

# Sprawozdanie z projektu ze Sztucznej Inteligencji

## Porównanie metod uczenia maszynowego w problemie MNIST i jego pochodnych

Filip Gołaś s188776  
Damian Jankowski s188597  
Mikołaj Storoniak s188806

30 maja 2023

### Spis treści

<b>1</b>	<b>Opis problemu</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Opis porównanych modeli</b>	<b>2</b>
2.1	Drzewa . . . . .	2
2.1.1	Drzewo decyzyjne . . . . .	2
2.1.2	Las losowy . . . . .	2
2.2	Sieci neuronowe . . . . .	2
2.2.1	Wielowarstwowy perceptron . . . . .	2
2.2.2	Sieć konwolucyjna . . . . .	3
2.2.3	Sieć grafowa . . . . .	4
2.2.4	Konwolucyjna sieć transferowa . . . . .	4
2.3	KNN - K Nearest Neighbours . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Opis realizacji zadania</b>	<b>4</b>
3.1	Drzewo decyzyjne . . . . .	4
3.2	Las losowy . . . . .	4
3.3	Własna implementacja Wielowarstwowego perceptronu . . . . .	5
3.4	Wielowarstwowy perceptron Tensorflow Keras . . . . .	5
3.5	Sieć konwolucyjna Tensorflow Keras . . . . .	7
3.5.1	Wersja podstawowa . . . . .	7
3.5.2	Wersja rozszerzona . . . . .	8
3.6	Sieć transferowa Tensorflow Keras . . . . .	10
3.6.1	Przed fine-tuningiem . . . . .	10
3.6.2	Fine-tuning . . . . .	12
3.7	Sieć grafowa . . . . .	13
3.8	K Nearest Neighbours . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Wyniki</b>	<b>14</b>
4.1	Drzewo losowe . . . . .	14
4.2	Las losowy . . . . .	14
4.3	Własna implementacja Wielowarstwowego perceptronu . . . . .	14
4.4	Wielowarstwowy perceptron Tensorflow Keras . . . . .	14
4.5	Sieć konwolucyjna Tensorflow Keras . . . . .	14
4.6	Sieć transferowa Tensorflow Keras . . . . .	14
4.7	Sieć grafowa . . . . .	14
4.8	K Nearest Neighbours . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Dyskusja</b>	<b>14</b>

# 1 Opis problemu

## 2 Opis porównanych modeli

### 2.1 Drzewa

#### 2.1.1 Drzewo decyzyjne

Drzewo decyzyjne jest modelem predykcyjnym wykorzystywanym w dziedzinie uczenia maszynowego i analizy danych. Jest to struktura drzewiasta, w której każdy węzeł reprezentuje test na jednej z cech, gałęzie reprezentują możliwe wyniki tego testu, a liście reprezentują etykiety lub wartości predykcyjne. Drzewo decyzyjne może być wykorzystane zarówno do klasyfikacji, jak i do regresji.

Podczas konstrukcji drzewa decyzyjnego, algorytm dokonuje podziału zbioru danych na podzbiory na podstawie wybranych cech. Celem jest jak najlepsze rozdzielenie danych, aby w każdym podzbiorze dominowała jedna klasa lub aby zminimalizować błąd predykcji dla zmiennych ciągłych w przypadku regresji.

Drzewa decyzyjne posiadają wiele zalet, takich jak prostota interpretacji, zdolność do obsługi zarówno danych kategorycznych, jak i numerycznych, oraz efektywność obliczeniowa w przypadku dużych zbiorów danych. Jednakże, mogą być podatne na przetrenowanie, co oznacza, że mogą zbyt dobrze dopasować się do danych treningowych i słabo generalizować na nowe dane.

#### 2.1.2 Las losowy

Las losowy (ang. Random Forest) jest złożonym modelem predykcyjnym, który opiera się na kombinacji wielu drzew decyzyjnych. Polega na budowie wielu drzew decyzyjnych na podstawie różnych losowych podzbiorów danych treningowych, a następnie łączeniu ich wyników w celu uzyskania ostatecznej predykcji. Każde drzewo w lesie losowym jest budowane niezależnie od pozostałych, a wyniki są łączone w procesie głosowania lub uśredniania.

Las losowy ma wiele zalet, w tym wysoką dokładność predykcji, zdolność do obsługi zarówno danych kategorycznych, jak i numerycznych, oraz odporność na przetrenowanie. Dodatkowo, las losowy może dostarczać ważność cech, co oznacza, że można ocenić, które cechy mają największy wpływ na predykcje.

