

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA EMILIANO ZAPATA  
DEL ESTADO DE MORELOS

División Académica de Tecnologías de la Información y Diseño  
Ingeniería en Desarrollo y Gestión de Software

---

**Integradora de Matemáticas  
para la Ingeniería I**

---

- Aquino Flores Andrea
- Hernández Sánchez Katia Alexandra
- Higareda Vázquez María del Pilar
- Joaquín Landa Martín Antonio
- León Flores Axel Daniel
- Miranda Roldán Jose Luis

# Índice

<b>1. Unidad I: Funciones de varias variables</b>	<b>2</b>
1.1. Funciones de varias variables . . . . .	2
1.1.1. Funciones escalares de varias variables . . . . .	2
1.1.2. Dominio . . . . .	2
1.1.3. Rango . . . . .	3
1.1.4. Funciones explícitas . . . . .	4
1.1.5. Ejercicios: Dominio y rango de funciones de una variable . . . . .	4
1.1.6. Ejercicios: Variables dependientes e independientes . . . . .	6
1.1.7. Funciones implícitas . . . . .	6
1.2. Planos y superficies . . . . .	7
1.2.1. Curvas de nivel: Planos, superficies cuadráticas (elipsoides, cono, paraboloides, hiperboloides) – Graficación . . . . .	7
1.2.2. Ejercicios: Curvas de nivel . . . . .	18
<b>2. Límites y Continuidad en Funciones de Tres Variables</b>	<b>18</b>
<b>3. Continuidad de Funciones de Tres Variables</b>	<b>20</b>
<b>4. Unidad II: Derivadas Parciales</b>	<b>24</b>
4.1. La derivada parcial . . . . .	24
4.1.1. Construcción geométrica de la derivada parcial con software . . . . .	27
4.1.2. Reglas de derivación parcial . . . . .	32
4.1.3. Regla de la cadena para varias variables . . . . .	39
4.1.4. Ejercicios: Derivadas parciales de primer orden . . . . .	45
4.1.5. Ejercicios: Derivadas parciales de segundo orden . . . . .	46
4.2. Vector gradiente y derivada direccional . . . . .	48
4.2.1. Cálculo e interpretación geométrica del gradiente y derivada direccional . . . . .	49
4.2.2. Representar SW vectores gradientes en superficies . . . . .	55
4.3. Extremos de funciones multivariadas . . . . .	55
4.3.1. Valores críticos . . . . .	57
4.3.2. Máximos . . . . .	66
4.3.3. Mínimos . . . . .	75
4.3.4. Método de multiplicadores de Lagrange . . . . .	81
4.3.5. Representación gráfica de extremos de funciones . . . . .	90
<b>5. Unidad III: Integral Múltiple</b>	<b>97</b>
5.1. Integrales dobles . . . . .	97
5.1.1. Regiones rectangulares . . . . .	97
5.1.2. Regiones no rectangulares . . . . .	99
5.1.3. Integrales dobles en coordenadas polares . . . . .	101
5.1.4. Ejercicios: Integrales dobles . . . . .	104
5.2. Integrales triples . . . . .	106
5.2.1. Regiones sólidas rectangulares . . . . .	107
5.2.2. Regiones sólidas generales . . . . .	107
5.2.3. Integrales triples en coordenadas cilíndricas . . . . .	109
5.2.4. Regiones sólidas tipo II y tipo III . . . . .	110

5.2.5. Integrales triples en coordenadas esféricas . . . . .	111
5.3. Cambio de variable en integrales múltiples . . . . .	112
5.4. Aplicaciones de integrales múltiples . . . . .	115
5.4.1. Volumen de sólidos . . . . .	115
5.4.2. Masa y centro de masa . . . . .	116
5.4.3. Momentos de inercia . . . . .	117
5.4.4. Carga eléctrica y otras aplicaciones . . . . .	118
5.4.5. Masa y centro de masa de sólidos . . . . .	119
5.4.6. Aplicaciones a probabilidad . . . . .	120
5.4.7. Momentos de inercia para sólidos . . . . .	121
5.4.8. Aplicaciones adicionales . . . . .	122
5.4.9. Integrales dobles impropias . . . . .	123
5.4.10. Técnicas de integración numérica . . . . .	124
<b>6. Unidad IV: Funciones vectoriales e integral de línea . . . . .</b>	<b>126</b>
6.1. Funciones Vectoriales . . . . .	126
6.1.1. Definición y análisis geométrico . . . . .	126
6.1.2. Propiedades fundamentales . . . . .	126
6.1.3. Teoremas esenciales . . . . .	127
6.1.4. Aplicaciones matemáticas . . . . .	127
6.1.5. Aplicaciones físicas . . . . .	128
6.1.6. Reparametrización por longitud de arco . . . . .	128
6.1.7. Regularidad y suavidad de curvas . . . . .	129
6.1.8. Curvatura y vector normal . . . . .	129
6.1.9. Interpretación geométrica avanzada . . . . .	129
6.1.10. Torsión y comportamiento espacial de curvas . . . . .	130
6.1.11. Marco de Frenet y descripción completa de la curva . . . . .	130
6.1.12. Longitud de arco y análisis integral . . . . .	131
6.1.13. Observaciones avanzadas sobre curvas . . . . .	131
6.2. Ecuaciones Paramétricas . . . . .	132
6.2.1. Introducción general . . . . .	132
6.2.2. Ventajas de la parametrización . . . . .	132
6.2.3. Conversión entre formas paramétricas y cartesianas . . . . .	133
6.2.4. Derivadas paramétricas . . . . .	133
6.2.5. Velocidad y aceleración en ecuaciones paramétricas . . . . .	134
6.2.6. Trayectorias clásicas en forma paramétrica . . . . .	134
6.2.7. Conversión entre sistemas de coordenadas . . . . .	135
6.2.8. Curvas especiales avanzadas . . . . .	135
6.2.9. Simetrías en curvas paramétricas . . . . .	136
6.2.10. Análisis estructural de curvas paramétricas . . . . .	137
6.2.11. Interpretación geométrica avanzada . . . . .	137
6.2.12. Aplicaciones matemáticas avanzadas . . . . .	138
6.2.13. Aplicaciones físicas avanzadas . . . . .	139
6.2.14. Reparametrización en curvas especiales . . . . .	139
6.2.15. Estudio de la rapidez y la orientación . . . . .	140
6.2.16. Observaciones finales sobre ecuaciones paramétricas . . . . .	140
6.3. Cálculo en Funciones Vectoriales . . . . .	141
6.3.1. Velocidad y aceleración . . . . .	141

6.3.2.	Descomposición de la aceleración . . . . .	141
6.3.3.	Derivadas superiores . . . . .	141
6.3.4.	Curvatura en términos de derivadas . . . . .	142
6.3.5.	Torsión en términos de derivadas . . . . .	142
6.3.6.	Longitud de arco . . . . .	142
6.3.7.	Ecuaciones de Frenet–Serret . . . . .	142
6.3.8.	Ánálisis geométrico mediante derivadas . . . . .	143
6.3.9.	Relación entre velocidad, curvatura y torsión . . . . .	143
6.3.10.	Interpretación física avanzada . . . . .	144
6.3.11.	Puntos críticos y regularidad . . . . .	144
6.3.12.	Comportamientos extremos de la curva . . . . .	145
6.3.13.	Aplicaciones matemáticas avanzadas . . . . .	145
6.3.14.	Aplicaciones físicas avanzadas . . . . .	146
6.3.15.	Curvas especiales estudiadas en cálculo diferencial . . . . .	147
6.4.	Integral de Línea . . . . .	148
6.4.1.	Introducción general . . . . .	148
6.4.2.	Integral de campos escalares . . . . .	148
6.4.3.	Integral de campos vectoriales . . . . .	149
6.4.4.	Dependencia del camino . . . . .	149
6.4.5.	Campos conservativos . . . . .	149
6.4.6.	Criterio de conservatividad . . . . .	150
6.4.7.	Trabajo realizado por una fuerza . . . . .	150
6.4.8.	Integrales en curvas cerradas . . . . .	151
6.4.9.	Circulación y flujo tangencial . . . . .	151
6.4.10.	El Teorema de Green (introducción) . . . . .	151
6.4.11.	Interpretación geométrica de Green . . . . .	152
6.4.12.	Conexión con campos conservativos . . . . .	152
6.4.13.	Integrales de línea en el espacio . . . . .	153
6.4.14.	Conexión con gradientes . . . . .	153
6.4.15.	Flujo tangencial y orientación . . . . .	153
6.4.16.	Aplicaciones físicas avanzadas . . . . .	154
6.4.17.	Integral de línea y campos no conservativos . . . . .	154
6.4.18.	Criterio espacial de conservatividad . . . . .	155

# 1. Unidad I: Funciones de varias variables

## 1.1. Funciones de varias variables

### Funciones de varias variables: estudio teórico

Esta sección presenta un estudio teórico fundamental sobre las funciones de varias variables, abarcando conceptos esenciales como dominio, rango, y la distinción entre funciones explícitas e implícitas. Estos conceptos son la base para el análisis multivariable y aplicaciones en ciencias e ingeniería.

**Introducción.** Las **funciones de varias variables** son aquellas que dependen de dos o más variables independientes. A diferencia de las funciones de una variable  $y = f(x)$ , estas funciones se expresan como  $z = f(x, y)$  para dos variables, o más generalmente como  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para  $n$  variables.

Las funciones de varias variables permiten modelar fenómenos donde múltiples factores influyen simultáneamente en un resultado. Por ejemplo:

- La temperatura  $T(x, y, z)$  en un punto del espacio tridimensional.
- El volumen  $V(r, h) = \pi r^2 h$  de un cilindro en función de su radio y altura.
- La producción  $P(L, K)$  de una empresa en función del trabajo  $L$  y capital  $K$  (función de producción en economía).

### 1.1.1. Funciones escalares de varias variables

### 1.1.2. Dominio

El **dominio** de una función de varias variables  $f(x, y)$  es el conjunto de todos los pares ordenados  $(x, y)$  para los cuales la función está definida. Formalmente:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \text{ está definida}\}$$

Para funciones de tres o más variables, el dominio se extiende naturalmente a  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{R}^n$ .

### ¿Cuándo se aplica?

- Al identificar restricciones físicas o matemáticas (raíces cuadradas, denominadores, logaritmos).
- Para determinar la región del plano o espacio donde la función tiene sentido.

### Ejemplos ilustrativos:

#### 1. Función polinomial: $f(x, y) = x^2 + y^2$

El dominio es todo  $\mathbb{R}^2$ , ya que no hay restricciones:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

2. **Función con raíz cuadrada:**  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

La expresión dentro de la raíz debe ser no negativa:

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 9$$

El dominio es el disco cerrado de radio 3 centrado en el origen:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

3. **Función con denominador:**  $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$

El denominador no puede ser cero:

$$x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$$

El dominio excluye la recta  $y = x$ :

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

### 1.1.3. Rango

El **rango** (o imagen) de una función  $f(x, y)$  es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la función. Formalmente:

$$\text{Ran}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y) \text{ para algún } (x, y) \in \text{Dom}(f)\}$$

#### ¿Cuándo se aplica?

- Al determinar los valores de salida posibles de una función.
- Para analizar el comportamiento global de la función.

#### Ejemplos ilustrativos:

1. **Paraboloide:**  $f(x, y) = x^2 + y^2$

Dado que  $x^2 \geq 0$  y  $y^2 \geq 0$ , tenemos  $f(x, y) \geq 0$ , y el mínimo se alcanza en  $(0, 0)$ :

$$\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$

2. **Función con raíz:**  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Como  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ , tenemos:

$$0 \leq 9 - x^2 - y^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$

$$\text{Ran}(f) = [0, 3]$$

3. **Función seno:**  $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$

Dado que  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  y  $-1 \leq \cos(y) \leq 1$ :

$$\text{Ran}(f) = [-2, 2]$$

#### 1.1.4. Funciones explícitas

Una función se dice **explícita** cuando la variable dependiente está despejada en términos de las variables independientes. La forma general es:

$$z = f(x, y)$$

##### ¿Cuándo se aplican?

- Cuando se necesita evaluar directamente la función para valores específicos.
- Para graficar superficies en el espacio tridimensional.
- En cálculo de derivadas parciales de forma directa.

##### Ejemplos ilustrativos:

1.  $z = x^2 + y^2$  — Paraboloide circular
2.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  — Cono
3.  $z = \sin(x) \cos(y)$  — Superficie ondulatoria
4.  $w = xyz$  — Función de tres variables

En funciones explícitas, es directo calcular derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \quad \text{para } z = x^2 + y^2$$

#### 1.1.5. Ejercicios: Dominio y rango de funciones de una variable

Encuentra el dominio y rango de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = x^2 + 3x + 2$$

##### Solución:

- **Dominio:** Es una función polinomial, sin restricciones.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  o  $(-\infty, +\infty)$
- **Rango:** Completando cuadrados:  $f(x) = (x + \frac{3}{2})^2 + 2 - \frac{9}{4} = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$   
El mínimo ocurre en  $x = -\frac{3}{2}$ , con valor  $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$   
 $\text{Ran}(f) = [-\frac{1}{4}, +\infty)$

$$2. f(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

##### Solución:

- **Dominio:** El denominador no puede ser cero:  $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$   
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$  o  $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$
- **Rango:** Despejando  $x$  en términos de  $y$ :

$$y(x + 3) = x + 2 \Rightarrow yx + 3y = x + 2 \Rightarrow yx - x = 2 - 3y \Rightarrow x(y - 1) = 2 - 3y$$

$$x = \frac{2 - 3y}{y - 1}$$

Para que  $x$  exista, necesitamos  $y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
 o  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

3.  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-12}$

**Solución:**

- **Dominio:** Factorizamos el denominador:  $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$

El denominador es cero cuando  $x = 4$  o  $x = -3$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 4\} \text{ o } (-\infty, -3) \cup (-3, 4) \cup (4, +\infty)$$

- **Rango:** Por el método de despejar  $y$ :

$$y(x^2 - x - 12) = 2x - 1 \Rightarrow yx^2 - yx - 12y = 2x - 1$$

$$yx^2 - (y + 2)x + (12y - 1) = 0$$

Si  $y = 0$ :  $-2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$  (válido)

Si  $y \neq 0$ : Para que exista  $x$  real, el discriminante debe ser  $\geq 0$ :

$$\Delta = (y + 2)^2 - 4y(12y - 1) \geq 0$$

$$\Delta = y^2 + 4y + 4 - 48y^2 + 4y \geq 0$$

$$-47y^2 + 8y + 4 \geq 0 \Rightarrow 47y^2 - 8y - 4 \leq 0$$

$$\text{Ran}(f) = [-\frac{2}{47}, \frac{4}{47}] \text{ (aproximadamente)}$$

4.  $f(x) = \sqrt{x} + 3$

**Solución:**

- **Dominio:** La expresión dentro de la raíz debe ser no negativa:  $x \geq 0$

$$\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$$

- **Rango:** El mínimo ocurre cuando  $x = 0$ :  $f(0) = \sqrt{0} + 3 = 3$

A medida que  $x$  aumenta,  $\sqrt{x}$  también aumenta sin límite.

$$\text{Ran}(f) = [3, +\infty)$$

5.  $f(x) = \sqrt{x+8}$

**Solución:**

- **Dominio:** La expresión dentro de la raíz debe ser no negativa:  $x + 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq -8$

$$\text{Dom}(f) = [-8, +\infty)$$

- **Rango:** El mínimo ocurre cuando  $x = -8$ :  $f(-8) = \sqrt{-8+8} = \sqrt{0} = 0$

A medida que  $x$  aumenta,  $\sqrt{x+8}$  también aumenta sin límite.

$$\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$

### 1.1.6. Ejercicios: Variables dependientes e independientes

Identifica la variable dependiente e independiente en las siguientes expresiones:

1.  $y = 2 + x^2$

**Respuesta:** D:  $y$  I:  $x$

2.  $z = y + 9$

**Respuesta:** D:  $z$  I:  $y$

3.  $y = 2x + 3x^2 + 9$

**Respuesta:** D:  $y$  I:  $x$

4.  $t^2 + 9t = x$

**Respuesta:** D:  $x$  I:  $t$

(Equivalentemente:  $x = t^2 + 9t$ )

5.  $9x + 20 = z$

**Respuesta:** D:  $z$  I:  $x$

(Equivalentemente:  $z = 9x + 20$ )

6.  $t^5 - y^4 + 2x = z$

**Respuesta:** D:  $z$  I:  $t, y, x$  (tres variables independientes)

(Equivalentemente:  $z = t^5 - y^4 + 2x$ )

7.  $y^2 + 2x + 8y = t$

**Respuesta:** D:  $t$  I:  $x, y$  (dos variables independientes)

(Equivalentemente:  $t = y^2 + 2x + 8y$ )

### 1.1.7. Funciones implícitas

Una función se dice **implícita** cuando no está despejada, sino que se define mediante una ecuación de la forma:

$$F(x, y, z) = 0$$

donde  $z$  no está aislada explícitamente.

#### ¿Cuándo se aplican?

- Cuando es difícil o imposible despejar la variable dependiente.
- En ecuaciones de superficies como esferas, elipsoides, hiperboloides.
- Para aplicar el teorema de la función implícita en análisis avanzado.

#### Ejemplos ilustrativos:

1. **Esfera:**  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Esta ecuación define  $z$  implícitamente. Si se despeja:

$$z = \pm \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Se obtienen dos funciones explícitas (hemisferio superior e inferior).

2. **Cilindro:**  $x^2 + y^2 = 4$

Define una superficie cilíndrica donde  $z$  puede tomar cualquier valor.

3. **Ecuación general:**  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Hiperboloide de una hoja, difícil de expresar explícitamente.

**Derivación implícita:** Para funciones implícitas  $F(x, y, z) = 0$ , podemos calcular derivadas parciales usando:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

**Ejemplo aplicado:** Para  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , con  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

**Comparación: Explícitas vs. Implícitas.**

Aspecto	Función Explícita	Función Implícita
Forma	$z = f(x, y)$	$F(x, y, z) = 0$
Evaluación	Directa	Requiere despejar o métodos numéricos
Derivadas	Directas	Requiere derivación implícita
Ejemplos	$z = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

**Aplicaciones prácticas.** Las funciones de varias variables tienen aplicaciones en:

- **Física:** Campos escalares (temperatura, presión, potencial eléctrico).
- **Economía:** Funciones de utilidad  $U(x, y)$ , funciones de producción Cobb-Douglas  $P(L, K) = AL^\alpha K^\beta$ .
- **Ingeniería:** Análisis de estructuras, distribución de esfuerzos, optimización de diseños.
- **Estadística:** Regresión multivariable, funciones de densidad conjunta.

## 1.2. Planos y superficies

### 1.2.1. Curvas de nivel: Planos, superficies cuadráticas (elipsoides, cono, paraboloides, hiperboloides) – Graficación

#### Descripción

Una **curva de nivel** de una función  $z = f(x, y)$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  en el plano  $xy$  tales que  $f(x, y) = k$  para una constante fija  $k$ . Geométricamente, surge al intersectar la *superficie*  $z = f(x, y)$  con el *plano horizontal*  $z = k$  y proyectar el contorno sobre el plano  $xy$ .

Las curvas de nivel permiten describir el comportamiento de la función sin necesidad de visualizar la superficie completa en tres dimensiones: cada valor de  $k$  produce una figura distinta que representa cómo “sube” o “baja” la superficie. Dependiendo de la forma de  $f(x, y)$ , estas curvas pueden ser líneas, círculos, elipses, hipérbolas u otras curvas características. Conforme  $k$  varía, las curvas muestran la estructura global de la superficie y permiten identificar crestas, valles, simetrías, pendientes e incluso puntos críticos. Por ello, son una herramienta fundamental en el análisis de funciones multivariadas.

**Propósito:** Visualizar funciones de dos variables mediante sus curvas de nivel y relacionarlas con cortes horizontales de la superficie.

## Planos

### Descripción

Un **plano** en el espacio tridimensional se describe mediante una ecuación lineal de la forma

$$Ax + By + Cz = D,$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  determinan la dirección del vector normal al plano y  $D$  controla su posición respecto al origen. Las curvas de nivel asociadas a un plano provienen de la intersección con planos horizontales  $z = k$ , lo cual produce siempre rectas en el plano  $xy$ . Por ello, los planos generan **curvas de nivel lineales** igualmente espaciadas.

**Curvas de nivel de un plano.** Dado un plano expresado como función:

$$z = f(x, y) = ax + by + c,$$

la curva de nivel para  $z = k$  resulta en:

$$ax + by + c = k \Rightarrow ax + by = k - c,$$

que es la ecuación de una recta en el plano  $xy$ . A medida que  $k$  varía, estas rectas son paralelas entre sí, lo que refleja que la superficie tiene inclinación constante.

**Ejemplo completo.** Considera el plano

$$z = 2x - y + 1.$$

**1) Curvas de nivel:** Para  $z = k$ , se obtiene:

$$2x - y + 1 = k \Rightarrow y = 2x + 1 - k.$$

Las curvas de nivel para distintos valores de  $k$  son rectas paralelas con pendiente 2.

**2) Ejemplo numérico:**

$$k = 0 : y = 2x + 1$$

$$k = 1 : y = 2x$$

$$k = 2 : y = 2x - 1$$

$$k = 3 : y = 2x - 2$$

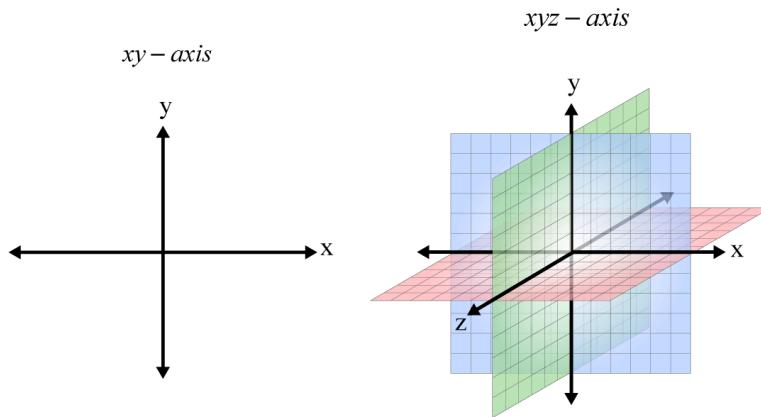


Figura 1: Ejemplo de plano

**3) Interpretación geométrica:** Cada incremento en  $k$  desplaza la recta hacia abajo en el eje  $y$ , manteniendo siempre la misma pendiente. Esto indica que el plano tiene **pendiente uniforme** y no presenta curvatura.

**Conclusión:** Los planos producen curvas de nivel lineales y paralelas, lo cual refleja su naturaleza como superficies con tasa de cambio constante en todas direcciones.

## Elipsoides

### Descripción

Un **elipsoide** es una superficie cerrada en el espacio tridimensional que generaliza la forma de una esfera. Su ecuación cartesiana estándar es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los semiejes en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Las **curvas de nivel** de un elipsoide, obtenidas al considerar la intersección con planos horizontales  $z = k$ , producen **elipses** siempre que  $|k| < c$ , y no hay intersección para  $|k| > c$ .

**Curvas de nivel de un elipsoide.** Partiendo del elipsoide estándar,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

y fijando  $z = k$ , se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}.$$

Para que exista la curva de nivel, se requiere:

$$1 - \frac{k^2}{c^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad |k| < c.$$

Esto corresponde a una **elipse** cuyos semiejes disminuyen conforme  $k$  se approxima a  $-c$  o  $c$ . Cuando  $|k| = c$ , la elipse colapsa en un punto; cuando  $|k| > c$ , la intersección es vacía.

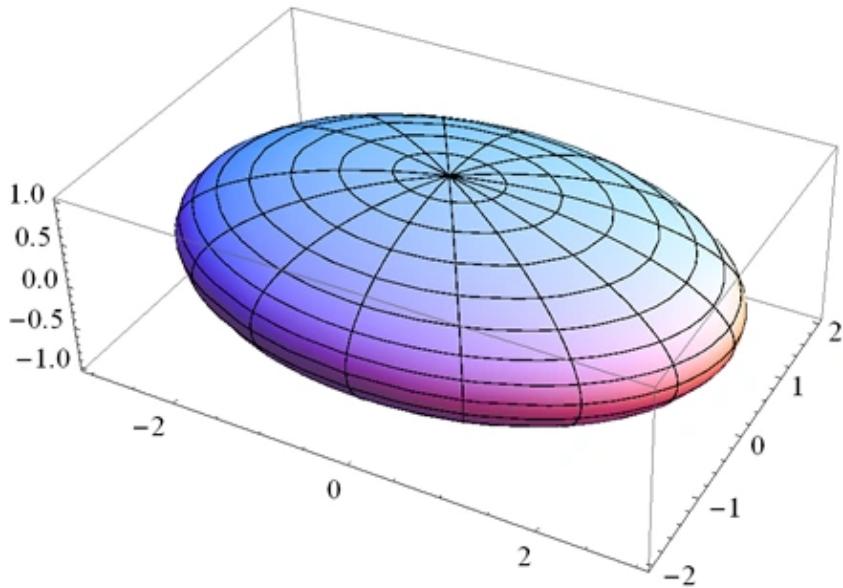


Figura 2: Ejemplo de elipsoide

**Ejemplo completo.** Considera el elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Aquí  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$ .

1) **Curva de nivel en  $z = k$ :**

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{16}.$$

2) **Casos representativos:**

$$k = 0 : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{elipse máxima})$$

$$k = 2 : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4} \quad (\text{elipse más pequeña})$$

$$k = 4 : \quad 1 - \frac{16}{16} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{punto}$$

$$k = 5 : \quad 1 - \frac{25}{16} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sin intersección}$$

3) **Interpretación geométrica:** Al cortar un elipsoide con planos horizontales se obtienen elipses que cambian de tamaño progresivamente. El elipsoide es una superficie cerrada, por lo que el “mapa” de curvas de nivel es una familia de elipses que disminuyen hasta llegar a un punto en los extremos.

**Conclusión:** Las curvas de nivel de un elipsoide son elipses para  $|k| < c$ , un punto para  $|k| = c$ , y no existe intersección para  $|k| > c$ .

## Conos

### Descripción

Un **cono** es una superficie cuadrática que se caracteriza por tener un vértice y extenderse de manera lineal en todas las direcciones. El cono cuádrico más común se expresa mediante la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Es una superficie *doble*: se abre tanto hacia arriba como hacia abajo, con el vértice en el origen. Las **curvas de nivel** obtenidas al fijar  $z = k$  son **elipses** (o círculos en el caso  $a = b$ ), excepto en  $z = 0$ , donde la superficie colapsa en un punto: el vértice.

**Curvas de nivel de un cono.** Dado el cono estándar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

al considerar el plano horizontal  $z = k$ , se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}.$$

Esto corresponde a una **elipse** para todo  $k \neq 0$ . Cuando  $k = 0$ , la elipse se reduce al vértice  $(0, 0, 0)$ .

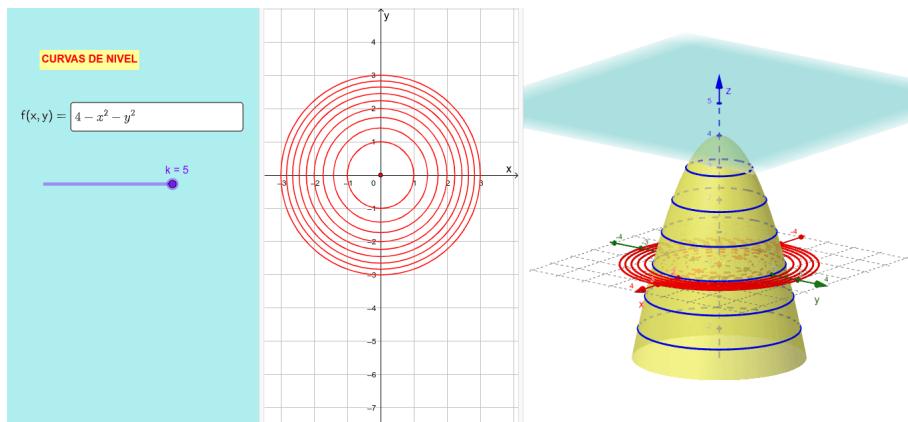


Figura 3: Ejemplo de cono y curvas de nivel.

**Ejemplo completo.** Considera el cono

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16}.$$

Aquí  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$ .

1) **Curva de nivel en  $z = k$ :**

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{k^2}{16}.$$

## 2) Casos representativos:

$$k = 1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{1}{16} \quad (\text{elipse pequeña})$$

$$k = 2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad (\text{elipse más grande})$$

$$k = 4 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{sección que corta al cono a la altura del semieje mayor})$$

$$k = 0 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0 \Rightarrow (0, 0) \quad (\text{vértice})$$

**3) Interpretación geométrica:** El cono genera curvas de nivel elípticas cuyos radios aumentan linealmente con  $|k|$ . La superficie tiene simetría respecto al origen y un único punto singular en el vértice.

**Conclusión:** Los conos producen curvas de nivel elípticas para  $|k| > 0$  y un punto único cuando  $k = 0$ .

## Paraboloide Elíptico

### Descripción

Un **paraboloide elíptico** es una superficie cuadrática abierta cuya ecuación cartesiana estándar es

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Se trata de una superficie que se abre hacia arriba (o hacia abajo si se usa un signo negativo), y cuyas secciones horizontales  $z = k$  son **elipses**. El vértice del paraboloide se encuentra en el origen, y la superficie nunca produce valores de  $z$  negativos cuando la ecuación está en su forma estándar con coeficientes positivos.

**Curvas de nivel de un paraboloide elíptico.** A partir de la ecuación

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

al fijar  $z = k$ , con  $k \geq 0$ , se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k.$$

Esto corresponde a una **elipse** para  $k > 0$ . Cuando  $k = 0$ , la curva de nivel es un solo punto:  $(0, 0)$ . No existe curva de nivel para  $k < 0$ , ya que la superficie no toma valores negativos en esta forma estándar.

Superficie  $z = x^2 + y^2$  con planos  $z = \text{const}$

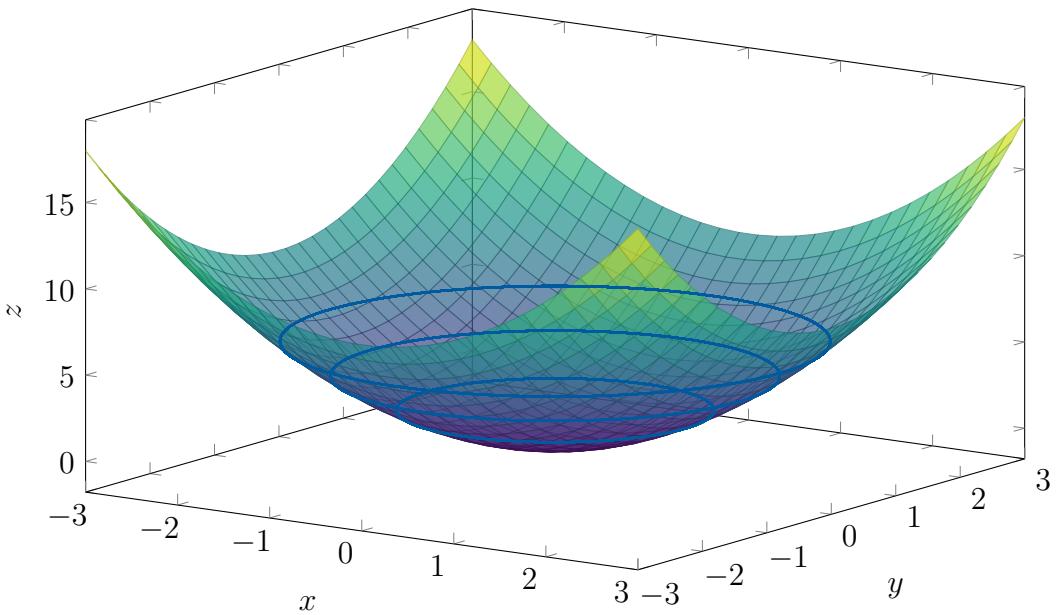


Figura 4: Paraboloide elíptico con cortes horizontales.

**Ejemplo completo.** Considera el paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

Aquí  $a = 2$  y  $b = 3$ .

1) **Curva de nivel en  $z = k$ :**

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = k.$$

2) **Casos representativos:**

$$k = 0 : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0) \quad (\text{vértice})$$

$$k = 1 : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{elipse}$$

$$k = 2 : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{elipse más grande}$$

$$k = 3 : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{elipse aún mayor}$$

3) **Interpretación geométrica:** El paraboloide elíptico genera una familia de elipses que crecen de manera proporcional a  $\sqrt{k}$ . A diferencia del elipsoide (superficie cerrada), aquí las curvas de nivel crecen indefinidamente. La superficie tiene un único punto crítico: el vértice en  $(0, 0, 0)$ .

**Conclusión:** Las curvas de nivel de un paraboloide elíptico son elipses para  $k > 0$ , un punto para  $k = 0$ , y no existen para  $k < 0$ .

## Paraboloide Hiperbólico

### Descripción

Un **paraboloide hiperbólico** es una superficie cuadrática cuya ecuación estándar es

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Se caracteriza por ser una superficie *ensillada*: tiene una curvatura positiva en una dirección y negativa en la otra. Esto implica que la superficie se abre hacia arriba a lo largo del eje  $x$  y hacia abajo a lo largo del eje  $y$ . El punto  $(0, 0, 0)$  es un **punto de silla**, donde la superficie no presenta ni máximo ni mínimo.

**Curvas de nivel.** Las curvas de nivel se obtienen fijando  $z = k$ . A partir de

$$k = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

obtenemos diferentes tipos de curvas según el valor de  $k$ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k.$$

**Caso 1:**  $k > 0$ . La ecuación representa una **hipérbola** con eje transversal en la dirección del eje  $x$ .

**Caso 2:**  $k < 0$ . Sigue siendo una **hipérbola**, pero ahora con eje transversal en la dirección del eje  $y$ .

**Caso 3:**  $k = 0$ . La curva de nivel es un par de rectas que pasan por el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{b}{a}x.$$

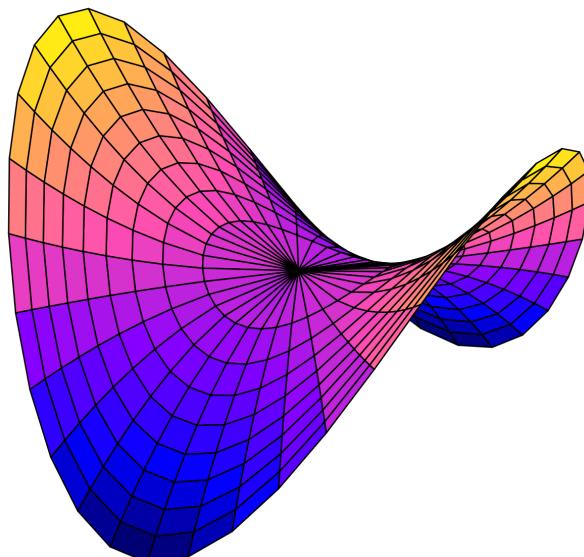


Figura 5: Paraboloide hiperbólico y sus curvas de nivel para distintos valores de  $k$ .

**Ejemplo completo.** Consideremos el paraboloide hiperbólico:

$$z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

Aquí  $a = 2$  y  $b = 3$ .

1) **Curva de nivel en  $z = k$ :**

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = k.$$

2) **Casos representativos:**

$$k = 1 : \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{hipérbola (eje transversal en } x\text{)}$$

$$k = -1 : \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{hipérbola (eje transversal en } y\text{)}$$

$$k = 0 : \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9}y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}x \quad (\text{dos rectas})$$

3) **Interpretación geométrica.** El paraboloide hiperbólico tiene curvatura negativa: mientras que en la dirección  $x$  la superficie se abre hacia arriba, en la dirección  $y$  se abre hacia abajo. Por ello se le llama *superficie de silla*. Este tipo de superficie aparece en arquitectura (tejados y cubiertas) y en física (superficies potenciales).

**Conclusión.** Las curvas de nivel del paraboloide hiperbólico siempre son hipérbolas excepto cuando  $k = 0$ , donde aparecen dos rectas que se cruzan en el punto de silla.

