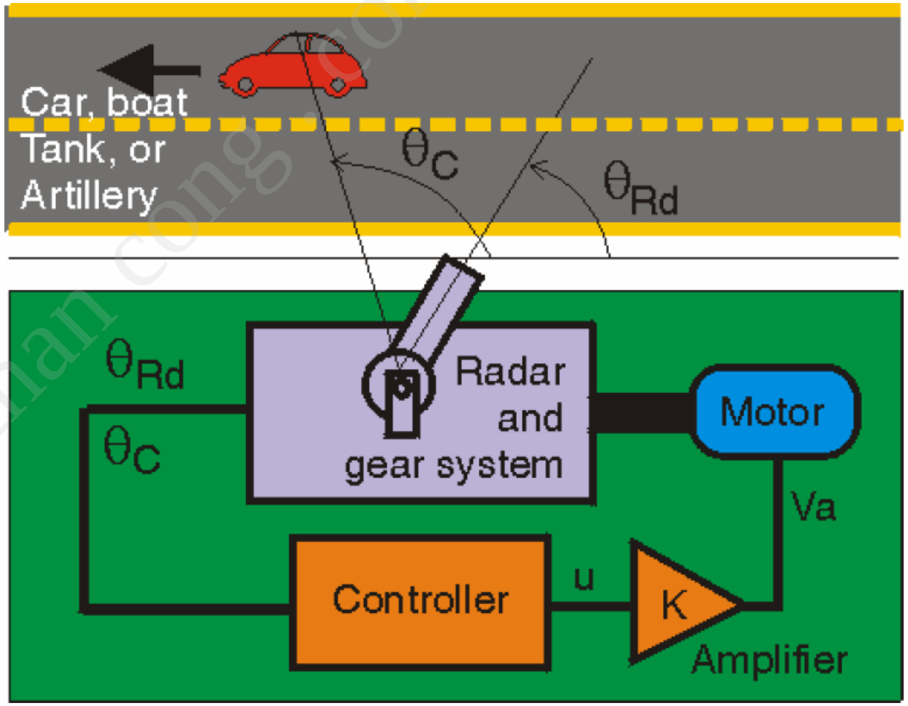
Lý thuyết Điều khiển tự động 1

Mô hình toán học của hệ liên tục tuyến tính



ThS. Đỗ Tú Anh

Bộ môn Điều khiển tự động

Khoa Điện, Trường ĐHBK HN

Các dạng mô hình liên tục tuyến tính

Phương trình vi phân (hệ SISO)

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

bậc của mô hình

$\Rightarrow$ Cho biết sâu sắc bản chất của các mối liên kết và tương tác, rất khó sử dụng cho phân tích và thiết kế hệ thống, đặc biệt là với MH bậc cao.

Hàm truyền đạt (hệ SISO)

Được định nghĩa là tỷ số giữa ảnh Laplace của tín hiệu ra và ảnh Laplace của tín hiệu vào *G(s)=Y(s)/U(s)* với toàn bộ sơ kiện bằng 0.

$$G(s) = \frac{b_m\ s^m + b\ s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

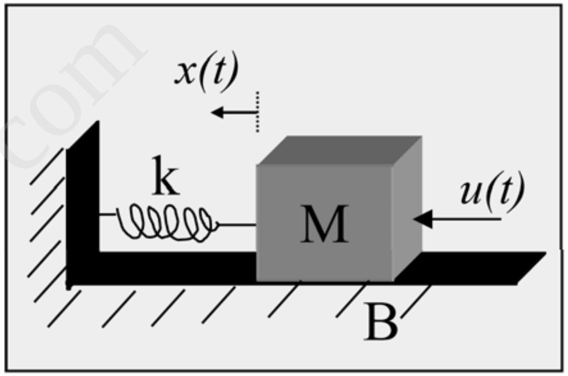
$m \le n$ hàm hợp thức

$m < n$ hàm hợp thức chặt

Phương trình vi phân và hàm truyền đạt

Ví dụ

Cơ hệ lò xo-vật



Lực cản của lò xo $f_s = k\,x$

Lực ma sát $f_b = B\,v = B\dfrac{dx}{dt}$

Lực gây ra gia tốc của vật $= u - f_s - f_b$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = u - f_s - f_b = u - k\,x - B\frac{dx}{dt},$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + k\,x = u$$

