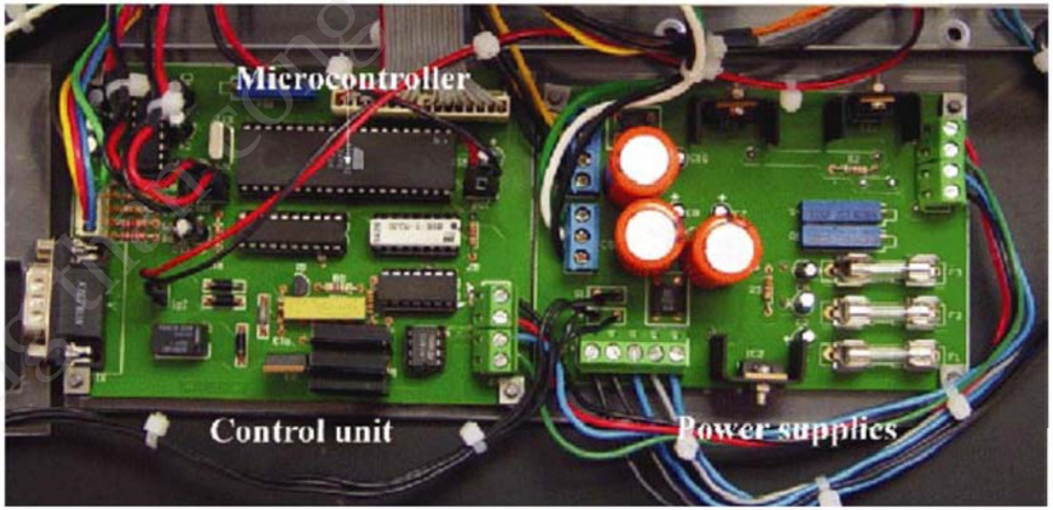
Lý thuyết Điều khiển tự động 1

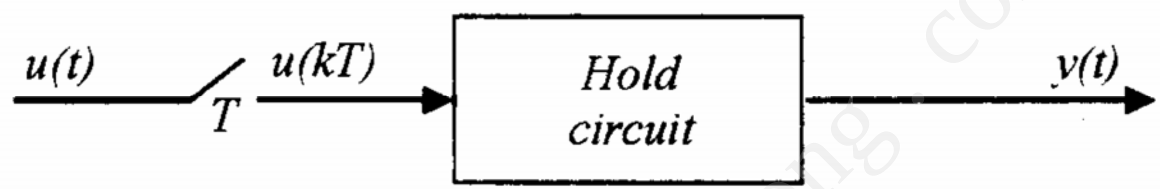
Chuyển từ mô hình liên tục sang mô hình rời rạc



ThS. Đỗ Tú Anh
Bộ môn Điều khiển tự động
Khoa Điện, Trường ĐHBK HN

Khâu giữ mẫu

Sơ đồ khâu giữ mẫu



$$y(t) = u(kT), \quad \text{với} \quad kT \leq t < (k+1)T$$

Hàm truyền đạt

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

Chuyển từ G(s) sang G(z)

