Chương 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Trong chương này chúng ta nêu lên một số phương pháp dùng để giải hệ phương trình đại số tuyến tính

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

rất thường gặp trong các bài toán khoa học kĩ thuật. Ta chỉ xét hệ gồm n phương trình với n ẩn. Do vậy ma trận hệ số A là ma trận vuông cấp n, và vectơ nghiệm x cũng như vectơ tự do b là các vectơ cột n chiều thuộc $\mathbb{R}^n$. Ta luôn giả thiết rằng $\det A \neq 0$, và do đó bao giờ hệ cũng có nghiệm duy nhất $x = A^{-1}b$. Tuy nhiên việc tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} đôi khi còn khó khăn gấp nhiều lần so với việc giải trực tiếp hệ phương trình xuất phát. Dưới đây chúng ta sẽ xét một số phương pháp thường dùng để giải hệ phương trình (3.1).

3.1 PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Trước khi trình bày phương pháp Gauss, chúng ta xét một số trường hợp đơn giản khi ma trận hệ số A của hệ phương trình (3.1) có dạng đặt biệt.

Trường hợp đơn giản nhất là trường hợp hệ phương trình có ma trận hệ số có dạng đường chéo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi ấy hệ tương đương với n phương trình bậc nhất $a_{ii}x_i = b_i, \forall i = \overline{1,n}$. Vì $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$ nên $a_{ii} \neq 0, \forall i$. Và do đó nghiệm của hệ có thể được viết dưới dạng:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

Trường hợp thứ hai khi ma trận hệ số A có dạng tam giác trên:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Với giả thiết $\det A \neq 0$, ta có $a_{ii} \neq 0, \forall i = \overline{1,n}$, và nghiệm của hệ được cho bởi công thức:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_k = \dfrac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j \right), \quad k = n-1, \cdots, 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Cuối cùng khi ma trận hệ số A có dạng tam giác dưới:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tương tự $\det A \neq 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i = \overline{1,n}$, và nghiệm của hệ có dạng:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_k = \dfrac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j \right), \quad k = 2, \cdots, n \end{cases} \tag{3.3}$$

Thuật toán giải hệ phương trình với ma trận tam giác được thể hiện trong Chương trình 3.1 và 3.2. Đối số của chương trình gồm: **N** là số phương trình và số ẩn, **a** là ma trận hệ số cấp $N \times (N+1)$, cột thứ $N+1$ là vectơ tự do. Kết quả trả về của chương trình là vectơ nghiệm **x** .

Chương trình 3.1. - c3upper : Ma trận hệ số tam giác trên.

```
function [x] = c3upper(N,a)
if nargin < 2, error('Hàm có tối thiểu 2 đối số');end;
x(N)=a(N,N+1)/a(N,N);
for k=N-1:-1:1
  sum = 0;
  for j=k+1:N
    sum=sum+a(k,j)*x(j);
  end;
  x(k)=(a(k,N+1)-sum)/a(k,k);
end;
```

Chương trình 3.2. - c3lower : Ma trận hệ số tam giác dưới.

```
function [x] = c3lower(N,a)
if nargin < 2, error('Hàm có tối thiểu 2 đối số');end;
x(1)=a(1,N+1)/a(1,1);
for k=2:N
  sum = 0;
```

```
  for j=1:k-1
    sum=sum+a(k,j)*x(j);
  end;
  x(k)=(a(k,N+1)-sum)/a(k,k);
end;
```

Bây giờ chúng ta sẽ trình bày phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tổng quát dạng (3.1). Nội dung của phương pháp Gauss dùng để giải hệ phương trình đại số tuyến tính là sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để chuyển về một hệ phương trình mới tương đương với hệ phương trình cũ mà ma trận hệ số có dạng tam giác. Các phép biến đổi sơ cấp thường hay sử dụng là:

- Nhân một hàng cho một số khác không.
- Hoán chuyển hai hàng cho nhau.
- Cộng một hàng cho một hàng khác đã nhân với một số khác không.

Xét hệ thống phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \ldots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Do định thức của ma trận hệ số A khác không nên một trong các số $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ phải khác không. Giả sử $a_{11} \neq 0$. Lấy phương trình thứ k với $k = \overline{2, n}$ trừ cho phương trình một đã nhân với $\dfrac{a_{k1}}{a_{11}}$, ta được một hệ mới có dạng như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ & & \ldots & & \ldots & & & & \ldots \\ & & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)} \end{cases}$$

Trong các số $a_{22}^{(1)}, \dots, a_{n2}^{(1)}$ phải có một số khác không, vì nếu ngược lại thì $\det A = 0$, trái với giả thiết. Giả sử $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Còn nếu chỉ có $a_{p2}^{(1)} \neq 0$ và $a_{22}^{(1)} = 0$ thì ta thực hiện phép hoán chuyển hai phương trình thứ 2 và thứ p. Tiếp tục biến đổi cho $n-2$ phương trình cuối. Và cứ tiếp tục cho đến phương trình thứ n, ta được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ & & \dots & & \dots & & & & \dots \\ & & & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình có ma trận hệ số có dạng tam giác trên và có thể giải được bằng công thức (3.2).

