Lecture 3: Exercise

Friday, March 18, 2022 9:10 AM

Câu 2:

Hệ nối tiếp: $(1)\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}$

$u_2 = y_1 \Rightarrow (2)\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y_1 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 y_1 \end{cases}$

Hệ tổng $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = y_2$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_2 = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} x + D_2 D_1 u_1 \end{cases}$$

Giả thiết: Các hệ (1), (2) & hệ tổng ta đk đc.

P/chứng, g/s hệ tổng có vector riêng trái $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$ t/mãn $w^H B = 0$.

$$[\lambda I - A, \ B] = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda I - A_1 & 0 & B_1 \\ -B_2 C_1 & \lambda I - A_2 & B_2 D_1 \end{array}\right]$$

Nếu $w^H [\lambda I - A, B] = 0$ với $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1^H & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} \lambda I - A_1 & 0 & B_1 \\ -B_2 C_1 & \lambda I - A_2 & B_2 D_1 \end{array}\right] = 0$$

$$\Rightarrow w_1^H [\lambda I - A_1, B_1] = 0 \Rightarrow (A_1, B_1) \text{ ko đk đc}$$

(mâu thuẫn).

Câu 3 *Cho hệ điều khiển LTI là SISO (single input/single output). Hãy chứng minh công thức hàm truyền sau*

$$G(s) := D + C(sI - A)^{-1}B \ \overset{\text{chứng minh}}{=\!=\!=} \ \frac{\det(sI - A + BC)}{\det(sI - A)} - 1 + D\,. \qquad (6)$$

$G_1(s) = \dfrac{|sI - A + BC|}{|sI - A|} - 1 + D$, $\quad sI - A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Ta thấy $sI - A + BC = \left(I_n + B\, C(sI-A)^{-1}\right).(sI - A)$, nên

$|sI - A + BC| = |I_n + BC(sI-A)^{-1}|.|sI - A|$ (4)

$\Rightarrow G_1(s) = |I_n + B.\ \underline{C(sI-A)^{-1}}| - 1 + D$.

Về số chiều $B \in \mathbb{R}^{n,1}$, $C.(sI-A)^{-1} \in \mathbb{R}^{1,n}.\mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{1,n}$.

$G(s) = D + \underline{C(sI-A)^{-1}}.B$. Đặt $C_1 = C.(sI-A)^{-1} \in \mathbb{R}^{1,n}$, ta cần c/m

$G(s) = D + C_1 B \ \boxed{=} \ G_1(s) = D + |I_n + BC_1| - 1$

$$G(s) = D + C_1 B \;\boxed{=}\; G_1(s) = D + |I_n + BC_1| - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1 B \;\boxed{=}\; -1 + |I_n + BC_1|. \quad \Leftrightarrow \quad C_1 B + 1 \;\boxed{=}\; |I_n + BC_1| \quad (6)$$

$$\updownarrow c_2$$

$$1 + C_1 B$$

Ta c/m (6):

$$\begin{bmatrix} \underset{\text{bổ sung sau}}{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n + BC_1 & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -C_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ -C_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & B \\ 0 & C_1B+1 \end{bmatrix}$$

Ta thấy $\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ C_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ -C_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} I_n + BC_1 & B \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & B \\ 0 & C_1B+1 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \quad |I_n + BC_1| = C_1 B + 1 \Rightarrow (6).$$