

Kiểm tra giữa kỳ - ĐỀ 1 - 4 bài - Thời gian 90 phút
Được sử dụng Laptop (chế độ máy bay) trong 40 phút cuối
Không được phép sử dụng tài liệu/dụng cụ hỗ trợ nào khác ngoài Laptop

Câu 1 (2 điểm)

Cho hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ với các ma trận hệ số là

$$A = \text{np.array}([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]]); \quad b = \text{np.array}([18, 2, 85])$$

- a) Hãy kiểm tra xem hệ trên có điều kiện tốt hay xấu theo chuẩn $\| \cdot \|_1$.
b) Giải hệ trên bằng phương pháp PLU (phải viết rõ từng bước).

Câu 2 (2 điểm) (Lập trình)

Sử dụng các hàm built-in trong Python nếu muốn, hãy giải hệ trong bài tập 1 bằng cả 5 phương pháp, ghi đáp số ra 1 bảng dạng sau. Nếu phương pháp nào không sử dụng được thì cần giải thích tại sao.

Tên phương pháp	PLU	Cholesky	QR	SVD	numpy.linalg.solve
Nghiệm giải số					
Sai số tuyệt đối (so với la.solve)					

Câu 3 (4 điểm)

Cường độ bức xạ γ của một chất phóng xạ được đo cứ 6 tháng một lần. Kết quả là

t (năm thứ)	0	0.5	1	1.5
γ	1.000	0.994	0.990	0.985

- a) Giả sử rằng độ phóng xạ là một hàm đa thức. Hãy sử dụng công thức nội suy Lagrange để dự đoán giá trị của độ phóng xạ tại thời điểm tháng 3 năm thứ hai. **Chú ý: không cần phải rút gọn công thức.**
b) Cũng giả sử như trong câu a), hãy đi tìm công thức đa thức nội suy Newton sử dụng bảng tỷ sai phân, và dự đoán giá trị của độ phóng xạ tại thời điểm tháng 3 năm thứ hai.
c) Biết rằng độ phóng xạ phân rã theo hàm $\gamma(t) = ce^{at^2+bt}$, hãy sử dụng phương pháp hồi quy kết hợp với phương trình chính tắc để tìm công thức hàm phù hợp với bảng dữ liệu ở trên.
d) **Lập trình** để giải quyết câu c) và dự đoán giá trị của độ phóng xạ tại các thời điểm năm thứ 2, 2.5, 3.

Câu 4 (2 điểm) (Lập trình)

Cho $[a, b] = [-10, 10]$. Hãy nội suy hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sử dụng đa thức nội suy bậc 50 trên lưới đều và trên lưới với các mốc nội suy Chebyshev-Gauss-Lobatto (lấy $n = 50$) như sau.

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Vẽ các sai số của 2 phép nội suy đó trên cùng 1 đồ thị. Em có kết luận gì từ đồ thị đó?

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm