ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Khoa Toán - Cơ - Tin học

TIỂU LUẬN SEMINAR 1

Sinh viên thực hiện:	**Hoàng Nhật Tuấn**
Lớp:	**K63 TN Toán**
Môn học:	**Seminar 1**
Giáo viên hướng dẫn:	**TS Hà Phi**

Bài tập cuối kì

Câu 4:

Lời giải a):

i) Trong trường hợp K là số thực, điều kiện cần và đủ để 2 bất đẳng thức trong đề bài thỏa mãn là $K \leq 0$. Thật vậy: Nếu $K \leq 0$ thì hiển nhiên 2 bất đẳng thức trong đề bài là đúng. Giả sử $K > 0$, ta có:

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{(2m)!}(t\sqrt{K})^{2m} = \cos(t\sqrt{K})$$

Mà tồn tại $t \geq 0$ để $\cos(t\sqrt{K}) < 0$ nên bất đẳng thức thứ nhất không đúng.

ii) K là ma trận đối xứng $n \times n$ nên n giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ của K đều thực và tồn tại ma trận trực giao S $n \times n$ sao cho

$$S^T K S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

Khi đó

$$K^m = (SDS^T)^m = SD^m S^T = S \begin{bmatrix} \lambda_1^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n^m \end{bmatrix} S^T$$

Gọi $A(t)$ và $B(t)$ lần lượt là các biểu thức bên vế trái của 2 bất đẳng thức trong đề bài. Ta có:

$$A(t) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!} S \begin{bmatrix} \lambda_1^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n^m \end{bmatrix} S^T$$
$$= S \begin{bmatrix} \cos(t\sqrt{\lambda_1}) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \cos(t\sqrt{\lambda_n}) \end{bmatrix} S^T$$

$$B(t) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^m t^{2m+1} = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!} S \begin{bmatrix} \lambda_1^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n^m \end{bmatrix} S^T$$
$$= S \begin{bmatrix} \sin(t\sqrt{\lambda_1})/\sqrt{\lambda_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \sin(t\sqrt{\lambda_n})/\sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} S^T$$

Ta quy ước nếu $\lambda_i = 0$ thì $\sin(t\sqrt{\lambda_i})/\sqrt{\lambda_i} = 0$.

Nếu $\lambda_i < 0$ thì với $\forall t > 0$ ta luôn có:

$$\cos(t\sqrt{\lambda_i}) = \frac{1}{2}(e^{t\sqrt{|\lambda_i|}} + e^{-t\sqrt{|\lambda_i|}}) > 0$$
$$\frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} = \frac{1}{2\sqrt{|\lambda_i|}}(e^{t\sqrt{|\lambda_i|}} - e^{-t\sqrt{|\lambda_i|}}) > 0$$

Nếu $\lambda_i \geq 0$ thì luôn tồn tại $t > 0$ sao cho $\dfrac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \leq 0$.

Vì vậy, $A(t), B(t)$ nửa xác định dương với $\forall t > 0$ khi và chỉ khi λ_i là số ≤ 0 với $\forall i$ hay $-K$ là ma trận nửa xác định dương.

b) Ta đặt $z = (x_1 ... x_n \dot{x_1} ... \dot{x_n})^T$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,2n} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,p}$$

Khi đó hệ ban đầu chuyển thành hệ bậc nhất

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t), \forall t \geq 0$$

Từ đây ta sử dụng bài 1 để chứng minh.

Câu 5: Tìm điều kiện cần và đủ cho các ma trận M, D, K, B sao cho hệ bậc hai

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t), \forall t \geq 0 \tag{5}$$

trong đó $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ là khả nghịch,

a) là $C-$ điều khiển được.

b) là C_2- điều khiển được.

c) là $C-$ quan sát được.

d) Thiết lập và chứng minh tính đối ngẫu của $C-$ quan sát được và C_2- điều khiển được cho hệ (5) và hệ đối ngẫu

$$M^T\ddot{x}(t) + D^T\dot{x}(t) + K^Tx(t) = C^Tu(t), \forall t \geq 0 \tag{6}$$

Lời giải:

a) Ta chuyển hệ bậc 2 về thành hệ bậc 1 bằng cách đặt $z = (x_1 ... x_n \dot{x_1} ... \dot{x_n})^T$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,2n} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,p}$$

Hệ (5) trở thành:

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t), \forall t \geq 0 \tag{7}$$

Xét hệ (7), ta có:

$$z(t_1) = e^{\tilde{A}t_1}z(0) + \int_0^{t_1} e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}u(\tau)d\tau$$

Ta lấy $X(t)$ là ma trận $n \times 2n$ tạo bởi n hàng đầu của $e^{\tilde{A}t}$, khi đó:

$$x(t_1) = X(t_1)z(0) + \int_0^{t_1} X(t_1-\tau)\tilde{B}u(\tau)d\tau$$

Ta chứng minh điều kiện cần và đủ để hệ ban đầu là $C-$ điều khiển được là ma trận

$$W(t) = \int_0^{t} X(\tau)\tilde{B}\tilde{B}^T X(\tau)^T d\tau$$

khả nghịch với $\forall t > 0$.

