Feuille 3,
Courbes algébriques
Ensembles Algébriques Affines, Dimension, Singularités

Exercice 1 Montrer qu'une variété affine est de dimension 0 si et seulement si elle est un point.

Exercice 2 Pour chaque entier $d \in \{0, 1, 2, 3\}$, trouver $F_1, F_2, F_3 \in \mathsf{k}[X, Y, Z]$ tels que $V(F_1, F_2, F_3)$ soit une variété affine de dimension d.

Exercice 3 Dans les cas suivants, calculer une base de transcendence de $\mathsf{k}(V)$ sur k. En déduire la dimension de V.

1. $V_1 = V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^2$.
2. $V_1 = V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^3$.
3. $V_1 = V(X - Y, X + Y) \subseteq \mathbb{A}^2$.
4. $V_1 = V(X - Y, Z) \subseteq \mathbb{A}^3$.
5. $V_1 = V(X^2 - Y^5) \subseteq \mathbb{A}^2$.

Exercice 4 Soient $V = V(X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3) \subseteq \mathbb{A}^3$ et $a = (0, 0, 0) \in V$. Calculer la dimension sur k de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$.

Exercice 5 Trouver les points singuliers des variétés affines suivantes.

1. $V = V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$.
2. $V = V(X^2 - Y^4) \subseteq \mathbb{A}^2$.
3. $V = V(Y^4) \subseteq \mathbb{A}^2$.
4. $V = V(X - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - Y) \subseteq \mathbb{A}^3$.
5. $V = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathsf{k}\ \} \subseteq \mathbb{A}^3$.

Exercice 6 Montrer que deux variétés affines isomorphes ont la même dimension. En déduire que $V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^2$ et $V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^3$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 7 Montrer que l'ensemble algébrique $V(X^2 - Y, Y^2 - Z) \subseteq \mathbb{A}^3$ est une courbe lisse de deux facons.

Exercice 8 Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2. Soit $F \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène non nul de degré 2.

1. Montrer qu'à un changement de variables près, il existe $1 \leq r \leq n$ tel que

$$F = X_1^2 + \ldots + X_r^2.$$

2. Montrer que $V(F)$ est irréductible si et seulement si $r \geq 3$.
3. Déterminer le lieu singulier de $V(F)$ pour $F = X_1^2 + \ldots + X_r^2$.

Exercice 9 Soient $V \subseteq \mathbb{A}^n$ et $W \subseteq \mathbb{A}^m$ deux variétés affines.

1. Montrer que $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ est une variété affine.
2. Montrer que $\mathsf{k}[V \times W]$ est isomorphe á $\mathsf{k}[V] \otimes_{\mathsf{k}} \mathsf{k}[W]$.
3. Déduire que si k est un corps algébriquement clos et A et B sont des k-algébres de type fini, alors $A \otimes_{\mathsf{k}} B$ est une k-algèbre de type fini.
4. Montrer que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ n'est pas un domaine intégre.

Exercice 10 Donner un exemple de fermé de $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ qui n'est pas le produit d'un fermé de $\mathbb{A}^1$ par un fermé de $\mathbb{A}^1$.

Exercice 11 Soit $\varphi : V \to W$ un morphisme d'ensembles algébriques. Montrer que φ est continue par rapport à la topologie de Zariski de V et W.

Exercice 12 Soit $E \subseteq \mathbb{A}^n$ un sous-ensemble quelconque. Montrer que tout ensemble algébrique Y de $\mathbb{A}^n$ tel que $E \subseteq Y$ contient $V(I(E))$. Conclure que l'adhérence $\overline{E}$ de E dans $\mathbb{A}^n$ est $V(I(E))$.