ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

BÀI TẬP LỚN

LÝ THUYẾT HỆ ĐIỀU KHIỂN TUYẾN TÍNH

Sinh viên: **Lê Hoàng Long**

Lớp: **K63 Tài năng Toán học**

Môn học: **Seminar 1**

Giảng viên: **TS Hà Phi**

Hà Nội - 2021

Câu 1. Với $M = I_n$, ta viết lại hệ

$$\ddot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t), \text{ với mọi } t \geq 0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0,\ x(0) = x_0 \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + \tilde{D}u(t) \tag{2}$$

a) Ta chứng minh $B, C, \tilde{D}, -K \geq 0$ là một điều kiện đủ để hệ là dương trong.

Đặt $z(t) = \dot{x}(t)$ và $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ thì $\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t)$

Do $B, -K \geq 0$ nên $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} \geq 0$ và $\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \geq 0$ suy ra với mọi $u(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$ và mọi $X(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} \geq 0$ ta luôn có $X(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, nói riêng $x(t) \geq 0$ $\forall t \geq 0$

Kéo theo $y(t) = Cx(t) + \tilde{D}u(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$

b) Đầu tiên ta chứng minh là hệ dương trong thì kéo theo $B, C, \tilde{D} \geq 0$.

- Chọn $x(0) = 0, u(t) \equiv e_j$ thì $\tilde{D}[i,j] = y_i(0) \geq 0$, với mọi $1 \leq j \leq p$, mọi $1 \leq i \leq q$, suy ra $\tilde{D} \geq 0$.

- Chọn $x(0) = e_j, u(t) \equiv 0$ thì $C[i,j] = y_i(0) \geq 0$, với mọi $1 \leq j \leq n$ và $1 \leq i \leq q$, suy ra $C \geq 0$.

- Chọn $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $u(t) \equiv e_j$ thì $\ddot{x}_i(0) = B[i,j]$. Nếu tồn tại $B[i,j] < 0$ thì $\ddot{x}_i(0) < 0$ và do đó tồn tại $a < 0$ và $t_0 > 0$ sao cho $\ddot{x}_i(t) \leq a$ với mọi $t \in [0, t_0]$, suy ra $\dot{x}_i(t) \leq at$ với mọi $t \in [0, t_0]$, suy ra $x_i(t_0) \leq at_0^2/2 < 0$, mâu thuẫn do hệ dương. Vậy ra phải có $B[i,j] \geq 0$ với mọi i, j hay $B \geq 0$.

Ta sẽ chứng minh $-K$ là ma trận Metzler.

Chọn $x(0) = e_j$, $\dot{x}(0) = 0$, $u \equiv 0$ thì $\ddot{x}_i(0) + K[i,j] = 0$. Khi đó chứng minh tương tự trên với nhận xét rằng $x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0$ khi $i \neq j$ ta suy ra $-K[i,j] \geq 0$ với $1 \leq i \neq j \leq n$, tức là $-K$ là ma trận Metzler.

Đặt $z(t) = \dot{x}(t)$ và $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ thì $\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t)$

Suy ra $X(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} t\right) X(0) + \int_0^t \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} (t-s)\right) \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(s) ds$

Ta có $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix}^{2m} = \begin{bmatrix} (-K)^m & 0 \\ 0 & (-K)^m \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix}^{2m+1} = \begin{bmatrix} 0 & (-K)^m \\ (-K)^{m+1} & 0 \end{bmatrix}$ với mọi $m \in \mathbb{N}$, suy ra

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} t\right) = \begin{bmatrix} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} & \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^m t^{2m+1} \\ \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^{m+1} t^{2m+1} & \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} \end{bmatrix}$$

Chọn $u(t) \equiv 0$ thì được

$$x(t) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} x(0) + \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^m t^{2m+1} \dot{x}(0)$$

Suy ra để $x(t) \geq 0$ với mọi $x(0) \geq 0$ và $\dot{x}(0) \geq 0$ thì phải có

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} \geq 0 \text{ và } \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^m t^{2m+1} \geq 0 \text{ với mọi } t \geq 0 \text{ (*)}$$

Ta chứng minh (*) cùng với $B, C, \tilde{D} \geq 0$ cũng đồng thời là điều kiện đủ để hệ là dương trong.