## Hiperboloides

### Descripción

Los **hiperboloides** son superficies cuadráticas tridimensionales que pueden presentarse en dos formas: **hiperbololoide de una hoja** y **hiperbololoide de dos hojas**. Ambos se describen mediante ecuaciones del tipo

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

con combinaciones de signos que determinan la forma geométrica. Estas superficies son fundamentales en geometría analítica y modelan estructuras en ingeniería, óptica y arquitectura.

**Hiperbololoide de una hoja.** Su ecuación estándar es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Es una superficie abierta y continua, con secciones transversales de diferentes formas:

- Para  $z = k$ , se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2},$$

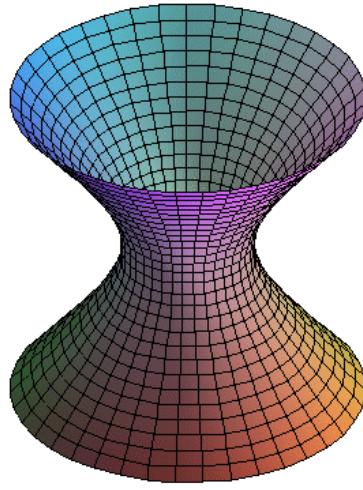


Figura 6: Ejemplo de hiperboloide de una hoja.

es decir, **elipses**. - Para  $x = k$  o  $y = k$ : aparecen **hipérbolas**.

Geometría conocida como “forma de torre” o “collar” (ej.: torres de enfriamiento).

**Ejemplo completo.** Considera el hiperboloide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

**1) Corte horizontal**  $z = k$ :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + \frac{k^2}{16}.$$

Esto es una **elipse** cuyo tamaño aumenta conforme  $|k|$  crece.

**2) Casos:**

$$z = 0 : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{elipse base})$$

$$z = 4 : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 \quad (\text{elipse más grande})$$

$$z = -4 : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 \quad (\text{simétrica})$$

**Conclusión:** El hiperboloide de una hoja presenta elipses horizontales y se estrecha al acercarse al centro.

**Hiperboloide de dos hojas.** Su ecuación estándar es:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En este caso la variable con signo positivo determina la dirección en la que aparecen las hojas (dos componentes separadas). El hiperboloide no tiene puntos para valores donde el miembro izquierdo no puede ser mayor que 1.

**Cortes horizontales**  $z = k$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1.$$

- Si  $|k| < c$ : no existe curva (la superficie no está definida).
- Si  $|k| = c$ : aparece un punto.
- Si  $|k| > c$ : se obtiene una **elipse**.

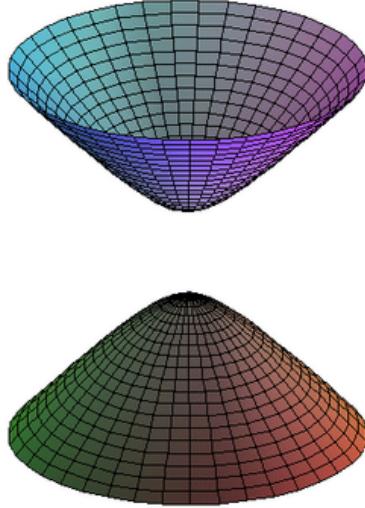


Figura 7: Ejemplo de hiperboloide de dos hojas.

**Ejemplo completo.** Considera el hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

**1) Curvas para**  $z = k$ :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = \frac{k^2}{4} - 1.$$

**2) Casos:**

$$k = 0 : \quad \frac{k^2}{4} - 1 = -1 \quad (\text{no hay puntos})$$

$$k = 2 : \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 0 \quad (\text{punto único en la hoja superior})$$

$$k = 3 : \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \quad (\text{elipse})$$

$$k = -3 : \quad \text{elipse simétrica en la hoja inferior}$$

**Conclusión:** El hiperboloide de dos hojas se abre en dos direcciones opuestas, con elipses cada vez más amplias conforme  $|z|$  crece.

### 1.2.2. Ejercicios: Curvas de nivel

Encuentra y describe las curvas de nivel de la siguiente función:

1.  $z = x^2 + y^2$  para  $z = 4, 5, 6$

**Solución:**

Esta es una función paraboloide circular (paraboloide de revolución). Para encontrar las curvas de nivel, igualamos  $z$  a cada valor constante y despejamos la relación entre  $x$  e  $y$ .

- **Cuando**  $z = 4$ :

$$x^2 + y^2 = 4$$

Esta es la ecuación de una **circunferencia** con centro en  $(0, 0)$  y radio  $r = 2$ .

- **Cuando**  $z = 5$ :

$$x^2 + y^2 = 5$$

Esta es la ecuación de una **circunferencia** con centro en  $(0, 0)$  y radio  $r = \sqrt{5} \approx 2,236$ .

- **Cuando**  $z = 6$ :

$$x^2 + y^2 = 6$$

Esta es la ecuación de una **circunferencia** con centro en  $(0, 0)$  y radio  $r = \sqrt{6} \approx 2,449$ .

**Interpretación geométrica:**

- Las tres curvas de nivel son circunferencias concéntricas (con el mismo centro pero radios diferentes).
- La función  $z = x^2 + y^2$  representa un paraboloide elíptico (en este caso, de revolución).
- El vértice del paraboloide está en  $(0, 0, 0)$ , el punto de menor altura.
- Conforme aumenta el valor de  $z$ , las curvas de nivel son circunferencias cada vez más grandes.
- La distancia al origen es  $\sqrt{z}$ , de modo que:

$$z = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$z = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

$$z = 6 \Rightarrow r = \sqrt{6}$$

**Conclusión:** Las curvas de nivel del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  son circunferencias concéntricas. Para cualquier valor  $z = k > 0$ , la curva de nivel es una circunferencia de radio  $\sqrt{k}$  centrada en el origen.

## 2. Límites y Continuidad en Funciones de Tres Variables

### Definición de función de 3 variables

Una función de tres variables es una regla que asigna a cada punto  $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$  un número real:

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = w.$$

El dominio  $D$  es una región del espacio tridimensional y la imagen es un conjunto de valores reales.

### Definición formal de límite en 3 variables

Sea  $f(x, y, z)$  una función definida en un conjunto que contiene puntos arbitrariamente cercanos a  $(a, b, c)$ . Decimos que

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = L$$

siempre que para toda sucesión  $\{(x_n, y_n, z_n)\}$  con  $(x_n, y_n, z_n) \neq (a, b, c)$  y  $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (a, b, c)$ , se cumpla que

$$f(x_n, y_n, z_n) \rightarrow L.$$

Equivalentemente, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y, z) - L| < \varepsilon.$$

## Métodos para determinar la existencia del límite

- **Sustitución directa:** funciona si la función es polinómica o el denominador no se anula.
- **Revisión de caminos:** si dos caminos dan límites diferentes, el límite no existe.
- **Acotación (Squeeze):** si la función queda entre dos límites iguales.
- **Coordenadas esféricas:** cuando se busca el límite al origen, usando  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ .

## Ejemplos Resueltos

### Ejemplo 1 — Sustitución directa

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,-1)} (3x - y + 2z).$$

La función es un polinomio (continua), por lo que basta sustituir:

$$3(1) - 2 + 2(-1) = 3 - 2 - 2 = -1.$$

-1

## Ejemplo 2 — Límite existente (acotación)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Se cumple:

$$0 \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Como  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ , por el criterio del sándwich:

0

## Ejemplo 3 — Límite que NO existe

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Camino  $x = y = t, z = 0$ :

$$\frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

Camino  $x = t, y = -t, z = 0$ :

$$\frac{-t^2}{2t^2} = -\frac{1}{2}.$$

Como los límites difieren:

El límite no existe

## Ejemplo 4 — Uso de coordenadas esféricas

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}}.$$

Sustituyendo  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ :

$$f(\rho) = \frac{\rho^2}{\sqrt{1 + \rho^2}} \rightarrow 0.$$

0

## 3. Continuidad de Funciones de Tres Variables

### Definición de continuidad

Una función  $f(x, y, z)$  es continua en el punto  $(a, b, c)$  si:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = f(a, b, c).$$

Esto requiere:

1.  $f(a, b, c)$  definido,

2. el límite existe,
3. ambos valores son iguales.

### Ejemplo 5 — Función continua en todo su dominio

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 5}.$$

El radicando es positivo, por lo que es continua en todo  $\mathbb{R}^3$ .

### Ejemplo 6 — Discontinuidad removible

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

En esféricas:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} \rightarrow 0.$$

Como coincide con el valor dado:

Es continua en el origen.

### Ejemplo 7 — Discontinuidad esencial

$$f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Camino  $x = y = z = t$ :

$$\frac{3t}{\sqrt{3t^2}} = \begin{cases} \sqrt{3}, & t > 0, \\ -\sqrt{3}, & t < 0. \end{cases}$$

Límites distintos:

No es continua en  $(0, 0, 0)$ .

### Ejemplo 8 — Continuidad excepto en la esfera unitaria

$$f(x, y, z) = \frac{x - y + z}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}.$$

El denominador se anula cuando:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Esto describe la **esfera unitaria**. Una función racional es continua donde el denominador no es cero, por lo que:

$f$  es continua en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

## Ejercicios: Límites de funciones de una variable

Calcula los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2 - 9}$$

**Solución:** Factorizamos el denominador:  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-3-3} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4}$$

**Solución:** Factorizamos:  $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$  y  $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x+4} = \frac{1-3}{1+4} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{3x^2}$$

**Solución:** Factorizamos el numerador:  $x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x-2)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{3} = \frac{0-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x - 10}$$

**Solución:** Factorizamos:  $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$  y  $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x+2} = \frac{5-5}{5+2} = \frac{0}{7} = 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}$$

**Solución:** Factorizamos:  $x^2 - 4x = x(x - 4)$  y  $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x+4} = \frac{4}{4+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x}{4x^2 - 4x}$$

**Solución:** Factorizamos:  $x^3 - 5x^2 + 3x = x(x^2 - 5x + 3)$  y  $4x^2 - 4x = 4x(x - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 5x + 3)}{4x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x + 3}{4(x-1)} = \frac{0-0+3}{4(0-1)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$$

**Solución:** Multiplicamos por el conjugado:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x} \cdot \frac{\sqrt{9+x} + 3}{\sqrt{9+x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9+x) - 9}{x(\sqrt{9+x} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{9+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9+x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9+0}} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

**Solución:** Multiplicamos por el conjugado:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3) - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{1+3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$$

**Solución:** Multiplicamos por el conjugado:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+3)-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+3}+1) = \sqrt{-2+3}+1 = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2 \end{aligned}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$$

**Solución:** Multiplicamos por el conjugado:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{(x+3)-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Cuando  $x \rightarrow 0$ :  $0 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 0 \cdot 2\sqrt{3} = 0$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-2x+x^2}-2}{x}$$

**Solución:** Observa que  $4-2x+x^2 = (2-x)^2$ , entonces  $\sqrt{4-2x+x^2} = |2-x|$

Para  $x$  cercano a 0,  $2-x > 0$ , entonces  $|2-x| = 2-x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$$

## 4. Unidad II: Derivadas Parciales

### Derivadas Parciales: Concepto fundamental

Las derivadas parciales extienden el concepto de derivada a funciones de varias variables, permitiéndonos estudiar cómo cambia una función cuando variamos una sola variable mientras mantenemos las demás constantes. Este concepto es fundamental en física, ingeniería, economía y todas las áreas donde interactúan múltiples variables.

#### 4.1. La derivada parcial

**Introducción.** En cálculo de una variable, la derivada  $\frac{dy}{dx}$  mide la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$ . Para funciones de varias variables, necesitamos un concepto similar que nos permita medir cómo cambia la función cuando variamos una variable a la vez.

Consideremos una función  $z = f(x, y)$  de dos variables. Podemos estudiar cómo cambia  $z$  cuando:

- Variamos  $x$  manteniendo  $y$  constante
- Variamos  $y$  manteniendo  $x$  constante

**Definición:** La **derivada parcial** de  $f$  con respecto a  $x$  se denota  $\frac{\partial f}{\partial x}$  o  $f_x$ , y se calcula derivando con respecto a  $x$  tratando  $y$  como constante.

**Notación:** Para  $z = f(x, y)$  usamos:

- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, f_x(x, y)$ , o  $z_x$
- $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}, f_y(x, y)$ , o  $z_y$

**Definición formal.** Sea  $z = f(x, y)$  una función de dos variables. Las derivadas parciales se definen como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

#### Interpretación geométrica.

- $\frac{\partial f}{\partial x}$  representa la pendiente de la curva formada al intersectar la superficie  $z = f(x, y)$  con un plano  $y = \text{constante}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}$  representa la pendiente de la curva formada al intersectar la superficie  $z = f(x, y)$  con un plano  $x = \text{constante}$

#### Ejemplos resueltos.

### Ejemplo 1: Función polinomial

Calcular las derivadas parciales de  $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^3$ .

**Solución:**

**Para  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :** Tratamos  $y$  como constante

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2xy^2 - y^3) \\ &= 3x^2 + 2y^2 \cdot 1 - 0 \\ &= \boxed{3x^2 + 2y^2}\end{aligned}$$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :** Tratamos  $x$  como constante

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 2xy^2 - y^3) \\ &= 0 + 2x \cdot 2y - 3y^2 \\ &= \boxed{4xy - 3y^2}\end{aligned}$$

### Ejemplo 2: Función con exponencial

Calcular las derivadas parciales de  $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x) \cos(y)$ .

**Solución:**

**Para  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} + \sin(x) \cos(y)) \\ &= e^{xy} \cdot y + \cos(x) \cdot \cos(y) \\ &= \boxed{ye^{xy} + \cos(x) \cos(y)}\end{aligned}$$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} + \sin(x) \cos(y)) \\ &= e^{xy} \cdot x + \sin(x) \cdot (-\sin(y)) \\ &= \boxed{xe^{xy} - \sin(x) \sin(y)}\end{aligned}$$

### Ejemplo 3: Función racional

Calcular las derivadas parciales de  $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$ .

**Solución:**

**Para  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :** Usamos la regla del cociente

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(x-y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x-y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{(x-y)(2x) - (x^2+y^2)(1)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2xy - x^2 - y^2}{(x-y)^2} \\ &= \boxed{\frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x-y)^2}}\end{aligned}$$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x-y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) - (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x-y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{(x-y)(2y) - (x^2+y^2)(-1)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2xy - 2y^2 + x^2 + y^2}{(x-y)^2} \\ &= \boxed{\frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x-y)^2}}\end{aligned}$$

#### Ejemplo 4: Función de tres variables

Calcular las derivadas parciales de  $f(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ .

**Solución:**

**Para  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + y^2z + yz^2 = \boxed{yz(2x + y + z)}$$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :**

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z + 2xyz + xz^2 = \boxed{xz(x + 2y + z)}$$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial z}$ :**

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + xy^2 + 2xyz = \boxed{xy(x + y + 2z)}$$

**Aplicaciones prácticas.** Las derivadas parciales tienen aplicaciones en:

- **Física:** Ecuaciones de calor, ondas y difusión
- **Economía:** Utilidad marginal, productividad marginal

- **Ingeniería:** Análisis de sensibilidad en diseño
- **Estadística:** Optimización de funciones de verosimilitud
- **Machine Learning:** Gradiente descendente en redes neuronales

#### 4.1.1. Construcción geométrica de la derivada parcial con software

##### Visualización geométrica de derivadas parciales

La interpretación geométrica de las derivadas parciales nos permite comprender cómo se comporta una superficie tridimensional al realizar cortes paralelos a los planos coordenados. Cada derivada parcial representa la pendiente de una curva resultante de estas intersecciones.

**Concepto geométrico fundamental.** Para una función  $z = f(x, y)$  que representa una superficie en el espacio tridimensional:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$  en  $(x_0, y_0)$  es la pendiente de la curva de intersección entre la superficie y el plano  $y = y_0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(x_0, y_0)$  es la pendiente de la curva de intersección entre la superficie y el plano  $x = x_0$

**Visualización paso a paso.** Consideremos la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  (un paraboloid). Vamos a visualizar cómo se construyen geométricamente sus derivadas parciales.

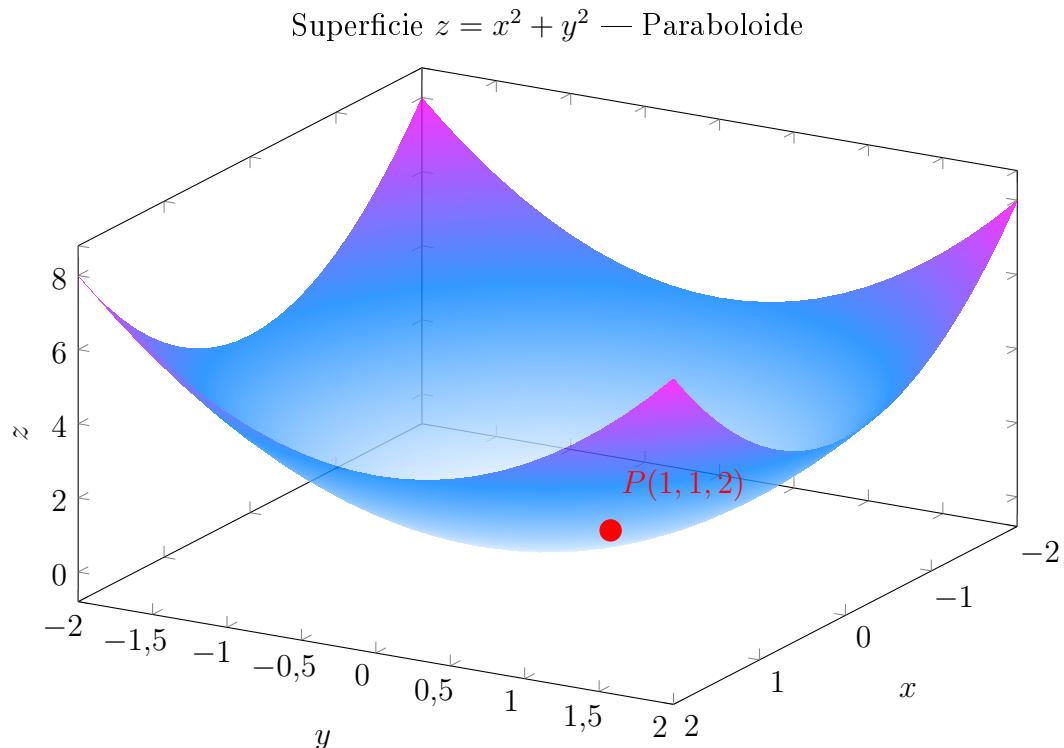


Figura 8: Superficie  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  con punto de interés  $P(1, 1, 2)$ .

**Derivada parcial respecto a  $x$ : Corte con  $y = \text{constante}$ .** Cuando fijamos  $y = 1$ , la superficie se reduce a una curva en el plano  $y = 1$ :

$$z = f(x, 1) = x^2 + 1$$

La derivada parcial en  $(1, 1)$  es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 2x \Big|_{x=1} = 2$$

Esto significa que la pendiente de la curva en el punto  $P$  es 2 cuando nos movemos en la dirección  $x$ .

Corte de la superficie con el plano  $y = 1$

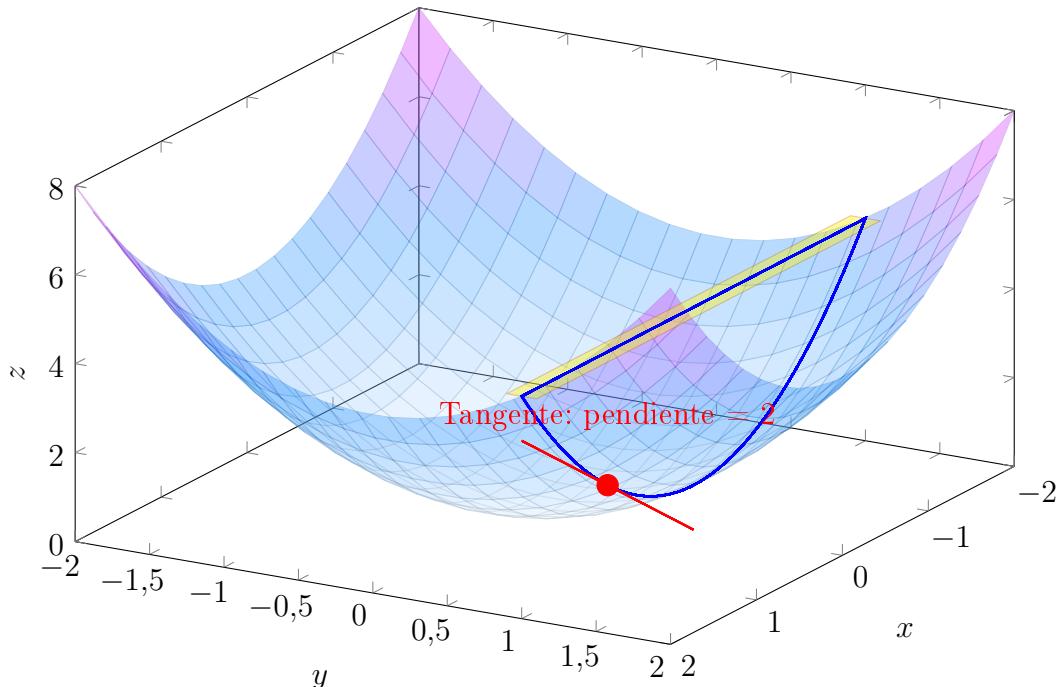


Figura 9: Curva azul: intersección con  $y = 1$ . Recta roja: tangente con pendiente  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ .

**Derivada parcial respecto a  $y$ : Corte con  $x = \text{constante}$ .** Cuando fijamos  $x = 1$ , la superficie se reduce a:

$$z = f(1, y) = 1 + y^2$$

La derivada parcial en  $(1, 1)$  es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 2y \Big|_{y=1} = 2$$

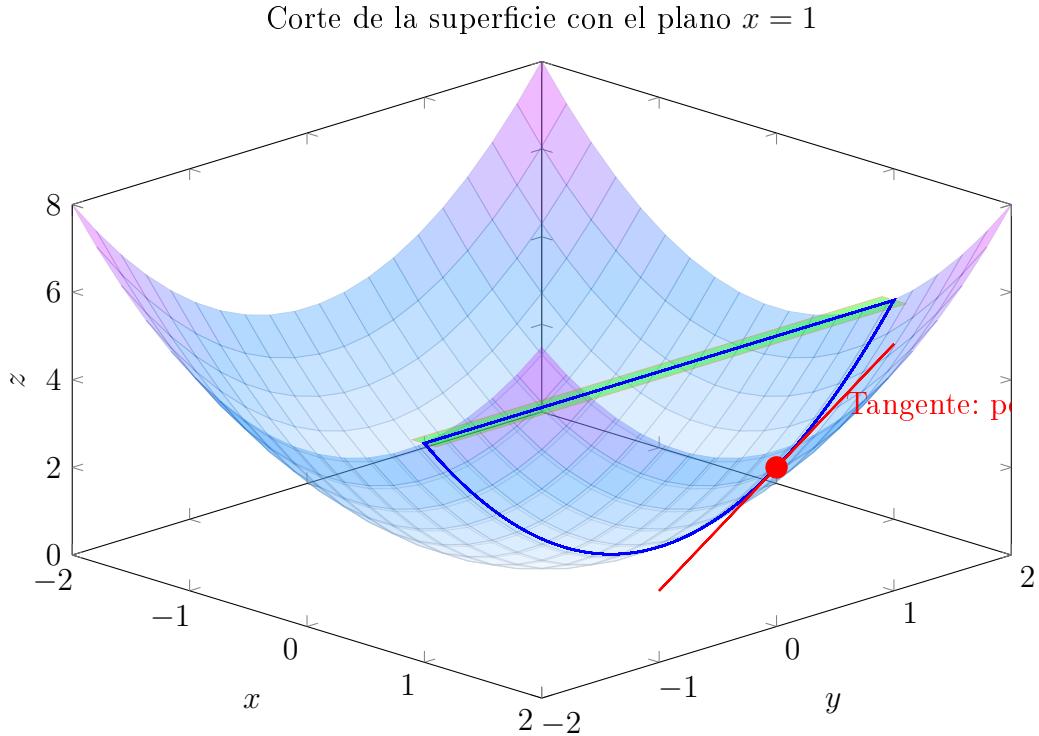


Figura 10: Curva azul: intersección con  $x = 1$ . Recta roja: tangente con pendiente  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ .

**Ejemplo 2: Silla de montar (Paraboloide hiperbólico).** Consideremos ahora  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , una superficie con forma de silla de montar.

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

En el punto  $(1, 1, 0)$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 2, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = -2$$

**Comparación visual de curvaturas.** La siguiente gráfica muestra las curvas de nivel de la función paraboloide. Cada círculo representa puntos donde la función tiene el mismo valor:

**Interpretación práctica con software.** En software como **GeoGebra**, **Mathematica**, **MATLAB** o **Python** (matplotlib), podemos:

1. **Graficar la superficie**  $z = f(x, y)$  en 3D
2. **Crear planos de corte**  $x = x_0$  o  $y = y_0$
3. **Visualizar las curvas de intersección**
4. **Calcular y dibujar las rectas tangentes** con pendientes dadas por las derivadas parciales
5. **Animar** el movimiento del punto para ver cómo cambian las pendientes

Silla de montar:  $z = x^2 - y^2$

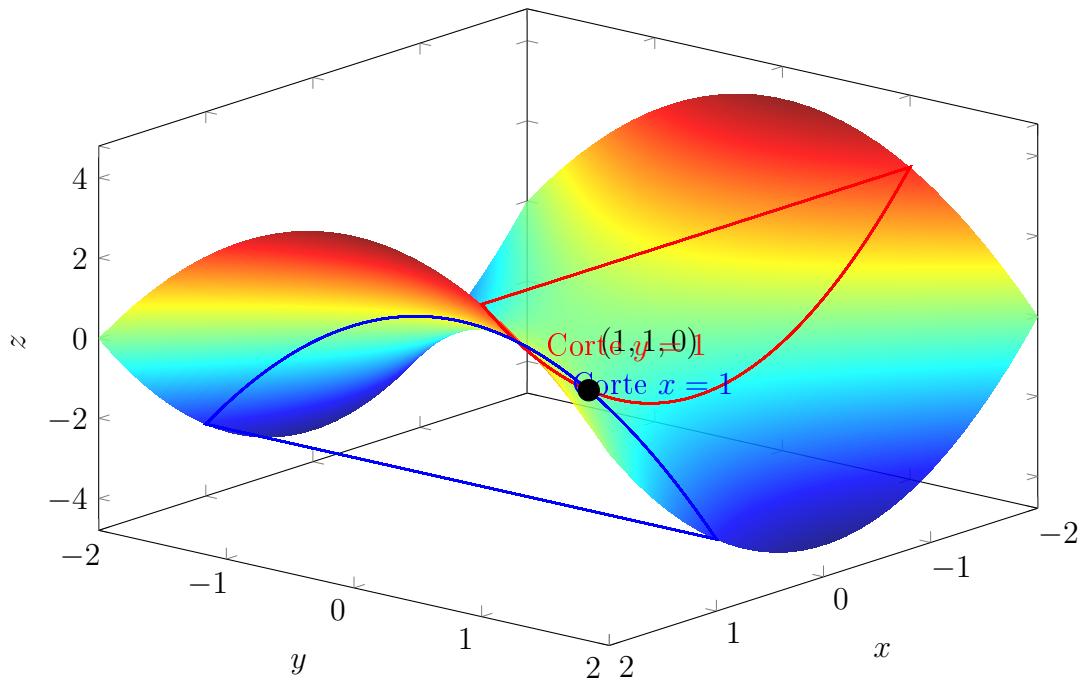


Figura 11: Silla de montar con cortes que muestran pendientes opuestas en direcciones perpendiculares.

Curvas de nivel de  $f(x, y) = x^2 + y^2$

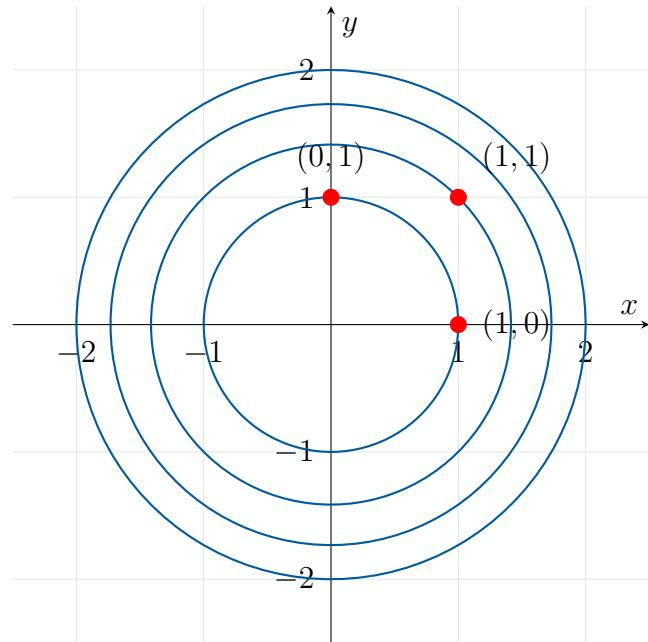


Figura 12: Curvas de nivel: círculos concéntricos para  $k = 1, 2, 3, 4$ .

**Herramientas recomendadas:** GeoGebra 3D, Desmos 3D Calculator, Python (matplotlib + numpy), MATLAB, Mathematica, Wolfram Alpha

**Ventajas de la visualización:** Permite comprender intuitivamente conceptos abstractos, verificar cálculos analíticos y explorar comportamientos locales de funciones complejas.

### Ejercicio guiado con visualización.

Ejercicio: Cono

Considera la función  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , que representa un cono.

**Tareas:**

1. Calcula  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$
2. Evalúa las derivadas en el punto  $(3, 4)$
3. Interpreta geométricamente el resultado

**Solución:**

#### 1. Cálculo de derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{f(x, y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{f(x, y)}$$

#### 2. Evaluación en $(3, 4)$ :

$$f(3, 4) = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(3,4)} = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(3,4)} = \frac{4}{5} = 0,8$$

#### 3. Interpretación geométrica:

- Al movernos en dirección  $x$  desde  $(3, 4, 5)$ , la superficie sube con pendiente 0.6
- Al movernos en dirección  $y$ , la pendiente es 0.8
- Ambas pendientes son positivas porque nos alejamos del vértice del cono en el origen

**Conclusión.** La construcción geométrica de derivadas parciales nos permite:

- **Visualizar** cómo una superficie cambia localmente en diferentes direcciones
- **Comprender** que cada derivada parcial es la pendiente de una curva específica
- **Utilizar software** para verificar y explorar cálculos analíticos
- **Desarrollar intuición** sobre el comportamiento de funciones multivariadas

$$\text{Cono: } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

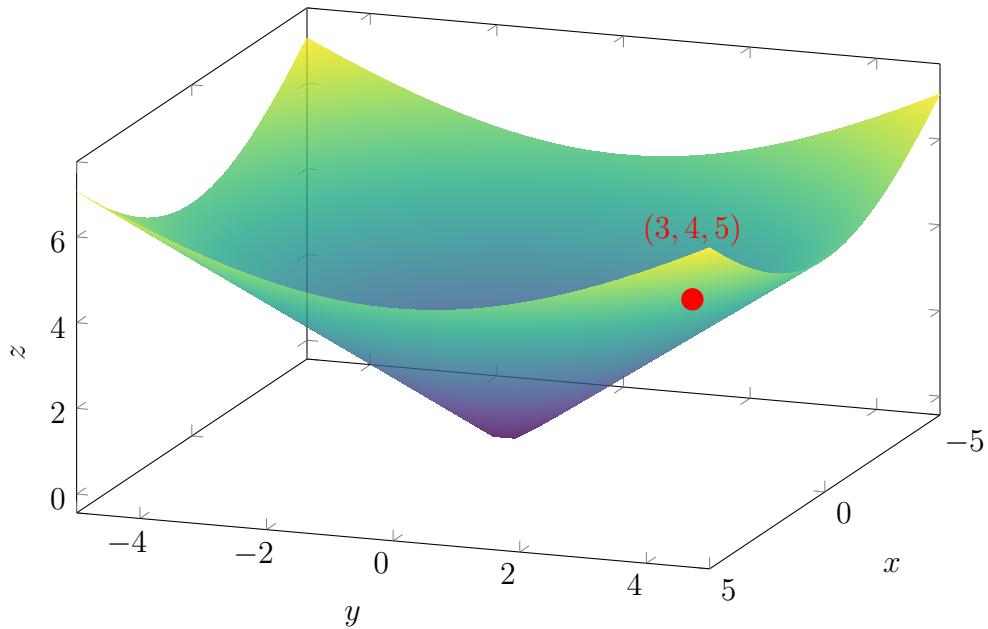


Figura 13: Superficie cónica con punto de análisis en  $(3, 4, 5)$ .

#### 4.1.2. Reglas de derivación parcial

##### Reglas de derivación: Extensión al caso multivariable

Las reglas de derivación que conocemos del cálculo de una variable se extienden naturalmente a las derivadas parciales. La diferencia clave es que al derivar respecto a una variable, tratamos las demás como constantes.

**Introducción.** Las reglas de derivación parcial nos permiten calcular derivadas de funciones complejas de manera sistemática y eficiente. Estas reglas son idénticas a las del cálculo de una variable, pero aplicadas variable por variable.

**Reglas básicas.** Sea  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  funciones de dos variables, y  $c$  una constante.

##### Regla 1: Constante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(c) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(c) = 0$$

##### Regla 2: Constante por una función:

$$\frac{\partial}{\partial x}[c \cdot f(x, y)] = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

##### Regla 3: Suma y diferencia:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y) \pm g(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}$$

**Regla 4: Producto:**

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y) \cdot g(x, y)] = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

**Regla 5: Cociente:**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right] = \frac{g \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$

**Regla 6: Potencia:**

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)]^n = n[f(x, y)]^{n-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

Función	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\frac{\partial f}{\partial y}$
$f(x, y) = x^n$	$nx^{n-1}$	0
$f(x, y) = y^n$	0	$ny^{n-1}$
$f(x, y) = x^n y^m$	$nx^{n-1} y^m$	$mx^n y^{m-1}$
$f(x, y) = e^x$	$e^x$	0
$f(x, y) = e^{xy}$	$ye^{xy}$	$xe^{xy}$
$f(x, y) = \ln(x)$	$\frac{1}{x}$	0
$f(x, y) = \ln(xy)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$
$f(x, y) = \sin(x)$	$\cos(x)$	0
$f(x, y) = \sin(xy)$	$y \cos(xy)$	$x \cos(xy)$
$f(x, y) = \cos(x)$	$-\sin(x)$	0
$f(x, y) = \tan(x)$	$\sec^2(x)$	0

Cuadro 1: Derivadas parciales de funciones comunes.

