Feuille 5,
Courbes algébriques
Ensembles Algébriques Projectifs, Anneaux de valuation discrète, Diviseurs

Exercice 1 Soit $V = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$.

1. Pour tout $x \in V$, montrer que $\mathsf{k}[V]_x$ est un anneau de valuation discrète et trouver une uniformisante.
2. Pour $x = 1$, calculer les valuations dans $\mathsf{k}[V]_x$ des éléments suivants : $X - 1$, $X + 1$, $(X - 1)^3$, $X^3 - 1$.
3. Montrer que l'anneau $\{F/G \in \mathsf{k}(V) \mid \deg(G) \geq \deg(F)\}$ est un anneau de valuation discrète, et trouver une uniformisante.

Exercice 2 Détérminer les fonctions régulières sur $U = \mathbb{P}^1 \setminus V(X^2 - Y^2)$.

Exercice 3 Soit $V = V(X^3 + X^2Z - Y^2Z) \subseteq \mathbb{P}^2$.

1. Montrer que C est une variété projecctive de dimension 1.
2. Quels sont les points singuliers de C ?
3. Déterminer le domaine de définition de l'application rationnelle

$$C \to \mathbb{P}^1, \quad [x, , y, z] \to [y, z].$$

Exercice 4 Soit φ l'application rationnelle de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^3$ définie par :

$$\varphi([x, y]) = [x^3, x^2y, xy^2, y^3].$$

On note C l'image de φ dans $\mathbb{P}^3$.

1. Quel est le domaine de définition de φ ?
2. Montrer que $C = V(I)$, où $I = (XT - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - YT)$.
3. Montrer que $I(C) = I$.
4. Montrer que C est une courbe lisse.
5. Déterminer $V(XT - YZ, Y^2 - XZ)$.

Exercice 5 Trouver les points singuliers des variétés projectives suivantes.

1. $V = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{P}^2$.
2. $V = V(X^3 - Y^2Z) \subseteq \mathbb{P}^2$.
3. $V = V(F) \subseteq \mathbb{P}^n$, où $F \in \mathsf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ est un polynôme homogène.

Exercice 6 Montrer que $\varphi : V(Y^2Z - X^3) \to \mathbb{P}^1$ donné par $\varphi([x, y, z]) = [x^2, y^2]$ est un morphisme de variétés projectives.

Exercice 7 Détérminer les fonctions régulières sur $U = \mathbb{P}^1 \setminus V(X^2 - Y^2)$.

Exercice 8 Calculer les diviseurs principaux associés aux fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}^1$:

$$\frac{X^2 + XY + Y^2}{X^2 + Y^2}, \quad \frac{X^2 + XY + Y^2}{XY + Y^2}, \quad \frac{X^2 + 2XY + Y^2}{XY + Y^2}.$$

Exercice 9 Calculer $\mathrm{div}(f)$ pour $f = X/Y \in \mathsf{k}(C)$ avec :

1. $C = \mathbb{P}^1$
2. $C = V(XY - Z^2) \subseteq \mathbb{P}^2$
3. $C = V(ZY^2 - X^3 - Z^3) \subseteq \mathbb{P}^2$.

Exercice 10 Montrer que tout diviseur principal de $\mathbb{P}^1$ est de deégré 0, puis que tout diviseur de degré 0 sur $\mathbb{P}^1$ est principal.

Exercice 11 Soit $C = \mathbb{P}^1$, $p \in C$ un point, $D = np$, $n \in \mathbb{Z}$. Trouver une base pour $\mathcal{L}(D)$.

Exercice 12 Soit k un corps algébriquement clos, de caractéristique 0. Soit $C = V(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ donné par

$$F = Z^4 + Y^4 - X^4.$$

i. Montrer que C est une courbe projective lisse.

ii. Pour $g \in \{\frac{Z}{X-Y}, \frac{Y}{X-Y}, \frac{X}{X-Y}\} \subseteq k(C)$, calculer $\mathrm{div}_0(g)$ et $\mathrm{div}_\infty(g)$.

iii. Trouver tous les diviseurs effectifs D sur C tels que $\frac{Z}{X-Y} \in \mathcal{L}(D)$.

iv. Trouver un diviseur effectif D tel que $\frac{Z}{X-Y}, \frac{Y}{X-Y}, \frac{X}{X-Y} \in \mathcal{L}(D)$. Montrer que $\dim(D) \geq 3$.

