Universidad Tecnológica Emiliano Zapata
del Estado de Morelos

División Académica de Tecnologías de la Información y Diseño

Ingeniería en Desarrollo y Gestión de Software

Integradora de Matemáticas para la Ingeniería I

- Hernández Sánchez Katia Alexandra
- Higareda Vázquez María del Pilar
- León Flores Axel Daniel
- Miranda Roldán Jose Luis

9 de noviembre de 2025

Información del Curso

Materia:

Matemáticas para Ingeniería I

Profesor:

M.C. Jorge Yusef Colin Castillo

Grupo:

7°C

Integrantes del Equipo:

Hernández Sánchez Katia Alexandra

Higareda Vázquez María del Pilar

León Flores Axel Daniel

Miranda Roldán Jose Luis

Índice

1. Unidad I: Funciones de varias variables

1.1. Funciones de varias variables

Funciones de varias variables: estudio teórico

Esta sección presenta un estudio teórico fundamental sobre las funciones de varias variables, abarcando conceptos esenciales como dominio, rango, y la distinción entre funciones explícitas e implícitas. Estos conceptos son la base para el análisis multivariable y aplicaciones en ciencias e ingeniería.

Introducción. Las **funciones de varias variables** son aquellas que dependen de dos o más variables independientes. A diferencia de las funciones de una variable $y = f(x)$, estas funciones se expresan como $z = f(x, y)$ para dos variables, o más generalmente como $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para n variables.

Las funciones de varias variables permiten modelar fenómenos donde múltiples factores influyen simultáneamente en un resultado. Por ejemplo:

- La temperatura $T(x, y, z)$ en un punto del espacio tridimensional.
- El volumen $V(r, h) = \pi r^2 h$ de un cilindro en función de su radio y altura.
- La producción $P(L, K)$ de una empresa en función del trabajo L y capital K (función de producción en economía).

1.1.1. Funciones escalares de varias variables

1.1.2. Dominio

El **dominio** de una función de varias variables $f(x, y)$ es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) para los cuales la función está definida. Formalmente:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \text{ está definida}\}$$

Para funciones de tres o más variables, el dominio se extiende naturalmente a $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$.

¿Cuándo se aplica?

- Al identificar restricciones físicas o matemáticas (raíces cuadradas, denominadores, logaritmos).
- Para determinar la región del plano o espacio donde la función tiene sentido.

Ejemplos ilustrativos:

1. **Función polinomial:** $f(x, y) = x^2 + y^2$

   El dominio es todo $\mathbb{R}^2$, ya que no hay restricciones:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

2. **Función con raíz cuadrada:** $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   La expresión dentro de la raíz debe ser no negativa:
   $$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 9$$
   El dominio es el disco cerrado de radio 3 centrado en el origen:
   $$\text{Dom}(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$$
3. **Función con denominador:** $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$
   El denominador no puede ser cero:
   $$x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$$
   El dominio excluye la recta $y = x$:
   $$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

1.1.3. Rango

El **rango** (o imagen) de una función $f(x, y)$ es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la función. Formalmente:

$$\text{Ran}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y) \text{ para algún } (x, y) \in \text{Dom}(f)\}$$

¿Cuándo se aplica?

- Al determinar los valores de salida posibles de una función.
- Para analizar el comportamiento global de la función.

Ejemplos ilustrativos:

1. **Paraboloide:** $f(x, y) = x^2 + y^2$
   Dado que $x^2 \geq 0$ y $y^2 \geq 0$, tenemos $f(x, y) \geq 0$, y el mínimo se alcanza en $(0, 0)$:
   $$\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$
2. **Función con raíz:** $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   Como $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, tenemos:
   $$0 \leq 9 - x^2 - y^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$
   $$\text{Ran}(f) = [0, 3]$$
3. **Función seno:** $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$
   Dado que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ y $-1 \leq \cos(y) \leq 1$:
   $$\text{Ran}(f) = [-2, 2]$$

1.1.4. Funciones explícitas

Una función se dice **explícita** cuando la variable dependiente está despejada en términos de las variables independientes. La forma general es:

$$z = f(x, y)$$

¿Cuándo se aplican?

- Cuando se necesita evaluar directamente la función para valores específicos.
- Para graficar superficies en el espacio tridimensional.
- En cálculo de derivadas parciales de forma directa.

Ejemplos ilustrativos:

1. $z = x^2 + y^2$ — Paraboloide circular
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ — Cono
3. $z = \sin(x)\cos(y)$ — Superficie ondulatoria
4. $w = xyz$ — Función de tres variables

En funciones explícitas, es directo calcular derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \quad \text{para } z = x^2 + y^2$$

1.1.5. Funciones implícitas

Una función se dice **implícita** cuando no está despejada, sino que se define mediante una ecuación de la forma:

$$F(x, y, z) = 0$$

donde z no está aislada explícitamente.
¿Cuándo se aplican?

- Cuando es difícil o imposible despejar la variable dependiente.
- En ecuaciones de superficies como esferas, elipsoides, hiperboloides.
- Para aplicar el teorema de la función implícita en análisis avanzado.

Ejemplos ilustrativos:

1. **Esfera:** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

   Esta ecuación define z implícitamente. Si se despeja:

   $$z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

   Se obtienen dos funciones explícitas (hemisferio superior e inferior).

2. **Cilindro:** $x^2 + y^2 = 4$

   Define una superficie cilíndrica donde z puede tomar cualquier valor.

3. **Ecuación general:** $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   Hiperboloide de una hoja, difícil de expresar explícitamente.

Derivación implícita: Para funciones implícitas $F(x, y, z) = 0$, podemos calcular derivadas parciales usando:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Ejemplo aplicado: Para $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, con $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

Comparación: Explícitas vs. Implícitas.

Aspecto	**Función Explícita**	**Función Implícita**
Forma	$z = f(x, y)$	$F(x, y, z) = 0$
Evaluación	Directa	Requiere despejar o métodos numéricos
Derivadas	Directas	Requiere derivación implícita
Ejemplos	$z = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Aplicaciones prácticas. Las funciones de varias variables tienen aplicaciones en:

- **Física:** Campos escalares (temperatura, presión, potencial eléctrico).
- **Economía:** Funciones de utilidad $U(x, y)$, funciones de producción Cobb-Douglas $P(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$.
- **Ingeniería:** Análisis de estructuras, distribución de esfuerzos, optimización de diseños.
- **Estadística:** Regresión multivariable, funciones de densidad conjunta.

1.2. Planos y superficies

1.2.1. Curvas de nivel: Planos, superficies cuadráticas (elipsoides, cono, paraboloides, hiperboloides) – Graficación

Descripción

Una **curva de nivel** de una función $z = f(x, y)$ es el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy tales que $f(x, y) = k$ para una constante fija k. Geométricamente, surge al intersectar la *superficie* $z = f(x, y)$ con el *plano horizontal* $z = k$ y proyectar el contorno sobre el plano xy.

Propósito: Visualizar funciones de dos variables mediante sus curvas de nivel y relacionarlas con cortes horizontales de la superficie.
Competencias: Modelación, representación gráfica y comunicación matemática.

Teoría breve. Para $f(x,y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel satisfacen $x^2 + y^2 = k$. Cada $k > 0$ produce una circunferencia de radio $r = \sqrt{k}$ centrada en el origen. El patrón de circunferencias concéntricas refleja que la superficie $z = x^2 + y^2$ es un paraboloide circular.

Curvas de nivel de $f(x,y) = x^2 + y^2$

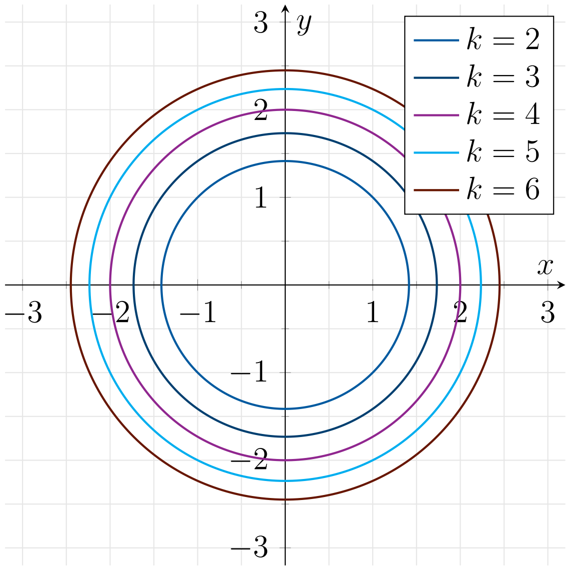

Figura 1: Curvas de nivel concéntricas para $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

Ejemplos guiados.