**Tabla resumen de derivadas parciales comunes.**

**Ejemplos resueltos detallados.**

Ejemplo 1: Regla de la suma y producto

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x, y) = 3x^2y + 5xy^3 - 7x + 2y$$

**Solución:**

Para  $\frac{\partial f}{\partial x}$ : Derivamos término por término respecto a  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(5xy^3) - \frac{\partial}{\partial x}(7x) + \frac{\partial}{\partial x}(2y) \\ &= 3y \cdot 2x + 5y^3 \cdot 1 - 7 + 0 \\ &= \boxed{6xy + 5y^3 - 7} \end{aligned}$$

Para  $\frac{\partial f}{\partial y}$ : Derivamos término por término respecto a  $y$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(5xy^3) - \frac{\partial}{\partial y}(7x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) \\
&= 3x^2 \cdot 1 + 5x \cdot 3y^2 - 0 + 2 \\
&= [3x^2 + 15xy^2 + 2]
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Regla del producto

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x, y) = (x^2 + y)(3x - y^2)$$

**Solución:**

**Para  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :** Usamos la regla del producto

Sean  $u = x^2 + y$  y  $v = 3x - y^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\
&= (x^2 + y) \cdot 3 + (3x - y^2) \cdot 2x \\
&= 3x^2 + 3y + 6x^2 - 2xy^2 \\
&= [9x^2 - 2xy^2 + 3y]
\end{aligned}$$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= (x^2 + y) \cdot (-2y) + (3x - y^2) \cdot 1 \\
&= -2x^2y - 2y^2 + 3x - y^2 \\
&= [-2x^2y - 3y^2 + 3x]
\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Regla del cociente

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x - 2y}$$

**Solución:**

Sean  $u = x^2 + y$  y  $v = x - 2y$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :** Aplicamos la regla del cociente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2} \\
&= \frac{(x-2y) \cdot 2x - (x^2+y) \cdot 1}{(x-2y)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 4xy - x^2 - y}{(x-2y)^2} \\
&= \boxed{\frac{x^2 - 4xy - y}{(x-2y)^2}}
\end{aligned}$$

**Para**  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2} \\
&= \frac{(x-2y) \cdot 1 - (x^2+y) \cdot (-2)}{(x-2y)^2} \\
&= \frac{x-2y + 2x^2 + 2y}{(x-2y)^2} \\
&= \boxed{\frac{2x^2 + x}{(x-2y)^2}}
\end{aligned}$$

#### Ejemplo 4: Regla de la potencia (cadena)

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x, y) = (x^3 + xy^2)^5$$

**Solución:**

Sea  $u = x^3 + xy^2$ , entonces  $f = u^5$

**Para**  $\frac{\partial f}{\partial x}$ : Aplicamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 5u^4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\
&= 5(x^3 + xy^2)^4 \cdot (3x^2 + y^2) \\
&= \boxed{5(x^3 + xy^2)^4(3x^2 + y^2)}
\end{aligned}$$

**Para**  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= 5u^4 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= 5(x^3 + xy^2)^4 \cdot (2xy) \\
&= \boxed{10xy(x^3 + xy^2)^4}
\end{aligned}$$

### Ejemplo 5: Funciones exponenciales y trigonométricas

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x, y) = e^{x^2y} \sin(xy)$$

**Solución:**

Usamos la regla del producto:  $f = e^{x^2y} \cdot \sin(xy)$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x^2y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy)] + \sin(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}[e^{x^2y}] \\ &= e^{x^2y} \cdot \cos(xy) \cdot y + \sin(xy) \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy \\ &= e^{x^2y}[y \cos(xy) + 2xy \sin(xy)] \\ &= \boxed{ye^{x^2y}[\cos(xy) + 2x \sin(xy)]}\end{aligned}$$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x^2y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}[\sin(xy)] + \sin(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}[e^{x^2y}] \\ &= e^{x^2y} \cdot \cos(xy) \cdot x + \sin(xy) \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 \\ &= xe^{x^2y}[\cos(xy) + x \sin(xy)] \\ &= \boxed{xe^{x^2y}[\cos(xy) + x \sin(xy)]}\end{aligned}$$

### Ejemplo 6: Función logarítmica

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

**Solución:**

Sea  $u = x^2 + y^2 + 1$ , entonces  $f = \ln(u)$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :** Usamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot 2x \\ &= \boxed{\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}}\end{aligned}$$

**Para  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot 2y \\
&= \boxed{\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}}
\end{aligned}$$

**Derivadas parciales de orden superior.** Las derivadas parciales pueden derivarse nuevamente, obteniendo derivadas de segundo orden o superiores.

**Notación:** Para  $f(x, y)$ :

**Segundas derivadas parciales:**

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$ : derivar dos veces respecto a  $x$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$ : derivar dos veces respecto a  $y$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$ : derivar primero respecto a  $y$ , luego respecto a  $x$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$ : derivar primero respecto a  $x$ , luego respecto a  $y$

**Teorema de Schwarz:** Si las derivadas parciales mixtas  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son continuas, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Es decir, el orden de derivación no importa.

#### Ejemplo 7: Derivadas de segundo orden

Calcular todas las segundas derivadas parciales de:

$$f(x, y) = x^3y^2 + x^2y$$

**Solución:**

**Primero calculamos las derivadas de primer orden:**

$$\begin{aligned}
f_x &= 3x^2y^2 + 2xy \\
f_y &= 2x^3y + x^2
\end{aligned}$$

**Ahora las segundas derivadas:**

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + 2xy) = \boxed{6xy^2 + 2y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y + x^2) = \boxed{2x^3}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + 2xy) = \boxed{6x^2y + 2x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y + x^2) = \boxed{6x^2y + 2x}$$

**Verificación:** Como esperábamos por el Teorema de Schwarz:  $f_{xy} = f_{yx}$

### Errores comunes al calcular derivadas parciales.

- **Error 1:** Olvidar que las otras variables son constantes.

Incorrecto:  $\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2 + 2xy$

Correcto:  $\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2$  (porque  $y$  es constante)

- **Error 2:** Confundir el orden en derivadas mixtas.

Para  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ : primero derivar respecto a  $y$ , luego respecto a  $x$

- **Error 3:** No aplicar la regla de la cadena cuando es necesaria.

Incorrecto:  $\frac{\partial}{\partial x}[\sin(x^2y)] = \cos(x^2y)$

Correcto:  $\frac{\partial}{\partial x}[\sin(x^2y)] = \cos(x^2y) \cdot 2xy$

**Ejercicios propuestos.** Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1.  $f(x, y) = 5x^4y^3 - 3x^2y + 7xy^2 - 2$

2.  $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x + y}$

3.  $f(x, y) = e^{x/y} + \ln(x^2 + y^2)$

4.  $f(x, y) = x^y$  (*Sugerencia:  $x^y = e^{y \ln x}$* )

5.  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot e^{xy}$

6.  $f(x, y, z) = xyz + x^2y + y^2z + z^2x$  (tres variables)

7. Calcular  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$ ,  $f_{xy}$  para  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$

8. Verificar que  $f_{xy} = f_{yx}$  para  $f(x, y) = e^{xy^2}$

#### 4.1.3. Regla de la cadena para varias variables

##### Regla de la cadena: Composición de funciones multivariadas

La regla de la cadena para funciones de varias variables nos permite calcular derivadas cuando las variables son, a su vez, funciones de otras variables. Es una extensión natural de la regla de la cadena del cálculo de una variable y es fundamental en física, ingeniería y optimización.

**Introducción.** En cálculo de una variable, la regla de la cadena establece que si  $y = f(u)$  y  $u = g(x)$ , entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Para funciones de varias variables, esta regla se extiende considerando todas las trayectorias de dependencia entre variables.

##### Caso 1: Función de dos variables con dependencia de una sola variable.

**Teorema (Regla de la cadena - Caso 1):** Sea  $z = f(x, y)$  una función diferenciable de  $x$  e  $y$ , donde:

- $x = x(t)$
- $y = y(t)$

Entonces la **derivada total** de  $z$  respecto a  $t$  es:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

**Interpretación:** La tasa de cambio de  $z$  respecto a  $t$  se obtiene sumando las contribuciones de cada variable intermedia.

**Visualización de las dependencias.** Para visualizar la regla de la cadena, imaginamos un diagrama de árbol con las siguientes dependencias:

**Caminos de dependencia:** Existen dos caminos desde  $t$  hasta  $z$ :

- **Camino 1:**  $t \rightarrow x \rightarrow z$  contribuye:  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$
- **Camino 2:**  $t \rightarrow y \rightarrow z$  contribuye:  $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

La derivada total es la suma de las contribuciones de ambos caminos.

##### Ejemplo 1: Caso básico

Sea  $z = x^2 + xy + y^2$  donde  $x = t^2$  y  $y = t^3$ . Calcular  $\frac{dz}{dt}$ .

**Solución:**

**Método 1: Aplicando la regla de la cadena**

Primero calculamos las derivadas parciales de  $z$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x + 2y\end{aligned}$$

Luego las derivadas de  $x$  e  $y$  respecto a  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2t \\ \frac{dy}{dt} &= 3t^2\end{aligned}$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= (2x + y)(2t) + (x + 2y)(3t^2) \\ &= (2t^2 + t^3)(2t) + (t^2 + 2t^3)(3t^2) \\ &= 4t^3 + 2t^4 + 3t^4 + 6t^5 \\ &= \boxed{6t^5 + 5t^4 + 4t^3}\end{aligned}$$

### Método 2: Sustitución directa (verificación)

Sustituimos  $x = t^2$  y  $y = t^3$  en  $z$ :

$$\begin{aligned}z &= (t^2)^2 + (t^2)(t^3) + (t^3)^2 \\ &= t^4 + t^5 + t^6\end{aligned}$$

Derivamos directamente:

$$\frac{dz}{dt} = 4t^3 + 5t^4 + 6t^5 = \boxed{6t^5 + 5t^4 + 4t^3}$$

**Ambos métodos dan el mismo resultado.**

### Ejemplo 2: Funciones trigonométricas

Sea  $z = e^x \sin(y)$  donde  $x = t^2$  y  $y = \pi t$ . Calcular  $\frac{dz}{dt}$  cuando  $t = 1$ .

**Solución:**

Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= e^x \sin(y) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= e^x \cos(y)\end{aligned}$$

Las derivadas respecto a  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2t \\ \frac{dy}{dt} &= \pi\end{aligned}$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= e^x \sin(y) \cdot 2t + e^x \cos(y) \cdot \pi \\ &= e^{t^2} [\sin(\pi t) \cdot 2t + \cos(\pi t) \cdot \pi]\end{aligned}$$

Evaluamos en  $t = 1$ :

$$\begin{aligned}\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1} &= e^1 [\sin(\pi) \cdot 2 + \cos(\pi) \cdot \pi] \\ &= e[0 \cdot 2 + (-1) \cdot \pi] \\ &= \boxed{-\pi e}\end{aligned}$$

### Caso 2: Función de dos variables con dependencia de dos variables.

**Teorema (Regla de la cadena - Caso 2):** Sea  $z = f(x, y)$  donde:

- $x = x(u, v)$
- $y = y(u, v)$

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

**Visualización para el Caso 2.** Para este caso más complejo, existen cuatro caminos desde las variables  $u$  y  $v$  hasta  $z$ :

**Caminos de dependencia para el Caso 2:** Cuatro caminos:

- **Camino 1:**  $u \rightarrow x \rightarrow z$  contribuye:  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$
- **Camino 2:**  $u \rightarrow y \rightarrow z$  contribuye:  $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$
- **Camino 3:**  $v \rightarrow x \rightarrow z$  contribuye:  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$
- **Camino 4:**  $v \rightarrow y \rightarrow z$  contribuye:  $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

### Ejemplo 3: Coordenadas polares

Sea  $z = x^2 + y^2$  donde  $x = r \cos(\theta)$  y  $y = r \sin(\theta)$ . Calcular  $\frac{\partial z}{\partial r}$  y  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ .

**Solución:**

Calculamos las derivadas parciales de  $z$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y\end{aligned}$$

Las derivadas de  $x$  e  $y$  respecto a  $r$  y  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos(\theta), & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin(\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin(\theta), & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos(\theta)\end{aligned}$$

**Para  $\frac{\partial z}{\partial r}$ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= 2x \cdot \cos(\theta) + 2y \cdot \sin(\theta) \\ &= 2r \cos^2(\theta) + 2r \sin^2(\theta) \\ &= 2r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= \boxed{2r}\end{aligned}$$

**Para  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= 2x \cdot (-r \sin(\theta)) + 2y \cdot r \cos(\theta) \\ &= -2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &= \boxed{0}\end{aligned}$$

**Interpretación:**  $\frac{\partial z}{\partial r} = 2r$  indica que  $z$  crece linealmente con  $r$ .  $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$  confirma que  $z = x^2 + y^2$  no depende del ángulo (es simétrica circularmente).

#### Ejemplo 4: Caso general

Sea  $z = x^2y + xy^2$  donde  $x = uv$  y  $y = u - v$ . Calcular  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .

**Solución:**

Derivadas parciales de  $z$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2xy + y^2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 + 2xy\end{aligned}$$

Derivadas de  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= v, & \frac{\partial x}{\partial v} &= u \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= 1, & \frac{\partial y}{\partial v} &= -1\end{aligned}$$

**Para  $\frac{\partial z}{\partial u}$ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= (2xy + y^2) \cdot v + (x^2 + 2xy) \cdot 1 \\ &= v(2xy + y^2) + x^2 + 2xy\end{aligned}$$

Sustituyendo  $x = uv$  y  $y = u - v$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= v[2uv(u - v) + (u - v)^2] + (uv)^2 + 2uv(u - v) \\ &= 2uv^2(u - v) + v(u - v)^2 + u^2v^2 + 2uv(u - v) \\ &= \boxed{2u^2v^2 - 2uv^3 + u^2v - 2uv^2 + v^3 + u^2v^2 + 2u^2v - 2uv^2}\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \boxed{3u^2v^2 + 2u^2v + u^2v - 4uv^2 + v^3}$$

**Para  $\frac{\partial z}{\partial v}$ :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= (2xy + y^2) \cdot u + (x^2 + 2xy) \cdot (-1) \\ &= u(2xy + y^2) - x^2 - 2xy\end{aligned}$$

(Se puede desarrollar de manera similar sustituyendo valores)

**Caso 3: Derivada implícita.** Cuando tenemos una ecuación implícita  $F(x, y) = 0$ , podemos usar la regla de la cadena para encontrar  $\frac{dy}{dx}$ .

**Derivación implícita:** Para  $F(x, y) = 0$ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

**Generalización:** Para  $F(x, y, z) = 0$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

### Ejemplo 5: Derivación implícita

Para la ecuación  $x^3 + y^3 + xyz = 10$ , calcular  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**Solución:**

Sea  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + xyz - 10$

Calculamos las derivadas parciales de  $F$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 3x^2 + yz \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 3y^2 + xz \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= xy\end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 + yz}{xy} = \boxed{-\frac{3x^2 + yz}{xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 + xz}{xy} = \boxed{-\frac{3y^2 + xz}{xy}}$$

### Aplicaciones prácticas.

1. **Física:** Cambio de coordenadas (cartesianas a polares, cilíndricas, esféricas)
2. **Termodinámica:** Relaciones entre variables de estado
3. **Optimización:** Funciones objetivo con restricciones paramétricas
4. **Ingeniería:** Análisis de sensibilidad en sistemas complejos
5. **Cinemática:** Velocidad y aceleración en trayectorias curvas

### Ejercicios propuestos.

1. Sea  $z = x^2 - y^2$  donde  $x = e^t$  y  $y = e^{-t}$ . Calcular  $\frac{dz}{dt}$ .
2. Sea  $w = xyz$  donde  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ . Calcular  $\frac{dw}{dt}$  cuando  $t = 2$ .
3. Sea  $z = \ln(x^2 + y^2)$  donde  $x = r \cos(\theta)$  y  $y = r \sin(\theta)$ . Calcular  $\frac{\partial z}{\partial r}$  y  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ .

4. Sea  $z = e^{x+y}$  donde  $x = u^2 - v^2$  y  $y = 2uv$ . Calcular  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .
5. Para la ecuación implícita  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ , calcular  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .
6. Sea  $w = f(x, y, z)$  donde  $x = r \sin(\phi) \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\phi) \sin(\theta)$ ,  $z = r \cos(\phi)$  (coordenadas esféricas). Expresar  $\frac{\partial w}{\partial r}$  usando la regla de la cadena.
7. Verificar que si  $z = f(x - y, y - x)$ , entonces  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

Caso	Fórmula
$z = f(x, y)$ , $x = x(t)$ , $y = y(t)$	$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$
$z = f(x, y)$ , $x = x(u, v)$ , $y = y(u, v)$	$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$
$F(x, y, z) = 0$	$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}$

Cuadro 2: Resumen de casos de la regla de la cadena.

#### Resumen de la regla de la cadena.

##### 4.1.4. Ejercicios: Derivadas parciales de primer orden

Calcula  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  para las siguientes funciones:

1.  $f(x, y) = x^2 + 3x + y^2 + 5$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

2.  $f(x, y) = e^{2x^2+xy+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2x^2+xy+y^2}(4x + y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x^2+xy+y^2}(x + 2y)$$

3.  $f(x, y) = \sin(3x + 2y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cos(3x + 2y^2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y \cos(3x + 2y^2)$$

4.  $f(x, y) = x^3 + y^5 - 3x^2y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - 3x^2$$

5.  $f(x, y) = \frac{x^4y^3}{6} - \frac{2xy^6}{3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^3y^3}{6} - \frac{2y^6}{3} = \frac{2x^3y^3}{3} - \frac{2y^6}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^4y^2}{6} - \frac{12xy^5}{3} = \frac{x^4y^2}{2} - 4xy^5$$

$$6. f(x, y) = 6x^2 \cos(y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x \cos(y^3) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -18x^2 y^2 \sin(y^3)$$

$$7. f(x, y) = (5x^2 + 3xy - y^3)^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5(5x^2 + 3xy - y^3)^4(10x + 3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5(5x^2 + 3xy - y^3)^4(3x - 3y^2)$$

#### 4.1.5. Ejercicios: Derivadas parciales de segundo orden

Calcula todas las derivadas parciales de segundo orden  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , y  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  para las siguientes funciones:

$$1. f(x, y) = x^3 + y^5 - 3x^2y$$

$$\text{Primeras derivadas: } \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - 3x^2$$

Segundas derivadas:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6y$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20y^3$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6x$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6x$

$$2. f(x, y) = \frac{x^4 y^3}{6} - \frac{2x y^6}{3}$$

$$\text{Primeras derivadas: } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^3 y^3}{3} - \frac{2y^6}{3} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4 y^2}{2} - 4x y^5$$

Segundas derivadas:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x^2 y^3$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^4 y - 20x y^4$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x^3 y^2 - 4y^5$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x^3 y^2 - 4y^5$

$$3. f(x, y) = 6x^2 \cos(y^3)$$

$$\text{Primeras derivadas: } \frac{\partial f}{\partial x} = 12x \cos(y^3) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -18x^2 y^2 \sin(y^3)$$

Segundas derivadas:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 \cos(y^3)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -36x^2y \sin(y^3) - 54x^2y^4 \cos(y^3)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -36xy^2 \sin(y^3)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -36xy^2 \sin(y^3)$

4.  $f(x, y) = \cos(x^4 + y^7)$

**Primeras derivadas:**  $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 \sin(x^4 + y^7)$      $\frac{\partial f}{\partial y} = -7y^6 \sin(x^4 + y^7)$

**Segundas derivadas:**

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2 \sin(x^4 + y^7) - 16x^6 \cos(x^4 + y^7)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -42y^5 \sin(x^4 + y^7) - 49y^{12} \cos(x^4 + y^7)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -28x^3y^6 \cos(x^4 + y^7)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -28x^3y^6 \cos(x^4 + y^7)$

5.  $f(x, y) = (30 - 6x + 2y)(4x - 5)$

**Simplificando:**  $f(x, y) = 120x - 150 - 24x^2 + 30x + 8xy - 10y = -24x^2 + 8xy + 150x - 10y - 150$

**Primeras derivadas:**  $\frac{\partial f}{\partial x} = -48x + 8y + 150$      $\frac{\partial f}{\partial y} = 8x - 10$

**Segundas derivadas:**

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -48$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 8$

6.  $f(x, y) = x^3(4x + 5y) = 4x^4 + 5x^3y$

**Primeras derivadas:**  $\frac{\partial f}{\partial x} = 16x^3 + 15x^2y$      $\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^3$

**Segundas derivadas:**

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 48x^2 + 30xy$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 15x^2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 15x^2$

7.  $f(x, y) = y^4(2x + 3y) = 2xy^4 + 3y^5$

**Primeras derivadas:**  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^4$      $\frac{\partial f}{\partial y} = 8xy^3 + 15y^4$

**Segundas derivadas:**

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24xy^2 + 60y^3$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8y^3$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 8y^3$

8.  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

**Primeras derivadas:**  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(x^2 + y^2) - x^2(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x^2(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

**Segundas derivadas:**

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2(x^2 + y^2)^2 - 2xy^2 \cdot 2(x^2 + y^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{2y^2(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^2(x^2 + y^2)^2 - (-2x^2y) \cdot 2(x^2 + y^2)(2y)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-2x^2(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy(x^2 + y^2)^2 - 2xy^2 \cdot 2(x^2 + y^2)(2y)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-4xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$

## 4.2. Vector gradiente y derivada direccional

### Vector gradiente y derivada direccional: Concepto unificador

El gradiente es uno de los conceptos más importantes del cálculo multivariable. Unifica todas las derivadas parciales en un solo vector que apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función. La derivada direccional nos permite medir la tasa de cambio en cualquier dirección deseada.

**Introducción y contextualización.** Hasta ahora hemos estudiado las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , que miden cómo cambia la función cuando nos movemos en las direcciones de los ejes coordenados. Pero, ¿qué sucede si queremos saber cómo cambia la función cuando nos movemos en cualquier otra dirección?

Imagina que estás de excursión en una montaña y tienes un mapa topográfico con curvas de nivel. Las derivadas parciales te dicen qué tan empinado es el terreno si caminas exactamente hacia el norte ( $y$ ) o hacia el este ( $x$ ). Pero si quieres caminar en dirección noreste, o en cualquier otra dirección, necesitas un concepto más general: **la derivada direccional**.

Además, si quieres encontrar la dirección más empinada para subir (o bajar) lo más rápido posible, necesitas el **vector gradiente**, que siempre apunta en la dirección de máxima pendiente ascendente.

#### 4.2.1. Cálculo e interpretación geométrica del gradiente y derivada direccional

**Definición:** Vector gradiente.

**Definición:** Sea  $f(x, y)$  una función diferenciable. El **gradiente** de  $f$  se denota  $\nabla f$  (se lee "nabla  $f$ ") y se define como:

$$\nabla f(x, y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

**Para funciones de tres variables:**  $f(x, y, z)$ :

$$\nabla f(x, y, z) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

**Notación alternativa:** También se escribe como  $\text{grad } f$ .

El gradiente es un **campo vectorial**: en cada punto  $(x, y)$  del dominio de  $f$ , el gradiente  $\nabla f(x, y)$  es un vector.

**Propiedades geométricas del gradiente.** El vector gradiente tiene propiedades geométricas fundamentales:

1. **Dirección:**  $\nabla f$  apunta en la dirección de máximo crecimiento de  $f$ .
2. **Magnitud:**  $\|\nabla f\|$  es la razón de cambio máxima de  $f$  en ese punto.
3. **Perpendicularidad:**  $\nabla f$  es perpendicular a las curvas de nivel de  $f$ .
4. **Cero en puntos críticos:** Si  $\nabla f = \mathbf{0}$ , entonces  $(x, y)$  es un punto crítico.

Ejemplo 1: Cálculo del gradiente

Calcular el gradiente de  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  y evaluarlo en el punto  $(1, 2)$ .

**Solución:**

Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x + 2y\end{aligned}$$

Por lo tanto, el gradiente es:

$$\nabla f(x, y) = \langle 2x + y, x + 2y \rangle$$

Evaluamos en  $(1, 2)$ :

$$\nabla f(1, 2) = \langle 2(1) + 2, 1 + 2(2) \rangle = \langle 4, 5 \rangle$$

**Interpretación:** En el punto  $(1, 2)$ , la función crece más rápidamente en la dirección del vector  $\langle 4, 5 \rangle$ , con una razón de cambio de  $\|\langle 4, 5 \rangle\| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6,40$ .

### Ejemplo 2: Gradiente de función exponencial

Calcular  $\nabla f$  para  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$  en el punto  $(0, 0)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 2ye^{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\nabla f(x, y) = \langle 2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2} \rangle$$

En  $(0, 0)$ :

$$\nabla f(0, 0) = \langle 2(0)e^0, 2(0)e^0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

**Interpretación:** El punto  $(0, 0)$  es un punto crítico (en este caso, un mínimo local).

**Definición: Derivada direccional.** Las derivadas parciales miden el cambio de  $f$  en las direcciones de los ejes. La derivada direccional generaliza esto a cualquier dirección.

**Definición:** Sea  $f(x, y)$  una función diferenciable y  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  un **vector unitario** (es decir,  $\|\mathbf{u}\| = 1$ ). La **derivada direccional** de  $f$  en la dirección de  $\mathbf{u}$  se denota  $D_{\mathbf{u}}f$  y se define como:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ha, y + hb) - f(x, y)}{h}$$

**Fórmula práctica:** Si  $f$  es diferenciable:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b$$

Esta fórmula nos dice que la derivada direccional es el producto punto entre el gradiente y el vector de dirección.

**Relación entre gradiente y derivada direccional.** La relación entre el gradiente y la derivada direccional es fundamental:

**Teorema:** Sea  $f$  diferenciable y  $\mathbf{u}$  un vector unitario. Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\| \|\mathbf{u}\| \cos(\theta) = \|\nabla f\| \cos(\theta)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\nabla f$  y  $\mathbf{u}$ .

**Consecuencias importantes:**

- **Máximo:**  $D_{\mathbf{u}}f$  es máxima cuando  $\theta = 0$ , es decir, cuando  $\mathbf{u}$  apunta en la dirección de  $\nabla f$ . El valor máximo es  $\|\nabla f\|$ .
- **Mínimo:**  $D_{\mathbf{u}}f$  es mínima cuando  $\theta = \pi$ , es decir, cuando  $\mathbf{u}$  apunta en dirección opuesta a  $\nabla f$ . El valor mínimo es  $-\|\nabla f\|$ .
- **Cero:**  $D_{\mathbf{u}}f = 0$  cuando  $\theta = \pi/2$ , es decir, cuando  $\mathbf{u}$  es perpendicular a  $\nabla f$ . Esto ocurre en la dirección tangente a la curva de nivel.

Ejemplo 3: Derivada direccional básica

Sea  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Calcular la derivada direccional en el punto  $(3, 4)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Calcular el gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\end{aligned}$$

$$\nabla f(3, 4) = \langle 2(3), 2(4) \rangle = \langle 6, 8 \rangle$$

**Paso 2:** Normalizar el vector de dirección:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle\end{aligned}$$

**Paso 3:** Calcular la derivada direccional:

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f(3, 4) &= \nabla f(3, 4) \cdot \mathbf{u} \\ &= \langle 6, 8 \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \\ &= \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} \approx [9, 90]\end{aligned}$$

**Interpretación:** Si nos movemos desde (3, 4) en dirección 45 (noreste), la función aumenta a una razón de aproximadamente 9,90 unidades por unidad de distancia.

#### Ejemplo 4: Dirección de máximo crecimiento

Para  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$  en el punto (2, 1):

1. Encontrar la dirección de máximo crecimiento.
2. Calcular la razón de cambio máxima.
3. Encontrar la dirección de máximo decrecimiento.

**Solución:**

Calculamos el gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x + 2y\end{aligned}$$

$$\nabla f(2, 1) = \langle 2(2) - 1, -2 + 2(1) \rangle = \langle 3, 0 \rangle$$

**a) Dirección de máximo crecimiento:**

El vector gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento. El vector unitario correspondiente es:

$$\mathbf{u}_{\max} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\langle 3, 0 \rangle}{3} = \boxed{\langle 1, 0 \rangle}$$

La dirección es horizontal hacia la derecha (dirección positiva del eje  $x$ ).

**b) Razón de cambio máxima:**

$$\text{Razón máxima} = \|\nabla f(2, 1)\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \boxed{3}$$

**c) Dirección de máximo decrecimiento:**

Es la dirección opuesta al gradiente:

$$\mathbf{u}_{\min} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \boxed{\langle -1, 0 \rangle}$$

La razón de decrecimiento es  $-3$ .

#### Ejemplo 5: Temperatura y flujo de calor

La temperatura en una placa metálica está dada por:

$$T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$$

donde  $T$  se mide en grados Celsius y  $x, y$  en metros.

1. Encontrar la dirección de máximo incremento de temperatura en el punto (2, 1).

2. ¿Cuál es la razón de cambio máxima en ese punto?
3. En qué dirección no cambia la temperatura (curva isotérmica)?

**Solución:**

**Calculamos el gradiente:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &= -2x \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= -4y\end{aligned}$$

$$\nabla T(2, 1) = \langle -2(2), -4(1) \rangle = \langle -4, -4 \rangle$$

**a) Dirección de máximo incremento:**

$$\mathbf{u}_{\max} = \frac{\langle -4, -4 \rangle}{\sqrt{16+16}} = \frac{\langle -4, -4 \rangle}{4\sqrt{2}} = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Esta dirección apunta hacia el suroeste (225).

**b) Razón de cambio máxima:**

$$\|\nabla T(2, 1)\| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \approx 5,66 \text{ } ^\circ\text{C/m}$$

**c) Dirección sin cambio:**

La temperatura no cambia en direcciones perpendiculares al gradiente. Si  $\nabla T = \langle -4, -4 \rangle$ , las direcciones perpendiculares son:

$$\mathbf{u}_\perp = \pm \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Estas direcciones son tangentes a la curva isotérmica (curva de nivel de temperatura constante).

## Interpretación física y geométrica.

**Interpretaciones del gradiente:**

**1. Geométrica:**

- El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel.
- Apunta hacia arriba en la superficie  $z = f(x, y)$ .
- Su magnitud indica qué tan empinada es la superficie.

**2. Física (campo de temperaturas):**

- $\nabla T$  apunta en la dirección del flujo de calor.
- $\|\nabla T\|$  indica la intensidad del gradiente térmico.
- El calor fluye de regiones calientes a frías.

### 3. Optimización:

- Para maximizar  $f$ , seguir la dirección de  $\nabla f$ .
- Para minimizar  $f$ , seguir la dirección de  $-\nabla f$ .
- Este principio es la base del algoritmo de **gradiente descendente** en machine learning.

## Aplicaciones prácticas.

### 1. Física:

- Campos conservativos:  $\mathbf{F} = -\nabla U$  (fuerza desde potencial)
- Ley de Fourier: flujo de calor proporcional a  $-\nabla T$
- Ley de Fick: difusión proporcional a  $-\nabla C$  (concentración)

### 2. Ingeniería:

- Optimización de diseños estructurales
- Control de procesos industriales
- Análisis de distribución de esfuerzos

### 3. Machine Learning:

- Gradiente descendente para entrenar redes neuronales
- Minimización de funciones de pérdida
- Backpropagation (propagación hacia atrás)

### 4. Geografía y topografía:

- Determinación de pendientes máximas
- Análisis de escorrentía de agua
- Planificación de rutas

### 5. Economía:

- Dirección de máximo beneficio
- Análisis marginal multivariable
- Optimización de portafolios

## Ejercicios propuestos.

1. Calcular  $\nabla f$  para las siguientes funciones:

- a)  $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$
- b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- c)  $f(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$

2. Para  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ , encontrar:
  - a) El gradiente en  $(1, 1)$
  - b) La dirección de máximo crecimiento en ese punto
  - c) La razón de cambio máxima
3. Calcular  $D_{\mathbf{u}}f(2, 3)$  para  $f(x, y) = e^{x-y}$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$ .
4. Demostrar que para  $f(x, y) = c$  (constante),  $\nabla f = \mathbf{0}$ .
5. Si la temperatura en el espacio está dada por  $T(x, y, z) = 100 - x^2 - y^2 - z^2$ , encontrar la dirección de máximo enfriamiento en el punto  $(1, 2, 2)$ .
6. Demostrar que  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$  (regla del producto para gradientes).
7. Para  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , verificar que el gradiente es perpendicular a las curvas de nivel calculando  $\nabla f \cdot \mathbf{T}$ , donde  $\mathbf{T}$  es el vector tangente a la curva de nivel.
8. En el punto  $(1, 2)$  de la superficie  $z = x^2 + 2y^2$ , encontrar la dirección en la que la altura  $z$  no cambia.

#### 4.2.2. Representar SW vectores gradientes en superficies

### 4.3. Extremos de funciones multivariadas

#### Extremos de funciones multivariadas: Teoría, métodos y aplicaciones

El estudio de extremos en funciones de varias variables es uno de los temas más importantes del cálculo avanzado. Los máximos y mínimos (locales y globales) determinan el comportamiento óptimo de sistemas en ciencia e ingeniería. Desde maximizar ganancias en economía hasta minimizar energía en física, la caracterización de extremos multivariados es fundamental.

**Introducción y motivación.** En cálculo de una variable, aprendemos a encontrar extremos mediante la condición  $f'(x) = 0$  y la prueba de la segunda derivada. Para funciones de varias variables, estos conceptos se generalizan de forma natural pero con mayor riqueza geométrica.

#### ¿Por qué es importante estudiar extremos de funciones multivariadas?

- **Optimización real:** Problemas prácticos involucran múltiples variables. Maximizar utilidad depende de precio y cantidad; minimizar costo depende de múltiples recursos.
- **Complejidad geométrica:** A diferencia de una variable donde solo hay máximos y mínimos, en varias variables aparecen *puntos de silla*: direcciones donde la función sube en algunos sentidos pero baja en otros.
- **Machine Learning:** El entrenamiento de redes neuronales es un problema de minimización en espacios de dimensión muy alta (millones de variables).
- **Ciencia:** Sistemas naturales tienden a estados de *mínima energía* (termodinámica, mecánica cuántica).

- **Economía y administración:** Encontrar combinaciones óptimas de insumos, precio y cantidad bajo restricciones presupuestarias.

**Conexión con conceptos anteriores.** Ya hemos estudiado:

1. **Derivadas parciales** ( $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ): Tasas de cambio en direcciones de ejes.
2. **Vector gradiente** ( $\nabla f$ ): Síntesis de todas las derivadas parciales, apunta en dirección de máximo crecimiento.
3. **Derivada direccional:** Tasa de cambio en cualquier dirección.

Ahora usaremos estos conceptos para caracterizar extremos. La estrategia es:

1. **Paso 1:** Encontrar puntos críticos donde  $\nabla f = \mathbf{0}$ .
2. **Paso 2:** Usar la **matriz Hessiana** (generalización multivariable de la segunda derivada) para clasificar cada punto crítico.
3. **Paso 3:** Considerar restricciones usando **multiplicadores de Lagrange**.
4. **Paso 4:** Visualizar gráficamente para validar y comunicar resultados.

**Estructura de esta subsección.** Esta subsección está organizada en cinco partes progresivas:

Sección	Descripción
4.3.1 Valores Críticos	Identificación de puntos donde $\nabla f = \mathbf{0}$ . Conceptos fundamentales.
4.3.2 Máximos	Caracterización de máximos locales y globales usando la Hessiana.
4.3.3 Mínimos	Caracterización de mínimos. Diferencias críticas con máximos.
4.3.4 Método de Lagrange	Optimización bajo restricciones de igualdad. Multiplicadores de Lagrange.
4.3.5 Visualización	Representación gráfica: contornos, superficies 3D, interpretación geométrica.

Cuadro 3: Estructura jerárquica de la subsección 4.3 — Extremos de funciones multivariadas.

**Herramientas matemáticas clave.** Para esta subsección necesitaremos:

- **Gradiente:**  $\nabla f = (f_x, f_y)$  — Vectores de derivadas parciales.
  - **Matriz Hessiana:**  $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$  — Derivadas segundas. Determina si un punto es máximo, mínimo o silla.
  - **Determinante de la Hessiana:**  $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$  — Indicador clave de naturaleza del punto crítico.

- **Valores propios:**  $\lambda_1, \lambda_2$  de la Hessiana — Determinan curvatura en direcciones principales.
- **Función de Lagrange:**  $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$  — Para problemas con restricciones.

**Ejemplo introductorio: Análisis completo.** Para motivar el estudio, consideremos un ejemplo que demanda todos los pasos:

**Problema:** Una empresa produce dos productos. La función de ganancia es:

$$P(x, y) = 50x + 40y - x^2 - y^2 - xy + 100$$

donde  $x$  es cantidad del producto A e  $y$  es cantidad del producto B (en miles de unidades).

**Pregunta:** ¿Cuántas unidades de cada producto se deben producir para maximizar ganancia?

**Solución (bosquejo):**

1. **Encontrar críticos:**  $P_x = 50 - 2x - y = 0$  y  $P_y = 40 - 2y - x = 0$ .

Resolviendo:  $x = 20$ ,  $y = 10$ .

2. **Clasificar:** Hessiana:  $H = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Determinante:  $D = 4 - 1 = 3 > 0$ ,  $P_{xx} = -2 < 0 \rightarrow \text{Máximo local}$ .
3. **Verificar restricciones:** Si  $x, y \geq 0$  (no se pueden producir cantidades negativas), entonces  $(20, 10)$  es válido.
4. **Ganancia máxima:**  $P(20, 10) = 1000 + 400 - 400 - 100 - 200 + 100 = 800$  mil unidades monetarias.

**Conclusión:** La empresa debe producir 20,000 unidades de A y 10,000 unidades de B para lograr ganancia máxima de 800,000 unidades monetarias.