Las losowy znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach, takich jak klasyfikacja obrazów, przetwarzanie języka naturalnego, analiza danych medycznych itp. Jest to popularny model ze względu na swoją elastyczność i dobrą wydajność nawet w przypadku dużych zbiorów danych.

### 2.2 Sieci neuronowe

Sieć neuronowa jest modelem statystycznym czerpiącym inspirację z natury i działania układów nerwowych żywych organizmów. Modele te są stosowane zarówno do problemów regresji (aproksymacji) jak i klasyfikacji poprzez nauczanie nadzorowane.

Podstawową składową każdej sieci neuronowej jest neuron, który może być reprezentowany jako funkcja wielu parametrów zwracająca dyskretną wartość prawdą lub fałsz. Choć jeden neuron nie jest w stanie opisać złożonych modeli, dużo większe możliwości mają sieci neuronowe zbudowane z wielu neuronów połączonych w warstwy w taki sposób, że wynik jednej warstwy służy jako parametry kolejnej.

Poprzez odpowiednie ustawienie współczynników funkcji w neuronach jesteśmy w stanie zamodelować zależności dużo bardziej złożone niż te możliwe do opisania jedną prostą funkcją wielu parametrów.

#### 2.2.1 Wielowarstwowy perceptron

W praktyce w sieciach neuronowych neurony są zastąpione perceptronami, które od neuronów różnią się tym, że są funkcjami w dziedzinie rzeczywistej. Same warstwy neuronów również nie są reprezentowane jako zbiory obiektów typu neuron. Operacja przechodzenia danych wejściowych przez kolejne warstwy sieci zwana propagacją w przód może być zrealizowana w każdej warstwie poprzez proste mnożenie macierzy

$$S = X \times W \tag{1}$$

gdzie:

- $X$  jest macierzą  $(n, 1)$  parametrów będących danymi wejściowymi sieci w przypadku warstwy pierwszej (wejściowej), lub wartości zwróconych przez poprzednią warstwę w sieci

- $W$  jest macierzą  $(m, n)$  współczynników funkcji opisujących perceptrony, w której każdy wiersz opisuje jeden perceptron, a każda kolumna odpowiada wartości współczynnika tego perceptronu dla danego parametru z wektora wejściowego warstwy
- $S$  jest macierzą wynikową warstwy  $(1, m)$  zawierającą wartości zwrócone przez funkcje opisujące perceptrony tworzące tę warstwę

Następnie należy zdecydować kiedy uznamy dany neuron za pobudzony. Do tego zadania stosuje się funkcje aktywacji, których dobór jest niezwykle ważny i może łatwo zadecydować o użyteczności sieci.

$$f(S) = Z \quad (2)$$

- $f(\cdot)$  jest wybraną funkcją aktywacji, która powinna być różniczkowalna by możliwe było użycie jej w propagacji wstecz
- $S$  jest macierzą wynikową  $(1, m)$  warstwy
- $Z$  jest macierzą  $(1, m)$ , w której każdy element jest intensywnością pobudzenia danego neuronu

Aby korzystać z sieci neuronowych do opisywania skomplikowanych modeli statystycznych nie możemy ręcznie decydować o wartościach parametrów w warstwach. Byłoby to niezwykle ciężkie o ile nie niemożliwe w sposób analityczny. Zamiast tego sieci neuronowe poddaje się trenowaniu.

Proces trenowania sieci neuronowej nazywany jest propagacją wstecz. Gdy przeprowadzimy proces propagacji w przód dla sieci z wartościami współczynników o wartościach losowych o dowolnym rozkładzie jesteśmy w stanie poprawić je stosując wybraną różniczkowalną funkcję straty i znając wartości pożądane. Dzieje się to w najprostrzym przypadku poprzez metodę spadku po gradiencie, którą można opisać macierzowo dla całej warstwy neuronów jako:

$$W_1 = W_0 - \eta \times \frac{\partial E}{\partial Z} \quad (3)$$

gdzie:

- $W_0$  jest macierzą  $(m, n)$  współczynników perceptronów warstwy, a  $W_1$  jest jej nową postacią
- $\eta$  jest współczynnikiem *learningrate* kontrolującym tempo uczenia
- $\frac{\partial E}{\partial Z}$  jest pochodną z sygnału błędu po macierzy wynikowej  $S$  danej warstwy. Sygnał błędu w przypadku ostatniej warstwy (wyjściowej) jest gradientem funkcji błędu macierzy wynikowej, w przypadku reszty warstw jest on sygnałem błędu pochodzącym z poprzednio aktualizowanej w procesie propagacji wstecz warstwy wyznaczonym poprzez:

$$E_1 = -\frac{\partial E_0}{\partial S} \quad (4)$$

gdzie:

