Courbes algébriques - TD

Alexandre Guillemot

15 novembre 2022

Table des matières

Chapitre 1

TD1

1.1 Exercice 1

Soit $V \subset \mathbb{A}^1$ un souos ensemble algébrique, alors il existe $M \subseteq k[x]$ tq $V = V(M)$. Maintenant $V(M) = V((M))$ et comme $k[x]$ est principal, il existe $P \in k[x]$ tq $V = V(P)$. Remarquons alors que $P \neq 0$ car sinon $V(P) = V(0) = \mathbb{A}^1$. Mais alors $V(P) = \{a \in \mathbb{A}^1 \mid P(a) = 0\}$ donc c'est l'ensemble des racines, qui est un ensemble fini (de cardinal inférieur à $\deg P$).

1.2 Exercice 2

Vérifions la double inclusion : L'inclusion $\mathfrak{m}_a \subseteq \ker ev_a$ est triviale. Réciproquement, prenons $P \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tq $P(a) = 0$. Alors par divisions euclidiennes successives, on peut écrire

$$P(x_1, \cdots, x_n) = Q_1(x_1, \cdots, x_n)(x_1 - a_1) + \cdots + Q_n(x_1, \cdots, x_n)(x_n - a_n) + r$$

avec r un polynôme constant. Alors $r = 0$ puisque $P(a) = 0$ et ainsi $P \in \mathfrak{m}_a$.

1.3 Exercice 3

Soit k un corps infini. On montre par récurrence sur n que $I(\mathbb{A}_k)^n = 0$:

1. Si $n = 1$, alors $I(\mathbb{A}_k^n) = \{f \in k[x] \mid \forall a \in k,\ f(a) = 0\}$. Mais alors soit $f \in I(\mathbb{A}_k^n)$, f a une infinité de racines, donc f est forcément nul (tout polynôme g non nul ayant au maximum $\deg g$ racines).
2. Soit $f \in I(\mathbb{A}_k^n)$. Alors regardons f comme un élément de $k[x_1, \cdots, x_{n-1}][x_n]$:

$$f = \sum Q_i x_n^i$$

avec $Q_i \in k[x_1, \cdots, x_{n-1}]$. Maintenant fixons $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$, alors pour tout $t \in k$

$$f(a_1, \cdots, a_{n-1}, t) = 0$$

donc le polynome $\sum Q_i(a_1, \cdots, a_n)x_n^i \in k[x_n]$ est nul (on utilise l'initialisation). Ainsi chaque $Q_i(a_1, \cdots, a_n)$ est nul, et ceci pour tout $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$. Ainsi par hypothèse de récurrence les $Q_i \in k[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ sont nuls et alors f est nul, donc $I(\mathbb{A}_k^n) = 0$.

1.4 Exercice 4

$\supseteq$ est trivial. Réciproquement, soit $f \in \mathbb{F}_q[x]$ tel que $f(a) = 0$, pour tout $a \in \mathbb{F}_q$. Remarquons alors que $x^q - x$ s'annule sur tout $\mathbb{F}_q$ et a au maximum q racines, donc doit forcément s'écrire $x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q}(x - a)$. Maintenant, on peut factoriser f en

$$f = g \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a) = g(x^q - x) \in (x^q - x)$$

et donc l'inclusion réciproque est prouvée.

1.5 Exercice 5

1) Montrons que $V = V(x^2 + y2 - 1)$: il est clair que $V \subseteq V(x^2 + y^2 - 1)$. Réciproquement, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a^2 + b^2 - 1 = 0$. Alors $a \in [-1, 1]$ donc il existe $t \in \mathbb{R} \mid x = \cos t$. Et alors $b^2 = 1 - (\cos t)^2 = (\sin t)^2$ donc $b = \pm \sin t$. Si $b = \sin t$, alors on a terminé, sinon posons $t' = -t$, alors $a = cost'$ et $b = \sin t'$ et donc $(a, b) \in V$.

2) Supposons que V_2 est algébrique, disons $V_2 = V(I)$ pour $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x, y]$. Alors prenons $P \in I$, on a $P(t, \sin t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mais alors regardons P comme un polynôme de $k[x][y]$

$$P = \sum Q_i y^i$$

avec $Q_i \in k[x]$. Alors fixons $t \in \mathbb{R}$, alors $\sum Q_i(t)y^i \in k[y]$ admet une infinité de racines, puisque $\sin(t+2k\pi)$ sont des racines, pour $k \in \mathbb{Z}$: en effet, $P(t, \sin(t+2k\pi)) = P(t, \sin t) = 0$. Ainsi $\sum Q_i(t)y^i = 0 \in k[y]$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q_i(t) = 0$ et donc $Q_i = 0 \in k[x]$, et ainsi $P = 0$. Mais alors $I = 0$, donc $V_2 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ absurde.

3) Supposons que $V_3 = V(I)$. Alors soit $P \in I$, alors $P(t, \mathrm{e}^t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Supposons que P est non nul, alors regardons P comme un élément de $k[x][y]$

$$P = \sum_{n=1}^{k} Q_n y^n$$

où $Q_k \neq 0$. Alors

$$0 = \sum_{n=1}^{k} Q_n(t) e^{nt} \iff 0 = \sum_{n=1}^{k} Q_n(t) e^{(n-k)t}$$

et alors en passant à la limite, par croissances comparées on obtiens que $Q_n(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$ et donc $Q_n = 0 \in k[x]$ absurde. Ainsi $P = 0$, donc $V_3 = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, absurde.

1.6 Exercice 6

1) Il est clair que $V_1 = V(y - x^2, z - x^3)$.

2) Montrons que $V_2 = V(xy - 1)$: $\subseteq$ est claire. Réciproquement, soit $(a, b) \in V(xy - 1)$, alors $ab = 1$. Maintenant a et b sont non nuls, et alors $b = 1/a$, donc $(a, b) = (a, 1/a) \in V_2$.

3) Remarquons dans un premier temps que

$$V_3 = \{(t, (t+1)^2 - 1) \in \mathbb{A}^2 \mid t \in k\} = \{(t, t^2 + 2t) \in \mathbb{A}^2 \mid t \in k\}$$

Ainsi il est clair que $V_3 = V(x^2 + 2x - y)$.

1.7 Exercice 7

1) Soit $(x, y) \in V(I)$. Alors $xy^3 = 0$ et $x^2 + y^2 = 0$. Alors

1. Soit $x = 0$ et alors $y^2 = 0$ donc $y = 0$
2. Soit $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

et ainsi $V(I) = \{0\}$. Soit $(x, y) \in V(J)$, alors $x^2 = 0$ et $y^3 = 0$, donc $x = 0$ et $y = 0$. AInsi $V(J) = \{0\}$.

2) $I(V(I)) = I(V(J)) = (x, y)$.

1.8 Exercice 8

1) Comme k est un corps infini, $I(V) = 0$ (cf 1.3). On a donc $V(I(V)) = \mathbb{A}^2$.

2) Comme $V \neq V(I(V))$, V n'est pas un ensemble algébrique affine.

1.9 Exercice 9

1) Oui, vu qu'un singleton n'a aucun sous ensemble propre.