Ahora desarrollaremos los conceptos teóricos para resolver problemas como este de manera sistemática.

#### 4.3.1. Valores críticos

##### Valores críticos: Fundamentos y aplicaciones

Los puntos críticos de una función multivariable son puntos donde las derivadas parciales se anulan simultáneamente. Estos puntos son fundamentales para identificar candidatos a extremos locales (máximos y mínimos) de la función. El análisis de valores críticos es esencial en optimización, economía, física e ingeniería.

**Introducción.** En cálculo de una variable, encontramos extremos (máximos y mínimos) analizando donde  $f'(x) = 0$ . Para funciones de varias variables, el concepto se generaliza: buscamos puntos donde el gradiente es cero, es decir, donde todas las derivadas parciales se anulan simultáneamente.

Estos puntos son candidatos a extremos locales y puntos de silla, siendo cruciales para:

- **Optimización:** Maximizar ganancias o minimizar costos
- **Física:** Encontrar estados de equilibrio o energía mínima
- **Machine Learning:** Entrenar modelos minimizando funciones de pérdida
- **Ingeniería:** Diseñar estructuras óptimas

### Definición formal de puntos críticos.

**Definición:** Sea  $f(x, y)$  una función definida en una región del plano. Un punto  $(x_0, y_0)$  es un **punto crítico** (o estacionario) de  $f$  si:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Equivalentemente:  $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$

**Generalización a tres variables:** Para  $f(x, y, z)$ , un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  es crítico si:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

**Interpretación geométrica:** El punto crítico es donde el vector gradiente apunta en dirección cero, indicando que no hay dirección de cambio inmediato.

### Interpretación geométrica.

- En una superficie  $z = f(x, y)$ , un punto crítico es donde el plano tangente es **horizontal**.
- No hay pendiente ni en la dirección  $x$  ni en la dirección  $y$ .
- Estos puntos pueden ser picos (máximos), valles (mínimos), o puntos de silla (ni máximo ni mínimo).

**Procedimiento para encontrar puntos críticos.** **Paso 1:** Calcular las derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$

**Paso 2:** Establecer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 \\ f_y(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

**Paso 3:** Resolver el sistema para obtener los puntos  $(x_0, y_0)$

**Paso 4:** Verificar cada solución (algunos sistemas pueden no tener solución o tener infinitas)

#### Ejemplo 1: Función polinomial simple

Encontrar los puntos críticos de  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5$ .

**Solución:**

### Interpretación geométrica de puntos críticos

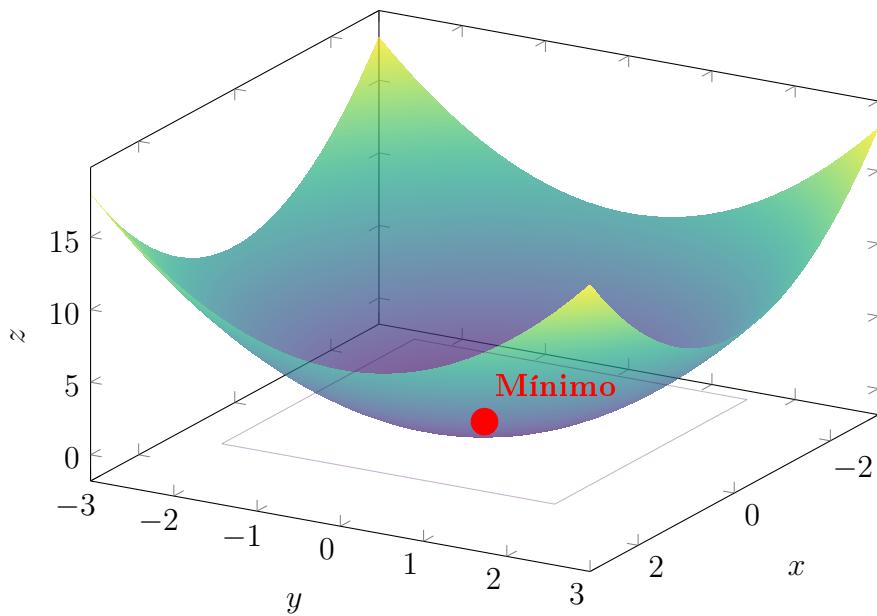


Figura 14: Punto crítico en  $(0, 0, 0)$ : plano tangente horizontal (mínimo).

**Paso 1:** Calcular las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y + 6\end{aligned}$$

**Paso 2:** Establecer el sistema

$$\begin{aligned}2x - 4 &= 0 \\ 2y + 6 &= 0\end{aligned}$$

**Paso 3:** Resolver

$$\begin{aligned}x &= 2 \\ y &= -3\end{aligned}$$

**Resultado:** El único punto crítico es  $\boxed{(2, -3)}$ .

**Verificación:**  $f(2, -3) = 4 + 9 - 8 - 18 + 5 = -8$ . Podemos reescribir la función completando cuadrados:

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 8$$

Esto confirma que  $(2, -3)$  es un mínimo absoluto con valor  $-8$ .

### Ejemplo 2: Función con términos mixtos

Encontrar los puntos críticos de  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3x\end{aligned}$$

**Paso 2:** Sistema de ecuaciones

$$3x^2 - 3y = 0 \implies y = x^2 \quad (1)$$

$$3y^2 - 3x = 0 \implies x = y^2 \quad (2)$$

**Paso 3:** Resolver sustituyendo (1) en (2)

$$\begin{aligned}x &= (x^2)^2 \\ x &= x^4 \\ x^4 - x &= 0 \\ x(x^3 - 1) &= 0\end{aligned}$$

Esto da  $x = 0$  o  $x = 1$ .

Para  $x = 0$ :  $y = 0^2 = 0 \rightarrow$  Punto crítico:  $(0, 0)$

Para  $x = 1$ :  $y = 1^2 = 1 \rightarrow$  Punto crítico:  $(1, 1)$

**Resultado:** Los puntos críticos son  $\boxed{(0, 0) \text{ y } (1, 1)}$ .

**Nota:** Para determinar si son máximos, mínimos o puntos de silla, necesitaríamos la prueba de la segunda derivada (que veremos en la siguiente sección).

### Ejemplo 3: Función exponencial

Encontrar los puntos críticos de  $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 - 2y^2)$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Calcular las derivadas parciales usando la regla del producto

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x+y}(x^2 - 2y^2) + e^{x+y}(2x) \\ &= e^{x+y}(x^2 + 2x - 2y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x+y}(x^2 - 2y^2) + e^{x+y}(-4y) \\ &= e^{x+y}(x^2 - 2y^2 - 4y)\end{aligned}$$

**Paso 2:** Establecer el sistema. Como  $e^{x+y} \neq 0$  para todo  $(x, y)$ :

$$x^2 + 2x - 2y^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 2y^2 - 4y = 0 \quad (2)$$

**Paso 3:** Restar (2) de (1)

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x - 2y^2) - (x^2 - 2y^2 - 4y) &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \\ x &= -2y\end{aligned}\tag{3}$$

**Paso 4:** Sustituir (3) en (2)

$$\begin{aligned}(-2y)^2 - 2y^2 - 4y &= 0 \\ 4y^2 - 2y^2 - 4y &= 0 \\ 2y^2 - 4y &= 0 \\ 2y(y - 2) &= 0\end{aligned}$$

Entonces  $y = 0$  o  $y = 2$ .

Para  $y = 0$ :  $x = 0 \rightarrow$  Punto:  $(0, 0)$

Para  $y = 2$ :  $x = -4 \rightarrow$  Punto:  $(-4, 2)$

**Resultado:** Los puntos críticos son  $\boxed{(0, 0) \text{ y } (-4, 2)}$ .

Ejemplo 4: Sistema con una única solución (función racional)

Encontrar los puntos críticos de  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Derivadas parciales (usando la regla de la cadena)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

**Paso 2:** Sistema de ecuaciones. El denominador nunca es cero, así:

$$\begin{aligned}-2x &= 0 \implies x = 0 \\ -2y &= 0 \implies y = 0\end{aligned}$$

**Resultado:** El único punto crítico es  $\boxed{(0, 0)}$  con valor  $f(0, 0) = 1$  (máximo absoluto).

Ejemplo 5: Función de tres variables

Encontrar los puntos críticos de  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x + 4y - 6z + 5$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y + 4 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 6z - 6\end{aligned}$$

**Paso 2:** Sistema

$$\begin{aligned}2x - 2 = 0 &\implies x = 1 \\ 4y + 4 = 0 &\implies y = -1 \\ 6z - 6 = 0 &\implies z = 1\end{aligned}$$

**Resultado:** El único punto crítico es  $(1, -1, 1)$  con valor  $f(1, -1, 1) = 1 - 2 + 3 - 2 - 4 - 6 + 5 = -5$ .

Completando cuadrados podemos verificar:

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 + 3(z - 1)^2 - 5$$

El punto es un mínimo absoluto.

**Clasificación de puntos críticos.** No todos los puntos críticos son máximos o mínimos. Existen tres tipos:

**Tipos de puntos críticos:**

1. **Máximo local:** La función alcanza su valor más grande en una vecindad del punto.
2. **Mínimo local:** La función alcanza su valor más pequeño en una vecindad del punto.
3. **Punto de silla:** El punto es máximo en algunas direcciones y mínimo en otras.  
**Nota importante:** Para determinar el tipo de punto crítico, se usa el **test de la segunda derivada parcial** (matriz Hessiana), que estudiaremos en la siguiente subsección.

**Condiciones necesarias vs. suficientes.**

**Teorema (Condición necesaria):** Si  $f(x, y)$  tiene un extremo local en  $(x_0, y_0)$  y las derivadas parciales existen en ese punto, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

**Importante:** Esta es una condición **necesaria** pero **NO suficiente**. Un punto crítico puede no ser extremo (puede ser punto de silla).

**Observación:** La condición se vuelve suficiente si se combina con la prueba de la segunda derivada (veremos próximamente).

## Puntos críticos en contextos aplicados.

### Aplicaciones prácticas de puntos críticos

#### 1. Economía y negocios:

- **Optimización de utilidades:** Encontrar producción  $(x, y)$  que maximice ganancia  $P(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$
- **Análisis de precios:** Determinar precios óptimos para dos productos minimizando costos

#### 2. Física e ingeniería:

- **Principio de energía mínima:** Los sistemas tienden a estados de energía mínima
- **Equilibrio:** Puntos críticos de la energía potencial son puntos de equilibrio

#### 3. Machine Learning:

- **Entrenamiento de redes neuronales:** Minimizar función de pérdida
- **Regresión:** Encontrar parámetros que ajusten mejor los datos

#### 4. Estadística:

- **Estimación MLE:** Maximizar función de verosimilitud
- **Análisis de varianza:** Optimizar modelos de regresión multivariable

#### 5. Control ambiental:

- **Monitoreo de contaminación:** Localizar fuentes de contaminación en dos/tres dimensiones
- **Modelado de calidad de aire:** Puntos críticos en concentraciones de contaminantes

### Aplicación 1: Optimización de producción

Una empresa produce dos tipos de productos cuya ganancia está dada por:

$$P(x, y) = 100x + 120y - x^2 - 2y^2 - xy + 1000$$

donde  $x$  e  $y$  son unidades producidas (en cientos) de cada producto.

Encontrar los niveles de producción que maximizan la ganancia.

**Solución:**

**Paso 1:** Derivadas parciales

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 100 - 2x - y$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 120 - 4y - x$$

**Paso 2:** Establecer el sistema para puntos críticos

$$100 - 2x - y = 0 \implies 2x + y = 100 \quad (1)$$

$$120 - 4y - x = 0 \implies x + 4y = 120 \quad (2)$$

**Paso 3:** Resolver. De (1):  $y = 100 - 2x$

Sustituir en (2):

$$\begin{aligned} x + 4(100 - 2x) &= 120 \\ x + 400 - 8x &= 120 \\ -7x &= -280 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

De (1):  $y = 100 - 80 = 20$

**Resultado:** El punto crítico es  $(40, 20)$  (4000 unidades del primer producto, 2000 del segundo).

**Ganancia máxima:**

$$\begin{aligned} P(40, 20) &= 100(40) + 120(20) - 40^2 - 2(20)^2 - (40)(20) + 1000 \\ &= 4000 + 2400 - 1600 - 800 - 800 + 1000 = 4200 \end{aligned}$$

La ganancia máxima es 4200 unidades monetarias.

## Aplicación 2: Diseño de envase con volumen mínimo

Se desea diseñar una caja rectangular sin tapa, con volumen  $V = 1000 \text{ cm}^3$ . El costo de material es:

$$C(x, y) = 2xy + 10x \cdot h + 10y \cdot h$$

donde  $x$  e  $y$  son las dimensiones de la base (en cm) y  $h = \frac{1000}{xy}$  es la altura (en cm). Encontrar las dimensiones que minimizan el costo.

**Solución:**

Sustituyendo  $h = \frac{1000}{xy}$ :

$$\begin{aligned} C(x, y) &= 2xy + 10x \cdot \frac{1000}{xy} + 10y \cdot \frac{1000}{xy} \\ &= 2xy + \frac{10000}{y} + \frac{10000}{x} \end{aligned}$$

**Derivadas parciales:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= 2y - \frac{10000}{x^2} \\ \frac{\partial C}{\partial y} &= 2x - \frac{10000}{y^2} \end{aligned}$$

### Sistema de ecuaciones:

$$2y - \frac{10000}{x^2} = 0 \implies y = \frac{5000}{x^2} \quad (1)$$

$$2x - \frac{10000}{y^2} = 0 \implies x = \frac{5000}{y^2} \quad (2)$$

**Resolver:** De (1) en (2):

$$x = \frac{5000}{(5000/x^2)^2} = \frac{5000 \cdot x^4}{25000000} = \frac{x^4}{5000}$$

Simplificando:  $5000 = x^3$ , entonces  $x = \sqrt[3]{5000} \approx 17,1$  cm

De (1):  $y = \frac{5000}{(17,1)^2} \approx 17,1$  cm

Por simetría del sistema:  $x = y = \sqrt[3]{5000}$  cm

**Altura:**  $h = \frac{1000}{xy} = \frac{1000}{(\sqrt[3]{5000})^2} = \sqrt[3]{250} \approx 6,3$  cm

**Resultado:** Las dimensiones óptimas son aproximadamente  $17,1 \times 17,1 \times 6,3$  cm  
(base cuadrada).

### Dificultades comunes al encontrar puntos críticos.

- **Sistemas no lineales complejos:** Algunos sistemas no tienen soluciones analíticas. En estos casos, se usan métodos numéricos (Newton-Raphson, etc.)
- **Soluciones infinitas:** A veces el sistema tiene infinitas soluciones (toda una curva o región). Esto indica que la función es constante en esa región.
- **Puntos donde las derivadas no existen:** Estos también son candidatos a extremos. Por ejemplo,  $f(x, y) = |x| + |y|$  tiene un mínimo en  $(0, 0)$  aunque las derivadas no existen ahí.
- **Confundir puntos críticos con extremos:** Recordar que encontrar puntos críticos es solo el primer paso; hay que clasificarlos usando la prueba de la segunda derivada.

**Ejercicios propuestos.** Encontrar todos los puntos críticos de las siguientes funciones:

1.  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 3$
2.  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy$
3.  $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$
4.  $f(x, y) = \frac{x}{y^2+1}$  (Sugerencia: después de derivar, note que el numerador es más importante)
5.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$
6. Una caja rectangular tiene volumen fijo de  $500 \text{ m}^3$ . El costo de construcción es: suelo  $\$5/\text{m}^2$ , paredes  $\$3/\text{m}^2$ , techo  $\$2/\text{m}^2$ . Si las dimensiones de la base son  $x$  e  $y$ , y la altura es  $z$ , encuentre las dimensiones que minimizan el costo total.

7. Para la función  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ , encuentre los puntos críticos e intente clasificarlos observando el gráfico (usando software si es necesario).
8. Demostrar que la función  $f(x, y) = x^2 - y^2$  tiene un punto crítico en  $(0, 0)$  que es un punto de silla.

#### 4.3.2. Máximos

##### Máximos de funciones multivariadas: Teoría y aplicaciones

Los máximos de funciones de varias variables representan los puntos donde la función alcanza sus valores más grandes en una región dada. El análisis de máximos es crucial en optimización, economía, diseño de ingeniería y problemas de control. A diferencia de una variable, una función multivariable puede tener múltiples máximos locales, y distinguir entre máximos locales y globales requiere técnicas especializadas.

**Introducción.** Un máximo de una función multivariable  $f(x, y)$  es un punto donde la función alcanza un valor mayor o igual al de todos los puntos en una vecindad. En el contexto de optimización:

- **Máximo local:**  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  para todo  $(x, y)$  en una vecindad de  $(x_0, y_0)$
- **Máximo global:**  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  para todos los puntos en el dominio
- **Máximo absoluto:** Sinónimo de máximo global
- **Máximo relativo:** Sinónimo de máximo local

##### Definición formal de máximos.

**Definición (Máximo local):** Sea  $f(x, y)$  una función definida en una región  $D$  del plano. Un punto  $(x_0, y_0) \in D$  es un **máximo local** de  $f$  si existe un disco abierto  $B$  centrado en  $(x_0, y_0)$  tal que:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in B \cap D$$

**Definición (Máximo global):** Un punto  $(x_0, y_0)$  es un **máximo global** (o absoluto) si:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in D$$

**Valor del máximo:** El **valor máximo** es el número  $f(x_0, y_0)$ , mientras que  $(x_0, y_0)$  es el **punto donde se alcanza** el máximo.

**Caracterización de máximos mediante la prueba de la segunda derivada.** Para clasificar un punto crítico como máximo, usamos la **matriz Hessiana**:

**Matriz Hessiana:** Para una función  $f(x, y)$  de clase  $C^2$ , la matriz Hessiana en un punto es:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

donde  $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , etc.

**Determinante Hessiano:** Se define:

$$D = \det(H) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

**Prueba de la segunda derivada (2D):** Sea  $(x_0, y_0)$  un punto crítico de  $f$  donde  $f_x = f_y = 0$ :

- Si  $D > 0$  y  $f_{xx} < 0$ :  $(x_0, y_0)$  es un **máximo local**
- Si  $D > 0$  y  $f_{xx} > 0$ :  $(x_0, y_0)$  es un **mínimo local**
- Si  $D < 0$ :  $(x_0, y_0)$  es un **punto de silla**
- Si  $D = 0$ : El test es **no conclusivo**

**Procedimiento sistemático para encontrar máximos.** **Paso 1:** Encontrar todos los puntos críticos resolviendo  $\nabla f = 0$

**Paso 2:** Para cada punto crítico  $(x_0, y_0)$ :

- Calcular las segundas derivadas parciales:  $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$
- Evaluar estas derivadas en el punto crítico
- Calcular  $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$

**Paso 3:** Clasificar usando la prueba de la segunda derivada

**Paso 4:** Para máximos globales, comparar valores en todos los máximos locales y en la frontera (si existe)

Ejemplo 1: Paraboloide - máximo único

Encontrar y clasificar los puntos críticos de  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4x + 6y - 5$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Encontrar puntos críticos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2x + 4 = 0 \implies x = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y + 6 = 0 \implies y = 3 \end{aligned}$$

Punto crítico:  $(2, 3)$

**Paso 2:** Calcular segundas derivadas

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -2 \\ f_{yy} &= -2 \\ f_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

**Paso 3:** Aplicar prueba de segunda derivada

$$\begin{aligned} D &= f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \\ &= (-2)(-2) - 0^2 \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

Como  $D = 4 > 0$  y  $f_{xx} = -2 < 0$ :

**Resultado:**  $(2, 3)$  es un **máximo local**.

**Valor máximo:**  $f(2, 3) = -4 - 9 + 8 + 18 - 5 = 8$

**Verificación:** Completando cuadrados:

$$f(x, y) = -(x - 2)^2 - (y - 3)^2 + 8$$

Esto confirma que  $(2, 3)$  es máximo absoluto con valor 8.

Ejemplo 2: Función con punto de silla

Analizar  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Puntos críticos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0 \implies y = x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -3x + 3y^2 = 0 \implies y^2 = x \end{aligned}$$

De  $y = x^2$  y  $y^2 = x$ :

$$\begin{aligned} (x^2)^2 &= x \\ x^4 &= x \\ x(x^3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces  $x = 0$  o  $x = 1$ .

- Para  $x = 0$ :  $y = 0 \rightarrow$  Punto:  $(0, 0)$  - Para  $x = 1$ :  $y = 1 \rightarrow$  Punto:  $(1, 1)$

**Paso 2:** Segundas derivadas

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x \\ f_{yy} &= 6y \\ f_{xy} &= -3 \end{aligned}$$

**Paso 3:** Clasificar en  $(0, 0)$

$$\begin{aligned} f_{xx}(0, 0) &= 0 \\ f_{yy}(0, 0) &= 0 \\ f_{xy}(0, 0) &= -3 \\ D &= 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0 \end{aligned}$$

Como  $D < 0$ :  $(0, 0)$  es un **punto de silla**.

**Paso 4:** Clasificar en  $(1, 1)$

$$\begin{aligned}f_{xx}(1, 1) &= 6 \\f_{yy}(1, 1) &= 6 \\f_{xy}(1, 1) &= -3 \\D &= 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0\end{aligned}$$

Como  $D = 27 > 0$  y  $f_{xx} = 6 > 0$ :  $(1, 1)$  es un **mínimo local**

**Resultado:** La función tiene un punto de silla en  $(0, 0)$  y mínimo local en  $(1, 1)$ . No tiene máximos locales.

Ejemplo 3: Función racional con máximo

Analizar  $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Puntos críticos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \implies x = 0 \\\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \implies y = 0\end{aligned}$$

Punto crítico:  $(0, 0)$

**Paso 2:** Segundas derivadas (en el origen)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} \right]$$

Aplicando regla del cociente:

$$f_{xx} = \frac{-2(1+x^2+y^2)^2 - (-2x) \cdot 2(1+x^2+y^2) \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^4}$$

En  $(0, 0)$ :

$$f_{xx}(0, 0) = \frac{-2}{1} = -2$$

Por simetría:  $f_{yy}(0, 0) = -2$

Para  $f_{xy}$ : El término con  $xy$  en numerador da  $f_{xy}(0, 0) = 0$

**Paso 3:** Prueba de segunda derivada

$$\begin{aligned}D &= f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \\&= (-2)(-2) - 0 = 4 > 0\end{aligned}$$

Como  $D > 0$  y  $f_{xx} = -2 < 0$ :  $(0, 0)$  es **máximo local**

**Valor máximo:**  $f(0, 0) = 1$

**Interpretación:** Es máximo **global absoluto** porque la función  $\rightarrow 0$  cuando  $(x, y) \rightarrow \infty$

#### Ejemplo 4: Paraboloide hiperbólico (silla)

Analizar  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Puntos críticos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2y + 2 = 0 \implies x - y = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x + 2y - 2 = 0 \implies -x + y = 1\end{aligned}$$

Ambas ecuaciones son idénticas:  $y = x + 1$

En realidad, tenemos un sistema compatible indeterminado. Toda la línea  $y = x + 1$  son puntos críticos.

Esto indica que la función puede reescribirse. Completando:

$$f(x, y) = (x - y)^2 + 2(x - y)$$

Sea  $u = x - y$ :

$$f = u^2 + 2u = (u + 1)^2 - 1 = (x - y + 1)^2 - 1$$

**Resultado:** - Mínimo de  $-1$  cuando  $x - y = -1$  (toda la línea  $y = x + 1$ ) - La función no tiene máximos locales (es ilimitada superiormente) - El conjunto de mínimos forma una línea, no un punto aislado

#### Ejemplo 5: Función con máximos múltiples

Analizar  $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$  en el dominio  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

**Solución:**

**Paso 1:** Puntos críticos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x)\sin(y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin(x)\cos(y) = 0\end{aligned}$$

De la primera:  $\cos(x) = 0$  o  $\sin(y) = 0$  De la segunda:  $\sin(x) = 0$  o  $\cos(y) = 0$

Si  $\sin(x) = 0$ :  $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$  Si  $\cos(x) = 0$ :  $x \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$

Similarmente para  $y$ .

Los puntos críticos en el interior son: -  $(\pi/2, \pi/2)$ :  $f = 1 \cdot 1 = 1 \leftarrow \text{MÁXIMO}**$   
-  $(\pi/2, 3\pi/2)$ :  $f = 1 \cdot (-1) = -1 \leftarrow \text{Mínimo}$  -  $(3\pi/2, \pi/2)$ :  $f = (-1) \cdot 1 = -1 \leftarrow \text{Mínimo}$  -  $(3\pi/2, 3\pi/2)$ :  $f = (-1)(-1) = 1 \leftarrow \text{MÁXIMO}**$

En la frontera:  $f = 0$  (porque siempre hay un sin nulo)

**Resultado:** - Hay dos máximos locales (y globales) con valor 1 en  $(\pi/2, \pi/2)$  y  $(3\pi/2, 3\pi/2)$  - Hay dos mínimos locales con valor  $-1$  en  $(\pi/2, 3\pi/2)$  y  $(3\pi/2, \pi/2)$

#### Teorema de Weierstrass y máximos globales.

**Teorema de Weierstrass:** Si  $f(x, y)$  es continua en un conjunto compacto  $D$  (cerrado y acotado), entonces  $f$  alcanza su máximo y mínimo absolutos en  $D$ .

**Cómo encontrar máximos globales en un compacto:**

1. Encontrar todos los máximos locales en el interior (puntos críticos)
2. Encontrar todos los máximos en la frontera (usando multiplicadores de Lagrange o parametrización)
3. Comparar todos los valores encontrados
4. El mayor valor es el máximo global

**Corolario:** En un dominio abierto no acotado, puede no existir máximo global (la función puede ser ilimitada).

## Aplicaciones prácticas de máximos.

### Aplicaciones de máximos en contextos reales

#### 1. Economía y negocios:

- Maximizar ingresos:  $R(p_1, p_2) = p_1q_1(p_1, p_2) + p_2q_2(p_1, p_2)$
- Maximizar utilidad:  $U(x, y) = f(x, y) - C(x, y)$
- Optimización de portafolio: máxima rentabilidad con riesgo dado

#### 2. Ingeniería y diseño:

- Maximizar resistencia estructural
- Maximizar eficiencia energética
- Maximizar producción con recursos limitados

#### 3. Biología y medicina:

- Maximizar crecimiento de población
- Maximizar efectividad de tratamientos
- Optimizar dosis de medicamentos

#### 4. Machine Learning:

- Maximizar precisión del modelo
- Maximizar área bajo la curva ROC
- Maximizar función de verosimilitud

#### 5. Física:

- Principio de máxima entropía
- Trayectorias de máxima probabilidad
- Configuración de máxima estabilidad

## Aplicación 1: Maximización de ingresos empresariales

Una empresa vende dos productos. Los ingresos están dados por:

$$R(x, y) = 100x + 120y - x^2 - 2xy - \frac{3y^2}{2} - 50$$

donde  $x$  e  $y$  son las cantidades vendidas.

Encontrar el nivel de ventas que maximiza los ingresos.

**Solución:**

**Paso 1:** Encontrar puntos críticos

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} &= 100 - 2x - 2y = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= 120 - 2x - 3y = 0\end{aligned}$$

De la primera:  $2x + 2y = 100 \implies x + y = 50$

De la segunda:  $2x + 3y = 120$

Restando:  $y = 20$ , entonces  $x = 30$

Punto crítico:  $(30, 20)$

**Paso 2:** Segundas derivadas

$$\begin{aligned}R_{xx} &= -2 \\ R_{yy} &= -3 \\ R_{xy} &= -2\end{aligned}$$

**Paso 3:** Prueba de segunda derivada

$$\begin{aligned}D &= R_{xx} \cdot R_{yy} - (R_{xy})^2 \\ &= (-2)(-3) - (-2)^2 \\ &= 6 - 4 = 2 > 0\end{aligned}$$

Como  $D > 0$  y  $R_{xx} = -2 < 0$ :  $(30, 20)$  es \*\*máximo local\*\*

**Ingresos máximos:**

$$\begin{aligned}R(30, 20) &= 100(30) + 120(20) - 900 - 2(30)(20) - \frac{3(400)}{2} - 50 \\ &= 3000 + 2400 - 900 - 1200 - 600 - 50 \\ &= 2650 \text{ unidades monetarias}\end{aligned}$$

**Interpretación:** Vender 30 unidades del producto 1 y 20 del producto 2 maximiza los ingresos en 2650 unidades.

## Aplicación 2: Diseño óptimo de recipiente

Se desea diseñar un tanque rectangular abierto (sin tapa) de volumen  $V = 32 \text{ m}^3$  minimizando la superficie de material (pero maximizando la eficiencia del espacio por unidad de material).

Si las dimensiones de la base son  $x$  e  $y$ , y la altura es  $h = \frac{32}{xy}$ , la superficie es:

$$S(x, y) = xy + 2xh + 2yh = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

Encontrar las dimensiones que minimizan la superficie (o equivalentemente, que maximizan volumen/área).

**Solución:**

**Paso 1:** Puntos críticos

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x} &= y - \frac{64}{x^2} = 0 \implies x^2y = 64 \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= x - \frac{64}{y^2} = 0 \implies xy^2 = 64\end{aligned}$$

De las dos ecuaciones:

$$\frac{x^2y}{xy^2} = \frac{x}{y} = 1 \implies x = y$$

Sustituyendo en la primera:  $x^3 = 64 \implies x = 4$

Punto crítico:  $(4, 4)$  con altura  $h = \frac{32}{16} = 2$

**Paso 2:** Segundas derivadas

$$\begin{aligned}S_{xx} &= \frac{128}{x^3} \\ S_{yy} &= \frac{128}{y^3} \\ S_{xy} &= 1\end{aligned}$$

En  $(4, 4)$ :

$$\begin{aligned}S_{xx}(4, 4) &= \frac{128}{64} = 2 \\ S_{yy}(4, 4) &= 2 \\ S_{xy}(4, 4) &= 1\end{aligned}$$

**Paso 3:** Prueba de segunda derivada

$$D = 2 \cdot 2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Como  $D > 0$  y  $S_{xx} = 2 > 0$ :  $(4, 4)$  es un \*\*mínimo\*\* (no máximo)

**Resultado:** - Dimensiones óptimas: base cuadrada de  $4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$  - Altura:  $2 \text{ m}$  - Superficie mínima:  $S(4, 4) = 16 + 16 + 16 = 48 \text{ m}^2$

(Nota: En este problema buscábamos minimizar superficie, lo que da contexto al máximo de eficiencia volumen/área)

**Comparación: máximos locales vs. globales.**

- **Máximo local:** Mayor que en vecinos inmediatos. Puede haber múltiples en un mismo dominio.

- **Máximo global:** Mayor en todo el dominio. Si existe, puede haber uno o varios.
- **En dominios abiertos:** Pueden no existir máximos globales (función ilimitada).
- **En dominios compactos:** Siempre existen máximos globales (Weierstrass).
- **Máximo aislado:** Un único máximo en cierta región.
- **Máximos degenerados:** Cuando  $D = 0$ , la clasificación requiere análisis más profundo.

### Dificultades al encontrar máximos.

- **Frontera compleja:** La optimización en la frontera puede ser más difícil que en el interior.
- **Máximos no aislados:** El máximo puede darse en una curva o región, no en un punto.
- **Singularidades:** Puntos donde las derivadas no existen pueden ser máximos (e.g.,  $f(x, y) = -|x| - |y|$  tiene máximo en el origen).
- **Funciones patológicas:** Algunas funciones continuas no tienen máximos globales en dominios no compactos.
- **Dimensión superior:** En 3 o más variables, el Hessiano es una matriz de orden mayor (requiere autovalores).

**Extensión a funciones de tres variables.** Para  $f(x, y, z)$ , la matriz Hessiana es  $3 \times 3$ :

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

Un punto crítico es máximo si todos los **menores principales líderes** negativos forman patrón:

- $H_1 = f_{xx} < 0$  (1er menor)
- $H_2 = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} > 0$  (2do menor)
- $H_3 = \det(H) < 0$  (determinante total)

Es decir: **signos alternados comenzando con negativo**.

**Ejercicios propuestos.** Para cada función, encontrar todos los puntos críticos, clasificarlos y determinar máximos:

1.  $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2 - 3$
2.  $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1$
3.  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  (Sugerencia: exponencial es monotónica)
4.  $f(x, y) = xy(4 - x - y)$  en el dominio  $x > 0, y > 0$  (Aplicación de maximizar área)
5.  $f(x, y, z) = 4x + 6y + 5z - x^2 - y^2 - z^2$  (3 variables)
6. En un mercado con dos productos complementarios, la ganancia es  $\Pi(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 10x + 10y - 50$ . Encontrar cantidades que maximizan ganancia.
7. Considere  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 5$  y determine si los puntos críticos son máximos, mínimos o puntos de silla.
8. Para  $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$  en  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ , encontrar todos los máximos locales y el máximo global.

#### 4.3.3. Mínimos

##### Mínimos de funciones multivariadas: Localización y caracterización

Los mínimos de funciones de varias variables representan los puntos donde la función alcanza sus valores más pequeños en una región dada. A diferencia de los máximos, los mínimos son especialmente importantes en aplicaciones de optimización: minimización de costos, energía, riesgo, o error. El análisis de mínimos es fundamental en ingeniería, economía, estadística y machine learning.

**Introducción.** En numerosas situaciones prácticas, necesitamos minimizar funciones: reducir costos de producción, minimizar el consumo de energía, disminuir errores en predicciones, o encontrar configuraciones óptimas de sistemas. La caracterización matemática de mínimos en varias variables proporciona herramientas sistemáticas para estos problemas.

##### Definiciones fundamentales:

**Mínimo Local:** Un punto  $(a, b) \in D$  es un *mínimo local* de  $f$  si existe una vecindad abierta de  $(a, b)$  tal que  $f(x, y) \geq f(a, b)$  para todos los puntos  $(x, y)$  en esa vecindad. En otras palabras, el valor de la función en  $(a, b)$  es menor o igual que en los puntos cercanos.

**Mínimo Absoluto o Global:** Un punto  $(a, b) \in D$  es un *mínimo absoluto* o *global* de  $f$  si  $f(x, y) \geq f(a, b)$  para todos los puntos  $(x, y)$  en el dominio  $D$ . Este es el valor más pequeño que la función alcanza en todo el dominio.

**Punto Crítico:** Un punto  $(a, b)$  es un punto crítico de  $f$  si  $f_x(a, b) = 0$  y  $f_y(a, b) = 0$  simultáneamente. Los mínimos (locales o globales) deben ocurrir en puntos críticos, en la frontera del dominio, o en puntos donde la función no es diferenciable.

**Criterio de la segunda derivada para mínimos.** Para una función  $f(x, y)$  diferenciable dos veces, el análisis de la matriz Hessiana determina la naturaleza del punto crítico  $(a, b)$ .

Sea la matriz Hessiana:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \text{ evaluada en } (a, b)$$

Sea  $D = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$  (determinante de la Hessiana).

**Criterio para mínimo local:** Si en el punto crítico  $(a, b)$ :

- $D > 0$  Y  $f_{xx}(a, b) > 0$ , entonces  $(a, b)$  es un **mínimo local**.
- Si además  $f_{xx}(a, b) > 0$  en todo el dominio y  $(a, b)$  es el único punto crítico en  $D$ , entonces es un **mínimo global**.

**Otros casos:**

- Si  $D > 0$  y  $f_{xx}(a, b) < 0$ : punto de máximo local.
- Si  $D < 0$ : punto de silla (ni máximo ni mínimo).
- Si  $D = 0$ : el criterio es inconcluyente.

### Procedimiento sistemático para encontrar mínimos.

1. **Encontrar puntos críticos:** Resolver el sistema  $\nabla f = \mathbf{0}$ , es decir,  $f_x(x, y) = 0$  y  $f_y(x, y) = 0$ .
2. **Calcular derivadas segundas:** Obtener  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$ , y  $f_{xy}$  en cada punto crítico.
3. **Evaluar la Hessiana:** Calcular  $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$  y verificar  $f_{xx} > 0$ .
4. **Clasificar:** Determinar si es mínimo local, máximo local, o punto de silla.
5. **Comparar valores:** Evaluar  $f$  en todos los candidatos y en la frontera para hallar el mínimo global.

