Courbes algébriques - TD

Alexandre Guillemot

6 octobre 2022

Table des matières

Chapitre 1

TD1

1.1 Exercice 1

Soit $V \subset \mathbb{A}^1$ un souos ensemble algébrique, alors il existe $M \subseteq k[x]$ tq $V = V(M)$. Maintenant $V(M) = V((M))$ et comme $k[x]$ est principal, il existe $P \in k[x]$ tq $V = V(P)$. Remarquons alors que $P \neq 0$ car sinon $V(P) = V(0) = \mathbb{A}^1$. Mais alors $V(P) = \{a \in \mathbb{A}^1 \mid P(a) = 0\}$ donc c'est l'ensemble des racines, qui est un ensemble fini (de cardinal inférieur à $\deg P$).

1.2 Exercice 2

Vérifions la double inclusion : L'inclusion $\mathfrak{m}_a \subseteq \ker ev_a$ est triviale. Réciproquement, prenons $P \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tq $P(a) = 0$. Alors par divisions euclidiennes successives, on peut écrire

$$P(x_1, \cdots, x_n) = Q_1(x_1, \cdots, x_n)(x_1 - a_1) + \cdots + Q_n(x_1, \cdots, x_n)(x_n - a_n) + r$$

avec r un polynôme constant. Alors $r = 0$ puisque $P(a) = 0$ et ainsi $P \in \mathfrak{m}_a$.

1.3 Exercice 3

Soit k un corps infini. On montre par récurrence sur n que $I(\mathbb{A}_k)^n = 0$:

1. Si $n = 1$, alors $I(\mathbb{A}_k^n) = \{f \in k[x] \mid \forall a \in k,\ f(a) = 0\}$. Mais alors soit $f \in I(\mathbb{A}_k^n)$, f a une infinité de racines, donc f est forcément nul (tout polynôme g non nul ayant au maximum $\deg g$ racines).
2. Soit $f \in I(\mathbb{A}_k^n)$. Alors regardons f comme un élément de $k[x_1, \cdots, x_{n-1}][x_n]$:

$$f = \sum Q_i x_n^i$$

avec $Q_i \in k[x_1, \cdots, x_{n-1}]$. Maintenant fixons $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$, alors pour tout $t \in k$

$$f(a_1, \cdots, a_{n-1}, t) = 0$$

donc le polynome $\sum Q_i(a_1, \cdots, a_n)x_n^i \in k[x_n]$ est nul (on utilise l'initialisation). Ainsi chaque $Q_i(a_1, \cdots, a_n)$ est nul, et ceci pour tout $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$. Ainsi par hypothèse de récurrence les $Q_i \in k[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ sont nuls et alors f est nul, donc $I(\mathbb{A}_k^n) = 0$.

1.4 Exercice 4

$\supseteq$ est trivial. Réciproquement, soit $f \in \mathbb{F}_q[x]$ tel que $f(a) = 0$, pour tout $a \in \mathbb{F}_q$. Remarquons alors que $x^q - x$ s'annule sur tout $\mathbb{F}_q$ et a au maximum q racines, donc doit forcément s'écrire $x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q}(x - a)$. Maintenant, on peut factoriser f en

$$f = g \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a) = g(x^q - x) \in (x^q - x)$$

et donc l'inclusion réciproque est prouvée.

1.5 Exercice 5

1) Montrons que $V = V(x^2 + y2 - 1)$: il est clair que $V \subseteq V(x^2 + y^2 - 1)$. Réciproquement, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a^2 + b^2 - 1 = 0$. Alors $a \in [-1, 1]$ donc il existe $t \in \mathbb{R} \mid x = \cos t$. Et alors $b^2 = 1 - (\cos t)^2 = (\sin t)^2$ donc $b = \pm \sin t$. Si $b = \sin t$, alors on a terminé, sinon posons $t' = -t$, alors $a = cost'$ et $b = \sin t'$ et donc $(a, b) \in V$.

