M2 Université de Versailles Saint-Quentin 24 novembre 2021

Examen – Courbes Algébriques

Documents et téléphones portables sont interdits.

Durée : 3 heures

1. Soit k un corps et $n \geq 1$ un entier. Soit $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ l'application

$$f([u,v]) = [u^n, u^{n-1}v, u^{n-2}v^2, \ldots, uv^{n-1}, v^n].$$

i. Montrer que l'image $V = f(\mathbb{P}^1)$ est un ensemble projectif irréductible.
ii. Montrer que $f : \mathbb{P}^1 \to V$ est un isomorphisme.
iii. Montrer que pour tout hyperplan de $\mathbb{P}^n$:

$$H_{\mathbf{a}} : a_0X_0 + \ldots + a_nX_n = 0,$$

l'intersection $V \cap H_{\mathbf{a}}$ consiste de r points distincts, où $0 \leq r \leq n$. Donner un exemple où (a) $r = n$, et (b) $r = 1$. Pour $n = 2$, expliciter un ouvert $U \subseteq \mathbb{A}^3$, tel que pour $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2) \in U$, l'intersection $V \cap H_{\mathbf{a}}$ consiste de 2 points distincts.

2. Soit k un corps algébriquement clos, de caractéristique 0. Soit $C = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ donné par

$$f = Y^2 - X(X-1)(X-a), \quad a \in k.$$

i. Quelle est la dimension de C? Explicitez $k[C]$ et $k(C)$.
ii. Quelles sont les points singuliers de C ? Donner les equations des espaces tangents géométriques en chaque point de C.
iii. Montrer directement (sans utiliser aucun théorème) que si $a \neq 0, 1$, il n'y a pas d'application rationnelle $\mathbb{A}^1 \dashrightarrow C$ non-constante.
iv. Pour $a = 0$ et 1, expliciter une application régulière et birationnelle $f : \mathbb{A}^1 \to C$. Pour $a = 0$, montrer que l'application rationnelle inverse $f^{-1} : C \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ n'est pas régulière.

3. Soit k un corps algébriquement clos, de caractéristique 0. Soit $C = V(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ donné par

$$F = Z^4 + Y^4 - X^4.$$

i. Montrer que C est une courbe projective lisse.
ii. Pour $g \in \{\frac{Z}{X-Y}, \frac{Y}{X-Y}, \frac{X}{X-Y}\} \subseteq k(C)$, calculer $\mathrm{div}_0(g)$ et $\mathrm{div}_\infty(g)$.
iii. Trouver tous les diviseurs effectifs D sur C tels que $\frac{Z}{X-Y} \in \mathcal{L}(D)$.
iv. Trouver un diviseur effectif D tel que $\frac{Z}{X-Y}, \frac{Y}{X-Y}, \frac{X}{X-Y} \in \mathcal{L}(D)$. Montrer que $\dim(D) \geq 3$.

Ex. 1 (i) Montrer $V = V(S)$ où S est l'ensemble de polyn. homogènes de $k[x_0, \dots x_n]$ donné par:

$$x_i x_{j+1} - x_{i+1} x_j \quad \text{avec } 0 \leq i < j \leq n-1$$

Clair : $V \subseteq V(S)$ car $x_i = u^{n-i} v^i$, $x_j = u^{n-j} v^j$ satisfaient $x_i x_{j+1} = x_{i+1} x_j$. Montrer que $V(S) \subseteq V$:

Soit $p = [x_0, \dots x_n] \in V(S)$. Supposons $x_0 = 1$.

$p \in V(S) \Rightarrow x_{j+1} = x_0 x_{j+1} = x_1 x_j \quad \forall\, j \geq 1,\ j \leq n-1$.

$\rightsquigarrow x_2 = x_1^2,\ x_3 = x_1^3, \dots \quad x_j = x_1^j \quad \forall\, 1 \leq j \leq n$

par récurrence. Donc $p = [1, x_1, x_1^2, \dots x_1^n] = f([1, x_1])$.

Supposons $x_0 = 0$. On a $0 = x_0 x_{j+1} = x_1 x_j \quad \forall\, 1 \leq j \leq n-1$.

En particulier $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots \quad x_{n-1} = 0$ par récurrence.

