

- Câu 1** a) Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm  $e^{-x} - x = 0$ ?  
b) Chứng minh hàm số  $g(x) = e^{-x}$  là 1 tự ánh trên đoạn  $[0.1, 1]$ .  
c) Phép lặp đơn  $x_{n+1} = e^{-x_n}$  có hội tụ với giá trị  $x_0$  phù hợp hay không?  
d) Câu hỏi tương tự với phép lặp  $x_{n+1} = 1 + \arctan(x_n)$ .

**Câu 2** Chứng minh rằng với các hằng số  $c, d$  thỏa mãn  $|d| < 1$ , phương trình  $x = c + d \cos(x)$  có nghiệm duy nhất. Kiểm tra tính hội tụ của phép lặp  $x_{n+1} = c + d \cos(x_n)$  và hãy đưa ra đánh giá cho tốc độ hội tụ.

**Câu 3** Các phép lặp sau có hội tụ đến  $x^*$  hay không? Nếu hội tụ, hãy xác định tốc độ hội tụ, cho  $x_0$  đủ gần  $x^*$ .

a)  $x_{n+1} = \frac{15x_n^2 - 24x_n + 13}{4x_n}, x^* = 1,$

b)  $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n^3}, x^* = \sqrt{2}.$

Tìm số bước lặp cần thiết để nhận được xấp xỉ với sai số tuyệt đối không quá  $1e - 6$ , với  $x_0 = x^* + 0.1$ .

**Câu 4** Giả sử bài toán tìm nghiệm  $f(x) = 0$  có nghiệm  $x^*$  thỏa mãn  $f'(x^*) \neq 0$ . Ta có thể chuyển nó về bài toán tìm điểm bất động  $x$  của hàm số  $g(x) = x + cf(x)$  với hằng số  $c$ . Phải chọn  $c$  thế nào để đảm bảo sự hội tụ nhanh của phép lặp đơn  $x_{n+1} = g(x_n)$ , giả sử rằng  $x_0$  đủ gần  $x^*$ ? Kiểm nghiệm kết quả tìm được cho bài toán  $x^3 - 5 = 0$ .

**Câu 5** Phép lặp đơn  $x_{n+1} = 2 - (1 + c)x_n + cx_n^3$  sẽ hội tụ đến  $x^* = 1$  với một số giá trị của  $c$ , giả sử  $x_0$  đủ gần  $x^*$ .

a) Tìm tất cả mọi  $c$  để phép lặp đơn này hội tụ. Tìm mọi  $c$  để phép lặp đơn này hội tụ bậc hai.

b) Với một  $c$  như vậy, hãy tính số bước lặp cần thiết để đạt được 10 chữ số chắc, cho điều kiện ban đầu  $x_0 = x^* + 0.1$ .

**Câu 6** Phương trình  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  có nghiệm duy nhất trong đoạn  $[1, 2]$ . Có rất nhiều các khác nhau để chuyển về bài toán tìm điểm bất động. Hãy xét sự hội tụ của các phép lặp đơn sau, với điều kiện đầu  $x_0 = 1.5$ . Tìm bậc hội tụ của các phương pháp đó (nếu có) và tính sai số với  $n = 1, \dots, 10$ , từ đó so sánh với phương pháp phân đôi.

a)  $x = g_1(x) = x + x^3 + 4x^2 - 10$       b)  $x = g_2(x) = \sqrt{10/x - 4x}$

c)  $x = g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$       d)  $x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x + 4}}$

e)  $x = g_3(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

**Câu 7** Cho tham số thực  $a > 0$ . Tìm bậc hội tụ của phương pháp lặp sau  $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$  trong trường hợp nó hội tụ đến điểm bất động  $x^* = \sqrt{a}$ .

**Câu 8** Cho các phương trình sau

a)  $3(2x - 1) = \cos(x)$

b)  $x^4 - 2x - 3 = 0$

Hãy xây dựng cho mỗi phương trình một phương pháp lặp đơn hội tụ, biết rằng phương trình a) (t.ú. b)) có nghiệm duy nhất trong  $(0, 1)$  (t.ú.  $(0, 2)$ ). Viết các công thức đánh giá sai số tiên nghiệm, hậu nghiệm sao cho sai số nhỏ hơn  $1e - 6$ .

—————Hết—————