- $k = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2} \approx 1{,}41$
- $k = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3} \approx 1{,}73$
- $k = 4 \Rightarrow r = 2{,}00$
- $k = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5} \approx 2{,}24$
- $k = 6 \Rightarrow r = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

Ejercicios.

1) Identificación de curvas

Dibuja las curvas de nivel para $k = 2, 3, 4, 5, 6$ y anota sus radios.

2) Intersección con planos

Encuentra las curvas resultantes de los cortes con los planos $z = k$ y describe su forma.

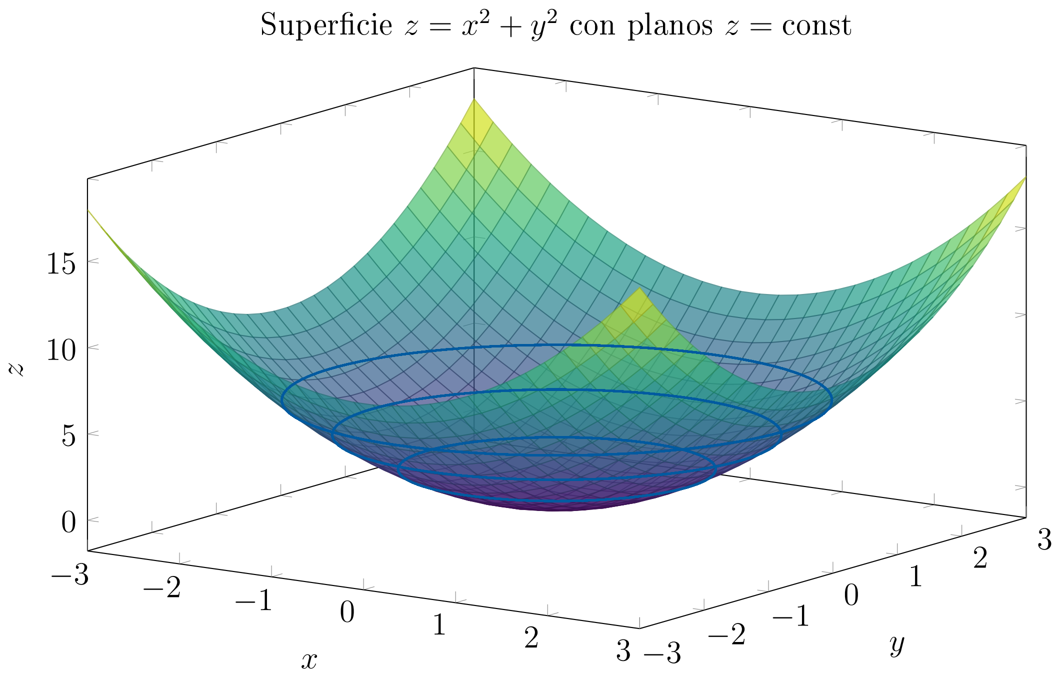

Figura 2: Paraboloide $z = x^2 + y^2$ y cortes horizontales $z = \text{const}$.

3) Normalización

Transforma $x^2 + y^2 = k$ en la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y deduce que $a = b = \sqrt{k}$.

1.3. Límites y continuidad en funciones de 3 variables

Descripción

Un **límite** describe el comportamiento de una función $f(x)$ cuando la variable independiente x se aproxima a un valor específico a. La notación formal es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esto significa que los valores de $f(x)$ se acercan arbitrariamente a L cuando x se acerca a a. Los límites son fundamentales para definir la **continuidad** de una función y establecer las bases del cálculo diferencial e integral.

Propósito: Comprender el comportamiento de una función cuando la variable se aproxima a un valor determinado.
Competencias: Razonamiento lógico, análisis algebraico y comprensión de la continuidad.

1.3.1. Definición y conceptos

Definición formal. Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

siempre que para cada $\varepsilon > 0$ exista un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Indeterminaciones comunes. Algunas formas indeterminadas requieren técnicas algebraicas para resolverse:

- $\frac{0}{0}$ — Factorización, racionalización o L'Hôpital
- $\frac{\infty}{\infty}$ — Simplificación algebraica
- $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 — Transformaciones logarítmicas o algebraicas

Continuidad. Una función $f(x)$ es **continua** en $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, el límite existe, la función está definida en a, y ambos valores coinciden.

1.3.2. Racionalización de límites

Cuando aparecen raíces cuadradas en expresiones que producen indeterminaciones $\frac{0}{0}$, podemos usar la técnica de **multiplicar por el conjugado**.

Ejemplo resuelto. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x} \cdot \frac{\sqrt{9 + x} + 3}{\sqrt{9 + x} + 3} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(9 + x) - 9}{x(\sqrt{9 + x} + 3)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{9 + x} + 3)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{9 + x} + 3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x} = \frac{1}{6}}$.

1.3.3. Ejercicios prácticos

Ejercicio 1

Calcular:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2-9}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2-9} &= \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{1}{x-3} \\
&= \frac{1}{-3-3} = \frac{1}{-6} = \boxed{-\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Calcular:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+4)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x+4} \\
&= \frac{1-3}{1+4} = \frac{-2}{5} = \boxed{-\frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3-2x^2}{3x^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{x^3-2x^2}{3x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x-2)}{3x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x-2}{3} \\
&= \frac{0-2}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4 (Racionalización)

Calcular:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-2x+x^2}-2}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-2x+x^2}-2}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-2x+x^2}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4-2x+x^2}+2}{\sqrt{4-2x+x^2}+2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(4-2x+x^2)-4}{x(\sqrt{4-2x+x^2}+2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2x+x^2}{x(\sqrt{4-2x+x^2}+2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(-2+x)}{x(\sqrt{4-2x+x^2}+2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2+x}{\sqrt{4-2x+x^2}+2} \\
&= \frac{-2+0}{\sqrt{4}+2} = \frac{-2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 5 (Racionalización)

Calcular:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Gráfica ilustrativa. La siguiente figura muestra la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y su comportamiento cerca de $x = 1$, donde existe una discontinuidad removible:

Conclusión.

Función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ con discontinuidad removible en $x = 1$

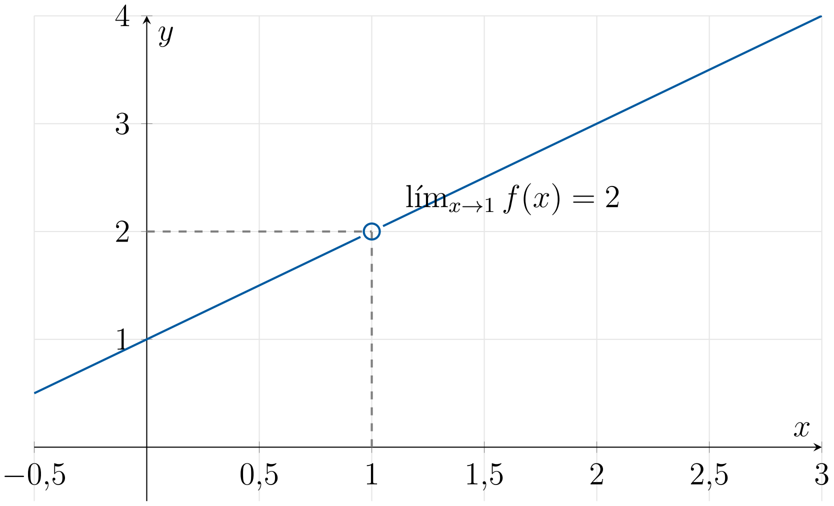

Figura 3: Visualización del límite: aunque $f(1)$ no está definida, $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

> *"El concepto de límite es fundamental en el cálculo diferencial y sirve como base para las derivadas y la continuidad."*
> — Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables* (8a ed.). Cengage Learning.

2. Unidad II: Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Concepto fundamental

Las derivadas parciales extienden el concepto de derivada a funciones de varias variables, permitiéndonos estudiar cómo cambia una función cuando variamos una sola variable mientras mantenemos las demás constantes. Este concepto es fundamental en física, ingeniería, economía y todas las áreas donde interactúan múltiples variables.

2.1. La derivada parcial

Introducción. En cálculo de una variable, la derivada $\frac{dy}{dx}$ mide la razón de cambio de y con respecto a x. Para funciones de varias variables, necesitamos un concepto similar que nos permita medir cómo cambia la función cuando variamos una variable a la vez.

