Môn Seminar 1: Bài tập giữa kì

Trần Việt Hoàng - K63 Tài năng Toán

Bài 1.

Chứng minh. a.

Ta thấy phần a là một hệ quả của phần b, nên ta chỉ cần làm phần b. □

Chứng minh. b.

Trước hết, ta chứng minh $B, C, \widetilde{D} \geqslant 0$ là một điều kiện cần để hệ (1) dương trong.

Xét trạng thái ban đầu của y bằng cách thay $t = 0$ vào phương trình thứ hai của hệ (1)

$$y(0) = Cx(0) + \widetilde{D}u(0)$$

Tại đây, chọn $x(0) = 0$, và $u(t) = e_i$ là vector cơ sở thứ i, ta có $y(0)$ là cột thứ i của $\widetilde{D}$, nên mọi hệ số trên cột thứ i của $\widetilde{D}$ đều không âm. Cho i chạy, suy ra $\widetilde{D} \geqslant 0$. Một cách tương tự, chứng minh được $C \geqslant 0$.

Để tìm điều kiện cho B, ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 1. *Cho f là hàm khả vi cấp hai trên $[0, \infty)$ (khả vi cấp hai bên phải tại 0). Nếu $f(0) = f'(0) = 0$ và $f(t) \geqslant 0$ với mọi $t \geqslant 0$, thì $f''(0) \geqslant 0$.*

Xét trạng thái ban đầu của phương trình đầu của hệ (1)

$$\ddot{x}(0) = -Kx(0) + Bu(0)$$

Tại đây, chọn $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ và $u(t) = e_i$, ta có $\ddot{x}(0)$ là cột thứ i của B. Áp dụng bổ đề trên cho x, ta được $\ddot{x}(0) \geqslant 0$, nên mọi số hệ trên cột thứ i của B đều không âm. Cho i chạy, suy ra $B \geqslant 0$.

Trở lại bài toán, ta chứng minh điều kiện sau là một điều kiện cần và đủ để hệ (1) dương trong

$$B, C, \widetilde{D} \geqslant 0 \qquad \text{và} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}(-K)^k \ , \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-K)^k \geqslant 0 \quad \text{với mọi } t \geqslant 0$$

Xét hệ sau, gọi là hệ (2)

$$\dot{z} = \widetilde{A}z + \widetilde{B}u, \text{với mọi } t \geqslant 0,\ z(0) = z_0$$
$$y = \widetilde{C}z + \widetilde{D}u$$

trong đó

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},\ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -K & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,2n},\ \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,p},\ \widetilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q,2n}$$

Dễ thấy điều kiện không âm của bộ điều khiển và trạng thái ban đầu của hệ (1) và (2) là tương đương nhau. Hơn nữa, hệ (1) là dương trong khi và chỉ khi hệ (2) có n hệ số đầu của z không âm và $y \geqslant 0$ với mọi trạng thái ban đầu và biến điều khiển không âm.

Điều kiện cần. Ta đã chứng minh được $B, C, \widetilde{D} \geqslant 0$. Ta chứng minh điều kiện cho $-K$. Từ phương trình bậc nhất của z của hệ (2), ta có công thức cho z

$$z(t) = e^{t\widetilde{A}}z_0 + \int_0^t e^{(t-s)\widetilde{A}}\widetilde{B}u(s)ds$$

Để n hệ số đầu của z không âm, bằng cách chọn $u(t) = 0$, ta cần n hệ số đầu của $e^{t\widetilde{A}}z_0$ không âm với mọi $z_0 \geqslant 0$, suy ra n dòng đầu của $e^{t\widetilde{A}}$ không âm với mọi t.

Với k không âm, ta có tính toán sau bằng quy nạp

$$\widetilde{A}^{2k} = \begin{pmatrix} (-K)^k & 0 \\ 0 & (-K)^k \end{pmatrix} \qquad \text{và} \qquad \widetilde{A}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-K)^k \\ (-K)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} e^{t\widetilde{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\widetilde{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}\widetilde{A}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}\widetilde{A}^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} (-K)^k & 0 \\ 0 & (-K)^k \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & (-K)^k \\ (-K)^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}(-K)^k & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-K)^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-K)^{k+1} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}(-K)^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vậy để n dòng đầu của $e^{t\widetilde{A}}$ không âm với mọi t, ta cần

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}(-K)^k\ ,\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-K)^k \geqslant 0 \quad \text{với mọi } t \geqslant 0$$

Điều kiện đủ. Do $B, C, \widetilde{D} \geqslant 0$ nên $\widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D} \geqslant 0$. Như đã chứng minh ở trên, với điều kiện của K, từ công thức của z

$$z(t) = e^{t\widetilde{A}} z_0 + \int_0^t e^{(t-s)\widetilde{A}} \widetilde{B} u(s) ds$$

ta có n dòng đầu của z không âm. Suy ra $x \geqslant 0$, và từ $C, \widetilde{D} \geqslant 0$ ta suy ra $y \geqslant 0$. □

Chứng minh. c.

