Exercices

Alexandre Guillemot

26 septembre 2022

Exercice 10, feuille 1, question 3

3) Tout d'abord, si le corps est fini, alors $V(Y^2 - X^3)$ contiens $(0,0)$ et $(1,1)$, donc n'est pas irréductible. Supposons maintenant que $|k| = \infty$, montrons que

$$V(Y^2 - X^3) = \{(t^2, t^3) \in k^2 \mid t \in k\} =: V$$

Si $(x,y) \in V$, alors $\exists t \in k \mid (x,y) = (t^2, t^3)$. Et alors $y^2 - x^3 = t^6 - t^6 = 0$, donc $(x,y) \in V(Y^2 - X^3)$. Réciproquement, si $(x,y) \in V(Y^2 - X^3)$, alors $y^2 = x^3$ dans k. Et alors si $x = 0$, alors $y = 0$ et $(0,0) \in V$. Sinon,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = x$$
$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = y$$

donc en posant $t = y/x$, $(x,y) = (t^2, t^3) \in V$.
Ensuite, montrons que $I(V(Y^2 - X^3)) = (Y^2 - X^3)$: remarquons dans un premier temps que pour tout $P \in k[T]$, $P = 0 \iff P(t) = 0, \forall t \in k$ du fait que $|k| = \infty$. Ainsi prouver $(Y^2 - X^3) = I(V(Y^2 - X^3))$ reviens à prouver que le noyau de

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & k[X,Y] & \to & k[T] \\ & P & \mapsto & P(T^2, T^3) \end{array}$$

vaut $(Y^2 - X^3)$. En effet, $P \in I(V(Y^2 - X^3)) \iff P(t^3, t^3) = 0, \forall t \in k \iff P(T^2, T^3) = 0$ au vu de la remarque faite précédemment, donc $\ker \varphi = I(V(Y^2 - X^3))$. Il est clair que $(Y^2 - X^3) \subseteq \ker \varphi$. Réciproquement, soit $P \in \ker \varphi$, réalisons la division euclidienne de P par $Y^2 - X^3$ dans $k[X][Y]$:

$$P(X,Y) = Q(X,Y)(Y^2 - X^3) + R(X,Y)$$

où $\deg_Y R \leq 1$. Ecrivons alors $R(X,Y) = a(X)Y + b(X)$, montrons que a et b sont nuls. Développons alors a et b : si on écrit

$$a(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$$
$$b(X) = \sum_{i \geq 0} b_i X^i$$

on a

$$\begin{aligned} R(T^2, T^3) &= a(T^2)T^3 + b(T^2) \\ &= \sum_{i \geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{i \geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{j \geq 0} c_j T^j \end{aligned}$$

où

$$c_j = \begin{cases} a_i & \text{si } j = 2i+3 \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ b_i & \text{si } j = 2i \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Les coefficients de $a(T^2)T^3$ n'intéragissent pas avec ceux de $b(T^2)$, car devant des monômes de degré impair alors que ceux de $b(T^2)$ n'aparaissent que devant des monômes de degré pair). Ainsi comme $P \in \ker \varphi$, $0 = \varphi(R) = R(T^2, T^3)$ et donc $a_i, b_i = 0$ pour tout $i \geq 0$. Finalement, $a, b = 0$ et donc $R = 0$, d'où $P \in (Y^2 - X^3)$. Ainsi on a bien égalité $I(V(Y^2 - X^3)) = (Y^2 - X^3)$, et $V(Y^2 - X^3)$ est irréductible puisque

$$k[T] \simeq K[X,Y]/(Y^2, X^3)$$

par le point précédent, et $k[T]$ est intègre.

Exercice 15, feuille 1

Soient $V_1 \subseteq A_k^n$, $V_2 \subseteq A_k^m$ des ensembles algébriques affines. Alors il existe $P_1, \cdots, P_r \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$ et $Q_1, \cdots, Q_s \overset{\text{id}}{\subseteq} k[y_1, \cdots, y_m]$ tels que $V_1 = V(P_1, \cdots, P_r)$ et $V_2 = V(Q_1, \cdots, Q_s)$.

Maintenant par propriété universelle des anneaux de polynômes, nous disposons de morphismes

$$\begin{aligned}\varphi &: k[x_1, \cdots, x_n] \hookrightarrow k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m] \\ \psi &: k[y_1, \cdots, y_m] \hookrightarrow k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m]\end{aligned}$$

Alors montrons que $V_1 \times V_2 = V(\varphi P_1, \cdots, \varphi P_r, \psi Q_1, \cdots, \psi Q_s) =: W$. Remarquons que si $(x, y) \in \mathbb{A}_k^{n+m}$, alors $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\varphi P_i(x, y) = P_i(x)$, par commutativité de

$$\begin{tikzcd} k[x_1, \cdots, x_n] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_x"'] & k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n] \arrow[d, "\mathrm{ev}_{(x,y)}"] \\ & k \end{tikzcd}$$

(au vu de la naturalité de $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Sets}}(S, k) \simeq \mathbf{Hom}_{k-\mathbf{CAlg}}(k[S], k)$). De même, $\psi Q_i(x, y) = Q_i(y)$ pour tout $i \in [\![1, s]\!]$. Mais alors

$$\begin{aligned}(x, y) \in V_1 \times V_2 &\iff \forall 1, 1 \leq i, j \leq r, s,\ P_i(x) = 0 \wedge Q_j(y) = 0 \\ &\iff \forall 1, 1 \leq i, j \leq r, s,\ \varphi P_i(x, y) = 0 \wedge \psi Q_j(x, y) = 0 \\ &\iff (x, y) \in W\end{aligned}$$

Exercice 1, feuille 2

1) Montrons que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$: en passant au complémentaire, il faut montrer que $V(fg) = V(f) \cup V(g)$, ce que l'on sait vrai d'après le cours.

2) Soit $U = \mathbb{A}^n \backslash V(I)$ un ouvert de $\mathbb{A}^n$, avec $I \overset{\mathrm{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. Alors

$$\begin{aligned}V(I) &= V\left(\bigcup_{f \in I} (f)\right) \\ &= \bigcap_{f \in I} V((f))\end{aligned}$$

donc finalement

$$U = \bigcup_{f \in I} D(f)$$

en passant au complémentaire.

3) $D(f) = \emptyset \iff V((f)) = \mathbb{A}_k^n \iff \forall x \in k^n, f(x) = 0 \iff f = 0$, la dernière équivalence provenant du fait que $|k| = \infty$ (résultat que l'on a prouvé par récurrence en td).

4) On utilise les questions précédentes : comme les ensembles $D(f)$ forment une base pour la topologie de $\mathbb{A}^n$ (question 2), et que $U, V \neq \emptyset$, pour tout $x \in U$, $y \in V$, il existe $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tels que $x \in D(f) \subseteq U$ et $y \in D(g) \subseteq V$. Maintenant $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ (question 1) mais alors si $D(f) \cap D(g) = \emptyset$, alors $fg = 0$ (question 3) donc $f = 0$ ou $g = 0$ et donc $D(f) = \emptyset$ ou $D(g) = \emptyset$, absurde. Ainsi, $D(f) \cap D(g)$ est non vide, et donc $U \cap V \neq \emptyset$.