Consideremos una función $z = f(x, y)$ de dos variables. Podemos estudiar cómo cambia z cuando:

- Variamos x manteniendo y constante
- Variamos y manteniendo x constante

Definición: La **derivada parcial** de f con respecto a x se denota $\frac{\partial f}{\partial x}$ o f_x, y se calcula derivando con respecto a x tratando y como constante.
Notación: Para $z = f(x, y)$ usamos:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $f_x(x, y)$, o z_x
- $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $f_y(x, y)$, o z_y

Definición formal. Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Las derivadas parciales se definen como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Interpretación geométrica.

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ representa la pendiente de la curva formada al intersectar la superficie $z = f(x, y)$ con un plano $y = \text{constante}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ representa la pendiente de la curva formada al intersectar la superficie $z = f(x, y)$ con un plano $x = \text{constante}$

Ejemplos resueltos.

Ejemplo 1: Función polinomial

Calcular las derivadas parciales de $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^3$.
Solución:
Para $\frac{\partial f}{\partial x}$: Tratamos y como constante

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2xy^2 - y^3)\\ &= 3x^2 + 2y^2 \cdot 1 - 0\\ &= \boxed{3x^2 + 2y^2}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$: Tratamos x como constante

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 2xy^2 - y^3)\\ &= 0 + 2x \cdot 2y - 3y^2\\ &= \boxed{4xy - 3y^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Función con exponencial

Calcular las derivadas parciales de $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x)\cos(y)$.
Solución:
Para $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} + \sin(x)\cos(y))\\ &= e^{xy} \cdot y + \cos(x) \cdot \cos(y)\\ &= \boxed{ye^{xy} + \cos(x)\cos(y)}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} + \sin(x)\cos(y))\\ &= e^{xy} \cdot x + \sin(x) \cdot (-\sin(y))\\ &= \boxed{xe^{xy} - \sin(x)\sin(y)}\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Función racional

Calcular las derivadas parciales de $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$.
Solución:

Para $\frac{\partial f}{\partial x}$: Usamos la regla del cociente

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(x-y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x-y)}{(x-y)^2}\\ &= \frac{(x-y)(2x)-(x^2+y^2)(1)}{(x-y)^2}\\ &= \frac{2x^2-2xy-x^2-y^2}{(x-y)^2}\\ &= \boxed{\frac{x^2-2xy-y^2}{(x-y)^2}}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x-y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) - (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x-y)}{(x-y)^2}\\ &= \frac{(x-y)(2y)-(x^2+y^2)(-1)}{(x-y)^2}\\ &= \frac{2xy-2y^2+x^2+y^2}{(x-y)^2}\\ &= \boxed{\frac{x^2+2xy-y^2}{(x-y)^2}}\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Función de tres variables

Calcular las derivadas parciales de $f(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$.
Solución:
Para $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + y^2z + yz^2 = \boxed{yz(2x+y+z)}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z + 2xyz + xz^2 = \boxed{xz(x+2y+z)}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + xy^2 + 2xyz = \boxed{xy(x+y+2z)}$$

Aplicaciones prácticas. Las derivadas parciales tienen aplicaciones en:

- **Física:** Ecuaciones de calor, ondas y difusión
- **Economía:** Utilidad marginal, productividad marginal

- **Ingeniería:** Análisis de sensibilidad en diseño
- **Estadística:** Optimización de funciones de verosimilitud
- **Machine Learning:** Gradiente descendente en redes neuronales

2.1.1. Construcción geométrica de la derivada parcial con software

Visualización geométrica de derivadas parciales

La interpretación geométrica de las derivadas parciales nos permite comprender cómo se comporta una superficie tridimensional al realizar cortes paralelos a los planos coordenados. Cada derivada parcial representa la pendiente de una curva resultante de estas intersecciones.

Concepto geométrico fundamental. Para una función $z = f(x, y)$ que representa una superficie en el espacio tridimensional:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ en (x_0, y_0) es la pendiente de la curva de intersección entre la superficie y el plano $y = y_0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ en (x_0, y_0) es la pendiente de la curva de intersección entre la superficie y el plano $x = x_0$

Visualización paso a paso. Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ (un paraboloide). Vamos a visualizar cómo se construyen geométricamente sus derivadas parciales.

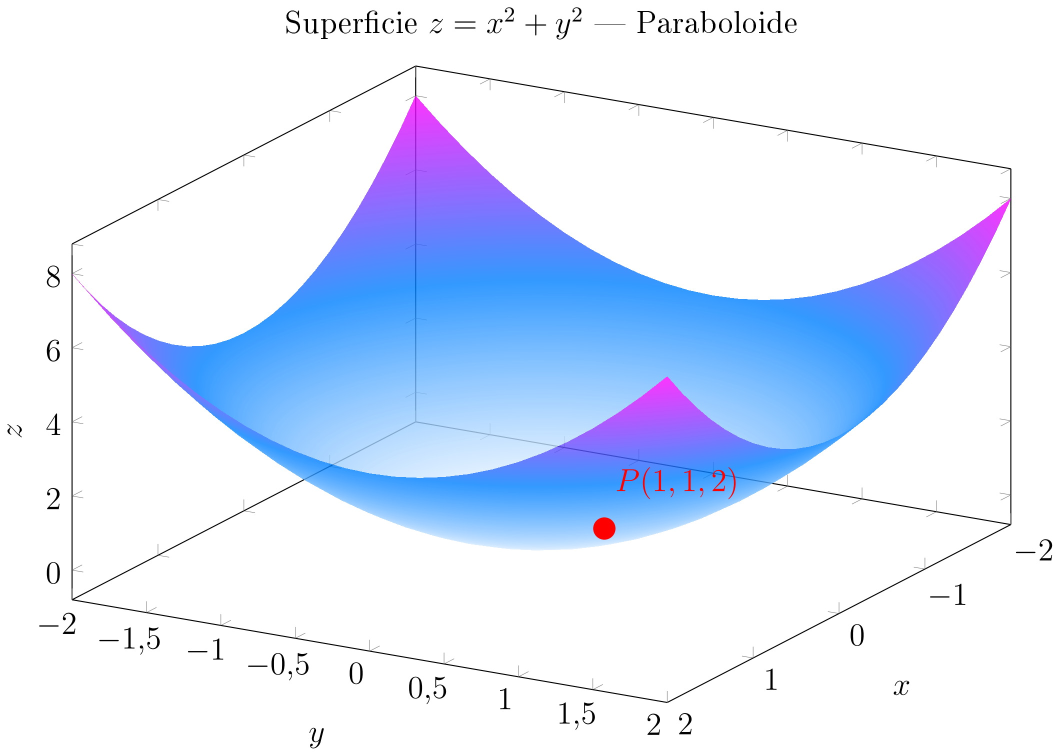

Figura 4: Superficie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ con punto de interés $P(1, 1, 2)$.

Derivada parcial respecto a x: Corte con $y =$ constante. Cuando fijamos $y = 1$, la superficie se reduce a una curva en el plano $y = 1$:

$$z = f(x, 1) = x^2 + 1$$

La derivada parcial en $(1, 1)$ es:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \left.2x\right|_{x=1} = 2$$

Esto significa que la pendiente de la curva en el punto P es 2 cuando nos movemos en la dirección x.