2) Non. Une paire de points et l'union de deux points qui sont des sous-ensembles algébriques propres de cette paire de points.

3) Non : d'après le cours, $V(xy) = V(x) \cup V(y)$.

4) Si le corps n'est pas infini, alors $V(X-Y) = V((X-Y)^2)$ est un union fini disjoint de points, donc n'est pas irréductible. Si le corps est infini, montrons que $I(V(x-y)) = I(V((x-y)^2)) = (x-y)$: $\supseteq$ est donné directement par le cours. Réciproquement, soit $P \in I(V((x-y)^2))$, alors $V((x-y)^2) = \{(t,t) \in \mathbb{A}^2 \mid t \in k\}$ et donc $P(t,t) = 0$ pour tout $t \in k$. Ainsi si on considère P en tant qu'élément de $k[x][y]$ puis qu'on réalise la division euclidienne de celui-ci par $x-y$, alors on obtiens

$$P = Q_1(x,y)(x-y) + R(x,y)$$

et R s'identifie à un polynôme de $k[x]$ vu que $\deg_Y R < 1$. Mais alors $|k| = \infty$ et $R(t) = 0$ pour tout $t \in k$, donc finalement $R = 0$ et $P \in (x,y)$. Pour conclure, remarquons (au vu de ce que l'on vient de faire) que $(x-y)$ est le noyau de

$$\begin{array}{ccc} k[x,y] & \to & k[t] \\ P & \mapsto & P(t,t) \end{array}$$

donc finalement $k[x,y]/(x-y) = k[t]$ qui est intègre donc $(x-y)$ est premier, prouvant l'irréductibilité de $V(x-y) = V((x-y)^2)$.

5) $V(y-x^2) = \{(t,t^2) \mid t \in k\}$. Montrons alors que $I(V(y-x^2)) = (y-x^2)$ (si $|k| = \infty$). Si k est fini, alors $V(y-x^2)$ contiens au moins deux points ($(0,0)$ et $(1,1)$ par exemple) et n'est donc pas irréductible. Sinon, prouver l'égalité souhaitée revient à prouver que le noyau de

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & k[x,y] & \to & k[t] \\ & P & \mapsto & P(t,t^2) \end{array}$$

vaut $(y-x^2)$ (du fait que dans un corps infini un polynome est nul si et seulement si sa fonction polynomiale associée est nulle). Mais alors soit $P \in \ker\varphi$, on réalise la division euclidienne de P par $y-x^2$ dans $k[x][y]$:

$$P = Q(y-x^2) + R(x,y)$$

mais R s'identifie à un polynôme de $k[x]$ puisque $\deg_y R < 1$. Mais alors $R(a) = 0$ pour tout $a \in k$ et comme $|k| = \infty$, $R = 0$ et donc $P \in (y-x^2)$. L'inclusion réciproque est triviale. Finalement, on a bien $\ker\varphi = (y-x^2)$ et donc $I(V(y-x^2)) = (y-x^2)$ est un idéal premier, du fait que $k[x,y]/(y-x^2) \simeq k[t]$ qui est un anneau intègre.

6)

1. $V(x^2-y^2) = V((x-y)(x+y)) = V(x-y) \cup V(x+y)$, donc $V(x^2-y^2)$ n'est pas irréductible en caractéristique différente de 2. En caractéristique 2,

$$V(x^2-y^2) = V(x^2+y^2) = V((x+y)^2) = V(x+y)$$

est irréductible si et seulement si $|k| = \infty$.

2. On sépare en deux cas
   (a) S'il existe $i \in k$ tel que $i^2 = -1$, alors $V(x^2+y^2) = V(x-iy) \cup V(x+iy)$ et ces sous-ensembles sont popres si char $k \neq 2$. En caractéristique 2, $V(x^2+y^2) = V((x+y)^2) = V(x+y)$ qui est irréductible si $|k| = \infty$, et réductible sinon.
   (b) Si -1 n'est pas un carré dans k, alors $V(x^2+y^2) = \{0\}$: soit $(a,b) \in V(x^2+y^2)$, alors $a^2+b^2 = 0$. Alors si a est non nul,

$$b^2 = -a^2 \iff \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -1$$

absurde. Ainsi $a = 0$ et donc $b = 0$. $V(x^2+y^2)$ est donc irréductible dans ce cas.

7) Montrons que $V(y^4-x^2, y-x) = \{\pm(1,1)\}$: si $(a,b) \in V(y^4-x^2, y-x)$ alors $a = b$ et $a^2 = b^4$. Ainsi $a^2 = a^4$ et donc $a^2 = 1$, donc soit $a = 1$ et donc $b = 1$, soit $a = -1$ et donc $b = -1$. Ainsi si la caractéristique est différente de 2, c'est un ensemble réductible, sinon il est irréductible car composé d'un seul point.

1.10 Exercice 10

1) Montrons que $I(V(x^3)) = (x)$: clairement, $V(x^3) = \{(0,b,c) \in \mathbb{A}^3 \mid\}$. Maintenant soit $P \in I(V(x^3))$, alors $P(0,b,c) = 0$ pour tous $b,c \in k$. Mais alors en réalisant la division euclidiennez de P par x dans $k[y,z][x]$, on voit facilement que $P \in (x)$ (dans le cas où $|k| = \infty$). Finalement, $k[x,y,z]/(x) \simeq k[y,z]$ qui est un anneau intègre, donc $V(x^3)$ est irréductible.

2) aled

3) Tout d'abord, si le corps est fini, alors $V(Y^2-X^3)$ contiens $(0,0)$ et $(1,1)$, donc n'est pas irréductible. Supposons maintenant que $|k| = \infty$, montrons que

$$V(Y^2-X^3) = \{(t^2,t^3) \in k^2 \mid t \in k\} =: V$$

Si $(x,y) \in V$, alors $\exists t \in k \mid (x,y) = (t^2,t^3)$. Et alors $y^2 - x^3 = t^6 - t^6 = 0$, donc $(x,y) \in V(Y^2-X^3)$. Réciproquement, si $(x,y) \in V(Y^2-X^3)$, alors $y^2 = x^3$ dans k. Et alors si $x=0$, alors $y=0$ et $(0,0)\in V$. Sinon,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = x$$
$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = y$$

donc en posant $t = y/x$, $(x,y) = (t^2,t^3)\in V$.
Ensuite, montrons que $I(V(Y^2-X^3)) = (Y^2-X^3)$: remarquons dans un premier temps que pour tout $P\in k[T]$, $P=0 \iff P(t)=0, \forall t\in k$ du fait que $|k|=\infty$. Ainsi prouver $(Y^2-X^3) = I(V(Y^2-X^3))$ reviens à prouver que le noyau de