Exercice 13 On suppose que k est un corps de caract'eristique nulle. Soit $C = V(Y^2Z - X^3 - XZ^2) \subseteq \mathbb{P}^2$.

1. Déterminer la dimension de C et le lieu singulier de C. Pour $[\lambda, \mu, \nu] \in \mathbb{P}^2$, on note $L_{\lambda\mu\nu}$ la droite d''equation $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$. Si $p \in C$ est un point, on note $v_p(L_{\lambda\mu\nu})$ la valuation de $\lambda X + \mu Y + \nu Z$ au point p, c'est-à-dire sa valuation dans l'anneau de valuation discrète $\mathsf{k}[C]_p$. On note $D_{[\lambda,\mu,\nu]}$ le diviseur suivant:

$$D_{[\lambda,\mu,\nu]} = \sum_{p \in C} v_p(L_{\lambda\mu\nu})p.$$

2. Déterminer les diviseurs $D_{[1,0,0]}$, $D_{[0,1,0]}$, $D_{[0,0,1]}$. Quels sont leurs degrés ?
3. Montrer que tous les $D_{[\lambda,\mu,\nu]}$ sont tous égaux à un diviseur principal près.
4. Montrer que $\dim \mathcal{L}(D_{[1,0,0]}) \geq 3$. Que peut-on déduire sur le genre de C ?
5. Soit $f = X/Z \in \mathsf{k}(C)$. Déterminrer le degré $[\mathsf{k}(C) : \mathsf{k}(f)]$.

Exercice 14 Soit k un corps. On considère l'application

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^5, \big([x_0, x_1, x_2], [y_0, y_1]\big) \mapsto [z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}, z_{20}, z_{21}],$$

où $z_{ij} = x_i y_j$, avec $i \in \{0,1,2\}$, $j \in \{0,1\}$. On identifie $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ avec son image Z dans $\mathbb{P}^5$. L'ensemble Z est un ensemble projectif algébrique avec equations $z_{ij} z_{ab} = z_{ib} z_{aj}$ ($i, a \in \{0,1,2\}$, $j, b \in \{0,1\}$). On considère $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ avec la topologie de Zariski induite. Soit

$$X = \{\big((x_1, x_2), [y_0, y_1]\big) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \ \mid \ x_1 y_1 = x_2 y_0 \ \},$$

$$U_0 = \{\big((x_1, x_2), [y_0, y_1]\big) \in X \ \mid \ y_0 \neq 0 \ \} \subseteq X,$$

$$U_1 = \{\big((x_1, x_2), [y_0, y_1]\big) \in X \ \mid \ y_1 \neq 0 \ \} \subseteq X.$$

Soit $\pi : X \to \mathbb{A}^2$ l'application $\pi\big((x_1, x_2), [y_0, y_1]\big) = (x_1, x_2)$. On dénote $p = (0,0) \in \mathbb{A}^2$, $E = \pi^{-1}(p)$.

i. Montrer que U_0 et U_1 sont isomorphes à $\mathbb{A}^2$.

ii. Montrer que π est une application régulière en montrant que les restrictions $\pi_{|U_0}$ et $\pi_{|U_1}$ sont des applications régulières.

iii. Montrer que $\pi : X \setminus E \to \mathbb{A}^2 \setminus \{p\}$ est un isomorphisme.

iv. Montrer que l'application rationnelle inverse $\pi^{-1} : \mathbb{A}^2 \dashrightarrow X$ n'est pas régulière en p.

v. Montrer qu'il y a une bijection entre l'ensemble des droites dans $\mathbb{A}^2$ qui passent par p et les points de E.

vi. Soit $f \in k[x_1, x_2]$ le polynôme $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1 + x_1^2$. Soit $C = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$. Montrer que C est une courbe lisse. Soit $\tilde{C} \subseteq X$ l'adhérence de $\pi^{-1}(C \setminus \{p\})$. Montrer que $\pi^{-1}(C) = \tilde{C} \cup E$ et que $\tilde{C}$ est isomorphe à C.

vii. Soit $f \in k[x_1, x_2]$ le polynôme $f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 + x_1^3$. Soit $C = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$. Montrer que C est une courbe singulière. Soit $\tilde{C} \subseteq X$ l'adhérence de $\pi^{-1}(C \setminus \{p\})$. Montrer que $\tilde{C}$ n'est pas isomorphe à C.