Từ (*) suy ra $\begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} t\right) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} X(t) \\ &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} t\right) X(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & 0 \end{bmatrix} (t-s)\right) \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(s)ds \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

với mọi $t \geq 0$ khi $X(0) \geq 0$, $B \geq 0$ và $u(t) \geq 0$, suy ra $y(t) = Cx(t) + \tilde{D}u(t) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$ khi $C, \tilde{D} \geq 0$. Ta có điều cần chứng minh.

c) Phản ví dụ: Chọn ma trận $C = 0$ thì $y = \tilde{D}u(t)$, và do đó hệ là dương ngoài với $\tilde{D} \geq 0$. Hệ này không nhất thiết dương trong: Ví dụ lấy $B = 0$ và $K = diag[-1, 0, \cdots, 0]$, khi đó với $x(0) = e_1$, $\dot{x}(0) = 0$ thì $x_1(t) = \cos(t)$ không là hàm không âm trên $[0, +\infty)$.

Câu 2.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \text{ với mọi } t \geq 0,\ x(0) = x_0 \tag{3}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{4}$$

Ta có nghiệm của (3) là $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$

a) Nhận xét rằng hệ $\dot{x} = Ax$ là ổn định tiệm cận nếu và chỉ nếu $\Re(\lambda) < 0$ với mọi $\lambda \in \sigma(A)$

- Nếu hệ $\dot{x} = Ax$ là ổn định tiệm cận, ta có

$$\det(\lambda I - A) = \prod_{\alpha \in \sigma(A)\cap\mathbb{R}} (\lambda - \alpha) \prod_{\beta \in \sigma(A)\setminus\mathbb{R}} (\lambda^2 - 2\Re(\beta) + |\beta|^2)$$

Kết hợp nhận xét trên suy ra mọi hệ số của $\det(\lambda I - A)$ là dương

- Nếu mọi hệ số của $\det(\lambda I - A)$ là dương, từ nhận xét trên ta suy ra chỉ cần chứng minh mọi nghiệm phức của $\det(\lambda I - A)$ đều có phần thực âm. Ta có bổ đề sau:

Bổ đề: Ma trận vuông M là dương thì có một giá trị riêng thực không âm λ_M sao cho với mọi $\lambda \neq \lambda_M$ là giá trị riêng của M thì $|\lambda| \leq \lambda_M$.

Áp dụng bổ đề, do hệ $\dot{x} = Ax$ là hệ dương nên A là ma trận Metzler, do đó tồn tại $k > 0$ sao cho $A + kI$ là ma trận dương. Xét $M = A + kI$ thì $\sigma(M) = \sigma(A) + k$. Do $\det(\lambda I - A)$ có hệ số dương nên mọi giá trị riêng thực của A đều âm nên $k < \lambda_M$. Xét λ_0 là một giá trị riêng của A thì $\lambda_0 + k$ là một giá trị riêng của M nên $Re(\lambda_0) = Re(\lambda_0 + k) - k \leq |\lambda_0 + k| - k \leq \lambda_M - k < 0$. Ta có điều cần chứng minh.

b) **Bổ đề**: Ma trận vuông dương M với giá trị riêng thực λ_M như trong bổ đề ở trên. Khi đó số thực $\lambda > \lambda_M$ khi và chỉ khi $M_\lambda = \lambda I - M$ có các định thức con góc trái là dương.

Do hệ (3) dương nên A là ma trận Metzler, do đó tồn tại $k > 0$ để $M = A + kI > 0$.

- Nếu (3) là ổn định tiệm cận thì do $\sigma(M) = \sigma(A) + k$ nên $\lambda_M - k \in \sigma(A)$ nên $\sigma_M - k < 0$. Áp dụng bổ đề suy ra $M_k = kI - M = -A$ có các định thức con góc trái là dương.

- Nếu các định thức con góc trái của $-A = M_k$ là dương thì theo bổ đề ta có $k > \lambda_M$. Với $z \in \sigma(A)$ thì $z + k \in \sigma(M)$ nên $\Re(z) = \Re(z+k) - k \leq |z+k| - k \leq \lambda_M - k < 0$ và do đó hệ $\dot{x} = Ax$ à ổn định tiệm cận.

c) Do hệ $\dot{x} = Ax$ ổn định tiệm cận nên các giá trị riêng của ma trận A có phần thực âm. Khi đó tồn tại các số thực dương a, b sao cho $\left\|e^{At}\right\| \leq ae^{-bt}$ với mọi $t \geq 0$.