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & k[X,Y] & \to & k[T] \\ & P & \mapsto & P(T^2,T^3) \end{array}$$

vaut (Y^2-X^3). En effet, $P\in I(V(Y^2-X^3)) \iff P(t^3,t^3)=0, \forall t\in k \iff P(T^2,T^3)=0$ au vu de la remarque faite précédemment, donc $\ker\varphi = I(V(Y^2-X^3))$. Il est clair que $(Y^2-X^3)\subseteq \ker\varphi$. Réciproquement, soit $P\in\ker\varphi$, réalisons la division euclidienne de P par Y^2-X^3 dans $k[X][Y]$:

$$P(X,Y) = Q(X,Y)(Y^2-X^3) + R(X,Y)$$

où $\deg_Y R\leq 1$. Ecrivons alors $R(X,Y) = a(X)Y + b(X)$, montrons que a et b sont nuls. Développons alors a et b : si on écrit

$$a(X) = \sum_{i\geq 0} a_i X^i$$
$$b(X) = \sum_{i\geq 0} b_i X^i$$

on a

$$\begin{aligned} R(T^2,T^3) &= a(T^2)T^3 + b(T^2) \\ &= \sum_{i\geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{i\geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{j\geq 0} c_j T^j \end{aligned}$$

où

$$c_j = \begin{cases} a_i & \text{si } j = 2i+3 \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ b_i & \text{si } j = 2i \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Les coefficients de $a(T^2)T^3$ n'intéragissent pas avec ceux de $b(T^2)$, car devant des monômes de degré impair alors que ceux de $b(T^2)$ n'aparaissent que devant des monômes de degré pair). Ainsi comme $P \in \ker \varphi$, $0 = \varphi(R) = R(T^2, T^3)$ et donc $a_i, b_i = 0$ pour tout $i \geq 0$. Finalement, $a, b = 0$ et donc $R = 0$, d'où $P \in (Y^2 - X^3)$. Ainsi on a bien égalité $I(V(Y^2 - X^3)) = (Y^2 - X^3)$, et $V(Y^2 - X^3)$ est irréductible puisque $K[X,Y]/(Y^2, X^3)$ s'injecte dans $k[T]$ qui est lui-même intègre.

1.11 Exercice 11

A faire

1.12 Exercice 12

A faire

1.13 Exercice 13

A faire

1.14 Exercice 14

1) Il est clair que $V = V(X_2 - X_1^2, \cdots, X_n - X_1^n)$.

2) Montrons que $I(V) = (X_2 - X_1^2, \cdots, X_n - X_1^n)$. $\supseteq$ est claire, montrons l'inclusion réciproque : soit $P \in I(V)$, alors on peut écrire $P = \sum_{i=2}^n Q_i(X_i - X_1^i) + R$ où $R \in k[X_1]$. Maintenant pour tout $t \in k$, $P(t, t^2, \cdots, t^n) = R(t) = 0$ et donc comme k est de caractéristique nulle, il est infini et $R = 0$. Finalement $P \in (X_2 - X_1^2, \cdots, X_n - X_1^n)$ et on a égalité. Finalement le noyau du morphisme

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \cdots, X_n] & \to & K[T] \\ X_i & \mapsto & T^i \end{array}$$

est de noyau $(X_2 - X_1^2, \cdots, X_n - X_1^n) = I(V)$, et est surjectif, donc $k[V] \simeq k[T]$

3) $k[V]$ est intègre, donc V est irréductible.

1.15 Exercice 15

Soient $V_1 \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $V_2 \subseteq \mathbb{A}_k^m$ des ensembles algébriques affines. On note

$$\begin{aligned} k[x_1, \cdots, x_n] &=: A \\ k[y_1, \cdots, y_m] &=: B \\ k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m] &=: C \end{aligned}$$

Alors il existe $I \overset{\text{id}}{\subseteq} A$ et $J \overset{\text{id}}{\subseteq} B$ tels que $V_1 = V(I)$ et $V_2 = V(J)$. Considérons le morphisme

$$\varphi := p_I \otimes p_J : A \otimes_k B \to A/I \otimes_k B/J \tag{1.1}$$

Où $p_I : A \to A/I$, $p_J : B \to B/J$ sont les projections canoniques des quotients respectifs. On sait que le morphisme $A \otimes_k B \to C$ induit par les morphismes canoniques $i_1 : A \to C$, $i_B : B \to C$ (issus de la propriété universelle des anneaux de polynômes) est un isomorphisme ($\sum_{finie} P_i \otimes Q_i$ est envoyé sur $\sum_{finie} i_A(P_j) i_B(Q_j)$). Une dernière remarque est qu'au vu de la naturalité de $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Sets}}(S, k) \simeq \mathbf{Hom}_{k-\mathbf{CAlg}}(k[S], k)$, nous avons la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_a"'] & C \arrow[d, "\mathrm{ev}_{(a,b)}"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathrm{ev}_b"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Pour terminer l'exercice, montrons que $V(\ker \varphi) = V_1 \times V_2$ (où $\ker \varphi$ est vu comme un idéal de C par l'isomorphisme naturel donné précédemment). Prenons $(a, b) \in V(\ker \varphi)$, puis soient $P \in I$, $Q \in J$. Alors $P \otimes 1, 1 \otimes Q \in \ker \varphi$ et donc

$$0 = \mathrm{ev}_{(a,b)}(i_1(P) i_2(1)) = P(a)$$

et de même, $Q(b) = 0$, et ainsi $(a, b) \in V_1 \times V_2$. Réciproquement, soit $(a, b) \in V_1 \times V_2$. Alors tout élément de $\ker \varphi$ s'écrit comme une somme finie $\sum_{\text{finie}} P_j \otimes Q_j$. Mais

$$\mathrm{ev}_{(a,b)} \left(\sum_{\text{finie}} i_A(P_j) i_B(Q_j) \right) = \sum_{\text{finie}} P_j(a) Q_j(b) = 0$$

et ainsi $(a, b) \in V(\ker \varphi)$.

1.16 Exercice 16

Chapitre 2

TD2

2.1 Exercice 1

1) Montrons que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$: en passant au complémentaire, il faut montrer que $V(fg) = V(f) \cup V(g)$, ce que l'on sait vrai d'après le cours.

2) Soit $U = \mathbb{A}^n \backslash V(I)$ un ouvert de $\mathbb{A}^n$, avec $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. Alors

$$\begin{aligned} V(I) &= V\left(\bigcup_{f \in I} (f)\right) \\ &= \bigcap_{f \in I} V((f)) \end{aligned}$$

donc finalement

$$U = \bigcup_{f \in I} D(f)$$

en passant au complémentaire.

3) $D(f) = \emptyset \iff V((f)) = \mathbb{A}^n_k \iff \forall x \in k^n,\, f(x) = 0 \iff f = 0$, la dernière équivalence provenant du fait que $|k| = \infty$ (résultat que l'on a prouvé par récurrence en td).

4) On utilise les questions précédentes : comme les ensembles $D(f)$ forment une base pour la topologie de $\mathbb{A}^n$ (question 2), et que $U, V \neq \emptyset$, pour tout $x \in U$, $y \in V$, il existe $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tels que $x \in D(f) \subseteq U$ et $y \in D(g) \subseteq V$. Maintenant $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ (question 1) mais alors si $D(f) \cap D(g) = \emptyset$, alors $fg = 0$ (question 3) donc $f = 0$ ou $g = 0$ et donc $D(f) = \emptyset$ ou $D(g) = \emptyset$, absurde. Ainsi, $D(f) \cap D(g)$ est non vide, et donc $U \cap V \neq \emptyset$.

