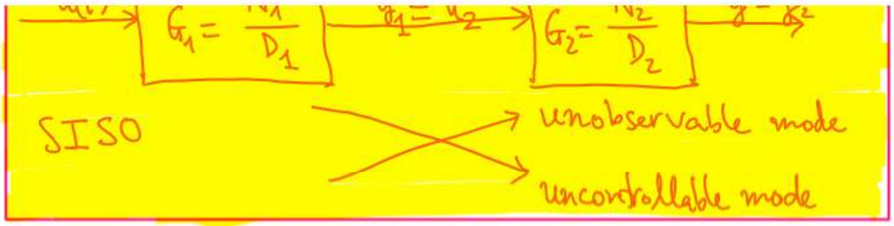
Chú ý: Nếu xảy ra pole/zero cancellation thì λ là mode O điều khiển được (uncontrollable mode).

Tương tự, nếu hệ tổng là O quan sát được thì $\exists$ 1 vectơ riêng $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ mà $v_2 \neq 0$ ứng với giá trị riêng λ.

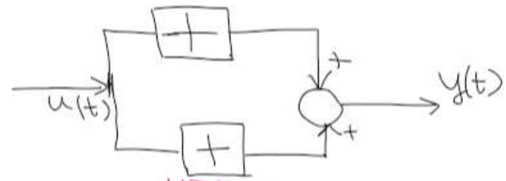
Ta sẽ có λ là cực của G_1 & là zero của G_2 $\Rightarrow$ λ là unobservable mode của hệ tổng.

Kết luận 2: Hệ là O quan sát được nếu $\exists$ $\lambda \in \mathbb{C}$ mà λ là cực của $G_1(s)$ và là zero của $G_2(s)$.





II) Hệ mắc song song



Hình 2

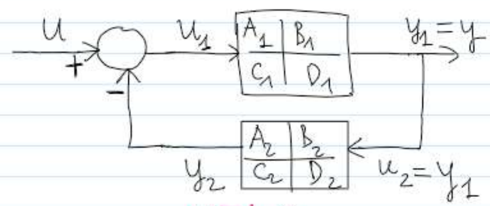
SS:
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x + (D_1 + D_2) u \end{cases} \quad (11)$$

TF:
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$
$$\Rightarrow G(s) = G_1(s) + G_2(s). \quad (12)$$

Mô hình tổng đánh mất tính điều khiển được $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} A_1 \,\&\, A_2 \text{ có 1 giá trị riêng chung } \lambda \\ w_1^H A_1 = \lambda w_1^H ;\ w_2^H A_2 = \lambda w_2^H \\ w_1^H B_1 + w_2^H B_2 = 0 \end{cases}$$

đánh mất tính quan sát được $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} \exists \text{ giá trị riêng chung } \lambda \\ A_1 v_1 = \lambda v_1 ;\ A_2 v_2 = \lambda v_2 \\ C_1 v_1 + C_2 v_2 = 0. \end{cases}$$

III) Các hệ thống phản hồi (feedback interconnection)

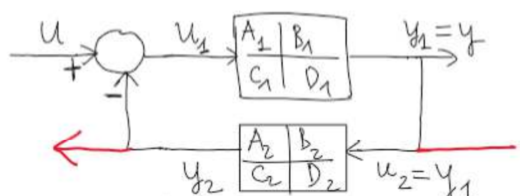


Hình 3

SS:
$$(1)\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 (u - y_2) \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 (u - y_2) \end{cases} \quad \text{minimal}$$

$$(2)\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y_1 & (2a) \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 y_1 & (2b) \end{cases} \quad \text{minimal}$$

Chú ý: Nếu ta chỉ quan tâm 1 đầu vào u & 1 đầu ra y thì hệ vẫn có thể 0 điều khiển được hoặc 0 quan sát được.



Hình 4.

Ở đây ta quan tâm đến $u_0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ & $y_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Đặt $A_0 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$, $C_0 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$

$D_0 = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$, $J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_p & 0 \end{bmatrix}$, $I_0 = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$

Khi đó ta có (BTVN/CM)

SS:
$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \overbrace{\left(A_0 + B_0 (I - J_0 D_0)^{-1} J_0 C_0\right)}^{\hat{A}} x_0 + \overbrace{B_0 (I - J_0 D_0)^{-1} I_0}^{\hat{B}} u \\ y_0 = \underbrace{(I - D_0 J_0)^{-1} C_0}_{\hat{C}} x_0 + \underbrace{(I - D_0 J_0)^{-1} D_0 I_0}_{\hat{D}} u \end{cases} \quad (13)$$

Điều kiện để hệ x/đ là $I - J_0 D_0$ khả nghịch $\Leftrightarrow$ $I - D_0 J_0$ khả nghịch.