Ta lấy $x, y \in \mathbb{R}, K = 1, B = C = \widetilde{D} = 0$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + x = 0 \ , \ \text{với mọi } t \geqslant 0, \ z(0) = z_0 \\ &y = 0 \end{aligned}$$

Ta thấy với mọi trạng thái và bộ điều khiển không âm ban đầu, thì y luôn bằng 0, nên hệ là dương ngoài. Tuy nhiên với $z_0 = 0$, hệ trên có nghiệm $x = \sin(t)$ và $y = 0$, và do $\sin(t)$ có thể nhận giá trị âm với $t \geqslant 0$ nào đó, nên hệ trên không dương trong. □

Bài 2.

Các chứng minh dưới đây tham khảo trong [Kac].

Chứng minh. a.

Do $u(t) = 0$ và $C \geqslant 0$, nên hệ (3) dương khi và chỉ khi A là ma trận Metzler. Khi đó, tính ổn định tiệm cận của hệ (3) tương đương với tính ổn định tiệm cận của phương trình

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \ x(0) = x_0$$

trong đó A là một ma trận Metzler. Ta gọi phương trình này là phương trình $(*)$.

Trước hết, ta phát biểu một bổ đề

Bổ đề 2. $(*)$ *ổn định tiệm cận khi và chỉ khi mọi giá trị riêng của A đều có phần thực âm.*

Chứng minh. Xem [BV, Định lý 3.10]. □

a. Ta chứng minh $(*)$ ổn định tiệm cận khi và chỉ khi mọi hệ số của đa thức đặc trưng $\det(xI - A)$ đều dương.

Giả sử $(*)$ ổn định tiệm cận. Do A là ma trận hệ số thực, nên $\det(\lambda I - A)$ cũng có hệ số thực, suy ra các giá trị riêng của A là thực hoặc liên hợp phức của nhau. Vậy ta có thể viết $\det(xI - A)$ dưới dạng

$$\det(xI - A) = \prod (x - y) \prod (x - z)(x - \overline{z}) = \prod (x - y) \prod (x^2 - 2Re(z)x + |z|^2)$$

Theo bổ đề 2, mọi giá trị riêng của A đều có phần thực âm, nên ở biểu thức trên, ta có $y, Re(z) < 0$. Khai triển biểu thức trên, ta thấy mọi hệ số của $\det(xI - A)$ đều dương.

Ngược lại, giả sử mọi hệ số của $\det(xI - A)$ đều dương.

Bổ đề 3. *(Định lý Perron–Frobenius) Cho A là một ma trận vuông với các hệ số không âm. Khi đó bán kính phổ $\rho(A)$ là một giá trị riêng của A.*

Nói cách khác, định lý Perron–Frobenius nói rằng nếu A là một ma trận vuông, hệ số không âm thì A có một giá trị riêng thực không âm λ, hơn nữa modun của mọi giá trị riêng khác của A đều không vượt quá λ. Từ đó, ta có bổ đề

Bổ đề 4. *Cho A là một ma trận Metzler. Khi đó A có một giá trị riêng thực λ thỏa mãn phần thực của mọi giá trị riêng khác của A đều không vượt quá λ.*

Chứng minh. Do A là ma trận Metzler, tồn tại t thực thỏa mãn $A + tI$ là một ma trận có các hệ số không âm. Khi đó $A + tI$ có một giá trị riêng λ' không nhỏ hơn modun của mọi giá trị riêng khác của $A + tI$, nói riêng λ' không nhỏ hơn phần thực của mọi giá trị riêng khác của $A + tI$. Do r là giá trị riêng của $A + tI$ khi và chỉ khi $r - t$ là giá trị riêng của A, nên $\lambda = \lambda' - t$ là giá trị riêng cần tìm. □

Trở lại bài toán. Do A là ma trận Metzler, theo bổ đề 4, tồn tại giá trị riêng thực λ thỏa mãn phần thực của mọi giá trị riêng khác của A đều không vượt quá λ. Do mọi hệ số của $\det(xI - A)$ đều dương, nên suy ra $\lambda < 0$. Vậy mọi giá trị riêng của A đều có phần thực âm. Từ bổ đề 2, ta suy ra $(*)$ ổn định tiệm cận. □

Chứng minh. b.