Ví dụ 3.1. Xét hệ phương trình đại số tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{cases}$$

Ma trận hệ số mở rộng có dạng

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & : & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & : & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & : & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & : & 4 \end{pmatrix}$$

Ta thực hiện các phép biến đổi sau: $(h_2 = h_2 - 2h_1), (h_3 = h_3 - h_1), (h_4 = h_4 - h_1)$, khi đó ma trận trở thành

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & : & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & : & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & : & 12 \end{pmatrix}$$

Phần tử $a_{22}^{(1)} = 0$, do đó để tiếp tục, ta thực hiện phép chuyển đổi giữa hàng thứ hai và thứ ba và thu được

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & : & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & : & 12 \end{pmatrix}$$

Cuối cùng lấy hàng thứ tư cộng cho hai lần hàng thứ ba ta được:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & : & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 4 \end{pmatrix}$$

Và sử dụng công thức (3.2) ta có thể dễ dàng tìm được $x = [-7, 3, 2, 2]^T$.

Thuật toán giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss được thể hiện trong Chương trình 3.3. Đối số của chương trình gồm: **N** là số phương trình và số ẩn, **a** là ma trận hệ số cấp $N \times (N+1)$, cột thứ $N+1$ là vectơ tự do. Kết quả trả về của chương trình là vectơ nghiệm **x** .

Chương trình 3.3. - c3gauss : Phương pháp Gauss.

```
function [x] = c3gauss(N,a)
if nargin < 2, error('Hàm có tối thiểu 2 đối số');end
for k=1:N
  if a(k,k)==0
    flag=0;
    for i=k+1:N
      if a(i,k)~=0
        flag=1;
        for j=1:N+1
          tmp=a(k,j);
          a(k,j)=a(i,j);
          a(i,j)=tmp;
```

```
        end;
        break;
      end;
    end;
    if flag==0
      error('Ma trận suy biến.');
    end;
  end;
  for i=k+1:N
    tmp=a(i,k);
    for j=k:N+1
      a(i,j)=a(i,j)-tmp*a(k,j)/a(k,k);
    end;
  end;
end;
x=c3upper(N,a);
```

Trong ví dụ 3.1 ở phần trên, ở bước thứ hai, do $a_{22}^{(1)} = 0$ nên ta phải hoán chuyển hai hàng thứ hai và thứ ba. Để tránh trường hợp này, ta có thể cải tiến phương pháp Gauss theo hướng như sau. Tại mỗi bước, khi chọn phần tử để biến đổi, ta sẽ chọn phần tử có trị tuyệt đối lớn nhất, sao cho không cùng hàng và cột với những phần tử đã chọn trước. Phần tử như vậy thường được gọi là phần tử chính hay phần tử trội. Sau đó ta sẽ biến đổi để cho tất cả các phần tử trên cùng cột của phần tử trội bằng không. Qua n bước như vậy ta sẽ tìm được nghiệm dễ dàng [1]. Ta minh hoạ phương pháp này bằng ví dụ sau.

Ví dụ 3.2. Xét hệ phương trình trong ví dụ trước có ma trận hệ số mở rộng

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & : & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & : & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & : & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & : & 4 \end{pmatrix}$$

[1] Phương pháp này cũng được gọi là phương pháp Gauss-Jordan hay Jordan

Đầu tiên ta sẽ chọn phần tử chính là phần tử $a_{43}^{(0)} = 4$ và thực hiện các phép biến đổi $(4h_3 - h_4), (4h_2 - 3h_4), (2h_1 - h_4)$ ta thu được

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 & : & -20 \\ 5 & -5 & 0 & -21 & : & -92 \\ 3 & 5 & 0 & -3 & : & -12 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & : & 4 \end{pmatrix}$$

Bước tiếp theo, phần tử chính được chọn không được nằm trên hàng thứ tư và cột thức ba. Đó là phần tử $a_{24}^{(1)} = -21$. Tiếp tục thực hiện các phép biến đổi $(21h_1 - 5h_2), (7h_3 - h_2), (7h_4 + h_2)$ ta thu được

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & : & 40 \\ 5 & -5 & 0 & -21 & : & -92 \\ 16 & 40 & 0 & 0 & : & 8 \\ 12 & -12 & 28 & 0 & : & -64 \end{pmatrix}$$

Tiếp theo phần tử chính được chọn không được nằm trên hàng thứ hai, thứ tư và cột thứ ba, thứ tư và do đó phần tử chính sẽ là phần tử $a_{32}^{(2)} = 40$. Thực hiện phép biến đổi $(10h_1 - h_3), (8h_2 + h_3), (10h_4 + 3h_3)$ ta được

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -56 & 0 & 0 & 0 & : & 392 \\ 56 & 0 & 0 & -168 & : & -728 \\ 16 & 40 & 0 & 0 & : & 8 \\ 168 & 0 & 280 & 0 & : & -616 \end{pmatrix}$$

Cuối cùng phần tử chính không cùng nằm trên hàng và cột của những phần tử chính đã được chọn trước là phần tử $a_{11}^{(3)} = -56$. Thực hiện các phép biến đổi $(h_2 + h_1), (7h_3 + 2h_1), (h_4 + 3h_1)$ ta có ma trận cuối cùng

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -56 & 0 & 0 & 0 & : & 392 \\ 0 & 0 & 0 & -168 & : & -336 \\ 0 & 280 & 0 & 0 & : & 840 \\ 0 & 0 & 280 & 0 & : & 560 \end{pmatrix}$$

và hệ phương trình đầu tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} -56x_1 & = & 392 \\ -168x_4 & = & -336 \\ 280x_2 & = & 840 \\ 280x_3 & = & 560 \end{cases}$$

Từ đây chúng ta cũng suy ra được $x = [-7, 3, 2, 2]^T$.

