CHƯƠNG 3: GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ (ROOT FINDING)

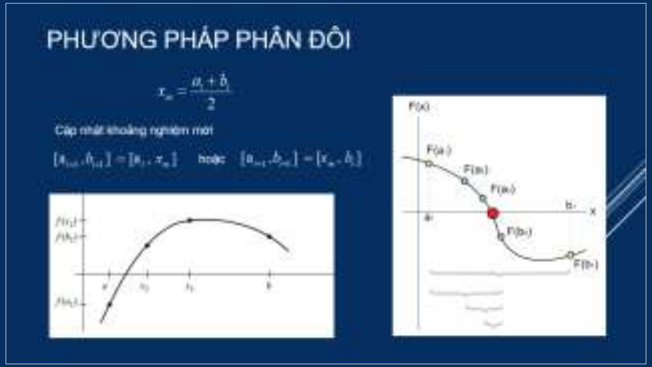
Tài liệu:

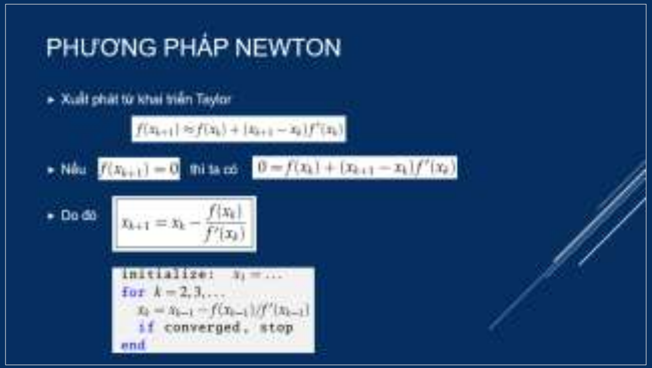
1. Giải Tích Số, Phạm Kỳ Anh
2. Numerical methods in Engineering with Python 3, Kiusalaas
3. Elementary Numerical Analysis, Atkinson and Han

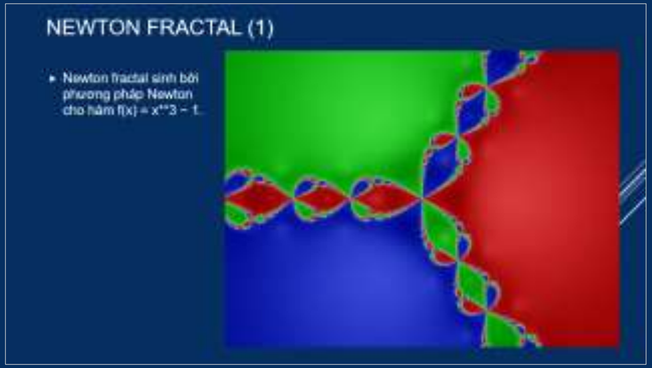
Tác giả: TS. Hà Phi
Khoa Toán – Cơ - Tin học
ĐHKHTN, ĐHQGHN

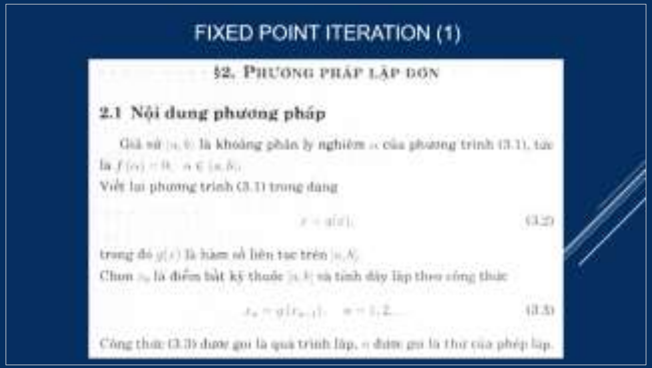

Given a function $f(x)$, find x so that $f(x) = 0$
ĐẶT BÀI TOÁN
Mục tiêu:
Tìm nghiệm của phương trình
So sánh các phương pháp
So sánh tính chất hội tụ của các phương pháp
1 Phương pháp tìm kiếm tăng dần (Incremental search)
2 Phương pháp phân đôi (Bisection)
3 Phương pháp Newton
4 Phương pháp dây cung
5 Phương pháp lặp đơn
6 TH Đặc biệt: Tìm nghiệm đa thức
MỤC TIÊU CHƯƠNG


PHƯƠNG PHÁP TÌM KIẾM TĂNG DẦN
Nghiệm x bị bó lại (bracketed) trong khoảng (a,b) nếu f(a) & f(b) trái dấu.
Chú ý:
Có TH f(a), f(b) trái dấu nhưng không có nghiệm
Có TH nghiệm không bị bó lại.

