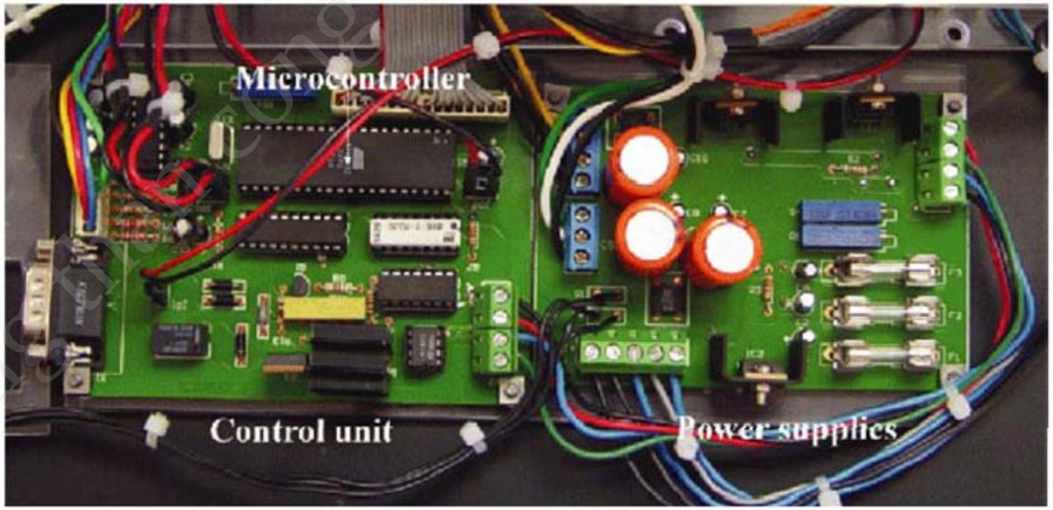
Lý thuyết Điều khiển tự động 1

Phân tích hệ thống trong không gian trạng thái

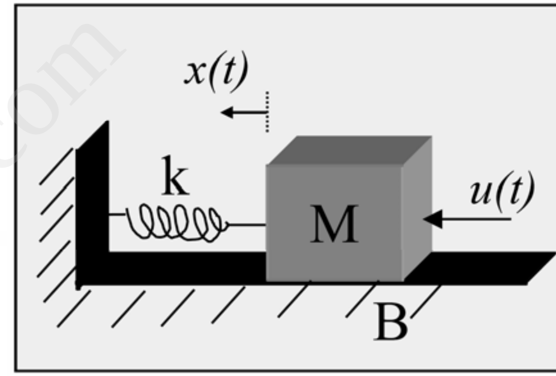


ThS. Đỗ Tú Anh
Bộ môn Điều khiển tự động
Khoa Điện, Trường ĐHBK HN

Mô hình trạng thái

Ví dụ

Cơ hệ lò xo-vật



$$M\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+k\,x=u$$

$$x_1(t)=x(t)=y(t) \longrightarrow y(t)=x_1(t)$$

Quãng đường dịch chuyển

$$x_2(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dy(t)}{dt} \longrightarrow \frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)$$

Vận tốc khối vật

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\left(\frac{B}{M}\right)x_2(t)-\left(\frac{k}{M}\right)x_1(t)+\left(\frac{1}{M}\right)u(t)$$

Mô hình trạng thái (tiếp)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\left(\frac{k}{M}\right)x_1(t) - \left(\frac{B}{M}\right)x_2(t) + \left(\frac{1}{M}\right)u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{M}} & -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mathrm{M}} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vector đầu ra