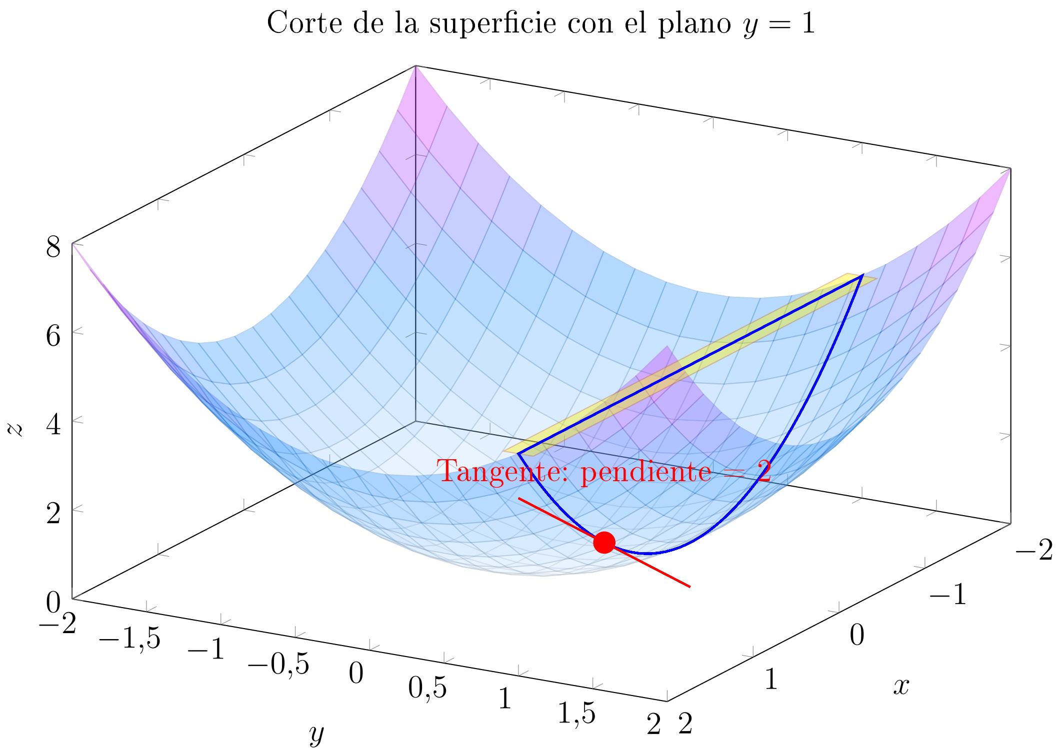

Figura 5: Curva azul: intersección con $y = 1$. Recta roja: tangente con pendiente $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$.

Derivada parcial respecto a y: Corte con $x =$ constante. Cuando fijamos $x = 1$, la superficie se reduce a:

$$z = f(1, y) = 1 + y^2$$

La derivada parcial en $(1, 1)$ es:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = \left.2y\right|_{y=1} = 2$$

Corte de la superficie con el plano $x = 1$

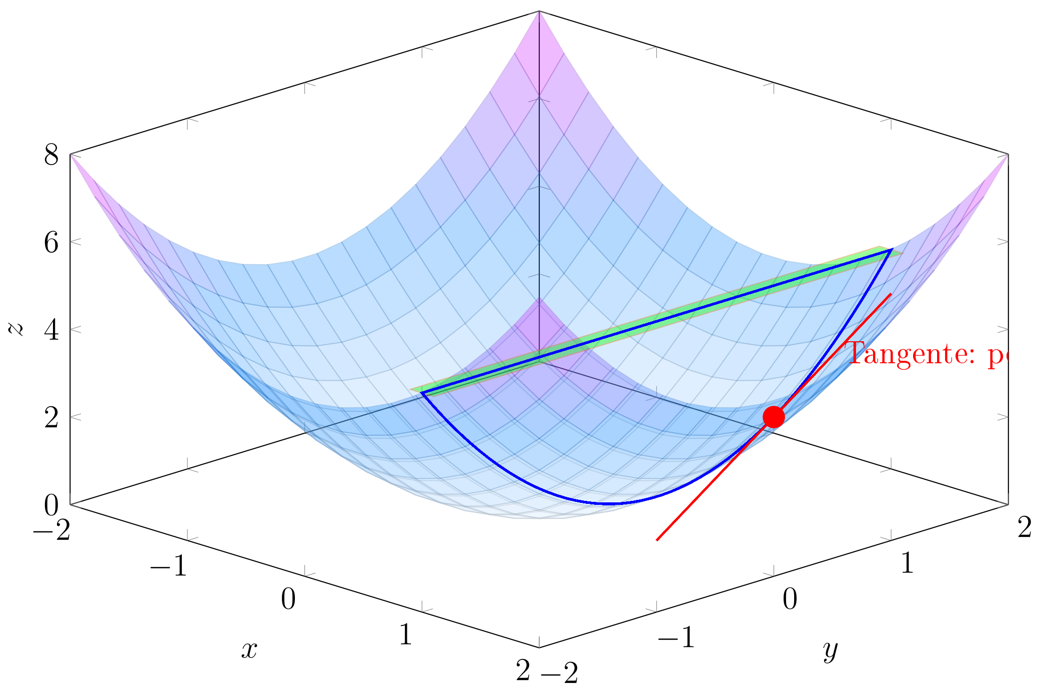

Figura 6: Curva azul: intersección con $x = 1$. Recta roja: tangente con pendiente $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$.

Ejemplo 2: Silla de montar (Paraboloide hiperbólico). Consideremos ahora $f(x, y) = x^2 - y^2$, una superficie con forma de silla de montar.

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

En el punto $(1, 1, 0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -2$$

Comparación visual de curvaturas. La siguiente gráfica muestra las curvas de nivel de la función paraboloide. Cada círculo representa puntos donde la función tiene el mismo valor:

Interpretación práctica con software. En software como **GeoGebra**, **Mathematica**, **MATLAB** o **Python** (matplotlib), podemos:

1. **Graficar la superficie** $z = f(x, y)$ en 3D
2. **Crear planos de corte** $x = x_0$ o $y = y_0$
3. **Visualizar las curvas de intersección**
4. **Calcular y dibujar las rectas tangentes** con pendientes dadas por las derivadas parciales
5. **Animar** el movimiento del punto para ver cómo cambian las pendientes

Silla de montar: $z = x^2 - y^2$

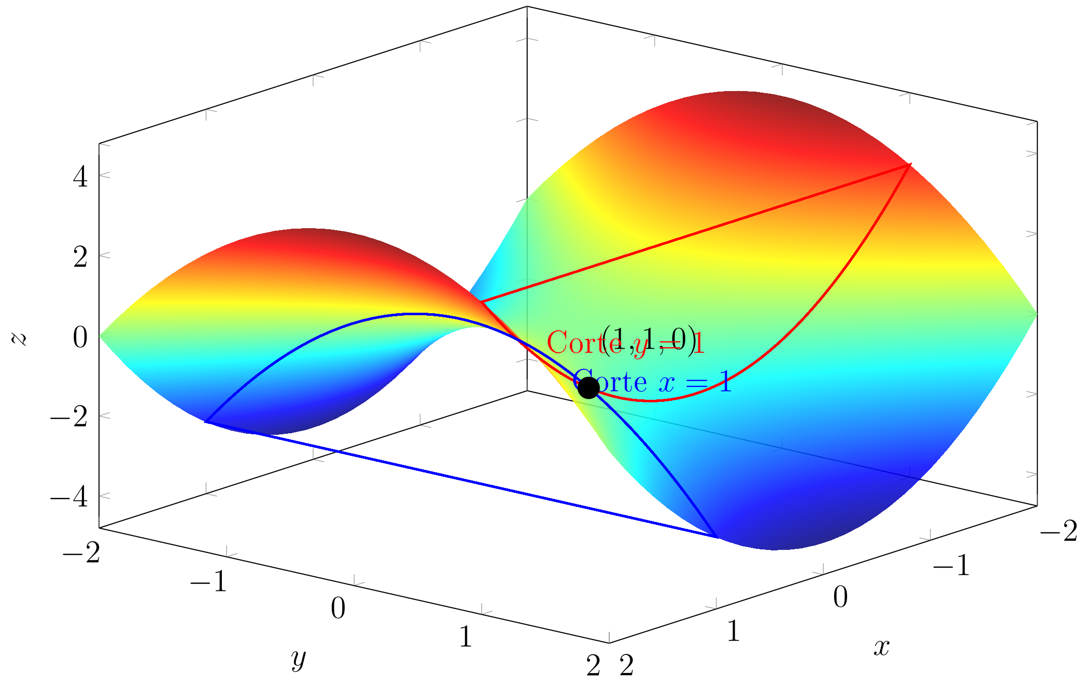

Figura 7: Silla de montar con cortes que muestran pendientes opuestas en direcciones perpendiculares.

Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$

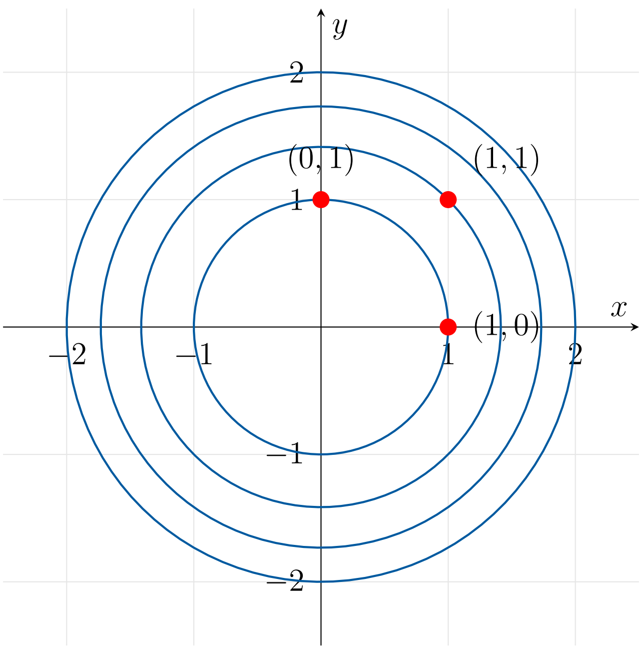

Figura 8: Curvas de nivel: círculos concéntricos para $k = 1, 2, 3, 4$.

Herramientas recomendadas: GeoGebra 3D, Desmos 3D Calculator, Python (matplotlib + numpy), MATLAB, Mathematica, Wolfram Alpha

Ventajas de la visualización: Permite comprender intuitivamente conceptos abstractos, verificar cálculos analíticos y explorar comportamientos locales de funciones complejas.

Ejercicio guiado con visualización.

Ejercicio: Cono

Considera la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, que representa un cono.
Tareas:

1. Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$
2. Evalúa las derivadas en el punto $(3,4)$
3. Interpreta geométricamente el resultado

Solución:
1. Cálculo de derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{f(x,y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{f(x,y)}$$

2. Evaluación en $(3,4)$:

$$f(3,4) = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3,4)} = \frac{3}{5} = 0{,}6, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(3,4)} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

3. Interpretación geométrica:

- Al movernos en dirección x desde $(3,4,5)$, la superficie sube con pendiente 0.6
- Al movernos en dirección y, la pendiente es 0.8
- Ambas pendientes son positivas porque nos alejamos del vértice del cono en el origen

Conclusión. La construcción geométrica de derivadas parciales nos permite:

- **Visualizar** cómo una superficie cambia localmente en diferentes direcciones
- **Comprender** que cada derivada parcial es la pendiente de una curva específica
- **Utilizar software** para verificar y explorar cálculos analíticos
- **Desarrollar intuición** sobre el comportamiento de funciones multivariables

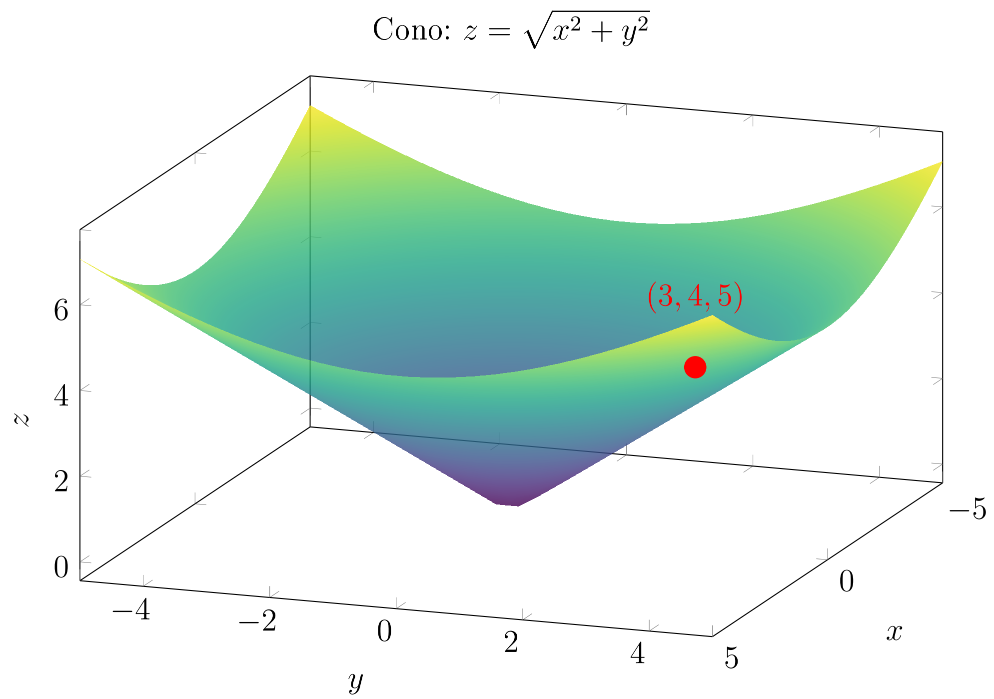

Figura 9: Superficie cónica con punto de análisis en $(3, 4, 5)$.

2.1.2. Reglas de derivación parcial

Reglas de derivación: Extensión al caso multivariable

Las reglas de derivación que conocemos del cálculo de una variable se extienden naturalmente a las derivadas parciales. La diferencia clave es que al derivar respecto a una variable, tratamos las demás como constantes.

Introducción. Las reglas de derivación parcial nos permiten calcular derivadas de funciones complejas de manera sistemática y eficiente. Estas reglas son idénticas a las del cálculo de una variable, pero aplicadas variable por variable.

Reglas básicas. Sea $f(x, y)$ y $g(x, y)$ funciones de dos variables, y c una constante.

Regla 1: Constante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(c) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(c) = 0$$

Regla 2: Constante por una función:

$$\frac{\partial}{\partial x}[c \cdot f(x, y)] = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

Regla 3: Suma y diferencia:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y) \pm g(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}$$

Regla 4: Producto:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)\cdot g(x,y)] = f\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + g\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

Regla 5: Cociente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{g\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - f\cdot\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$

Regla 6: Potencia:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)]^n = n[f(x,y)]^{n-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

Función	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\frac{\partial f}{\partial y}$
$f(x,y) = x^n$	nx^{n-1}	0
$f(x,y) = y^n$	0	ny^{n-1}
$f(x,y) = x^n y^m$	$nx^{n-1}y^m$	$mx^n y^{m-1}$
$f(x,y) = e^x$	e^x	0
$f(x,y) = e^{xy}$	ye^{xy}	xe^{xy}
$f(x,y) = \ln(x)$	$\frac{1}{x}$	0
$f(x,y) = \ln(xy)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$
$f(x,y) = \sin(x)$	$\cos(x)$	0
$f(x,y) = \sin(xy)$	$y\cos(xy)$	$x\cos(xy)$
$f(x,y) = \cos(x)$	$-\sin(x)$	0
$f(x,y) = \tan(x)$	$\sec^2(x)$	0

Cuadro 1: Derivadas parciales de funciones comunes.

Tabla resumen de derivadas parciales comunes.

Ejemplos resueltos detallados.

Ejemplo 1: Regla de la suma y producto

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x,y) = 3x^2y + 5xy^3 - 7x + 2y$$

Solución:
Para $\frac{\partial f}{\partial x}$: Derivamos término por término respecto a x

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(5xy^3) - \frac{\partial}{\partial x}(7x) + \frac{\partial}{\partial x}(2y)\\ &= 3y\cdot 2x + 5y^3\cdot 1 - 7 + 0\\ &= \boxed{6xy + 5y^3 - 7}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$: Derivamos término por término respecto a y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(5xy^3) - \frac{\partial}{\partial y}(7x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) \\
&= 3x^2 \cdot 1 + 5x \cdot 3y^2 - 0 + 2 \\
&= \boxed{3x^2 + 15xy^2 + 2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2: Regla del producto

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x, y) = (x^2 + y)(3x - y^2)$$

Solución:
Para $\frac{\partial f}{\partial x}$: Usamos la regla del producto
Sean $u = x^2 + y$ y $v = 3x - y^2$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\
&= (x^2 + y) \cdot 3 + (3x - y^2) \cdot 2x \\
&= 3x^2 + 3y + 6x^2 - 2xy^2 \\
&= \boxed{9x^2 - 2xy^2 + 3y}
\end{aligned}
$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= (x^2 + y) \cdot (-2y) + (3x - y^2) \cdot 1 \\
&= -2x^2y - 2y^2 + 3x - y^2 \\
&= \boxed{-2x^2y - 3y^2 + 3x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3: Regla del cociente

