Bài tập buổi 4.

Bài 1: $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

$f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-2)(x-1)(x-3)^3 + 3(x-3)^2(x-1)(x-2)^2.$

$\Rightarrow f'(1) = -8$

$f'(2) = 0$

$f'(3) = 0.$

Bài 2 $\quad f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

$f'(x) = 1 + \left[(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right]'.$

Ta có: $\left[(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right]' = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \dfrac{(x-1)}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \dfrac{(x-1)}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$

$\Rightarrow f'(1) = 1 + \arcsin\sqrt{\dfrac{1}{2}} = 1 + \dfrac{\pi}{4}.$

Bài 3:

① $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$\Rightarrow y' = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

② $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Ta có: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \dfrac{\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

$\Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

③ $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Ta có: $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{x^3}}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}.$

④

$$y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n} = (1-x)^{\frac{m}{m+n}} \cdot (1+x)^{\frac{n}{m+n}}$$

Lấy ln 2 vế:

$$\ln y = \ln\left[(1-x)^{\frac{m}{m+n}} \cdot (1+x)^{\frac{n}{m+n}}\right]$$

$$= \ln\left[(1-x)^{\frac{m}{m+n}}\right] + \ln\left[(1+x)^{\frac{n}{m+n}}\right].$$

$$= \frac{m}{m+n}\ln(1-x) + \frac{n}{m+n}\ln(1+x).$$

Đạo hàm 2 vế

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{m}{(m+n)(1-x)} - \frac{n}{(m+n)(1+x)} = \frac{m+mx-n+nx}{(m+n)(1-x^2)}.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{m+mx-n+nx}{(m+n)(1-x^2)} \cdot \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}.$$

⑤

$$y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} = \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Lấy ln 2 vế

$$\Rightarrow \ln y = \ln\left[\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{3}\ln\frac{1+x^3}{1-x^3} = \frac{1}{3}\left[\ln(1+x^3) - \ln(1-x^3)\right]$$

Đạo hàm 2 vế

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{1+x^3} + \frac{3x^2}{1-x^3}\right) = \frac{2x^2}{1-x^6}.$$

$$\Rightarrow y' = y\cdot\frac{2x^2}{1-x^6} = \frac{2x^2}{1-x^6}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

⑥ $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

Ta có: $\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = 1 + \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{1+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

Scanned with CamScanner

(7)

$$\cancel{y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}} = \cancel{\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{\sin x^2}}.$$

$$y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} = \frac{\sin x . \sin x}{\sin x^2}.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2\sin x \cos x . \sin x^2 - \sin x . \sin x . 2x . \cos x^2}{\sin^2 x^2}.$$

$$= \frac{2\sin x\,(\cos x . \sin x^2 - x . \sin x . \cos x^2)}{\sin^2 x^2}.$$

(8)

$$y = \frac{1}{\cos^n x} = (\cos x)^{-n} \Rightarrow y' = -n . -\sin x . (\cos x)^{-n-1}$$

$$= n \sin x . (\cos x)^{-n-1}$$

(9)

$$y = \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}.$$

$$y' = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right).$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} . \cos^2 \frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} . \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} . \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

(10)

$$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

Ta có: $\ln y = \frac{1}{x} \ln x$. Đạo hàm 2 vế:

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1-\ln x}{x^2} . y = \frac{1-\ln x}{x^2} . x^{\frac{1}{x}}.$$

(11)

$$y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Ta có: $\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\cancel{x\sqrt{1+x^2} + 1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Scanned with CamScanner

⑫ $y = e^x . \ln \sin x$.

$\Rightarrow y' = e^x . \ln \sin x + e^x . \dfrac{\cos x}{\sin x} = e^x\left(\ln \sin x + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= e^x(\ln \sin x + \cot x)$. với $\sin x > 0$.

⑬ $y = \log_3(x^2 - \sin x)$.

$y' = \dfrac{2x - \cos x}{\ln 3 . (x^2 - \sin x)}$ với $x^2 - \sin x > 0$.

⑭ $y = e^{\arctan x} \Rightarrow y' = e^{\arctan x} . \dfrac{1}{1 + x^2}$.

⑮ $y = e^{x^x} \Rightarrow y' = e^{x^x} . (x^x)'$.

Đặt $u = x^x \Rightarrow \ln u = x \ln x$

$(\ln u)' = (x \ln x)' \Rightarrow \dfrac{u'}{u} = \ln x + x . \dfrac{1}{x} = \ln x + 1 . \Rightarrow u' = (\ln x + 1) u$

$= (\ln x + 1) x^x$.

$\Rightarrow (x^x)' = x^x . (\ln x + 1)$.