Vector trạng thái

A: Ma trận hệ thống

B: Ma trận vào

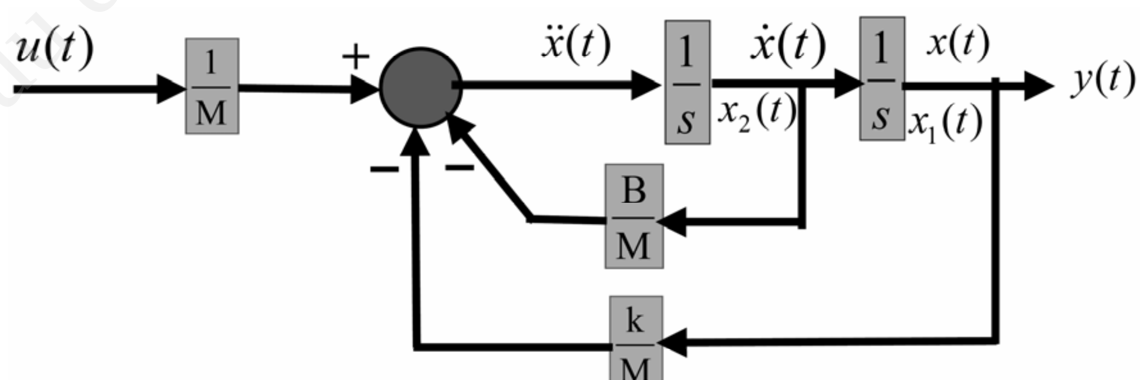
C: Ma trận ra

D: Ma trận liên thông

$$\dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t}) = \mathrm{Ax}(\mathrm{t}) + \mathrm{Bu}(\mathrm{t})$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathrm{Cx}(\mathrm{t}) + \mathrm{Dw}(\mathrm{t})$$

Sơ đồ cấu trúc



Từ hàm truyền đạt đến MHTT

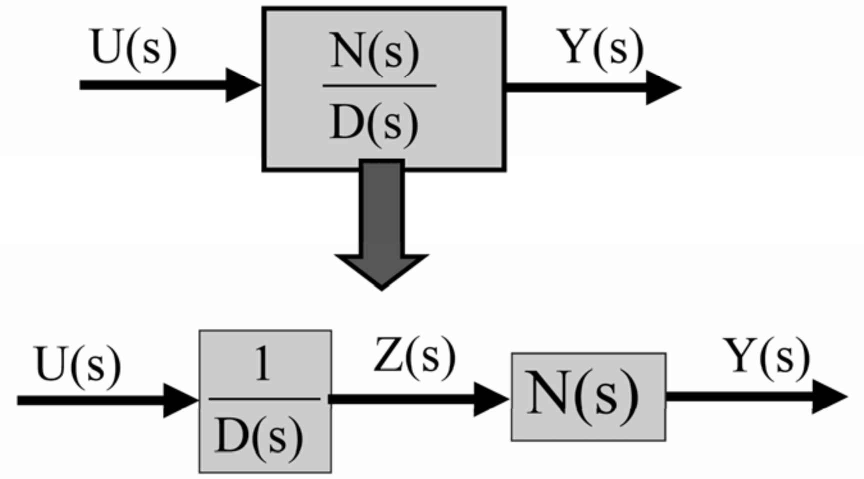
Tổng quát

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$U(s) = D(s)\,Z(s)$$

$$Y(s) = N(s)\,Z(s)$$



Từ hàm truyền đạt đến MHTT (tiếp)

Ví dụ

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$U(s)=D(s)\,Z(s)$

$$U(s)=\left(s^3+a_2s^2+a_1s+a_0\right)Z(s)$$

$$U(s)=s^3Z(s)+a_2s^2Z(s)+a_1sZ(s)+a_0Z(s)$$

$$\boxed{u(t)=\dddot{z}+a_2\ddot{z}+a_1\dot{z}+a_0z}$$

$Y(s)=N(s)\,Z(s)$

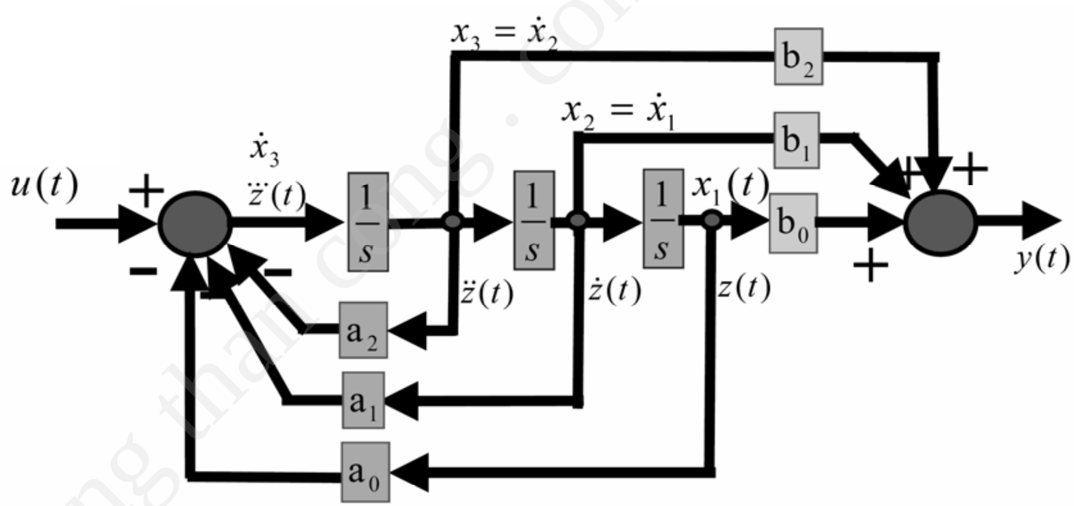
$$Y(s)=\left(b_2s^2+b_1s+b_0\right)Z(s)$$