2.2 Exercice 2

On a

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} D(P_i) &= \mathbb{A}^n \backslash \bigcap_{i\in I} V(P_i)\\ &= \mathbb{A}^n \backslash V(\bigcup_{i\in I}\{P_i\})\\ &= \mathbb{A}^n \backslash V((P_1,\cdots,P_r))\end{aligned}$$

mais $1 \in (P_1,\cdots,P_r)$ donc

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} D(P_i) &= \mathbb{A}^n \backslash V(k[X_1,\cdots,X_n])\\ &= \mathbb{A}^n \backslash \emptyset = \mathbb{A}^n\end{aligned}$$

2.3 Exercice 3

Considérons l'ouvert $U = \mathbb{A}^n \backslash V$. Alors comme les $D(f)$ forment une base pour la topologie de $\mathbb{A}^n$, il existe $f \in k[X_1,\cdots,X_n]$ tel que $x \in D(f) \subseteq U$. Mais alors $f(x) \neq 0$ comme $x \in D(f)$, puis $V = \mathbb{A}^n \backslash U \subseteq \mathbb{A}^n \backslash D(f) = V(f)$ donc pour tout $y \in V$, $f(y) = 0$. Ainsi quitte a renormaliser f (en $f/f(x)$), il existe $f \in k[X_1,\cdots,X_n]$ tel que $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in V$.

2.4 exercice 4

Soient $V_1, V_2 \subseteq X$ des fermés tels que $X = V_1 \cup V_2$. Alors $U_1 = (V_1 \cap U_1) \cup (V_2 \cap U_1)$ et $U_2 = (V_1 \cap U_2) \cup (V_2 \cap U_2)$. Maintenant, par irrécuctibilité de U_1 et U_2, 4 cas se présentent :

1. $U_1 = (V_1 \cap U_1)$, $U_2 = (V_1 \cap U_2)$. Alors $U_1, U_2 \subseteq V_1$ et ainsi $X \subseteq V_1$.
2. $U_1 = (V_2 \cap U_1)$, $U_2 = (V_2 \cap U_2)$. Alors $U_1, U_2 \subseteq V_2$ et ainsi $X \subseteq V_2$.
3. $U_1 = (V_1 \cap U_1)$, $U_2 = (V_2 \cap U_2)$. Ainsi $U_1 \subseteq V_1$ et $U_2 \subseteq V_2$. Maintenant considérons $X \backslash U_1 \subseteq U_2$ et $F_1 \cap U_2 \subseteq U_2$. Alors
$$(V_1 \cap U_2) \cup (X \backslash U_1) = (V_1 \cap U_2) \cup (U_2 \backslash (U_1 \cap U_2)) \supseteq (U_1 \cap U_2) \cup (U_2 \backslash (U_1 \cap U_2)) = U_2$$
donc finalement $U_2 = (V_1 \cap U_2) \cup (X \backslash U_1)$. Mais alors soit $U_2 = V_1 \cap U_2$ du fait que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ et donc forcément $U_2 \neq X \backslash U_1$. Ainsi $U_2 \subseteq V_1$ donc $X \subseteq V_1$.
4. Le dernier cas $U_1 = (V_2 \cap U_1)$, $U_2 = (V_1 \cap U_2)$ se traite comme le précédent, en inversant V_1 et V_2.

Dans tous les cas, X est irréductible.

2.5 Exercice 5

1.

Si $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, $V(I) = V(\sqrt{I}) = V(\sqrt{J}) = V(J)$.
Si $V(I) = V(J)$, alors $\sqrt{I} = I(V(I)) = I(V(J)) = \sqrt{J}$ d'après le nullstellensatz.

2.

$$\begin{aligned}
&V(I(V_1 \cap V_2)) = V_1 \cap V_2\\
&V(\sqrt{I(V_1) + I(V_2)}) = V(I(V_1) + I(V_2)) = V(I(V_1)) \cap V(I(V_2)) = V_1 \cap V_2
\end{aligned}$$

donc $I(V_1 \cap V_2) = \sqrt{I(V_1 \cap V_2)} = \sqrt{I(V_1) + I(V_2)}$.

2.6 Exercice 6

1. L'application est régulière : en considérant les polynômes $P := X^2-1, Q := X(X^2-1) \in k[X]$, alors $f(t) = (P(t), Q(t))$. Elle n'est cependant pas bijective, par exemple -1 et 1 ont la même image par f.

2. Le foncteur $k[-]$ est pleinement fidèle, donc il préserve et réfléchis les isomorphismes. Ainsi $f^* = k[f]$ n'est pas un isomorphisme, puisque f n'est n'est pas un, n'étant pas bijectif.

3. Montrons que $k[V]$ n'est pas factoriel, alors comme $k[\mathbb{A}^1] \simeq k[X]$ est factoriel, on ne peut pas avoir $k[V] \simeq k[X]$. Par définition,

$$k[V] = k[X,Y]/I(V)$$

Calculons $I(V)$: pour cela, dans un premier temps montrons que $V = \{(t^2-1, t(t^2-1)) \mid t \in k\} =: W$:

1. Soit $(x,y) \in W$, alors il existe $t \in k$ tel que $(x,y) = (t^2-1, t(t^2-1))$. Mais

$$(t(t^2-1))^2 - (t^2-1)^2(t^2-1+1) = 0$$

   donc $(x,y) \in V$.
2. Soit $(x,y) \in V$, alors $y^2 - x^2(x+1) = 0$. Si $x = 0$, alors $y = 0$ et en prenant $t = 1 \in k$, on a bien $(x,y) = (t^2-1, t(t^2-1))$. Sinon, posons $t = y/x$, alors

$$\begin{aligned}
t^2 - 1 &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = x\\
t(t^2-1) &= \frac{y}{x}x = y
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien $V = W$. Finalement, prouvons que $I(V) = (Y^2 - X^2(X+1))$: $\supseteq$ est toujours vraie, montrons $\subseteq$. Soit $P \in I(V)$, alors A finir, préciser si le corps est infini ? algébriquement clos ?

4. Comme $k[W]$ n'est pas isomorphe à $k[\mathbb{A}^1]$, toujours du fait que $k[-]$ est pleinement fidèle, W et $\mathbb{A}^1$ ne sont pas isomorphes.

2.7 Exercice 7

Pour que cet exercice soit juste, il faut supposer que k est infini. Remarquons qu'en toute généralité, on a toujours $k[V] \simeq k[\mathbb{A}^1]$ mais $k[\mathbb{A}^1]$ n'est pas forcément isomorphe à $k[T]$ si k n'est pas infini (considérer par exemple $k = \mathbb{F}_2$).