Đặt $M = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\| < +\infty$ do u bị chặn đều. Ta có $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$ và $y(t) = Cx(t)$, suy ra với mọi $t \geq 0$ thì

$$
\begin{aligned}
\|y(t)\| &\leq \|C\| \left\| e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \right\| \\
&\leq \|C\| \left(\left\|e^{At}\right\| \|x(0)\| + \int_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\| \|B\| \|u(s)\| ds \right) \\
&\leq \|C\| \left(ae^{-bt} \|x(0)\| + \int_0^t ae^{-b(t-s)} \|B\| M ds \right) \\
&\leq \|C\| \left(a\|x(0)\| + \frac{a\|B\| M}{b}(1 - e^{-bt}) \right) \leq \|C\| \left(a\|x(0)\| + \frac{a\|B\| M}{b} \right)
\end{aligned}
$$

Vậy hệ là ổn định BIBO.

Ngược lại không đúng: Lấy $B = 0, C = Id$ thì $y(t) = e^{At}x(0)$. Tính bị chặn của y nói chung không suy ra tính ổn định tiện cận. Ví dụ lấy $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ thì với $x(0) = [x_1, x_2]^T$ ta có

$$
y(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} \cos(t)x_1 - \sin(t)x_2 \\ \sin(t)x_1 + \cos(t)x_2 \end{bmatrix}
$$

Suy ra $\|y(t)\| = (\cos(t)x_1 - \sin(t)x_2)^2 + (\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 = \|x(0)\|$ là bị chặn đều với mọi đầu vào u (và do đó ổn đinh BIBO) nhưng tất nhiên không ổn định tiệm cận.

Câu 3.

a) Ta có phản hồi xung $g(t) = \begin{cases} t, \; 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, \; 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$ và đầu vào $u(t) = \begin{cases} 1, \; 0 \leq t \leq 1 \\ 0, \; 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

Phản hồi trạng thái 0 cho bởi công thức

$$
y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau
$$

- Với $t \leq 0$ thì $y(t) = 0$
- Với $0 \leq t \leq 1$ thì $y(t) = \int_0^t (t - \tau)d\tau = \dfrac{t^2}{2}$

- Với $1 \leq t \leq 2$ thì $y(t) = \int_0^{t-1}(2-t+\tau)d\tau + \int_{t-1}^1(t-\tau)d\tau - \int_1^t(t-\tau)d\tau = \dfrac{-3t^2}{2} + 4t - 2$
- Với $t \geq 2$ thì $y(t) = \int_0^2 g(t-\tau)u(\tau)d\tau = 0$

b) Ta xét trường hợp hệ là nhân quả, thư giãn tại 0 (có thể thay bằng t_0 bất kì).
Khi đó $U(t) = 0$ khi $t \leq 0$ và $Y(t) = \int_0^t G(t,\tau)U(\tau)d\tau = 0$ khi $t \leq 0$ với $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ và $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, nói riêng $\dfrac{d^kY}{dt^k}(0) = \dfrac{d^kU}{dt^k}(0) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$
Khi đó

$$\widehat{y_1^{(k)}(t)}(s) = s^k\widehat{y_1(t)}(s) - \sum_{l=1}^{k} s^{k-l}y_1^{(l-1)}(0) = s^k\widehat{y_1(t)}(s) \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}$$

Suy ra $D_{11}\widehat{(p)y_1}(t)(s) = D_{11}(s)\widehat{y_1(t)}(s)$
Tương tự ta có được biến đổi Laplace cho hệ ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} D_{11}(s)\widehat{y_1(t)}(s) + D_{12}(s)\widehat{y_2(t)}(s) &= N_{11}(s)\widehat{u_1(t)}(s) + N_{12}(s)\widehat{u_2(t)}(s) \\ D_{21}(s)\widehat{y_1(t)}(s) + D_{12}(s)\widehat{y_2(t)}(s) &= N_{21}(s)\widehat{u_1(t)}(s) + N_{22}(s)\widehat{u_2(t)}(s) \end{aligned}$$

