Reporte de matemáticas

Integradora

Hernández Sánchez Katia Alexandra
Higareda Vázquez María del Pilar
León Flores Axel Daniel
Miranda Roldán Jose Luis

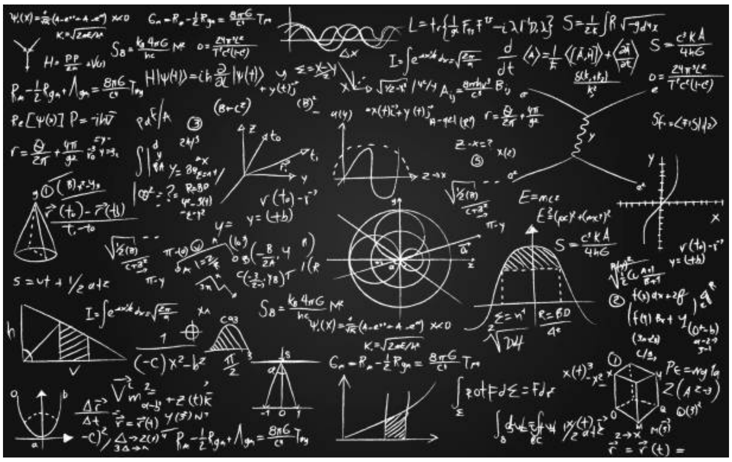

Figura 1: Portada del formulario de matemáticas

Índice

1. Funciones de varias variables

Funciones de varias variables: estudio teórico

Esta sección presenta un estudio teórico fundamental sobre las funciones de varias variables, abarcando conceptos esenciales como dominio, rango, y la distinción entre funciones explícitas e implícitas. Estos conceptos son la base para el análisis multivariable y aplicaciones en ciencias e ingeniería.

Introducción. Las **funciones de varias variables** son aquellas que dependen de dos o más variables independientes. A diferencia de las funciones de una variable $y = f(x)$, estas funciones se expresan como $z = f(x, y)$ para dos variables, o más generalmente como $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para n variables.

Las funciones de varias variables permiten modelar fenómenos donde múltiples factores influyen simultáneamente en un resultado. Por ejemplo:

- La temperatura $T(x, y, z)$ en un punto del espacio tridimensional.
- El volumen $V(r, h) = \pi r^2 h$ de un cilindro en función de su radio y altura.
- La producción $P(L, K)$ de una empresa en función del trabajo L y capital K (función de producción en economía).

1.1. Funciones escalares de varias variables

1.1.1. Dominio

El **dominio** de una función de varias variables $f(x, y)$ es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) para los cuales la función está definida. Formalmente:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \text{ está definida}\}$$

Para funciones de tres o más variables, el dominio se extiende naturalmente a $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$.

¿Cuándo se aplica?

- Al identificar restricciones físicas o matemáticas (raíces cuadradas, denominadores, logaritmos).
- Para determinar la región del plano o espacio donde la función tiene sentido.

Ejemplos ilustrativos:

1. **Función polinomial:** $f(x, y) = x^2 + y^2$

   El dominio es todo $\mathbb{R}^2$, ya que no hay restricciones:

   $$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

2. **Función con raíz cuadrada:** $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

   La expresión dentro de la raíz debe ser no negativa:

   $$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 9$$

   El dominio es el disco cerrado de radio 3 centrado en el origen:

   $$\text{Dom}(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

3. **Función con denominador:** $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$

   El denominador no puede ser cero:

   $$x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$$

   El dominio excluye la recta $y = x$:

   $$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

1.1.2. Rango

El **rango** (o imagen) de una función $f(x, y)$ es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la función. Formalmente:

$$\text{Ran}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y) \text{ para algún } (x, y) \in \text{Dom}(f)\}$$

¿Cuándo se aplica?

- Al determinar los valores de salida posibles de una función.
- Para analizar el comportamiento global de la función.

Ejemplos ilustrativos:

1. **Paraboloide:** $f(x, y) = x^2 + y^2$

   Dado que $x^2 \geq 0$ y $y^2 \geq 0$, tenemos $f(x, y) \geq 0$, y el mínimo se alcanza en $(0, 0)$:

   $$\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$

2. **Función con raíz:** $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

   Como $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, tenemos:

   $$0 \leq 9 - x^2 - y^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$

   $$\text{Ran}(f) = [0, 3]$$

3. **Función seno:** $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$

   Dado que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ y $-1 \leq \cos(y) \leq 1$:

   $$\text{Ran}(f) = [-2, 2]$$

1.1.3. Funciones explícitas

Una función se dice **explícita** cuando la variable dependiente está despejada en términos de las variables independientes. La forma general es:

$$z = f(x, y)$$

¿Cuándo se aplican?