Thuật toán giải hệ phương trình bằng phương pháp phần tử trội được thể hiện trong Chương trình 3.4. Đối số của chương trình gồm: **N** là số phương trình và số ẩn, **a** là ma trận hệ số cấp $N \times (N+1)$, cột thứ $N+1$ là vectơ tự do. Kết quả trả về của chương trình là vectơ nghiệm **x** .

Chương trình 3.4. - c3jordan : Phương pháp phần tử trội.

```
function [x] = c3jordan(N,a)
if nargin < 2, error('Hàm có tối thiểu 2 đối số'); end
for i=1:N, b(i)=0; end;
for k=1:N
  max=0;
  for i=1:N
    if b(i)==0
      for j=1:N
        if max<abs(a(i,j))
          max=abs(a(i,j)); im=i; jm=j;
        end;
      end;
    end;
  end;
  if max<=0, error('Ma trận suy biến.'); end;
  b(im)=jm; max=a(im,jm);
  for j=1:N+1, a(im,j)=a(im,j)/max; end;
  for i=1:N
    if i~=im
      max=a(i,jm);
      for j=1:N+1
        a(i,j)=a(i,j)-a(im,j)*max;
      end;
    end;
  end;
```

```
end;
for i=1:N, x(b(i))=a(i,N+1); end;
```

Các phương pháp có sử dụng các phép biến đổi sơ cấp cơ bản có ưu điểm là đơn giản, dễ lập trình. Tuy nhiên nếu phần tử được chọn để biến đổi gần với không thì phương pháp Gauss có thể cho kết quả không chính xác. Hơn nữa, nếu các phép toán cộng, trừ, nhân, chia được làm đúng hoàn toàn, thì các phương pháp trên cho chúng ta nghiệm đúng của hệ phương trình. Tuy nhiên, khi thực hiện trên các công cụ tính toán, ta vẫn gặp phải sai số làm tròn. Cho nên các phương pháp Gauss vẫn được xem như là các phương pháp gần đúng.

3.2 PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LU

Nội dung của phương pháp nhân tử LU là phân tích ma trận hệ số A thành tích của hai ma trận L và U, trong đó L là ma trận tam giác dưới và U là ma trận tam giác trên. Khi đó việc giải hệ phương trình (3.1) sẽ đưa về việc giải hai hệ phương trình $Ly = b$ và $Ux = y$ mà ma trận hệ số là các ma trận tam giác và nghiệm thu được từ các công thức (3.2) và (3.3). Ta có định lí sau đây.

Định lí 3.1. *Nếu A là ma trận không suy biến, thì bao giờ cũng tồn tại một ma trận P không suy biến sao cho ma trận PA phân tích được thành tích của ma trận tam giác dưới L và ma trận tam giác trên U, nghĩa là $PA = LU$.*

Có rất nhiều phương pháp phân tích $A = LU$, tuy nhiên ta thường xét trường hợp ma trận L có đường chéo chính bằng 1 và gọi là phương pháp Doolittle. Khi đó L và U có dạng:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Các phần tử của hai ma trận L và U được xác định theo công thức sau:

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} & (1 \leqslant j \leqslant n) \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}} & (2 \leqslant i \leqslant n) \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} & (1 < i \leqslant j) \\ l_{ij} = \dfrac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \right) & (1 < j < i) \end{cases} \tag{3.4}$$

Ví dụ 3.3. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Ta phân tích ma trận hệ số

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

với $u_{11} = 2; u_{12} = 2; u_{13} = -3; l_{21} = -2; l_{31} = 1;$
$u_{22} = 1; u_{23} = -2; l_{32} = -1; u_{33} = 3.$

Do đó

$$Ly = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 3.4. Hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

Ta có phân tích của ma trận hệ số $A = LU$ theo phương pháp Doolittle như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$Ly = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ta thu được $y = [4, -7, 13, -13]^T$. Và cuối cùng từ hệ phương trình

$$Ux = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

ta có nghiệm $x = [-1, 2, 0, 1]^T$.

Thuật toán phân rã LU được thể hiện trong Chương trình 3.5. Đối số của chương trình gồm: **N** là số phương trình, **a** là ma trận hệ số cấp $N \times N$. Kết quả trả về của chương trình là ma trận tam giác dưới **l** và ma trận tam giác trên **u** .