Ta phát biểu bổ đề sau

Bổ đề 5. *Cho A là một ma trận vuông gồm các hệ số không âm và λ là một số thực. Khi đó, $\lambda > \rho(A)$ khi và chỉ khi tất cả các định thực con chính góc trái của $\lambda I - A$ đều dương.*

Chứng minh. Xem [Kac, Bổ đề 2.1]. □

Từ phần a, để chứng minh phần b, ta cần chỉ ra: Với A là một ma trận Metzler, mọi giá trị riêng của A có phần thực âm khi và chỉ khi n định thức con chính góc trái của $-A$ đều dương.

Do A là ma trận Metzler, tồn tại số thực t để ma trận $A + tI$ không âm.Theo bổ đề 5, các định thức con góc trái của ma trận $-A = tI - (A + tI)$ đều dương khi và chỉ khi $t > \rho(tI + A)$ hay $0 > \rho(tI + A) - t$. Theo chứng minh ở phần a, do $tI + A$ không âm nên $\rho(tI + A) - t$ là giá trị riêng có phần thực lớn nhất trong các giá trị riêng của A. Vậy $0 > \rho(tI + A) - t$ khi và chỉ khi mọi giá trị riêng của A đều có phần thực âm. Kết thúc chứng minh. □

Chứng minh. c.

Ta phát biểu bổ đề sau

Bổ đề 6. *Cho ma trận vuông A thỏa mãn mọi giá trị riêng của A đều có phần thực âm. Khi đó tồn tại $c, d > 0$ để*

$$\left\|e^{tA}\right\| \leqslant ce^{-dt}$$

Chứng minh. Xem [BV, Mệnh đề 2.27]. □

Ta có công thức của x từ phương trình đầu trong hệ (3)

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds$$

Giả sử hệ ổn định tiệm cận và u bị chặn đều theo t bởi số thực $M > 0$. Khi đó A chỉ có các giá trị riêng với phần thực âm. Từ bổ đề 6, ta có

$$\begin{aligned}\|y(t)\| \leqslant \|C\|\,\|x(t)\| &\leqslant \left\|e^{tA}\right\|\|x_0\| + \int_0^t \left\|e^{(t-s)A}\right\|\|B\|\,\|u(s)\|\,ds \\ &\leqslant \|x_0\|\,ce^{-dt} + Mc\,\|B\| \int_0^t e^{(s-t)d}ds \\ &\leqslant \|x_0\|\,ce^{-dt} + Mc\,\|B\|\,d^{-1}(1-e^{-td})\end{aligned}$$

Từ đây ta thấy y cũng bị chặn đều theo t. Vậy (3) là hệ ổn định BIBO.

Một hệ (3) ổn định BIBO không suy ra được (3) ổn định tiệm cận. Ta xét phản ví dụ: Chọn

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = 0,\ C = Id$$

Khi đó

$$y(t) = x(t) = x_0e^{tA} = x_0 \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}$$

Vậy y bị chặn đều theo t (với mọi u), nên hệ trên ổn định $BIBO$. Nhưng hệ trên không ổn định tiệm cận do các hàm $\sin(t), \cos(t)$ không hội tụ khi t ra vô cùng. □

Bài 3.

Chứng minh. a.

Ta có phản hồi trạng thái 0 được biểu diễn bởi

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Đặt $g(1) = a$. Từ đồ thị của u, g, ta có

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \\ -1 & \text{nếu } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{nếu } x > 2 \end{cases} \qquad \text{và} \qquad g(x) = \begin{cases} ax & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ a(2-x) & \text{nếu } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

Như vậy ta tính được y

$$y(t) = \begin{cases} at^2/2 & \text{nếu } 0 \leqslant t < 1 \\ a(-3t^2/2 + 4t - 2) & \text{nếu } 1 \leqslant t < 2 \\ a(3t^2/2 - 8t + 10) & \text{nếu } 2 \leqslant t < 3 \\ a(-t^2/2 + 4t - 8) & \text{nếu } 3 \leqslant t < 4 \\ 0 & \text{nếu } 4 \leqslant t \end{cases}$$

□

Chứng minh. b.

Ma trận hàm truyền $\widehat{G}$ là ma trận thỏa mãn

$$\begin{pmatrix} \widehat{y}_1(s) \\ \widehat{y}_2(s) \end{pmatrix} = \widehat{G}(s) \begin{pmatrix} \widehat{u}_1(s) \\ \widehat{u}_2(s) \end{pmatrix}$$

Ta sử dụng một số tính chất của phép biến đổi Laplace:

1. $\mathcal{L}(ax(t) + by(t)) = a\mathcal{L}(x(t)) + b\mathcal{L}(y(t))$
2. $\mathcal{L}(x^{(n)}(t)) = s^n \widehat{x}(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0)$

