BT thầy Nguyễn Đình Trí

Ghi chú:

Thứ

Ngày / /

Bài 12:

1. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0$

$f(0) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$

Tại $x = 0$ hàm $f(x)$ liên tục và tại $x \neq 0$, $f(x)$ cũng liên tục

$\Rightarrow f(x)$ liên tục tại mọi x

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ A & \text{nếu } x = 2. \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$

Nếu $A = 4$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Nếu $A \neq 4$ thì $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$

3. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục với mọi x.

4. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$

$\Rightarrow f(x)$ liên tục với mọi x.

5. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Theo giả thiết $f(x)$ xác định trong đoạn $[0;2]$ và

$f(x)$ liên tục ở các khoảng $[0,1)$ và $(1,2]$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2-x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2x = 2$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$

Scanned by TapScanner

Thứ

Ngày / /

Ghi chú:

6. $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{, nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 0 & \text{, nếu } x \text{ vô tỉ} \end{cases}$

$f(k) = \sin k\pi = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$: $f(x) \neq 0$. $\forall x \neq k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ngoài ra $f(x) = 0$ khi x vô tỉ, do đó $f(x)$ gián đoạn tại mọi $x \neq k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 13:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{nếu } x < 0 \\ a + x & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (a + x) = a$$

Với $a = 1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Với mọi $x \neq 0$ hàm liên tục.

HONG HA

Ghi chú:

Thứ

Ngày / /

Bài tập bổ sung

1.61: $f(x) = \dfrac{\sin ax - \sin bx}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \dfrac{2\sin\dfrac{x(a-b)}{2} \cdot \cos\dfrac{(a+b)x}{2}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin\dfrac{(a-b).x}{2}}{x} \cdot \cos\dfrac{(a+b).x}{2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \cdot \sin\dfrac{(a-b)x}{2}}{\dfrac{(a-b)}{2}.x} \cdot \left(\dfrac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\dfrac{(a+b)x}{2}$

$= a-b$

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = a-b$.

$\Rightarrow f(0) = a-b$

1.62: $f(x) = \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (ae^{ax} - be^{bx})$

$= a-b$

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = a-b$

Vậy $f(0) = a-b$.

1.63: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2/x}{e^{4/x}+1} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

$t = \dfrac{2}{x}$. $x \to 0$ thì $t \to +\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\sin t}{e^{2t}+1} = \lim\limits_{t\to+\infty} \cos t \cdot \dfrac{1}{2e^{2t}}$

$= 0$

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f x = f(0)$

$\Rightarrow a = 0$

Ghi chú: Thứ Ngày / /

1.64: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{\sin 3x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{\sin 3x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^{x}}{3\cos 3x} = \dfrac{2}{3}$ đạo hàm ra sai bét

(Quy tắc L'Hopital)

Để hàm số liên tục tại $x = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow a = \dfrac{2}{3}$.

1.65: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}}$

$x \to 2$ thì $e^{\frac{1}{x-2}} \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}} = 0$

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$\Rightarrow a = 0$

1.78: $f(x) = \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} \cdot x \cdot (e^{\frac{1}{x}} + 1)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x \cdot (e^{\frac{1}{x}} + 1)}$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x \cdot (e^{\frac{1}{x}} + 1)} = -\infty$

$\Rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn loại 2.

Scanned by TapScanner

Ghi chú: Thứ Ngày / /

1.79: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-1}}} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-1}}}$

$x \to 1 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} \to 2^{+\infty}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-1}}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(0) = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = 1$

1.80

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(x)$ lhục tại $x = 0$

1.81: $f(x) = \begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\dfrac{1}{x} = 0 = f(0) = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$

1.82: $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{nếu } |x| \leq 1 \\ |x-1| & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}$ $\quad -1 \leq x \leq 1 \quad \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right.$

Với $x \neq \pm 1$ thì $f(x)$ liên tục

* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \cos\dfrac{\pi}{2}.x = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

$f(1) = 0$. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0$

* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$ $\Rightarrow$ Hàm liên tục tại $x = 1$

$\Rightarrow$ Hàm gián đoạn tại $x = -1$.

HONG HA

Scanned by TapScanner

Thứ

Ngày / /

Ghi chú:

1.83: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & khi\ x \neq 0 \\ a & khi\ x = 0 \end{cases}$

Đặt $t = \frac{1}{x^2}$. $x \to 0$ thì $t \to +\infty$

$\lim_{t \to +\infty} t \cdot e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} \overset{L'H}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\boxed{t \cdot} e^t} = 0$

thừa

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Với $a \neq 0$ (thì $\lim f(x) \neq f(0)$) thì hàm $f(x)$ gián đoạn $x \to 0$.

*) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

~~Đặt $t = \frac{1}{x^2}$~~. có: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn loại I.

1.84: * $f(x) = \begin{cases} x \ln x^2 & khi\ x \neq 0 \\ a & khi\ x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} x \ln x^2 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -2x = 0$

(L'Hopital) dạng VC/VC

~~$\lim_{x \to 0^+}$~~ Với $a \neq 0$ thì hàm số giái đoại tại $x = 0$

⊛ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

~~$x = 0$ là điểm giái đoại loại 1.~~

Hàm số liên tục khi và chỉ khi a = 0

Scanned by TapScanner

Thứ

Ngày / /

Ghi chú:

1.85: $y = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{x(x+1)}}{\dfrac{1}{x(x-1)}} = \dfrac{x-1}{x+1}$

Đk: $x \neq -1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} y = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -1^-} y = -\infty$

$\Rightarrow x = -1$ là điểm gián đoạn loại 2.

1.86: $y = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$

Đk: $x \neq 0$, $x \neq 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} y = 1 = \lim\limits_{x \to 0^-} y$

$\to x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1

$\lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1^+}{1-1^+}}} = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1^-}{1-1^-}}} = 0$

$\Rightarrow x = 1$ là điểm gián đoạn loại 1.

Các em chia TH

Giống hệt như bài 1.63 hay 1.65. Đó là nếu x -> 1- thì x/(1-x) -> +VC do đó lim y = 1/e^(+VC) = 0.

nếu x-> 1+ thì x/(1-x) -> -VC do đó lim y = 1/(1-0) = 1.

Do đó x = 1 là điểm gián đoạn loại 1 và là điểm nhảy.

Scanned by TapScanner