ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA TOÁN CƠ TIN HỌC

……………………………………

NGUYỄN TIẾN TUẤN

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Hà Nội – Năm 2015

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN CƠ TIN HỌC

………………………………………

NGUYỄN TIẾN TUẤN

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. LÊ ĐÌNH ĐỊNH

Hà Nội - 2015

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn này của tác giả được hoàn thành dưới sự hướng dẫn trực tiếp của Tiến sĩ Lê Đình Định – Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc Gia Hà Nội.

Lời đầu tiên tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành sâu sắc đến người thầy dạy và cũng là người thầy hướng dẫn - Tiến sĩ Lê Đình Định. Thầy đã dành nhiều thời gian để chỉ bảo, hướng dẫn tác giả với sự nhiệt tình, chu đáo, sâu sắc, đầy kinh nghiệm trong học tập và trong suốt quá trình nghiên cứu để hoàn thành bản luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn sự quan tâm giúp đỡ của tất cả mọi người đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Hà Nội, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Tác giả

LỜI MỞ ĐẦU

Rất nhiều hiện tượng khoa học kỹ thuật trong thực tiễn mà việc tìm hiểu nó dẫn đến bài toán giải phương trình sai phân. Phương trình sai phân còn là một công cụ giúp giải các bài toán vi phân, đạo hàm và các phương trình đại số cấp cao.

Sự ra đời của phương trình sai phân cũng xuất phát từ việc xác định mối quan hệ thiết lập bởi một bên là một đại lượng biến thiên liên tục (được biểu diễn bởi hàm, chẳng hạn f(x)) với bên còn lại là độ biến thiên của đại lượng đó.

Đối với các hàm thông thường nghiệm là một giá trị số (số thực, số phức,…). Còn trong phương trình sai phân mục tiêu là tìm ra công thức của hàm chưa được biết nhằm thỏa mãn mối quan hệ đề ra. Thông thường nó sẽ là một họ các phương trình, sai lệch bằng một hằng số C nào đó. Hàm này sẽ được xác định chính xác khi có thêm điều kiện xác định ban đầu hoặc điều kiện biên.

Trong các ứng dụng thực tế, không dễ dàng để tìm ra công thức của hàm nghiệm. Với giá trị của thực tiễn khi ấy người ta chỉ quan tâm tới giá trị của hàm tại các giá trị cụ thể của các biến độc lập.

Các phương pháp nhằm tìm ra giá trị chính xác của hàm được gọi là phân tích định lượng. Tuy nhiên không phải lúc nào cũng xác định được các giá trị thực, lúc này người ta lại quan tâm đến các giá trị xấp xỉ (có một độ chính xác nhất định) với giá trị thực. Việc tìm các giá trị này được thực hiện thường là bằng phương pháp số với công cụ là máy tính.

Phương trình sai phân được nghiên cứu rộng rãi trong toán học thuần túy và ứng dụng, vật lí và các ngành kỹ thuật.

Toán học thuần túy quan tâm đến việc tìm ra sự tồn tại và duy nhất của hàm nghiệm.

Phương trình sai phân được phân làm nhiều loại, luận văn trình bày nghiên cứu về phương trình sai phân trong đó có chứa các số hạng là đại số và sai phân.

Trong mỗi loại phương trình sai phân lại được chia thành hai dạng tuyến tính và phi tuyến tính. Việc giải các phương trình sai phân tuyến tính có thể thực hiện được nhưng đối với phương trình sai phân phi tuyến tính không có công thức chung để giải, ngoại trừ chúng có tính đối xứng. Thay vào đó có thể dùng hàm tuyến tính để xấp xỉ hàm phi tuyến với những điều kiện ràng buộc nhất định.