$\Rightarrow y' = e^{x^x} . x^x (\ln x + 1)$.

Bài 4: $A(3; 2)$.

$y = x^3 - 3x^2 - x + 5 \Rightarrow$ Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x - 1$.

Phương trình tiếp tuyến ~~có dạng~~: tại A có dạng:

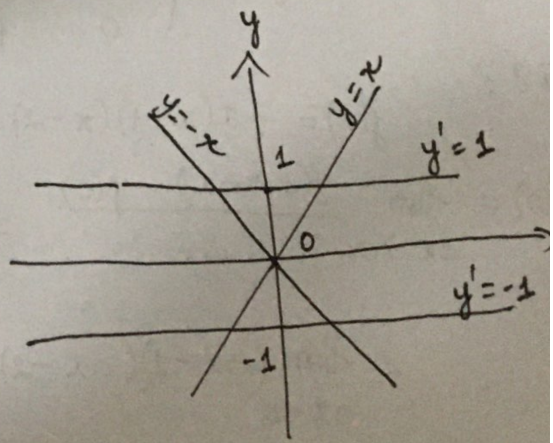
$f(x) = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ trong đó $A(x_0, y_0)$.

Ta có: $y'(3) = 3.3^2 - 6.3 - 1 = 8$.

$\Rightarrow$ pt tiếp tuyến tại A: $f(x) = 8(x - 3) + 2 = 8x - 22$.

Bài 6:

① $y = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$



* $x \geq 0 \Rightarrow y = x \Rightarrow y' = \cancel{x}\ 1$.

* $x < 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow y' = -1$

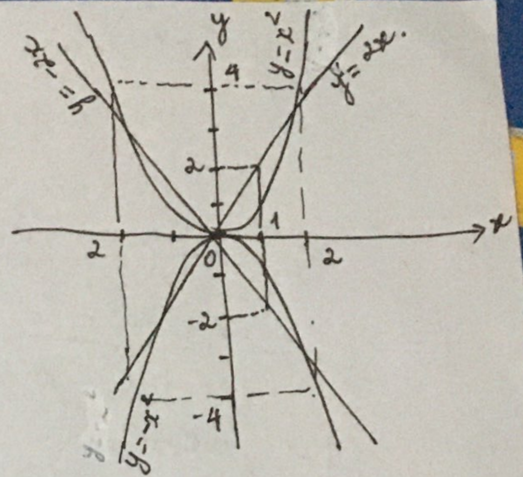
Tại $x = 0$

$f'_+(0) = 1$

$f'_-(0) = -1$

$\Rightarrow$ Tại $x = 0$ k° có đạo hàm (h/số k° khả vi tại $x = 0$).

② $y = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

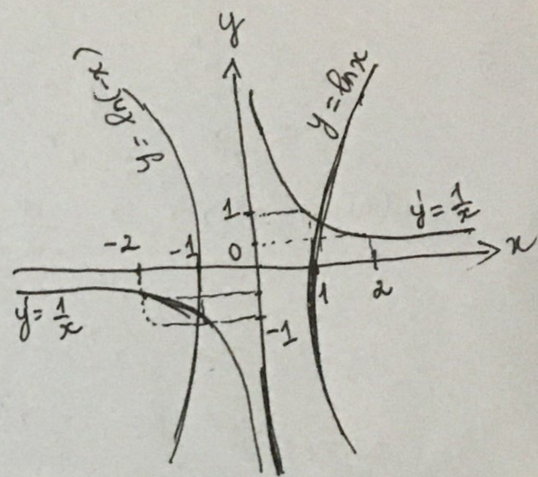


* $x \geq 0 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

* $x < 0 \Rightarrow y = -x^2 \Rightarrow y' = -2x.$

Tại $x = 0$: $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = 0$ $\Rightarrow$ Tại $x=0$ có đạo hàm

③ $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{nếu } x \geq 0 \\ \ln(-x) & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$



* $x \geq 0 \Rightarrow y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$. $(x \neq 0)$.

* $x < 0 \Rightarrow y = \ln(-x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$.

Bài 7:

① $y = \begin{cases} 1-x & \text{khi } -\infty < x < 1 \\ (1-x)(2-x) & \text{khi } 1 \leq x \leq 2. \\ -(2-x) & \text{khi } 2 < x < +\infty. \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -1 & \text{khi } -\infty < x < 1 \\ 2x-3 & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2. \\ 1 & \text{nếu } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

② $y = \begin{cases} x^2.e^{-x^2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e} & \text{khi } |x| > 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x.e^{-x^2} + x^2.e^{-x^2}.-2x & \text{khi } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x.e^{-x^2}(1-x^2) & \text{khi } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{khi } |x| > 1. \end{cases}$

Bài 9 :

$f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-100)$. $\Rightarrow f(0) = 0$.