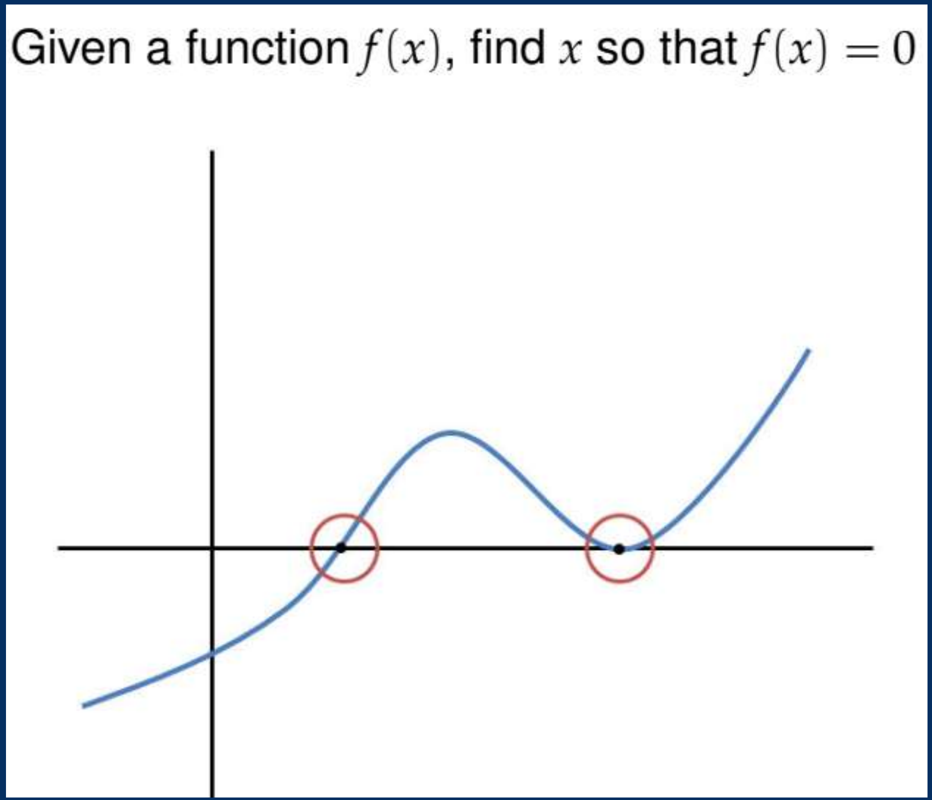

PHƯƠNG PHÁP PHÂN ĐÔI
$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$
Cập nhật khoảng nghiệm mới
$[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, x_n]$ hoặc $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [x_n, b_n]$


PHƯƠNG PHÁP NEWTON
Xuất phát từ khai triển Taylor
$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k)$
Nếu $f(x_{k+1}) = 0$ thì ta có $0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k)$
Do đó $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
initialize: $x_1 = \ldots$
for $k = 2, 3, \ldots$
$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$
if converged, stop
end


NEWTON FRACTAL (1)
Newton fractal sinh bởi phương pháp Newton cho hàm f(x) = x**3 − 1.


FIXED POINT ITERATION (1)
§2. Phương pháp lặp đơn
2.1 Nội dung phương pháp


5.1 Miền chứa nghiệm của đa thức



ĐẶT BÀI TOÁN

Mục tiêu:
Tìm nghiệm của phương trình
So sánh các phương pháp
So sánh tính chất hội tụ của các phương pháp
1 Phương pháp tìm kiếm tăng dần
(Incremental search)
2 Phương pháp phân đôi (Bisection)
3 Phương pháp Newton
4 Phương pháp dây cung
5 Phương pháp lặp đơn
6 TH Đặc biệt: Tìm nghiệm đa thức