Chương trình 3.5. - c3LUfactor : Phương pháp nhân tử LU.

```
function [l,u] = c3LUfactor(N,a)
if nargin < 2, error('Hàm có tối thiểu 2 đối số'); end;
l=zeros(N); u=zeros(N);
for i=1:N, l(i,i)=1; end;
for j=1:N, u(1,j)=a(1,j); end;
if u(1,1)==0, error('Không thể phân tích được.');end;
for i=2:N, l(i,1)=a(i,1)/u(1,1); end;
for i=2:N-1
```

```
  for j=i:N
    sum=0;
    for k=1:i-1,sum=sum+l(i,k)*u(k,j);end;
    u(i,j)=a(i,j)-sum;
  end;
  if   u(i,i)==0,error('Không   thể   phân   tích
được.');end;
  for j=i+1:N
    sum=0;
    for k=1:i-1,sum=sum+l(j,k)*u(k,i);end;
    l(j,i)=(a(j,i)-sum)/u(i,i);
  end;
end;
sum=0; for k=1:N-1,sum=sum+l(N,k)*u(k,N); end;
u(N,N)=a(N,N)-sum;
```

Phương pháp phân rã LU áp dụng rất hiệu quả trong trường hợp ma trận hệ số có dạng ba đường chéo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Khi đó phân rã Doolittle cho ta

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ và } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

Khi ấy từ công thức (3.4) ta có

$$\begin{cases} u_{11} = a_{11};\ u_{12} = a_{12};\ l_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}}; \\ u_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}; \quad \forall i = 2, 3, \ldots, n \\ u_{i,i+1} = a_{i,i+1};\ l_{i+1,i} = \dfrac{a_{i+1,i}}{u_{i,i}}; \quad \forall i = 2, 3, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Để thể hiện thuật toán Doolittle trong trường hợp ma trận hệ số có dạng ba đường chéo, thay vì đưa vào ma trận A, ta đưa vào ba vectơ: **a** chứa các phần tử trên đường chéo chính của A, **b** là đường chéo nằm trên đường chéo chính và **c** là đường chéo nằm dưới đường chéo chính, vectơ tự do là **d** . Chương trình trên MatLab được thể hiện trong chương trình 3.6. Kết quả trả về là vectơ nghiệm **x** .

Chương trình 3.6. - c3tridiag : Ma trận ba đường chéo.

```
function [x]=c3tridiag(N,a,b,c,d)
if nargin < 5, error('Ham co toi thieu 5 doi so.'); end;
u(1)=a(1);v(1)=b(1);l(1)=c(1)/u(1);y(1)=d(1);
for i=2:N-1
  u(i)=a(i)-l(i-1)*v(i-1);
  v(i)=b(i);
  l(i)=c(i)/u(i);
  y(i)=d(i)-l(i-1)*y(i-1);
end;
u(N)=a(N)-l(N-1)*v(N-1);
y(N)=d(N)-l(N-1)*y(N-1);
x(N)=y(N)/u(N);
for i=N-1:-1:1
  x(i)=(y(i)-v(i)*x(i+1))/u(i);
end;
```

3.3 PHƯƠNG PHÁP CHOLESKI

Đây là trường hợp đặt biệt của phương pháp nhân tử LU, và được dùng cho trường hợp ma trận hệ số A đối xứng và xác định dương. Ma trận vuông A được gọi là đối xứng nếu $A^T = A$. Có thể nói rằng ma trận A là đối xứng nếu các phần tử của nó đối xứng với nhau qua đường chéo chính, nghĩa là $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n}$. Còn ma trận A là xác định dương nếu $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : x^T A x > 0$. Để kiểm tra tính xác định dương của một ma trận, ta thường dùng định lí sau đây.

Định lí 3.2. *Một ma trận là xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của nó đều dương.*

Trong đó định thức con chính cấp $k, 1 \leqslant k \leqslant n$ của ma trận là định thức con thu được từ k hàng và k cột đầu tiên của ma trận đó.

Ví dụ 3.5. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ có $\Delta_1 = |1| = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$ và $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0$. Do đó A là xác định dương.

Ta có định lí Choleski:

Định lí 3.3. *Ma trận A là đối xứng và xác định dương khi và chỉ khi tồn tại một ma trận B tam giác dưới, khả đảo sao cho $A = BB^T$.*

Khi đó ma trận tam giác dưới B có thể tìm được theo công thức sau:

$$\begin{cases} b_{11} = \sqrt{a_{11}}; \quad b_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{b_{11}} & (2 \leqslant i \leqslant n) \\ b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2} & (1 < i \leqslant n) \\ b_{ij} = \dfrac{1}{b_{jj}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk} \right) & (1 < j < i) \end{cases} \tag{3.5}$$

Ví dụ 3.6. Xét hệ phương trình

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b$$

Vì ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ là đối xứng và xác định dương, nên từ công thức (3.5) ta có thể xác định các hệ số $b_{ij}, i > j$ của ma trận tam giác dưới B như sau

$$b_{11} = 1, b_{21} = 1, b_{31} = -1, b_{22} = 1, b_{32} = 1, b_{33} = \sqrt{2}$$

và do đó $A = BB^T$ với $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Hệ phương trình xuất phát sẽ tương đương với hai hệ $\begin{cases} By = b \\ B^T x = y \end{cases}$. Ta được

$$By = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$B^T x = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Thuật toán phân rã Choleski được thể hiện trong Chương trình 3.7. Đối số của chương trình gồm: **N** là cấp của ma trận, **a** là ma trận hệ số đối xứng và xác định dương. Kết quả trả về của chương trình là ma trận tam giác dưới **b** .