Ejemplo 1: Paraboloide elíptico — mínimo único

Sea  $f(x, y) = (x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 + 3$ .

**Solución:**

*Paso 1:* Encontrar puntos críticos:

$$f_x = 2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f_y = 4(y + 1) = 0 \Rightarrow y = -1$$

Punto crítico único:  $(2, -1)$ .

*Paso 2:* Derivadas segundas:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 4, \quad f_{xy} = 0$$

*Paso 3:* Evaluar la Hessiana:

$$D = 2 \cdot 4 - 0^2 = 8 > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx} = 2 > 0$$

*Paso 4:* Conclusión:  $(2, -1)$  es un **mínimo local**. Como  $f(x, y) \rightarrow \infty$  cuando  $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ , este es el **mínimo global**.  
*Valor mínimo:*  $f(2, -1) = 0 + 0 + 3 = \boxed{3}$ .

### Ejemplo 2: Función cúbica — múltiples puntos críticos

Sea  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

**Solución:**

*Paso 1:* Encontrar puntos críticos:

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2$$

$$f_y = 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow y^2 = x$$

Sustituyendo  $y = x^2$  en  $y^2 = x$ :

$$(x^2)^2 = x \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

Entonces  $x = 0$  o  $x = 1$ .

- Si  $x = 0$ :  $y = 0$ , punto crítico  $(0, 0)$ .
- Si  $x = 1$ :  $y = 1$ , punto crítico  $(1, 1)$ .

*Paso 2:* Derivadas segundas:

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -3$$

*Paso 3:* Evaluar en  $(0, 0)$ :

$$f_{xx}(0, 0) = 0, \quad f_{yy}(0, 0) = 0, \quad f_{xy}(0, 0) = -3$$

$$D(0, 0) = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0 \Rightarrow \textbf{punto de silla}$$

Evaluar en  $(1, 1)$ :

$$f_{xx}(1, 1) = 6 > 0, \quad f_{yy}(1, 1) = 6 > 0, \quad f_{xy}(1, 1) = -3$$

$$\begin{aligned} D(1, 1) &= 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0 \quad y \quad f_{xx} = 6 > 0 \\ &\Rightarrow \textbf{mínimo local en } (1, 1) \end{aligned}$$

*Valor:*  $f(1, 1) = 1 + 1 - 3(1)(1) = 2 - 3 = -1$ .

### Ejemplo 3: Función racional con mínimo absoluto

Sea  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución:**

*Paso 1:* Encontrar puntos críticos:

$$f_x = \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f_y = \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Punto crítico único:  $(0, 0)$ .

*Paso 2:* Análisis:  $f(0, 0) = \frac{1}{1} = 1$ . Para cualquier  $(x, y) \neq (0, 0)$ :  $x^2 + y^2 > 0$ , luego  $x^2 + y^2 + 1 > 1$ , entonces  $\frac{1}{x^2+y^2+1} < 1$ .

*Conclusión:*  $(0, 0)$  es el **mínimo global** con  $f_{\min} = 1$ .

*Nota:*  $f(x, y) \rightarrow 0$  cuando  $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ , pero el infimum es 0 sin alcanzarse.

#### Ejemplo 4: Función gaussiana — mínimo en frontera

Sea  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución:**

*Paso 1:* Encontrar puntos críticos:

$$f_x = -2x \cdot e^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f_y = -2y \cdot e^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Punto crítico único:  $(0, 0)$ .

*Paso 2:* Análisis de naturaleza:

$$f_{xx} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}$$

En  $(0, 0)$ :  $f_{xx}(0, 0) = -2 < 0$ .

*Conclusión:*  $(0, 0)$  es un **máximo local** con  $f(0, 0) = 1$ .

*Comportamiento:* Como  $f(x, y) \rightarrow 0$  cuando  $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ , el infimum es 0, aunque es un **mínimo en el infinito** no local.

#### Ejemplo 5: Función con mínimos aislados y estructurados

Sea  $f(x, y) = x^2 \cos(y) + y^2$  en un dominio acotado.

**Solución:**

*Paso 1:* Encontrar puntos críticos:

$$f_x = 2x \cos(y) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } \cos(y) = 0$$

$$f_y = -x^2 \sin(y) + 2y = 0$$

Si  $x = 0$ :  $f_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$ , punto  $(0, 0)$ .

Si  $\cos(y) = 0$ :  $y = \pi/2 + n\pi$ . Entonces  $-x^2 \sin(\pi/2 + n\pi) + 2(\pi/2 + n\pi) = 0$ , lo que da múltiples puntos críticos.

*Conclusión:*  $(0, 0)$  es un candidato a mínimo con  $f(0, 0) = 0$ . El análisis completo requiere evaluar la Hessiana en todos los candidatos.

**Teorema de Weierstrass para mínimos.** **Teorema:** Si  $f$  es continua en un conjunto compacto  $K$  (cerrado y acotado) de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $f$  alcanza su mínimo en  $K$ . Es decir, existe un punto  $(a, b) \in K$  tal que  $f(a, b) \leq f(x, y)$  para todo  $(x, y) \in K$ .

Este teorema garantiza que la búsqueda de mínimos globales en dominios acotados tiene éxito: los mínimos existen y se encuentran bien en puntos críticos interiores o en la

frontera del dominio.

### Aplicaciones de minimización en varias variables.

#### Áreas de aplicación de minimización

1. **Economía:** Minimización de costos de producción, almacenamiento y distribución.
2. **Ingeniería:** Diseño óptimo de estructuras, minimización de peso, estrés y consumo energético.
3. **Estadística:** Minimización de error cuadrático medio (MSE) en regresión lineal y no lineal.
4. **Machine Learning:** Entrenamiento de redes neuronales minimizando función de pérdida.
5. **Física:** Mínima energía potencial en sistemas mecánicos y termodinámicos.

#### Aplicación 1: Minimización de costos de producción

Una fábrica produce dos tipos de artículos. El costo total de producción es:

$$C(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4xy + 100x + 50y + 5000$$

donde  $x$  es la cantidad de artículos tipo A (en cientos) e  $y$  es la cantidad de artículos tipo B (en cientos).

**Objetivo:** Encontrar el nivel de producción que minimiza el costo total.

**Solución:**

*Paso 1:* Encontrar puntos críticos:

$$C_x = 4x - 4y + 100 = 0$$

$$C_y = 6y - 4x + 50 = 0$$

De la primera ecuación:  $4x - 4y = -100 \Rightarrow x - y = -25 \Rightarrow x = y - 25$ .

Sustituyendo en la segunda:

$$6y - 4(y - 25) + 50 = 0 \Rightarrow 6y - 4y + 100 + 50 = 0 \Rightarrow 2y + 150 = 0 \Rightarrow y = -75$$

Entonces  $x = -75 - 25 = -100$ .

*Nota económica:* Los valores negativos indican que el modelo de costos es válido solo para producción positiva. En la práctica, se evaluaría en el límite  $x, y \geq 0$ .

*Paso 2:* Verificar naturaleza del punto crítico:

$$C_{xx} = 4 > 0, \quad C_{yy} = 6 > 0, \quad C_{xy} = -4$$

$$D = 4 \cdot 6 - (-4)^2 = 24 - 16 = 8 > 0 \quad \text{y} \quad C_{xx} = 4 > 0$$

*Conclusión:* El punto crítico es un mínimo local (aunque no factible económicamente en este caso específico).

*Interpretación:* En dominios factibles (primero cuadrante), se evaluaría el costo en la frontera para encontrar el mínimo práctico.

## Aplicación 2: Optimización de envase cilíndrico con costo mínimo

Se desea diseñar un envase cilíndrico de volumen  $V = 1000 \text{ cm}^3$  que minimice el costo del material. El costo del fondo y tapa es 2 dólares por  $\text{cm}^2$ , mientras que el costo de la pared lateral es 1 dólar por  $\text{cm}^2$ .

**Objetivo:** Encontrar dimensiones óptimas (radio  $r$  y altura  $h$ ) que minimizan el costo total.

**Solución:**

$$\text{Restricción: } \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

*Función objetivo:*

$$\text{Costo} = C(r, h) = 2 \cdot 2\pi r^2 + 1 \cdot 2\pi r h = 4\pi r^2 + 2\pi r h$$

Sustituyendo  $h$ :

$$C(r) = 4\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 4\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

*Paso 1:* Encontrar mínimos:

$$C'(r) = 8\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 8\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r^3 = \frac{250}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4,3 \text{ cm}$$

*Paso 2:* Verificar es mínimo:

$$C''(r) = 8\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \quad \text{para todo } r > 0$$

*Conclusión:* El costo es mínimo en  $r \approx 4,3 \text{ cm}$ .

$$\text{Altura: } h = \frac{1000}{\pi(4,3)^2} \approx 17,2 \text{ cm.}$$

$$\text{Costo mínimo: } C \approx 4\pi(4,3)^2 + \frac{2000}{4,3} \approx 231 + 465 \approx \$696.$$

## Comparación: máximos vs. mínimos.

1. **Condición de primer orden:** En ambos casos,  $\nabla f = \mathbf{0}$ .
2. **Diferencia en segundo orden:** Para mínimos, se requiere  $f_{xx} > 0$  (concavidad hacia arriba); para máximos,  $f_{xx} < 0$  (concavidad hacia abajo).
3. **Simetría:** Si  $(a, b)$  es mínimo de  $f$ , entonces es máximo de  $-f$ .
4. **Aplicaciones:** Mínimos son más comunes en problemas de optimización real (costos, energía, error); máximos aparecen en ganancia, utilidad y potencial.

## Dificultades comunes.

- **Puntos de silla:** Fácilmente confundidos con extremos; requieren análisis completo de la Hessiana.
- **Dominios abiertos:** En dominios abiertos no compactos, el mínimo global puede no existir.

- **Múltiples mínimos:** Funciones no convexas pueden tener varios mínimos locales; encontrar el global requiere métodos de optimización avanzados.
- **Frontera del dominio:** Siempre evaluar candidatos en la frontera, no solo en interiores.

**Extensión a funciones de  $n$  variables.** Para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , el criterio se generaliza:

- **Condición necesaria:**  $\nabla f = \mathbf{0}$ .
- **Condición suficiente (segundo orden):** Si la matriz Hessiana de  $n \times n$  es *definida positiva*, entonces el punto crítico es un mínimo local.
- La matriz Hessiana es definida positiva si todos sus valores propios son positivos, o equivalentemente, todos sus menores principales son positivos.

### Ejercicios propuestos.

1. Encuentre los puntos críticos de  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 5$  y determine cuáles son mínimos locales.
2. Para  $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 - 2y)$ , identifique los puntos críticos y clasifique su naturaleza (máximo, mínimo o silla).
3. Minimice  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sujeto a permanecer en el disco  $x^2 + y^2 \leq 4$ . ¿Dónde ocurre el mínimo? ¿Cuál es su valor?
4. Una empresa fabrica dos productos con función de costo  $C(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 100$ . Encuentre el punto de producción que minimiza el costo total.
5. Demuestre que  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  no tiene mínimos locales ni máximos locales excepto en el origen (para el cual es un mínimo global).
6. Para  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$  en  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ , encontrar los mínimos globales.
7. Optimice las dimensiones de una caja rectangular abierta (sin tapa) de volumen fijo  $V = 64 \text{ m}^3$  que minimice su costo de construcción si el fondo cuesta 3 dólares/ $\text{m}^2$  y los lados 1 dólar/ $\text{m}^2$ .
8. Considere la función  $f(x, y) = (x - 1)^3 + (y - 2)^3 - 3(x - 1)(y - 2)$  y determine si tiene mínimos, máximos o puntos de silla.

#### 4.3.4. Método de multiplicadores de Lagrange

##### Método de multiplicadores de Lagrange: Optimización con restricciones

El método de multiplicadores de Lagrange es una técnica fundamental para optimizar funciones de varias variables sujetas a restricciones de igualdad. Desarrollado por Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII, proporciona un enfoque elegante y sistemático para resolver problemas de optimización restringida en los que buscamos maximizar o minimizar una función objetivo bajo la condición de que las variables satisfagan una o más ecuaciones de restricción. Este método es ampliamente

utilizado en economía, ingeniería, física y machine learning.

**Introducción y motivación.** Muchos problemas prácticos requieren optimizar una magnitud (costo, ganancia, energía) sujeta a limitaciones (presupuesto, capacidad, leyes físicas). Por ejemplo:

- Minimizar el costo de producción sujeto a satisfacer una demanda específica.
- Maximizar la utilidad bajo una restricción de presupuesto.
- Minimizar energía sujeto a restricciones de posición o velocidad.
- Maximizar la precisión de un modelo bajo restricciones de complejidad.

Sin el método de Lagrange, resolveríamos estos problemas despejando la restricción, sustituyendo en la función objetivo, y optimizando; pero esto es laborioso y no siempre posible. Lagrange proporciona un método unificado y elegante.

### Problema de optimización restringida:

**Problema Primal:** Optimizar (maximizar o minimizar)  $f(x, y)$  sujeto a la restricción  $g(x, y) = 0$ , donde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la función objetivo y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la restricción.

**Función de Lagrange:** Se define la función de Lagrange como:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$$

donde  $\lambda$  es el *multiplicador de Lagrange*.

**Condiciones de Primer Orden:** En un punto extremo restringido  $(x_0, y_0)$ , existe un  $\lambda_0$  tal que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

Equivalentemente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

**Interpretación geométrica.** En el óptimo restringido, la curva de nivel de  $f$  es tangente a la curva de restricción  $g(x, y) = 0$ . Esto significa que los gradientes  $\nabla f$  y  $\nabla g$  son paralelos (proporcionales), lo que se expresa como  $\nabla f = \lambda \nabla g$ .

El multiplicador  $\lambda$  mide la *sensibilidad* del valor óptimo de  $f$  respecto a cambios en la restricción. Si  $\lambda > 0$ , aumentar la restricción (relajarla) permite mejorar el valor de  $f$ .

### Procedimiento sistemático.

1. **Plantear la función de Lagrange:** Construir  $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$ .
2. **Calcular gradientes:** Obtener las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

3. **Resolver el sistema:** Resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para encontrar  $(x, y, \lambda)$ .
4. **Verificar naturaleza:** Usar la prueba de la segunda derivada (matriz Hessiana restringida) o comparar valores en diferentes candidatos.
5. **Interpretar el multiplicador:**  $\lambda$  indica cuánto cambiaría el valor óptimo por una unidad de cambio en la restricción.

**Generalización a múltiples restricciones.** Si hay múltiples restricciones  $g_1(x, y) = 0, g_2(x, y) = 0, \dots, g_m(x, y) = 0$ , la función de Lagrange es:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x, y) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x, y)$$

Las condiciones de primer orden generalizan de manera similar.

Ejemplo 1: Maximizar producto con suma constante

Maximizar  $f(x, y) = xy$  sujeto a  $x + y = 10$ .

**Solución:**

*Paso 1:* Plantear la función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + y - 10)$$

*Paso 2:* Calcular derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x + y - 10) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = 10$$

*Paso 3:* Resolver el sistema: De las primeras dos ecuaciones:  $x = y = \lambda$ . Sustituyendo en la restricción:  $2x = 10 \Rightarrow x = 5, y = 5, \lambda = 5$ .

*Paso 4:* Verificar naturaleza: El valor es  $f(5, 5) = 25$ . Para comparar, en los extremos de la restricción:  $f(0, 10) = 0$  y  $f(10, 0) = 0$ . Por lo tanto,  $(5, 5)$  es un **máximo**.

*Interpretación:*  $\lambda = 5$  significa que si aumentamos la restricción de  $x + y = 10$  a  $x + y = 11$ , el máximo de  $xy$  aumentaría aproximadamente en 5.

**Respuesta:** Máximo en  $(5, 5)$  con valor 25.

Ejemplo 2: Minimizar distancia a un punto sujeto a restricción lineal

Minimizar  $f(x, y) = x^2 + y^2$  (distancia cuadrada al origen) sujeto a  $x + 2y = 5$ .

**Solución:**

*Paso 1:* Plantear Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + 2y - 5)$$

Paso 2: Derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - 2\lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x + 2y - 5) = 0 \Rightarrow x + 2y = 5$$

Paso 3: De las primeras dos:  $\lambda = 2x$  y  $y = \lambda = 2x$ .

Sustituyendo en la restricción:

$$x + 2(2x) = 5 \Rightarrow x + 4x = 5 \Rightarrow x = 1$$

Entonces  $y = 2(1) = 2$  y  $\lambda = 2$ .

Paso 4: Verificar:  $f(1, 2) = 1 + 4 = 5$ . Este es el punto de la recta más cercano al origen.

*Interpretación geométrica:* La restricción es una recta. El mínimo de  $f$  ocurre donde el gradiente  $\nabla f = (2x, 2y)$  es perpendicular a la recta, es decir, paralelo al vector normal  $(1, 2)$ .

**Respuesta:** Mínimo en  $(1, 2)$  con valor 5.

Ejemplo 3: Optimizar con restricción no lineal

Maximizar  $f(x, y) = 4x + 2y$  sujeto a  $x^2 + y^2 = 4$  (punto en círculo de radio 2).

**Solución:**

Paso 1: Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 4x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

Paso 2: Derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4 - 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda x = 2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda y = 1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Paso 3: De las primeras dos:  $x = \frac{2}{\lambda}$  y  $y = \frac{1}{\lambda}$ .

Sustituyendo en la restricción:

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{4+1}{\lambda^2} = 4 \Rightarrow \frac{5}{\lambda^2} = 4 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4}$$

Entonces  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Para  $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$ :  $x = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$  y  $y = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

Valor:  $f = 4 \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{16\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{5} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5} \approx 8,94$ .

Para  $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ :  $x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$  y  $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

Valor:  $f = -4\sqrt{5} \approx -8,94$  (mínimo).

**Respuesta:** Máximo en  $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$  con valor  $4\sqrt{5}$ .

#### Ejemplo 4: Optimizar producción con presupuesto limitado

Una fábrica produce dos artículos. La función de producción (en unidades) es  $f(x, y) = 12\sqrt{xy}$ , donde  $x$  son horas de trabajo e  $y$  son máquinas. El costo es  $C = 4x + 3y$  y el presupuesto disponible es 100 dólares.

Maximizar producción bajo  $4x + 3y = 100$ .

**Solución:**

*Paso 1:* Función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 12\sqrt{xy} - \lambda(4x + 3y - 100)$$

*Paso 2:* Derivadas parciales (usando regla de la cadena):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 12 \cdot \frac{y}{2\sqrt{xy}} - 4\lambda = \frac{6y}{\sqrt{xy}} - 4\lambda = 0 \Rightarrow \frac{6\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 4\lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 12 \cdot \frac{x}{2\sqrt{xy}} - 3\lambda = \frac{6x}{\sqrt{xy}} - 3\lambda = 0 \Rightarrow \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 3\lambda$$

Simplificando:

$$\frac{6\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 4\lambda \Rightarrow \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{2\lambda}{3}$$

$$\frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 3\lambda \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{\lambda}{2}$$

Multiplicando ambas ecuaciones:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 1 = \frac{\lambda^2}{3} \Rightarrow \lambda = \sqrt{3}$$

Entonces:  $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , de donde  $y = \frac{4x}{3}$ .

Sustituyendo en la restricción:

$$4x + 3 \cdot \frac{4x}{3} = 100 \Rightarrow 4x + 4x = 100 \Rightarrow x = 12,5$$

Entonces  $y = \frac{4 \cdot 12,5}{3} = \frac{50}{3} \approx 16,67$ .

Producción máxima:  $f(12,5, 16,67) = 12\sqrt{12,5 \cdot 16,67} = 12\sqrt{208,375} \approx 12 \cdot 14,43 \approx 173,2$  unidades.

**Respuesta:** Máximo en  $(12,5, 16,67)$  con producción  $\approx 173,2$  unidades.

### Ejemplo 5: Minimizar costo de transporte con múltiples restricciones

Se tiene una función de costo de transporte  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$  sujeto a  $x + y + z = 6$  (volumen total a transportar).

Aplicando Lagrange en 3D:

*Paso 1:* Función de Lagrange:

$$\mathcal{L} = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \lambda(x + y + z - 6)$$

*Paso 2:* Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4y - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\lambda}{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 6z - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\lambda}{6}$$

*Paso 3:* Sustituyendo en la restricción:

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} = 6$$

$$\lambda \left( \frac{6+3+2}{12} \right) = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot \frac{11}{12} = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{72}{11}$$

Entonces:

$$x = \frac{36}{11}, \quad y = \frac{18}{11}, \quad z = \frac{12}{11}$$

Costo mínimo:

$$f = \left( \frac{36}{11} \right)^2 + 2 \left( \frac{18}{11} \right)^2 + 3 \left( \frac{12}{11} \right)^2 = \frac{1296 + 648 + 432}{121} = \frac{2376}{121} \approx 19,63$$

**Respuesta:** Mínimo en  $(\frac{36}{11}, \frac{18}{11}, \frac{12}{11})$  con costo  $\approx 19,63$ .

**Condiciones de segundo orden.** Para determinar si un punto crítico de Lagrange es máximo o mínimo, se utiliza la *matriz Hessiana restringida* o *Hessiana bordeada*:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} & f_{xy} \\ g_y & f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

El signo del determinante de esta matriz (evaluada en el punto crítico) indica:

- Si  $\det(\bar{H}) < 0$ : punto es un **máximo local** bajo la restricción.
- Si  $\det(\bar{H}) > 0$ : punto es un **mínimo local** bajo la restricción.
- Si  $\det(\bar{H}) = 0$ : el criterio es inconcluyente.

**Interpretación económica del multiplicador de Lagrange.** En aplicaciones económicas, el multiplicador  $\lambda$  se interpreta como el *precio sombra* o *valor marginal* de la restricción:

- Si el problema es de maximización de ganancia bajo restricción presupuestaria,  $\lambda$  indica cuánto aumentaría la ganancia por cada dólar adicional de presupuesto.
- Si es minimización de costos bajo una restricción de producción,  $\lambda$  indica el costo marginal de una unidad adicional de producción.

Esta información es crucial para decisiones administrativas: saber si vale la pena invertir en relajar una restricción.

**Extensión a restricciones de desigualdad: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.** Cuando hay restricciones de desigualdad del tipo  $g(x, y) \leq 0$  (además de restricciones de igualdad), el método de Lagrange se generaliza a las **Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**.

La función de Lagrange es:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y) - \mu \cdot h(x, y)$$

Con condiciones KKT:

1.  $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$  (gradiente de Lagrange nulo)
2.  $\mu \geq 0$  y  $\mu \cdot h(x, y) = 0$  (complementariedad)
3.  $h(x, y) \leq 0$  (restricción satisfecha)

Las condiciones KKT son fundamentales en optimización convexa y programación no lineal.

## Aplicaciones del método de Lagrange.

### Áreas de aplicación del método de Lagrange

1. **Economía:** Maximizar utilidad bajo restricción presupuestaria, minimizar costos de producción con restricción de demanda.
2. **Ingeniería:** Optimizar diseños (dimensiones, materiales) bajo restricciones de resistencia, capacidad o presupuesto.
3. **Física:** Encontrar trayectorias de mínima energía (principio variacional), equilibrio de sistemas mecánicos.
4. **Machine Learning:** Entrenar redes neuronales y modelos SVM con restricciones de regularización.
5. **Teoría de Control:** Optimizar trayectorias de sistemas dinámicos sujetos a limitaciones de control.
6. **Investigación Operativa:** Resolver problemas de programación no lineal en planificación y asignación de recursos.

### Aplicación 1: Maximizar utilidad bajo restricción presupuestaria

Un consumidor desea maximizar su utilidad  $U(x, y) = x^{0,6}y^{0,4}$  (función Cobb-Douglas), donde  $x$  es cantidad de alimento e  $y$  es cantidad de ropa. Los precios son  $p_x = 2$  y  $p_y = 4$ , y el presupuesto es  $B = 100$  dólares.

**Problema:** Maximizar  $U(x, y) = x^{0,6}y^{0,4}$  sujeto a  $2x + 4y = 100$ .

**Solución:**

Es más fácil maximizar  $\ln(U) = 0,6 \ln(x) + 0,4 \ln(y)$  (pues logaritmo es función creciente).

*Función de Lagrange:*

$$\mathcal{L} = 0,6 \ln(x) + 0,4 \ln(y) - \lambda(2x + 4y - 100)$$

*Condiciones de primer orden:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{0,6}{x} - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{0,3}{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{0,4}{y} - 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{0,1}{y}$$

Igualando:  $\frac{0,3}{x} = \frac{0,1}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{3}$ .

Sustituyendo en la restricción:

$$2x + 4 \cdot \frac{x}{3} = 100 \quad \Rightarrow \quad 2x + \frac{4x}{3} = 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{10x}{3} = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 30$$

Entonces  $y = 10$ .

*Utilidad máxima:*  $U(30, 10) = 30^{0,6} \cdot 10^{0,4} \approx 9,65 \cdot 2,51 \approx 24,2$ .

*Multiplicador:*  $\lambda = \frac{0,3}{30} = 0,01$ , lo que significa que por cada dólar adicional de presupuesto, la utilidad aumentaría aproximadamente 0.01 unidades.

**Respuesta:** Consumir 30 unidades de alimento y 10 unidades de ropa para maximizar utilidad en  $\approx 24,2$ .

### Aplicación 2: Optimizar dimensiones de lata cilíndrica con superficie mínima

Se desea diseñar una lata cilíndrica de volumen fijo  $V = 250 \text{ cm}^3$  que minimice el área superficial (para minimizar material).

**Variables:** Radio  $r$  y altura  $h$  del cilindro.

**Restricción:**  $\pi r^2 h = 250$  (volumen fijo).

**Función objetivo:** Área superficial  $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$  (dos tapas + pared lateral).

**Solución:**

*Función de Lagrange:*

$$\mathcal{L}(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi r h - \lambda(\pi r^2 h - 250)$$

*Condiciones de primer orden:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi h - \lambda \cdot 2\pi r h = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = 2\pi r - \lambda \cdot \pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi r = \lambda \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{r}$$

De la segunda ecuación:  $\lambda = \frac{2}{r}$ .  
Sustituyendo en la primera:

$$4\pi r + 2\pi h - \frac{2}{r} \cdot 2\pi rh = 0 \Rightarrow 4\pi r + 2\pi h - 4\pi h = 0 \Rightarrow 4\pi r = 2\pi h$$

$$h = 2r$$

Sustituyendo en la restricción:

$$\pi r^2(2r) = 250 \Rightarrow 2\pi r^3 = 250 \Rightarrow r^3 = \frac{125}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \approx 2,91 \text{ cm}$$

Entonces  $h = 2r \approx 5,82 \text{ cm}$ .

*Área superficial mínima:*

$$A = 2\pi(2,91)^2 + 2\pi(2,91)(5,82) \approx 53,2 + 106,4 \approx 159,6 \text{ cm}^2$$

*Multiplicador:*  $\lambda = \frac{2}{2,91} \approx 0,69$ , indicando que por cada  $\text{cm}^3$  adicional de volumen permitido, el área se reduciría aproximadamente  $0,69 \text{ cm}^2$ .

**Respuesta:** Lata óptima con radio  $\approx 2,91 \text{ cm}$  y altura  $\approx 5,82 \text{ cm}$ , área mínima  $\approx 159,6 \text{ cm}^2$ .

### Comparación con métodos alternativos.

1. **Sustitución directa:** Despejar la restricción y sustituir en la función objetivo. Funciona bien para restricciones simples, pero es tedioso para funciones complejas.
2. **Método de Lagrange:** Elegante, sistemático, funciona con múltiples restricciones y proporciona información sobre sensibilidad ( $\lambda$ ). Es el estándar en optimización avanzada.
3. **Métodos numéricos:** Usar algoritmos (gradiente descendente, Newton) para encontrar óptimos. Necesarios cuando no hay solución analítica.

### Limitaciones y consideraciones.

- El método de Lagrange encuentra **puntos críticos**, no garantiza máximos o mínimos; requiere verificación adicional.
- Para restricciones de desigualdad, se necesitan las condiciones KKT.
- La matriz Hessiana restringida puede ser complicada de calcular.
- En problemas con múltiples óptimos locales, el método puede encontrar solo uno.

### Ejercicios propuestos.

1. Maximizar  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sujeto a  $x + y = 4$ . ¿Es máximo o mínimo? Justifique usando la interpretación geométrica.
2. Minimizar  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$  sujeto a  $xy = 1$ . Encuentre el multiplicador de Lagrange e interprete su significado.
3. Se tiene una función de producción  $f(K, L) = 10K^{0.3}L^{0.7}$  (capital  $K$  y trabajo  $L$ ). Maximizar producción sujeto a  $2K + 5L = 100$  (presupuesto).
4. Optimizar  $f(x, y, z) = xyz$  sujeto a  $x + y + z = 12$ . ¿Cuál es el máximo valor de  $xyz$ ?
5. Una caja rectangular con base cuadrada tiene volumen  $V = 32 \text{ m}^3$ . Minimizar su costo total si el fondo cuesta  $\$5/\text{m}^2$ , la tapa  $\$3/\text{m}^2$  y los lados  $\$1/\text{m}^2$ .
6. Maximizar  $f(x, y) = \ln(x) + 2\ln(y)$  sujeto a  $x + y = 5$ . Determine el multiplicador de Lagrange.
7. Considere la restricción  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ . ¿Cuál es el punto sobre este círculo que maximiza  $f(x, y) = 3x + 4y$ ?
8. Para una función de utilidad  $U(x, y) = (x+1)(y+2)$  con presupuesto  $3x + 2y = 30$ , encuentre la combinación óptima de consumo.

#### 4.3.5. Representación gráfica de extremos de funciones

##### Visualización de extremos: De la teoría al análisis geométrico

La representación gráfica de funciones multivariadas y sus extremos proporciona intuición geométrica fundamental para comprender el comportamiento de la función. Los gráficos en 2D (curvas de nivel) y 3D (superficies) revelan patrones que las ecuaciones analíticas pueden ocultar. Esta sección desarrolla técnicas de visualización desde gráficos sencillos hasta interpretaciones sofisticadas de máximos, mínimos y puntos de silla.

**Importancia de la visualización.** La intuición geométrica es esencial en multivariable:

- **Identificación rápida:** Un gráfico revela máximos, mínimos y puntos de silla de inmediato.
- **Validación:** Verificar resultados analíticos mediante visualización ayuda a detectar errores.
- **Comunicación:** Los gráficos comunican resultados a audiencias no técnicas.
- **Descubrimiento:** Explorar gráficos puede revelar comportamientos inesperados.

**Curvas de nivel (contornos).** Las curvas de nivel de  $f(x, y)$  son conjuntos de puntos donde la función tiene un valor constante:  $f(x, y) = k$ .

### Propiedades de las curvas de nivel:

- **No se cruzan:** Dos curvas de nivel con diferentes valores  $k_1 \neq k_2$  nunca se intersecan (a menos que en un punto singular).
- **Densidad indica pendiente:** Curvas de nivel muy cercanas indican pendiente pronunciada; curvas alejadas indican pendiente suave.
- **Gradiente perpendicular:** El vector gradiente  $\nabla f$  es perpendicular a las curvas de nivel. Apunta en la dirección de máximo crecimiento.
- **Extremos en el interior:** Un máximo o mínimo local ocurre donde las curvas de nivel se cierran (forman óvalos).
- **Punto de silla:** Caracterizado por curvas de nivel hiperbólicas que se cruzan (topológicamente).

**Gráfico 3D: Superficies.** Una superficie en 3D representa la gráfica de  $z = f(x, y)$ . Los extremos aparecen como:

- **Máximos:** Picos o cimas donde la superficie alcanza su altura máxima.
- **Mínimos:** Valles donde la superficie toca su altura mínima.
- **Puntos de silla:** Curvaturas mixtas; semejan una silla de montar o un paso de montaña.

### Técnicas de visualización.

**1. Curvas de nivel en 2D.** Mostrar  $f(x, y) = k$  para varios valores de  $k$ . Las curvas de nivel son la proyección del gráfico 3D sobre el plano  $xy$ .

Para  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , las curvas de nivel son círculos:  $x^2 + y^2 = k$  para  $k = 1, 4, 9, 16, \dots$

Los círculos concéntricos convergen hacia el mínimo en el origen  $(0, 0)$ . A medida que aumenta  $k$ , los círculos se expanden, indicando que la función crece radialmente desde el origen.

**2. Superficie 3D.** Representación de  $z = f(x, y)$  en tres dimensiones. Para cada punto  $(x, y)$  en el dominio, elevamos un punto a altura  $z = f(x, y)$ .

Para el paraboloides  $z = x^2 + y^2$ , la superficie forma un cuenco (valle) con el vértice (mínimo) en el origen. A medida que nos alejamos del origen en cualquier dirección, la altura aumenta sin límite.

La visualización 3D típicamente usa:

- **Proyección isométrica** (ángulos de observación estándar: 30 a 60).
- **Mapeo de colores** para indicar altura (rojo = alto, azul = bajo).
- **Malla (wireframe)** o **superficie sólida** según el contexto.

**3. Combinación: Contornos + Gradiente.** Superponer curvas de nivel con vectores de gradiente para mostrar la dirección de máximo crecimiento.

Para  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , el gradiente es  $\nabla f = (2x, 2y)$ .

En el punto  $(1, 0)$ , tenemos  $\nabla f = (2, 0)$ , un vector apuntando hacia la derecha (dirección  $+x$ ), perpendicular a la curva de nivel (el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ ).

En general,  $\nabla f$  siempre es perpendicular a la curva de nivel y apunta en la dirección donde  $f$  crece más rápidamente.

### Ejemplos de patrones característicos.

**Paraboloido elíptico (mínimo local).**  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ .

- **Curvas de nivel:** Elipses concéntricas  $x^2 + 4y^2 = k$ , más densas en la dirección  $y$  (indica mayor curvatura).
- **Gráfico 3D:** Valle claro en el origen, simétrico elípticamente.
- **Interpretación:** Mínimo global en  $(0, 0)$  con  $f(0, 0) = 0$ . La curvatura en la dirección  $y$  es 4 veces mayor que en la dirección  $x$ .
- **Hessiana:**  $f_{xx} = 2$ ,  $f_{yy} = 8$ ,  $f_{xy} = 0$ . Definida positiva  $\Rightarrow$  mínimo.

**Paraboloido hiperbólico (punto de silla).**  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

- **Curvas de nivel:** Hipérbolas  $x^2 - y^2 = k$ . Para  $k = 0$ , las asíntotas son  $y = \pm x$ .
- **Gráfico 3D:** Forma de silla de montar. Sube en la dirección  $\pm x$ , baja en la dirección  $\pm y$ .
- **Interpretación:** Punto de silla en  $(0, 0)$ . Máximo en la dirección  $x$ , mínimo en la dirección  $y$ .
- **Hessiana:**  $f_{xx} = 2$ ,  $f_{yy} = -2$ ,  $f_{xy} = 0$ . Indefinida  $\Rightarrow$  punto de silla.
- **Nota:** Es imposible clasificar como máximo o mínimo porque la función comportamiento depende de la dirección de aproximación.

**Gaussiana (máximo local).**  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ .

- **Curvas de nivel:** Círculos concéntricos como el paraboloido, pero con decaimiento exponencial.
- **Gráfico 3D:** Campana simétrica, con máximo en el origen y decaimiento suave hacia los bordes.
- **Interpretación:** Máximo global en  $(0, 0)$  con  $f(0, 0) = 1$ . La función tiende a 0 cuando  $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ .
- **Hessiana en  $(0, 0)$ :**  $f_{xx} = -2$ ,  $f_{yy} = -2$ ,  $f_{xy} = 0$ . Definida negativa  $\Rightarrow$  máximo.

**Función cúbica (punto de silla degenerado).**  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .

- **Puntos críticos:** Solo  $(0, 0)$ .
- **Hessiana:**  $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  en el origen (Hessiana nula).
- **Análisis de orden superior:** El término cúbico domina; el punto es un punto de silla degenerado.
- **Curvas de nivel:** Hipérbolas, indicando que es un punto de silla.
- **Importancia:** Demuestra que la Hessiana nula requiere análisis adicional usando derivadas de orden superior.