Phương pháp sai phân lùi

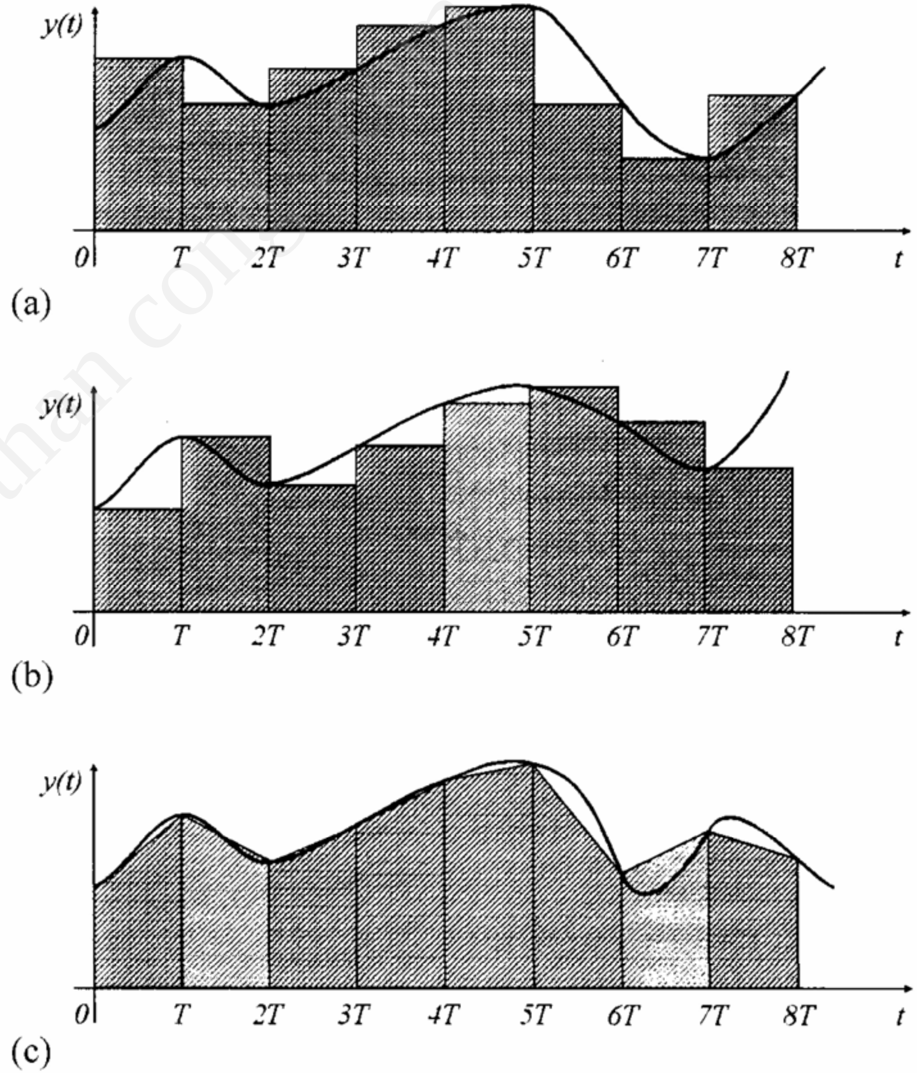
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Phương pháp sai phân tiến

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}$$

Phương pháp Tustin

$$s = \frac{2}{T}\left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right]$$



Chuyển từ G(s) sang G(z) (tiếp)

Phương pháp sử dụng đáp ứng xung

$G(z) = Z[g(kT)],$ trong đó $g(kT) = [L^{-1}G(s)]_{t=kT}$

Phương pháp sử dụng đáp ứng bước nhảy

$$Z^{-1}\left[G(z)\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \left[L^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right]\right]_{t=kT}$$

$$G(z) = \left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right]$$

Chuyển từ G(s) sang G(z) (tiếp)

Ví dụ

Cho $H(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s+2)}$

Tìm *H(z)* theo phương pháp sử dụng đáp ứng bước nhảy

Ta có

$$H(z) = Z\left[\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right]H(s)\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{H(s)}{s}\right]$$

Do

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

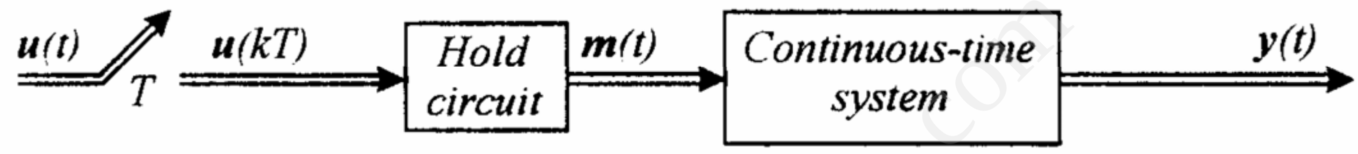
Và tra bảng biến đổi Z, ta được

$$Z\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{1-e^{-T}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}$$

Vậy

$$H(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{H(s)}{s}\right] = (1-z^{-1})\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{1-e^{-T}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}\right]$$

Chuyển từ MHTT vi phân sang MHTT sai phân



Xét hệ thống liên tục được mô tả bởi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{m}(t) \qquad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{m}(t) \qquad (2)$$

Xét vector **m***(t)* không đổi từng đoạn, tức là

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{u}(kT), \quad \text{với} \quad kT \le t < (k+1)T \qquad (3)$$

Giải (1) để tìm **x***(t)*, ta được

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\xi)}\mathbf{G}\mathbf{m}(\xi)d\xi$$

Từ (3) suy ra $\mathbf{m}(0) = \mathbf{u}(0)$ với $0 \le t < T$ Do đó

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\xi)}\mathbf{G}\mathbf{u}(0)d\xi, \qquad 0 \le t < T \qquad (4)$$