$\rightsquigarrow p = [0, 0 \dots 0, 1] = f([0,1])$. Donc $V(S) \subseteq V$ ($\rightsquigarrow V(S) = V$).

$\rightsquigarrow V$ est un ensemble projectif.

f est une application régulière, car sur chaque carte de $\mathbb{P}^1$ est donné par des quotients de polynômes homogènes de même degré : $\mathbb{A}^1 = \{u \neq 0\} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^n$, $f([u,v]) = \left[1, \frac{v}{u}, \left(\frac{v^2}{u^2}\right), \dots \frac{v^n}{u^n}\right]$

Similairement sur $\mathbb{A}^1 = \{v \neq 0\} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^n$, $f([u,v]) = \left[\frac{u^n}{v^n}, \dots \frac{u}{v}, 1\right]$

f régulière, $\mathbb{P}^1$ irréductible $\Rightarrow V = f(\mathbb{P}^1) = \overline{f(\mathbb{P}^1)}$ irréductible.

On utilise ($X \xrightarrow{f} Y$ continue, X irréductible $\Rightarrow \overline{f(X)}$ irréductible)

Scanned with CamScanner

(ii) On a montré déjà que f est régulière.

$f : \{u \neq 0\} \to \mathbb{P}^n \quad f([1,v]) = [1, v, v^2, \ldots v^n]$

est clairement injective (sur $\{u \neq 0\}$). Mais

$f([0,1]) = [0, \ldots 0, 1] \notin f(\{u \neq 0\})$, donc f est injective.

$f(\mathbb{P}^1) = V \rightsquigarrow f : \mathbb{P}^1 \to V$ est bijective.

Il suffit de montrer que l'application inverse

$f^{-1} : V \to \mathbb{P}^1$ est régulière. On vérifie ça localement.

$\mathbb{A}^1_v = \{u \neq 0\} \xrightarrow{f} V \cap \{x_0 \neq 0\}$, $f(\underset{\substack{\shortparallel \\ [1,v]}}{v}) = [1, v, v^2, \ldots v^n]$

identifie $\mathbb{A}^1 \equiv \{u \neq 0\}$

$f^{-1} : V \cap \{x_0 \neq 0\} \to \mathbb{A}^1_v$ donné par $f^{-1}([x_0, x_1 \ldots x_n]) = \dfrac{x_1}{x_0}$.

régulière (donné par un quotient de polyn. homogènes, de même degré)

Similairement, $\mathbb{A}^1_u = \{v \neq 0\} \xrightarrow{f} V \cap \{x_n \neq 0\}$,

$f(\underset{\substack{\shortparallel \\ [u,1]}}{u}) = [u^n, \ldots u, 1]$

a comme inverse $f^{-1}([x_0, x_1 \ldots x_n]) = \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ régulière.

(iii) L'intersection $V \cap H_{\underline{a}}$ est en bijection avec $[u,v] \in \mathbb{P}^1$ t.q.

$a_0 u^n + \ldots + a_n v^n = 0$. Si $a_0 \neq 0$ le polynôme

$a_0 X^n + \ldots + a_{n-1} X + a_n = a_0 (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$, $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \overline{k}$

alors $a_0 u^n + \ldots + a_n v^n = a_0 (u - \lambda_1 v) \ldots (u - \lambda_n v)$

Similairement pour $a_n \neq 0$, donc $a_0 u^n + \ldots + a_n v^n = (\mu_1 u - \lambda_1 v) \ldots (\mu_n u - \lambda_n v)$

avec $\mu_i, \lambda_i \in \overline{k}$. Donc, le nombre maximal de solutions (distinctes) est $\underline{n}$.

Si $H_{\underline{a}}$: $x_0 = 0$ $(a_0 = 1,\ a_1 = \dots = a_n = 0)$

on a une seule solution : $[0,1] \in \mathbb{P}^1$.

Soit $\lambda_1, \dots \lambda_n \in k$ éléments distincts (on a besoin $|k| \geq n$).

Soit $P(x) = (X - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n) = X^n - (\sum \lambda_i) X^{n-1} + \left(\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j\right) X^{n-2} + \dots$

$\dots + (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n$

On pose $a_0 = 1,\ a_1 = -\sum \lambda_i,\ a_2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j, \dots\ a_n = (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n$.

