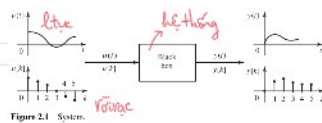Các hệ thống điều khiển (Control Systems) có
       khắp mọi nơi.
Có vai trò vô cùng quan trọng trong kỹ thuật ay
       như toán học.

Khoá học này: Tìm hiểu về những hệ thống
   điều khiển & thiết kế để hệ thống đạt được
   hiệu suất/hiệu quả/hành vi mong muốn.

$u(t)$ ($u[k]$) được liên ==đầu vào== liên tục (hay rời rạc)

$y(t)$ ($y[k]$) là   " ==đầu ra==   " "

Khoá học này: Ta xét hệ đ/khi? để mô tả = 1 lz
                     ==phương trình vi phân==

Mô hình hệ thống: $t \in [t_0, t_f)$ với $t_0 t_f \leq +\infty$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & (1) \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) & (2) \end{cases}$$

+ ĐK ban đầu $x(t_0) = x_0$.
+ (1) thg đc gọi là ==phương trình trạng thái==
   (state equation), $x(t)$: biến trạng thái (state variable)
+ (2) gọi là "==pt đầu ra==" (output equation); $u(t)$: input/đầu vào; $y(t)$: output/đầu ra
                                                         response/phản hồi.

   Nếu $u(t) \equiv 0 \Rightarrow$ hệ thống đc gọi là "tự do" (free)
+ Số chiều: $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^\ell$.

+ Có 2 trường hợp đặc biệt.
   a) Hệ tuyến tính (phụ thuộc thời gian) $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & \forall t \in [t_0, t_f), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \end{cases}$
           ==LTV==
   $A(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{\ell,n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{\ell,m}$.
   b) Hệ tuyến tính hệ số hằng $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & \forall t \in (t_0, t_f) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases}$
           ==(LTI)==

+ Hệ thời gian rời rạc: (tương tự), v.d.   LTV $\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, & \forall k = k_0, \ldots, k_f. \\ y_{k+1} = C_k x_k + D_k u_k. \end{cases}$

Chú ý: Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $t_0 = 0$, (hay $k_0 = 0$), bằng cách đổi biến thời gian
               $s = t - t_0 \Rightarrow \dot{x}(s) = \dot{x}(t)$.

VD1: Hệ điều khiển tuyến tính, hệ số hằng trong cơ học (Hình 1).
   Lò xo: độ cứng k_2.   Hệ số ma sát trượt k_1.
   Vật có thể trượt theo phương ngang, có khối lg m, tuân theo định luật 2 Newton
            $\vec{F} = m\vec{a}$

   F: ngoại lực bao gồm lực kéo u, lực ma sát trượt $k_1 \dot{y}(t)$,
              lực ma sát tĩnh $\simeq 0$, lực kéo lò xo (Hooke) $k_2 y(t)$.
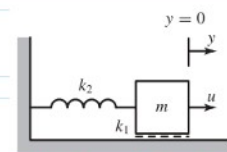
   Ta có pt $u(t) - k_1 \dot{y}(t) - k_2 y(t) = m \ddot{y}(t)$ (3)
   Đổi biến $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$ và thay vào (3) ta có

$$\begin{cases} m\dot{x}_2(t) = u(t) - k_1 x_2(t) - k_2 x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \end{cases}$$

   Do đó, ta có hpt: $\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m} & -\frac{k_1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$

Các ví dụ # các em có thể tham khảo thêm trang 20 - 30 (Chen).

Các ví dụ: các em có thể tham khảo thêm trang 20~30 (Chen).

§2. Các Khái Niệm Cơ Bản.

$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{cases}$ & 2 THĐB. LTV & LTI.

Câu hỏi cơ bản trong LT điều khiển là

Q1: a) Cho tọa độ ban đầu $x_0 = x(t_0)$ & 1 điểm mục tiêu x_1 thì ? $\exists$ 1 hàm điều khiển $u(t)$ s.c.

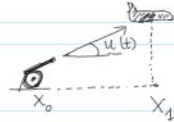$$x(t_1) = x_1 \quad \text{với } t_1 \text{ nào đó} > t_0 \text{ và} < t_f \quad \text{(Bài toán bắn máy bay)}.$$

Bài toán về tính điều khiển được (controlability)

b) Nếu ta biết 2 tọa độ của máy bay (t_0, x_0), (t_1, x_1) (với $t_1 > t_0$)

thì liệu có tìm được duy nhất $U|_{[t_0, t_1]}$ để t/m $x(t_1) = x_1$?

Bài toán về tính quan sát được (observability) → quan sát 2 vị trí của máy bay mà biết
toàn bộ quỹ đạo của máy bay.

Q2) Bài toán điều khiển tối ưu (Optimal control)

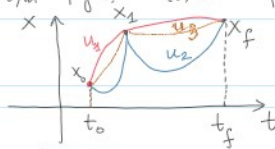Cho trí x_1 hoặc 1 quỹ đạo mong muốn (reference trajectory) $x_{ref}(t)$, ta cần tìm $u(t)$ s.c

hàm mục tiêu (objective function) đạt giá trị tối ưu.

Các hàm mục tiêu phổ biến thường là ① $\overline{J}(u) = \{ t_1 \in [t_0, t_f) \text{ sao cho } x(t_1, u) = x_1 \} \Rightarrow$ tối ưu thời gian

② $\overline{J}(u) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} \| x(t) - x_{ref}(t) \| \, dt \longrightarrow \min$ — Tối ưu hóa độ lệch quỹ đạo. $\longrightarrow$ min

③ $J(u) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} \| u(t) \| \, dt \longrightarrow \min$, với $u(t)$ t/m quỹ đạo $x(t)$ sẽ đi qua điểm x_1.