MỤC TIÊU CHƯƠNG

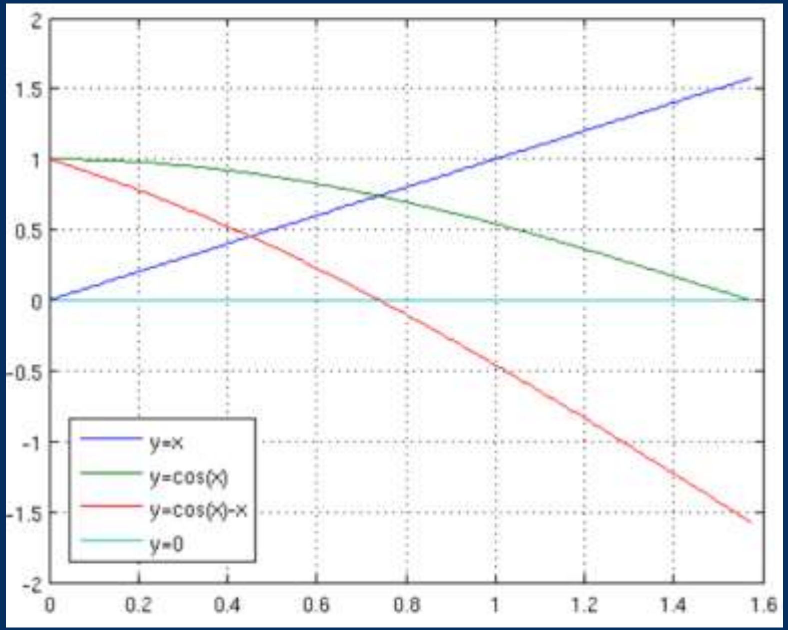
NGHIỆM CỦA PT f(x)=0

- Bất kỳ phương trình nào có dạng g(x) = h(x) đều có thể được viết dưới dạng

$$f(x) = g(x) - h(x) = 0.$$

- Ví dụ: Tìm x để cos(x) = x tức là giải PT

$$f(x) = \cos(x) - x = 0$$



Hàm có phức tạp để đánh giá không?
Nghiệm xấp xỉ cần chính xác đến mức nào?
Phương pháp phải nhanh / mạnh đến mức nào?

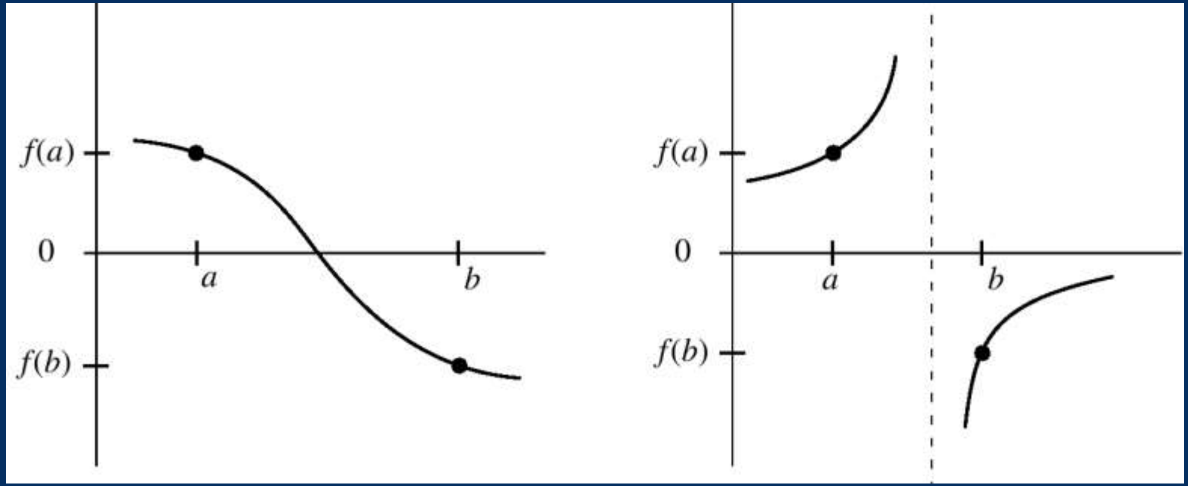
LỰA CHỌN PHƯƠNG PHÁP

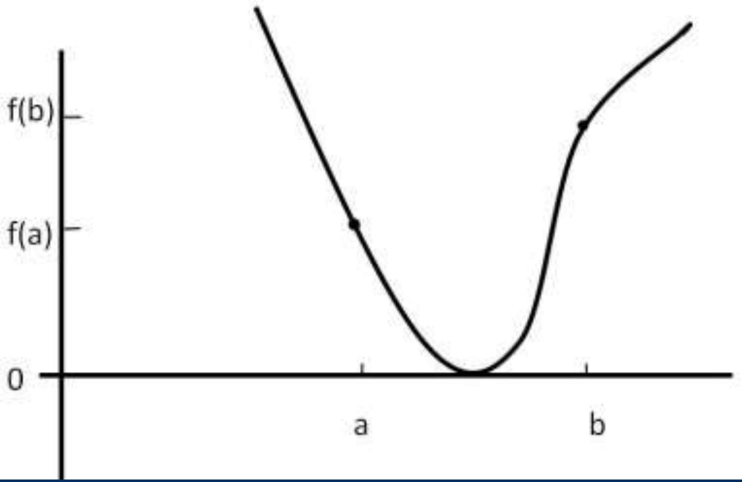
PHƯƠNG PHÁP TÌM KIẾM TĂNG DẦN

Nghiệm x bị bó lại (bracketed) trong khoảng (a,b) nếu f(a) & f(b) trái dấu.

Chú ý:

- Có TH f(a), f(b) trái dấu nhưng không có nghiệm
- Có TH nghiệm không bị bó lại.





THUẬT TOÁN TÌM KIẾM TĂNG DẦN

```
dx = (x_max - x_min)/n
x_left = x_min
i=0

while i < n:
    i = i + 1
    x_right = x_left + dx
    if (f(x) changes sign in [x_left,x_right]):
        save [x_left,x_right]# as an interval with a root
    x_left = x_right
```

$f(a) \times f(b) < 0$

Should we use?

```
fa = myfunc(a);
fb = myfunc(b);

if(fa*fb<0)
  (save)
end
```

!