Alors $V \cap H_{\underline{a}} \overset{f}{\underset{\text{bijection}}{\longleftrightarrow}} \{[\lambda_1, 1], \dots [\lambda_n, 1]\}$ points distincts dans $\mathbb{P}^1$.

Supposons $n = 2$. Alors si $U := \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{A}^3 \mid a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0\}$

pour $(a_0, a_1, a_2) \in U$, l'équation $a_0 u^2 + a_1 uv + a_2 v^2 = 0$

consiste de 2 points distincts (si $k = \overline{k}$).

Scanned with CamScanner

$\boxed{\text{Ex 2}}$ (i) $k[C] = k[x,y]$, $y^2 = x(x-a)(x-1)$

$k(C) = k(x,y)$

$f(X,Y) = Y^2 - X(X-1)(X-a) \in k[X,Y]$ irréductible : f unitaire dans $k[X][Y]$

Si $f(X,Y) = g(X,Y)\,h(X,Y)$, $g, h \in k[X,Y] \Rightarrow$

$\Rightarrow \deg_Y g = \deg_Y h = 1 \rightsquigarrow$ on peut supposer $g = Y - P(X)$, $h = Y - Q(X)$

avec $P, Q \in k[X]$. Alors $f = Y^2 - (P+Q)Y + P\cdot Q$

$\rightsquigarrow P + Q = 0$, $P\cdot Q = -(X)(X-1)(X-a) \Rightarrow Q^2 = X(X-1)(X-a)$

$\deg Q^2$ est pair, $\deg X(X-1)(X-a) = 3 \rightsquigarrow$ contradiction.

$\rightsquigarrow f$ irréductible, $k[C]$ domaine intègre, $k(C) = \operatorname{Frac} k[C] = k(x,y)$.

$k \subseteq k(x) \underbrace{\subseteq}_{\text{degré } 2} k(x)(y)$, $k \subseteq k(x)$ est purement transcendentale

$\rightsquigarrow \operatorname{tr.deg}_k k(C) = 1 \Rightarrow \dim C = 1$

(ii)
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial X} = -3X^2 + 2(a+1)X - a = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial Y} = 2Y = 0 \\ f(X,Y) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Y = 0 \\ X(X-1)(X-a) = 0 \\ -3X^2 + 2(a+1)X - a = 0 \end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow \big(a = 0$ et $(X,Y) = (0,0)\big)$ ou $\big(a = 1$ et $(X,Y) = (1,0)\big)$

Si $a \neq 0,1$, C est lisse et si $p = (x_0, y_0) \in C$,

$$T_p^{geom} C = V\left(\frac{\partial f}{\partial X}(p)(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial Y}(p)(Y - y_0)\right) =$$

$$= \underbrace{V\Big(\big(-3x_0^2 + 2(a+1)x_0 - a\big)(X - x_0) + (2y_0)(Y - y_0)\Big)}_{\text{droite}} \subseteq \mathbb{A}^2$$

Scanned with CamScanner

Si $a=0$: $f(x,y) = y^2 - x^2(x-1)$

C est lisse à $p=(x_0,y_0) \neq (0,0)$ avec

$$T_p^{geom} C = V\Big((-3x_0^2+2x_0)(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) \Big) \subseteq \mathbb{A}^2$$

C est singulière à $p=(0,0)$ avec $T_p^{geom} C = \mathbb{A}^2$

Si $a=1$: $f(x,y) = y^2 - x(x-1)^2$

C est lisse à $p=(x_0,y_0) \neq (1,0)$ avec

$$T_p^{geom} C = V\Big((-3x_0^2+4x_0-1)(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) \Big) \underset{\text{droite}}{\subseteq} \mathbb{A}^2$$

C est singulière à $p=(1,0)$ avec $T_p^{geom} C = \mathbb{A}^2$.

(iii) Supposons $a \neq 0,1$.