Nếu ma trận này khả nghịch với $\forall t > 0$, ta xét đầu vào

$$u(t) = -\tilde{B}^T X(t_1-t)^T W^{-1}(t_1)[X(t_1)z_0 - x_1]$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= X(t_1)z_0 - \left(\int_0^{t_1} X(t_1-\tau)\tilde{B}\tilde{B}^T X(t_1-\tau)^T d\tau\right) W^{-1}(t_1)[X(t_1)z_0 - x_1] \\ &= X(t_1)z_0 - W(t_1)W^{-1}(t_1)[X(t_1)z_0 - x_1] = x_1 \end{aligned}$$

nên hệ ban đầu là $C-$ điều khiển được.

Nếu hệ ban đầu là $C-$ điều khiển được, ta thấy $W(t)$ là ma trận nửa xác định dương với $\forall t > 0$. Giả sử tồn tại $t_1 > 0$ sao cho ma trận $W(t_1)$ không xác định dương, suy ra tồn tại vecto $v \neq 0$ thỏa mãn $v^T W(t_1)v = 0$, điều này tương đương với $\int_0^{t_1} \left\|\tilde{B}^T X(\tau)^T v\right\|^2 = 0$ nên $\tilde{B}^T X(\tau)^T v = 0, \forall 0 \le \tau \le t_1$.

Vì hệ là $C-$ điều khiển được nên tồn tại đầu vào biến $z_0 = Y(-t_1)v$ với $Y(t)$ là ma trận $2n \times n$ tạo bởi n cột đầu của $e^{\tilde{A}t}$ thành $x(t_1) = 0$, khi đó

$$0 = v + \int_0^{t_1} X(t_1-\tau)\tilde{B}u(\tau)d\tau$$

Do đó:

$$0 = v^T v + \int_0^{t_1} v^T X(t_1-\tau)\tilde{B}u(\tau)d\tau = \|v\|^2$$

Điều mâu thuẫn này dẫn đến $W(t)$ là ma trận xác định dương với $\forall t > 0$, do đó $W(t)$ khả nghịch với $\forall t > 0$. Ta thu được điều kiện cần và đủ để hệ là $C-$ điều khiển được.

b) Với cách đặt như câu a), hệ ban đầu là C_2- điều khiển được lúc này sẽ tương đương với hệ (7) điều khiển được hay cặp ma trận $(\tilde{A}, \tilde{B})$ điều khiển được, do đó một điều kiện cần và đủ để hệ ban đầu là C_2- điều khiển được là ma trận $2n \times 2n$

$$W_c(t) = \int_0^{t} e^{\tilde{A}\tau}\tilde{B}\tilde{B}^T e^{\tilde{A}^T\tau} d\tau$$

khả nghịch với $\forall t > 0$.

c) Ta chuyển hệ bậc 2 về thành hệ bậc 1 bằng cách đặt $z, \tilde{A}, \tilde{B}$ như trên và đặt $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q,2n}$.

Khi đó, hệ ban đầu sẽ trở thành:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}z(t) \end{cases} \quad \forall t \geq 0. \tag{8}$$

Hệ ban đầu là $C-$ quan sát được lúc này sẽ tương đương với hệ (8) quan sát được hay cặp ma trận $(\tilde{A}, \tilde{C})$ là quan sát được, do đó một điều kiện cần và đủ để hệ ban đầu là $C-$ quan sát được là ma trận $2n \times 2n$

$$W_o(t) = \int_0^t e^{\tilde{A}^T\tau}\tilde{C}^T\tilde{C}e^{\tilde{A}\tau}d\tau$$

khả nghịch với $\forall t > 0$.

d) Ta thiết lập bài toán như sau: Xét hệ điều khiển n chiều với p đầu vào và q đầu ra:

$$\begin{cases} M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t) \\ y(t) = CM^{-1}x(t) \end{cases} \quad \forall t \geq 0. \tag{9}$$

Hệ này là $C-$ quan sát được khi và chỉ khi hệ đối ngẫu (6) là C_2- điều khiển được.

Đặt:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -(M^T)^{-1}K^T & -(M^T)^{-1}D^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,2n} \qquad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ (M^T)^{-1}C^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,p}$$

Theo b), hệ đối ngẫu (6) là C_2- điều khiển được khi và chỉ khi cặp ma trận $(\bar{A}, \bar{B})$ là điều khiển được.

Theo định lý về tính đối ngẫu, cặp ma trận $(\bar{A}, \bar{B})$ là điều khiển được khi và chỉ khi cặp ma trận $(\bar{A}^T, \bar{B}^T)$ là quan sát được, tức là cặp ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & -KM^{-1} \\ Id & -DM^{-1} \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} 0 & CM^{-1} \end{pmatrix}$$

là quan sát được.

Theo c), hệ (9) là $C-$ quan sát được khi và chỉ khi cặp ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} CM^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

là quan sát được.