Nope. Underflow...

sign()

Use Python's sign function

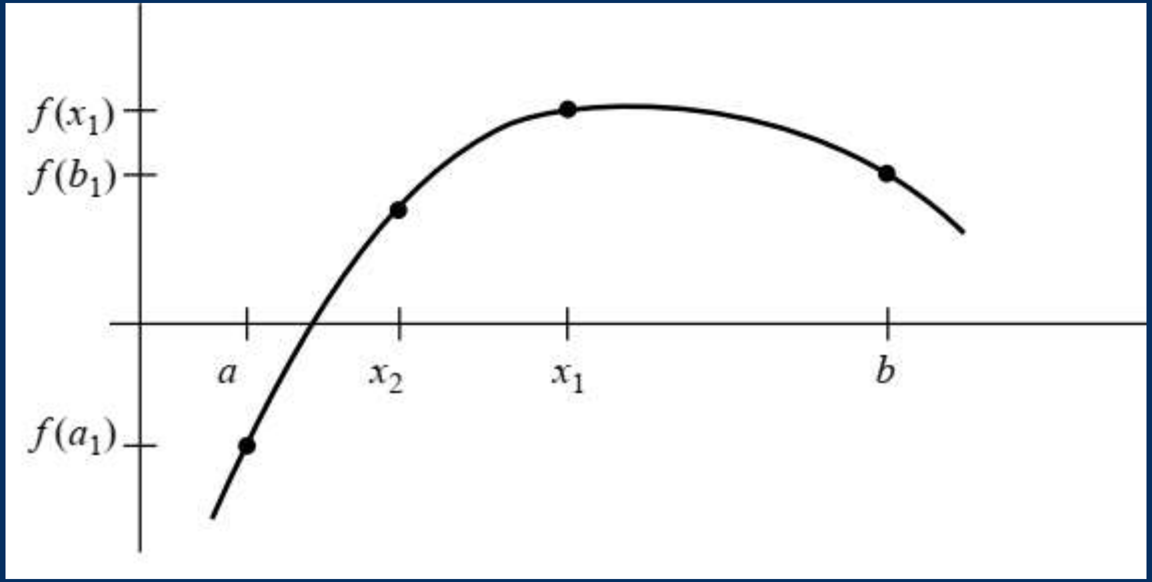
```
import numpy as np
fa = myfunc(a);
fb = myfunc(b);

if np.sign(fa) != np.sign(fb):
  (save)
```

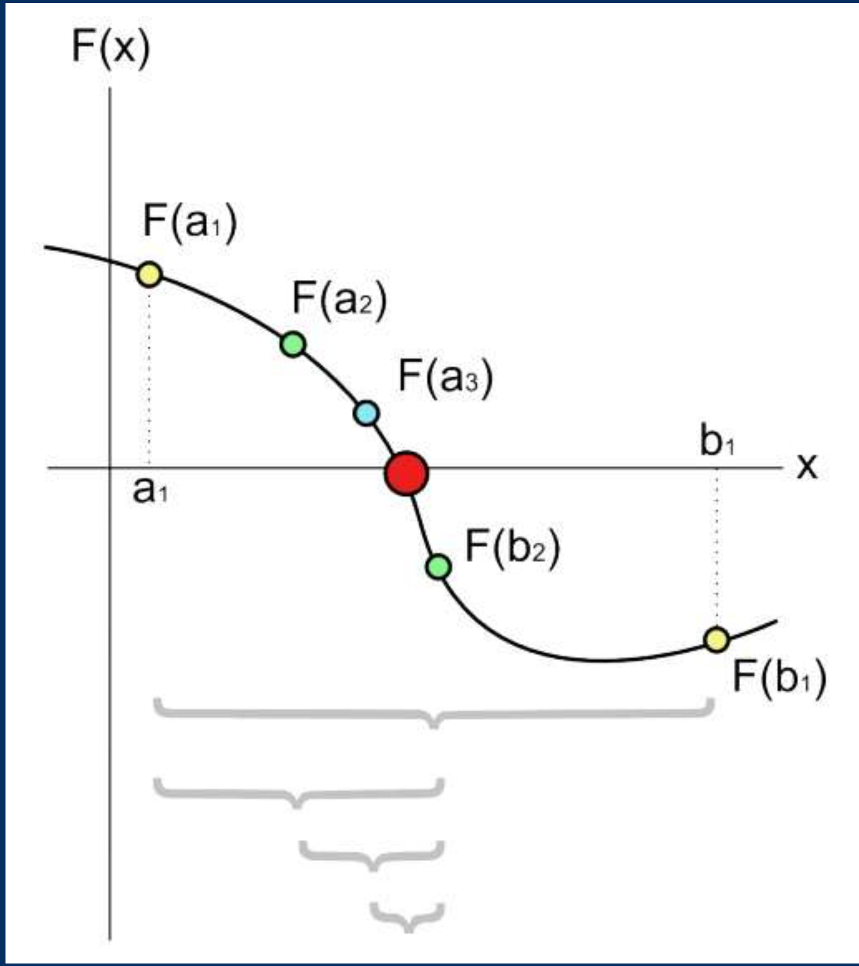
PHƯƠNG PHÁP PHÂN ĐÔI

$$x_m = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Cập nhật khoảng nghiệm mới