2) Supposons que V_2 est algébrique, disons $V_2 = V(I)$ pour $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x, y]$. Alors prenons $P \in I$, on a $P(t, \sin t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mais alors regardons P comme un polynôme de $k[x][y]$

$$P = \sum Q_i y^i$$

avec $Q_i \in k[x]$. Alors fixons $t \in \mathbb{R}$, alors $\sum Q_i(t)y^i \in k[y]$ admet une infinité de racines, puisque $\sin(t+2k\pi)$ sont des racines, pour $k \in \mathbb{Z}$: en effet, $P(t, \sin(t+2k\pi)) = P(t, \sin t) = 0$. Ainsi $\sum Q_i(t)y^i = 0 \in k[y]$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q_i(t) = 0$ et donc $Q_i = 0 \in k[x]$, et ainsi $P = 0$. Mais alors $I = 0$, donc $V_2 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ absurde.

3) Supposons que $V_3 = V(I)$. Alors soit $P \in I$, alors $P(t, \mathrm{e}^t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Supposons que P est non nul, alors regardons P comme un élément de $k[x][y]$

$$P = \sum_{n=1}^{k} Q_n y^n$$

où $Q_k \neq 0$. Alors

$$0 = \sum_{n=1}^{k} Q_n(t) e^{nt} \iff 0 = \sum_{n=1}^{k} Q_n(t) e^{(n-k)t}$$

et alors en passant à la limite, par croissances comparées on obtiens que $Q_n(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$ et donc $Q_n = 0 \in k[x]$ absurde. Ainsi $P = 0$, donc $V_3 = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, absurde.

1.6 Exercice 6

1) Il est clair que $V_1 = V(y - x^2, z - x^3)$.

2) Montrons que $V_2 = V(xy - 1)$: $\subseteq$ est claire. Réciproquement, soit $(a, b) \in V(xy - 1)$, alors $ab = 1$. Maintenant a et b sont non nuls, et alors $b = 1/a$, donc $(a, b) = (a, 1/a) \in V_2$.

3) Remarquons dans un premier temps que

$$V_3 = \{(t, (t+1)^2 - 1) \in \mathbb{A}^2 \mid t \in k\} = \{(t, t^2 + 2t) \in \mathbb{A}^2 \mid t \in k\}$$

Ainsi il est clair que $V_3 = V(x^2 + 2x - y)$.

1.7 Exercice 7

1) Soit $(x, y) \in V(I)$. Alors $xy^3 = 0$ et $x^2 + y^2 = 0$. Alors

1. Soit $x = 0$ et alors $y^2 = 0$ donc $y = 0$
2. Soit $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

et ainsi $V(I) = \{0\}$. Soit $(x, y) \in V(J)$, alors $x^2 = 0$ et $y^3 = 0$, donc $x = 0$ et $y = 0$. AInsi $V(J) = \{0\}$.

2) $I(V(I)) = I(V(J)) = (x, y)$.

1.8 Exercice 8

1) Comme k est un corps infini, $I(V) = 0$ (cf 1.3). On a donc $V(I(V)) = \mathbb{A}^2$.

2) Comme $V \neq V(I(V))$, V n'est pas un ensemble algébrique affine.

1.9 Exercice 9

1) Oui, vu qu'un singleton n'a aucun sous ensemble propre.

2) Non. Une paire de points et l'union de deux points qui sont des sous-ensembles algébriques propres de cette paire de points.

3) Non : d'après le cours, $V(xy) = V(x) \cup V(y)$.

4) Si le corps n'est pas infini, alors $V(X-Y) = V((X-Y)^2)$ est un union fini disjoint de points, donc n'est pas irréductible. Si le corps est infini, montrons que $I(V(x-y)) = I(V((x-y)^2)) = (x-y)$: $\supseteq$ est donné directement par le cours. Réciproquement, soit $P \in I(V((x-y)^2))$, alors $V((x-y)^2) = \{(t,t) \in \mathbb{A}^2 \mid t \in k\}$ et donc $P(t,t) = 0$ pour tout $t \in k$. Ainsi si on considère P en tant qu'élément de $k[x][y]$ puis qu'on réalise la division euclidienne de celui-ci par $x-y$, alors on obtiens

$$P = Q_1(x,y)(x-y) + R(x,y)$$

et R s'identifie à un polynôme de $k[x]$ vu que $\deg_Y R < 1$. Mais alors $|k| = \infty$ et $R(t) = 0$ pour tout $t \in k$, donc finalement $R = 0$ et $P \in (x,y)$. Pour conclure, remarquons (au vu de ce que l'on vient de faire) que $(x-y)$ est le noyau de

$$\begin{array}{ccc} k[x,y] & \to & k[t] \\ P & \mapsto & P(t,t) \end{array}$$

donc finalement $k[x,y]/(x-y) = k[t]$ qui est intègre donc $(x-y)$ est premier, prouvant l'irréductibilité de $V(x-y) = V((x-y)^2)$.