$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x - 1)(\Delta x - 2)\dots(\Delta x - 100)$

$= (0-1)(0-2)\dots(0-100) = (-1).(-2)\dots(-100) = 100!$

Bài 10

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

① Để h/số liên tục tại $x=0$

thì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}$ thừa $= f(0) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} x^n . \sin \frac{1}{x} = 0$ hay $\lim\limits_{x \to 0} x^n . \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \neq 0.$

~~Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ không tồn tại~~

~~Nên để $\lim\limits_{x \to 0} x^n . \sin \frac{1}{x} = 0$ thì $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0.$~~

Ta có: $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

$\Rightarrow -x^n \leq x^n . \sin \frac{1}{x} \leq x^n.$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} -x^n \leq \lim\limits_{x \to 0} x^n . \sin \frac{1}{x} \leq \lim\limits_{x \to 0} x^n$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} -x^n = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} x^n . \sin \frac{1}{x} = 0.$ với $n > 0.$

Vậy h/số luôn liên tục tại $x=0$ khi $n>0.$

② Để h/số khả vi tại $x=0$

thì $f'_+(0) = f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^n . \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x^{n-1} . \sin \frac{1}{\Delta x}$ $\boxed{=0.}$ thừa

Ta có: $-1 \leq \sin \frac{1}{\Delta x} \leq 1$

$\Rightarrow -\Delta x^{n-1} \leq \Delta x^{n-1} . \sin \frac{1}{\Delta x} \leq \Delta x^{n-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} (-\Delta x^{n-1}) \leq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x^{n-1} . \sin \frac{1}{\Delta x} \leq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x^{n-1}$

$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0} -\Delta x^{n-1} = 0 & \text{với } n-1>0 \text{ hay } n>1 \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x^{n-1} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x^{n-1} . \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$ với $n>1$

Vậy h/số luôn khả vi tại $x=0$ khi $n>1.$

③ Hàm số có đạo hàm liên tục tại $x=0$

Tại $x \neq 0$. $f(x) = x^n . \sin\frac{1}{x}$.

$\Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}.\sin\frac{1}{x} - \frac{x^n}{x^2}.\cos\frac{1}{x}. = x^{n-2}\left(nx.\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow f'(0) = 0.$

Để h/số có đạo hàm liên tục tại $x=0$

thì $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left[x^{n-2}\left(nx.\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} x^{n-2} = 0$ với $n-2>0$ hay $n>2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left[x^{n-2}\left(nx.\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)\right] = 0$

Vậy h/số có đạo hàm liên tục tại $x=0$ với $n>2$

Bài 12:

① $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3| = \begin{cases} (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & \text{nếu } (x-1)(x-3) \geq 0. \\ -[(x-1)(x-2)^2(x-3)^3] & \text{nếu } (x-1)(x-3) < 0. \end{cases}$

Ta có: $(x-1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$

$(x-1)(x-3) < 0 \Rightarrow 1 < x < 3.$

Lấy đạo hàm thế này là rất đẹp

$\Rightarrow y' = \begin{cases} (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-2)(x-1)(x-3)^3 + 3(x-3)^2(x-1)(x-2)^2 & \text{khi } \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1. \end{array}\right. \\ -(x-2)^2(x-3)^3 - 2(x-2)(x-1)(x-3)^3 - 3(x-3)^2(x-1)(x-2)^2 & \text{khi } 1 < x < 3. \end{cases}$

Tại $x=1$

$\Rightarrow y'_+(1) = 8$; $y'_-(1) = -8$ $\Rightarrow$ H/số không khả vi tại $x=1$.

Tại $x=3$

$\Rightarrow y'_+(3) = 0$; $y'_-(3) = 0$ $\Rightarrow$ H/số khả vi tại $x=3$.

② $y = |\cos x|. = \begin{cases} \cos x & \text{nếu } \cos x \geq 0 \\ -\cos x & \text{nếu } \cos x < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow y' = \begin{cases} -\sin x & \text{nếu } \cos x \geq 0 \\ \sin x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Vì các hàm sin và cos tuần hoàn chu kỳ 2 pi nên ta chỉ cần xét đoạn [0,2 pi]

Tại ~~x = 0~~ $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$. và x = 3*pi/2

$y'_+(0) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$; $y'_-(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ làm thế này chưa được

$\Rightarrow$ H/số không khả vi tại $\cos x = 0$ hay $x = \frac{\pi}{2}$.

Bài 13

1. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Tại $x = 0$

$f'_+(0) = 1$; $f'_-(0) = -1$