$[a_{i+1}, b_{i+1}] = [a_i\,,\, x_m]$ hoặc $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [x_m\,,\, b_i]$





PHƯƠNG PHÁP NEWTON

- Xuất phát từ khai triển Taylor

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k)$$

- Nếu $f(x_{k+1}) = 0$ thì ta có $0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k)$

- Do đó

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

```
initialize:  x_1 = ...
for k = 2, 3, ...
   x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})
   if converged, stop
end
```

- Ví dụ:

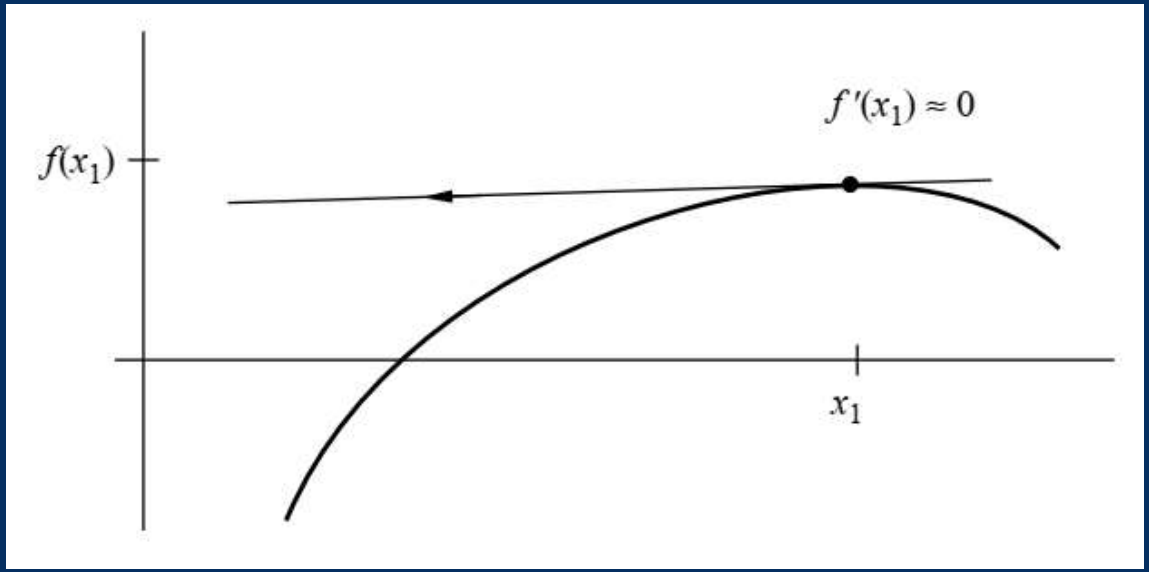
$$x - x^{1/3} - 2 = 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}}$$

- Nhận xét:
  - Phương pháp Newton hội tụ nhanh hơn nhiều so với phương pháp phân đôi
  - Phương pháp Newton yêu cầu cung cấp công thức cho đạo hàm f'(x)
  - Thuật toán đơn giản miễn là có công thức của f(x), f'(x) và điều kiện ban đầu x_0.
  - Nghiệm không bị bó vào khoảng nào như trong phương pháp tìm kiếm tăng dần

KHI NÀO PHƯƠNG PHÁP NEWTON PHÂN KỲ?



$$f'(x_k) \approx 0$$

BẬC HỘI TỤ CỦA PHƯƠNG PHÁP NEWTON

Recall

Convergence of a method is said to be of order r if there is a constant C such that

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C$$

$$\frac{|x_* - x_{k+1}|}{|x_* - x_k|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}\right| \to \frac{1}{2}\left|\frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}\right| \text{ as } x_k \to x_*$$

Như vậy nếu f'(x*) != 0 thì phương pháp Newton sẽ hội tụ bậc 2.

PHƯƠNG PHÁP NEWTON MỞ RỘNG

- Nếu hệ có nghiệm bội, ví dụ f(x) = (x-1)**3

- Modification of Newton's Method for root finding when $\frac{df}{dx}(root) = 0$. Use the formula,