- Cuando se necesita evaluar directamente la función para valores específicos.
- Para graficar superficies en el espacio tridimensional.

- En cálculo de derivadas parciales de forma directa.

Ejemplos ilustrativos:

1. $z = x^2 + y^2$ — Paraboloide circular
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ — Cono
3. $z = \sin(x)\cos(y)$ — Superficie ondulatoria
4. $w = xyz$ — Función de tres variables

En funciones explícitas, es directo calcular derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \quad \text{para } z = x^2 + y^2$$

1.1.4. Funciones implícitas

Una función se dice **implícita** cuando no está despejada, sino que se define mediante una ecuación de la forma:

$$F(x, y, z) = 0$$

donde z no está aislada explícitamente.

¿Cuándo se aplican?

- Cuando es difícil o imposible despejar la variable dependiente.
- En ecuaciones de superficies como esferas, elipsoides, hiperboloides.
- Para aplicar el teorema de la función implícita en análisis avanzado.

Ejemplos ilustrativos:

1. **Esfera:** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

   Esta ecuación define z implícitamente. Si se despeja:

   $$z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

   Se obtienen dos funciones explícitas (hemisferio superior e inferior).

2. **Cilindro:** $x^2 + y^2 = 4$

   Define una superficie cilíndrica donde z puede tomar cualquier valor.

3. **Ecuación general:** $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   Hiperboloide de una hoja, difícil de expresar explícitamente.

Derivación implícita: Para funciones implícitas $F(x, y, z) = 0$, podemos calcular derivadas parciales usando:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Ejemplo aplicado: Para $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, con $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

Comparación: Explícitas vs. Implícitas.

Aspecto	**Función Explícita**	**Función Implícita**
Forma	$z = f(x, y)$	$F(x, y, z) = 0$
Evaluación	Directa	Requiere despejar o métodos numéricos
Derivadas	Directas	Requiere derivación implícita
Ejemplos	$z = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Aplicaciones prácticas. Las funciones de varias variables tienen aplicaciones en:

- **Física:** Campos escalares (temperatura, presión, potencial eléctrico).
- **Economía:** Funciones de utilidad $U(x, y)$, funciones de producción Cobb-Douglas $P(L, K) = AL^\alpha K^\beta$.
- **Ingeniería:** Análisis de estructuras, distribución de esfuerzos, optimización de diseños.
- **Estadística:** Regresión multivariable, funciones de densidad conjunta.

1.2. Planos y superficies

1.2.1. Curvas de nivel: Planos, superficies cuadráticas (elipsoides, cono, paraboloides, hiperboloides) – Graficación

Descripción

Una **curva de nivel** de una función $z = f(x, y)$ es el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy tales que $f(x, y) = k$ para una constante fija k. Geométricamente, surge al intersectar la *superficie* $z = f(x, y)$ con el *plano horizontal* $z = k$ y proyectar el contorno sobre el plano xy.

Propósito: Visualizar funciones de dos variables mediante sus curvas de nivel y relacionarlas con cortes horizontales de la superficie.
Competencias: Modelación, representación gráfica y comunicación matemática.

Teoría breve. Para $f(x, y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel satisfacen $x^2 + y^2 = k$. Cada $k > 0$ produce una circunferencia de radio $r = \sqrt{k}$ centrada en el origen. El patrón de circunferencias concéntricas refleja que la superficie $z = x^2 + y^2$ es un paraboloide circular.

Ejemplos guiados.

- $k = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2} \approx 1{,}41$
- $k = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3} \approx 1{,}73$
- $k = 4 \Rightarrow r = 2{,}00$
- $k = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5} \approx 2{,}24$
- $k = 6 \Rightarrow r = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

Ejercicios.

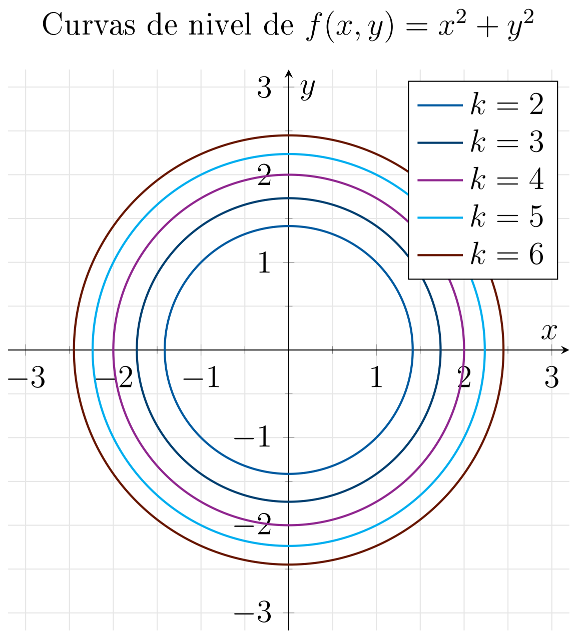

Figura 2: Curvas de nivel concéntricas para $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