Hay

$$\begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & D_{22}(s) \end{bmatrix} \widehat{Y}(s) = \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix} \widehat{U}(s)$$

Do đó ma trận hàm truyền của hệ là

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & D_{22}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix}$$

c) Với $r(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ ta có

- Xét hệ thống phản hồi dương $\begin{cases} v(t) = r(t) + y(t) \\ u(t) = av(t) \\ y(t) = u(t-1) \end{cases}$ thì

$$\begin{aligned} y(t) = av(t-1) = a(r(t-1) + y(t-1)) &= ar(t-1) + ay(t-1) \\ &= \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a^k r(t-k) = \sum_{k=1}^{[t]} a^k \end{aligned}$$

Với $a = 1$ thì $y(t) = [t]$ còn với $a = 0.5$ thì $y(t) = \sum_{k=1}^{[t]} \dfrac{1}{2^k} = 1 - \dfrac{1}{2^{[t]}}$ và ta có các đồ thị như hình.

- Xét hệ thống phản hồi âm $\begin{cases} v(t) = r(t) - y(t) \\ u(t) = av(t) \\ y(t) = u(t-1) \end{cases}$ thì

$$y(t) = av(t-1) = a(r(t-1) - y(t-1)) = ar(t-1) - ay(t-1) = \cdots$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a^k r(t-k) = \sum_{k=1}^{[t]} (-1)^{k-1} a^k$$

Với $a = 1$ thì $y(t) = \sum_{k=1}^{[t]} (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1 \text{ nếu [t] lẻ} \\ 0 \text{ nếu [t] chẵn} \end{cases}$ và $a = 0.5$ thì $y(t) = \sum_{k=1}^{[t]} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{[t]}\right)$ và ta có các đồ thị như hình vẽ.

Câu 4.

a) Giải điều kiện cần và đủ ở bài 1.

i) Với $K > 0$, ta có

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-1)^m(\sqrt{K}t)^{2m} = \cos(\sqrt{K}t)$$

Suy ra với $t = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ thì $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} = \cos(\pi) = -1 < 0$, mâu thuẫn.
Do đó $K \leq 0$, mặt khác với $K \leq 0$ thì $-K \geq 0$ nên suy ra

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m)!}(-K)^m t^{2m} \geq 0 \text{ và } \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)!}(-K)^m t^{2m+1} \geq 0 \text{ với mọi } t \geq 0$$

nên điều kiện cần và đủ khi K là vô hướng là $K \leq 0$

ii) Em không chắc chắn lắm về việc có kết quả đẹp. Ví dụ lấy $-K = [2 \quad 2; 2 \quad -1]$ thì $-K$ không dương, cũng không xác định dương. Tuy nhiên hai chuỗi vô hạn xác định ban đầu vẫn đảm bảo tính dương. Long tính toán rõ ràng, có sai gì ở đây không?

b)

Câu 5. Do M khả nghịch, bằng việc nhân hai vế với M^{-1}, ta chỉ cần xét bài toán khi $M = I_n$. Ta có bài toán

$$\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = Bu(t),\ t \geq 0$$

Trong trường hợp tổng quát, ta sẽ sử dụng kết quả của bài toán trên cho các ma trận $(D, K, B) := (M^{-1}D, M^{-1}K, M^{-1}B)$ Đặt $z(t) = \dot{x}(t)$ và $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$, viết lại bài toán thành

việc đặt thế này sẽ ảnh hưởng đến tính toán trong thực tế, vì đi tìm inv(M) với M rất lớn là vô cùng tốn thời gian và có sai số đôi khi không hề nhỏ

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t)$$
$$x(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} X(t)$$

a) Giải hệ trên ta được

$$X(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix} t\right) X(0) + \int_0^t \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix}(t-s)\right)\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(s)ds$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix} t\right) X(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix}(t-s)\right)\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(s)ds$$

Đặt $A(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix} t\right)$ và $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$ thì $A(-t)A(t) = I_n$ và

cho nay loi

$$x(t) = A(t)X(0) + \int_0^t A(t-s)\tilde{B}u(s)ds$$

Xét $W_c(t) = \int_0^t A(s)\tilde{B}\tilde{B}'A'(s)ds$. Ta chứng minh hệ ban đầu là C-điều khiển được nếu và chỉ nếu $W_c(t)$ không suy biến với mọi $t > 0$.