Biến đổi Laplace $Ms^2X(s) + BsX(s) + kX(s) = U(s)$

Do đó

$$\boxed{X(s) = \underbrace{\frac{1}{Ms^2 + Bs + k}}_{}U(s)}$$

Hàm truyền, *G(s)*

Ghi nhớ

- Đa thức mẫu số đgl ***đa thức đặc tính***
- Nghiệm của đa thức tử số đgl ***điểm không*** của hệ thống
- Nghiệm của đa thức mẫu số đgl ***điểm cực*** của hệ thống

Các dạng mô hình liên tục tuyến tính (tiếp)

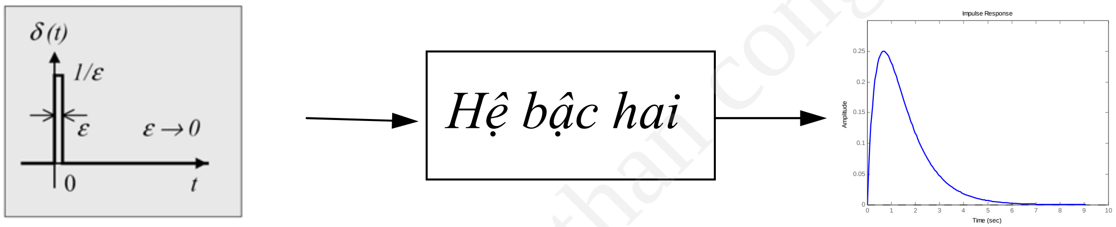
Đáp ứng xung hay hàm trọng lượng *g(t)* (hệ SISO)

Là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 và được kích thích bởi một xung đơn vị *δ(t)* (hay xung Dirac) ở đầu vào.

Ghi nhớ

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\}$$

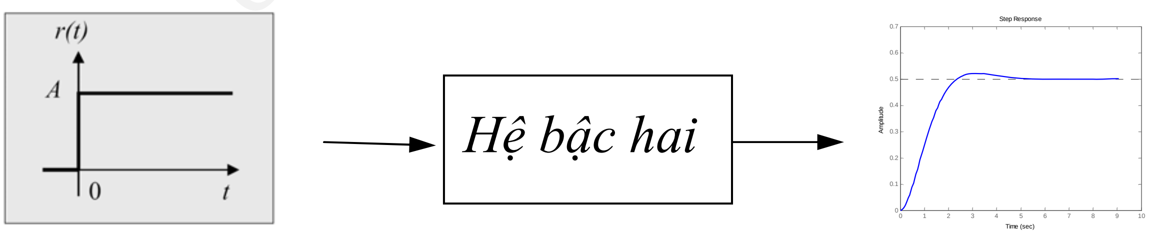
Ví dụ



Đáp ứng bước nhảy hay hàm quá độ *h(t)* (hệ SISO)

Là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 và được kích thích bởi một tín hiệu bước nhảy đơn vị *1(t)* ở đầu vào.