1. Première méthode : f est un isomorphisme, d'inverse
$$g : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{A}^1 \\ (x,y,z) & \mapsto & x \end{array}$$
Ainsi $f^* : k[V] \to k[\mathbb{A}^1]$ est un isomorphisme d'inverse g^* par fonctorialité de *. Finalement, comme k est infini, $k[\mathbb{A}^1] \simeq k[T]$ (voir les exercices précédents, les fonctions polynomiales s'identifient aux polynômes dans ce cas).
2. Deuxième méthode : montrons que
$$\varphi : \begin{array}{ccc} k[X,Y,Z] & \to & k[T] \\ X & \mapsto & T \\ Y & \mapsto & T^2 \\ Z & \mapsto & T^3 \end{array}$$
est un isomorphisme est de noyau $I(V)$: si $P \in \ker \varphi$, alors $P(T, T^2, T^3) = 0$ et ainsi pour tout $(x,y,z) \in V$, $\exists t \in k$ tel que $(x,y,z) = (t, t^2, t^3)$ et donc $P(t,t^2,t^3) = 0$ et $P \in I(V)$. Réciproquement, si $P \in I(V)$, alors pour tout $t \in k$, $P(t,t^2,t^3) = 0$. Ainsi comme k est infini, $P(T,T^2,T^3) = 0 \in k[T]$ et $P \in \ker \varphi$. Pour terminer, remarquons que φ est surjective, ce qui prouve que $k[V] = k[X,Y,Z]/I(V) = k[X,Y,Z]/\ker \varphi \simeq k[T]$.

2.8 Exercice 8

A faire

2.9 Exercice 9

Soient V_1, V_2 des fermés de $\overline{f(X)}$ tels que $\overline{f(X)} = V_1 \cap V_2$. Comme $\overline{f(X)}$ est fermé, V_1 et V_2 sont des fermés de Y, et donc $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2)$ sont des fermés de X. Maintenant comme $f(X) \subseteq V_1 \cup V_2$, on a $X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$, et donc sans perte de généralité on peut supposer que $X = f^{-1}(V_1)$. Finalement, $f(X) \subseteq V_1 \subseteq \overline{f(X)}$, et donc $V_1 = \overline{f(X)}$.

2.10 Exercice 10

Hw2

Chapitre 3

TD3

3.1 Exercice 1

Remarquons que pour parler de dimension, V doit être non vide (sinon $k[V] = \{0\}$ et parler de corps des fractions d'un tel anneau n'a aucun sens). Ainsi supposons le :

1. Si $V = \{a\} \subseteq \mathbb{A}^n$, alors $V = V(\mathfrak{m}_a)$, où $\mathfrak{m}_a = (X_i - a_i, 1 \leq i \leq n)$. Mais alors $k[V] \simeq k$, et ainsi $\dim V = \mathrm{trdeg}_k k = 0$.
2. Réciproquement, supposons que $\mathrm{trdeg}_k k(V) = 0$. Alors $k(V)$ est algébrique sur k, mais k est algébriquement clos donc toutes ses extensions algébriques sont triviales, i.e. $k(V) \simeq k$. Maitenant, au vu de la suite de morphismes d'anneau $k \hookrightarrow k[V] \hookrightarrow k(V) \simeq k$, $k[V]$ doit être un corps, i.e. $I(V)$ doit être un idéal maximal. Mais $k = \bar{k}$ et donc $I(V) = \mathfrak{m}_a$ pour un certain $a \in \mathbb{A}^n$, et ainsi $V = V(I(V)) = V(\mathfrak{m}_a) = \{a\}$ est un point.

3.2 Exercice 2

1. $d = 0$: $F_1 = X, F_2 = Y, F_3 = Z$. Alors $V = 0$ est un point donc d'après l'exercice précédent elle est de dimension 0.
2. $d = 1$: $F_1 = F_2 = X, F_3 = Y$. Alors $k[V] \simeq k[Z]$ est de degré de transcendance 1 sur k.
3. $d = 2$: $F_1 = F_2 = F_3 = X$. Alors $k[V] \simeq k[Y, Z]$ est de degré de transcendance 2 sur k.
4. $d = 3$: $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. Alors $V = \mathbb{A}^3$ est de dimension 3.

3.3 Exercice 3

1. Notons $k[V] = k[x, y]$, $k(V) = k(x, y)$ ($x, y = [X], [Y]$). Montrons que $\{x\}$ est une base de transcendance de $k(v)$ sur k. Déja, soit $P \in k[T]$ tel que $P(x) = 0$, alors $P([X]) = [P(X)] = 0$ et donc $P(X) \in I(V) = (X - Y)$. Ainsi $P = Q(X - Y)$, mais $\deg_Y P = 0$, donc Q est forcément nul, et donc $P = 0$, ce qui prouve que $\{x\}$ est algébriquement indépendante. Finalement, $k(x, y)$ est algébrique sur $k(x)$, puisque $x - y = 0$ dans $k(x, y)$. On conclut donc que $\dim V = 1$.

2. Notons $k[V] = k[x, y, z]$. Montrons que $\{y, z\}$ est une base de transcendance de $k(x, y, z)$: dans $k(x, y, z)$, $x = y$, donc ce corps est une extension algébrique de $k(y, z)$. Motrons maintenant que $\{y, z\}$ est algébriquement indépendante. Soit $P \in k[Y, Z]$ tel que $P(y, z) = 0$, alors $P(y, z) = [P] \in k[V]$ où P est vu comme un élément de $k[X, Y, Z]$. Ainsi $P \in I(V)$ donc $P = Q(X - Y)$ avec $Q \in k[X, Y, Z]$. Mais comme P n'a aucun terme faisant intervenir X, Q doit forcément être nul, et donc P aussi, ce qui prouve l'indépendance algébrique de $\{y, z\}$ sur k. Ainsi $\dim V = 2$.

3. Il est facile de voir que $V = \{0\}$, et donc $I(V) = (X, Y)$ (si k est infini, ce qui est le cas si $k = \bar{k}$). Ainsi, $k(x, y) = k[x, y] = k$ est algébrique sur k, ce qui prouve que $\dim V = 0$.

4. Ici, $(X - Y, Z)$ est un idéal premier puisque c'est le noyau du morphisme

$$\begin{array}{ccc} k[X,Y,Z] & \to & k[T] \\ X & \mapsto & T \\ Y & \mapsto & T \\ Z & \mapsto & 0 \end{array}$$

Ainsi $I(V) = (X - Y, Z)$. Maintenant calculons une base de transcendance de $k(V) = k(x, y, z)$: montrons que $\{x\}$ covient. Déjà, $k(x, y, z)$ est algébrique sur $k(x)$, puisque $z = 0$ et $x - y = 0$ dans ce corps. Maintenant si $P \in k[X]$ est tel que $P(x) = 0$, alors cette égalité est aussi vraie dans $k[V]$ et alors $P(x) = [P] = 0$, donc $P \in I(V)$. Ainsi il existe $Q_1, Q_2 \in k[X, Y, Z]$ tels que $P = Q_1(X - Y) + Q_2 Z$. Réalisons la division euclidienne de Q_1 par Z, alors $Q_1 = AZ + B$ avec $B \in k[X, Y]$. Mais alors B doit être nul car sinon $P = B(X - Y) + Z(A(X - Y) + Q_2)$ et si $A(X - Y) + Q_2$ est non nul, on a un problème pour le degré en Z, et sinon on a un problème pour le degré en Y. Ainsi $Q_1 = ZA$. Alors $P = Z((X - Y) + Q_2)$, et au vu du degré en Z on doit avoir que $(X - Y)A + Q_2 = 0$, et donc $P = 0$. Ainsi $\{x\}$ est algébriquement indépendante, donc une base de transcendance et $\dim V = 1$.