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x - 2y}$$

Solución:
Sean $u = x^2 + y$ y $v = x - 2y$
Para $\frac{\partial f}{\partial x}$: Aplicamos la regla del cociente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2} \\
&= \frac{(x-2y) \cdot 2x - (x^2+y) \cdot 1}{(x-2y)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 4xy - x^2 - y}{(x-2y)^2} \\
&= \boxed{\frac{x^2 - 4xy - y}{(x-2y)^2}}
\end{aligned}
$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2} \\
&= \frac{(x-2y) \cdot 1 - (x^2+y) \cdot (-2)}{(x-2y)^2} \\
&= \frac{x - 2y + 2x^2 + 2y}{(x-2y)^2} \\
&= \boxed{\frac{2x^2 + x}{(x-2y)^2}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4: Regla de la potencia (cadena)

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x, y) = (x^3 + xy^2)^5$$

Solución:
Sea $u = x^3 + xy^2$, entonces $f = u^5$
Para $\frac{\partial f}{\partial x}$: Aplicamos la regla de la cadena

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 5u^4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\
&= 5(x^3 + xy^2)^4 \cdot (3x^2 + y^2) \\
&= \boxed{5(x^3 + xy^2)^4(3x^2 + y^2)}
\end{aligned}
$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= 5u^4 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= 5(x^3 + xy^2)^4 \cdot (2xy) \\
&= \boxed{10xy(x^3 + xy^2)^4}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5: Funciones exponenciales y trigonométricas

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x,y) = e^{x^2 y} \sin(xy)$$

Solución:
Usamos la regla del producto: $f = e^{x^2 y} \cdot \sin(xy)$
Para $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x^2 y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy)] + \sin(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}[e^{x^2 y}] \\
&= e^{x^2 y} \cdot \cos(xy) \cdot y + \sin(xy) \cdot e^{x^2 y} \cdot 2xy \\
&= e^{x^2 y}[y \cos(xy) + 2xy \sin(xy)] \\
&= \boxed{ye^{x^2 y}[\cos(xy) + 2x \sin(xy)]}
\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x^2 y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}[\sin(xy)] + \sin(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}[e^{x^2 y}] \\
&= e^{x^2 y} \cdot \cos(xy) \cdot x + \sin(xy) \cdot e^{x^2 y} \cdot x^2 \\
&= xe^{x^2 y}[\cos(xy) + x \sin(xy)] \\
&= \boxed{xe^{x^2 y}[\cos(xy) + x \sin(xy)]}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6: Función logarítmica

Calcular las derivadas parciales de:

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

Solución:
Sea $u = x^2 + y^2 + 1$, entonces $f = \ln(u)$
Para $\frac{\partial f}{\partial x}$: Usamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot 2x \\
&= \boxed{\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}}
\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot 2y \\
&= \boxed{\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}}
\end{aligned}
$$

Derivadas parciales de orden superior. Las derivadas parciales pueden derivarse nuevamente, obteniendo derivadas de segundo orden o superiores.

Notación: Para $f(x, y)$:
Segundas derivadas parciales:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$: derivar dos veces respecto a x
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$: derivar dos veces respecto a y
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$: derivar primero respecto a y, luego respecto a x
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$: derivar primero respecto a x, luego respecto a y

Teorema de Schwarz: Si las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son continuas, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Es decir, el orden de derivación no importa.

Ejemplo 7: Derivadas de segundo orden

Calcular todas las segundas derivadas parciales de:

$$f(x, y) = x^3 y^2 + x^2 y$$

Solución:
Primero calculamos las derivadas de primer orden:

$$
\begin{aligned}
f_x &= 3x^2 y^2 + 2xy \\
f_y &= 2x^3 y + x^2
\end{aligned}
$$

Ahora las segundas derivadas:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + 2xy) = \boxed{6xy^2 + 2y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y + x^2) = \boxed{2x^3}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + 2xy) = \boxed{6x^2y + 2x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y + x^2) = \boxed{6x^2y + 2x}$$

Verificación: Como esperábamos por el Teorema de Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}$

Errores comunes al calcular derivadas parciales.

- **Error 1:** Olvidar que las otras variables son constantes.
  Incorrecto: $\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2 + 2xy$
  Correcto: $\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2$ (porque y es constante)
- **Error 2:** Confundir el orden en derivadas mixtas.
  Para $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$: primero derivar respecto a y, luego respecto a x
- **Error 3:** No aplicar la regla de la cadena cuando es necesaria.
  Incorrecto: $\frac{\partial}{\partial x}[\sin(x^2y)] = \cos(x^2y)$
  Correcto: $\frac{\partial}{\partial x}[\sin(x^2y)] = \cos(x^2y) \cdot 2xy$

Ejercicios propuestos. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = 5x^4y^3 - 3x^2y + 7xy^2 - 2$
2. $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x + y}$
3. $f(x, y) = e^{x/y} + \ln(x^2 + y^2)$
4. $f(x, y) = x^y$ *(Sugerencia: $x^y = e^{y \ln x}$)*
5. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot e^{xy}$
6. $f(x, y, z) = xyz + x^2y + y^2z + z^2x$ (tres variables)
7. Calcular f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} para $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$
8. Verificar que $f_{xy} = f_{yx}$ para $f(x, y) = e^{xy^2}$

2.1.3. Regla de la cadena para varias variables

Regla de la cadena: Composición de funciones multivariables

La regla de la cadena para funciones de varias variables nos permite calcular derivadas cuando las variables son, a su vez, funciones de otras variables. Es una extensión natural de la regla de la cadena del cálculo de una variable y es fundamental en física, ingeniería y optimización.

Introducción. En cálculo de una variable, la regla de la cadena establece que si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Para funciones de varias variables, esta regla se extiende considerando todas las trayectorias de dependencia entre variables.

Caso 1: Función de dos variables con dependencia de una sola variable.

Teorema (Regla de la cadena - Caso 1): Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable de x e y, donde:

- $x = x(t)$
- $y = y(t)$

Entonces la **derivada total** de z respecto a t es:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Interpretación: La tasa de cambio de z respecto a t se obtiene sumando las contribuciones de cada variable intermedia.

Visualización de las dependencias. Para visualizar la regla de la cadena, imaginamos un diagrama de árbol con las siguientes dependencias:

Caminos de dependencia: Existen dos caminos desde t hasta z:

- **Camino 1:** $t \to x \to z$ contribuye: $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$
- **Camino 2:** $t \to y \to z$ contribuye: $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

La derivada total es la suma de las contribuciones de ambos caminos.

Ejemplo 1: Caso básico

Sea $z = x^2 + xy + y^2$ donde $x = t^2$ y $y = t^3$. Calcular $\frac{dz}{dt}$.
Solución:
Método 1: Aplicando la regla de la cadena

Primero calculamos las derivadas parciales de z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y$$

Luego las derivadas de x e y respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$
$$\frac{dy}{dt} = 3t^2$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= (2x + y)(2t) + (x + 2y)(3t^2) \\ &= (2t^2 + t^3)(2t) + (t^2 + 2t^3)(3t^2) \\ &= 4t^3 + 2t^4 + 3t^4 + 6t^5 \\ &= \boxed{6t^5 + 5t^4 + 4t^3}\end{aligned}$$

Método 2: Sustitución directa (verificación)
Sustituimos $x = t^2$ y $y = t^3$ en z:

$$\begin{aligned}z &= (t^2)^2 + (t^2)(t^3) + (t^3)^2 \\ &= t^4 + t^5 + t^6\end{aligned}$$

Derivamos directamente:

$$\frac{dz}{dt} = 4t^3 + 5t^4 + 6t^5 = \boxed{6t^5 + 5t^4 + 4t^3}$$

Ambos métodos dan el mismo resultado.

Ejemplo 2: Funciones trigonométricas

Sea $z = e^x \sin(y)$ donde $x = t^2$ y $y = \pi t$. Calcular $\frac{dz}{dt}$ cuando $t = 1$.
Solución:
Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin(y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos(y)$$

Las derivadas respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$
$$\frac{dy}{dt} = \pi$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= e^x \sin(y) \cdot 2t + e^x \cos(y) \cdot \pi \\ &= e^{t^2}[\sin(\pi t) \cdot 2t + \cos(\pi t) \cdot \pi]\end{aligned}$$

Evaluamos en $t = 1$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} &= e^1[\sin(\pi) \cdot 2 + \cos(\pi) \cdot \pi] \\ &= e[0 \cdot 2 + (-1) \cdot \pi] \\ &= \boxed{-\pi e}\end{aligned}$$

Caso 2: Función de dos variables con dependencia de dos variables.