Ở trường trung học phổ thông cũng như trong các kỳ thi học sinh giỏi toán xuất hiện nhiều bài toán hay và khó về dãy số, giới hạn, số học, tích phân truy hồi, phương trình hàm, …. được cho dưới dạng một phương trình sai phân hay có sử dụng phương trình sai phân để giải. Chính vì vậy mà nhiệm vụ tìm hiểu những ứng dụng của phương trình sai phân trong các bài toán phổ thông là một yêu cầu cấp thiết và quan trọng.

Việc xây dựng có hệ thống các kiến thức cơ bản về phương trình sai phân có phân loại các dạng phương trình sai phân với sự tổng hợp các phương pháp giải sẽ đóng góp tốt hơn, có hiệu quả cao hơn cho việc định hướng nghiên cứu và phát triển tư duy cho học sinh.

Luận văn được chia làm hai chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Chương này nhắc lại và xây dựng các kiến thức cơ bản mà nó được ứng dụng rộng rãi ở chương sau.

Phần đầu tiên của kiến thức chuẩn bị nhắc lại các định nghĩa về dãy số, hàm lưới, sai phân và các tính chất của sai phân.

Phần thứ hai của chương trình bày các kiến thức về định nghĩa, phân dạng và các phương pháp giải dẫn đến các công thức nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính.

Phần thứ ba của chương giới thiệu một số dạng phương trình sai phân tuyến tính đơn giản, thường gặp trong các bài toán phổ thông. Đó là các phương trình sai phân tuyến tính cấp một, hai, ba và các phương pháp giải dẫn đến các công thức nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính.

Phần thứ tư của chương trình bày về phương trình sai phân phi tuyến tính và vấn đề tuyến tính hóa. Đặc biệt trong phần này đã nêu ra được phương pháp để tuyến tính hóa một số phương trình sai phân dạng phi tuyến tính về dạng tuyến tính giải được. Nhờ thế mà nó làm phong phú thêm ứng dụng của phương trình sai phân.

Phần cuối của chương giới thiệu một số dạng và các ví dụ về phương trình sai phân phi tuyến tính có thể tuyến tính hóa được.

Chương 2: Một số ứng dụng của phương trình sai phân

Chương này nêu các ứng dụng của phương trình sai phân trong giải toán phổ thông. Đặc biệt đã giới thiệu được một số bài toán trong các kì thi học sinh giỏi có sử dụng phương trình sai phân tuyến tính và phi tuyến tính để giải. Vấn đề tuyến tính hóa cũng được thâm nhập sâu hơn và đa dạng hơn ở chương này.

Phần một của chương đã nêu rõ được phương pháp giải tổng quát cho hệ hai phương trình sai phân tuyến tính cấp một, bằng việc biến đổi có sử dụng phương trình sai phân tuyến tính cấp hai. Trong phần này cũng đưa ra một số bài tập có lời giải để học sinh có thể nắm bắt dạng toán và vận dụng được phương pháp giải.

Phần hai của chương tổng quát được sáu dạng toán có lời giải về sự chuyển đổi các đại lượng trung bình giữa đối số và hàm số nhờ việc biến đổi có sử dụng phương trình sai phân tuyến tính cấp hai.

Phần ba của chương nêu việc sử dụng phương trình sai phân để giải một số bài tập về việc tìm giới hạn có liên quan đến dãy số được biết đến dưới dạng: số hạng tổng quát; phương trình sai phân hay hệ phương trình sai phân.

Phần bốn của chương nêu việc sử dụng phương trình sai phân để giải một số bài toán liên quan đến số học.

Phần năm của chương nêu việc sử dụng phương trình sai phân để giải các bài toán về phương trình hàm.

Phần cuối của chương nêu việc sử dụng phương trình sai phân để giải một số bài toán liên quan đến tích phân truy hồi.

