Các hệ thống điều khiển (control systems) có ở khắp mọi nơi.
Có vai trò vô cùng quan trọng trong kỹ thuật cũng như toán học.

Khóa học này: Tìm hiểu về những hệ thống điều khiển & thiết kế để hệ thống đạt được hiệu suất/hiệu quả/hành vi mong muốn.

$u(t)$ ($u[k]$) là tín hiệu đầu vào liên tục (hay rời rạc)

$y(t)$ ($y[k]$) là " đầu ra " "

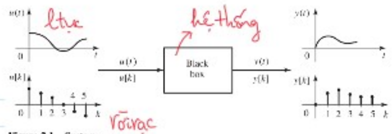


Figure 2.1 System.

Khóa học này: Ta xét hệ đ/khiển được mô tả = 1 hệ phương trình vi phân

Mô hình hệ thống: $t \in [t_0, t_f)$ với $t_0 < t_f \leq +\infty$.

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & (1) \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) & (2) \end{cases}}$$

Rudolf E. Kalman receiving National Medal of Science from President Barack Obama. Credit: Remembering Rudolf E. Kalman. Herbert Wertheim College of Engineering, University of Florida.

+ ĐK ban đầu $x(t_0) = x_0$.
+ (1) thường được gọi là phương trình trạng thái (state equation), $x(t)$: biến trạng thái (state variable)
+ (2) gọi là "pt đầu ra" (output equation); $u(t)$: input/đầu vào; $y(t)$: output/đầu ra response/phản hồi.

Nếu $u(t) \equiv 0 \Rightarrow$ hệ thống được gọi là "tự do" (free)

+ Số chiều: $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$.
+ Có 2 trường hợp đặc biệt:

a) Hệ tuyến tính (phụ thuộc thời gian) LTV

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \end{cases}$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p,n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{p,m}$.

b) Hệ tuyến tính hệ số hằng (LTI)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases}$$

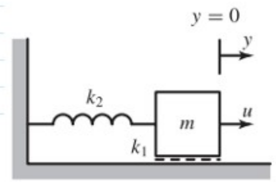
+ Hệ thời gian rời rạc: (tương tự), v.d.

$$\text{LTV} \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad \forall k = k_0, \dots, k_f. \\ y_{k+1} = C_k x_k + D_k u_k. \end{cases}$$

LTV $\begin{cases} \ldots \\ y_{k+1} = C_k x_k + D_k u_k . \end{cases}$

Chú ý: Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $t_0 = 0$, (hay $k_0 = 0$), bằng cách đổi biến thời gian
$$s = t - t_0 \Rightarrow \dot{x}(s) = \dot{x}(t).$$

VD1: Hệ điều khiển tuyến tính, hệ số hằng trong cơ học (Hình 1).



Hình 1: hệ cơ học

Lò xo: độ cứng k_2. Hệ số ma sát trượt k_1.

Vật có thể trượt theo phương ngang, có khối lượng m, tuân theo Định luật 2 Newton
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

F: ngoại lực bao gồm lực kéo u, lực ma sát trượt $k_1 \cdot \dot{y}(t)$,
lực ma sát tĩnh $\simeq 0$, lực kéo lò xo (Hooke) $k_2 y(t)$.

Ta có pt $\quad u(t) - k_1 \dot{y}(t) - k_2 y(t) = m\ddot{y}(t) \qquad (3)$

Đổi biến $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$ và thay vào (3) ta có
$$\begin{cases} m\dot{x}_2(t) = u(t) - k_1 x_2(t) - k_2 x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \end{cases}$$

Do đó, ta có hpt:
$$\boxed{\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m} & -\frac{k_1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{cases}}$$

Các ví dụ khác các em có thể tham khảo thêm trang 20-30 (Chen).

§2. Các Khái Niệm Cơ Bản.

$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{cases}$ & 2 THĐB: LTV & LTI.