5. On a déjà vu dans un exercice précedent que comme Y^5 n'est pas un carré dans $k[Y]$, $X^2 - Y^5$ est irréductible. Ainsi $I(V) = (X^2 - Y^5)$, et alors notons $k(x, y) = k(V)$, montrons que $\{x\}$ est une base de transcendance. Déjà, $k(x, y)$ est algébrique sur $k(x)$ puisque $y^5 = x^2$ dans ce corps. Maintenant, soit $P \in k[X]$ tel que $P(x) = 0 \in k(x, y)$. Alors cette équation peut être relevée dans $k[x, y]$, et alors $P(x) = [P] = 0$ dans cet anneau, donc $P \in I(V)$. Alors il existe $Q \in k[X, Y]$ tel que $P = Q(X^2 - Y^5)$, mais en regardant le degré en Y, on conclut que $Q = 0$ et donc $P = 0$. Donc $\{x\}$ est algébriquement indépendante, c'est une base de transcendance de $k(x, y)$ sur k, donc $\dim V = 1$.

3.4 Exercice 4

Pour calculer la dimension de $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$, on peut calculer la dimension de l'espace tangent géométrique T_a^{geom}. Notons $P_1 = X^2 - Y^3, P_2 = Y^2 - Z^3$, on a

$$P_1^1 = \frac{\partial P_1}{\partial X}(0)X + \frac{\partial P_1}{\partial Y}(0)Y + \frac{\partial P_1}{\partial Z}(0)Z = 0$$
$$P_1^1 = \frac{\partial P_2}{\partial X}(0)X + \frac{\partial P}{\partial Y}(0)Y +_2 \frac{\partial P_2}{\partial Z}(0)Z = 0$$

Ainsi $T_a^{\text{geom}} = V(0, 0) = \mathbb{A}^3$. C'est un espace vectoriel de dimension 3, donc la dimension de $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$ en tant que k-ev vaut 3.

3.5 Exercice 5

1. Calculons la dimension de V : en supposant que $k = \bar{k}$, $I(V) = \sqrt{(X^2 + Y^2 - 1)}$. Remarquons alors que $X^2 + Y^2 - 1$ est un polynôme irréductible (à prouver si possible). Ceci implique que $I(V) = (X^2 + Y^2 - 1)$ et que V est bien une variété affine. Montrons qu'elle est de dimension 1 : condidérons $k(x, y)$ le corps des fractions de $k[V] = k[x, y]$, $x, y = [X], [Y]$. Alors $k(x, y)$ est algébrique sur $k(x)$, puisque $x^2 + y^2 - 1 = 0$ dans ce corps. Ensuite $\{x\}$ est algébriquement indépendante sur k, car sinon on aurait $P \in k[T]$ tel que $P(x) = 0$ dans $k(x, y)$, donc dans $k[v]$, ce qui veut dire que $P(x) = [P(X)] = 0$ donc $P(X) \in I(V)$. Maintenant en regardant le degré en Y on voit facilement que $P = 0$, ce qui prouve que $\{x\}$ est algébriquement indépendante sur k.
Pour trouver les points singuliers, calculons la jacobienne associée a $X^2 + Y^2 - 1$: elle vaut

$$\begin{bmatrix} 2X & 2Y \end{bmatrix}$$

Alors $(x, y) \in V$ est un point singulier si et seulement si le rang de cette matrice est strictement inférieur à $2 - 1 = 1$, i.e. de rang 0, i.e. nulle. Donc forcément $(x, y) = (0, 0)$, mais ce point n'est pas dans V, d'où V est une courbe régulière.

3.6 Exercice 6

Si deux variétés sont isomorphes, alors leurs algèbres de fonctions régulières sont isomorphes. La dimension d'une variété étant égale à la dimension de Krull de leurs algèbres de fonctions régulières, deux variétés isomorphes sont de même dimension. Pour terminer l'exercice, considérons les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \to & V(X-Y) \subseteq \mathbb{A}^2 \\ x & \mapsto & (x,x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \to & V(X-Y) \subseteq \mathbb{A}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x,x,y) \end{array}$$

Ainsi $V(X-Y) \subseteq \mathbb{A}^2$ est de dimension 1, alors que $V(X-Y) \subseteq \mathbb{A}^3$ est de dimension 2 et donc ne peuvent être isomorphes.

3.7 Exercice 7

Tout d'abord, faisons quelques calculs préliminaire.

1. $V = \{(t,t^2,t^4)\mathbb{A}^3 \mid t \in k\}$: il est clair que pour tout $t \in k$, $(t,t^2,t^3) \in V(X^2-Y, Y^2-Z)$. Réciproquement, soit $(x,y,z) \in V(X^2-Y, Y^2-Z)$, alors forcément $y = x^2$ et $z = y^2 = x^4$. Ainsi, il existe $t \in k$ (on prend x) tel que $(x,y,z) = (t,t^2,t^4)$.
2. $I(V) = (X^2-Y, Y^2-Z)$: si k est infini, alors $\supseteq$ est ok, il faut montrer $\subseteq$: si $P \in I(V)$, alors écrivons $P = Q_1(X^2-Y) + Q_2(Y^2-Z) + R$ les divisions successives de P par Y et Z. Au vu du degré des diviseurs, $R \in k[X]$. Alors en évaluant en (t,t^2,t^4), on obtiens que $R(t) = 0$ pour tout $t \in k$ donc $P = 0$ puisque le corps est infini, et donc $P \in (X^2-Y, Y^2-Z)$.
3. (X^2-Y, Y^2-Z) est un idéal premier : on voit facilement que $k[X,Y,Z]/(X^2-Y, Y^2-Z) \simeq k[X]$ qui est intègre.
4. Comme $k[V] \simeq k[T]$, on a directement que

Maintenant montrons que V est une courbe lisse :

1. En calculant

pas clair ce que ça veut dire deux méthodes : on peut calculer la jacobienne et montrer qu'il n'y a aucun points singuliers, calculer l'espage tangent géométrique et montrer que sa dimension vaut toujours la dimension de la variété, trouver un isomorphisme avec $\mathbb{A}^1$ ...