5) $V(y-x^2) = \{(t,t^2) \mid t \in k\}$. Montrons alors que $I(V(y-x^2)) = (y-x^2)$ (si $|k| = \infty$). Si k est fini, alors $V(y-x^2)$ contiens au moins deux points ($(0,0)$ et $(1,1)$ par exemple) et n'est donc pas irréductible. Sinon, prouver l'égalité souhaitée revient à prouver que le noyau de

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & k[x,y] & \to & k[t] \\ & P & \mapsto & P(t,t^2) \end{array}$$

vaut $(y-x^2)$ (du fait que dans un corps infini un polynome est nul si et seulement si sa fonction polynomiale associée est nulle). Mais alors soit $P \in \ker\varphi$, on réalise la division euclidienne de P par $y-x^2$ dans $k[x][y]$:

$$P = Q(y-x^2) + R(x,y)$$

mais R s'identifie à un polynôme de $k[x]$ puisque $\deg_y R < 1$. Mais alors $R(a) = 0$ pour tout $a \in k$ et comme $|k| = \infty$, $R = 0$ et donc $P \in (y-x^2)$. L'inclusion réciproque est triviale. Finalement, on a bien $\ker\varphi = (y-x^2)$ et donc $I(V(y-x^2)) = (y-x^2)$ est un idéal premier, du fait que $k[x,y]/(y-x^2) \simeq k[t]$ qui est un anneau intègre.

6) 1. $V(x^2-y^2) = V((x-y)(x+y)) = V(x-y) \cup V(x+y)$, donc $V(x^2-y^2)$ n'est pas irréductible en caractéristique différente de 2. En caractéristique 2,

$$V(x^2-y^2) = V(x^2+y^2) = V((x+y)^2) = V(x+y)$$

est irréductible si et seulement si $|k| = \infty$.

2. On sépare en deux cas
   (a) S'il existe $i \in k$ tel que $i^2 = -1$, alors $V(x^2+y^2) = V(x-iy) \cup V(x+iy)$ et ces sous-ensembles sont popres si char $k \neq 2$. En caractéristique 2, $V(x^2+y^2) = V((x+y)^2) = V(x+y)$ qui est irréductible si $|k| = \infty$, et réductible sinon.
   (b) Si -1 n'est pas un carré dans k, alors $V(x^2+y^2) = \{0\}$: soit $(a,b) \in V(x^2+y^2)$, alors $a^2+b^2 = 0$. Alors si a est non nul,

$$b^2 = -a^2 \iff \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -1$$

absurde. Ainsi $a = 0$ et donc $b = 0$. $V(x^2+y^2)$ est donc irréductible dans ce cas.

7) Montrons que $V(y^4-x^2, y-x) = \{\pm(1,1)\}$: si $(a,b) \in V(y^4-x^2, y-x)$ alors $a = b$ et $a^2 = b^4$. Ainsi $a^2 = a^4$ et donc $a^2 = 1$, donc soit $a = 1$ et donc $b = 1$, soit $a = -1$ et donc $b = -1$. Ainsi si la caractéristique est différente de 2, c'est un ensemble réductible, sinon il est irréductible car composé d'un seul point.

1.10 Exercice 10

1) Montrons que $I(V(x^3)) = (x)$: clairement, $V(x^3) = \{(0,b,c) \in \mathbb{A}^3 \mid\}$. Maintenant soit $P \in I(V(x^3))$, alors $P(0,b,c) = 0$ pour tous $b,c \in k$. Mais alors en réalisant la division euclidiennez de P par x dans $k[y,z][x]$, on voit facilement que $P \in (x)$ (dans le cas où $|k| = \infty$). Finalement, $k[x,y,z]/(x) \simeq k[y,z]$ qui est un anneau intègre, donc $V(x^3)$ est irréductible.

