

Bài Tập Lý Thuyết Điều Khiển Hệ Thống - No. 3
Controllability of LTI systems

Câu 1. Nhắc lại bài giảng trên lớp.

Định lý đối ngẫu: Hãy chứng minh rằng với hệ LTV là C -ctrlb với mọi $t_1 > t_0$ khi và chỉ khi với mọi nghiệm $z(t)$ của phương trình liên hợp $\dot{z} = -A(t)^T z$ mà thỏa mãn tính chất trực giao $\langle z(t), B(t) \rangle = 0$ với mọi $t \in [t_0, \infty)$ khi và chỉ khi $z \equiv 0$.

Câu 2. Chuyển các hệ điều khiển LTI cấp n sau về hệ điều khiển cấp 1 với biến điều khiển u , biến trạng thái x và xét tính điều khiển được của hệ cấp 1 thu được.

a)

$$x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + \alpha_1\dot{x} + \alpha_0x = u(t) \quad (1)$$

b)

$$x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + \alpha_1\dot{x} + \alpha_0x = u^{(n)} + \beta_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + \beta_1\dot{u} + \beta_0u. \quad (2)$$

Câu 3. Các hệ thống sau có điều khiển được hay không? Vì sao? Tìm hàm truyền của các hệ thống đó.

a) **Dạng chính tắc điều khiển được (controllability canonical form)**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & \dots & -\alpha_r \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (3)$$

$$y = [\beta_1 \quad \dots \quad \beta_r] x + Du, \quad (4)$$

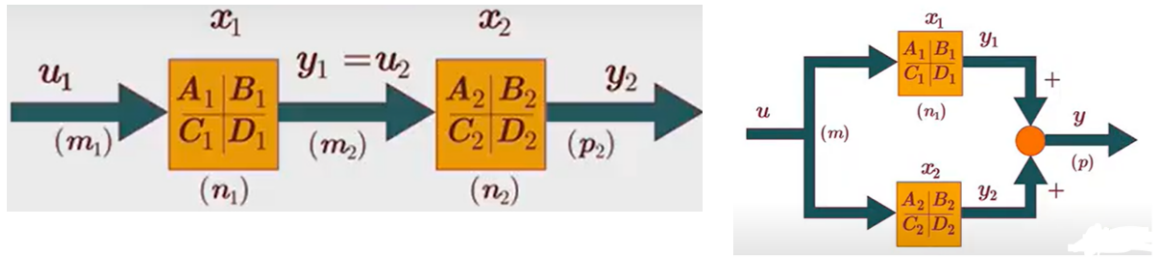
trong đó α_i, β_i, D là các hệ số (thực hoặc phức).

b) **Dạng chính tắc quan sát được (observability canonical form)**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\alpha_{r-1} & & & & 1 \\ -\alpha_r & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{r-1} \\ \beta_r \end{bmatrix} u, \quad (5)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 0] x + Du, \quad (6)$$

trong đó α_i, β_i, D là các hệ số (thực hoặc phức).



Hình 1: Mạch nối tiếp (trái) & Mạch song song (phải)

Câu 4. *Nghiên cứu về tính điều khiển được của 2 hệ thống được mắc nối tiếp/song song với nhau theo các sơ đồ trong Hình 1.*

Giả sử rằng các hệ con đều là điều khiển được.

a) Chứng minh rằng nếu hệ thống tổng là điều khiển được thì nó không thể có vector riêng trái dạng $w = [w_1 \ 0] \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ mà thỏa mãn điều kiện $w^H B = 0$.

b) Chứng minh hệ thống song song sẽ đánh mất tính điều khiển được khi và chỉ khi A_1 và A_2 có giá trị riêng chung λ , và các vector riêng trái w_1, w_2 tương ứng thỏa mãn

$$\begin{aligned} w_1^H B_1 + w_2^H B_2 &= 0, \\ w_1^H A_1 &= \lambda w_1^H, \quad w_2^H A_2 = \lambda w_2^H. \end{aligned}$$

Câu 5. a) Chứng minh rằng đối với hệ LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \forall t \geq t_0 \quad (7)$$

thì tính chất điều khiển được là tức thời (instantaneous), tức là nếu hệ là điều khiển được với $t_1 > t_0$ nào đó thì nó cũng điều khiển được với mọi thời điểm $t_2 > t_0$.

b) Xét hệ thống điều khiển LTI có dạng (7). Trong một số ứng dụng thực tế, ví dụ như các hệ cơ học, nhiều khi người ta không quan tâm đến toàn bộ trạng thái $x(t)$ mà chỉ 1 phần của nó, tức là phần Lx , trong đó L là một ma trận. Khi đó hệ được gọi là điều khiển được 1 phần (**partial controllable**) như trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 1. Hệ LTI được gọi là L -ctrb, trong đó $L \in \mathbb{R}^{\ell, n}$ là một ma trận với cỡ $\ell \times n$ có đủ hạng dòng, nếu như với mọi trạng thái $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tồn tại một hàm đầu vào u và một thời điểm $t_1 > t_0$ sao cho $Lx(t_1; t_0, x_0, u) = Lx_1$.

Hãy xây dựng và chứng minh điều kiện đủ cho tính chất L -điều khiển được thông qua các điều kiện hạng Kalman (phần c), hạng Hautus (phần d) và Gramian điều khiển.