$$x_{n+1} = x_n - m * \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

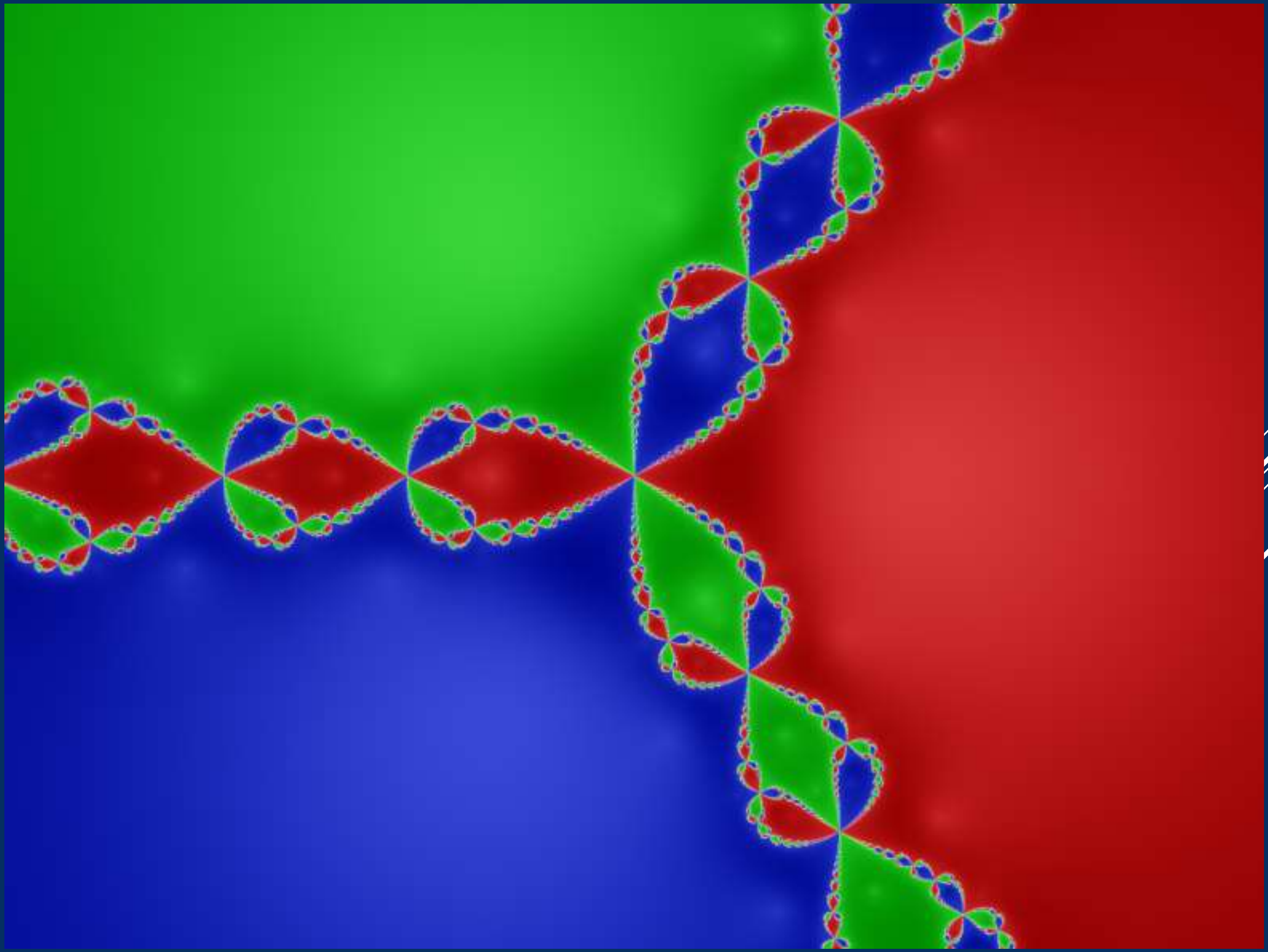
where m is the multiplicity of the root.

- or solve $0 = g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$

Phương pháp Newton mở rộng sẽ chỉ hội tụ bậc 1 mà thôi.

NEWTON FRACTAL (1)