2) aled

3) Tout d'abord, si le corps est fini, alors $V(Y^2-X^3)$ contiens $(0,0)$ et $(1,1)$, donc n'est pas irréductible. Supposons maintenant que $|k| = \infty$, montrons que

$$V(Y^2-X^3) = \{(t^2,t^3) \in k^2 \mid t \in k\} =: V$$

Si $(x,y) \in V$, alors $\exists t \in k \mid (x,y) = (t^2,t^3)$. Et alors $y^2 - x^3 = t^6 - t^6 = 0$, donc $(x,y) \in V(Y^2-X^3)$. Réciproquement, si $(x,y) \in V(Y^2-X^3)$, alors $y^2 = x^3$ dans k. Et alors si $x = 0$, alors $y = 0$ et $(0, 0) \in V$. Sinon,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = x$$
$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = y$$

donc en posant $t = y/x$, $(x, y) = (t^2, t^3) \in V$.
Ensuite, montrons que $I(V(Y^2 - X^3)) = (Y^2 - X^3)$: remarquons dans un premier temps que pour tout $P \in k[T]$, $P = 0 \iff P(t) = 0, \forall t \in k$ du fait que $|k| = \infty$. Ainsi prouver $(Y^2 - X^3) = I(V(Y^2 - X^3))$ reviens à prouver que le noyau de

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & k[X,Y] & \to & k[T] \\ & P & \mapsto & P(T^2, T^3) \end{array}$$

vaut $(Y^2 - X^3)$. En effet, $P \in I(V(Y^2 - X^3)) \iff P(t^3, t^3) = 0, \forall t \in k \iff P(T^2, T^3) = 0$ au vu de la remarque faite précédemment, donc $\ker \varphi = I(V(Y^2 - X^3))$. Il est clair que $(Y^2 - X^3) \subseteq \ker \varphi$. Réciproquement, soit $P \in \ker \varphi$, réalisons la division euclidienne de P par $Y^2 - X^3$ dans $k[X][Y]$:

$$P(X, Y) = Q(X, Y)(Y^2 - X^3) + R(X, Y)$$

où $\deg_Y R \leq 1$. Ecrivons alors $R(X, Y) = a(X)Y + b(X)$, montrons que a et b sont nuls. Développons alors a et b : si on écrit

$$a(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$$
$$b(X) = \sum_{i \geq 0} b_i X^i$$

on a

$$\begin{aligned} R(T^2, T^3) &= a(T^2)T^3 + b(T^2) \\ &= \sum_{i \geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{i \geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{j \geq 0} c_j T^j \end{aligned}$$

où

$$c_j = \begin{cases} a_i & \text{si } j = 2i+3 \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ b_i & \text{si } j = 2i \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Les coefficients de $a(T^2)T^3$ n'intéragissent pas avec ceux de $b(T^2)$, car devant des monômes de degré impair alors que ceux de $b(T^2)$ n'aparaissent que devant des monômes de degré pair). Ainsi comme $P \in \ker \varphi$, $0 = \varphi(R) = R(T^2, T^3)$ et donc $a_i, b_i = 0$ pour tout $i \geq 0$. Finalement, $a, b = 0$ et donc $R = 0$, d'où $P \in (Y^2 - X^3)$. Ainsi on a bien égalité $I(V(Y^2 - X^3)) = (Y^2 - X^3)$, et $V(Y^2 - X^3)$ est irréductible puisque $K[X,Y]/(Y^2, X^3)$ s'injecte dans $k[T]$ qui est lui-même intègre.

1.11 Exercice 14

1) Il est clair que $V = V(X_2 - X_1^2, \cdots, X_n - X_1^n)$.

2) Montrons que $I(V) = (X_2 - X_1^2, \cdots, X_n - X_1^n)$. $\supseteq$ est claire, montrons l'inclusion réciproque : soit $P \in I(V)$, alors on peut écrire $P = \sum_{i=2}^n Q_i(X_i - X_1^i) + R$ où $R \in k[X_1]$. Maintenant pour tout $t \in k$, $P(t, t^2, \cdots, t^n) = R(t) = 0$ et donc comme k est de caractéristique nulle, il est infini et $R = 0$. Finalement $P \in (X_2 - X_1^2, \cdots, X_n - X_1^n)$ et on a égalité. Finalement le noyau du morphisme

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \cdots, X_n] & \to & K[T] \\ X_i & \mapsto & T^i \end{array}$$

est de noyau $(X_2 - X_1^2, \cdots, X_n - X_1^n) = I(V)$, et est surjectif, donc $k[V] \simeq k[T]$

3) $k[V]$ est intègre, donc V est irréductible.