- $E_0$  jest sygnałem błędu zwracany przez daną warstwę
- $\frac{\partial E}{\partial S}$  jest pochodną cząstkową z sygnału błędu, który otrzymała ta warstwa od warstwy poprzedniej w procesie propagacji wstecz, lub w przypadku warstwy wyjściowej gradientem funkcji straty dla macierzy wyjściowej tej warstwy

## 2.2.2 Sieć konwolucyjna

Sieć konwolucyjna jest odmianą sieci neuronowej, w której stosuje się warstwy konwolucyjne. W takich warstwach każdy neuron zamiast nakładać na zbiór parametrów funkcję, nakłada na nie filtr, którego wagi są współczynnikami neuronu. Filtr może być w postaci wektora, małej macierzy kwadratowej, lub kilku macierzy w zależności od tego czy interpretujemy dane wejściowe jako wektor, powierzchnię czy przestrzeń punktów. Odpowiednio wytrenowana sieć konwolucyjna jest w stanie skutecznie wykrywać i wzmacniać poprzez nakładanie filtrów istotne cechy danych, które następnie mogą posłużyć jako wejście dla warstwy zwykłych perceptronów, które dzięki temu wyszczególnieniu kluczowych cech dużo skuteczniej poradzą sobie w rozwiązywaniu zadania.

Poza warstwami konwolucyjnymi w sieciach konwolucyjnych stosuje się często Max Pooling. Nie jest to warstwa neuronowa, lecz procedura przetwarzająca obrazy utworzone przez warstwy konwolucyjne

zmniejszająca rozmiar tworzonych przez sieć obrazów poprzez wstawianie w miejsce każdego okna  $n \times n$  wartość maksymalną z tego okna.

Kolejne udoskonalenie modelu polegało na dodaniu procedury Dropout jako jednej z warstw sieci. Dropout ustawia z pewnym prawdopodobieństwem pojedyncze wartości mu przekazane na 0 w ten sposób wykluczając pewne obserwacje sieci z rezultatu i zmniejszając szansę na przeuczenie sieci, co skutkowałoby doskonałym klasyfikowaniem danych, na których model był uczony, lecz nie radzeniem sobie zupełnie z nowymi nie widzianymi przez niego danymi.

### 2.2.3 Sieć grafowa

### 2.2.4 Konwolucyjna sieć transferowa

Z racji, że różne zadania klasyfikacji obrazów nie różnią się od siebie tak drastycznie jak mogłoby się wydawać, popularnym sposobem na tworzenie bardzo dokładnych klasyfikatorów jest korzystanie z sieci transferowych. Są to sieci konwolucyjne korzystające z wytrenowanej już wcześniej na innych problemach klasyfikacji warstw konwolucyjnych. Proces nauczania takiej sieci neuronowej jest o wiele prostszy, gdyż wytrenowania wymaga jedynie mała ilość nowych warstw, które zinterpretują wyniki już gotowych i wytrenowanych w klasyfikacji obrazów warstw konwolucyjnych. W pierwszych etapach nauczania należy pominąć już wytrenowane warstwy konwolucyjne aby usprawnić ten proces. Gdy model jest już dostatecznie dobrze wytrenowany można odblokować trenowanie warstw konwolucyjnych, by przeprowadzić tzw. fine tuning, który pozwoli wyspecjalizować warstwy konwolucyjne w detekcji cech charakterystycznych dla danego problemu.

## 2.3 KNN - K Nearest Neighbours

KNN jest modelem bezparametrycznego uczenia nadzorowanego. Jest to niezwykle prosty model, który nie wymaga procesu uczenia, jednak przypląca to bardzo kosztowną predykcją. Algorytm K Nearest Neighbours polega na obliczeniu odległości wektora danych wejściowych długości  $n$  traktowanego jako punkt w przestrzeni  $n$  wymiarowej i porównaniu go z każdym z pośród wektorów danych wejściowych dostarczonych modelowi w ramach danych treningowych, które to model zapamiętał. Punkty z pośród danych treningowych wraz z ich etykietami następnie są sortowane rosnąco wedle ich odległości od danej wejściowej, której klasyfikację przeprowadza model. Następnie dopierane jest  $K$  pierwszych z pośród punktów, których to odległość od klasyfikowanego punktu jest najniższa i zliczane są wystąpienia różnych typów etykiet pośród wybranych  $K$  punktów. Ta etykieta, która pośród nich powtarza się najczęściej jest odpowiedzią modelu na zadanie klasyfikacji.