Teorema (Regla de la cadena - Caso 2): Sea $z = f(x, y)$ donde:

- $x = x(u, v)$
- $y = y(u, v)$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Visualización para el Caso 2. Para este caso más complejo, existen cuatro caminos desde las variables u y v hasta z:

Caminos de dependencia para el Caso 2: Cuatro caminos:

- **Camino 1:** $u \to x \to z$ contribuye: $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$
- **Camino 2:** $u \to y \to z$ contribuye: $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$
- **Camino 3:** $v \to x \to z$ contribuye: $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$
- **Camino 4:** $v \to y \to z$ contribuye: $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$

Por tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Ejemplo 3: Coordenadas polares

Sea $z = x^2 + y^2$ donde $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.
Solución:
Calculamos las derivadas parciales de z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Las derivadas de x e y respecto a r y θ:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta)$$

Para $\frac{\partial z}{\partial r}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= 2x\cdot\cos(\theta) + 2y\cdot\sin(\theta) \\
&= 2r\cos^2(\theta) + 2r\sin^2(\theta) \\
&= 2r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\
&= \boxed{2r}
\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial z}{\partial \theta}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= 2x\cdot(-r\sin(\theta)) + 2y\cdot r\cos(\theta) \\
&= -2r^2\cos(\theta)\sin(\theta) + 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

Interpretación: $\frac{\partial z}{\partial r} = 2r$ indica que z crece linealmente con r. $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$ confirma que $z = x^2 + y^2$ no depende del ángulo (es simétrica circularmente).

Ejemplo 4: Caso general

Sea $z = x^2y + xy^2$ donde $x = uv$ y $y = u - v$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$.
Solución:
Derivadas parciales de z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy$$

Derivadas de x e y:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = u$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -1$$

Para $\frac{\partial z}{\partial u}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= (2xy + y^2) \cdot v + (x^2 + 2xy) \cdot 1 \\ &= v(2xy + y^2) + x^2 + 2xy\end{aligned}$$

Sustituyendo $x = uv$ y $y = u - v$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= v[2uv(u-v) + (u-v)^2] + (uv)^2 + 2uv(u-v) \\ &= 2uv^2(u-v) + v(u-v)^2 + u^2v^2 + 2uv(u-v) \\ &= \boxed{2u^2v^2 - 2uv^3 + u^2v - 2uv^2 + v^3 + u^2v^2 + 2u^2v - 2uv^2}\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \boxed{3u^2v^2 + 2u^2v + u^2v - 4uv^2 + v^3}$$

Para $\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= (2xy + y^2) \cdot u + (x^2 + 2xy) \cdot (-1) \\ &= u(2xy + y^2) - x^2 - 2xy\end{aligned}$$

(Se puede desarrollar de manera similar sustituyendo valores)

Caso 3: Derivada implícita. Cuando tenemos una ecuación implícita $F(x, y) = 0$, podemos usar la regla de la cadena para encontrar $\frac{dy}{dx}$.

Derivación implícita: Para $F(x, y) = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Generalización: Para $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Ejemplo 5: Derivación implícita

Para la ecuación $x^3 + y^3 + xyz = 10$, calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.
Solución:
Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + xyz - 10$
Calculamos las derivadas parciales de F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + yz$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + xz$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy$$

Aplicamos la fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 + yz}{xy} = \boxed{-\frac{3x^2 + yz}{xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 + xz}{xy} = \boxed{-\frac{3y^2 + xz}{xy}}$$

Aplicaciones prácticas.

1. **Física:** Cambio de coordenadas (cartesianas a polares, cilíndricas, esféricas)
2. **Termodinámica:** Relaciones entre variables de estado
3. **Optimización:** Funciones objetivo con restricciones paramétricas
4. **Ingeniería:** Análisis de sensibilidad en sistemas complejos
5. **Cinemática:** Velocidad y aceleración en trayectorias curvas

Ejercicios propuestos.

1. Sea $z = x^2 - y^2$ donde $x = e^t$ y $y = e^{-t}$. Calcular $\frac{dz}{dt}$.
2. Sea $w = xyz$ donde $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Calcular $\frac{dw}{dt}$ cuando $t = 2$.
3. Sea $z = \ln(x^2 + y^2)$ donde $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

4. Sea $z = e^{x+y}$ donde $x = u^2 - v^2$ y $y = 2uv$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$.
5. Para la ecuación implícita $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.
6. Sea $w = f(x, y, z)$ donde $x = r\sin(\phi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\phi)$ (coordenadas esféricas). Expresar $\frac{\partial w}{\partial r}$ usando la regla de la cadena.
7. Verificar que si $z = f(x - y, y - x)$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Caso	**Fórmula**
$z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$	$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$
$z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$	$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$
$F(x, y, z) = 0$	$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$

Cuadro 2: Resumen de casos de la regla de la cadena.

Resumen de la regla de la cadena.

2.2. Vector gradiente y derivada direccional

Vector gradiente y derivada direccional: Concepto unificador

El gradiente es uno de los conceptos más importantes del cálculo multivariable. Unifica todas las derivadas parciales en un solo vector que apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función. La derivada direccional nos permite medir la tasa de cambio en cualquier dirección deseada.

Introducción y contextualización. Hasta ahora hemos estudiado las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, que miden cómo cambia la función cuando nos movemos en las direcciones de los ejes coordenados. Pero, ¿qué sucede si queremos saber cómo cambia la función cuando nos movemos en cualquier otra dirección?

Imagina que estás de excursión en una montaña y tienes un mapa topográfico con curvas de nivel. Las derivadas parciales te dicen qué tan empinado es el terreno si caminas exactamente hacia el norte (y) o hacia el este (x). Pero si quieres caminar en dirección noreste, o en cualquier otra dirección, necesitas un concepto más general: **la derivada direccional**.

Además, si quieres encontrar la dirección más empinada para subir (o bajar) lo más rápido posible, necesitas el **vector gradiente**, que siempre apunta en la dirección de máxima pendiente ascendente.

2.2.1. Cálculo e interpretación geométrica del gradiente y derivada direccional

Definición: Vector gradiente.

Definición: Sea $f(x, y)$ una función diferenciable. El **gradiente** de f se denota ∇f (se lee "nabla f") y se define como:

$$\nabla f(x, y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Para funciones de tres variables: $f(x, y, z)$:

$$\nabla f(x, y, z) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

Notación alternativa: También se escribe como $\operatorname{grad} f$.

El gradiente es un **campo vectorial**: en cada punto (x, y) del dominio de f, el gradiente $\nabla f(x, y)$ es un vector.

Propiedades geométricas del gradiente. El vector gradiente tiene propiedades geométricas fundamentales:

1. **Dirección:** ∇f apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.
2. **Magnitud:** $\|\nabla f\|$ es la razón de cambio máxima de f en ese punto.
3. **Perpendicularidad:** ∇f es perpendicular a las curvas de nivel de f.
4. **Cero en puntos críticos:** Si $\nabla f = \mathbf{0}$, entonces (x, y) es un punto crítico.

Ejemplo 1: Cálculo del gradiente

Calcular el gradiente de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ y evaluarlo en el punto $(1, 2)$.
Solución:
Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

Por lo tanto, el gradiente es:

$$\nabla f(x, y) = \langle 2x + y, x + 2y \rangle$$

Evaluamos en $(1, 2)$:

$$\nabla f(1, 2) = \langle 2(1) + 2, 1 + 2(2) \rangle = \langle 4, 5 \rangle$$

Interpretación: En el punto $(1, 2)$, la función crece más rápidamente en la dirección del vector $\langle 4, 5 \rangle$, con una razón de cambio de $\|\langle 4, 5 \rangle\| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6{,}40$.

Ejemplo 2: Gradiente de función exponencial

Calcular ∇f para $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ en el punto $(0, 0)$.
Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 2ye^{x^2+y^2}$$

Por lo tanto:

$$\nabla f(x, y) = \langle 2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2} \rangle$$

En $(0, 0)$:

$$\nabla f(0, 0) = \langle 2(0)e^0, 2(0)e^0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

Interpretación: El punto $(0, 0)$ es un punto crítico (en este caso, un mínimo local).

Definición: Derivada direccional. Las derivadas parciales miden el cambio de f en las direcciones de los ejes. La derivada direccional generaliza esto a cualquier dirección.

Definición: Sea $f(x, y)$ una función diferenciable y $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ un **vector unitario** (es decir, $\|\mathbf{u}\| = 1$). La **derivada direccional** de f en la dirección de $\mathbf{u}$ se denota $D_{\mathbf{u}}f$ y se define como:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ha, y + hb) - f(x, y)}{h}$$

Fórmula práctica: Si f es diferenciable:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b$$

Esta fórmula nos dice que la derivada direccional es el producto punto entre el gradiente y el vector de dirección.