RMQ: montrer que $\nexists\ \mathbb{A}^1 \to C$ régulière et non-constante c'est plus simple : supposons $\exists\ f=(f_1,f_2) : \mathbb{A}^1 \to C$ avec $f_1, f_2 \in k[T]$ et ($f_1 \notin k$ ou $f_2 \notin k$). On a (dans $k[T]$) $f_2^2 = f_1(f_1-1)(f_1-a)$. On observe que n'importe quels deux entre f_1, f_1-1, f_1-a sont premiers entre eux ($a\neq 0,1$). Alors si $P \in k[T]$ irréductible tel que $P^s \mid f_2$ ($s>0$ entier) alors P^{2s} est un facteur de f_1, ou f_1-1, ou f_1-a.

En particulier, on peut écrire $f_1 = Q_1^2$, $f_1 - 1 = Q_2^2$, $f_1 - a = Q_3^2$ (avec $f_2 = Q_1Q_2Q_3$) et $(Q_i, Q_j) = 1$ $\forall i\neq j$, $Q_1,Q_2,Q_3 \in k[T]$.

On a : $Q_1^2 - Q_2^2 = 1$, alors $Q_1 \pm Q_2 \in k^\times$, donc $Q_1, Q_2 \in k$

(Similairement : $Q_1^2 - Q_3^2 = a \neq 0$, alors $Q_1, Q_3 \in k$)

Donc $f_1 \in k$, $f_2 \in k$ parce que $f_2 = f_1(f_1-1)(f_1-a) \to$

$\to f$ constante $\lightning$. On va utiliser des idées similaires pour le cas général.

Scanned with CamScanner

Supposons que $\exists\, a \neq 0,1$ et $f_1, f_2, g_1, g_2 \in k[T]$ / $g_i \neq 0$ ($i=1,2$)

tels que $\left(\frac{f_2}{g_2}\right)^2 = \frac{f_1}{g_1}\left(\frac{f_1}{g_1} - 1\right)\left(\frac{f_1}{g_1} - a\right)$ dans $k(T)$ $\left(\begin{array}{l}(f_i, g_i) = 1 \\ g_i \text{ unitaire}\end{array}\right)$

avec $\frac{f_1}{g_1}$ ou $\frac{f_2}{g_2}$ non-constantes. On note que si $\frac{f_1}{g_1} \in k$ alors $\frac{f_2}{g_2} \in k$. Donc on peut supposer $\frac{f_1}{g_1} \notin k$, i.e., $\max\{\deg f_1, \deg g_1\} > 0$. On va supposer qu'on a choisi un $a \neq 0,1$ et $\frac{f_1}{g_1}$ tels que $\max\{\deg f_1, \deg g_1\} > 0$ est le minimum possible.

Dans $k[T]$ on a : $g_1^3 f_2^2 = g_2^2 f_1 (f_1 - g_1)(f_1 - a g_1)$.

$$\boxed{a \neq 0,1,\ (f_1, g_1) = 1 \Rightarrow \underbrace{f_1,\ f_1 - g_1,\ f_1 - a g_1,\ g_1}_{\forall\, 2 \text{ sont premiers entre eux.}}} \quad (*)$$

Donc $(*) \Rightarrow g_1^3 \mid g_2^2$. En plus $(f_2, g_2) = 1 \Rightarrow g_2^2 \mid g_1^3$.

g_1, g_2 unitaires $\rightsquigarrow g_2^2 = g_1^3$, donc $\exists\, h \in k[T]$ t.q. $g_2 = h^3$, $g_1 = h^2$.

Si $h \in k$, on est dans le cas précédent $\mathbb{A}^1 \to C$ régulière.

On peut supposer que $h \notin k$.

Dans $k[T]$ on a : $\left\{\begin{array}{l} f_2^2 = f_1 (f_1 - g_1)(f_1 - a g_1) \\ g_1 = h^2,\quad h \notin k \end{array}\right.$

$(*) \Rightarrow \exists\, Q_1, Q_2, Q_3 \in k[T]$, $(Q_i, Q_j) = 1\ \forall i \neq j$, $(Q_i, h) = 1\ \forall i$

avec $f_1 = Q_1^2$, $f_1 - g_1 = Q_2^2$, $f_1 - a g_1 = Q_3^2$, $f_2 = Q_1 Q_2 Q_3$.

$Q_2^2 = f_1 - g_1 = Q_1^2 - h^2 = (Q_1 - h)(Q_1 + h) \Longrightarrow Q_1 - h, Q_1 + h$ sont des carrés dans $k[T]$.