$\longrightarrow$ tối ưu hóa năng lượng.

Đặc biệt thay vì dùng $x_{ref}(t)$ ng ta dùng $y_{ref}(t)$

(bài toán điều khiển quỹ đạo / tracking control problem).

==Điều khiển phản hồi==: Đầu vào $u(t)$ có dạng đặc biệt (phản hồi / feedback). Thiết kế điều khiển

① $u(t) = U(t, x(t)) \longrightarrow$ phản hồi trạng thái (state feedback).

② $u(t) = U(t, y(t)) \longrightarrow$ '' đầu ra (output feedback).

Cá biệt TH hệ tuyến tính $\Rightarrow \begin{cases} \text{State feedback phổ biến là } u(t) = F(t) x(t) \quad (\text{hay} = Fx) \\ \text{Output '' '' } u(t) = F(t) y(t) \quad (\text{hay} = Fy). \end{cases}$

Ví dụ như hệ LTI $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[u(t) = Fx(t)]{\text{State feedback}} \begin{cases} \dot{x}(t) = (A+BF)x(t) \\ y(t) = (C + DF) x(t) \end{cases}$

Hệ mở (open loop sys.)   Hệ đóng kín (closed loop sys.)
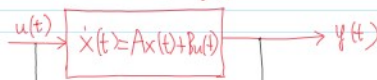
Hình 2. Phản hồi trạng thái

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[u = Fy]{\text{output feedback}} \begin{cases} \dot{x} = Ax + BFy \\ y = Cx + DFy \end{cases}$

TH ĐB: $D = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A + BFC) x \\ y = Cx. \end{cases}$

Tính chất của hệ tuyến tính. $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) x + B(t) u, \\ y = C(t) x + D(t) u. \end{cases}$

Phản hồi đầu vào 0, k/h y_{zi}, là phản hồi khi đầu vào $u = 0$, tức là hệ

có dạng $\begin{cases} \dot{x} = A(t) x, \\ y = C(t) x + D(t) u. \end{cases} \quad x(t_0) = x_0,$

Phản hồi trạng thái 0, k/h y_{zs}, là phản hồi thu được khi $x(t_0) = 0$, tức là hệ

có dạng $\begin{cases} \dot{x} = A(t) x + B(t) u, \quad x(t_0) = 0. \\ y = C(t) x + D(t) u. \end{cases}$

T/c đặc trưng của hệ tuyến tính. Phản hồi của hệ tổng quát ==$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$==

Đ/n: (t/c ổn định/stability) Xét 1 pt vp có dạng $\dot{x}(t) = f(x(t))$ trên $[t_0, +\infty)$ với đk đầu $x(t_0) = x_0$.

Giả sử $\overline{x}$ là 1 điểm cân bằng (equilibrium), tức là $f(\overline{x}) = 0$. Khi đó $\overline{x}$ được gọi là

i) ổn định nếu $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ s.c. $\forall$ đk b/đầu x_0 t/m $\| x_0 - \overline{x} \| \leq \delta$ thì

Giả sử $\overline{x}$ là 1 điểm cân bằng (equilibrium), tức là $f(\overline{x}) = 0$. Khi đó $\overline{x}$ được gọi là

i) ổn định nếu $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ s.c. $\forall$ đk b/đầu x_0 t/m $\|x_0 - \overline{x}\| \leq \delta$ thì
$$\|x(t) - \overline{x}\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty).$$

ii) ổn định tiệm cận nếu $\overline{x}$ là điểm cân bằng ổn định & $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$.

Hệ được gọi là ổn định mũ nếu $x(t)$ t/m ước lượng phân rã mũ
$$\|x(t)\| \leq \delta e^{-\alpha t} \|x(t_0)\| \quad \forall t \geq t_0, \quad \delta > 0, \alpha > 0.$$

$\qquad \alpha$: tốc độ mũ (exponential decay rate).

Đ/lý 1: Xét phương trình $\dot{x}(t) = A x(t)$, với $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, ta có:

i) ổn định tiệm cận $\equiv$ ổn định mũ, với tốc độ phân rã là $-\varrho(A)$, với
$$\varrho(A) = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ là giá trị riêng của } A\} \rightarrow \text{hoành độ phổ}$$
$$\qquad\qquad\qquad (\text{spectral abcissa}).$$

ii) Hệ ổn định mũ $\Longleftrightarrow$ $\varrho(A) < 0$.

Đ/lý 2: Xét hệ tuyến tính $\dot{x}(t) = A x(t)$ & hệ phi tuyến $\dot{x}(t) = Ax(t) + g(x)$, trong đó $g(0) = 0$ và g t/m đk $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \dfrac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$.

Khi đó tính chất ổn định mũ của hệ tuyến tính sẽ dẫn đến t/c ổn định mũ của hệ phi tuyến.

==Bài toán ổn định hóa & gán phổ của hệ điều khiển==: v.d. hệ $\dot{x} = Ax$ là ổn định mũ,

hỏi với đk vào của B thì hệ đ/kh $\dot{x} = (A + BF)x$ (state feedback $u = Fx$)

hay $\dot{x} = (A + BFC)x$ (output feedback $u = Fy$, $D = 0$) là ổn định?

Gán phổ: cho trước n điểm $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$. Hỏi? $\exists$ $u = Fx$ s.c.
$\qquad A + BF$ có chính xác n giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hay k?
$\qquad\qquad \longleftrightarrow$ tính điều khiển được (bài toán bắn máy bay) của hệ $\dot{x} = Ax + Bu$.