Relación entre gradiente y derivada direccional. La relación entre el gradiente y la derivada direccional es fundamental:

Teorema: Sea f diferenciable y $\mathbf{u}$ un vector unitario. Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\| \|\mathbf{u}\| \cos(\theta) = \|\nabla f\| \cos(\theta)$$

donde θ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$.
Consecuencias importantes:

- **Máximo:** $D_{\mathbf{u}}f$ es máxima cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{u}$ apunta en la dirección de ∇f. El valor máximo es $\|\nabla f\|$.
- **Mínimo:** $D_{\mathbf{u}}f$ es mínima cuando $\theta = \pi$, es decir, cuando $\mathbf{u}$ apunta en dirección opuesta a ∇f. El valor mínimo es $-\|\nabla f\|$.

- **Cero:** $D_{\mathbf{u}}f = 0$ cuando $\theta = \pi/2$, es decir, cuando $\mathbf{u}$ es perpendicular a ∇f. Esto ocurre en la dirección tangente a la curva de nivel.

Ejemplo 3: Derivada direccional básica

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcular la derivada direccional en el punto $(3, 4)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$.
Solución:
Paso 1: Calcular el gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\nabla f(3, 4) = \langle 2(3), 2(4)\rangle = \langle 6, 8\rangle$$

Paso 2: Normalizar el vector de dirección:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Paso 3: Calcular la derivada direccional:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(3, 4) &= \nabla f(3, 4) \cdot \mathbf{u} \\ &= \langle 6, 8\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \\ &= \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} \approx \boxed{9{,}90} \end{aligned}$$

Interpretación: Si nos movemos desde $(3, 4)$ en dirección 45 (noreste), la función aumenta a una razón de aproximadamente 9,90 unidades por unidad de distancia.

Ejemplo 4: Dirección de máximo crecimiento

Para $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ en el punto $(2, 1)$:

1. Encontrar la dirección de máximo crecimiento.
2. Calcular la razón de cambio máxima.
3. Encontrar la dirección de máximo decrecimiento.

Solución:

Calculamos el gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$$

$$\nabla f(2,1) = \langle 2(2) - 1, -2 + 2(1) \rangle = \langle 3, 0 \rangle$$

a) Dirección de máximo crecimiento:
El vector gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento. El vector unitario correspondiente es:

$$\mathbf{u}_{\max} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\langle 3, 0 \rangle}{3} = \boxed{\langle 1, 0 \rangle}$$

La dirección es horizontal hacia la derecha (dirección positiva del eje x).
b) Razón de cambio máxima:

$$\text{Razón máxima} = \|\nabla f(2,1)\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \boxed{3}$$

c) Dirección de máximo decrecimiento:
Es la dirección opuesta al gradiente:

$$\mathbf{u}_{\min} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \boxed{\langle -1, 0 \rangle}$$

La razón de decrecimiento es -3.

Ejemplo 5: Temperatura y flujo de calor

La temperatura en una placa metálica está dada por:

$$T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$$

donde T se mide en grados Celsius y x, y en metros.

1. Encontrar la dirección de máximo incremento de temperatura en el punto $(2, 1)$.
2. ¿Cuál es la razón de cambio máxima en ese punto?
3. En qué dirección no cambia la temperatura (curva isotérmica)?

Solución:
Calculamos el gradiente:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -2x$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = -4y$$

$$\nabla T(2,1) = \langle -2(2), -4(1) \rangle = \langle -4, -4 \rangle$$

a) Dirección de máximo incremento:

$$\mathbf{u}_{\max} = \frac{\langle -4, -4 \rangle}{\sqrt{16+16}} = \frac{\langle -4, -4 \rangle}{4\sqrt{2}} = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Esta dirección apunta hacia el suroeste (225).
b) Razón de cambio máxima:

$$\|\nabla T(2,1)\| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \approx \boxed{5{,}66\ ^\circ\mathrm{C/m}}$$

c) Dirección sin cambio:
La temperatura no cambia en direcciones perpendiculares al gradiente. Si $\nabla T = \langle -4, -4 \rangle$, las direcciones perpendiculares son:

$$\mathbf{u}_{\perp} = \pm \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Estas direcciones son tangentes a la curva isotérmica (curva de nivel de temperatura constante).

Interpretación física y geométrica.

Interpretaciones del gradiente:
1. Geométrica:

- El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel.
- Apunta çuesta arriba.$^{\text{en}}$ la superficie $z = f(x, y)$.
- Su magnitud indica qué tan empinada es la superficie.

2. Física (campo de temperaturas):

- ∇T apunta en la dirección del flujo de calor.
- $\|\nabla T\|$ indica la intensidad del gradiente térmico.
- El calor fluye de regiones calientes a frías.

3. Optimización:

- Para maximizar f, seguir la dirección de ∇f.
- Para minimizar f, seguir la dirección de $-\nabla f$.
- Este principio es la base del algoritmo de **gradiente descendente** en machine learning.

Aplicaciones prácticas.

1. **Física:**

- Campos conservativos: $\mathbf{F} = -\nabla U$ (fuerza desde potencial)
- Ley de Fourier: flujo de calor proporcional a $-\nabla T$
- Ley de Fick: difusión proporcional a $-\nabla C$ (concentración)

2. **Ingeniería:**
   - Optimización de diseños estructurales
   - Control de procesos industriales
   - Análisis de distribución de esfuerzos
3. **Machine Learning:**
   - Gradiente descendente para entrenar redes neuronales
   - Minimización de funciones de pérdida
   - Backpropagation (propagación hacia atrás)
4. **Geografía y topografía:**
   - Determinación de pendientes máximas
   - Análisis de escorrentía de agua
   - Planificación de rutas
5. **Economía:**
   - Dirección de máximo beneficio
   - Análisis marginal multivariable
   - Optimización de portafolios

Ejercicios propuestos.

1. Calcular ∇f para las siguientes funciones:
   a) $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$
   b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$
   c) $f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$
2. Para $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$, encontrar:
   a) El gradiente en $(1,1)$
   b) La dirección de máximo crecimiento en ese punto
   c) La razón de cambio máxima
3. Calcular $D_{\mathbf{u}}f(2,3)$ para $f(x,y) = e^{x-y}$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.
4. Demostrar que para $f(x,y) = c$ (constante), $\nabla f = \mathbf{0}$.
5. Si la temperatura en el espacio está dada por $T(x,y,z) = 100 - x^2 - y^2 - z^2$, encontrar la dirección de máximo enfriamiento en el punto $(1,2,2)$.

6. Demostrar que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ (regla del producto para gradientes).
7. Para $f(x, y) = x^2 + y^2$, verificar que el gradiente es perpendicular a las curvas de nivel calculando $\nabla f \cdot \mathbf{T}$, donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente a la curva de nivel.
8. En el punto $(1, 2)$ de la superficie $z = x^2 + 2y^2$, encontrar la dirección en la que la altura z no cambia.

2.2.2. Representar SW vectores gradientes en superficies

2.3. Extremos de funciones multivariables

2.3.1. Valores críticos

2.3.2. Máximos

2.3.3. Mínimos

2.3.4. Método de multiplicadores de Lagrange

2.3.5. Representación gráfica de extremos de funciones

3. Unidad III: Integral múltiple

3.1. Integrales dobles

3.2. Integrales triples

3.3. Cambio de variable en integrales múltiples

3.4. Aplicaciones de integrales múltiples

4. Unidad IV: Funciones vectoriales

4.1. Funciones vectoriales de una variable

4.2. Derivadas e integrales de funciones vectoriales

4.3. Longitud de arco y curvatura

4.4. Aplicaciones de funciones vectoriales

Referencias (APA)

Bibliografía

- Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables* (8a ed.). Cengage Learning. — Capítulos sobre funciones de varias variables, dominio, rango y derivación implícita.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (9a ed.). Cengage Learning. — Secciones sobre funciones explícitas e implícitas.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus* (5th ed.). W. H. Freeman. — Teoría de funciones escalares de varias variables.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Cálculo de una variable* (14a ed.). Pearson Educación. — Fundamentos matemáticos y aplicaciones.
- Colley, S. J. (2019). *Vector Calculus* (5th ed.). Pearson.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (9a ed.). Cengage Learning.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus* (5th ed.). W. H. Freeman.
- Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables* (8a ed.). Cengage Learning.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Cálculo de una variable* (14a ed.). Pearson Educación.