Điều kiện để hệ x/đ là $\overset{\hat{C}}{I - J_0 D_0}$ khả nghịch $\Leftrightarrow$ $\overset{\hat{D}}{I - D_0 J_0}$ khả nghịch.

BTVN: Google đẳng thức Woodbury, tức là $I+AB$ khả nghịch $\Leftrightarrow$ $I+BA$ là khả nghịch.

Chú ý: $J_0^2 = -I$, $J_0^{-1} = -J_0$, $(I-J_0D_0)^{-1}J_0 = -(J_0+D_0)^{-1}$

Bổ đề 1: Cho cặp (A_0, B_0) là đ.khiển đc. Khi đó $\forall$ ma trận F_0 & C_0 có kích thước tương thích thì cặp $(A_0 + B_0F_0C_0, B_0)$ vẫn là đ.khiển đc.

C/m: $$[\lambda I_n - (A_0+B_0F_0C_0), B_0] = [\lambda I_n - A_0, B_0] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -F_0C_0 & I_m \end{bmatrix}}_{\text{khả nghịch}}$$

$\Rightarrow$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ thì

$$\operatorname{rank}[\lambda I_n - (A+B_0F_0C_0), B_0] = \operatorname{rank}[\lambda I_n - A_0, B_0]$$

Do đó theo đ/lí Hautus ta có đpcm. ▨

Bổ đề 2: Cho cặp (A_0, B_0) là đ.khiển đc. Khi đó $\forall$ ma trận F_0, C_0 có kích thước tương thích và ma trận K_0 đủ hạng cột thì cặp $(A_0 + B_0F_0C_0, B_0K_0)$ vẫn là đ.khiển đc.

C/m: Tương tự $$[\lambda I_n - (A_0+B_0F_0C_0), B_0K_0] = [\lambda I_n - A_0 \quad B_0] \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -F_0C_0 & K_0 \end{bmatrix}}_{\text{đủ hạng cột}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}[\lambda I_n - (A_0+B_0F_0C_0), B_0K_0] = \operatorname{rank}[\lambda I_n - A_0, B_0] \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Theo đ/lí Hautus $\Rightarrow$ đpcm. ▨

Áp dụng Bổ đề 2 vào hệ (13) cho $F_0 = (I-J_0D_0)^{-1}J_0$, $K_0 = (I-J_0D_0)^{-1}I_0$ ta có cặp $(\hat{A}, \hat{B})$ là đ.khiển đc nếu cặp (A_0, B_0) là đ.khiển đc.

Ta có $(A_0, B_0) = \left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \right)$ là đ.khiển đc $\Leftrightarrow$ (A_1, B_1) & (A_2, B_2) đều là đ.khiển đc.

Do đó, hệ (13) là đ.khiển đc.

Bổ đề 3: G/s cặp (A_0, C_0) là qsát được. Khi đó cặp $(\hat{A}, \hat{C})$ cũng là qsát đc.

C/m: $$\begin{bmatrix} \lambda I - \hat{A} \\ \hat{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I - \left(A_0 + B_0 (I - J_0D_0)^{-1} J_0 C_0\right) \\ (I - D_0J_0)^{-1} C_0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I & -B_0(I-J_0D_0)^{-1}J_0 \\ 0 & (I-D_0J_0)^{-1} \end{bmatrix}}_{\text{khả nghịch}} \begin{bmatrix} \lambda I - A_0 \\ C_0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Hautus test cho ta đpcm. ▨

Chú ý: $(A_0, C_0) = \left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \right)$ là qsát đc $\Leftrightarrow$ (A_1, C_1) & (A_2, C_2) đều qsát đc.

Kết luận: Nếu 2 hệ con tương ứng với 2 khối $\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}$ & $\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}$ đều là tối thiểu

Kết luận: Nếu 2 hệ con tương ứng với 2 khối $\boxed{\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}}$ & $\boxed{\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}}$ đều là tối thiểu (minimal)

thì hệ điều khiển phản hồi (13) như trong Hình 4 cũng là tối thiểu.

Chú ý: đây là hệ 2IN 2OUT chứ 0 phải hệ SISO như trong Hình 3.