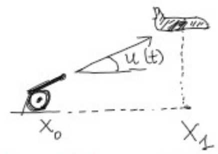
Câu hỏi cơ bản trong LT điều khiển là

Q1: a) Cho trạng thái đk ban đầu $x_0 = x(t_0)$ & 1 điểm mục tiêu x_1 thì ? $\exists$ 1 hàm điều khiển $u(t)$ s.c.
$x(t_1) = x_1$ với t_1 nào đó $> t_0$ và $< t_f$ (Bài toán bắn máy bay)

Q1: a) Cho trước đk ban đầu $x_0 = x(t_0)$ & 1 điểm mục tiêu x_1 thì ? ∃ 1 hàm điều khiển $u(t)$ s.c.

$$x(t_1) = x_1 \quad \text{với } t_1 \text{ nào đó} > t_0 \text{ và} < t_f$$ (Bài toán bắn máy bay).

Bài toán về tính điều khiển được (controlability).



b) Nếu ta biết 2 tọa độ của máy bay (t_0,x_0), (t_1,x_1) (với $t_1 > t_0$)
thì liệu có tìm được duy nhất $u|_{[t_0,t_1]}$ để t/mãn $x(t_1) = x_1$?

Bài toán về tính quan sát được (observability) → quan sát 2 vị trí của máy bay mà biết toàn bộ quỹ đạo của máy bay.

Q2) Bài toán điều khiển tối ưu (Optimal control)

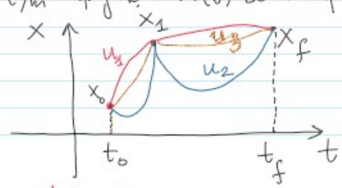
Cho trước x_1 hoặc 1 quỹ đạo mong muốn (reference trajectory) $x_{ref}(t)$, ta cần tìm $u(t)$ s.c hàm mục tiêu (objective function) đạt giá trị tối ưu.

Các hàm mục tiêu phổ biến thường là ① $J(u) = \{ t_1 \in [t_0, t_f) \text{ sao cho } x(t_1, u) = x_1 \} \to \min$ ⇒ tối ưu thời gian

② $J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \| x(t) - x_{ref}(t) \| \, dt \to \min$ Tối ưu hóa độ lệch quỹ đạo.

③ $J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \| u(t) \| \, dt \to \min$, với $u(t)$ t/mãn quỹ đạo $x(t)$ sẽ đi qua điểm x_1.

→ tối ưu hóa năng lượng.



Đôi khi thay vì dùng $x_{ref}(t)$ người ta dùng $y_{ref}(t)$
(bài toán điều khiển quỹ đạo / tracking control problem).

Điều khiển phản hồi: Đầu vào $u(t)$ có dạng đặc biệt (phản hồi / feedback). Thiết kế điều khiển

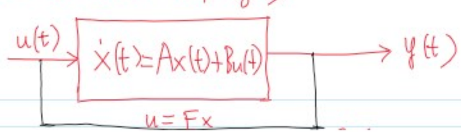
① $u(t) = U(t, x(t))$ → phản hồi trạng thái (state feedback).

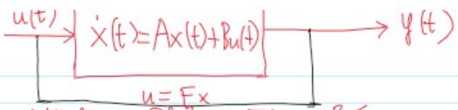
② $u(t) = U(t, y(t))$ → " đầu ra (output feedback).

Cá biệt TH hệ tuyến tính ⇒ State feedback phổ biến là $u(t) = F(t)x(t)$ (hay $= Fx$)
Output " " $u(t) = F(t)y(t)$ (hay $= Fy$).

Ví dụ như hệ LTI
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[u(t) = Fx(t)]{\text{State feedback}} \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \\ y(t) = (C + DF)x(t) \end{cases}$$

Hệ mở (open loop sys.) Hệ đóng kín (closed loop sys.)