## 3 Opis realizacji zadania

### 3.1 Drzewo decyzyjne

Wykorzystując bibliotekę scikit-learn zaimplementowano model drzewa decyzyjnego. W celu znalezienia najlepszych parametrów modelu losowo wybierano wartości z pewnego przedziału i sprawdzano, dla których wartości model osiąga najlepsze wyniki. Przykładowo dla następujących parametrów:

- max\_depth: 19
- min\_samples\_split: 5
- min\_samples\_leaf: 7
- criterion: entropy
- splitter: random

model osiągał skuteczność na danych testowych wynoszącą 0.873.

### 3.2 Las losowy

Podobnie jak w przypadku drzewa decyzyjnego, wykorzystując bibliotekę scikit-learn zaimplementowano model lasu losowego.

Dla następujących parametrów:

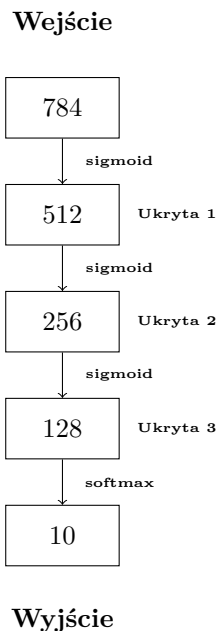
- `n_estimators`: 16
- `max_depth`: 14
- `min_samples_split`: 5
- `min_samples_leaf`: 1
- `criterion`: entropy

model osiągał skuteczność na danych testowych wynoszącą 0.954.

### 3.3 Własna implementacja Wielowarstwowego perceptronu

Z wykorzystaniem biblioteki `numpy` zaimplementowano model sieci neuronowej typu wielowarstwowy perceptron zgodny z powyższą teorią do bazy MNIST-784 zawierającej 70000 obrazów cyfr z przedziału 0-9.

Architektura warstw stworzonej sieci wyglądała następująco:



Za funkcję straty przyjęto funkcję Categorical Crossentropy, learning rate wynosił 0.01. W trakcie trenowania nie korzystano żadnych mechanizmów nieomówionych w części teoretycznej w tym: batchingu czy przetwarzania danych wejściowych poza skalowaniem do zakresu  $[0, 1]$ .

### 3.4 Wielowarstwowy perceptron Tensorflow Keras

Z wykorzystaniem pakietu `tensorflow.keras` utworzono sieć neuronową o architekturze analogicznej do tej zaimplementowanej ręcznie. Zastosowano kilka zmian w postaci:

- Do propagacji wstecz zamiast stochastycznego schodzenia po gradientie użyto algorytmu Adam będącego jego udoskonaleniem uwzględniającym momenty gradientu.
- Zastosowano mechanizm batchingu,  $batch\_size = 128$

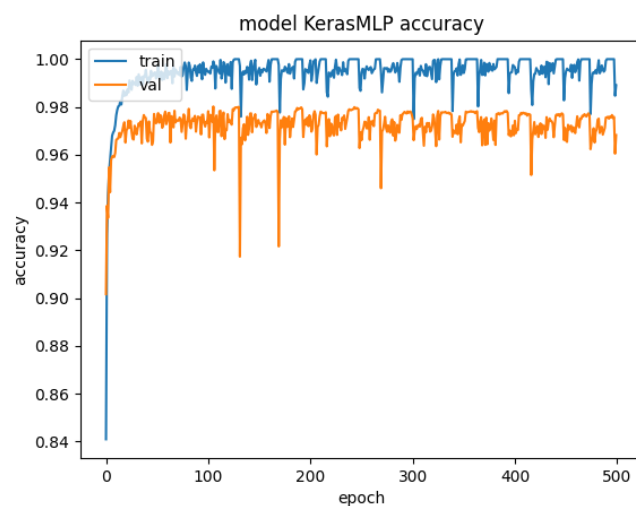
Proces uczenia sieci trwał 500 epok, a jego przebieg przedstawiono na poniższych wykresach:

## Struktura sieci

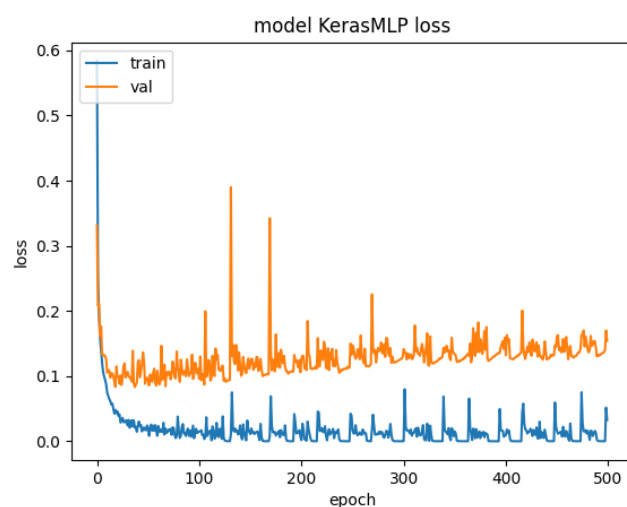
```

Model: "sequential"
-----
Layer (type)                Output Shape         Param #
-----
dense (Dense)                (None, 512)          401920
dense_1 (Dense)              (None, 256)          131328
dense_2 (Dense)              (None, 128)          32896
dense_3 (Dense)              (None, 10)           1290
=====
Total params: 567,434
Trainable params: 567,434
Non-trainable params: 0
-----