Với một đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ và một hàm y, kí hiệu

$$F(P, y) = \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{k=1}^{i} s^{i-k} y^{(k-1)}(0)$$

Đặt $D_{11}(x) =_{i=0}^{m} a_i x^i$, ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D_{11}(\frac{d}{dt})y_1(t)) = \sum_{i=0}^{m} a_i \mathcal{L}(y_1^{(i)}(t)) &= \sum_{i=0}^{m} a_i (s^i \widehat{y}_1(s) - \sum_{k=1}^{i} s^{i-k} y_1^{(k-1)}(0)) \\ &= \widehat{y}_1(s) D_{11}(s) - F(D_{11}, y_1) \end{aligned}$$

Một cách tương tự, ta thu được biến đổi Laplace cho h

$$\begin{aligned} \widehat{y}_1(s) D_{11}(s) - F(D_{11}, y_1) + &\widehat{y}_2(s) D_{12}(s) - F(D_{12}, y_2) \\ &= \widehat{u}_1(s) N_{11}(s) - F(N_{11}, u_1) + \widehat{u}_2(s) N_{12}(s) - F(N_{12}, u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{y}_1(s)D_{21}(s) - F(D_{21}, y_1) &+ \widehat{y}_2(s)D_{22}(s) - F(D_{22}, y_2) \\ &= \widehat{u}_1(s)N_{21}(s) - F(N_{21}, u_1) + \widehat{u}_2(s)N_{22}(s) - F(N_{22}, u_2)\end{aligned}$$

Xét tại $y^{(k)}(0) = u^{(k)}(0) = 0$ với mọi k, ta thu được các $F(\_, \_) = 0$. Do đó

$$\widehat{y}_1(s)D_{11}(s) + \widehat{y}_2(s)D_{12}(s) = \widehat{u}_1(s)N_{11}(s) + \widehat{u}_2(s)N_{12}(s)$$

$$\widehat{y}_1(s)D_{21}(s) + \widehat{y}_2(s)D_{22}(s) = \widehat{u}_1(s)N_{21}(s) + \widehat{u}_2(s)N_{22}(s)$$

Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ta tìm được biểu diễn của $\widehat{G}(s)$ như sau :

$$\widehat{G}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{N_{11}(s)D_{22}(s) - N_{21}(s)D_{12}(s)}{D_{11}(s)D_{22}(s) - D_{21}(s)D_{12}(s)} & \dfrac{N_{12}(s)D_{22}(s) - N_{22}(s)D_{12}(s)}{D_{11}(s)D_{22}(s) - D_{21}(s)D_{12}(s)} \\ \dfrac{N_{11}(s)D_{21}(s) - N_{21}(s)D_{11}(s)}{D_{12}(s)D_{21}(s) - D_{22}(s)D_{11}(s)} & \dfrac{N_{12}(s)D_{21}(s) - N_{22}(s)D_{11}(s)}{D_{12}(s)D_{21}(s) - D_{22}(s)D_{11}(s)} \end{pmatrix}$$

□

Chứng minh. c.

Ta có phương trình của hệ thống phản hồi dương như sau

$$\begin{aligned} v(t) &= r(t) + y(t) \\ u(t) &= av(t) \\ y(t) &= u(t-1) \end{aligned}$$

Để tìm phản hồi theo bước đơn vị, ta cho $r(t) \equiv 1$. Giờ lần lượt thế $a = 1$ và $a = 0.5$ vào hệ, ta tìm được công thức của y như sau

- Cho $a = 1$, ta được $y(t) = 1 + y(t-1)$ tương ứng với hình $3(a)$.
- Cho $a = 1$, ta được $y(t) = \dfrac{1}{2}(y(t-1) + 1)$ tương ứng với hình $3(b)$.

Ta có phương trình của hệ thống phản hồi âm như sau

$$\begin{aligned} v(t) &= r(t) - y(t) \\ u(t) &= av(t) \\ y(t) &= u(t-1) \end{aligned}$$

Để tìm phản hồi theo bước đơn vị, ta cho $r(t) \equiv 1$. Giờ lần lượt thế $a = 1$ và $a = 0.5$ vào hệ, ta tìm được công thức của y như sau

- Cho $a = 1$, ta được $y(t) = 1 - y(t-1)$ tương ứng với hình $3(c)$.
- Cho $a = 1$, ta được $y(t) = \dfrac{1}{2}(1 - y(t-1))$ tương ứng với hình $3(d)$.

□

Tài liệu

[BV] Luis Barreira and Claudia Vails, *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*, Graduate Studies in Mathematics Volume 137, American Mathematical Society. ↑3 , ↑5

[Kac] Tadeusz Kaczorek, *Positive 1D and 2D Systems*, Springer-Verlag London Ltd. ↑3 , ↑4