Ví dụ

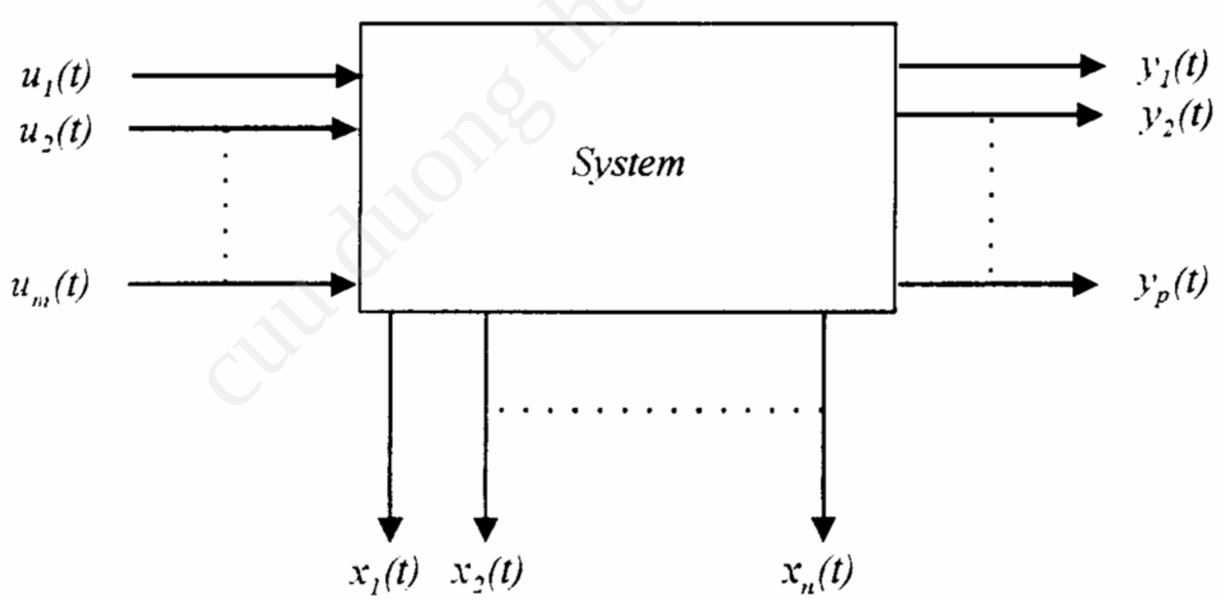


Các dạng mô hình liên tục tuyến tính (tiếp)

Mô hình trạng thái (cả hệ SISO và MIMO)

• Khái niệm "trạng thái": Trạng thái của một HT là một tập hợp các biến (đgl ***biến trạng thái***) mà tại thời điểm ban đầu t_0 nào đó, cùng với các biến đầu vào, có thể xác định được hoạt động của HT trong khoảng thời gian $t \geq t_0$.

• Xét hệ gồm *m*-đầu vào, *p*-đầu ra, *n*-biến trạng thái …



Mô hình trạng thái (tiếp)

… có quan hệ giữa các biến đầu vào và các biến trạng thái như sau

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m$$
$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_m$$

Đặt

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Mô hình trạng thái (tiếp)

Tổng quát

MIMO

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\end{aligned} \quad (3.1)$$

SISO

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned} \quad (3.2)$$

A, **b**, **c**, *d* là gì, kích thước bao nhiêu ???

$\mathbf{x}(t)$ – vector trạng thái

$\mathbf{y}(t)$ – vector tín hiệu ra

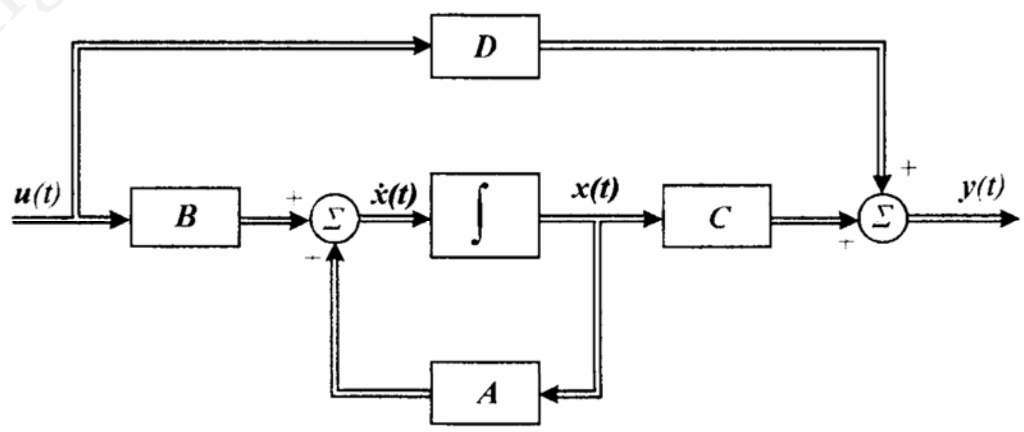
$\mathbf{u}(t)$ – vector tín hiệu vào

A – ma trận hệ thống $n \times n$

B – ma trận vào $n \times m$

C – ma trận ra $p \times n$

D – ma trận liên thông $p \times m$



Mô hình trạng thái (tiếp)

Ví dụ

Cơ hệ lò xo-vật

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+k\,x=u$$

x_1- quãng đường dịch chuyển

x_2- vật tốc khối vật

$$x_1(t)=x(t)=y(t) \longrightarrow y(t)=x_1(t)$$

$$x_2(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dy(t)}{dt} \longrightarrow \frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\left(\frac{B}{M}\right)x_2(t)-\left(\frac{k}{M}\right)x_1(t)+\left(\frac{1}{M}\right)u(t)$$

Mô hình trạng thái (tiếp)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\left(\frac{k}{M}\right)x_1(t) - \left(\frac{B}{M}\right)x_2(t) + \left(\frac{1}{M}\right)u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{M} & -\dfrac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