$(Q_1 - h, Q_1 + h) = 1$

$k = \bar{k} \Rightarrow \exists\, b \in k$ t.q. $b^2 = a$. On a $b \neq 0, 1, -1$ $(a \neq 0, 1)$.

Similairement, $Q_3^2 = f_1 - a g_1 = (Q_1 - bh)(Q_1 + bh) \Rightarrow Q_1 - bh, Q_1 + bh$ sont des carrés dans $k[T]$.

$\rightsquigarrow$ $Q_1 \pm h$, $Q_1 \pm bh$ sont des carrés dans $k[T]$.

On construit des nouveaux f_i', g_i' (et $a' \in k$, $a' \neq 0, 1$) avec les mêmes propriétés

$$\left.\begin{array}{l} f_2'^2 = f_1'(f_1' - g_1')(f_1' - a' g_1') \\ g_1' = h'^2,\ g_2' = h'^3 \end{array}\right\} (**)$$

Montrer que $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in k^\times$ et $a' \in k \setminus \{0,1\}$ t.q.

$$\begin{array}{ll} f_1' := \alpha(Q_1 - h) & f_1' - g_1' = Q_1 - bh \\ g_1' := \beta(Q_1 + h) & f_1' - a' g_1' = \gamma(Q_1 + bh) \end{array}$$

Par exemple : $\alpha = \frac{b+1}{2}$, $\beta = \frac{b-1}{2}$, $a' = \frac{(b+1)^2}{(b-1)^2}$ (char $k = 0$)

$Q_1 \pm h$, $Q_1 \pm bh$ des carrés dans $k[T] \Longrightarrow f_1', f_1' - g_1', f_1' - a' g_1', g_1'$ des carrés dans $k[T]$.

Soient : $f_1' = Q_1'^2$, $f_1' - g_1' = Q_2'^2$, $f_1' - a' g_1' = Q_3'^2$, $g_1' = h'^2$.

On pose $f_2' = Q_1' Q_2' Q_3'$, $g_2' = h'^3$. Donc on a $(**)$

Si $f_1', g_1' \in k$ alors $Q_1, h \in k$ $\left(\cancel{f_1' \Rightarrow} \left.\begin{cases} Q_1 - h \\ Q_1 + h \end{cases}\right\}_{\text{dans } k} \Rightarrow Q_1, h \in k \right)$

$\rightsquigarrow f_1, g_1 \in k$ ↯.

Donc $0 < \max\{\deg f_1', \deg g_1'\} \le \max\{\deg Q_1, \deg h\}$

$\underset{\substack{f_1 \notin k \\ \text{ou } g_1 \notin k}}{<} \max\{\deg \underbrace{Q_1^2}_{f_1}, \deg \underbrace{h^2}_{g_1}\} = \max\{\deg f_1, \deg g_1\}$

↯.

(iv) $\underline{a = 1}$: $y^2 = x(x-1)^2 \Rightarrow \left(\frac{y}{x-1}\right)^2 = x$.

On pose $\frac{y}{x-1} = t$, donc $\begin{cases} y = t(x-1) \\ x = t^2 \end{cases} \to \begin{cases} x = t^2 \\ y = t(t^2-1) \end{cases}$

$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{f} C$, $f(t) = (t^2, t(t^2-1))$.

$\underline{a = 0}$: $y^2 = x^2(x-1) \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = x - 1$

On pose $\frac{y}{x} = t$, donc $\begin{cases} y = tx \\ x = t^2+1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = t^2+1 \\ y = t(t^2+1) \end{cases}$

$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{f} C$, $f(t) = (t^2+1, t(t^2+1))$

$f^{-1} : C \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ donné par $f^{-1}(x,y) = \frac{y}{x}$ n'est pas défini à $(x,y) = (0,0)$. Supposons $\exists\, C \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1$ régulière tel que $g(x,y) = \frac{y}{x}$ pour $(x,y) \in U \subseteq C$ ouvert avec $(0,0) \in U$.

Toute application régulière $g : C \to \mathbb{A}^1$ est donné par un élément $g \in k[x,y] = \frac{k[X,Y]}{(Y^2 - X^2(X-1))}$. On peut supposer $g = P(x) + yQ(x)$, $P, Q \in k[X]$.