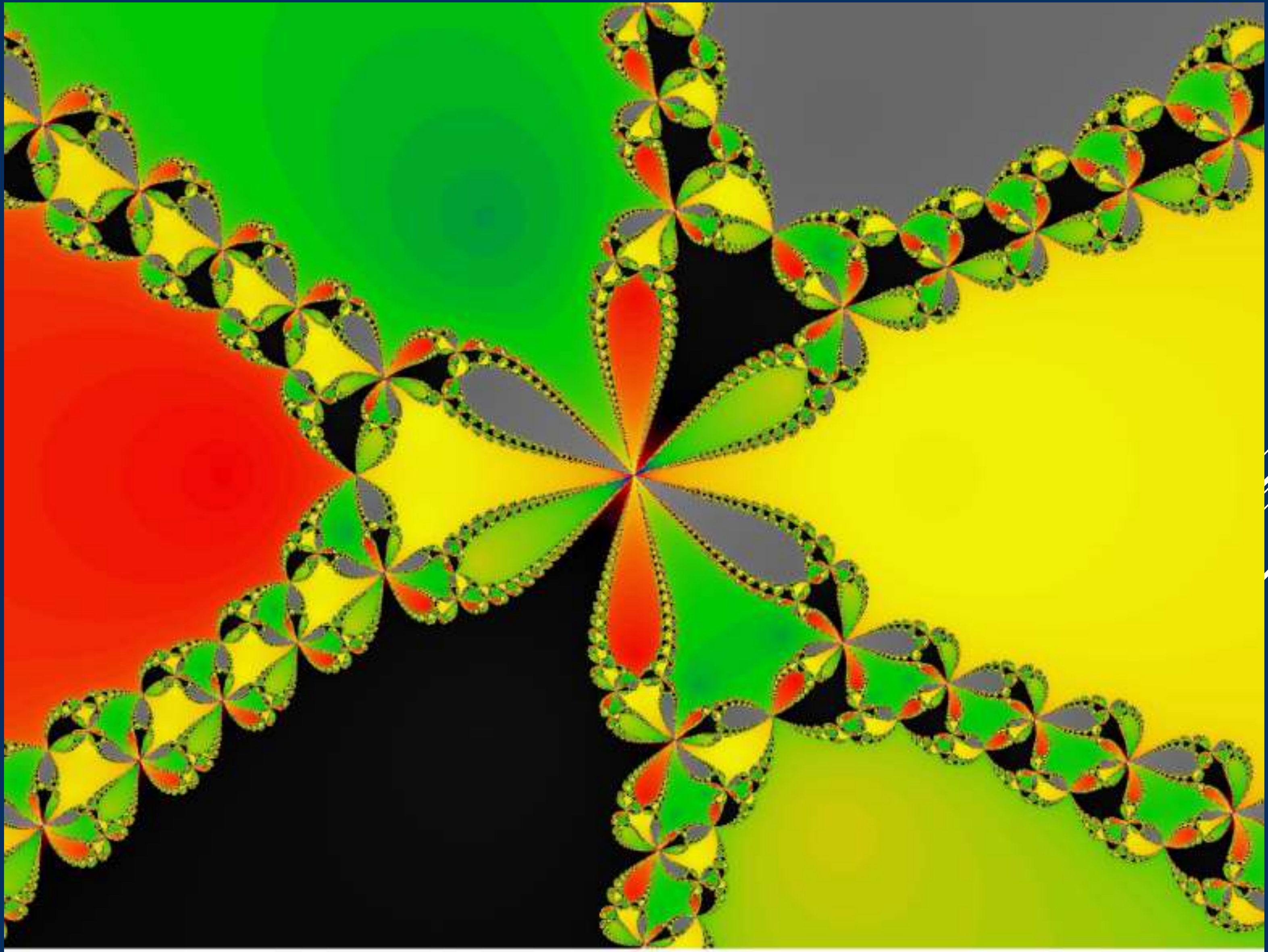
- Newton fractal sinh bởi phương pháp Newton cho hàm f(x) = x**3 − 1.



NEWTON FRACTAL (2)

- Newton fractal sinh bởi phương pháp Newton cho hàm

  $f(x) = x^{**}6 + x^{**}3 - 1.$



Mètode de Newton. Z^6 + Z^3 - 1 = 0   Z = (5 * Z^6 + 2 * Z^3 + 1)/(6*Z^5 + 3*Z^2)