3.8 Exercice 8

1. Comme k est algébriquement clos et de caractéristique différente de 2, soit φ une forme bilinéaire, alors il existe une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ de k^n telle que $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Maintenant soit $P \in k[X_1, \cdots, X_n]$ un polynôme homogène de degré 2. On peut lui associer une forme bilinéaire φ_P donnée par $\varphi_P(x,y) =$

3.9 Exercice 9

1. Soient $V, W \subseteq \mathbb{A}^n, \mathbb{A}^m$. Montrons que leur produit est une variété affine de $\mathbb{A}^{n+m}$. On a déjà vu dans un TD précédent que le produit d'ensemble algébriques est un ensemble algébrique. Il faut donc montrer que $V \times W$ est irréductible. Pour cela, remarquons dans un premier temps que pour tout $x \in V$, alors $\{x\} \times W \subseteq V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ est un fermé de $V \times W$ (du fait que la topologie sur $V \times W$ est induite par celle de $\mathbb{A}^{n+m}$ et que $\{x\} \times W$ est un ensemble algébrique donc fermé de $\mathbb{A}^{n+m}$) et de plus, $\{x\} \times W \simeq W$ en tant qu'ensembles algébriques, et donc en tant qu'espace topologiques, vu que les morphismes sont continus pour la topologie de Zariski (et bien sur on a aussi $V \times \{y\} \subseteq V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ est un fermé de $V \times W$ et est isomorphe à V). Alors supposons que $V \times W = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 des fermés de $V \times W$. Condidérons alors les ensembles

$$V_i = \{x \in V \mid \{x\} \times W \subseteq F_1\}$$

1. $V = V_1 \cup V_2$: soit $x \in V$, alors

$$\{x\} \times W = ((\{x\} \times W) \cap F_1) \cup ((\{x\} \times W) \cap F_2)$$

   puis $\{x\} \times W$ est un fermé de $V \times W$, et donc les $(\{x\} \times W) \cap F_i$ sont des fermés de $\{x\} \times W$. Maintenant $W \simeq \{x\} \times W$ en tant qu'espaces topologiques, donc $\{x\} \times W$ est irréductible, et donc soit $\{x\} \times W \subseteq F_1$, soit $\{x\} \times W \subseteq F_2$, i.e. $x \in V_1$ ou $x \in V_2$.

2. Remarquons que

$$V_i = \bigcap_{y \in W} \{x \in V \mid (x, y) \in F_i\}$$

   Ainsi il suffit de montrer que our tout $y \in W$, $\{x \in V \mid (x, y) \in F_i\}$ est un fermé de V : $V \simeq V \times \{y\}$, et par cet isomorphisme $\{x \in V \mid (x, y) \in F_i\}$ est envoyé sur $V \times \{y\} \cap F_1$, qui est un fermé de $V \times \{y\}$. Cela permet de conclure sur le fait que V_i est un fermé de V.

Ainsi, par irréductibilité de V, on a $V = V_1$ ou $V = V_2$, qui implique que $V \times W = F_1$ ou $V \times W = F_2$, prouvant que $V \times W$ est irréductible.

2. Soient V, W des ensembles algébriques. Montrons que $k[V \times W] \simeq k[V] \otimes_k k[W]$. Avant cela, montrons un lemme intermédiaire :

> **Lemme 3.9.1.** *Soient A, B des C-algèbres, I, J des idéaux de A, B respectivement. Alors*
>
> $$A/I \otimes B/J \simeq (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$$

Démonstration. Montrons que le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \phi : & A/I \otimes B/J & \to & (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J) \\ & [a] \otimes [b] & \mapsto & [a \otimes b] \end{array}$$

est un isomorphisme. Remarquons juste rapidement que ce morphisme est bien défini, car induit par les morphismes $A/I \to (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$ et $B/J \to (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$ eux même induits par $A \to A \otimes B \to (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$ et $B \to A \otimes B \to (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$, qui passent bien au quotient par I et J respectivement. Alors soit

$$\begin{array}{rccc} \psi : & A \otimes B & \to & A/I \otimes B/I \\ & a \otimes b & \mapsto & [a] \otimes [b] \end{array}$$

alors si $x \in A \otimes B$ est dans $I \otimes B + A \otimes J$, on peut l'écrire comme un somme

$$x = \sum_n i_n \otimes b_n + \sum_m a_m \otimes j_m$$

Mais alors

$$\psi(x) = \sum_n [i_n] \otimes [b_n] + \sum_m [a_m] \otimes [j_m] = 0$$

donc ψ induit une application $\tilde{\psi} : (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J) \to A/I \otimes B/J$ qui envoie $[a \otimes b]$ sur $[a] \otimes [b]$. Il est finalement facile de voir que $\tilde{\psi}$ et ϕ sont inverses l'une de l'autre, prouvant l'isomorphisme. □

Ainsi

$$k[V] \otimes_k k[W] \simeq k[X_1, \cdots, X_n] \otimes k[Y_1, \cdots, Y_n]/(I(V) \otimes B + A \otimes I(W))$$

mais on sait que $k[X_1, \cdots, X_n] \otimes k[Y_1, \cdots, Y_n m \simeq k[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m]$, et $(I(V) \otimes B + A \otimes I(W))$ est envoyé sur l'idéal engendré par $I(V)$ et $I(W)$ vu comme des sous ensembles de $k[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m]$ par cet isomorphisme. Ainsi il suffit de montrer que $(I(V) \cup I(W)) = I(V \times W)$:

1. $\subseteq$: clair.
2. $\supseteq$: Soit $R \in I(V \times W)$. Alors on peut écrire

$$R = \sum_{i=1}^{r} P_i Q_i$$

avec $P_i \in k[X_1, \cdots, X_n]$ et $Q_i \in k[Y_1, \cdots, Y_m]$. Maintenant soit $P_i \in I(V)$ pour tout i et alors on a terminé, soit il existe i tel que $P_i \notin I(V)$. Quitte a réindexer, OPS que

$i = 1$. Alors il existe $x \in V$ tel que $P_1(x) \neq 0$. Maintenant $\sum P_i(x)Q_i \in k[Y_1, \cdots, Y_m]$ est dans $I(W)$, car $R(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in V \times W$. Et alors

$$R' := \frac{P_1}{P_1(x)} \sum P_i(x)Q_i \in (I(V) \cup I(W))$$

puis $R \in (I(V) \cup I(W))$ si et seulement si $R - R' \in (I(V) \cup I(W))$. Mais

$$\begin{aligned} R - R' &= \sum_{i=1}^{r} \left(P_i - \frac{P_1}{P_1(x)} P_i(x) \right) Q_i \\ &= \sum_{i=2}^{r} P_i' Q_i \end{aligned}$$

où $P_i' \in k[X_1, \cdots, X_n]$. Ainsi en itérant ce procédé, soit on va tomber sur le premier cas, soit on va finir par arriver sur le cas $R = 0$, qui est bien dans l'idéal $(I(V) \cup I(W))$.

3. Si k est algébriquement clos, alors on a une équivalence de catégories (donnée par le foncteur $k[-]$) entre la catégorie des variétés affines et des algèbres de tf intègres. Ainsi soient A, B des k-alg de tf intègres, il existe V, W des variétés affines telles que $k[V] \simeq A$, $k[W] \simeq B$. Mais alors

$$A \otimes_k B \simeq k[V] \otimes_k k[W] \simeq k[V \times W]$$

puis d'après la question 1, $V \times W$ est une variété affine et donc $k[V \times W]$ est intègre. Cela prouve au passage que la catégorie des k-alg de tf intègres admet un objet satisfaisant la propriété universelle de coproduit, et ainsi par équivalence de catégorie $V \times W$ satisgait la propriété universelle du produit dans la catégorie des variétés affines.

4.

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[X]/(X^2 + 1)$$

mais ce dernier anneau n'est pas intègre puisque $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$.