$g = \frac{y}{x}$ sur $U \Rightarrow x\,(P(x) + yQ(x)) = y$ sur $\underset{\text{ouvert}}{U \subseteq C}$.

C irréductible $\Rightarrow$ U dense dans C $\rightsquigarrow x P(x) + xy\, Q(x) = y$ dans $k[x,y]$.

$\rightsquigarrow \quad X P(X) + XY Q(X) - Y = \left(Y^2 - X^2(X-1)\right) \cdot R(X,Y)$ dans $k[X,Y]$

$\left(R \in k[X,Y] \right)$. Mais $\begin{cases} \deg_Y (XP + XYQ - Y) = 1 \\ \deg_Y \left(Y^2 - X^2(X-1) \right) = 2 \end{cases} \rightarrow$ ↯.

Ex3 (i) Soit $F = Z^4 + Y^4 - X^4$. Eisenstein's criterion $\Rightarrow F$ irréductible.

$$\frac{\partial F}{\partial X} = -4X^3, \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = 4Y^3, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = 4Z^4.$$

Si $[x_0, y_0, z_0]$ est un point singulier, on doit avoir $x_0^3 = y_0^3 = z_0^3 = 0$

$\rightsquigarrow x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ↯.

(ii) Soit $\boxed{g = \frac{Z}{X-Y}} \in k(C)$. On regarde les cartes de C.

$\underline{Z=1}$: $\quad g = \frac{1}{X-Y} \in k(C) = k(x,y)$, $\quad 1 + y^4 - x^4 = 0$.

g n'est pas 0 sur cette carte, pôle possible si $X-Y=0$.

Mais $X - Y = 0$, $1 + Y^4 - x^4 = 0$ n'a pas des solutions.

$\rightsquigarrow$ pas des zéros ou pôles dans cette carte.

$\underline{y=1}$: $\quad g = \frac{Z}{X-1} \in k(C) = k(x,z)$, $\quad z^4 + 1 - x^4 = 0$

Zéros: $g = 0$ à $z = 0$, $x^4 = 1$ $\rightsquigarrow$ soient $P_1 = [1,1,0]$ $P_3 = [i,1,0]$
$P_2 = [-1,1,0]$ $P_4 = [-i,1,0]$

Pôles: $X = 1 \rightsquigarrow z = 0 \rightsquigarrow P_1 = [1,1,0]$ le seul possible.

Anneau local $k[C]_{P_1}$ a idéal maximal $(x-1, z) = (\underset{\text{uniformisante}}{z})$

car $z^4 = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) \rightsquigarrow x - 1 = \frac{z^4}{(x+1)(x-i)(x+i)}$ dans $k[C]_{P_1}$

Si $\nu_{P_1} : k[C]_{P_1} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ est la valuation à P_1, $\nu_{P_1}(z) = 1$, $\nu_{P_1}(x-1) = 4$

Scanned with CamScanner

$\rightsquigarrow \nu_{p_1}(g) = 1-4 = -3.$

Similairement $\nu_{p_i}(g) = 1$ si $i = 2,3,4$.

Par symmétrie, on retrouve les mêmes points sur la carte $x=1$.

$\rightsquigarrow \boxed{\mathrm{div}(\overset{z/x-y}{g}) = p_2+p_3+p_4-3p_1}$, donc $\begin{cases}\mathrm{div}_0(g) = p_2+p_3+p_4 \\ \mathrm{div}_\infty(g) = 3p_1\end{cases}$

$\boxed{g = \frac{y}{x-y}}$ $\underline{z=1}$: $g = \frac{y}{x-y}$, $C: 1+y^4-x^4 = 0 \rightsquigarrow x \neq y$

$y=0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow$ zéros à $q_1 = [1,0,1]$, $q_3 = [i,0,1]$
$q_2 = [-1,0,1]$, $q_4 = [-i,0,1]$

L'idéal maximal de $k[C]_{q_i}$ est $(x-\beta, y) = (y)$

où $\beta \in \{\pm 1, \pm i\}$, car $y^4 = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$.

