

- Thông tin qua trọng:
1. Thi GK, CK đều 60 phút, 3 bài.
 2. Thi GK lập trình MATLAB
CK thi viết (có ôn/hạn đề sau)
 3. Chỉ học 13 tuần. (2 th chí).

Thi GK:

- 1) Matlab cơ bản: vòng lặp, dữ liệu, ma trận
- 2) Tính đạo hàm, tích phân
- 3) ODEs (bài toán giá trị ban đầu / IVPs)
 - i) Euler ẩn (lưu), hiện (bền) → 1 nấc
 - ii) Runge-Kutta 2 nấc

$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \quad \text{RK2}$

hình thang (Heun)
Euler cải tiến
Ralston

Dạng tổng quát RK 2 nấc
4 tham số c_0, c_1, p, q

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t+h) = y(t) + c_0 k_0 + c_1 k_1 \\ k_0 = h f(t, y(t)) \\ k_1 = h f(t+ph, y(t) + qk_0) \end{array} \right.$$

Nhận xét: 3 p RK2 ở trên là các p² hiện (vì ta 0 cần giải pt nào)
để tìm $y(t+h)$

Matlab code:

```

N = floor((tf - to)/h) + 1;
T = linspace(to, tf, N);
Y = [y0];
for i = 2:N
    t = T[i]; yt = Y[end];
    k0 = h * f(t, yt);
    k1 = h * f(t + p*h, yt + q*k0);
    yt = yt + c0*k0 + c1*k1;
    Y = [Y yt];
end
    
```

Hiện nay: I) Phương pháp hình thang ẩn: $y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(s, y(s)) ds$

Hình thang $\Rightarrow y(t+h) \approx y(t) + \frac{h}{2} \cdot (f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h)))$

$$\Rightarrow \underbrace{y(t+h) - \frac{h}{2} f(t+h, y(t+h))}_{\text{giải ra } y(t+h)} = \underbrace{y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t))}_{\text{VP đã biết}} \quad (1)$$

$$y_{i+1} - \frac{h}{2} f(t_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \quad (2)$$

Matlab code:

```

N = floor((tf - to)/h) + 1;
T = linspace(to, tf, N);
Y = [y0];
for i = 2:N
    ti = T[i]; yi = Y[end];
    yi+1 = fsolve(pt2, de ban đầu = yi);
    Y = [Y yi+1];
end
    
```

Viết: 1) Ta đã học 4 p² hiện (Euler hiện, RK2 có 3 p) & 2 p² ẩn (Euler ẩn/hình thang ẩn).

Vậy lợi thế của các p² này là gì?

p² hiện: nhanh hơn (vì 0 cần giải pt nào)

p² ẩn: bài toán cứng (stiff problem)

Matlab: ode45, ode23, ode113 → hiện

ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb → p² ẩn.

2) Cấp chính xác: $\|y(t_f) - \tilde{y}(t_f)\| = \mathcal{O}(h)$: Euler ẩn hiện
 \uparrow n chính xác \uparrow n xấp xỉ $\left\{ \begin{array}{l} = \mathcal{O}(h^2) : \text{RK2, hình thang ẩn} \end{array} \right.$

Bài toán cứng (stiff): chỉ giải tốt = các p² ẩn, cần hiện thì giải sai

VĐ a) Lập trình để giải IVP: $\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = -30 y(t), \quad \forall t \in [0, 10] \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$. Lấy bước $h = 0.1$

hỏi 10 câu (50%): câu đầu 70% = các p cần, câu cuối 30% giải sai

VĐ: a) Lập trình để giải IVP: $\begin{cases} \dot{y}(t) = -30y(t), \forall t \in [0, 10] \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Lấy bước $h = 0.1$

biểu p² Euler ẩn/hiện, RK2 (hình thang/Heun) & vẽ sai số so với n^o c/xác
 $y(t) = e^{-30t} y(0)$

b) Lập trình để giải IVP
 = Euler ẩn/hiện $\begin{cases} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -30 \end{bmatrix} y(t), \forall t \in [0, 10] \\ y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^2 \end{bmatrix} \end{cases}$

c) Hỏi như câu b với 2 p² hình thang ẩn/hiện. Vẽ & so sánh sai số.

Phân tích: a) Euler hiện $y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + h \cdot (-30) y_i \approx -2 y_i$
 $\Rightarrow |y_{i+1}| = 2 |y_i|$ vì $y_1 = y(0) = 1 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} |y_i| = +\infty$ (sai/mâu thuẫn với n^o c/xác)
 $y(t) = e^{-30t} y(0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$ Euler hiện sai.

Euler ẩn $y_{i+1} = y_i + h f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + h \cdot (-30) y_{i+1}$ (pt cần giải)
 Giải tay solve $\Rightarrow y_{i+1} = \frac{1}{1+30h} y_i = \frac{1}{4} y_i \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$.
 Euler ẩn phù hợp thực tế.

b) $f(t, y) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -30 \end{bmatrix} y(t) \Rightarrow f = @ (t, y) \begin{bmatrix} (-1) \times y(1) + 2 \times y(2) \\ 0 \times y(1) + (-30) \times y(2) \end{bmatrix} + 0 \times t$

$$f(t, y) = \begin{bmatrix} \sin(t) \cdot y(1) + \cos(t) y(2) + y(1) \cdot y(2) \\ y(1) + y(2) - 1 \end{bmatrix}$$

Vấn đề: Code lại, test ODE solver trong MATLAB: ode45, 23, 23t, 13 ...

Ca 1: 1-40, thi tu 7h20-8h20

Ca 2: 41-81, thi tu 8h40 - 9h40

Chú ý: Trong cơ học thường nảy sinh hệ bậc 2 có dạng (Bài 25/SGT).

$$(1) m \ddot{y} + c \dot{y} + k y = f(t) \quad \text{với } m=3, c=39, k=120$$

$$\text{Đặt ẩn phụ } z = \dot{y} \Rightarrow \dot{z} = \ddot{y}$$

$$\text{Tác (1) } \Leftrightarrow \text{pt } \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -\frac{c}{m} z - \frac{k}{m} y + f(t) \end{bmatrix} =: F(t, Y)$$

$$\dot{Y} = F(t, Y) \quad \text{Đk ban đầu } Y(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} \text{ cho trước.}$$

(Bài 25 \rightarrow 30/SGT trang 289-290).

Giải hạn: 3 câu
 GK $\begin{cases} 1) \text{ Định hàm liên phân (sử dụng sẵn Matlab built-in functions)} \\ 2) \text{ Vẽ hình} \\ 3) \text{ Giải IVP (ODEs) tuân theo các p² trên, bài toán cứng, dùng ODEs solver} \end{cases}$
 Giải hệ bậc 2 dạng (1)