Chuyển từ MHTT vi phân sang MHTT sai phân (tiếp)

Vector trạng thái **x**(*t*), với $t = T$ sẽ là

$$\mathbf{x}(T) = \mathrm{e}^{\mathbf{F}T}\mathbf{x}(0) + \int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{F}(T-\xi)}\mathbf{G}\mathbf{u}(0)\mathrm{d}\xi$$

Định nghĩa

$$\mathbf{A}(T) = \mathrm{e}^{\mathbf{F}T}$$

$$\mathbf{B}(T) = \int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{F}(T-\xi)}\mathbf{G}\mathrm{d}\xi = \int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{F}\lambda}\mathbf{G}\mathrm{d}\lambda, \qquad \lambda = T - \xi$$

Thì (4), với $t = T$ được viết lại là

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{A}(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}(T)\mathbf{u}(0)$$

Tương tự với $T \le t < 2T, 2T \le t < 3T$ .., ta đi đến công thức tổng quát

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}(T)\mathbf{u}(kT)$$

Và (2) có thể được viết là

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT)$$

Chuyển từ MHTT vi phân sang MHTT sai phân (tiếp)

Chú ý

- Nếu gọi hàm truyền đạt của hệ liên tục (1)-(2) là

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{D}$$

và hàm truyền đạt của hệ rời rạc tương ứng là

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}(T)]^{-1}\mathbf{B}(T) + \mathbf{D}.$$

ta có

$$G(z) = Z\left[G_{ZOH}(s)G(s)\right] = Z\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right]$$

- Các ma trận **A**(*T*) và **B**(*T*) có thể được xác định như sau

$$\mathbf{A}(T) = \mathrm{e}^{\mathbf{F}t}\Big|_{t=T} = [L^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{F}]^{-1}]_{t=T}$$

$$\mathbf{B}(T) = \int_0^T [L^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{F}]^{-1}]_{t=\lambda}\mathbf{G}\mathrm{d}\lambda = \int_0^T \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{G}\mathrm{d}\lambda$$

Chuyển từ MHTT vi phân sang MHTT sai phân (tiếp)

Ví dụ

Xét hệ

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}m(t)$$
$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t)$$

trong đó

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm mô hình trạng thái cho hệ rời rạc tương ứng, tức là hãy xác định **A***(T)* và **b***(T)*

Chuyển từ MHTT vi phân sang MHTT sai phân (tiếp)

Ta có

$$s\mathbf{I}-\mathbf{F}=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}, \qquad (s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix},$$

$$L^{-1}[s\mathbf{I}-\mathbf{F}]^{-1}=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-t} & 1 \end{bmatrix}$$

Do đó

$$\mathbf{A}(T)=[L^{-1}[s\mathbf{I}-\mathbf{F}]^{-1}]_{t=T}=e^{\mathbf{F}T}=\begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1-e^{-T} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}(T)=\int_0^T e^{\mathbf{F}\lambda}\mathbf{g}\,d\lambda=\int_0^T\begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}d\lambda=\int_0^T\begin{bmatrix} 2e^{-\lambda} \\ 3-2e^{-\lambda} \end{bmatrix}d\lambda$$

$$=\begin{bmatrix} 2(1-e^{-T}) \\ 3T-2(1-e^{-T}) \end{bmatrix}$$

Phụ lục

Các cặp biến đổi Z

$f(kT)$	$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$
$\delta(kT-aT)$	e^{-aTs}	z^{-a}
$\delta(kT)$	1	1 or z^{-0}
$\beta(kT-aT)$	$\frac{e^{-aTs}}{s}$	$\frac{z^{-a+1}}{z-1}$
$\beta(kT)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$kT-aT$	$\frac{e^{-aTs}}{s^2}$	$\frac{Tz^{-a+1}}{(z-1)^2}$
kT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$

Phụ lục

Các cặp biến đổi Z (tiếp)

e^{-akT}	$\dfrac{1}{s+a}$	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
kTe^{-akT}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	$\dfrac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$1-e^{-akT}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$kT-\dfrac{1-e^{-akT}}{a}$	$\dfrac{1}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{T}{(z-1)^2}-\dfrac{1-e^{-aT}}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin\omega_0 kT$	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\dfrac{z\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$
$\cos\omega_0 kT$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_0 T)}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$
$e^{-akT}\sin\omega_0 kT$	$\dfrac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin\omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$
$e^{-akT}\cos\omega_0 kT$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$