### Interpretación de formas y curvatura.

**Matriz Hessiana y forma local:**

La Hessiana  $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$  determina la curvatura local:

- **Definida positiva** ( $H > 0$ ): Curvatura hacia arriba  $\Rightarrow$  **Mínimo local**.
- **Definida negativa** ( $H < 0$ ): Curvatura hacia abajo  $\Rightarrow$  **Máximo local**.
- **Indefinida** (valores propios de signos opuestos): Curvatura mixta  $\Rightarrow$  **Punto de silla**.
- **Semidefinida:** Comportamiento degenerado; requiere análisis de orden superior.

### Técnicas computacionales de visualización.

**Software recomendado:**

- **MATLAB/Octave:** ‘surf()’, ‘contour()’, ‘quiver()’ para gráficos profesionales.
- **Python (Matplotlib, Plotly):** Visualización 3D interactiva y exportación flexible.
- **GeoGebra:** Herramienta gratuita e intuitiva para visualización interactiva.
- **Wolfram Mathematica:** Capacidades avanzadas de visualización y análisis simbólico.
- **LaTeX (PGFPlots, TikZ):** Gráficos de publicación en documentos LaTeX.

### Flujo de trabajo recomendado.

1. **Paso 1 — Análisis analítico:** Encontrar puntos críticos, clasificarlos usando Hessiana.
2. **Paso 2 — Visualización inicial:** Graficar curvas de nivel y la superficie 3D.

3. **Paso 3 — Verificación visual:** Confirmar que los extremos analíticos coinciden con los gráficos.
4. **Paso 4 — Interpretación geométrica:** Entender la forma local, densidad de contornos, dirección del gradiente.
5. **Paso 5 — Comunicación:** Usar gráficos para presentar resultados de forma clara y persuasiva.

### Casos de estudio con visualización.

Caso 1: Análisis completo de  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y$

#### Paso 1 — Encontrar puntos críticos:

$$f_x = 2x - 2y - 2 = 0, \quad f_y = -2x + 4y + 2 = 0$$

De la primera:  $x = y + 1$ . Sustituyendo:  $-2(y + 1) + 4y + 2 = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 1$ .

Punto crítico:  $(1, 0)$ .

#### Paso 2 — Clasificar usando Hessiana:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 4, \quad f_{xy} = -2$$

$$D = 2 \cdot 4 - (-2)^2 = 8 - 4 = 4 > 0, \quad f_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo local}$$

**Paso 3 — Visualizar:** Las curvas de nivel forman elipses alrededor de  $(1, 0)$ . El gráfico 3D muestra un valle en ese punto.

**Conclusión:** Mínimo en  $(1, 0)$  con  $f(1, 0) = 1 - 0 + 0 - 2 + 0 = -1$ .

Caso 2: Punto de silla en  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

#### Paso 1 — Puntos críticos:

$$f_x = 3x^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2, \quad f_y = -6xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = 0$$

Si  $x = 0$ :  $0 = y^2 \Rightarrow y = 0$ , punto  $(0, 0)$ .

Si  $y = 0$ :  $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ , nuevamente  $(0, 0)$ .

Punto crítico único:  $(0, 0)$ .

#### Paso 2 — Hessiana:

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = -6y, \quad f_{xy} = -6y$$

En  $(0, 0)$ :  $f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = 0$ . ¡La Hessiana es cero!

**Paso 3 — Análisis de orden superior:** Expandiendo en serie de Taylor:  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + \text{términos de orden } \geq 4$ .

El término cúbico  $x^3 - 3xy^2 = x(x^2 - 3y^2)$  cambia de signo en diferentes direcciones:

- Dirección  $y = 0$ :  $f(x, 0) = x^3$ , que crece para  $x > 0$  y decrece para  $x < 0$ .
- Dirección  $x = y$ :  $f(y, y) = y^3 - 3y^3 = -2y^3$ , que decrece para  $y > 0$  y crece para  $y < 0$ .

**Conclusión:** Punto de silla en  $(0, 0)$  (aunque degenerado).

**Visualización:** Las curvas de nivel son hipérbolas (forma característica de silla), y el gráfico 3D muestra una forma de silla pronunciada.

## Herramientas prácticas de interpretación.

**Análisis de densidad de contornos.** Dos curvas de nivel separadas por distancia  $\Delta k$  (en valor de función):

- **Contornos cercanos:** Pendiente  $|\nabla f|$  grande.
- **Contornos alejados:** Pendiente  $|\nabla f|$  pequeña.
- **Simetría:** Indica ortotropía (comportamiento similar en ciertas direcciones).

### Identificación de extremos mediante contornos.

- **Óvalo cerrado:** Máximo o mínimo (determinar cual por valores de  $k$ ).
- **Hipérbola o "X":** Punto de silla.
- **Rectas paralelas:** Función lineal en esa región.

## Ejercicios propuestos.

1. Dibuje las curvas de nivel y la superficie 3D de  $f(x, y) = x^2 - 4y^2$ . Identifique los puntos críticos e interprete geométricamente.
2. Para  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$  en  $[0, 2\pi]^2$ , grafica los contornos y explique la distribución de máximos y mínimos.
3. Considere  $f(x, y) = e^{-x^2}(y^2 - 1)$ . Visualice la función y describa cómo cambia la forma según se mueve lejos del origen.
4. Grafique el campo de gradientes de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  junto con sus curvas de nivel. Verifique que  $\nabla f$  es perpendicular a los contornos.
5. Represente la función  $f(x, y) = (x - 1)^2 - (y - 2)^2$  y localice el punto de silla. ¿Cómo cambia la visualización al trasladar la función?
6. Cree un gráfico 3D y curvas de nivel para una función cúbica  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ . Identifique todos los puntos críticos y use la Hessiana para clasificarlos.
7. Para la función  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , dibuje sus contornos y explique por qué el punto  $(0, 0)$  es un mínimo global aunque **no sea diferenciable** en ese punto. ¿Cómo se reconcilia esto con los métodos de cálculo diferencial?
8. Visualice múltiples funciones relacionadas:  $z_1 = x^2 + y^2$ ,  $z_2 = x^2 - y^2$ ,  $z_3 = -x^2 - y^2$ . Compárelas e identifique la forma característica de cada una.

**Síntesis visual-analítica.** La representación gráfica y el análisis analítico son complementarios:

Aspecto	Análisis Analítico	Visualización
<b>Exactitud</b>	Valores exactos, simbólicos.	Aproximación visual.
<b>Intuición</b>	Requiere experiencia matemática.	Inmediata e intuitiva.
<b>Escalabilidad</b>	Válido para cualquier dimensión (conceptualmente).	Limitado a 2D y 3D.
<b>Comunicación</b>	Preciso pero técnico.	Accessible, persuasivo.
<b>Validación</b>	Requiere verificación numérica.	Detección rápida de errores.

Cuadro 4: Complementariedad entre análisis analítico y visualización gráfica.

**Conclusión de la Unidad II.** A lo largo de esta unidad, hemos desarrollado un marco completo para analizar funciones multivariadas:

1. **Derivadas parciales:** Herramientas para medir cambios en direcciones específicas.
2. **Gradiente:** Vector que sintetiza la dirección de máximo crecimiento.
3. **Valores críticos:** Puntos donde el comportamiento cambia, candidatos a extremos.
4. **Máximos y mínimos:** Caracterización mediante derivadas segundas.
5. **Multiplicadores de Lagrange:** Técnica poderosa para optimización con restricciones.
6. **Representación gráfica:** Visualización que ancla la intuición.

El dominio de estos conceptos proporciona las bases para aplicaciones avanzadas en ciencias, ingeniería, economía y más allá. La combinación de rigor analítico, intuición geométrica y capacidades computacionales crea un conjunto de herramientas poderosas para resolver problemas complejos del mundo real.

## 5. Unidad III: Integral Múltiple

### Integrales Múltiples: Fundamentos

Las integrales múltiples extienden el concepto de integración a funciones de varias variables, permitiendo calcular volúmenes, masas, centros de masa y otras cantidades físicas sobre regiones en el plano y en el espacio. Son herramientas fundamentales en física, ingeniería, economía y todas las áreas donde se requiere el cálculo de cantidades distribuidas sobre regiones multidimensionales.

### 5.1. Integrales dobles

**Introducción.** Las **integrales dobles** son la extensión natural de las integrales definidas a funciones de dos variables. Mientras que una integral definida calcula el área bajo una curva, una integral doble calcula el volumen bajo una superficie o cantidades distribuidas sobre una región plana.

**Definición formal:** La integral doble de una función  $f(x, y)$  continua sobre una región  $R \subset \mathbb{R}^2$  se define como el límite de sumas de Riemann:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A,$$

donde  $\Delta A = \Delta x \Delta y$  es el área de cada subrectángulo.

**Interpretación geométrica:** Si  $f(x, y) \geq 0$ , la integral doble representa el **volumen** del sólido bajo la superficie  $z = f(x, y)$  y sobre la región  $R$  en el plano  $xy$ .

#### 5.1.1. Regiones rectangulares

##### Integración sobre regiones rectangulares

Cuando la región de integración es un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , la integral doble se puede calcular mediante dos integrales iteradas. El orden de integración puede ser  $dy dx$  o  $dx dy$ , y bajo condiciones de continuidad, ambos órdenes dan el mismo resultado.

**Teorema de Fubini para rectángulos.** Si  $f(x, y)$  es continua en el rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

**Ejemplos resueltos.**

### Ejemplo 1: Integral doble sobre rectángulo

Calcular

$$\iint_R (x + 2y) dA,$$

donde  $R = [0, 2] \times [1, 3]$ .

**Solución:**

Integramos primero con respecto a  $y$ , luego con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned}\iint_R (x + 2y) dA &= \int_0^2 \int_1^3 (x + 2y) dy dx \\&= \int_0^2 [xy + y^2]_{y=1}^{y=3} dx \\&= \int_0^2 [(3x + 9) - (x + 1)] dx \\&= \int_0^2 (2x + 8) dx \\&= [x^2 + 8x]_0^2 \\&= 4 + 16 = \boxed{20}.\end{aligned}$$

**Verificación con orden inverso:**

$$\begin{aligned}\iint_R (x + 2y) dA &= \int_1^3 \int_0^2 (x + 2y) dx dy \\&= \int_1^3 \left[ \frac{x^2}{2} + 2xy \right]_{x=0}^{x=2} dy \\&= \int_1^3 (2 + 4y) dy \\&= [2y + 2y^2]_1^3 \\&= (6 + 18) - (2 + 2) = 20.\end{aligned}$$

### Ejemplo 2: Función producto separable

Calcular

$$\iint_R xy^2 dA,$$

donde  $R = [1, 3] \times [0, 2]$ .

**Solución:**

Como la función es producto  $xy^2 = x \cdot y^2$ , podemos separar las integrales:

$$\begin{aligned}
\iint_R xy^2 dA &= \int_1^3 \int_0^2 xy^2 dy dx \\
&= \int_1^3 x \left( \int_0^2 y^2 dy \right) dx \\
&= \int_1^3 x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx \\
&= \int_1^3 x \cdot \frac{8}{3} dx \\
&= \frac{8}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^3 \\
&= \frac{8}{3} \cdot \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{3} \cdot 4 = \boxed{\frac{32}{3}}.
\end{aligned}$$

### 5.1.2. Regiones no rectangulares

#### Integración sobre regiones generales

En la práctica, muchas regiones no son rectangulares. Existen dos tipos principales:

- Región tipo I:** Acotada por abajo y arriba por funciones de  $x$

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

- Región tipo II:** Acotada por izquierda y derecha por funciones de  $y$

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

**Integración sobre regiones tipo I.** Para una región tipo I:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

**Integración sobre regiones tipo II.** Para una región tipo II:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Ejemplo 3: Región tipo I — triangular

Calcular

$$\iint_R (x + y) dA,$$

donde  $R$  es la región triangular con vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(2, 3)$ .

**Solución:**

Primero identificamos los límites. La recta que pasa por  $(0, 0)$  y  $(2, 3)$  tiene ecuación:

$$y = \frac{3}{2}x.$$

La región puede describirse como tipo I:

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{3}{2}x\}.$$

Calculamos la integral:

$$\begin{aligned}\iint_R (x + y) dA &= \int_0^2 \int_0^{\frac{3}{2}x} (x + y) dy dx \\&= \int_0^2 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{3}{2}x} dx \\&= \int_0^2 \left( x \cdot \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9x^2}{4} \right) dx \\&= \int_0^2 \left( \frac{3x^2}{2} + \frac{9x^2}{8} \right) dx \\&= \int_0^2 \frac{21x^2}{8} dx \\&= \frac{21}{8} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\&= \frac{21}{8} \cdot \frac{8}{3} = \boxed{7}.\end{aligned}$$

#### Ejemplo 4: Región tipo II

Calcular

$$\iint_R x^2 y dA,$$

donde  $R$  es la región acotada por  $y = x^2$  y  $y = 2x$ .

**Solución:**

Primero encontramos los puntos de intersección:

$$x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2.$$

Para  $x \in [0, 2]$ , tenemos  $x^2 \leq 2x$ , por lo que la región es tipo I:

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

$$\begin{aligned}
\iint_R x^2 y \, dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 y \, dy \, dx \\
&= \int_0^2 x^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{2x} \, dx \\
&= \int_0^2 x^2 \left( \frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \, dx \\
&= \int_0^2 \left( 2x^4 - \frac{x^6}{2} \right) \, dx \\
&= \left[ \frac{2x^5}{5} - \frac{x^7}{14} \right]_0^2 \\
&= \frac{64}{5} - \frac{128}{14} = \frac{64}{5} - \frac{64}{7} \\
&= \frac{448 - 320}{35} = \boxed{\frac{128}{35}}.
\end{aligned}$$

### 5.1.3. Integrales dobles en coordenadas polares

#### Coordenadas polares en integrales dobles

Para regiones circulares o con simetría radial, el uso de coordenadas polares simplifica significativamente el cálculo. La transformación está dada por:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dA = r \, dr \, d\theta.$$

La integral doble en coordenadas polares es:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta,$$

donde  $S$  es la región correspondiente en coordenadas polares.

#### Ejemplo 5: Integral doble en coordenadas polares

Calcular

$$\iint_R e^{x^2+y^2} \, dA,$$

donde  $R$  es el disco de radio 2 centrado en el origen.

**Solución:**

En coordenadas polares,  $R$  se describe como:

$$S = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Notando que  $x^2 + y^2 = r^2$ :

$$\begin{aligned}
 \iint_R e^{x^2+y^2} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 e^{r^2} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r e^{r^2} dr \\
 &= 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 \\
 &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} (e^4 - 1) \\
 &= \boxed{\pi(e^4 - 1)}.
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 6: Área usando coordenadas polares

Calcular el área de la región dentro del círculo  $r = 2 \cos \theta$  y fuera del círculo  $r = 1$ .

**Solución:**

La región está en coordenadas polares. Para encontrar los límites de  $\theta$ , resolvemos:

$$2 \cos \theta = 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}.$$

El área es:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_1^{2 \cos \theta} r dr d\theta \\
 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_1^{2 \cos \theta} d\theta \\
 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left( 2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) d\theta \\
 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left( 1 + \cos(2\theta) - \frac{1}{2} \right) d\theta \\
 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left( \frac{1}{2} + \cos(2\theta) \right) d\theta \\
 &= \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{-\pi/3}^{\pi/3} \\
 &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}.
 \end{aligned}$$

**Cambio de orden de integración.** A veces es más conveniente cambiar el orden de integración. Esto requiere reescribir los límites de integración.

### Ejemplo 4b: Cambio de orden de integración

Calcular

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 y \, dy \, dx$$

cambiando el orden de integración.

**Solución:**

Primero identificamos la región. Del orden original  $dy \, dx$ :

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

Esta es una región tipo I. Para convertirla a tipo II (orden  $dx \, dy$ ):

$$R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 y \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 y \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 y \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{y}} \, dy \\ &= \int_0^1 y \cdot \frac{y^2}{4} \, dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 y^3 \, dy \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{16}}. \end{aligned}$$

**Propiedades de las integrales dobles.** Las integrales dobles satisfacen propiedades similares a las integrales definidas:

- **Linealidad:**  $\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] \, dA = \iint_R f(x, y) \, dA + \iint_R g(x, y) \, dA$
- **Constante:**  $\iint_R cf(x, y) \, dA = c \iint_R f(x, y) \, dA$
- **Aditividad:** Si  $R = R_1 \cup R_2$  con  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , entonces  $\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_{R_1} f(x, y) \, dA + \iint_{R_2} f(x, y) \, dA$
- **Comparación:** Si  $f(x, y) \geq g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in R$ , entonces  $\iint_R f(x, y) \, dA \geq \iint_R g(x, y) \, dA$

**Aplicaciones de las integrales dobles.** Las integrales dobles tienen aplicaciones en:

- **Volumen:**  $V = \iint_R f(x, y) \, dA$  cuando  $f(x, y) \geq 0$
- **Área:**  $A = \iint_R 1 \, dA$
- **Masa de una lámina:**  $M = \iint_R \rho(x, y) \, dA$  donde  $\rho$  es la densidad
- **Centro de masa:**  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right)$  donde  $M_x = \iint_R y \rho(x, y) \, dA$  y  $M_y = \iint_R x \rho(x, y) \, dA$

#### 5.1.4. Ejercicios: Integrales dobles

Calcula las siguientes integrales:

#### Integrales indefinidas con funciones exponenciales y trigonométricas

$$1. \int e^{4x} \cos(3x + 2) dx$$

**Solución:** Usamos integración por partes repetida. Sea  $u = e^{4x}$  y  $dv = \cos(3x + 2) dx$ .

Entonces  $du = 4e^{4x} dx$  y  $v = \frac{\sin(3x+2)}{3}$ .

$$\int e^{4x} \cos(3x + 2) dx = \frac{e^{4x} \sin(3x + 2)}{3} - \frac{4}{3} \int e^{4x} \sin(3x + 2) dx$$

Aplicamos integración por partes nuevamente:

$$\int e^{4x} \sin(3x + 2) dx = -\frac{e^{4x} \cos(3x + 2)}{3} + \frac{4}{3} \int e^{4x} \cos(3x + 2) dx$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$\int e^{4x} \cos(3x + 2) dx = \frac{e^{4x}(4 \sin(3x + 2) + 3 \cos(3x + 2))}{25} + C$$

$$2. \int e^{3x} \sin(4x + 2) dx$$

**Solución:** Análogamente a la anterior, usando integración por partes repetida:

$$\int e^{3x} \sin(4x + 2) dx = \frac{e^{3x}(3 \sin(4x + 2) - 4 \cos(4x + 2))}{25} + C$$

$$3. \int e^{-x} \cos(2x) dx$$

**Solución:** Usamos integración por partes repetida.

$$\int e^{-x} \cos(2x) dx = \frac{e^{-x}(-\cos(2x) - 2 \sin(2x))}{5} + C = \frac{e^{-x}(-\cos(2x) - 2 \sin(2x))}{5} + C$$

$$\text{O equivalentemente: } \frac{-e^{-x}(\cos(2x) + 2 \sin(2x))}{5} + C$$

## Integrales dobles iteradas

$$4. \int_{x=0}^4 \int_{y=1}^3 6x^2y \, dy \, dx$$

**Solución:** Integraremos primero con respecto a  $y$ :

$$\int_1^3 6x^2y \, dy = 6x^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_1^3 = 6x^2 \left( \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = 6x^2 \cdot 4 = 24x^2$$

Luego integramos con respecto a  $x$ :

$$\int_0^4 24x^2 \, dx = 24 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 8[4^3 - 0] = 8 \cdot 64 = 512$$

$$5. \int_{x=0}^4 \int_{y=2}^3 (6x^2y - 2x) \, dy \, dx$$

**Solución:** Integraremos primero con respecto a  $y$ :

$$\begin{aligned} \int_2^3 (6x^2y - 2x) \, dy &= [3x^2y^2 - 2xy]_2^3 = (3x^2 \cdot 9 - 2x \cdot 3) - (3x^2 \cdot 4 - 2x \cdot 2) \\ &= 27x^2 - 6x - 12x^2 + 4x = 15x^2 - 2x \end{aligned}$$

Luego integramos con respecto a  $x$ :

$$\int_0^4 (15x^2 - 2x) \, dx = [5x^3 - x^2]_0^4 = 5 \cdot 64 - 16 = 320 - 16 = 304$$

$$6. \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^x \sin(x-y) \, dy \, dx$$

**Solución:** Integraremos primero con respecto a  $y$ :

$$\int_0^x \sin(x-y) \, dy = [\cos(x-y)]_0^x = \cos(0) - \cos(x) = 1 - \cos(x)$$

Luego integramos con respecto a  $x$ :

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \cos(x)) \, dx = [x - \sin(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$7. \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^x \sin(x+2y) \, dy \, dx$$

**Solución:** Integraremos primero con respecto a  $y$ :

$$\int_0^x \sin(x+2y) \, dy = \left[ -\frac{\cos(x+2y)}{2} \right]_0^x = -\frac{\cos(3x)}{2} + \frac{\cos(x)}{2} = \frac{\cos(x) - \cos(3x)}{2}$$

Luego integramos con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) - \cos(3x)}{2} dx &= \frac{1}{2} \left[ \sin(x) - \frac{\sin(3x)}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sin(3\pi/2)}{3} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{-1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

8.  $\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^x e^{x^2} \sin(2y) dy dx$

**Solución:** Integramos primero con respecto a  $y$ :

$$\int_0^x e^{x^2} \sin(2y) dy = e^{x^2} \left[ -\frac{\cos(2y)}{2} \right]_0^x = e^{x^2} \left( -\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{e^{x^2}(1 - \cos(2x))}{2}$$

Luego integramos con respecto a  $x$ :

$$\int_0^2 \frac{e^{x^2}(1 - \cos(2x))}{2} dx$$

Esta integral no tiene una forma cerrada simple. Se puede aproximar numéricamente o expresar en términos de funciones especiales como la función error.

**Valor aproximado:**  $\approx 1,855$

## 5.2. Integrales triples

### Integrales triples: Extensión al espacio

Las integrales triples extienden el concepto de integración a funciones de tres variables sobre regiones sólidas en el espacio tridimensional. Son esenciales para calcular volúmenes, masas, centros de masa, momentos de inercia y otras cantidades físicas distribuidas en el espacio.

**Definición formal.** La integral triple de una función  $f(x, y, z)$  continua sobre una región sólida  $V \subset \mathbb{R}^3$  se define como:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{m,n,p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V,$$

donde  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  es el volumen de cada subcaja.

**Interpretación física:** Si  $f(x, y, z) = \rho(x, y, z)$  representa la densidad de masa en un punto  $(x, y, z)$ , entonces la integral triple da la masa total del sólido.

**Interpretación geométrica:** Si  $f(x, y, z) = 1$ , la integral triple da el volumen de la región sólida  $V$ .

### 5.2.1. Regiones sólidas rectangulares

**Teorema de Fubini para sólidos rectangulares.** Si  $f(x, y, z)$  es continua en el bloque rectangular  $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ , entonces:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx.$$

El orden de integración puede cambiarse siempre que se ajusten los límites correspondientes.

Ejemplo 7: Integral triple sobre bloque rectangular

Calcular

$$\iiint_V (x + y + z) dV,$$

donde  $V = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \iiint_V (x + y + z) dV &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (x + y + z) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \left[ xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_0^3 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (3x + 3y + \frac{9}{2}) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ 3xy + \frac{3y^2}{2} + \frac{9y}{2} \right]_0^2 dx \\ &= \int_0^1 (6x + 6 + 9) dx \\ &= \int_0^1 (6x + 15) dx \\ &= \left[ 3x^2 + 15x \right]_0^1 \\ &= 3 + 15 = \boxed{18}. \end{aligned}$$

### 5.2.2. Regiones sólidas generales

#### Tipos de regiones sólidas

Las regiones sólidas se clasifican según cómo están acotadas:

1. **Tipo I:** Acotada por arriba y abajo por superficies  $z = g_1(x, y)$  y  $z = g_2(x, y)$ , y lateralmente por una región  $D$  en el plano  $xy$
2. **Tipo II:** Similar, pero con acotaciones en  $y$  o  $x$  según la proyección

**Región sólida tipo I.** Para una región sólida tipo I:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_D \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz dA,$$

donde  $D$  es la proyección de  $V$  sobre el plano  $xy$ .

#### Ejemplo 8: Volumen de un tetraedro

Calcular el volumen del tetraedro con vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 3)$ .

**Solución:**

Primero encontramos la ecuación del plano que pasa por  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 3)$ :

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow z = 3 \left(1 - x - \frac{y}{2}\right).$$

La región base en el plano  $xy$  está acotada por:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + \frac{y}{2} \leq 1.$$

El volumen es:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \int_0^{3(1-x-y/2)} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} 3 \left(1 - x - \frac{y}{2}\right) dy dx \\ &= \int_0^1 3 \left[ (1-x)y - \frac{y^2}{4} \right]_0^{2(1-x)} dx \\ &= \int_0^1 3 \left( 2(1-x)^2 - \frac{4(1-x)^2}{4} \right) dx \\ &= \int_0^1 3(1-x)^2 dx \\ &= 3 \left[ \frac{(1-x)^3}{-3} \right]_0^1 \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

#### Ejemplo 9: Masa de un sólido con densidad variable

Calcular la masa de un sólido  $V$  dado por:

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\},$$

con densidad  $\rho(x, y, z) = xyz$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_V \rho(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 xyz dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^2 xy \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^3 dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^2 xy \cdot \frac{9}{2} dy dx \\
&= \frac{9}{2} \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx \\
&= \frac{9}{2} \int_0^1 2x dx \\
&= 9 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{9}{2}}.
\end{aligned}$$

### 5.2.3. Integrales triples en coordenadas cilíndricas

#### Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son útiles para regiones con simetría circular alrededor de un eje. La transformación es:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad dV = r dr d\theta dz.$$

La integral triple en coordenadas cilíndricas es:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz,$$

donde  $S$  es la región correspondiente en coordenadas cilíndricas.

#### Ejemplo 10: Volumen usando coordenadas cilíndricas

Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 4$ .

#### Solución:

En coordenadas cilíndricas, el paraboloide es  $z = r^2$ . La región sólida es:

$$S = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 4\}.$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(4 - r^2) \, dr \\
&= 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) \, dr \\
&= 2\pi \left[ 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 \\
&= 2\pi(8 - 4) = \boxed{8\pi}.
\end{aligned}$$

#### 5.2.4. Regiones sólidas tipo II y tipo III

**Región sólida tipo II.** Una región sólida tipo II está acotada por planos o superficies que definen límites en  $x$ :

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dV = \iint_D \int_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} f(x, y, z) \, dx \, dA,$$

donde  $D$  es la proyección de  $V$  sobre el plano  $yz$ .

**Región sólida tipo III.** Una región sólida tipo III está acotada por planos o superficies que definen límites en  $y$ :

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dV = \iint_D \int_{k_1(x, z)}^{k_2(x, z)} f(x, y, z) \, dy \, dA,$$

donde  $D$  es la proyección de  $V$  sobre el plano  $xz$ .

Ejemplo 9b: Volumen de un sólido entre dos superficies

Calcular el volumen del sólido acotado por  $z = 0$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Solución:**

Usando coordenadas cilíndricas, el sólido está descrito por:

$$S = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq r\}.$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^r r \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \, dr \\
&= 2\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^2 \\
&= 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \boxed{\frac{16\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

### 5.2.5. Integrales triples en coordenadas esféricas

#### Coordenadas esféricas

Para regiones con simetría esférica, las coordenadas esféricas son ideales. La transformación es:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi,$$

con  $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ .

- $\rho \geq 0$ : distancia desde el origen
- $0 \leq \phi \leq \pi$ : ángulo desde el eje  $z$  positivo (colatitud)
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ : ángulo en el plano  $xy$  desde el eje  $x$  positivo (azimut)

#### Ejemplo 11: Volumen de una esfera usando coordenadas esféricas

Calcular el volumen de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ .

#### Solución:

En coordenadas esféricas, la esfera es:

$$S = \{(\rho, \phi, \theta) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \int_0^R \rho^2 \, d\rho \\ &= 2\pi \cdot [-\cos \phi]_0^\pi \cdot \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^R \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} \\ &= \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}}. \end{aligned}$$

#### Ejemplo 11b: Masa de una esfera con densidad radial

Calcular la masa de una esfera de radio  $R$  con densidad  $\rho = k\rho$  (densidad proporcional a la distancia desde el centro), donde  $\rho$  es la coordenada esférica.

#### Solución:

En coordenadas esféricas, la densidad es  $\rho(\rho) = k\rho$ . La masa es:

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_V k\rho \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^3 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \int_0^R \rho^3 \, d\rho \\
&= k \cdot 2\pi \cdot [-\cos \phi]_0^\pi \cdot \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \\
&= k \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} \\
&= [\boxed{\pi k R^4}].
\end{aligned}$$

### Elección entre coordenadas cilíndricas y esféricas.

- **Coordenadas cilíndricas:** Útiles para sólidos con simetría alrededor de un eje (cilindros, paraboloides, conos)
- **Coordenadas esféricas:** Útiles para sólidos con simetría alrededor de un punto (esferas, hemisferios)
- **Coordenadas cartesianas:** Útiles cuando los límites son rectas o planos paralelos a los ejes coordinados

### 5.3. Cambio de variable en integrales múltiples

#### Cambio de variables: Transformación de regiones

El cambio de variables permite transformar integrales complicadas sobre regiones complejas en integrales más simples sobre regiones rectangulares o con formas conocidas. El elemento clave es el **Jacobiano**, que mide cómo se transforma el área (o volumen) bajo la transformación.

**Teorema del cambio de variables.** Sea  $T : (u, v) \mapsto (x, y)$  una transformación uno a uno de clase  $C^1$  que mapea una región  $S$  en el plano  $uv$  a una región  $R$  en el plano  $xy$ . Entonces:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, dA_{uv},$$

donde el **Jacobiano** es:

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

**Interpretación:** El valor absoluto del Jacobiano  $|J|$  representa el factor por el cual el área se amplía o contrae bajo la transformación.

**Casos especiales:** Los siguientes casos son comunes:

- Coordenadas polares:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \rightarrow |J| = r$
- Transformación lineal:  $|J|$  es constante (determinante de la matriz de transformación)

### Ejemplo 12: Cambio de variable lineal

Calcular

$$\iint_R (x + y) dA,$$

donde  $R$  es la región acotada por  $x - y = 0, x - y = 2, x + y = 0$  y  $x + y = 4$ .

**Solución:**

Usamos la transformación:

$$u = x - y, \quad v = x + y.$$

El Jacobiano:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

La región transformada es:

$$S = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 4\}.$$

Además,  $x + y = v$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dA &= \iint_S v \cdot \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \int_0^2 v du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 2v dv \\ &= \int_0^4 v dv \\ &= \left[ \frac{v^2}{2} \right]_0^4 = [8]. \end{aligned}$$

### Ejemplo 13: Cambio de variable a coordenadas polares generalizadas

Calcular

$$\iint_R e^{(x^2+y^2)/a^2} dA,$$

donde  $R$  es la región elíptica  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

**Solución:**

Usamos el cambio:

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta,$$

que transforma la elipse en un círculo unitario.

El Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = abr.$$

La región transformada:

$$S = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

$$\iint_R e^{(x^2+y^2)/a^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2(\cos^2 \theta + (b^2/a^2) \sin^2 \theta)} abr dr d\theta.$$

Para  $a = b$ , esto se simplifica a:

$$\begin{aligned} \iint_R e^{(x^2+y^2)/a^2} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} a^2 r dr d\theta \\ &= 2\pi a^2 \left[ \frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 \\ &= \boxed{\pi a^2(e - 1)}. \end{aligned}$$

**Interpretación geométrica del Jacobiano.** El Jacobiano  $|J(u, v)|$  representa el factor de escala del área bajo la transformación. Si  $|J| > 1$ , el área se expande; si  $|J| < 1$ , el área se contrae. Esto es crucial para mantener la igualdad en el cambio de variables.

### Propiedades del Jacobiano.

- Si  $T$  es una transformación lineal, el Jacobiano es constante (el determinante de la matriz de transformación)
- El Jacobiano del producto de transformaciones es el producto de los Jacobianos
- Para coordenadas polares, cilíndricas y esféricas, el Jacobiano ya está incluido en las fórmulas estándar

**Cambio de variables en integrales triples.** Para una transformación  $T : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ , el teorema del cambio de variables es:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| dV_{uvw},$$

donde el Jacobiano es:

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

### Jacobianos de transformaciones comunes.

- **Coordenadas cilíndricas:**  $|J| = r$
- **Coordenadas esféricas:**  $|J| = \rho^2 \sin \phi$
- **Transformación de escala:**  $x = au, y = bv, z = cw \rightarrow |J| = abc$

Ejemplo 13b: Cambio de escala en integral triple

Calcular el volumen del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  usando cambio de variables.

**Solución:**

Usamos la transformación:

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw.$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

El elipsoide se transforma en la esfera unitaria  $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ . El volumen es:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \iiint_S abc \, dV_{uvw} \\ &= abc \cdot \text{Volumen de la esfera unitaria} \\ &= abc \cdot \frac{4\pi}{3} = \boxed{\frac{4\pi abc}{3}}. \end{aligned}$$

## 5.4. Aplicaciones de integrales múltiples

### Aplicaciones prácticas de integrales múltiples

Las integrales múltiples tienen innumerables aplicaciones en física, ingeniería, economía y otras áreas. Permiten calcular cantidades distribuidas sobre regiones planas y sólidas, resolver problemas de optimización y modelar fenómenos complejos.

#### 5.4.1. Volumen de sólidos

**Método general.** El volumen de un sólido acotado superiormente por  $z = f(x, y)$  e inferiormente por  $z = g(x, y)$  sobre una región  $D$  en el plano  $xy$  es:

$$V = \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] \, dA.$$

### Ejemplo 14: Volumen entre dos superficies

Calcular el volumen del sólido acotado por los paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 8 - x^2 - y^2$ .

**Solución:**

Los paraboloides se intersectan cuando:

$$x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

La región base es el círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$ . El volumen es:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(8 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)] dA \\ &= \iint_D (8 - 2x^2 - 2y^2) dA. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - 2r^2)r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 (8r - 2r^3) dr \\ &= 2\pi \left[ 4r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_0 \\ &= 2\pi(16 - 8) = \boxed{16\pi}. \end{aligned}$$

### 5.4.2. Masa y centro de masa

**Masa de una lámina.** Para una lámina con densidad  $\rho(x, y)$ , la masa es:

$$M = \iint_R \rho(x, y) dA.$$

**Centro de masa.** Las coordenadas del centro de masa  $(\bar{x}, \bar{y})$  son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{M} \iint_R x \rho(x, y) dA, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{M} \iint_R y \rho(x, y) dA,$$

donde  $M_x$  y  $M_y$  son los momentos respecto a los ejes  $x$  e  $y$ .

### Ejemplo 15: Centro de masa de una lámina triangular

Encontrar el centro de masa de una lámina triangular con vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(2, 3)$ , con densidad constante  $\rho(x, y) = k$ .

**Solución:**

Primero calculamos la masa:

$$M = k \iint_R dA = k \cdot \text{Área} = k \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3k.$$

Los momentos:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^2 \int_0^{\frac{3}{2}x} kx \, dy \, dx \\ &= k \int_0^2 x \cdot \frac{3x}{2} \, dx \\ &= \frac{3k}{2} \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{3k}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^2 \int_0^{\frac{3}{2}x} ky \, dy \, dx \\ &= k \int_0^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{3}{2}x} \, dx \\ &= k \int_0^2 \frac{9x^2}{8} \, dx \\ &= \frac{9k}{8} \cdot \frac{8}{3} = 3k. \end{aligned}$$

El centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}, \quad \bar{y} = \frac{3k}{3k} = 1.$$

$$\boxed{\left( \frac{4}{3}, 1 \right)}$$

#### 5.4.3. Momentos de inercia

**Definición.** Para una lámina con densidad  $\rho(x, y)$ , el momento de inercia respecto al eje  $x$  es:

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) \, dA,$$

y respecto al eje  $y$ :

$$I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) \, dA.$$

El momento de inercia respecto al origen (momento polar) es:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dA.$$

##### Ejemplo 16: Momento de inercia de un disco

Calcular el momento de inercia respecto al origen de un disco circular de radio  $R$  con densidad constante  $\rho = k$ .