$$=b_2s^2Z(s)+b_1sZ(s)+b_0Z(s)$$

$$\boxed{y(t)=b_2\ddot{z}+b_1\dot{z}+b_0z}$$

Từ hàm truyền đạt đến MHTT (tiếp)

Sơ đồ cấu trúc dạng chuẩn điều khiển



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u$$

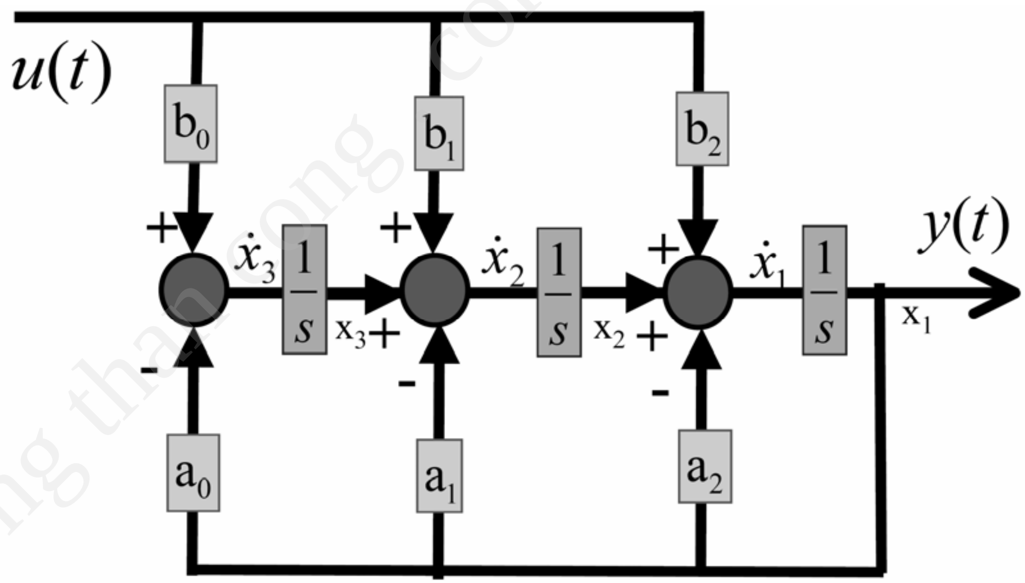
$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$[y] = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Từ hàm truyền đạt đến MHTT (tiếp)

Sơ đồ cấu trúc dạng chuẩn quan sát



$$\dot{x}_1 = -a_2 x_1 + x_2 + b_2 u$$
$$\dot{x}_2 = -a_1 x_1 + x_3 + b_1 u$$
$$\dot{x}_3 = -a_0 x_1 + b_0 u$$
$$y = x_1$$

Mô hình trạng thái dạng chuẩn quan sát

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$[y] = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Từ hàm truyền đạt đến MHTT (tiếp)

Note

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

Chuẩn điều khiển

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$[y]=[b_0 \quad b_1 \quad b_2]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Chuẩn quan sát

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_2 & 1 & 0\\ -a_1 & 0 & 1\\ -a_0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_2\\ b_1\\ b_0\end{bmatrix}u$$