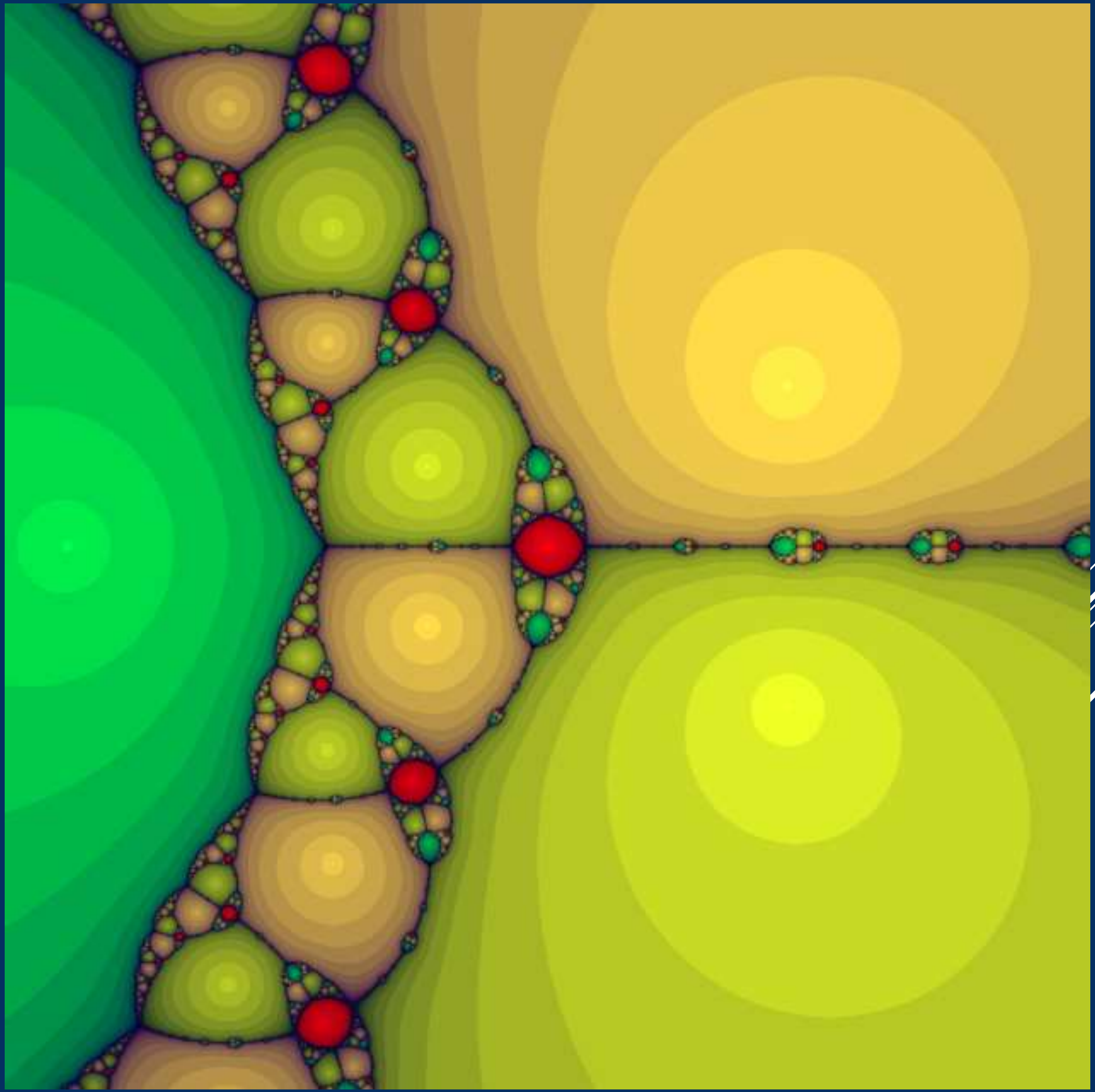
NEWTON FRACTAL (2)

- Newton fractal sinh bởi phương pháp Newton cho hàm

  f(x) = x**3 – 2 * x + 2.

- Các điểm đỏ là các điều kiện ban

  đầu x_0 mà tại đó phương pháp Newton không hội tụ.



FIXED POINT ITERATION (1)

§2. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

2.1 Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (3.1), tức là $f(\alpha) = 0, \quad \alpha \in (a, b)$.

Viết lại phương trình (3.1) trong dạng

$$x = g(x), \tag{3.2}$$

trong đó $g(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b]$.

Chọn x_0 là điểm bất kỳ thuộc $[a, b]$ và tính dãy lặp theo công thức

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Công thức (3.3) được gọi là quá trình lặp, n được gọi là thứ của phép lặp.

FIXED POINT ITERATION (2)

Vấn đề đặt ra là điều kiện nào để quá trình lặp (3.3) hội tụ. Ta công nhận định lý sau (chi tiết có thể xem trong tài liệu tham khảo).

Định lý 3.4. *Giả sử* $g(x)$ *là hàm liên tục và có đạo hàm* $g'(x)$ *liên tục* $\forall x \in [a, b]$. *Giả thiết tồn tại số* $q > 0$ *sao cho*

$$|g'(x)| \leq q < 1 \tag{3.4}$$

và $x_n = g(x_{n-1}) \in [a, b]$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ *với* $x_0 \in [a, b]$ *bất kỳ là xấp xỉ ban đầu. Khi đó, quá trình lặp (3.3) hội tụ.*

Như vậy ở đây có 2 tính chất quan trọng phải kiểm tra (ntn?)
1. Tính chất tự ánh, tức là g đi từ [a,b] vào [a,b]
2. Tính chất co, tức là điều kiện (3.4).

§5. PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC BẬC n

Xét phương trình đa thức bậc n:

$$p(x) = 0. \tag{3.16}$$

trong đó, $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ với $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n}$.

5.1 Miền chứa nghiệm của đa thức

Ta đã biết phương trình đa thức dạng (3.16) có đủ n nghiệm cả thực lẫn phức (đối với nghiệm phức luôn là cặp nghiệm phức liên hợp). Tập hợp các nghiệm đó chỉ có trong miền được cho trong định lý sau:

Định lý 3.7. *Đặt* $A = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\} = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |a_i|$ *thì các nghiệm (thực hoặc phức) của phương trình* (3.16) *thỏa mãn*

$$|x| < 1 + \frac{A}{|a_0|}. \tag{3.17}$$

Nghĩa là các nghiệm của phương trình nằm trọn trong hình tròn tâm $O(0,0)$, *bán kính* $R = 1 + \dfrac{A}{|a_0|}$ *trong mặt phẳng phức.*