A: Ma trận hệ thống

B: Ma trận vào

C: Ma trận ra

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vector đầu ra

Vector trạng thái

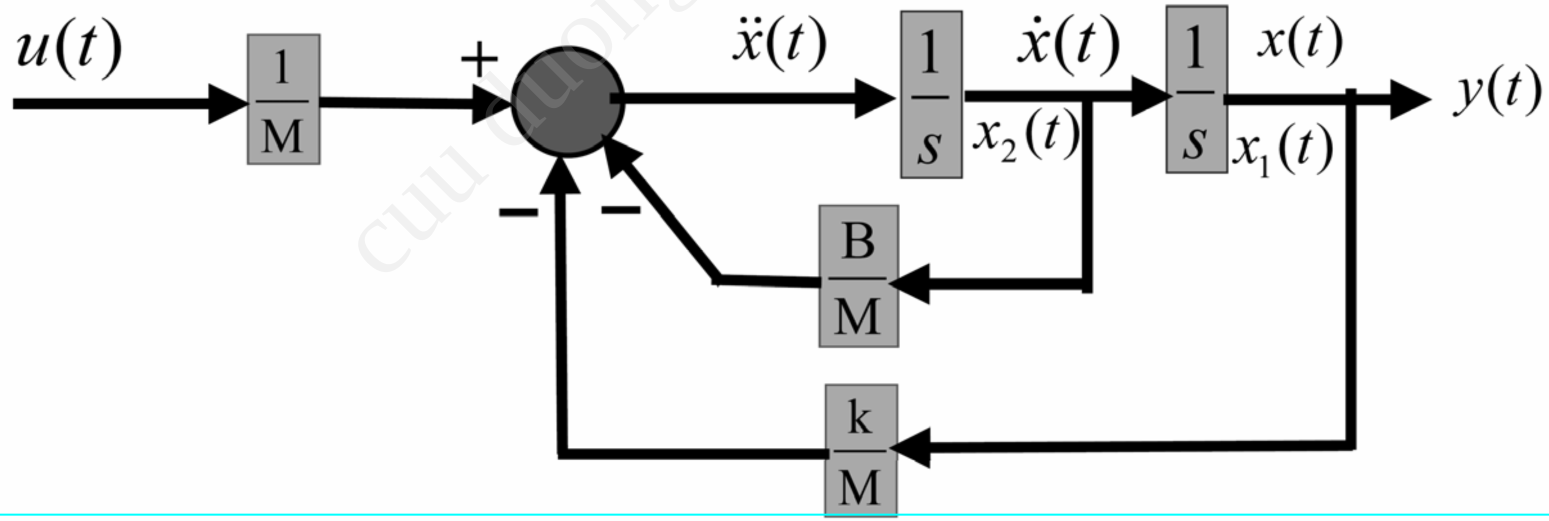
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Dw(t)$$

Sơ đồ trong mô phỏng

$$y(t) = \int x(t)dt \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}X(s)$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + k\,x = u$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\left(\frac{B}{M}\right)\frac{dx(t)}{dt} - \left(\frac{k}{M}\right)x(t) + \left(\frac{1}{M}\right)u(t)$$



Mô hình trạng thái (tiếp)

Bản chất

- Phân tích, thiết kế trên miền thời gian
- Phương trình vi phân bậc *n* mô tả đối tượng được chuyển thành hệ *n* PTVP bậc nhất
- Bậc *n* thể hiện số phần tử độc lập tích lũy năng lượng trong hệ thống

Ưu điểm

- Thích hợp mô tả cho cả hệ phi tuyến, hệ tham số biến đổi theo thời gian
- Cung cấp thông tin về trạng thái của đối tượng
- Tiện lợi khi phân tích thiết kế các hệ trích mẫu

Chuyển từ MHTT sang hàm truyền đạt

$u(t)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$y(t)$

U(s)

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Y(s)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$
$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$x(0) = 0$ dẫn đến

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$
$$= C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U(s)$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Chuyển từ MHTT sang hàm truyền đạt

Ví dụ

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad D=1$$

$$\boxed{T(s)=C(sI-A)^{-1}B+D}$$

$$\Delta = s(s+3)+2$$
$$= s^2+3s+2$$
$$=(s+1)(s+2)$$

$$(sI-A)=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)=\begin{bmatrix}s & 1\\ -2 & s+3\end{bmatrix} \qquad (sI-A)^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}s+3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\frac{s+5}{\Delta}$$

$$C(sI-A)^{-1}B+D=\frac{s+5}{\Delta}+1=\frac{s+5+\Delta}{\Delta}=\frac{s+5+s^2+3s+2}{s^2+3s+2}$$

$$T(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\frac{s^2+4s+7}{s^2+3s+2}$$

Điểm không:

2+j1.7321 và

2-j1.7321

Điểm cực:

-1 và -2