Chương trình 3.7. - c3choleski : Phương pháp Choleski.

```
function [b] = c3choleski(N,a)
if nargin < 2, error('Hàm có tối thiểu 2 đối số'); end;
for i=1:N
```

```
  for j=1:N
    if a(i,j) ~ = a(j,i)
      error('Ma trận không đối xứng.');
    end;
  end;
end;
b=zeros(N);
if a(1,1)<=0, error('Ma trận không xác định dương.');
end;
b(1,1)=sqrt(a(1,1));
for i=2:N, b(i,1)=a(i,1)/b(1,1); end;
for k=2:N
  ak=0; for j=1:k-1, ak=ak+b(k,j)*b(k,j); end;
  ak=a(k,k)-ak;
  if ak<=0, error('Ma trận không xác định dương.');
end;
  b(k,k)=sqrt(ak);
  for i=k+1:N
    ak=0;
    for j=1:k-1
      ak=ak+b(i,j)*b(k,j);
    end;
    b(i,k)=(a(i,k)-ak)/b(k,k);
  end;
end;
```

Trong thực tế, ứng dụng của phương pháp Choleski để giải hệ phương trình đại số tuyến tính, ta chỉ cần tính đối xứng và không cần tính xác định dương của ma trận hệ số A. Khi đó các phần tử của ma trận tam giác B có thể là những số phức (sử dụng đơn vị ảo $i = \sqrt{-1}$). Tuy nhiên, kết quả tính toán cuối cùng sẽ cho chúng ta nghiệm thực của hệ phương trình ban đầu.

Ví dụ 3.7. Xét hệ phương trình

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

Từ công thức (3.5) ta có thể xác định các hệ số $b_{ij}, i > j$ của ma trận tam giác dưới B như sau

$$b_{11} = 1, b_{21} = 2, b_{31} = -1, b_{22} = i\sqrt{3}, b_{32} = \frac{2}{i\sqrt{3}}, b_{33} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ta có

$$By = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & i\sqrt{3} & 0 \\ -1 & \frac{2}{i\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{i\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$B^T x = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & i\sqrt{3} & \frac{2}{i\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{i\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

và ta có nghiệm của hệ phương trình là $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$.

3.4 CHUẨN VECTƠ VÀ CHUẨN MA TRẬN

Xét không gian tuyến tính thực $\mathbb{R}^n$. Chuẩn của vectơ $x \in \mathbb{R}^n$ là một số thực, ký hiệu là $\|x\|$, thoả các điều kiện sau đây:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geqslant 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Điều kiện này thường được gọi là bất đẳng thức tam giác.

Trong $\mathbb{R}^n$ có thể có rất nhiều chuẩn, tuy nhiên chúng ta chỉ xét chủ yếu hai chuẩn thường dùng sau đây: $\forall x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{3.6}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k| \tag{3.7}$$

Việc kiểm tra các công thức (3.6) và (3.7) thoả các điều kiện (i), (ii), (iii) là đơn giản và dành cho bạn đọc.

Bây giờ chúng ta định nghĩa chuẩn ma trận tương ứng với chuẩn vectơ.

Định nghĩa 3.1. *Chuẩn ma trận tương ứng với chuẩn vectơ được xác định theo công thức:*

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{3.8}$$

Ví dụ 3.8. Xác định chuẩn của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ tương ứng với chuẩn một của vectơ. Với mọi $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, sao cho $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| = 1$, ta có

$\|Ax\|_1 = |x_1 + 2x_2| + |3x_1 + 4x_2| \leqslant 4|x_1| + 6|x_2| = 4 + 2|x_2| \leqslant 6$

Do đó $\|A\|_1 = 6$.

Từ công thức (3.8) ta dễ dàng suy ra được rằng: $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$

Định lí 3.4. *Chuẩn ma trận theo công thức (3.8) tương ứng với chuẩn vectơ được xác định như sau:*

$$\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{3.9}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{3.10}$$

Định nghĩa 3.2. *Xét dãy các vectơ $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ với $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. Ta nói dãy các vectơ này hội tụ về vectơ $\overline{x}$ khi $m \to +\infty$ nếu và chỉ nếu $\|x^{(m)} - \overline{x}\| \to 0$ khi $m \to +\infty$ (hội tụ theo chuẩn).*

Khi đó ta ký hiệu $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = \overline{x}$ và chuẩn có thể lấy một chuẩn bất kỳ trong các công thức (3.6) hoặc (3.7). Ta cũng có thể nói dãy vectơ $\{x^{(m)}\}$ hội tụ về $\overline{x}$ theo chuẩn đã cho. Ta có định lí sau đây:

Định lí 3.5. *Để dãy các vectơ $\{x^{(m)}\}$ hội tụ tới vectơ $\overline{x}$ khi $m \to +\infty$ theo chuẩn thì điều kiện cần và đủ là dãy $\{x_k^{(m)}\}$ hội tụ về $\overline{x}_k, \forall k = \overline{1,n}$ (hội tụ theo toạ độ).*

Bây giờ xét hệ phương trình $Ax = b(\det A \neq 0)$ có nghiệm $x = A^{-1}b$. Cho b một số gia Δb, khi đó nghiệm x tương ứng sẽ có số gia là Δx, và $A\Delta x = \Delta b \Leftrightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b$. Ta có

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\Delta b\|$$

và

$$\|b\| = \|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$$

Từ đây chúng ta dễ dàng suy ra được

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \|A\|.\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Số

$$k(A) = \mathrm{Cond}(A) = \|A\|.\|A^{-1}\| \tag{3.11}$$

được gọi là số điều kiện của ma trận A. Ta có thể chứng tỏ được rằng

$$1 \leqslant k(A) \leqslant +\infty$$

Số điều kiện của ma trận đặc trưng cho tính ổn định của hệ thống phương trình đại số tuyến tính. Giá trị của $k(A)$ càng gần với 1 thì hệ càng ổn định. Số điều kiện càng lớn thì hệ càng mất ổn định.