```



Rysunek 1: Wykres dokładności w zależności od epoki



Rysunek 2: Wykres wartości funkcji straty w zależności od epoki

## Struktura sieci

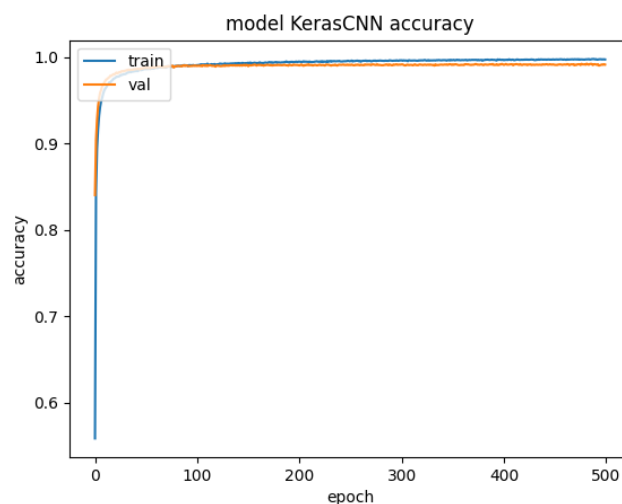
Model: "sequential"		
Layer (type)	Output Shape	Param #
conv2d (Conv2D)	(None, 28, 28, 32)	320
max_pooling2d (MaxPooling2D)	(None, 14, 14, 32)	0
conv2d_1 (Conv2D)	(None, 14, 14, 64)	18496
max_pooling2d_1 (MaxPooling2D)	(None, 7, 7, 64)	0
flatten (Flatten)	(None, 3136)	0
dropout (Dropout)	(None, 3136)	0
dense (Dense)	(None, 10)	31370
Total params: 50,186		
Trainable params: 50,186		
Non-trainable params: 0		

## 3.5 Sieć konwolucyjna Tensorflow Keras

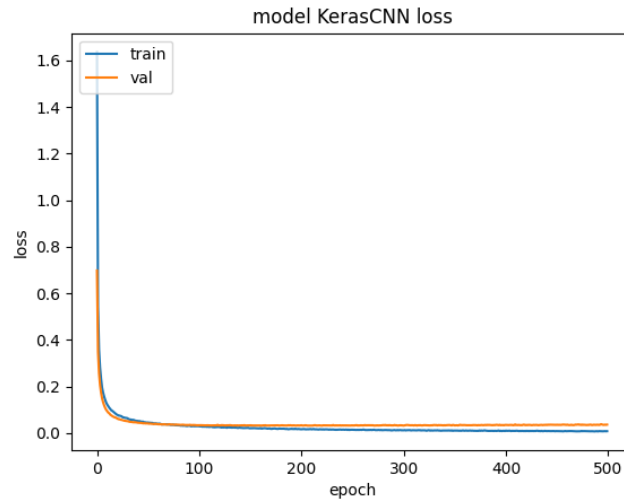
### 3.5.1 Wersja podstawowa

Sieć konwolucyjną zaimplementowano przy użyciu pakietu tensorflow keras. Wszystkie hiperparametry pozostały identyczne z wielowarstwowym perceptronem zaimplementowanym z użyciem tych samych bibliotek. Struktura sieci wyglądała następująco:

Proces uczenia sieci trwał 500 epok, a jego przebieg przedstawiono na poniższych wykresach:



Rysunek 3: Wykres dokładności w zależności od epoki



Rysunek 4: Wykres wartości funkcji straty w zależności od epoki

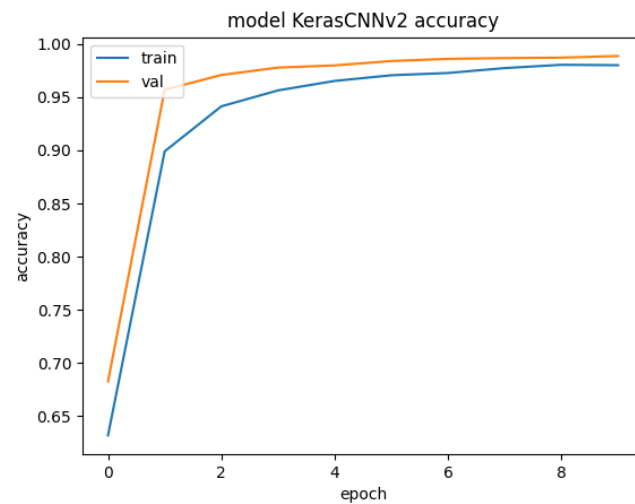
### 3.5.2 Wersja rozszerzona

Dodatkowo dodano więcej warstw konwolucyjnych oraz warstw gęstych.