Hình 2. Phản hồi trạng thái

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[u = Fy]{\text{output feedback}} \begin{cases} \dot{x} = Ax + BFy \\ y = Cx + DFy \end{cases}$$

THĐB: $D = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A + BFC)x \\ y = Cx \end{cases}$

Tính chất của hệ tuyến tính: $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u, \\ y = C(t)x + D(t)u. \end{cases}$

Phản hồi đầu vào 0, k/h y_{zi}, là phản hồi khi đầu vào $u = 0$, tức là hệ có dạng $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ y = C(t)x + D(t)u. \end{cases}$ $x(t_0) = x_0$,

Phản hồi trạng thái 0, k/h y_{zs}, là phản hồi thu được khi $x(t_0) = 0$, tức là hệ có dạng $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(t_0) = 0. \\ y = C(t)x + D(t)u. \end{cases}$

T/c đặc trưng của hệ tuyến tính: Phản hồi của hệ tổng quát $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$.

Đ/n: (t/c ổn định/stability) Xét 1 ptvp có dạng $\dot{x}(t) = f(x(t))$ trên $[t_0, +\infty)$ với đk b/đầu $x(t_0) = x_0$.

Giả sử $\bar{x}$ là 1 điểm cân bằng (equilibrium), tức là $f(\bar{x}) = 0$. Khi đó $\bar{x}$ được gọi là

i) ổn định nếu $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ s.c. $\forall$ đk b/đầu x_0 t/m $\|x_0 - \bar{x}\| \le \delta$ thì

$$\|x(t) - \bar{x}\| \le \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty).$$

ii) ổ/đ tiệm cận nếu $\bar{x}$ là điểm cân bằng ổ/định & $\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$.

Hệ được gọi là ổ/đ mũ nếu $x(t)$ t/m ước lượng phân rã mũ

$$\|x(t)\| \le \delta e^{-\alpha t} \|x(t_0)\| \quad \forall t \ge t_0, \quad \delta > 0, \alpha > 0.$$

α: tốc độ mũ (exponential decay rate).

Đlý 1: Xét phương trình $\dot{x}(t) = Ax(t)$, với $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, ta có:

i) ổ/đ tiệm cận $\equiv$ ổ/đ mũ, với tốc độ phân rã là $-\rho(A)$, với

$$\rho(A) = \max\{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ là giá trị riêng của } A\}$$ → hoành độ phổ (spectral abcissa).

ii) Hệ ổ/đ mũ $\Leftrightarrow \rho(A) < 0$.

Đ/lý 2: Xét hệ tuyến tính $\dot{x}(t) = Ax(t)$ & hệ phi tuyến $\dot{x}(t) = Ax(t) + g(x)$,

trong đó $g(0) = 0$ và g t/m đk $\lim \|g(x)\| = 0$.

Đ/lý 2: Xét hệ tuyến tính $\dot{x}(t) = Ax(t)$ & hệ phi tuyến $\dot{x}(t) = Ax(t) + g(x)$, trong đó $g(0) = 0$ và g t/mãn đk $\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$.

Khi đó tính chất ổn định mũ của hệ tuyến tính sẽ dẫn đến t/c ổ/đ mũ của hệ phi tuyến.

Bài toán ổ/đ hóa & gán phổ của hệ điều khiển: v.d. hệ $\dot{x} = Ax$ ko ổ/đ mũ, hỏi với đk nào của B thì hệ đkhiển $\dot{x} = (A+BF)x$ (state feedback $u = Fx$) hay $\dot{x} = (A+BFC)x$ (output feedback $u = Fy$, $D = 0$) là ổ/định?

Gán phổ: Cho trước n điểm $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$. Hỏi ? $\exists$ $u = Fx$ s.c. $A + BF$ có chính xác n giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hay ko?

$\longleftrightarrow$ tính điều khiển được (bài toán bắn máy bay) của hệ $\dot{x} = Ax + Bu$.