**Solución:**

Usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \iint_R (x^2 + y^2) k \, dA = k \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot r \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 \, dr \\
 &= k \cdot 2\pi \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\
 &= 2\pi k \cdot \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{\pi k R^4}{2}}.
 \end{aligned}$$

#### 5.4.4. Carga eléctrica y otras aplicaciones

**Carga eléctrica.** Para una distribución de carga con densidad  $\sigma(x, y)$  sobre una superficie, la carga total es:

$$Q = \iint_R \sigma(x, y) \, dA.$$

**Valor promedio.** El valor promedio de una función  $f(x, y)$  sobre una región  $R$  es:

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{\text{Área}(R)} \iint_R f(x, y) \, dA.$$

Ejemplo 17: Temperatura promedio en una placa

Una placa circular de radio  $a$  tiene temperatura  $T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$  (en grados Celsius). Calcular la temperatura promedio de la placa.

**Solución:**

El área de la placa es  $A = \pi a^2$ . La temperatura promedio es:

$$\begin{aligned}
 T_{\text{prom}} &= \frac{1}{\pi a^2} \iint_R (100 - x^2 - y^2) \, dA \\
 &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (100 - r^2) r \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (100r - r^3) \, dr \\
 &= \frac{1}{\pi a^2} \cdot 2\pi \left[ 50r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^a \\
 &= \frac{2}{a^2} \left( 50a^2 - \frac{a^4}{4} \right) \\
 &= 100 - \frac{a^2}{2} = \boxed{100 - \frac{a^2}{2}} \text{°C.}
 \end{aligned}$$

### 5.4.5. Masa y centro de masa de sólidos

**Masa de un sólido.** Para un sólido con densidad  $\rho(x, y, z)$ , la masa es:

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dV.$$

**Centro de masa de un sólido.** Las coordenadas del centro de masa  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  son:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho(x, y, z) dV,$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho(x, y, z) dV,$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho(x, y, z) dV,$$

donde  $M_{yz}$ ,  $M_{xz}$  y  $M_{xy}$  son los momentos respecto a los planos correspondientes.

Ejemplo 18: Centro de masa de un sólido homogéneo

Calcular el centro de masa del sólido limitado por el paraboloide  $z = 4 - x^2 - y^2$  y el plano  $z = 0$ , suponiendo densidad constante  $\rho = k$ .

**Solución:**

La proyección en el plano  $xy$  es el círculo  $x^2 + y^2 = 4$ , es decir,  $0 \leq r \leq 2$ .

Primero calculamos la masa:

$$\begin{aligned} M &= k \iiint_V dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r dz dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(4 - r^2) dr \\ &= 2\pi k \int_0^2 (4r - r^3) dr \\ &= 2\pi k \left[ 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 \\ &= 2\pi k(8 - 4) = 8\pi k. \end{aligned}$$

Por simetría,  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Calculamos  $\bar{z}$ :

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= k \iiint_V z \, dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} zr \, dz \, dr \, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{4-r^2} dr \\
&= 2\pi k \int_0^2 \frac{r(4-r^2)^2}{2} dr \\
&= \pi k \int_0^2 r(16 - 8r^2 + r^4) dr \\
&= \pi k \int_0^2 (16r - 8r^3 + r^5) dr \\
&= \pi k \left[ 8r^2 - 2r^4 + \frac{r^6}{6} \right]_0^2 \\
&= \pi k \left( 32 - 32 + \frac{64}{6} \right) = \frac{32\pi k}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi k/3}{8\pi k} = \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{\left(0, 0, \frac{4}{3}\right)}$$

#### 5.4.6. Aplicaciones a probabilidad

**Funciones de densidad de probabilidad conjunta.** Si  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta  $f(x, y)$ , entonces:

- **Probabilidad sobre una región:**  $P((X, Y) \in R) = \iint_R f(x, y) \, dA$
- **Normalización:**  $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dA = 1$
- **Valor esperado:**  $E[g(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y) \, dA$

Ejemplo 19: Probabilidad con distribución uniforme

Sea  $f(x, y) = k$  una función de densidad constante sobre la región triangular con vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(0, 2)$ . Encontrar  $k$  y calcular  $P(X + Y \leq 1)$ .

**Solución:**

Primero encontramos  $k$  usando la condición de normalización:

$$1 = \iint_R k \, dA = k \cdot \text{Área} = k \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2k \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Para calcular  $P(X + Y \leq 1)$ , la región es:

$$R' = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

#### 5.4.7. Momentos de inercia para sólidos

**Definición.** Para un sólido con densidad  $\rho(x, y, z)$ , los momentos de inercia son:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV.$$

Ejemplo 20: Momento de inercia de un sólido esférico

Calcular el momento de inercia respecto al eje  $z$  de una esfera sólida de radio  $R$  con densidad constante  $\rho = k$ .

**Solución:**

En coordenadas esféricas,  $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \phi$ . El momento de inercia es:

$$\begin{aligned} I_z &= k \iiint_V (x^2 + y^2) dV \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin^2 \phi \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \int_0^R \rho^4 d\rho. \end{aligned}$$

Calculando por partes:

$$\int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi = \int_0^\pi \sin \phi (1 - \cos^2 \phi) d\phi = \left[ -\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^\pi = \frac{4}{3}.$$

$$I_z = k \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = \boxed{\frac{8\pi k R^5}{15}}.$$

**Aplicaciones en física e ingeniería.** Las integrales múltiples tienen aplicaciones extensas en:

- **Física:** Cálculo de campos gravitacionales, distribución de carga, momento de inercia de cuerpos rígidos, potencial eléctrico
- **Ingeniería:** Análisis estructural, transferencia de calor, dinámica de fluidos, análisis de tensiones
- **Economía:** Modelado de distribución de recursos, análisis de probabilidad conjunta, optimización de portafolios

- **Probabilidad:** Funciones de densidad de probabilidad conjunta, valores esperados, covarianza
- **Geometría:** Cálculo de áreas y volúmenes de regiones complejas, superficies de revolución
- **Estadística:** Análisis multivariable, regresión múltiple, funciones de verosimilitud

#### 5.4.8. Aplicaciones adicionales

**Área de superficies.** El área de una superficie  $z = f(x, y)$  sobre una región  $R$  es:

$$A = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dA.$$

Ejemplo 22: Área de una superficie

Calcular el área de la parte del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  que está dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Solución:**

Primero calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

El elemento de área de superficie es:

$$\sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} = \sqrt{1 + 4r^2}.$$

Usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 r \sqrt{1 + 4r^2} dr. \end{aligned}$$

Haciendo  $u = 1 + 4r^2$ ,  $du = 8r dr$ :

$$A = 2\pi \int_1^{17} \frac{1}{8} \sqrt{u} du = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{2u^{3/2}}{3} \right]_1^{17} = \boxed{\frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)}.$$

**Valor promedio en el espacio.** El valor promedio de una función  $f(x, y, z)$  sobre una región sólida  $V$  es:

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{\text{Volumen}(V)} \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

Ejemplo 23: Densidad promedio de un sólido

Un sólido tiene la forma de un cubo  $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$  con densidad  $\rho(x, y, z) = xyz$ . Calcular la densidad promedio.

**Solución:**

El volumen es  $V = 8$ . La masa total es:

$$M = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xyz \, dz \, dy \, dx = \left( \int_0^2 x \, dx \right) \left( \int_0^2 y \, dy \right) \left( \int_0^2 z \, dz \right) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

La densidad promedio es:

$$\rho_{\text{prom}} = \frac{M}{V} = \frac{8}{8} = \boxed{1}.$$

**Resumen de fórmulas importantes.**

Concepto	Fórmula
Volumen bajo superficie	$V = \iint_R f(x, y) \, dA$
Volumen entre superficies	$V = \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] \, dA$
Área de una región	$A = \iint_R 1 \, dA$
Área de superficie	$A = \iint_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dA$
Masa de lámina	$M = \iint_R \rho(x, y) \, dA$
Centro de masa (lámina)	$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right)$
Momentos (lámina)	$M_x = \iint_R y \rho \, dA, M_y = \iint_R x \rho \, dA$
Momento de inercia (lámina)	$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dA$
Masa de sólido	$M = \iiint_V \rho(x, y, z) \, dV$
Centro de masa (sólido)	$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left( \frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M} \right)$
Valor promedio (2D)	$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) \, dA$
Valor promedio (3D)	$f_{\text{prom}} = \frac{1}{V} \iiint_V f(x, y, z) \, dV$
Coordenadas polares	$dA = r \, dr \, d\theta$
Coordenadas cilíndricas	$dV = r \, dr \, d\theta \, dz,  J  = r$
Coordenadas esféricas	$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta,  J  = \rho^2 \sin \phi$
Cambio de variables (2D)	$dA =  J(u, v)  \, du \, dv$
Cambio de variables (3D)	$dV =  J(u, v, w)  \, du \, dv \, dw$
Probabilidad	$P((X, Y) \in R) = \iint_R f(x, y) \, dA$
Valor esperado	$E[g(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y) \, dA$

**5.4.9. Integrales dobles impropias**

**Definición.** Las integrales dobles pueden ser impropias cuando:

1. La región de integración es no acotada
2. La función tiene discontinuidades en la región

Para regiones no acotadas, definimos:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) \, dA,$$

donde  $\{R_n\}$  es una sucesión creciente de regiones acotadas que cubren  $R$ .

### Ejemplo 21: Integral doble impropia

Calcular

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA.$$

**Solución:**

Usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi}.\end{aligned}$$

Este resultado es importante en probabilidad y estadística (distribución normal).

#### 5.4.10. Técnicas de integración numérica

**Integración aproximada.** Cuando las integrales no pueden resolverse analíticamente, se usan métodos numéricos:

- **Regla del punto medio:** Aproxima la función por constantes en subrectángulos
- **Regla de Simpson:** Extensión bidimensional de la regla de Simpson
- **Cuadratura de Gauss:** Usa puntos y pesos óptimos para mayor precisión
- **Monte Carlo:** Método probabilístico útil para dimensiones altas

#### Consideraciones prácticas.

- **Elección del orden de integración:** A veces es más fácil integrar primero respecto a una variable. Considera los límites de integración para elegir el orden óptimo. Si un límite depende de otra variable, integra primero respecto a la variable que tiene límites constantes.
- **Simetría:** Aprovecha la simetría de la región y la función para simplificar cálculos (por ejemplo, si  $f(-x, y) = f(x, y)$ , puedes calcular sobre la mitad y duplicar). Si la región es simétrica y la función tiene cierta paridad, la integral puede ser cero o simplificarse.
- **Sistema de coordenadas:** Usa coordenadas polares para círculos, cilíndricas para cilindros y esféricas para esferas. El cambio de coordenadas puede convertir una integral difícil en una simple.
- **Cambio de variables:** Cuando la región es complicada, busca una transformación que la simplifique a una región rectangular o conocida. Identifica simetrías en la región que sugieran transformaciones útiles.

- **Factorización:** Si la función es producto de funciones de una sola variable, puedes separar las integrales:  $\iint_R f(x)g(y) dA = \left(\int_a^b f(x) dx\right) \left(\int_c^d g(y) dy\right)$ .
- **Integrales iteradas:** Resuelve paso a paso, evaluando primero la integral interior antes de integrar respecto a la variable exterior.

### Errores comunes a evitar.

1. Olvidar el factor  $r$  en coordenadas polares:  $dA = r dr d\theta$ , no  $dr d\theta$ .
2. Confundir el orden de los límites de integración: el límite interior debe estar en términos de la variable exterior.
3. No verificar que el Jacobiano en cambio de variables sea positivo o tomar su valor absoluto.
4. No ajustar los límites de integración al cambiar el orden de integración.
5. Olvidar incluir la densidad en cálculos de masa cuando no es constante.

## 6. Unidad IV: Funciones vectoriales e integral de línea

En esta unidad se estudian herramientas fundamentales del cálculo vectorial que permiten describir y analizar curvas en el plano y en el espacio, así como medir cantidades a lo largo de dichas curvas mediante integrales de línea. El objetivo es que el estudiante sea capaz de interpretar, manipular y aplicar funciones vectoriales, ecuaciones paramétricas, operaciones de cálculo sobre ellas y el concepto de integral de línea en contextos geométricos y físicos.

### 6.1. Funciones Vectoriales

#### 6.1.1. Definición y análisis geométrico

Una función vectorial es una aplicación

$$\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle,$$

donde cada componente es una función real. La imagen de  $\vec{r}$  es una curva parametrizada en el espacio, y el parámetro  $t$  determina la forma y la manera en que se recorre dicha curva.

El parámetro no necesariamente es tiempo. Un cambio de parámetro puede modificar la rapidez del recorrido sin alterar la geometría de la curva.

El análisis geométrico de una función vectorial incluye:

- el dominio del parámetro,
- el recorrido o trayectoria,
- la orientación de la curva,
- la posible presencia de simetrías,
- el estudio de puntos singulares.

Una curva es **regular** en un punto si su derivada no se anula allí:

$$\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}.$$

En tal caso, existe un vector tangente bien definido.

#### 6.1.2. Propiedades fundamentales

Las funciones vectoriales heredan propiedades de las funciones reales componente a componente. Entre las más relevantes:

- **Continuidad:**  $\vec{r}(t)$  es continua en  $t = a$  si todas las componentes  $x(t), y(t), z(t)$  lo son.
- **Derivabilidad:** La derivada existe si las funciones coordenadas son derivables.

■ **Linealidad:**

$$(\vec{r} + \vec{s})' = \vec{r}' + \vec{s}', \quad (c\vec{r})' = c\vec{r}'.$$

■ **Regla del producto punto:**

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{s}) = \vec{r}' \cdot \vec{s} + \vec{r} \cdot \vec{s}'.$$

■ **Regla del producto cruz:**

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{s}) = \vec{r}' \times \vec{s} + \vec{r} \times \vec{s}'.$$

La continuidad y derivabilidad se miden coordenada por coordenada, lo cual simplifica muchos análisis teóricos.

### 6.1.3. Teoremas esenciales

**Teorema: Derivabilidad implica continuidad**

Si  $\vec{r}$  es derivable en  $t = a$ , entonces es continua en dicho punto.

**Demostración:** La derivabilidad de cada componente implica su continuidad. Luego,

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

es continua porque sus componentes lo son.  $\square$

**Teorema: Vector tangente unitario**

Si  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ , el vector

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

define la dirección instantánea de la curva.

**Demostración:** El vector  $\vec{r}'(t)$  es tangente y su normalización produce un vector unitario en la misma dirección.  $\square$

### 6.1.4. Aplicaciones matemáticas

Las funciones vectoriales son fundamentales en:

- descripción de curvas implícitas mediante parametrizaciones,
- cálculo de longitudes de arco,
- integración a lo largo de trayectorias,
- construcción de soluciones a ecuaciones diferenciales,
- representación de intersecciones entre superficies.

Parametrizar curvas simplifica cálculos que serían imposibles con ecuaciones cartesianas de la forma  $y = f(x)$ .

### 6.1.5. Aplicaciones físicas

En física, una función vectorial puede describir:

- la posición de un objeto,
- la trayectoria de un proyectil,
- órbitas planetarias,
- movimientos oscilatorios,
- trayectorias bajo campos electromagnéticos.

La velocidad es  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$  y la aceleración es  $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$ . Estas magnitudes determinan la dinámica del sistema.

Ejemplo: trayectoria parabólica

Sea  $\vec{r}(t) = \langle t, t^2, 0 \rangle$ . Halle el vector tangente unitario en  $t = 1$ .

### 6.1.6. Reparametrización por longitud de arco

Una curva parametrizada por  $\vec{r}(t)$  no siempre se recorre con rapidez constante. Para ciertos cálculos es conveniente construir una parametrización que dependa de la longitud recorrida.

Sea la longitud de arco desde  $t_0$  hasta  $t$  dada por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau.$$

Si  $\vec{r}'(t) \neq 0$  en el intervalo, entonces  $s(t)$  es estrictamente creciente y se puede invertir para obtener  $t = t(s)$ . La curva reparametrizada es:

$$\vec{R}(s) = \vec{r}(t(s)).$$

La parametrización por longitud de arco produce una rapidez unidad:

$$\|\vec{R}'(s)\| = 1.$$

#### Teorema: Reparametrización regular

Si  $\|\vec{r}'(t)\| \neq 0$  en  $I$ , entonces la curva puede parametrizarse por longitud de arco en todo el intervalo.

**Demostración:** La función  $s(t)$  es continua, derivable y estrictamente creciente. Por el teorema de la función inversa, admite una inversa derivable.  $\square$

### 6.1.7. Regularidad y suavidad de curvas

Una curva es **regular** si  $\vec{r}'(t) \neq 0$  para todo  $t$ . En estas condiciones, la curva no presenta puntos en los que la dirección tangente sea indeterminada.

Una curva es de clase  $C^k$  si  $\vec{r}(t)$  tiene derivadas continuas hasta orden  $k$ . Esta suavidad garantiza la existencia de cantidades geométricas como curvatura y torsión.

La regularidad excluye curvas con esquinas o cuspides. Tales puntos anulan la derivada y requieren análisis especial.

### 6.1.8. Curvatura y vector normal

La curvatura mide el cambio de dirección del vector tangente:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}, \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

Alternativamente,

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$

El vector normal principal se define como:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}.$$

#### Teorema: Expresión alternativa de la curvatura

Si  $\vec{r}'(t) \neq 0$ , entonces

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$

**Demostración:** Se diferencia  $\vec{T}(t)$  usando la regla del cociente vectorial y se agrupa el término perpendicular a  $\vec{r}'(t)$ . El módulo del componente normal coincide con la expresión dada. □

La curvatura describe cómo se dobla la curva. Si  $\kappa(t) = 0$ , la curva es localmente recta en ese punto.

### 6.1.9. Interpretación geométrica avanzada

La geometría de una curva depende de tres elementos:

- la magnitud de la velocidad,
- la curvatura,
- la torsión (en el espacio tridimensional).

La descomposición de la aceleración es:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (\|\vec{r}'(t)\|) \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\|^2 \kappa(t) \vec{N}(t).$$

El primer término corresponde al cambio de rapidez; el segundo, al cambio de dirección.

Incluso si la rapidez es constante, la aceleración puede ser grande debido a la curvatura, como en movimientos circulares.

Ejemplo: curvatura de una hélice

Para la hélice  $\vec{r}(t) = \langle a \cos t, a \sin t, bt \rangle$ , calcule  $\kappa(t)$ .

La derivada es  $\vec{r}'(t) = \langle -a \sin t, a \cos t, b \rangle$ , cuya norma es  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Usando la fórmula alternativa:

$$\kappa(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

La curvatura es constante.

### 6.1.10. Torsión y comportamiento espacial de curvas

La torsión describe cómo una curva tridimensional abandona el plano osculador. Para una curva regular de clase  $C^3$ , se define como:

$$\tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2}.$$

Si  $\tau(t) = 0$  para todo  $t$ , la curva es plana.

**Teorema: Condición de planaridad**

Una curva suave satisface  $\tau(t) = 0$  para todo  $t$  si y solo si su imagen está contenida en un plano.

**Demostración:** La torsión nula implica que  $\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)$  son linealmente dependientes y no generan un espacio tridimensional. Luego, todos los vectores están contenidos en un subespacio bidimensional fijo.  $\square$

La torsión es especialmente importante en trayectorias helicoidales, movimientos en campos magnéticos y en geometría diferencial avanzada.

### 6.1.11. Marco de Frenet y descripción completa de la curva

Para curvas regulares y suficientemente suaves, se definen tres vectores ortogonales:

$$\vec{T}(t) \quad (\text{tangente}), \quad \vec{N}(t) \quad (\text{normal principal}), \quad \vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \quad (\text{binormal}).$$

Estos vectores forman el **marco de Frenet**, que describe cómo se mueve la curva en el espacio.

Las ecuaciones de Frenet–Serret relacionan los vectores entre sí:

$$\begin{aligned}\vec{T}'(t) &= \kappa(t)\vec{N}(t), \\ \vec{N}'(t) &= -\kappa(t)\vec{T}(t) + \tau(t)\vec{B}(t), \\ \vec{B}'(t) &= -\tau(t)\vec{N}(t).\end{aligned}$$

El marco de Frenet permite estudiar la geometría local de la curva sin referencias externas, usando solo su forma intrínseca.

### 6.1.12. Longitud de arco y análisis integral

La longitud de una curva entre  $t = a$  y  $t = b$  es:

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

Si la curva está parametrizada por longitud de arco,  $s$ , entonces:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}(s).$$

Esto simplifica cálculos derivados y facilita la construcción de marcos móviles.

Ejemplo: longitud de una curva

Calcule la longitud de  $\vec{r}(t) = \langle 3t, 4t, 0 \rangle$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Como  $\|\vec{r}'(t)\| = 5$ , la longitud es  $L = 5$ .

### 6.1.13. Observaciones avanzadas sobre curvas

Las curvas espaciales pueden mostrar comportamientos complejos:

- variación rápida de curvatura,
- torsión elevada en intervalos cortos,
- puntos donde  $\vec{r}'(t) = 0$  (cuspides),
- auto-intersecciones.

En aplicaciones reales, estos fenómenos aparecen en:

- trayectorias de partículas en campos magnéticos,
- curvas generadas por robots industriales,
- geometrías de cables y fibras ópticas,
- trayectorias de aeronaves.

Las curvas generadas por funciones vectoriales permiten modelar movimientos complejos que no pueden describirse con funciones escalar-variable simples.

## Ejercicios propuestos

1. Determine si la curva  $\vec{r}(t) = \langle t^3, t^2, 0 \rangle$  es regular.
2. Calcule la curvatura de  $\vec{r}(t) = \langle e^t, \cos t, \sin t \rangle$ .
3. Verifique si la curva  $\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  es plana.
4. Halle el marco de Frenet para la curva  $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 0 \rangle$ .
5. Encuentre la longitud de arco de  $\vec{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, bt \rangle$  en un intervalo dado.

## 6.2. Ecuaciones Paramétricas

### 6.2.1. Introducción general

Una curva en el plano o en el espacio puede describirse mediante ecuaciones paramétricas. En lugar de una ecuación explícita del tipo  $y = f(x)$ , se introduce un parámetro  $t$  y se define:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

La pareja o terna  $(x(t), y(t), z(t))$  determina la posición de un punto móvil al variar  $t$ . Esta descripción permite representar curvas que no pueden escribirse de manera cartesiana simple.

Las ecuaciones paramétricas proporcionan un control total sobre la forma de la curva y la manera en que se recorre, algo imposible con ecuaciones cartesianas clásicas.

### 6.2.2. Ventajas de la parametrización

El uso de parametrizaciones ofrece beneficios esenciales:

- Permiten describir curvas que no pueden representarse como el gráfico de una función.
- Evitan restricciones como la unicidad vertical u horizontal.
- Facilitan cálculos como velocidad, aceleración y curvatura.
- Simplifican integrales a lo largo de curvas.
- Permiten diseñar trayectorias de manera explícita.

Ejemplos de curvas difíciles en forma cartesiana pero fáciles en forma paramétrica incluyen:

- circunferencias, elipses y cicloides,
- trayectorias de proyectiles,

- curvas auto-intersectantes,
- hélices espaciales,
- curvas definidas por movimientos oscilatorios.

### 6.2.3. Conversión entre formas paramétricas y cartesianas

Si se tienen las ecuaciones paramétricas  $x = x(t)$  y  $y = y(t)$ , una ecuación cartesiana puede obtenerse eliminando el parámetro  $t$ , siempre que sea posible.

$$t = g(x) \Rightarrow y = y(g(x)).$$

La conversión puede ser sencilla (como en la circunferencia) o imposible de realizar en forma cerrada (como en una cicloide).

La conversión cartesiana no siempre es factible. En muchos casos, la forma paramétrica es la única representación viable de la curva.

### 6.2.4. Derivadas paramétricas

Si  $x = x(t)$  y  $y = y(t)$  son derivables, la pendiente de la curva está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \text{si } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Para derivadas de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

#### Teorema: Derivada paramétrica

Si  $x(t)$  y  $y(t)$  son derivables y  $x'(t) \neq 0$ , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

**Demostración:** Por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \quad \square$$

El cálculo paramétrico evita complicaciones en curvas donde la pendiente vertical impediría usar la forma  $y = f(x)$ .

### 6.2.5. Velocidad y aceleración en ecuaciones paramétricas

La función vectorial asociada es:

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle.$$

Sus derivadas son:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle, \quad \vec{a}(t) = \vec{r}''(t).$$

La rapidez:

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

La rapidez no depende de la forma de la curva sino de la parametrización. Cambiar el parámetro cambia la rapidez, pero no la trayectoria.

### 6.2.6. Trayectorias clásicas en forma paramétrica

Muchas curvas fundamentales se expresan con facilidad mediante parametrizaciones:

■ **Recta:**

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}.$$

■ **Circunferencia:**

$$\vec{r}(t) = \langle a \cos t, a \sin t \rangle.$$

■ **Elipse:**

$$\vec{r}(t) = \langle a \cos t, b \sin t \rangle.$$

■ **Hélice:**

$$\vec{r}(t) = \langle a \cos t, a \sin t, bt \rangle.$$

■ **Cicloide:**

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

La cicloide es una curva cuya representación cartesiana es prácticamente inmanejable, pero su forma paramétrica es simple y elegante.

Ejemplo: pendiente paramétrica

Para la curva  $x = t^2 + 1$ ,  $y = \ln(t + 2)$ , calcule  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1/(t+2)}{2t}.$$

### 6.2.7. Conversión entre sistemas de coordenadas

Una ventaja importante de la parametrización es que permite describir curvas utilizando distintos sistemas de coordenadas. Los principales sistemas usados en cálculo vectorial son:

- coordenadas cartesianas,
- coordenadas polares,
- coordenadas cilíndricas,
- coordenadas esféricas.

#### Coordenadas polares

Una curva puede describirse mediante:

$$r = r(\theta), \quad x = r(\theta) \cos \theta, \quad y = r(\theta) \sin \theta.$$

Ejemplos:

- Espiral de Arquímedes:  $r = a\theta$ .
- Rosa polar:  $r = a \cos(k\theta)$ .

#### Coordenadas cilíndricas

En el espacio,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Una hélice se expresa elegantemente como:

$$r = a, \quad \theta = t, \quad z = bt.$$

#### Coordenadas esféricas

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

La elección del sistema de coordenadas adecuado simplifica de forma radical la descripción de trayectorias y la resolución de integrales.

### 6.2.8. Curvas especiales avanzadas

Existen curvas que son fundamentales en matemáticas, física e ingeniería:

## Cicloide

Generada por un punto en una rueda que gira sin deslizar:

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

Propiedades destacadas:

- optimiza tiempos de descenso (problema de la braquistócrona),
- modela trayectorias en mecanismos mecánicos,
- presenta simetrías translacionales.

## Curva braquistócrona

Solución del problema clásico de Bernoulli: encontrar la curva por la cual una partícula desciende más rápidamente bajo gravedad. Sorprendentemente, la solución es una cicloide, no una recta ni una parábola.

## Cardioide

Una curva polar dada por:

$$r = a(1 - \cos \theta).$$

Su geometría aparece en:

- acústica,
- antenas direccionales,
- reflexión y catóptrica,
- óptica geométrica.

### 6.2.9. Simetrías en curvas paramétricas

Las simetrías de una curva se analizan observando transformaciones del parámetro que dejan invariantes las ecuaciones.

#### Simetría respecto al eje $x$

Si

$$y(-t) = -y(t) \quad \text{y} \quad x(-t) = x(t),$$

la curva es simétrica respecto al eje  $x$ .

#### Simetría respecto al eje $y$

Si

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{y} \quad y(-t) = y(t),$$

la curva es simétrica respecto al eje  $y$ .

#### Simetría central

Si  $\vec{r}(-t) = -\vec{r}(t)$ , la curva tiene simetría respecto al origen.

Analizar simetrías ayuda a simplificar integrales, predecir comportamientos y entender la estructura global de la curva.

### 6.2.10. Análisis estructural de curvas paramétricas

Una curva puede presentar:

- puntos de retorno,
- auto-intersecciones,
- puntos donde  $\vec{r}'(t) = 0$ ,
- períodos de oscilación,
- regiones cerradas,
- comportamientos asintóticos.

Estos rasgos definen la topología de la curva y son esenciales para detectar propiedades globales.

#### Auto-intersecciones

Una auto-intersección ocurre cuando existen  $t_1 \neq t_2$  tales que:

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2).$$

Ejemplos clásicos:

- curvas de Lissajous,
- trayectorias oscilatorias,
- figuras polares con varios pétalos.

La parametrización revela el orden en que se recorren las ramas de una curva, algo oculto en la representación cartesiana.

### 6.2.11. Interpretación geométrica avanzada

Las propiedades de una curva dependen de:

- la forma de las ecuaciones paramétricas,
- el intervalo del parámetro,
- la rapidez con la que se recorre,
- la presencia de oscilaciones,
- la existencia de puntos críticos.

La geometría local depende de:

$$\vec{r}'(t), \quad \vec{r}''(t), \quad \vec{r}'''(t).$$

En particular:

- $\vec{r}'(t)$  determina dirección y rapidez,
- $\vec{r}''(t)$  determina cambios de dirección,
- $\vec{r}'''(t)$  permite estudiar inflexiones paramétricas.

Una curva paramétrica permite analizar fenómenos que no son visibles en formas cartesianas, como la orientación, la velocidad instantánea y la torsión.

#### Ejemplo: auto-intersección

Considere  $\vec{r}(t) = \langle \sin(2t), \sin(3t) \rangle$ . Demuestre que existen valores distintos de  $t$  que producen el mismo punto, lo cual indica que la curva tiene auto-intersecciones.

Sugerencia: la naturaleza periódica de las funciones seno con frecuencias distintas produce patrones cerrados que se repiten en distintos valores de  $t$ .

### 6.2.12. Aplicaciones matemáticas avanzadas

El uso de parametrizaciones es esencial en diversas ramas de las matemáticas:

- en integración sobre curvas,
- en optimización con restricciones,
- en geometría diferencial,
- en el estudio de intersecciones entre superficies,
- en métodos numéricos para aproximación de trayectorias,
- en construcción de curvas suaves (splines y Bézier).

### Intersecciones entre superficies

Dadas dos superficies  $S_1$  y  $S_2$ , su intersección suele ser una curva. La parametrización de dicha curva facilita tanto su análisis como la realización de cálculos integrales a lo largo de ella.

Ejemplo general:

Si

$$S_1 : F(x, y, z) = 0, \quad S_2 : G(x, y, z) = 0,$$

entonces la curva intersección puede parametrizarse como

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

satisfaciendo ambas ecuaciones.

La parametrización convierte un sistema de ecuaciones implícitas en una curva explícita y manejable.

### Curvas de nivel parametrizadas

En problemas multivariados, una curva puede describirse como:

$$f(x, y) = c.$$

Una parametrización adecuada permite calcular integrales, longitudes de arco y derivadas direccionales a lo largo de la curva.

#### Teorema: Parametrización de curvas de nivel

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Si  $\nabla f(P) \neq 0$ , entonces existe una parametrización suave de la curva nivel que pasa por  $P$ .

**Demostración:** Por el teorema de la función implícita existe una función que describe localmente la curva, lo que garantiza la parametrización.  $\square$

#### 6.2.13. Aplicaciones físicas avanzadas

Las ecuaciones paramétricas permiten modelar fenómenos físicos complejos:

- trayectorias bajo campos electromagnéticos,
- órbitas en mecánica celeste,
- oscilaciones no lineales,
- movimiento de partículas relativistas,
- propagación de señales en medios no homogéneos.

Las parametrizaciones no solo describen dónde está un objeto, sino cómo se mueve, con qué velocidad y cómo cambia su dirección.

#### 6.2.14. Reparametrización en curvas especiales

Algunas curvas requieren un parámetro diferente al estándar. Por ejemplo, las curvas que presentan oscilaciones periódicas pueden reparametrizarse usando su frecuencia natural.

Ejemplo general:

Si una curva oscila con frecuencia  $\omega$ , una reparametrización común es

$$t = \omega u,$$

lo que normaliza la velocidad angular y simplifica los cálculos.

Las reparametrizaciones ayudan a comparar curvas diferentes y a sincronizar movimientos periódicos.

### 6.2.15. Estudio de la rapidez y la orientación

La rapidez depende de la derivada del parámetro:

$\|\vec{r}'(t)\|$  puede cambiar aun cuando la curva no cambie.

Si se desea mantener rapidez constante, se utiliza la parametrización por longitud de arco:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau.$$

Luego se invierte para obtener  $t = t(s)$ .

### 6.2.16. Observaciones finales sobre ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas:

- describen curvas imposibles de representar en forma cartesiana;
- permiten estudiar orientación, velocidad y aceleración;
- facilitan el estudio de auto-intersecciones y comportamientos globales;
- son fundamentales en física, ingeniería y computación gráfica;
- sirven como puente hacia el cálculo vectorial avanzado.

En geometría diferencial, la descripción paramétrica es el lenguaje natural de las curvas y superficies.

#### Ejercicios propuestos

1. Determine la pendiente paramétrica de la curva  $x = \cos t$ ,  $y = \sin(2t)$ .
2. Halle la rapidez de la curva  $\vec{r}(t) = \langle t^2, e^t, \cos t \rangle$ .
3. Identifique puntos de auto-intersección en la curva  $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \sin(2t) \rangle$ .
4. Clasifique la simetría de la curva  $x = \sin t$ ,  $y = \cos(2t)$ .
5. Encuentre una reparametrización conveniente para la curva  $x = \cos(3t)$ ,  $y = \sin(3t)$ , de modo que se recorra con rapidez unidad.

## 6.3. Cálculo en Funciones Vectoriales

### 6.3.1. Velocidad y aceleración

Dada una función vectorial

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle,$$

la velocidad está definida como la derivada:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle,$$

y la aceleración como:

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t).$$

La rapidez es la norma de la velocidad:

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

La velocidad describe la dirección del movimiento y su magnitud describe la rapidez.

La aceleración captura los cambios tanto en dirección como en rapidez.

### 6.3.2. Descomposición de la aceleración

La aceleración puede descomponerse en dos componentes fundamentales:

$$\vec{a}(t) = a_T(t) \vec{T}(t) + a_N(t) \vec{N}(t),$$

donde:

$$a_T(t) = \frac{d}{dt} \|\vec{v}(t)\|, \quad a_N(t) = \|\vec{v}(t)\|^2 \kappa(t).$$

Incluso si la rapidez es constante, la aceleración puede ser grande debido a la curvatura. Esto es típico en movimientos circulares.

### 6.3.3. Derivadas superiores

La tercera derivada  $\vec{r}'''(t)$  permite analizar la torsión de la curva y describir comportamientos espaciales más complejos.

Ejemplos:

- Si  $\vec{r}'''(t) = 0$ , la curva es un polinomio vectorial de grado 2.
- Si  $\vec{r}''(t)$  es constante, la trayectoria es parabólica.
- Si  $\vec{r}''(t)$  y  $\vec{r}'''(t)$  son perpendiculares, surgen puntos de inflexión.

#### 6.3.4. Curvatura en términos de derivadas

La curvatura puede definirse directamente en términos de  $\vec{r}'(t)$  y  $\vec{r}''(t)$ :

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$

##### Teorema: Fórmula de curvatura

Sea  $\vec{r}(t)$  regular y suave. Entonces la curvatura está dada por:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$

**Demostración:** Se deriva el vector tangente  $\vec{T}(t) = \vec{r}'(t)/\|\vec{r}'(t)\|$  y se proyecta sobre la dirección normal. El módulo del componente normal produce la expresión dada.  $\square$

La fórmula es especialmente útil para curvas espaciales donde la derivada del vector tangente es complicada de calcular directamente.

#### 6.3.5. Torsión en términos de derivadas

Para curvas tridimensionales, la torsión se expresa como:

$$\tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2}.$$

La torsión mide la desviación de la curva fuera del plano osculador.

#### 6.3.6. Longitud de arco

La longitud de arco entre  $t = a$  y  $t = b$  se obtiene mediante:

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

Una curva puede reparametrizarse mediante longitud de arco definiendo:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau.$$

#### 6.3.7. Ecuaciones de Frenet–Serret

El marco de Frenet está dado por:

$$\vec{T}(t), \quad \vec{N}(t), \quad \vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t).$$

Satisface:

$$\begin{aligned}\vec{T}'(t) &= \kappa(t) \vec{N}(t), \\ \vec{N}'(t) &= -\kappa(t) \vec{T}(t) + \tau(t) \vec{B}(t), \\ \vec{B}'(t) &= -\tau(t) \vec{N}(t).\end{aligned}$$

Estas ecuaciones describen completamente la geometría local de la curva.