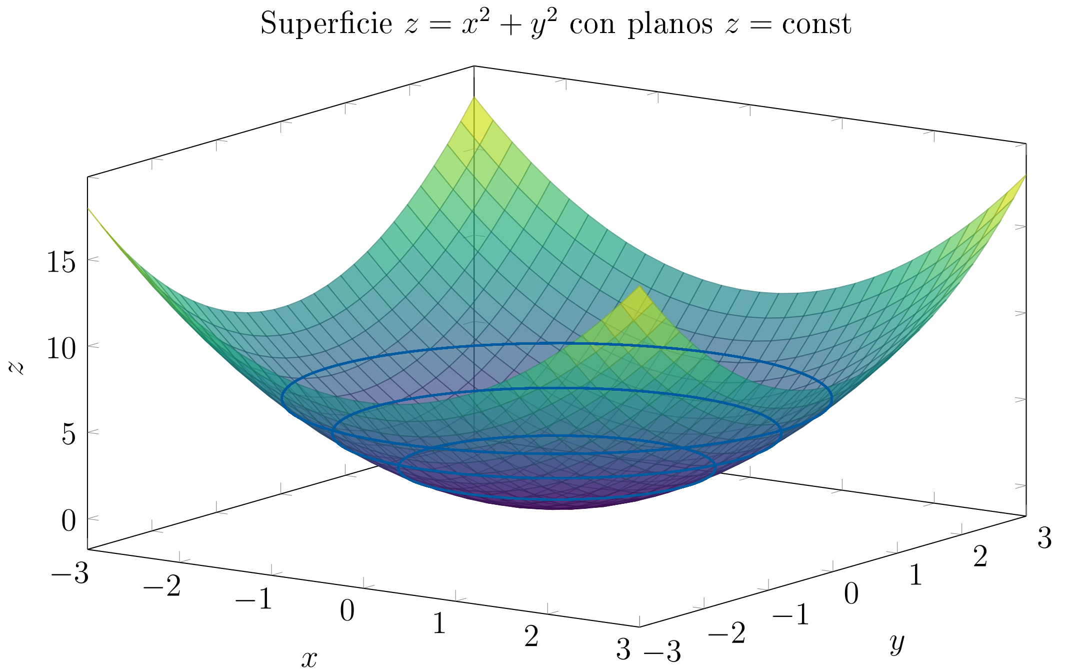

Figura 3: Paraboloide $z = x^2 + y^2$ y cortes horizontales $z = \text{const}$.

1) Identificación de curvas

Dibuja las curvas de nivel para $k = 2, 3, 4, 5, 6$ y anota sus radios.

2) Intersección con planos

Encuentra las curvas resultantes de los cortes con los planos $z = k$ y describe su forma.

3) Normalización

Transforma $x^2 + y^2 = k$ en la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y deduce que $a = b = \sqrt{k}$.

1.3. Límites y continuidad en funciones de 3 variables

Descripción

Un **límite** describe el comportamiento de una función $f(x)$ cuando la variable independiente x se aproxima a un valor específico a. La notación formal es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esto significa que los valores de $f(x)$ se acercan arbitrariamente a L cuando x se acerca a a. Los límites son fundamentales para definir la **continuidad** de una función y establecer las bases del cálculo diferencial e integral.

Propósito: Comprender el comportamiento de una función cuando la variable se aproxima a un valor determinado.
Competencias: Razonamiento lógico, análisis algebraico y comprensión de la continuidad.

1.3.1. Definición y conceptos

Definición formal. Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

siempre que para cada $\varepsilon > 0$ exista un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Indeterminaciones comunes. Algunas formas indeterminadas requieren técnicas algebraicas para resolverse:

- $\frac{0}{0}$ — Factorización, racionalización o L'Hôpital
- $\frac{\infty}{\infty}$ — Simplificación algebraica
- $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 — Transformaciones logarítmicas o algebraicas

Continuidad. Una función $f(x)$ es **continua** en $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, el límite existe, la función está definida en a, y ambos valores coinciden.

1.3.2. Racionalización de límites

Cuando aparecen raíces cuadradas en expresiones que producen indeterminaciones $\frac{0}{0}$, podemos usar la técnica de **multiplicar por el conjugado**.