$$[y]=[1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Quỹ đạo trạng thái

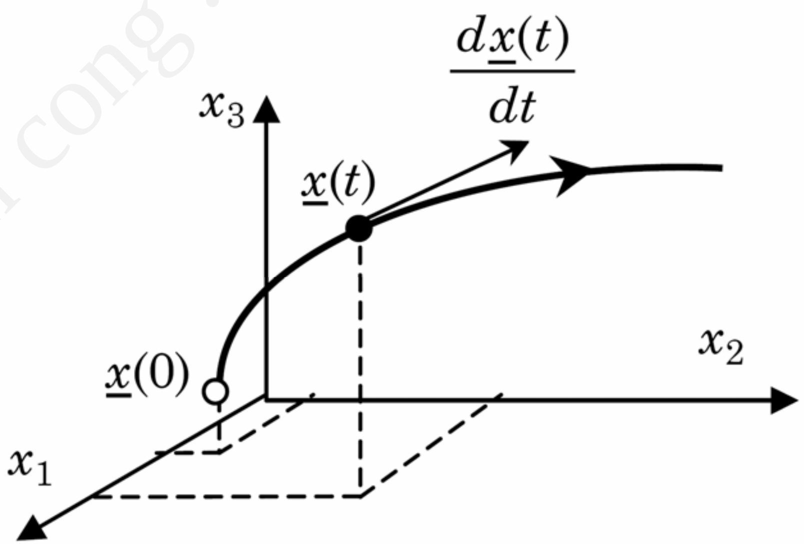
Định nghĩa

QĐTT là nghiệm của hệ phương trình vi phân

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

ứng với một kích thích $\underline{u}(t)$

và trạng thái đầu $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ cho trước



Không gian trạng thái

Tập hợp của tất cả các QĐTT của hệ thống

Đồ thị quỹ đạo trạng thái

Là đường cong biểu diễn $\underline{x}(t)$ khi cho t chạy từ $0 \to \infty$ trong không gian trạng thái R^n

Quỹ đạo trạng thái (tiếp)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots\dots + b_{1r}u_r$$

Laplace

$$sX_1(s) - x_1(0) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \dots\dots + a_{1n}X_n(s) + b_{11}U_1(s) + \dots\dots + b_{1r}U_r(s)$$

Tương tự với phương trình vi phân thứ 2

$$sX_2(s) - x_2(0) = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + \dots\dots + a_{2n}X_n(s) + b_{21}U_1(s) + \dots\dots + b_{2r}U_r(s)$$

Vậy ảnh Laplace của hệ phương trình vi phân là

$$\boxed{\mathrm{sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)}}$$

Quỹ đạo trạng thái (tiếp)

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\boxed{X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)}$$

Lấy ảnh Laplace ngược để tìm nghiệm x(t)

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Ma trận chuyển trạng thái

$$\boxed{\Phi(t) = L^{-1}\left((sI - A)^{-1}\right)}$$

Quỹ đạo trạng thái (tiếp)

Ví dụ

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

Chuyển sang mô hình trạng thái

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Phi(t)=L^{-1}\left((sI-A)^{-1}\right)}$$

$$(sI-A)=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+3 & -1\\ 2 & s\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} Adj(sI-A)=\begin{bmatrix}s & 1\\ -2 & s+3\end{bmatrix}\\ \det(sI-A)=s^2+3s+2=(s+1)(s+2)\end{array}\right\} (sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}$$

Quỹ đạo trạng thái (tiếp)

Tiếp tục …

$$(\mathrm{sI - A})^{-1} = \frac{adj(\mathrm{sI - A})}{det(\mathrm{sI - A})}$$

Do đó

$$(\mathrm{sI - A})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{-1}{s+2} \\ \dfrac{-2}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{-1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển trạng thái:

$$\boxed{\Phi(\mathrm{t}) = L^{-1}\left((\mathrm{sI - A})^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}}$$

Quỹ đạo trạng thái (tiếp)

Tiếp tục …

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Giả sử với tín hiệu vào bước nhảy đơn vị *u(t)*=1, ta có

$$(sI - A)^{-1}BU(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s+3}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1}BU(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1/2}{s} + \dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{1/2}{s+2} \\ \dfrac{3/2}{s} + \dfrac{-2}{s+1} + \dfrac{1/2}{s+2} \end{bmatrix}$$

Quỹ đạo trạng thái (tiếp)

Tiếp tục …

$$L^{-1}\left((\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1}BU(s)\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ \frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Từ công thức

$$x(t)=L^{-1}\left((\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1}x(0)+(\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1}BU(s)\right)$$

Suy ra nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\boxed{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ \frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\end{bmatrix}}$$

Ma trận hàm mũ

Khai triễn chuỗi của $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A)^{-1} = (1/s)(I - A/s)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots$$

(với $|s|$ đủ lớn), do đó

$$\Phi(t) = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!}.....$$

có dạng giống khai triển Taylor của hàm mũ thông thường

$$e^{at} = I + at + a^2\frac{t^2}{2!} + a^3\frac{t^3}{3!}.....$$

Vậy ta có

$$\boxed{\Phi(t) = e^{At}}$$

Ma trận hàm mũ

$$e^{M} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots$$

với $M \in R^{n \times n}$