$\rightsquigarrow \nu_{q_i}(g) = 1 \quad \forall i = 1,2,3,4.$ (seulement $x-\beta$ n'est pas inversible dans $k[C]_{q_i}$ parmi $x\pm 1$, $x \pm i$)

$\underline{y=1}$: $g = \frac{1}{x-1}$, $C: z^4+1-x^4 = 0$

Si $x=1$, $z=0$ $\rightsquigarrow$ on retrouve $p_1 = [1,1,0]$.

L'idéal maximal de $k[C]_{p_1}$ est (z), $\nu_{p_1}\left(\frac{1}{x-1}\right) = -4$.

$\underline{x=1}$: on retrouve les points q_i comme zéros et p_1 comme un pôle.

$\rightsquigarrow \boxed{\mathrm{div}\left(\frac{y}{x-y}\right) = q_1+q_2+q_3+q_4 - 4p_1}$ $\rightsquigarrow \begin{cases}\mathrm{div}_0(g) = q_1+q_2+q_3+q_4 \\ \mathrm{div}_\infty(g) = 4p_1\end{cases}$

$\boxed{g = \frac{x}{x-y}}$ $\underline{z=1}$: $C: 1+y^4-x^4 = 0 \rightsquigarrow x \neq y$.

$x=0 \Rightarrow y^4+1 = 0 \rightsquigarrow$ zéros à $r_i = [0,\beta_i,1]$,

où $\{\beta_1, \ldots, \beta_4\}$ = les 4 racines d'ordre 8 de 1.

Scanned with CamScanner

L'Idéal maximal de $k[C]_{r_i}$ est $(x, y-\beta i) = (x)$
car $\prod_{i=1}^{4}(y+\beta i) = y^4+1 = x^4 \rightsquigarrow \nu_{r_i}(g) = 1 \quad \forall i = 1,2,3,4.$

<u>$Y=1$</u> : $C : z^4+1-x^4 = 0$, $g = \frac{X}{X-1}$

Si $X=0$ on retrouve r_i $(i=1,2,3,4)$.

Si $X-1=0$, on a $z=0$, on retrouve $p_1 = [1,1,0]$
et $\nu_{p_1}\left(\frac{X}{X-1}\right) = -4$.

<u>$X=1$</u> : on retrouve p_1 comme un pôle d'ordre 4.

$\rightsquigarrow \boxed{\mathrm{div}\left(\frac{X}{X-Y}\right) = r_1+r_2+r_3+r_4 - 4p_1} \rightsquigarrow \begin{cases} \mathrm{div}_0(g) = r_1+r_2+r_3+r_4 \\ \mathrm{div}_\infty(g) = 4p_1 \end{cases}$

(iii) $\mathcal{L}(D) = \{ g \in k(C) \mid \mathrm{div}(g) + D \geqslant 0\} \cup \{0\}$.

$\mathrm{div}\left(\frac{Z}{X-Y}\right) = p_2+p_3+p_4-3p_1 \rightsquigarrow D = 3p_1 + \underbrace{D'}_{\text{diviseur effectif}}$.

(iv) $D = 4p_1 \overset{(ii)}{\rightsquigarrow} \forall g \in \left\{\frac{Z}{X-Y}, \frac{X}{X-Y}, \frac{Y}{X-Y}\right\}$, $\mathrm{div}(g) + 4p_1 \geqslant 0$

$\rightsquigarrow \frac{Z}{X-Y}, \frac{X}{X-Y}, \frac{Y}{X-Y} \in \mathcal{L}(4p_1)$. Montrer que $\frac{Z}{X-Y}, \frac{X}{X-Y}, \frac{Y}{X-Y}$
sont linéairement indép $/k$ (donc $\mathcal{L}(4p_1)$ a dimension $\geqslant 3$):
$k(C) = k(x,y)$ où $1+y^4-x^4 = 0$. Supposons $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in k$
t.q. $\alpha \cdot \frac{1}{x-y} + \beta \cdot \frac{x}{x-y} + \gamma \cdot \frac{y}{x-y} = 0$ dans $k(x,y)$

$\rightsquigarrow \alpha + \beta x + \gamma y = 0$ dans $k[x,y] \rightsquigarrow$

$\rightarrow \underbrace{\alpha + \beta X + \gamma Y}_{\text{degré} \leq 1} \in \underbrace{(1+Y^4-X^4)}_{\text{degré} \geq 4} \rightsquigarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$

Scanned with CamScanner