Ví dụ 3.9. Xét hệ phương trình $Ax = b$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix}$ và $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.01 \end{pmatrix}$. Dễ thấy hệ có nghiệm là $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bây giờ xét hệ $A\tilde{x} = \tilde{b}$ với $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.1 \end{pmatrix}$. Nghiệm của hệ bây giờ là $\tilde{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \end{pmatrix}$. Ta nhận thấy $k_\infty(A) = 1207.01 \gg 1$. Do đó $b \approx \tilde{b}$, nhưng x và $\tilde{x}$ khác nhau rất xa.

3.5 PHƯƠNG PHÁP LẶP

Kĩ thuật lặp dùng để giải hệ phương trình đại số tuyến tính (3.1) cũng tương tự như phương pháp lặp đã xét trong chương 2. Muốn thế, chúng ta chuyển hệ (3.1) về dạng tương đương $x = Tx + c$ với T là một ma trận vuông cấp n và c là một vectơ đã biết. Xuất phát từ vectơ ban đầu $x^{(0)}$, ta xây dựng một dãy các vectơ $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ theo công thức lặp

$$x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c \tag{3.12}$$

với $m = 1, 2, 3, \ldots$. Ta có định lí sau đây:

Định lí 3.6. *Nếu $\|T\| < 1$ thì dãy lặp các vectơ xác định theo công thức (3.12) sẽ hội tụ về nghiệm $\overline{x}$ của hệ với mọi vectơ lặp ban đầu $x^{(0)}$. Khi đó ta có các công thức đánh giá sai số như sau:*

$$\|x^{(m)} - \overline{x}\| \leqslant \frac{\|T\|^m}{1 - \|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \tag{3.13}$$

$$\|x^{(m)} - \overline{x}\| \leqslant \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| \tag{3.14}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét một dạng ma trận hệ số của hệ phương trình $Ax = b$ mà có thể chuyển dễ dàng về dạng $x = Tx + c$.

Định nghĩa 3.3. *Ma trận A được gọi là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt nếu nó thoả mãn điều kiện sau đây:*

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \tag{3.15}$$

Chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra rằng nếu A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt thì $\det A \neq 0$ và $a_{ii} \neq 0, \forall i = \overline{1, n}$. Xét hệ phương trình (3.1) với A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt. Ta phân tích ma trận A theo dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= D - L - U$$

Chú ý rằng do $a_{ii} \neq 0, \forall i = \overline{1, n}$ nên $\det D \neq 0$. Và như vậy tồn tại ma trận nghịch đảo:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Khi đó hệ

$$Ax = b \Longleftrightarrow (D - L - U)x = b \tag{3.16}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét một vài phương pháp để chuyển hệ phương trình (3.1) về dạng $x = Tx + c$.

Từ hệ (3.16) ta có $Dx = (L + U)x + b$. Do tồn tại D^{-1} nên $x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$. Ký hiệu $T_j = D^{-1}(L + U)$ và $c_j = D^{-1}b$. Khi đó công thức lặp theo (3.12) sẽ có dạng

$$x^{(m)} = T_j x^{(m-1)} + c_j, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.17}$$

Phương pháp lặp dựa trên công thức lặp (3.17) được gọi là **phương pháp Jacobi**. Dạng tường minh của công thức (3.17) như sau:

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m-1)} + b_i \right) \tag{3.18}$$

với $i = 1, 2, \ldots, n$. Ta có

$$\|T_J\|_\infty = \|D^{-1}(L+U)\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

do A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt. Vậy $\|T_J\|_\infty < 1$, nghĩa là phương pháp Jacobi luôn hội tụ với mọi vectơ lặp ban đầu $x^{(0)}$.

Ví dụ 3.10. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 = 9 \end{cases}$$

Với vectơ lặp ban đầu $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, hãy tính vectơ $x^{(3)}$ và đánh giá sai số của nó. Ta có

$$T_j = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.0 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad c_j = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

Do đó:

$x^{(1)} = T_j x^{(0)} + c_j = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \end{bmatrix}$; $x^{(2)} = T_j x^{(1)} + c_j = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.64 \\ 0.89 \end{bmatrix}$;

$x^{(3)} = T_j x^{(2)} + c_j = \begin{bmatrix} 0.725 \\ 0.640 \\ 0.907 \end{bmatrix}$. Ta có $\|T_j\|_\infty = 0.2$. Vì vậy

$$\|x^{(3)} - \overline{x}\|_\infty \leqslant \frac{0.2}{1-0.2}\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = 0.0043$$

Ví dụ 3.11. Hệ phương trình $Ax = b$ cho bởi

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $\overline{x} = [1, 2, -1, 1]^T$. Để chuyển từ hệ $Ax = b$ về dạng $x = T_j x + c_j$, ta biến đổi như sau

$$\begin{cases} x_1 &= & 0.100x_2 - 0.200x_3 + 0.600 \\ x_2 &= & 0.091x_1 + 0.091x_3 - 0.273x_4 + 2.273 \\ x_3 &= & 0.200x_1 + 0.100x_2 + 0.100x_4 - 1.100 \\ x_4 &= & -0.375x_2 + 0.125x_3 + 1.875 \end{cases}$$

