Class No.3

Saturday, September 25, 2021 9:25 AM

Giải hệ $Ax=b$

i) Ôn lại ĐSTT: Chuẩn của vector $x \in \mathbb{R}^n$ & ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Chuẩn của vector $x \in \mathbb{R}^n$: $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \in \mathbb{R}^n$

3 loại chuẩn $\|x\|_?$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ($\to$ $\|\cdot\|$ Manhattan)

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ($\to$ $\|\cdot\|$ Euclid)

$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$. ($\to$ $\|\cdot\|$ sup)

VD1: $x = [1 \ -2 \ 3 \ -4 \ 5] \to \|x\|_1 = 15$, $\|x\|_2 = \sqrt{55}$, $\|x\|_\infty = 5$.

Chuẩn (cảm sinh) của ma trận $A \in \mathbb{R}^{n,n}$: Đ/n tổng quát $\|A\|_? := \sup_{\|x\|_? \le 1} \frac{\|Ax\|_?}{\|x\|_?}$

VD2: $\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1 \le 1} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$, tương tự $\|\cdot\|_2$ hay $\|\cdot\|_\infty$

Tính toán: $\|A\|_1 = \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|, \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|, \dots, \sum_{i=1}^{n} |a_{in}| \right\}$

tổng |·| cột

$\|A\|_2 = ?$ (thầy dạy sau, vì nó liên quan đến giá trị riêng, giá trị kì dị & phân tích SVD)

tổng |·| hàng $\longrightarrow \|A\|_\infty = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|, \sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^{n} |a_{nj}| \right\}$

VD3: $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\|A\|_1 = \max\{5, 7, 10\} = 10$

$\|A\|_2 \longrightarrow$ tính sau

$\|A\|_\infty = \max\{6, 7, 9\} = 9$.

Python tính ntn?

scipy.linalg

numpy.linalg

$\hookrightarrow$ norm

Ma trận trực giao: $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ được gọi là "trực giao" (orthogonal) $\Leftrightarrow Q \cdot Q^T = I_n$ ← ma trận đơn vị cỡ n

VD4: $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q \cdot Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

$\to$ Q là 1 ma trận trực giao.

python $\to$ A = rand(3,3) $\to$ Q = orth(A)

T/c: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ và $Q \in \mathbb{R}^n$ là 1 ma trận trực giao, thì

$\|A\| = \|A\,Q\| = \|Q\,A\|$

T/c: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $Q \in \mathbb{R}^{n}$ là 1 ma trận trực giao, thì

$$\|A\|_2 = \|A\cdot Q\|_2 = \|Q\cdot A\|_2 .$$

§ ii. Số Điều Kiện của Ma Trận (vuông).

Ví dụ 1: $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.*\end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ ⇒ ta muốn giải hệ $Ax=b$.

→ nhỏ, gần cần.

Bạn 1: Em đoán $* = 0.01$ ⇒ giải ra $x = \begin{bmatrix}101\\ -100\end{bmatrix}$

Sai khác rất nhỏ

Bạn 2: Em đoán $* = 0.001$ ⇒ giải ra $x = \begin{bmatrix}1001\\ -1000\end{bmatrix}$

} kết quả mâu thuẫn lớn

→ VÌ SAO?

Ví dụ 2: $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.001\end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix}1.*\\ 0\end{bmatrix}$ ⇒ ta muốn giải hệ $Ax=b$.

Bạn 1: E. đoán $* = 0$ ⇒ giải ra $x = \begin{bmatrix}1001\\ -1000\end{bmatrix}$

Sai rất nhỏ

Bạn 2: E đoán $* = 0.1$ ⇒ giải ra $x = \begin{bmatrix}1101.1\\ -1100\end{bmatrix}$

} → kết quả mâu thuẫn lớn

→ Vì Sao?

Ta xét pt $Ax = b$ (1)

$A(x+\Delta x) = b + \underline{\Delta b}$ (2)

| Sai số Δb của vế phải dẫn đến sai số Δx của n°.

Ước lượng (2)−(1) ⇒ $A.\Delta x = \Delta b$ ⇒ $\Delta x = A^{-1}.\Delta b$.

Sai số tuyệt đối $\|\Delta x\|_p \le \|A^{-1}\|_p . \|\Delta b\|_p$, $p = 1, 2, \infty$.

Sai số tương đối $\dfrac{\|\Delta x\|_p}{\|x\|_p} \le \dfrac{\|A^{-1}\|_p . \|\Delta b\|_p}{\|x\|_p}$ (3)

Ta có $Ax = b \Rightarrow \|b\|_p = \|Ax\|_p \le \|A\|_p . \|x\|_p \Rightarrow \|x\|_p \ge \|b\|_p / \|A\|_p$ (4)

Từ (3) & (4) ⇒ $\dfrac{\|\Delta x\|_p}{\|x\|_p} \le \dfrac{\|A^{-1}\|_p . \|\Delta b\|_p}{\left(\|b\|_p / \|A\|_p\right)} = \underbrace{\|A^{-1}\|_p . \|A\|_p}_{} . \dfrac{\|\Delta b\|_p}{\|b\|_p}$

⇒ $\|\delta x\|_p$ ... $\text{cond}(A) = \kappa(A) . \|\delta b\|_p$

$$\Rightarrow \quad \|\delta x\|_p \leq \text{cond}(A) \leftarrow \mathcal{K}(A) \cdot \|\delta b\|_p$$

Ý nghĩa: Sai số tương đối của nghiệm bị chặn trên bởi số điều kiện của ma trận * sai số tương đối của vế phải.

VD3: Quay lại VD2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{K}(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 4002.0008$ rất lớn.

$\|\cdot\|_2$

Lý tưởng: $\mathcal{K}(A) = 1$ (thường $\mathcal{K}(A) \geq 1$)

Dấu = xảy ra khi A là ma trận trực giao.

VD4: Tìm hiểu norm, cond trong module scipy.linalg / numpy.linalg để tính $\mathcal{K}(H_n)$ (H_n: ma trận Hilbert cỡ n)

Hỏi n lớn nhất mà máy các em có thể tính được $\mathcal{K}(H_n)$ ($\neq \infty$) là bao nhiêu.

Tham khảo: Scipy.linalg.hilbert

$$H_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+0} & \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+2} \\ \frac{1}{2+0} & \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} \\ \frac{1}{3+0} & \frac{1}{3+1} & \frac{1}{3+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$