Natomiast w celu poprawy wydajności trenowania dodano następujące callbacki:

- EarlyStopping - zatrzymujący trenowanie w przypadku braku poprawy dokładności
- ReduceLROnPlateau - zmniejszający współczynnik uczenia wraz z trenowaniem

Proces uczenia sieci skończył się na 10 epokach, a jego przebieg przedstawiono na poniższych wykresach:

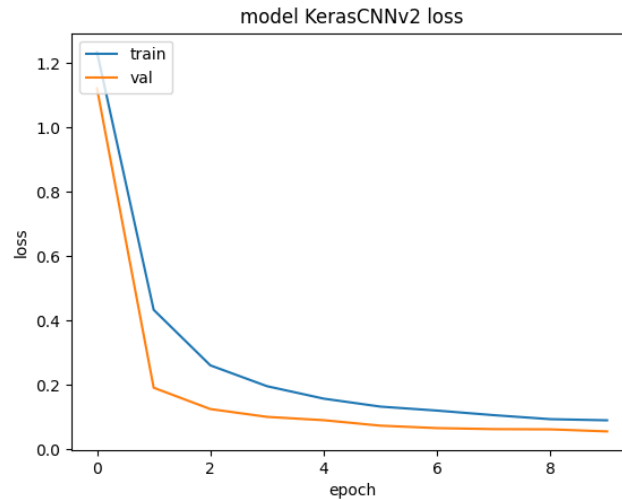


Rysunek 5: Wykres dokładności w zależności od epoki



## Struktura sieci

Model: "sequential"		
Layer (type)	Output Shape	Param #
conv2d (Conv2D)	(None, 24, 24, 32)	832
conv2d_1 (Conv2D)	(None, 20, 20, 32)	25600
batch_normalization (Batch Normalization)	(None, 20, 20, 32)	128
activation (Activation)	(None, 20, 20, 32)	0
max_pooling2d (MaxPooling2D)	(None, 10, 10, 32)	0
dropout (Dropout)	(None, 10, 10, 32)	0
conv2d_2 (Conv2D)	(None, 8, 8, 64)	18496
conv2d_3 (Conv2D)	(None, 6, 6, 64)	36864
batch_normalization_1 (Batch Normalization)	(None, 6, 6, 64)	256
activation_1 (Activation)	(None, 6, 6, 64)	0
max_pooling2d_1 (MaxPooling2D)	(None, 3, 3, 64)	0
dropout_1 (Dropout)	(None, 3, 3, 64)	0
flatten (Flatten)	(None, 576)	0
dense (Dense)	(None, 256)	147456
batch_normalization_2 (Batch Normalization)	(None, 256)	1024
activation_2 (Activation)	(None, 256)	0
dense_1 (Dense)	(None, 128)	32768
batch_normalization_3 (Batch Normalization)	(None, 128)	512
activation_3 (Activation)	(None, 128)	0
dense_2 (Dense)	(None, 84)	10752
batch_normalization_4 (Batch Normalization)	(None, 84)	336
activation_4 (Activation)	(None, 84)	0
dropout_2 (Dropout)	(None, 84)	0
dense_3 (Dense)	(None, 10)	850
=====		
Total params: 275,874		
Trainable params: 274,746		
Non-trainable params: 1,128		
-----		



Rysunek 6: Wykres wartości funkcji straty w zależności od epoki

### 3.6 Sieć transferowa Tensorflow Keras

Sieć konwolucyjną transferową zbudowano z użyciem biblioteki tensorflow keras oraz modelu transferowego MobileNet klasyfikującego obrazy w przestrzeni RGB o rozmiarze przynajmniej  $32 \times 32$ px.