Khi đó ma trận T_j và vectơ c_j có dạng:

$$T_j = \begin{pmatrix} 0 & 0.100 & -0.200 & 0 \\ 0.091 & 0 & 0.091 & -0.273 \\ -0.200 & 0.100 & 0 & 0.100 \\ 0 & -0.375 & 0.125 & 0 \end{pmatrix}, c_j = \begin{pmatrix} 0.600 \\ 2.273 \\ -1.100 \\ 1.875 \end{pmatrix}$$

Chọn chuẩn vô cùng và ta có $\|T_j\|_\infty = \dfrac{1}{2} < 1$. Do đó phương pháp lặp hội tụ. Chọn $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$. Bảng sau đây cho chúng ta kết quả tính toán sau 10 lần lặp.

m	1	2	3	4	5
$x_1^{(m)}$	0.6000	1.0473	0.9326	1.0152	0.9890
$x_2^{(m)}$	2.2727	1.7159	2.0533	1.9537	2.0114
$x_3^{(m)}$	−1.1000	−0.8052	−1.0493	−0.9681	−1.0103
$x_4^{(m)}$	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214

m	6	7	8	9	10
$x_1^{(m)}$	1.0032	0.9981	1.0006	0.9997	1.0001
$x_2^{(m)}$	1.9922	2.0023	1.9987	2.0004	1.9998
$x_3^{(m)}$	−0.9945	−1.0020	−0.9990	−1.0004	−0.9998
$x_4^{(m)}$	0.9944	1.0036	0.9989	1.0006	0.9998

Quá trình lặp dừng lại dựa theo đánh giá:

$$\|x^{(10)} - \overline{x}\|_\infty \leqslant \frac{1/2}{1 - 1/2}\|x^{(10)} - x^{(9)}\|_\infty = 8.0 \times 10^{-4} < 10^{-3}$$

Trong khi sai số thực sự là $\|x^{(10)} - \overline{x}\|_\infty = 0.0002$.

Phương pháp lặp Jacobi được thể hiện trong Chương trình 3.8. Đối số của chương trình gồm: **N** là cấp của ma trận, **a** là ma trận hệ số cấp **N** $\times$(**N+1**), **x0** là vectơ lặp ban đầu, **eps** là sai số (giá trị mặc định là 10^{-6}) và **maxit** là số lần lặp tối đa cho phép. Kết quả trả về của chương trình là vectơ lặp **x** , sai số **ss** và số lần lặp thực tế **n** .

Chương trình 3.8. - c3jacobi : Phương pháp Jacobi.

```
function [x,ss,n]=c3jacobi(N,a,x0,eps,maxit)
if nargin < 5, maxit = 100; end;
if nargin < 4, eps = 1.0E-6; end;
if nargin < 3, error('Hàm có ít nhất 3 đối số.'); end;
n=0;
for l=1:maxit
  n=n+1;
  for k=1:N
    sum=0;
    for j=1:N
      if j~=k, sum=sum+a(k,j)*x0(j);end;
    end;
    x(k)=(a(k,N+1)-sum)/a(k,k);
  end;
  ss=0;
  for k=1:N
    if abs(x(k)-x0(k))>ss
      ss=abs(x(k)-x0(k));
    end;
  end;
  if ss<eps, break; end;
  for k=1:N, x0(k)=x(k); end;
end;
```

Trong công thức (3.18), để tính các toạ độ của vectơ lặp $x^{(m)}$, chúng ta chỉ sử dụng các toạ độ của $x^{(m-1)}$. Tuy nhiên với $i > 1$, $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_{i-1}^{(m)}$ đã được tính và xấp xỉ nghiệm chính xác $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{i-1}$ tốt hơn $x_1^{(m-1)}, x_2^{(m-1)}, \ldots, x_{i-1}^{(m-1)}$. Do đó khi tính $x_i^{(m)}$ chúng ta nên sử dụng các giá trị vừa tính xong $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_{i-1}^{(m)}$. Ta thu được

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m-1)} + b_i\right) \tag{3.19}$$

với $i = 1, 2, \ldots, n$. Công thức (3.19) thường được gọi là công thức lặp **Gauss-Seidel**. Bây giờ ta sẽ viết dạng ma trận của phương pháp Gauss-Seidel.

Từ hệ phương trình (3.16) ta được $(D-L)x = Ux+b$. Ma trận $D-L$ cũng có ma trận nghịch đảo và do đó $x = (D-L)^{-1}Ux + (D-L)^{-1}b$. Đặt $T_g = (D-L)^{-1}U$ và $c_g = (D-L)^{-1}b$. Khi đó công thức lặp có dạng

$$x^{(m)} = T_g x^{(m-1)} + c_g, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Ví dụ 3.12. Xét hệ phương trình trong ví dụ 3.11