Ejemplo resuelto. Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} \cdot \frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{9+x}+3} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(9+x)-9}{x(\sqrt{9+x}+3)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{9+x}+3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} = \frac{1}{6}}$.

1.3.3. Ejercicios prácticos

Ejercicio 1

Calcular:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2-9}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2-9} &= \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{1}{x-3} \\
&= \frac{1}{-3-3} = \frac{1}{-6} = \boxed{-\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Calcular:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+4)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+4}\\ &= \frac{1-3}{1+4} = \frac{-2}{5} = \boxed{-\frac{2}{5}}\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2}{3x^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2}{3x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-2)}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x-2}{3}\\ &= \frac{0-2}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Ejercicio 4 (Racionalización)

Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-2x+x^2}-2}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-2x+x^2}-2}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-2x+x^2}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-2x+x^2}+2}{\sqrt{4-2x+x^2}+2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(4-2x+x^2)-4}{x(\sqrt{4-2x+x^2}+2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2x+x^2}{x(\sqrt{4-2x+x^2}+2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x(-2+x)}{x(\sqrt{4-2x+x^2}+2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2+x}{\sqrt{4-2x+x^2}+2}\\ &= \frac{-2+0}{\sqrt{4}+2} = \frac{-2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Ejercicio 5 (Racionalización)

Calcular:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Gráfica ilustrativa. La siguiente figura muestra la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y su comportamiento cerca de $x = 1$, donde existe una discontinuidad removible:

Función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ con discontinuidad removible en $x = 1$

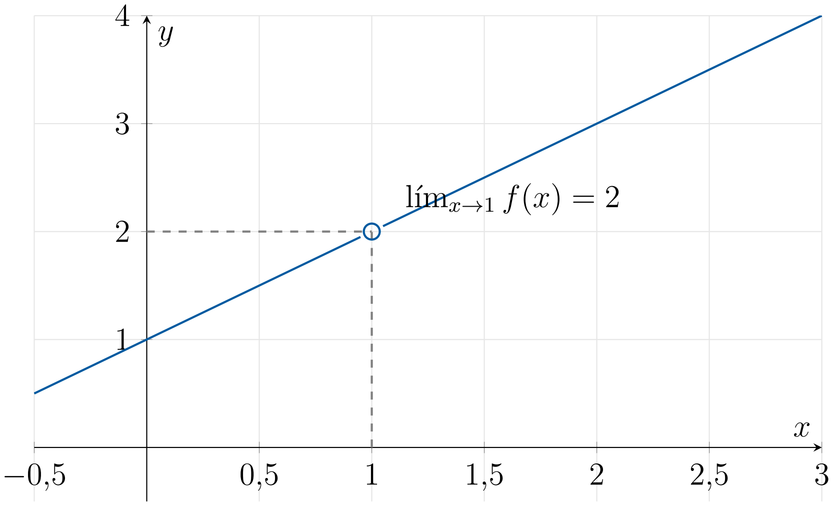

Figura 4: Visualización del límite: aunque $f(1)$ no está definida, $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

Conclusión.

> *"El concepto de límite es fundamental en el cálculo diferencial y sirve como base para las derivadas y la continuidad."*
> — Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables* (8a ed.). Cengage Learning.

1.4. Derivadas parciales

1.4.1. Construcción geométrica de la derivada parcial con software

1.4.2. Reglas de derivación parcial

1.4.3. Regla de la cadena para varias variables

1.5. Vector gradiente y derivada direccional

1.5.1. Cálculo e interpretación geométrica del gradiente y derivada direccional

1.5.2. Representar SW vectores gradientes en superficies

1.6. Extremos de funciones multivariables

1.6.1. Valores críticos

1.6.2. Máximos

1.6.3. Mínimos

1.6.4. Método de multiplicadores de Lagrange

1.6.5. Representación gráfica de extremos de funciones

Referencias (APA)

Bibliografía

- Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables* (8a ed.). Cengage Learning. — Capítulos sobre funciones de varias variables, dominio, rango y derivación implícita.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (9a ed.). Cengage Learning. — Secciones sobre funciones explícitas e implícitas.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus* (5th ed.). W. H. Freeman. — Teoría de funciones escalares de varias variables.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Cálculo de una variable* (14a ed.). Pearson Educación. — Fundamentos matemáticos y aplicaciones.
- Colley, S. J. (2019). *Vector Calculus* (5th ed.). Pearson.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (9a ed.). Cengage Learning.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus* (5th ed.). W. H. Freeman.
- Stewart, J. (2016). *Cálculo de varias variables* (8a ed.). Cengage Learning.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Cálculo de una variable* (14a ed.). Pearson Educación.