Z powodu rozbieżności rozmiarów obrazów, które wymaga sieć MobileNet i obrazów należących do baz danych MNIST i podobnych konieczny był preprocessing danych wejściowych. Do zastosowanych metod należały:

- skalowanie obrazów  $28 \times 28$ px do rozmiaru  $32 \times 32$ px
- zklonowanie skali szarości na kanały RGB

Dodatkowo by uzyskać jak najlepsze rezultaty na danych nie tylko należących do bazy danych, ale stworzyć model, który spełni zadanie klasyfikacji możliwie tak dobrze jak człowiek zastosowano generowanie nowych danych treningowych w oparciu o dane z bazy z wykorzystaniem:

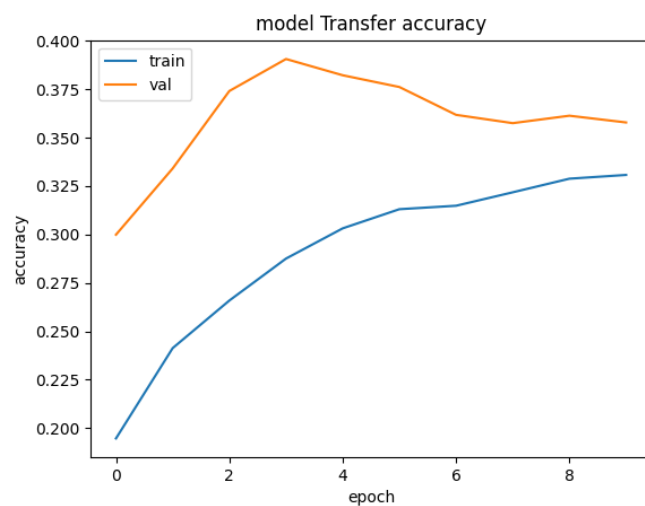
- skalowania zawartości obrazu
- obracania obrazów
- przesuwania obrazów w osiach X i Y

#### 3.6.1 Przed fine-tuningiem

Trenowanie before fine-tuning ustawiono na 10 epok:

## Struktura sieci

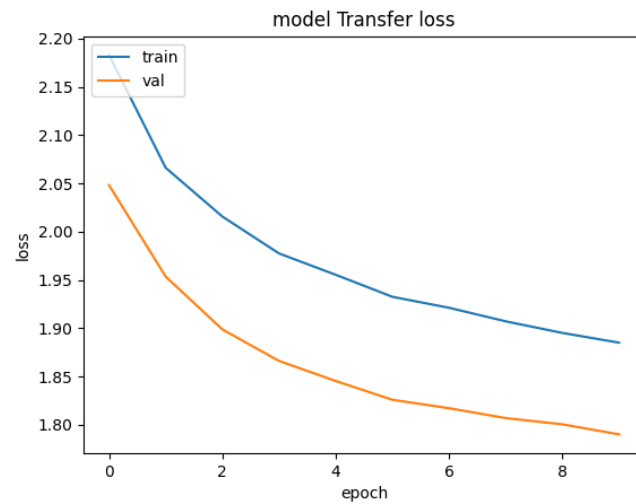
```
Model: "sequential"
-----
Layer (type)                Output Shape                Param #
-----
mobilenet_1.00_224 (Function) (None, 1, 1, 1024)         3228864
flatten (Flatten)           (None, 1024)                0
dropout (Dropout)           (None, 1024)                0
dense (Dense)                (None, 512)                 524800
dense_1 (Dense)              (None, 10)                  5130
=====
Total params: 3,758,794
Trainable params: 529,930
Non-trainable params: 3,228,864
-----
```



Rysunek 7: Wykres dokładności w zależności od epoki

## Struktura sieci

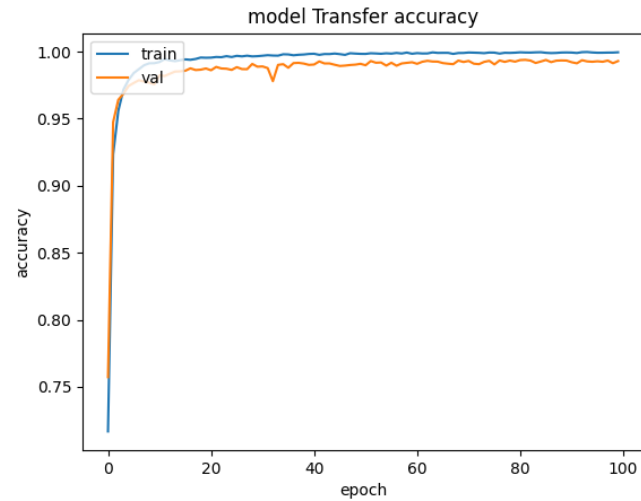
Model: "sequential"		
Layer (type)	Output Shape	Param #
mobilenet_1.00_224 (Functional)	(None, 1, 1, 1024)	3228864
flatten (Flatten)	(None, 1024)	0
dropout (Dropout)	(None, 1024)	0
dense (Dense)	(None, 512)	524800
dense_1 (Dense)	(None, 10)	5130
=====		
Total params: 3,758,794		
Trainable params: 3,736,906		
Non-trainable params: 21,888		
-----		