1.12 Exercice 15

Soient $V_1 \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $V_2 \subseteq \mathbb{A}_k^m$ des ensembles algébriques affines. On note

$$\begin{aligned} k[x_1, \cdots, x_n] &=: A \\ k[y_1, \cdots, y_m] &=: B \\ k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m] &=: C \end{aligned}$$

Alors il existe $I \overset{\text{id}}{\subseteq} A$ et $J \overset{\text{id}}{\subseteq} B$ tels que $V_1 = V(I)$ et $V_2 = V(J)$. Considérons le morphisme

$$\varphi := p_I \otimes p_J : A \otimes_k B \to A/I \otimes_k B/J \tag{1.1}$$

Où $p_I : A \to A/I$, $p_J : B \to B/J$ sont les projections canoniques des quotients respectifs. On sait que le morphisme $A \otimes_k B \to C$ induit par les morphismes canoniques $i_1 : A \to C$, $i_B : B \to C$ (issus de la propriété universelle des anneaux de polynômes) est un isomorphisme ($\sum_{finie} P_i \otimes Q_i$ est envoyé sur $\sum_{finie} i_A(P_j) i_B(Q_j)$). Une dernière remarque est qu'au vu de la naturalité de $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Sets}}(S, k) \simeq \mathbf{Hom}_{k-\mathbf{CAlg}}(k[S], k)$, nous avons la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_a"'] & C \arrow[d, "\mathrm{ev}_{(a,b)}"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathrm{ev}_b"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Pour terminer l'exercice, montrons que $V(\ker \varphi) = V_1 \times V_2$ (où $\ker \varphi$ est vu comme un idéal de C par l'isomorphisme naturel donné précédemment). Prenons $(a, b) \in V(\ker \varphi)$, puis soient $P \in I$, $Q \in J$. Alors $P \otimes 1, 1 \otimes Q \in \ker \varphi$ et donc

$$0 = \mathrm{ev}_{(a,b)}(i_1(P) i_2(1)) = P(a)$$

et de même, $Q(b) = 0$, et ainsi $(a, b) \in V_1 \times V_2$. Réciproquement, soit $(a, b) \in V_1 \times V_2$. Alors tout élément de $\ker \varphi$ s'écrit comme une somme finie $\sum_{\text{finie}} P_j \otimes Q_j$. Mais

$$\mathrm{ev}_{(a,b)} \left(\sum_{\text{finie}} i_A(P_j) i_B(Q_j) \right) = \sum_{\text{finie}} P_j(a) Q_j(b) = 0$$

et ainsi $(a, b) \in V(\ker \varphi)$.

1.13 Exercice 16

Chapitre 2

TD2

2.1 exercice 4

Soient $V_1, V_2 \subseteq X$ des fermés tels que $X = V_1 \cup V_2$. Alors $U_1 = (V_1 \cap U_1) \cup (V_2 \cap U_1)$ et $U_2 = (V_1 \cap U_2) \cup (V_2 \cap U_2)$. Maintenant, par irrécuctibilité de U_1 et U_2, 4 cas se présentent :

1. $U_1 = (V_1 \cap U_1)$, $U_2 = (V_1 \cap U_2)$. Alors $U_1, U_2 \subseteq V_1$ et ainsi $X \subseteq V_1$.
2. $U_1 = (V_2 \cap U_1)$, $U_2 = (V_2 \cap U_2)$. Alors $U_1, U_2 \subseteq V_2$ et ainsi $X \subseteq V_2$.
3. $U_1 = (V_1 \cap U_1)$, $U_2 = (V_2 \cap U_2)$. Ainsi $U_1 \subseteq V_1$ et $U_2 \subseteq V_2$. Maintenant considérons $X \backslash U_1 \subseteq U_2$ et $F_1 \cap U_2 \subseteq U_2$. Alors

$$(F_1 \cap U_2) \cup (X \backslash U_1) = (F_1 \cap U_2) \cup (U_2 \backslash (U_1 \cap U_2)) \supseteq (U_1 \cap U_2) \cup (U_2 \backslash (U_1 \cap U_2)) = U_2$$

donc finalement $U_2 = (F_1 \cap U_2) \cup (X \backslash U_1)$. Mais alors soit $U_2 =$