Primo punto

Introduzione teorica

Si vuole studiare il problema agli autovalori,dove si è posto $\hbar = 1$ e $m = 1$:

$$H\psi = E\psi$$

Siano $k^2 = 2E$ e $q^2 = 2(E - V0)$. La soluzione analitica più generale è data da:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{in ZonaI} \\ \phi(x) & \text{in ZonaII} \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & \text{in ZonaIII} \end{cases}$$

Non siamo per il momento interessati alla ZonaII, quindi indichiamo con $\phi(x)$ la $\psi_k(x)$ in tale zona, che a rigore sarebbe

$$\phi(x) = Ee^{iqx} + Fe^{-iqx}$$

Le costanti A, B, C, D sono determinate dalle condizioni di raccordo di continuità della funzione d'onda e della sua derivata nei punti $x = \pm b$.
Si osserverà che dalla diagonalizzazione della versione discreta della Hamiltoniana (vedi sezione apposita) risultano autofunzioni a parità definita (pari o dispari). Allora, senza perdita di generalità, si pone la ulteriore condizione di simmetria alle ψ_k, che porta:

$$\begin{cases} A = D, \quad B = C = (\tau + \rho)A & \text{per funzioni pari} \\ A = -D, \quad B = -C = -(\tau + \rho)A & \text{per funzioni dispari} \end{cases}$$

Per la conservazione del flusso di probabilità, si possono riscrivere nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & \rho \\ \rho & \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = \quad (S) \cdot \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

Ove la matrice S è una matrice unitaria, ossia che verifica le condizioni:

$$\tau\rho^* + \tau^*\rho = 0 \quad , \quad |\tau|^2 + |\rho|^2 = 1$$

(Si è indicato con z^* il numero complesso coniugato di z). Segue immediatamente che:

$$|\tau \pm \rho|^2 = |\tau|^2 + |\rho|^2 + \tau\rho^* + \tau^*\rho = |\tau|^2 + |\rho|^2 + 0 = 1$$

Cioè $\tau \pm \rho$ differiscono per una fase:

$$|\tau \pm \rho|^2 = 1 \Rightarrow (\tau \pm \rho) = e^{2i\theta^\pm}$$

Si osservi che poichè A, B, C, D dipendono dagli autostati ψ_k, anche le fasi $\theta^{\pm}$ dipenderanno dall'autovalore k.
Si vuole quindi cercare una stima numerica di $\theta\pm$ per determinare τ da:

$$(\tau \pm \rho) = e^{2i\theta^{\pm}} \Rightarrow \tau = 1/2(e^{2i\theta^{+}} + e^{-2i\theta^{-}})$$

$$\Rightarrow \tau^2 = \sin^2(\theta^{+} - \theta^{-})$$

(due conti per dimostrarlo plis)
Il coefficiente di trasmissione sarà qundi dato da:

$$T = \tau^2$$