- Nếu $W_c(t)$ không suy biến thì với mọi $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, mọi $t_1 > 0$ và mọi $x_1 \in \mathbb{R}^n$ xét input

$$u(t) = -\tilde{B}'A(t_1 - t)W_c^{-1}(t_1)[A(t_1)X_0 - x_1]$$

thì

$$\begin{aligned} x(t_1) &= A(t_1)X(0) + \int_0^{t_1} A(t_1 - s)\tilde{B}u(s)ds \\ &= A(t_1)X_0 - \int_0^{t_1} A(t_1-s)\tilde{B}\tilde{B}'A(t_1-s)W_c^{-1}(t_1)[A(t_1)X_0 - x_1]ds \\ &= x_1 \end{aligned}$$

đoạn này Long làm rõ lại

- Nếu hệ ban đầu là C-điều khiển được. Giả sử tồn tại t_1 để $W_c(t_1)$ suy biến thì $W_c(t_1)$ không xác định dương, do đó tồn tại $v \neq 0$ để

$$0 = v'W_c(t_1)v = \int_0^{t_1} \left\| v'A(s)\tilde{B} \right\|^2 ds$$

Do đó $v'A(s)\tilde{B} \equiv 0$ với $s \in [0, t_1]$. Do hệ là C-điều khiển được nên tồn tại input u chuyển $X(0) = A(-t_1)v$ thành $x(t_1) = 0$, suy ra

$$0 = v + \int_0^{t_1} A(t_1 - s)\tilde{B}u(s)ds = v + \int_0^{t_1} A(s)\tilde{B}u(t_1 - s)ds$$

Suy ra

$$0 = v'v + \int_0^{t_1} v'A(s)\tilde{B}u(t_1 - s)ds = \|v\|^2$$

Do $v \neq 0$ nên mâu thuẫn, từ đó có đpcm.

b) Việc điều khiển từ một cặp $(x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ đến một cặp $(x_1, \dot{x}_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tương đương với việc điều khiển từ $X_0 = X(0) \in \mathbb{R}^{2n}$ đến $X_1 \in \mathbb{R}^{2n}$. Do đó hệ là C_2- điều khiển được tương bởi việc cặp ma trận $\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}\right)$ là điều khiển được.

c) Xét đầu ra $y(t) = Cx(t)$. Khi đó ta viết lại hệ

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = C.\begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} X(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} X(t)$$

Tính C-quan sát được của hệ ban đầu tương đương với tính quan sát được của hệ mới này, do đó hệ là C-quan sát được nếu cặp ma trận $\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K & -D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\right)$ là quan sát được.

d) Nhận xét rằng hệ đối ngẫu

$$M'\ddot{x}(t) + D'\dot{x}(t) + K'x(t) = C'u(t),\ t \geq 0$$

có thể viết lại thành

$$\ddot{x}(t) + (DM^{-1})'\dot{x}(t) + (KM^{-1})'x(t) = (CM^{-1})'u(t)$$

Hệ trên là C_2-điều khiển được nếu và chỉ nếu cặp $\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -(KM^{-1})' & -(DM^{-1})' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ (CM^{-1})' \end{bmatrix}\right)$ là điều khiển được, tương đương với việc cặp $\left(\begin{bmatrix} 0 & -KM^{-1} \\ I_n & -DM^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & CM^{-1} \end{bmatrix}\right)$ là quan sát được. Do tính quan sát được không thay đổi bởi các phép biến đổi tương đương nên cặp $\left(\begin{bmatrix} 0 & -M^{-1}K \\ I_n & -M^{-1}D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}C \end{bmatrix}\right)$ là quan sát được. Hệ ban đầu là C-quan sát được khi cặp $\left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M^{-1}C & 0 \end{bmatrix}\right)$ là quan sát được. Việc chứng minh hai cặp trên là tương đương có thể sẽ đòi hỏi thêm điều kiện của ma trận?

Như vậy vẫn sẽ bị vướng ở chuyện thiết lập tính tương đương. Tại sao không sử dụng đk Hautus?