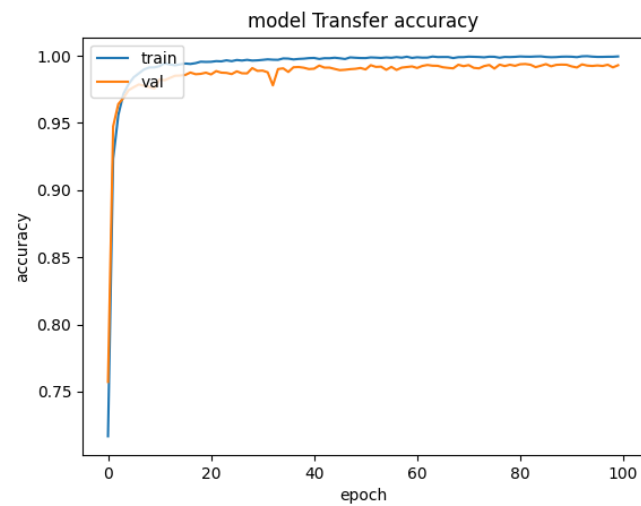
Rysunek 8: Wykres wartości funkcji straty w zależności od epoki

### 3.6.2 Fine-tuning

Trenowanie fine-tuning ustawiono na 100 epok:



Rysunek 9: Wykres dokładności w zależności od epoki



Rysunek 10: Wykres wartości funkcji straty w zależności od epoki

### 3.7 Sieć grafowa

### 3.8 K Nearest Neighbours

Model KNN został zaimplementowany z użyciem biblioteki numpy. Za parametr K wybrano wielokrotność liczności zbioru etykiet, 20.

## 4 Wyniki

### 4.1 Drzewo losowe

### 4.2 Las losowy

### 4.3 Własna implementacja Wielowarstwowego perceptronu

### 4.4 Wielowarstwowy perceptron Tensorflow Keras

### 4.5 Sieć konwolucyjna Tensorflow Keras

Sieć konwolucyjna osiągnęła najwyższą celność na zbiorze testowym równą 0.989 po sześciu epochach nie wykazując dużych zmian przy dalszym trenowaniu. Jest to wynik dużo lepszy niż w przypadku zwykłego wielowarstwowego perceptronu. Dodatkowo proces uczenia tej sieci przebiegał o wiele szybciej niż wielowarstwowego perceptronu dzięki warstwom konwolucyjnym, które ograniczyły ilość potrzebnych warstw gęstych do jednej.

### 4.6 Sieć transferowa Tensorflow Keras

### 4.7 Sieć grafowa

### 4.8 K Nearest Neighbours

Z powodu długiego czasu predykcji modelu KNN testy wykonano na 10% zbioru testowego, co odpowiada 1400 danych testowych. W tej sytuacji model KNN cechował się accuracy na poziomie 0.96

Z powodu swojej konstrukcji model KNN sprawował się niemal perfekcyjnie dla zbioru danych testowych, które przypominały w znacznym stopniu dane treningowe. Niestety dla ręcznych rysunków nienależących do bazy MNIST-784 model działał dużo gorzej od sieci konwolucyjnej, która nie tylko porównuje punkt z danymi treningowymi, lecz wynajduje schematy i cechy obrazów, które decydują o przynależności do danej klasy. Należy również wspomnieć, że z powodu nieporównywalnie większej ilości obliczeń koniecznych do wykonania przez model KNN w porównaniu do dowolnego innego modelu, podczas gdy proces weryfikacji na 14000 danych testowych sieci neuronowych trwał zaledwie kilka sekund, weryfikacja modelu KNN zajęła ponad 10 minut dla 1400 danych.

## 5 Dyskusja

Najprawdopodobniej albo... albo szyny, które nie były... nie są równe, albo po prostu no, tak jak mówiłam we wcześniejszym wejściu, ee, yy, szyny... szyny były złe... a podwozie... podwozie... podwozie... podwozie też było złe. [1]

## Źródła

- [1] Wikipedia, *Szyny były złe*  
[https://pl.wikipedia.org/wiki/Szyny\\_by%C5%82y\\_z%C5%82e](https://pl.wikipedia.org/wiki/Szyny_by%C5%82y_z%C5%82e)
- [2] Super strona, *Jest super*  
<https://www.example.com>
- [3] Marek Kubale, *Łagodne wprowadzenie do algorytmów*, 2022