Những kiến thức trình bày trong luận văn này ở phổ thông được dùng cho các em học sinh ôn luyện tham gia các kì thi học sinh giỏi. Tất nhiên các kiến thức đó được sắp xếp, trình bày một cách có hệ thống để tiện theo dõi. Người đọc từ đó có thể nhận xét, đánh giá tổng quan để có thể bổ sung, mở rộng kiến thức hơn nữa nhằm phát huy khả năng sáng tạo, sự say mê khám phá hứa hẹn nhiều kiến thức mới thú vị, bổ ích và thiết thực.

Chương 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này nhắc lại và xây dựng các kiến thức cơ bản mà nó được ứng dụng rộng rãi ở chương sau.

Các nội dung được đề cập đến là:

Nhắc lại các định nghĩa và tính chất về dãy số, hàm lưới, sai phân, phương trình sai phân.

Phân dạng và các phương pháp giải dẫn đến các công thức nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính.

Phương pháp tuyến tính hóa giải một số phương trình sai phân dạng phi tuyến tính và một số ví dụ.

1.1. Dãy số, hàm lưới và sai phân

1.1.1 Dãy số

1.1.1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $u: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (hay $u: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$) xác định bởi $u_n = u(n)$.

Mỗi hàm số u xác định trên tập $\mathbb{N}$ (hay tập $\mathbb{N}^*$) được gọi là một dãy số vô hạn, gọi tắt là dãy số. Kí hiệu dãy số là $\{u_n\}$ hay $u(n)$.

Như vậy ta có thể xem dãy số là một hàm của đối số tự nhiên n.

Dãy số $u(n)$ xác định trên tập $\mathbb{N}^*$có dạng khai triển là: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

1.1.1.2. Ví dụ

.) Dãy số tự nhiên xác định bởi $u_n = n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dạng khai triển là $u(n)$: $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$

.) Dãy số nguyên dương xác định bởi $u_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dạng khai triển là $u(n)$: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

.) Dãy số điều hòa xác định bởi $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dạng khai triển là u(n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

1.1.2. Hàm lưới

Định nghĩa

Gọi các đường lưới là các đường thẳng song song với các trục tọa độ bị hạn chế bởi miền $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ trên hệ trục Oxt. Khi ấy:

Các đường thẳng song song với trục Ot có phương trình $x = x_m = mh$.

Trong đó $m = 0, 1, \dots, M$; $Mh = 1$.

Các đường thẳng song song với trục Ox có phương trình $t = t_n = n\tau$.

Trong đó $n = 0, 1, \dots, N$; $N\tau = T$.

Ta gọi: h là bước lưới theo không gian; τ là bước lưới theo thời gian.

Giao điểm của các đường lưới $x = x_m$ và $t = t_n$ được gọi là điểm lưới (m, n).

Tập hợp các điểm lưới (m, n) được gọi là lưới, kí hiệu là ω_h.

Hàm u(x, t) tại điểm lưới (m, n) có giá trị $u(mh, n\tau)$ được kí hiệu là u_m^n.

Tập hợp $\{u_m^n\}$ được gọi là hàm lưới.

1.1.3. Sai phân

1.1.3.1. Định nghĩa

Sai phân hữu hạn cấp một của hàm số x(n) là hiệu $x_{n+1} - x_n$, kí hiệu là Δx_n.

Như vậy: $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

Sai phân hữu hạn cấp k của hàm số x(n) là sai phân của sai phân cấp (k − 1). của hàm số x(n) (với $k \ge 2$), kí hiệu là $\Delta^k x_n$.

Như vậy: $\Delta^k x_n = \Delta\left(\Delta^{k-1} x_n\right) = \Delta^{k-1} x_{n+1} - \Delta^{k-1} x_n$.

1.1.3.2. Các tính chất của sai phân

Tính chất 1.1.3.2.1.

Sai phân các cấp đều có thể biểu diễn qua các giá trị của hàm số.

Công thức: $$\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \, x_{n+k-i}, \left(\text{với } C_k^i = \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\right).$$

Tính chất 1.1.3.2.2.

Sai phân mọi cấp của hàm số là một toán tử tuyến tính.