

- Câu 1** a) Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $x = e^{-x}$?
b) Chứng minh hàm số $g(x) = e^{-x}$ là 1 tự ánh trên đoạn $[0.1, 1]$.
c) Phép lặp đơn $x_{n+1} = e^{-x_n}$ có hội tụ với giá trị x_0 phù hợp hay không?
d) Câu hỏi tương tự với phép lặp $x_{n+1} = 1 + \arctan(x_n)$.

Câu 2 Chứng minh rằng với các hằng số c, d thỏa mãn $|d| < 1$, phương trình $x = c + d \cos(x)$ có nghiệm duy nhất. Kiểm tra tính hội tụ của phép lặp $x_{n+1} = c + d \cos(x_n)$ và hãy đưa ra đánh giá cho tốc độ hội tụ.

Câu 3 Các phép lặp sau có hội tụ đến x^* hay không? Nếu hội tụ, hãy xác định tốc độ hội tụ, cho x_0 đủ gần x^* .

a) $x_{n+1} = \frac{15x_n^2 - 24x_n + 13}{4x_n}, x^* = 1,$

b) $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n^3}, x^* = \sqrt{2}.$

Tìm số bước lặp cần thiết để nhận được xấp xỉ với sai số tuyệt đối không quá $1e-6$, với $x_0 = x^* + 0.1$.

Câu 4 Giả sử bài toán tìm nghiệm $f(x) = 0$ có nghiệm x^* thỏa mãn $f'(x^*) \neq 0$. Ta có thể chuyển nó về bài toán tìm điểm bất động x của hàm số $g(x) = x + cf(x)$ với hằng số c . Phải chọn c thế nào để đảm bảo sự hội tụ nhanh của phép lặp đơn $x_{n+1} = g(x_n)$, giả sử rằng x_0 đủ gần x^* ? Kiểm nghiệm kết quả tìm được cho bài toán $x^3 - 5 = 0$.

Câu 5 Phép lặp đơn $x_{n+1} = 2 - (1 + c)x_n + cx_n^3$ sẽ hội tụ đến $x^* = 1$ với một số giá trị của c , giả sử x_0 đủ gần x^* .

a) Tìm tất cả mọi c để phép lặp đơn này hội tụ. Tìm mọi c để phép lặp đơn này hội tụ bậc hai.

b) Với một c như vậy, hãy tính số bước lặp cần thiết để đạt được 10 chữ số chắc, cho điều kiện ban đầu $x_0 = x^* + 0.1$.

Câu 6 Phương trình $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ có nghiệm duy nhất trong đoạn $[1, 2]$. Có rất nhiều các khác nhau để chuyển về bài toán tìm điểm bất động. Hãy xét sự hội tụ của các phép lặp đơn sau, với điều kiện đầu $x_0 = 1.5$. Tìm bậc hội tụ của các phương pháp đó (nếu có) và tính sai số với $n = 1, \dots, 10$, từ đó so sánh với phương pháp phân đôi.

a) $x = g_1(x) = x + x^3 + 4x^2 - 10$ b) $x = g_2(x) = \sqrt{10/x - 4x}$

c) $x = g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ d) $x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x + 4}}$

e) $x = g_3(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

Câu 7 Cho tham số thực $a > 0$. Tìm bậc hội tụ của phương pháp lặp sau $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$ trong trường hợp nó hội tụ đến điểm bất động $x^* = \sqrt{a}$.

Câu 8 Cho các phương trình sau

a) $3(2x - 1) = \cos(x)$

b) $x^4 - 2x - 3 = 0$

Hãy xây dựng cho mỗi phương trình một phương pháp lặp đơn hội tụ, biết rằng phương trình a) (t.ú. b)) có nghiệm duy nhất trong $(0, 1)$ (t.ú. $(0, 2)$). Viết các công thức đánh giá sai số tiên nghiệm, hậu nghiệm sao cho sai số nhỏ hơn $1e - 6$.

—————Hết—————