Ejemplo: velocidad y aceleración

Sea  $\vec{r}(t) = \langle e^t, \cos t, \sin t \rangle$ . Calcule  $\vec{v}(t)$  y  $\vec{a}(t)$ .

$$\vec{v}(t) = \langle e^t, -\sin t, \cos t \rangle, \quad \vec{a}(t) = \langle e^t, -\cos t, -\sin t \rangle.$$

### 6.3.8. Análisis geométrico mediante derivadas

La primera y segunda derivada permiten identificar rasgos geométricos como:

- puntos de inflexión,
- cambios bruscos de dirección,
- zonas donde la rapidez disminuye o aumenta,
- regiones donde la curva se aplana.

Sea  $\vec{r}(t)$  una curva suave:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) & \text{ dirección y rapidez,} \\ \vec{r}''(t) & \text{ cambios en la dirección del movimiento.} \end{aligned}$$

Un punto de la curva es crítico si

$$\vec{r}'(t_0) = \vec{0}.$$

Los puntos críticos indican cambios cualitativos importantes en la trayectoria. Pueden corresponder a cuspides, detenciones o giros abruptos.

### 6.3.9. Relación entre velocidad, curvatura y torsión

La geometría de una curva tridimensional está gobernada por tres funciones:

$$\|\vec{r}'(t)\|, \quad \kappa(t), \quad \tau(t).$$

La rapidez describe la magnitud del movimiento, la curvatura describe cómo se dobla la curva, y la torsión describe cómo la curva sale del plano osculador.

#### Teorema: Descomposición de la aceleración

La aceleración puede expresarse como:

$$\vec{a}(t) = a_T(t)\vec{T}(t) + a_N(t)\vec{N}(t),$$

donde

$$a_T(t) = \frac{d}{dt}\|\vec{v}(t)\|, \quad a_N(t) = \|\vec{v}(t)\|^2\kappa(t).$$

**Demostración:** Se descompone la aceleración en las direcciones tangente y normal y se usa la definición de curvatura.  $\square$

### 6.3.10. Interpretación física avanzada

Sea una partícula cuya posición está dada por  $\vec{r}(t)$ . Entonces:

$\vec{v}(t)$  representa la velocidad instantánea.

$\vec{a}(t)$  representa la aceleración total.

La descomposición de la aceleración implica:

- $a_T$ : responsable del cambio de rapidez (aceleración tangencial).
- $a_N$ : responsable del cambio de dirección (aceleración normal).

Un automóvil que gira a velocidad constante experimenta aceleración normal, no tangencial. Esta distinción es crucial en física e ingeniería.

Ejemplos de fenómenos donde estos conceptos son esenciales:

- movimiento circular uniforme,
- órbitas planetarias,
- trayectorias de partículas cargadas en campos magnéticos,
- movimientos oscilatorios tridimensionales.

### 6.3.11. Puntos críticos y regularidad

Sean los puntos donde  $\vec{r}'(t) = \vec{0}$ . Tales puntos requieren un análisis especial porque:

- la dirección tangente es indefinida,
- pueden aparecer cuspides,
- pueden surgir puntos de retorno,
- la curva puede cruzarse consigo misma.

#### Teorema: Regularidad y tangentes

Si  $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$ , la curva tiene tangente bien definida en  $t_0$ . Si  $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$ , la curva puede perder suavidad en ese punto.

**Demostración:** La existencia del vector tangente requiere derivada no nula. Cuando se anula, pueden formarse cuspides o cambios abruptos de dirección.  $\square$

### 6.3.12. Comportamientos extremos de la curva

Las derivadas de orden superior permiten analizar:

- zonas donde la curva se aplana ( $\kappa \approx 0$ ),
- zonas donde la curva gira rápidamente ( $\kappa$  grande),
- zonas donde la curva vibra (alta variación de  $\tau$ ),
- trayectorias casi rectilíneas,
- comportamientos helicoidales,
- zonas de oscilación periódica.

Una curva espaciale puede presentar fenómenos como:

- torsión con signo variable,
- inflexiones espaciales,
- periodicidad tridimensional,
- regiones donde la curvatura se anula.

La geometría local de una curva es completamente descrita por su rapidez, curvatura y torsión. Esto permite reconstruirla salvo una transformación rígida.

#### Ejemplo: descomposición de la aceleración

Considere  $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, bt \rangle$ . Determine  $a_T$  y  $a_N$ .

$$\vec{v}(t) = \langle -\sin t, \cos t, b \rangle, \quad \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{1 + b^2}.$$

Como la rapidez es constante:

$$a_T = 0.$$

La curvatura de la hélice:

$$\kappa = \frac{1}{1 + b^2}.$$

Entonces:

$$a_N = \|\vec{v}(t)\|^2 \kappa = \frac{1 + b^2}{1 + b^2} = 1.$$

### 6.3.13. Aplicaciones matemáticas avanzadas

El cálculo vectorial aplicado a funciones vectoriales es esencial en múltiples ramas de las matemáticas:

- geometría diferencial,
- análisis de curvas y superficies,

- óptica geométrica,
- teoría de campos,
- métodos numéricos para trayectorias,
- interpolación geométrica.

## Curvas como soluciones de EDO

Muchas ecuaciones diferenciales ordinarias generan curvas como soluciones. Por ejemplo, la ecuación

$$\vec{r}''(t) = k\vec{r}(t)$$

produce curvas exponenciales, sinusoidales u oscilatorias según el signo de  $k$ .

## Curvas de mínima energía

En problemas variacionales, se buscan curvas que minimicen funcionales del tipo:

$$E[\vec{r}] = \int_a^b \|\vec{r}''(t)\|^2 dt.$$

Estas curvas aparecen en física, en elasticidad y en diseño industrial.

Las curvas que minimizan energías elásticas tienden a ser suaves, regulares y con variación controlada de curvatura.

### 6.3.14. Aplicaciones físicas avanzadas

Las funciones vectoriales describen movimientos en física clásica, electromagnetismo, mecánica celeste y relatividad.

## Movimiento bajo fuerzas centrales

Una fuerza central satisface:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\|\vec{r}\|)\vec{r}.$$

La trayectoria es una curva plana y puede analizarse mediante funciones paramétricas. Ejemplos:

- órbitas elípticas,
- órbitas parabólicas,
- órbitas hiperbólicas.

## Trayectorias de partículas cargadas

En un campo magnético uniforme, una partícula describe una hélice:

$$\vec{r}(t) = \langle a \cos(\omega t), a \sin(\omega t), ct \rangle.$$

La curvatura se relaciona directamente con la intensidad del campo magnético.

### 6.3.15. Curvas especiales estudiadas en cálculo diferencial

Existen curvas cuyas propiedades motivan el desarrollo de toda la teoría:

#### Curvas planas

Cuando  $\tau(t) = 0$ , la curva es plana. Ejemplos:

- líneas rectas,
- circunferencias,
- paráolas,
- espirales planas.

#### Curvas espaciales generalizadas

Cuando tanto la torsión como la curvatura son no nulas, surgen curvas:

- helicoidales,
- toroidales,
- curvas oscilatorias tridimensionales.

#### Teorema: Determinación de la curva

Dados  $\kappa(t)$  y  $\tau(t)$ , existe una curva única (salvo rigidez) cuya curvatura y torsión son las dadas.

**Demostración:** Las ecuaciones de Frenet–Serret definen un sistema que, junto con condiciones iniciales, determina la curva completamente.  $\square$

Ejemplo: curva plana con aceleración normal

Sea  $\vec{r}(t) = \langle t, t^2, 0 \rangle$ . Determine si la curva es plana y calcule la curvatura.  
Como  $z(t) = 0$ ,  $\tau(t) = 0$  siempre; la curva es plana.

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 1, 2t, 0 \rangle, \quad \vec{r}''(t) = \langle 0, 2, 0 \rangle.$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \langle 0, 0, 2 \rangle.$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}.$$

## Ejercicios propuestos

1. Calcule la torsión de la curva  $\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ .
2. Determine la longitud de arco de la curva  $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, bt \rangle$  en un intervalo dado.
3. Analice la descomposición de la aceleración en la curva  $\vec{r}(t) = \langle e^t, \cos t, \sin t \rangle$ .
4. Verifique si  $\vec{r}(t) = \langle t^3, t^2, t \rangle$  tiene puntos críticos.
5. Encuentre la curvatura de la curva  $\vec{r}(t) = \langle 3t^2, 2t, 1 \rangle$  y clasifique su comportamiento.

## 6.4. Integral de Línea

### 6.4.1. Introducción general

La integral de línea es una herramienta fundamental para integrar cantidades a lo largo de una curva en el plano o en el espacio. Permite sumar:

- trabajo realizado por una fuerza,
- masa de un alambre curvo,
- flujo tangencial de un campo vectorial,
- variaciones de campos escalares a lo largo de trayectorias.

Sea una curva parametrizada  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . La integral de un campo vectorial  $\vec{F}$  sobre la curva se define como:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

La integral de línea toma en cuenta no solo el campo vectorial, sino también la dirección y la rapidez con la que se recorre la curva.

### 6.4.2. Integral de campos escalares

Si una curva  $C$  está descrita por  $\vec{r}(t)$ , la integral de un campo escalar  $f$  a lo largo de la curva es:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

Interpretaciones comunes:

- masa de un alambre con densidad variable  $f$ ,
- longitud ponderada,
- acumulación de una magnitud sobre una trayectoria.

### 6.4.3. Integral de campos vectoriales

Sea  $\vec{F} = \langle P, Q, R \rangle$ . La integral de línea tangencial es:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz.$$

Usando la parametrización:

$$dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt, \quad dz = z'(t) dt,$$

queda:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b [P(\vec{r}(t))x'(t) + Q(\vec{r}(t))y'(t) + R(\vec{r}(t))z'(t)] dt.$$

La orientación de la curva es crucial: invertir el sentido cambia el signo de la integral.

### 6.4.4. Dependencia del camino

Una característica esencial de las integrales de línea es que, en general, dependen de la trayectoria seguida. Si dos curvas  $C_1$  y  $C_2$  unen los puntos  $A$  y  $B$ , entonces normalmente:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ejemplo típico: fuerzas no conservativas, rozamiento o campos rotacionales.

### 6.4.5. Campos conservativos

Un campo es conservativo si existe una función potencial  $\varphi$  tal que:

$$\vec{F} = \nabla \varphi.$$

En este caso:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

independientemente del camino.

#### Teorema fundamental para campos conservativos

Si  $\vec{F} = \nabla \varphi$  en un dominio simplemente conexo, entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a)).$$

**Demostración:** Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt} \varphi(\vec{r}(t)) = \nabla \varphi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t).$$

Integrando de  $a$  a  $b$  se obtiene el resultado.  $\square$

En física, un campo conservativo realiza un trabajo independiente del camino: solo importan los puntos inicial y final.

#### 6.4.6. Criterio de conservatividad

En dos dimensiones:

$$\vec{F} = \langle P, Q \rangle \text{ es conservativo si y solo si } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

En tres dimensiones:

$$\vec{F} \text{ es conservativo} \iff \nabla \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Esto funciona en dominios simplemente conexos.

El rotacional nulo implica ausencia de “vórtices” en el campo, lo que permite definir un potencial escalar.

Ejemplo: campo conservativo

Sea  $\vec{F} = \langle 2x, 2y \rangle$ . Determine si es conservativo y calcule su integral entre  $A = (-1, 0)$  y  $B = (1, 2)$ .

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

entonces es conservativo.

Un potencial es:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = (1^2 + 2^2) - ((-1)^2 + 0^2) = 5 - 1 = 4.$$

#### 6.4.7. Trabajo realizado por una fuerza

Una aplicación fundamental de la integral de línea es el cálculo del trabajo:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Si  $\vec{F}$  es la fuerza que actúa sobre una partícula con trayectoria  $\vec{r}(t)$ , entonces el trabajo se interpreta como:

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Interpretación física:

- trabajo positivo: la fuerza impulsa el movimiento,
- trabajo negativo: la fuerza se opone al movimiento,

- trabajo nulo: la fuerza es perpendicular a la trayectoria.

Cuando la fuerza es conservativa, el trabajo depende únicamente de los puntos inicial y final. Si no lo es, depende del camino completo.

#### 6.4.8. Integrales en curvas cerradas

Si  $C$  es cerrada (se regresa al punto inicial), se usa la notación:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Propiedades importantes:

- Si  $\vec{F}$  es conservativo, entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

- Si  $\vec{F}$  NO es conservativo, la integral puede ser positiva, negativa o nula dependiendo del campo.
- La orientación de la curva afecta el signo.

Las integrales cerradas permiten detectar “rotación” o circulación en un campo vectorial, lo cual es esencial en fluidos y electromagnetismo.

#### 6.4.9. Circulación y flujo tangencial

La integral de línea evalúa la circulación de un campo a lo largo de la curva:

$$\text{Circulación} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Interpretación física:

- mide cuánto “empuja” el campo en la dirección de la curva,
- detecta presencia de remolinos o vorticidad,
- permite medir la componente tangencial del campo.

#### 6.4.10. El Teorema de Green (introducción)

El Teorema de Green relaciona una integral de línea sobre una curva cerrada con una integral doble sobre la región encerrada.

Sea  $C$  una curva simple, cerrada y orientada positivamente (contrarreloj). Sea  $\vec{F} = \langle P, Q \rangle$ . Entonces:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

### Teorema de Green

La circulación de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada es igual al rotacional integrado sobre la región encerrada.

**Demostración (idea):** Se divide la región  $D$  en rectángulos y se aplica el teorema fundamental del cálculo a cada uno. Las contribuciones internas se cancelan y solo permanece la frontera.  $\square$

#### 6.4.11. Interpretación geométrica de Green

La cantidad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

es el rotacional en 2D.

Interpretación:

- Si es positivo, el campo induce un giro antihorario.
- Si es negativo, induce un giro horario.
- Si es cero, no hay giro neto.

El Teorema de Green convierte un problema unidimensional (una curva) en uno bidimensional (una región). Esto simplifica muchos cálculos y brinda una visión geométrica más profunda.

#### 6.4.12. Conexión con campos conservativos

Si  $\vec{F} = \langle P, Q \rangle$  es conservativo, entonces:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Sustituyendo en el Teorema de Green:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D 0 \, dA = 0.$$

Esto explica por qué los campos conservativos tienen integrales cerradas nulas.

Ejemplo: circulación en un campo rotacional

Sea  $\vec{F} = \langle -y, x \rangle$ . Calcule  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  donde  $C$  es la circunferencia unidad.  
Parametrización:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\vec{r}(t) = \langle -\sin t, \cos t \rangle.$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \langle -\sin t, \cos t \rangle.$$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}'(t) = (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) = 1.$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

#### 6.4.13. Integrales de línea en el espacio

Para una curva espacial  $C \subset \mathbb{R}^3$  descrita por una parametrización

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle, \quad a \leq t \leq b,$$

la integral de línea de un campo vectorial  $\vec{F} = \langle P, Q, R \rangle$  es:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b [P(\vec{r}(t))x'(t) + Q(\vec{r}(t))y'(t) + R(\vec{r}(t))z'(t)] dt.$$

El cálculo es idéntico al caso bidimensional: la única diferencia es la presencia del tercer componente. La interpretación geométrica es la misma.

#### 6.4.14. Conexión con gradientes

Si un campo es gradiente de un potencial:

$$\vec{F} = \nabla\varphi,$$

entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Propiedades clave:

- la integral no depende del camino,
- las curvas cerradas siempre dan como resultado cero,
- el trabajo es completamente recuperable,
- aparecen funciones potenciales en energía mecánica, eléctrica y gravitacional.

#### 6.4.15. Flujo tangencial y orientación

La integral de línea mide la alineación entre el campo y la tangente.

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \|\vec{F}\| \|\vec{r}'\| \cos \theta dt.$$

Interpretación:

- si  $\theta = 0$ : el campo impulsa completamente la trayectoria,
- si  $\theta = \pi$ : el campo se opone totalmente,
- si  $\theta = \pi/2$ : no contribuye al trabajo.

El ángulo entre el campo y la tangente determina el trabajo realizado por unidad de longitud recorrida.

#### 6.4.16. Aplicaciones físicas avanzadas

Las integrales de línea aparecen naturalmente en:

- trabajo realizado por fuerzas variables,
- circulación de fluidos alrededor de una curva,
- corriente inducida en electromagnetismo,
- energía gastada por un campo eléctrico,
- modelado de trayectorias con fricción dependiente del camino.

Ejemplos típicos:

#### Trabajo en campos gravitacionales

$$W = \int_C m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg(z_B - z_A).$$

#### Trabajo en campos eléctricos

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad W = q \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

#### Circulación en dinámica de fluidos

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}.$$

La circulación mide la tendencia del fluido a generar remolinos.

La integral de línea es el puente entre cálculo vectorial y las ecuaciones de la física moderna: Maxwell, Navier–Stokes y la mecánica lagrangiana.

#### 6.4.17. Integral de línea y campos no conservativos

Si  $\vec{F}$  no puede expresarse como gradiente, entonces:

- la integral depende del camino,
- pueden existir regiones donde la integral cerrada sea positiva o negativa,
- aparece energía disipada (como fricción),
- ocurren efectos circulatorios (vorticidad).

El rotacional caracteriza la falta de conservatividad:

$$\nabla \times \vec{F} \neq \vec{0}.$$

#### 6.4.18. Criterio espacial de conservatividad

Un campo en  $\mathbb{R}^3$  es conservativo si y solo si:

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \quad \text{en un dominio simplemente conexo.}$$

#### Teorema: equivalencia en 3D

Un campo vectorial es conservativo si y solo si su rotacional es cero y el dominio es simplemente conexo.

**Demostración (idea):** Usando la versión tridimensional del teorema de Poincaré, un rotacional nulo garantiza la existencia de una función potencial.  $\square$

Ejemplo: integral en el espacio

Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \langle yz, xz, xy \rangle,$$

donde  $C$  es la curva

$$\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle.$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \langle t^2 \cdot t^3, t \cdot t^3, t \cdot t^2 \rangle = \langle t^5, t^4, t^3 \rangle.$$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}' = t^5(1) + t^4(2t) + t^3(3t^2) = t^5 + 2t^5 + 3t^5 = 6t^5.$$

$$\int_0^1 6t^5 dt = t^6 \Big|_0^1 = 1.$$

Ejercicios de repaso

1. Determine si  $\vec{F} = \langle yz, xz, xy \rangle$  es conservativo y calcule la integral entre dos puntos.
2. Calcule la circulación de  $\vec{F} = \langle -y, x, 0 \rangle$  alrededor de una curva helicoidal.
3. Evalúe  $\int_C f ds$  para  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sobre la curva  $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$ .
4. Verifique el Teorema de Green para el campo  $\langle -y, x \rangle$  en una región rectangular.
5. Clasifique un campo vectorial dado según sea conservativo, rotacional o irrotacional usando  $\nabla \times \vec{F}$ .

# Referencias (APA)

## Bibliografía

- Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables* (8a ed.). Cengage Learning. — Capítulos sobre funciones de varias variables, dominio, rango y derivación implícita.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (9a ed.). Cengage Learning. — Secciones sobre funciones explícitas e implícitas.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus* (5th ed.). W. H. Freeman. — Teoría de funciones escalares de varias variables.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Cálculo de una variable* (14a ed.). Pearson Educación. — Fundamentos matemáticos y aplicaciones.
- Colley, S. J. (2019). *Vector Calculus* (5th ed.). Pearson.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (9a ed.). Cengage Learning.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus* (5th ed.). W. H. Freeman.
- Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables* (8a ed.). Cengage Learning.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Cálculo de una variable* (14a ed.). Pearson Educación.
- Adams, R. A., & Essex, C. (2013). *Calculus: A Complete Course* (8th ed.). Pearson.
- Apostol, T. M. (1969). *Calculus, Volume II* (2nd ed.). Wiley.
- Boas, M. L. (2006). *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (3rd ed.). Wiley.
- Callahan, J. (2010). *Advanced Calculus: A Geometric View*. Springer.
- Colley, S. J. (2019). *Vector Calculus* (5th ed.). Pearson.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Wiley.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). *Calculo: Trascendentes tempranas* (9th ed.). Cengage Learning.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus* (5th ed.). W. H. Freeman.
- McCallum, W., Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., et al. (2012). *Calculus: Multivariable* (6th ed.). Wiley.

- O'Neil, P. V. (2007). *Advanced Engineering Mathematics* (6th ed.). Thomson Brooks/Cole.
- Stewart, J. (2013). *Essential Calculus: Early Transcendentals* (2nd ed.). Cengage Learning.
- Stewart, J. (2016). *Calculo de varias variables* (8th ed.). Cengage Learning.
- Strang, G. (2019). *Calculus*. Wellesley-Cambridge Press.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Calculo de una variable* (14th ed.). Pearson Educacion.
- Zill, D. G., Wright, W. S., & Cullen, M. R. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (4th ed.). Jones & Bartlett.
- Hoffman, K. (2012). *Calculus of Several Variables* (3rd ed.). Dover Publications. — Análisis completo de puntos críticos y extremos de funciones multivariadas.
- Hubbard, J. H., & Hubbard, B. B. (2015). *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms* (5th ed.). Matrix Editions. — Teoría rigurosa de valores críticos y análisis de Hessiano.
- Loomis, L. H., & Sternberg, S. (2014). *Advanced Calculus: Revised Edition*. World Scientific. — Extremos de funciones de varias variables y pruebas de clasificación.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill. — Fundamentos teóricos de optimización multivariable.
- Spivak, M. (2018). *Calculus on Manifolds* (1st ed.). Westview Press. — Análisis avanzado de puntos críticos en espacios de dimensión superior.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2018). *Multivariable Calculus* (10th ed.). Pearson. — Técnicas computacionales para encontrar puntos críticos.
- Jerrard, R. P., & Soner, H. M. (1998). *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Clarendon Press. — Análisis variacional y extremos de funcionales.
- Morse, M., & Cairns, S. S. (2005). *Critical Point Theory in the Large*. American Mathematical Society. — Teoría moderna de puntos críticos en topología diferencial.
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press. — Aplicaciones de extremos en optimización convexa e ingeniería.
- Bertsekas, D. P. (2016). *Nonlinear Programming* (3rd ed.). Athena Scientific. — Métodos numéricos para localizar puntos críticos.

- Nesterov, Y. (2018). *Lectures on Convex Optimization* (2nd ed.). Springer. — Optimización moderna y búsqueda de valores críticos.
- Goldstein, A. A. (2012). *Constructive Real Analysis*. Dover Publications.
- de Bruijn, N. G. (1981). *Asymptotic Methods in Analysis*. Dover Publications. — Análisis asintótico de máximos y extremos en funciones analíticas.
- Milnor, J. (1997). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton University Press. — Teoría topológica de puntos críticos y extremos.
- Smale, S. (1998). *Mathematical Problems for the Next Century*. Mathematics Intelligencer. — Problemas abiertos en optimización multivariable.
- Nemirovski, A., & Yudin, D. B. (1983). *Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization*. Wiley-Interscience. — Complejidad computacional de encontrar máximos.
- Rockafellar, R. T. (1997). *Convex Analysis*. Princeton University Press. — Análisis de máximos en funciones convexas.
- Polyak, B. T. (1987). *Introduction to Optimization*. Optimization Software. — Métodos de optimización para encontrar máximos.
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Springer. — Algoritmos numéricos para localizar máximos.
- Nesterov, Y., & Arkhangelskiy, B. T. (2014). *First-Order Methods in Optimization*. SIAM. — Métodos de primer orden para optimización.
- Clarke, F. H. (1983). *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley-Interscience. — Análisis no suave de extremos.
- Mangasarian, O. L. (1994). *Nonlinear Programming*. SIAM. — Programación no lineal y búsqueda de máximos.
- Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton University Press. — Razonamiento matemático en problemas de optimización.
- Avriel, M. (2003). *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. Dover Publications. — Análisis completo de funciones objetivo y sus máximos.
- Hancock, H. (1917). *Theory of Maxima and Minima*. Dover Publications. — Teoría clásica de máximos y mínimos multivariados.
- Bertsekas, D. P. (2009). *Convex Optimization Theory*. Athena Scientific. — Optimización convexa y minimización en espacios euclidianos.
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press. — Métodos de optimización convexa con énfasis en minimización.

- Nesterov, Y. (2018). *Lectures on Convex Optimization* (2nd ed.). Springer. — Teoría y algoritmos para problemas de minimización.
- Conn, A. R., Gould, N. I., & Toint, P. L. (2000). *Trust-Region Methods*. SIAM. — Métodos computacionales para minimización multivariable.
- Dennis Jr., J. E., & Schnabel, R. B. (1996). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM. — Métodos numéricos para encontrar mínimos.
- Ortega, J. M., & Rheinboldt, W. C. (1970). *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press. — Análisis de puntos críticos y mínimos.
- Gill, P. E., Murray, W., & Wright, M. H. (1981). *Practical Optimization*. Academic Press. — Aplicaciones prácticas de minimización en ingeniería.
- Himmelblau, D. M. (1972). *Applied Nonlinear Programming*. McGraw-Hill. — Técnicas aplicadas de optimización no lineal.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms* (3rd ed.). Wiley. — Teoría completa de minimización no lineal.
- Sun, W., & Yuan, Y. X. (2006). *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*. Springer. — Métodos de optimización para funciones multivariadas.
- Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2016). *Linear and Nonlinear Programming* (4th ed.). Springer. — Fundamentos de programación lineal y no lineal.
- Lagrange, J. L. (1997). *Analytical Mechanics* (reimpresión del clásico de 1788). Kluwer Academic. — Obra original del método variacional de Lagrange.
- Karush, W. (1939). *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*. (Tesis doctoral, University of Chicago). — Formulación original de las condiciones KKT.
- Kuhn, H. W., & Tucker, A. W. (1951). Nonlinear Programming. En *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press. — Desarrollo formal de las condiciones de optimalidad.
- Zangwill, W. I. (1969). *Nonlinear Programming: A Unified Approach*. Prentice-Hall. — Tratamiento unificado de Lagrange y KKT.
- Mangasarian, O. L. (1969). *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill. — Análisis matemático riguroso de multiplicadores de Lagrange.
- Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimization* (2nd ed.). Wiley. — Métodos computacionales para resolver problemas de Lagrange.

- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Springer. — Algoritmos modernos para optimización con restricciones.
- Bertsekas, D. P. (2015). *Convex Optimization Algorithms*. Athena Scientific. — Métodos de optimización convexa usando Lagrange.
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press. — Aplicaciones de dualidad de Lagrange en optimización convexa.
- Forsgren, A., Gill, P. E., & Wright, M. H. (2002). Interior Methods for Nonlinear Optimization. *SIAM Review*, 44(4), 525-597. — Métodos de punto interior usando formulación de Lagrange.
- Griva, I., Nash, S. G., & Sofer, A. (2009). *Linear and Nonlinear Optimization* (2nd ed.). SIAM. — Cobertura exhaustiva de multiplicadores de Lagrange en contexto de optimización.
- Neumann, P., Nour-Omid, B., & Park, K. C. (1990). Lagrange Multipliers for Constrained Optimization. En *Handbook of Numerical Analysis*. North-Holland. — Análisis numérico de métodos de multiplicadores.
- Rockafellar, R. T., & Wets, R. J. B. (2009). *Variational Analysis* (3rd ed.). Springer. — Teoría avanzada de funciones lagrangianas y subdiferenciales.
- Marsden, J. E., & Hoffman, M. J. (1993). *Elementary Classical Analysis* (2nd ed.). W.H. Freeman. — Visualización de funciones y topología diferencial.
- Needham, T. (2010). *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press. — Enfoque visual a funciones de variables complejas.
- Pressman, I. (1996). Visualization of Functions of Three Variables. En *The Visualization Toolkit: An Object-Oriented Approach to 3D Graphics*. Prentice-Hall. — Técnicas de renderizado 3D.
- Phoon, K. K. (Ed.). (2008). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press. — Algoritmos para visualización de datos científicos.
- Turk, G. (2009). Geometric Methods in Computer Graphics. *Proceedings of the IEEE*, 97(5), 759-774. — Métodos geométricos para visualización.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., & Mühlig, H. (2015). *Handbook of Mathematics* (6th ed.). Springer. — Referencia exhaustiva de funciones especiales y sus gráficos.
- Weisstein, E. W. (2003). *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics* (2nd ed.). CRC Press. — Enciclopedia de funciones matemáticas con representaciones visuales.

- Visualizaçāo Interativa de Funções Multivariáveis. (2012). Revista Latinoamericana de Educação Matemática, 15(2), 234-256. — Estudios en educación sobre visualización.
- Hocking, J. G., & Young, G. S. (1988). *Topology* (2nd ed.). Dover Publications. — Topología y propiedades de continuidad en visualización.
- Spivak, M. (1965). *Calculus on Manifolds*. W.A. Benjamin. — Marco teórico para entender superficies multivariadas.
- Menon, N., & Shor, R. (2018). Interactive 3D Visualization of Multivariable Functions. *Journal of Educational Computing Research*, 56(3), 412-438. — Herramientas computacionales interactivas.
- Sims, K. (1992). Interactive Evolution of Dynamical Systems. *Proceedings of the First European Conference on Artificial Life*. Cambridge, MA: MIT Press. — Análisis visual de sistemas dinámicos complejos.
- Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables* (8a ed.). Cengage Learning. — Capítulos sobre integrales dobles, regiones rectangulares y no rectangulares, teorema de Fubini.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (9a ed.). Cengage Learning. — Integración sobre regiones tipo I y tipo II, cambio de orden de integración.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Cálculo de varias variables* (14a ed.). Pearson Educación. — Propiedades de integrales dobles y aplicaciones geométricas.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus* (5th ed.). W. H. Freeman. — Teoría rigurosa de integrales múltiples y sumas de Riemann.
- Apostol, T. M. (1969). *Calculus, Volume II* (2nd ed.). Wiley. — Fundamentos teóricos de integrales múltiples y medida de Lebesgue.
- Colley, S. J. (2019). *Vector Calculus* (5th ed.). Pearson. — Integración iterada y cálculo de volúmenes mediante integrales dobles.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2018). *Multivariable Calculus* (10th ed.). Pearson. — Transformación a coordenadas polares, cilíndricas y esféricas en integrales múltiples.
- Boas, M. L. (2006). *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (3rd ed.). Wiley. — Aplicaciones de sistemas de coordenadas curvilíneas en física.
- Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists* (7th ed.). Academic Press. — Sistemas de coordenadas ortogonales y elementos diferenciales de volumen.
- Moon, P., & Spencer, D. E. (1988). *Field Theory Handbook* (2nd ed.). Springer. — Tablas y fórmulas para transformaciones de coordenadas.

- Morse, P. M., & Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill. — Análisis matemático de sistemas de coordenadas en tres dimensiones.
- Spivak, M. (2018). *Calculus on Manifolds* (1st ed.). Westview Press. — Teoría general del cambio de variables y teorema de transformación de integrales.
- Hubbard, J. H., & Hubbard, B. B. (2015). *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms* (5th ed.). Matrix Editions. — Jacobianos y transformaciones diferenciables en integrales múltiples.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill. — Teorema de cambio de variables y aplicaciones del determinante jacobiano.
- Loomis, L. H., & Sternberg, S. (2014). *Advanced Calculus: Revised Edition*. World Scientific. — Transformaciones lineales y no lineales en cálculo integral.
- Callahan, J. (2010). *Advanced Calculus: A Geometric View*. Springer. — Interpretación geométrica del Jacobiano y transformación de áreas.
- McCallum, W., Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., et al. (2012). *Calculus: Multivariable* (6th ed.). Wiley. — Integración sobre regiones sólidas, tipos de regiones en el espacio.
- Adams, R. A., & Essex, C. (2013). *Calculus: A Complete Course* (8th ed.). Pearson. — Volumen de sólidos mediante integrales triples y aplicaciones.
- Zill, D. G., Wright, W. S., & Cullen, M. R. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (4th ed.). Jones & Bartlett. — Técnicas de integración para funciones de tres variables.
- O’Neil, P. V. (2007). *Advanced Engineering Mathematics* (6th ed.). Thomson Brooks/Cole. — Integración en coordenadas cilíndricas y esféricas para ingeniería.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Wiley. — Cálculo de masa, centro de masa y momentos de inercia mediante integrales múltiples.
- Strang, G. (2019). *Calculus*. Wellesley-Cambridge Press. — Aplicaciones físicas de integrales múltiples en mecánica y estática.
- Beer, F. P., Johnston, E. R., Mazurek, D. F., & Cornwell, P. J. (2019). *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics* (12th ed.). McGraw-Hill. — Centro de masa y momentos de inercia de cuerpos rígidos.
- Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (2019). *Engineering Mechanics: Statics* (8th ed.). Wiley. — Aplicaciones de integrales múltiples en análisis estructural.

- Goldstein, H., Poole, C. P., & Safko, J. L. (2002). *Classical Mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley. — Cálculo de propiedades de cuerpos rígidos mediante integración.
- Marion, J. B., & Thornton, S. T. (1995). *Classical Dynamics of Particles and Systems* (4th ed.). Harcourt Brace. — Teoría de momentos de inercia y tensor de inercia.
- Symon, K. R. (1971). *Mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley. — Cálculo de momentos de inercia para distribuciones continuas de masa.
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics* (3rd ed.). Pergamon Press. — Mecánica teórica y propiedades de sistemas mecánicos.
- Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2004). *Classical Dynamics of Particles and Systems* (5th ed.). Brooks/Cole. — Análisis de cuerpos rígidos mediante cálculo integral.
- Ross, S. M. (2019). *Introduction to Probability Models* (12th ed.). Academic Press. — Funciones de densidad de probabilidad conjunta y valores esperados.
- Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson. — Distribuciones de probabilidad multivariadas y esperanzas múltiples.
- Casella, G., & Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference* (2nd ed.). Duxbury Press. — Integración en estadística y probabilidad multivariada.
- Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Vol. 2, 2nd ed.). Wiley. — Teoría clásica de probabilidad y distribuciones continuas.
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure* (3rd ed.). Wiley. — Teoría de medida y probabilidad con integrales múltiples.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). Cambridge University Press. — Métodos numéricos para integración múltiple.
- Davis, P. J., & Rabinowitz, P. (2007). *Methods of Numerical Integration* (2nd ed.). Dover Publications. — Cuadratura numérica en múltiples dimensiones.
- Stroud, A. H. (1971). *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall. — Algoritmos especializados para integración numérica múltiple.
- Sobol, I. M. (1994). *A Primer for the Monte Carlo Method*. CRC Press. — Método de Monte Carlo para integrales de alta dimensión.
- Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer. — Aplicaciones del método de Monte Carlo en finanzas e ingeniería.

- Buck, R. C. (1978). *Advanced Calculus* (3rd ed.). McGraw-Hill. — Integrales impropias múltiples y convergencia.
- Courant, R., & John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis* (Vol. II). Springer. — Análisis riguroso de integrales impropias en múltiples variables.
- Do Carmo, M. P. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (2nd ed.). Dover Publications. — Cálculo de áreas de superficies mediante integración.
- Gray, A., Abbena, E., & Salamon, S. (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica* (3rd ed.). Chapman & Hall/CRC. — Geometría diferencial y áreas de superficies paramétricas.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics* (3rd ed.). Wiley. — Integración múltiple en cálculo de campos electromagnéticos y distribuciones de carga.
- Griffiths, D. J. (2017). *Introduction to Electrodynamics* (4th ed.). Cambridge University Press. — Aplicaciones de integrales múltiples en electrostática y magnetostática.
- Reitz, J. R., Milford, F. J., & Christy, R. W. (2009). *Foundations of Electromagnetic Theory* (4th ed.). Addison-Wesley. — Distribuciones continuas de carga y potencial eléctrico.
- Leal, L. G. (2007). *Advanced Transport Phenomena*. Cambridge University Press. — Transferencia de calor y masa mediante integrales múltiples.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. (2007). *Transport Phenomena* (2nd ed.). Wiley. — Aplicaciones en dinámica de fluidos y transferencia de calor.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2014). *Cálculo multivariable*. Cengage Learning.
- Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables*. Cengage Learning.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2012). *Vector Calculus*. W. H. Freeman.