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

Công thức lặp theo phương pháp Gauss-Seidel có dạng

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = 0.100x_2^{(m-1)} - 0.200x_3^{(m-1)} + 0.600 \\ x_2^{(m)} = 0.091x_1^{(m)} + 0.091x_3^{(m-1)} - 0.273x_4^{(m-1)} + 2.273 \\ x_3^{(m)} = 0.200x_1^{(m)} + 0.100x_2^{(m)} + 0.100x_4^{(m-1)} - 1.100 \\ x_4^{(m)} = -0.375x_2^{(m)} + 0.125x_3^{(m)} + 1.875 \end{cases}$$

Chọn $x_0 = [0, 0, 0, 0]^T$. Bảng sau đây cho chúng ta kết quả tính toán sau 5 lần lặp.

m	1	2	3	4	5
$x_1^{(m)}$	0.6000	1.0300	1.0065	1.0009	1.0001
$x_2^{(m)}$	2.3272	2.0370	2.0036	2.0003	2.0000
$x_3^{(m)}$	-0.9873	-1.0140	-1.0025	-1.0003	-1.0000
$x_4^{(m)}$	0.8789	0.9844	0.9983	0.9999	1.0000

Ta thấy đến lần lặp thứ năm, nghiệm thu được bằng phương pháp Gauss-Seidel tốt hơn nhiều so với phương pháp Jacobi.

Phương pháp lặp Gauss-Seidel được thể hiện trong Chương trình 3.9. Đối số của chương trình gồm: **`N`** là cấp của ma trận, **`a`** là ma trận hệ số cấp **`N`** $\times$(**`N+1`**), **`x0`** là vectơ lặp ban đầu, **`eps`** là sai số (giá trị mặc định là 10^{-6}) và **`maxit`** là số lần lặp tối đa cho phép. Kết quả trả về của chương trình là vectơ lặp **`x`**, sai số **`ss`** và số lần lặp thực tế **`n`**.

Chương trình 3.9. - c3seidel : Phương pháp Gauss-Seidel.

```
function [x,ss,n]=c3seidel(N,a,x0,eps,maxit)
n=0;
for l=1:maxit
  n=n+1;
  for k=1:N
    sum=0;
    for j=1:N
      if j<k, sum=sum+a(k,j)*x(j);
      elseif j>k, sum=sum+a(k,j)*x0(j);
      end;
    end;
    x(k)=(a(k,N+1)-sum)/a(k,k);
  end;
  ss=0;
  for k=1:N
```

```
    if abs(x(k)-x0(k))>ss
      ss=abs(x(k)-x0(k));
    end;
  end;
  if ss<eps, break; end;
  for k=1:N, x0(k)=x(k); end;
end;
```

3.6 BÀI TẬP

1. Sử dụng phương pháp phần tử trội giải các hệ phương trình sau đây:

(a) $$\begin{cases} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 2.13x_1 + 3.45x_2 - 6.21x_3 = 1.45 \\ 0.43x_1 + 4.24x_2 - 5.05x_3 = 2.23 \\ 2.67x_1 - 1.13x_2 + 3.27x_3 = 3.21 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

2. Dùng phương pháp Doolittle phân tích các ma trận sau thành tích LU:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 8 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Sử dụng các phương pháp nhân tử LU (Doolittle) giải các hệ phương trình sau:

(a) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2.2x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 = 1.5 \\ 0.3x_1 + 3.4x_2 + 0.2x_3 = 2.4 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 4.1x_3 = 3.2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$

4. Cho A là ma trận vuông, ba đường chéo, cấp 10 với các hệ số được xác định bỡi $a_{ii} = 2, a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = -1$ với mọi $i = 2, \ldots, 9$ và $a_{11} = a_{10,10} = 2, a_{12} = a_{10,9} = -1$. Cho b là vectơ cột cấp 10 được cho bỡi $b_1 = b_{10} = 2$ và $b_i = 1$ với mọi $i = 2, \ldots, 9$. Hãy giải hệ $Ax = b$ sử dụng phương pháp nhân tử LU.

5. Tìm các giá trị của α để cho các ma trận sau đây là xác định dương:

(a) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ \alpha & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ -1 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6. Sử dụng phương pháp Choleski giải các hệ phương trình sau:

(a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 5.5x_1 + 1.2x_2 + 1.3x_3 + 1.4x_4 = 1.5 \\ 1.2x_1 + 5.5x_2 + 1.4x_3 + 1.5x_4 = 1.6 \\ 1.3x_1 + 1.4x_2 + 5.5x_3 + 1.6x_4 = 1.7 \\ 1.4x_1 + 1.5x_2 + 1.6x_3 + 5.5x_4 = 1.8 \end{cases}$

7. Tính các chuẩn $\|.\|_1, \|.\|_\infty$ và số điều kiện theo các chuẩn một và vô cùng của các ma trận sau:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

8. Tìm các giá trị của $\alpha > 0$ và $\beta > 0$ để cho các ma trận sau đây là đường chéo trội nghiêm ngặt:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ 2\beta & 5 & 4 \\ \beta & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & \beta \\ \alpha & 5 & \beta \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \beta & 2 & 4 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 4 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$

9. Sử dụng phương pháp Jacobi tìm nghiệm gần đúng của các hệ phương trình sau với sai số 10^{-3}, chọn chuẩn vô cùng:

(a) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ - 2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 25 \\ - 4x_2 + 8x_3 - x_4 = -11 \\ - x_3 + 5x_4 = -11 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$

10. Lặp lại bài tập 9 sử dụng phương pháp Gauss-Seidel.