3.10 Exercice 10

Considérons le fermé $V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2$. Alors $V(XY) = \{(t, 0) \mid t \in k\} \cup \{(0, t) \mid t \in k\}$. Supposons alors que $V(XY) = V(I) \times V(J)$, comme $(t, 0) \in V(XY)$, on doit avoir $t \in V(I)$, pour tout $t \in k$ i.e. $V(I) = \mathbb{A}^1$. De même, on doit avoir $V(J) = \mathbb{A}^1$, mais $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2 \neq V(XY)$.

3.11 Exercice 11

Dans un premier temps, soit $f_i \in k[X_1, \cdots, X_n]$ tels que $\varphi(a) = (f_1(a), \cdots, f_i(a))$. Alors montrer que φ est continue revient à montrer que $\tilde{\varphi} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^l$ définie par $\tilde{\varphi}(a) = (f_1(a), \cdots, f_i(a))$ pour tout $a \in \mathbb{A}^n$ est continue. En effet, soit Z un fermé de W, alors $Z = Z' \cap W$ pour Z un fermé de $\mathbb{A}^l$. Maintenant $\varphi^{-1}(Z) = \tilde{\varphi}^{-1}(Z') \cap V$ et est donc un fermé si et seulement si $\tilde{\varphi}^{-1}(Z')$ est un fermé. On peut donc se ramener au cas $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^l$. Ainsi considérons un fermé $V(J) \overset{\text{ferm}}{\subseteq} \mathbb{A}^l$, posons $I := k[\varphi](J)$, et montrons que $\varphi^{-1}(V(J)) = V(I)$.

1. $\subseteq$: soit $x \in \varphi^{-1}(V(J))$, alors pour tout $P \in I$, il existe $Q \in J$ tel que $P = k[\varphi](Q)$. Maintenant

$$P(x) = k[\varphi](Q)(x) = Q(\varphi(x)) = 0$$

puisque $Q \in J$ et $\varphi(x) \in V(J)$.

2. $\supseteq$: Soit $x \in V(I)$, alors pour tout $Q \in J$, $k[\varphi](Q) \in I$ et donc

$$Q(\varphi(x)) = k[\varphi](Q)(x) = 0$$

et donc $\varphi(x) \in V(J)$.

3.12 Exercice 12

Soit $E \subseteq \mathbb{A}^n$. Montrons que $V(I(E)) = \bar{E}$: déja, si $x \in E$, alors soit $P \in I(E)$, $P(x) = 0$ et ainsi $x \in V(I(E))$. Ensuite, soit $E \subseteq V(J)$ un ensemble algébrique, alors $J \subseteq I(V(J))$, et $I(V(J)) \subseteq I(E)$, donc $J \subseteq I(E)$ et finalement $V(I(E)) \subseteq V(J)$, ce qui prouve que $\bar{E} = V(I(E))$.

Chapitre 4

TD4

4.1 Exercice 1

4.2 Exercice 2

4.3 Exercice 3

4.4 Exercice 4

4.5 Exercice 5

4.6 Exercice 6

0. Montrons plus généralement que si $X = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$, avec U_i un ouvert irréductible pour tout $1 \leq i \leq n$, tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ pour tous $i \neq j$, alors X est irréductible. Procédons par récurrence : si $k = 1$ ok. Si $k > 1$, alors écrivons

$$X = U_1 \cup \bigcup_{i=2}^{k} U_i$$

Alors par récurrence, $\bigcup_{i=2}^{k} U_i$ est irréductible, puis la propriété est vraie pour deux ouverts donc on a bien que X est irréductible.

1. On sait que $\mathbb{P}_n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, où $U_i \simeq \mathbb{A}^n$ (en tant qu'espaces topologiques). Ainsi U_i est irréductible puisque $\mathbb{A}^n$ l'est, et donc en appliquant la question 0 on conclut que $\mathbb{P}^n$ est irréductible.

3. Notons d le degré de F. On a $V(F) = \cup_{i=0}^{n} U_i \cap V(F)$, et $U_i \cap V(F) \simeq V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$, où $f = F(X_1, \cdots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \cdots, X_n)$. Ainsi il faut montrer que f est irréductible, et quitte à réindexer, on peut supposer que $f = F(1, X_1, \cdots, X_n) \in k[X_1, \cdots, X_n]$. Alors soient $g, h \in k[X_1, \cdots, X_n]$ tels que $f = gh$. On voudrait homogénéiser cette équation pour retomber sur F, alors il faut prouver que l'homogénéisation commute au produit et on a aussi que l'homogénéisation de f en X_0 ne donne pas forcément F (par exemple considérer $F = X_0$). En fait, on peut prouver qu'il existe $d \geq 0$ tel que $F = X_0^d h_{X_0}(f)$: écrivons

$$F = \sum_{i=1}^{r} X_0^{d_i} m_i$$

où $0 \leq d_1 < d_1 < \cdots < d_r \leq d$, et $\deg m_i = d - d_i$. Maintenant

$$f = \sum_{i=1}^{r} m_i$$

et m_1 est de degré maximal $d - d_1$, donc

$$h_{X_0}(f) = \sum_{i=1}^{r} m_i X_0^{(d-d_1)-(d-d_i)} = \sum_{i=1}^{r} m_i X_0^{d_i - d_1}$$

mais alors

$$X_0^{d_1} h_{X_0}(f) = \sum_{i=1}^{r} m_i X^{d_i - d_1} X_0^{d_1} = F$$

Maintenant dans l'exo, F est irréductible, et comme $F = X_0^d h_{X_0}(f)$, soit $d = 1$ et $h_{X_0}(f) \in k$, et donc $f = 1$ et $V(f) = \emptyset$ qui est irréductible, et sinon $d = 0$, et $h_{X_0}(f)$ est irréductible. Maintenant si on décompose

$$g = \sum_{i=0}^{e} g^i, \; h = \sum_{i=0}^{f} h^i$$

avec $g^e, h^f \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} h_{x_0}(g) h_{X_0}(h) &= \left(\sum_{i=0}^{e} g^i X^{e-i} \right) \left(\sum_{i=0}^{f} h^i X^{f-i} \right) \\ &= X^{e+d} g^0 h^0 + X^{e+d-1}(g^0 h^1 + g^1 h^0) + \cdots + g^e h^f \\ &= h_{X_0}(gh) \end{aligned}$$

Finalement, $h_{X_0}(f) = h_{X_0}(gh) = h_{x_0}(g) h_{X_0}(h)$ et comme $h_{X_0}(f)$ est irréductible, $h_{X_0}(g) \in k$ ou $h_{X_0}(h) \in k$ et donc $g = (h_{X_0}(g))(1, X_1, \cdots, X_n) \in k$ ou $h = (h_{X_0}(h))(1, X_1, \cdots, X_n) \in k$. Plus structurellement, on aurait pu voir que l'ensemble

$$A = \{F \in k[X_0, \cdots, X_n] \mid F \text{ homogène }, X_0 \nmid F\}$$

est un sous monoïde de $(k[X_0, \cdots, X_n], \times)$ et l'evaluation de X_0 en 1 est un morphisme de monoïdes entre A et $k[X_1, \cdots, X_n]$ qui est bijectif, d'inverse h_{X_0}, et donc h_{X_0} est aussi un morphisme de monoïdes (et la formule s'étend bien aux polynômes nuls).

2. D'après la question précédente, il suffit de prouver que $XT - YZ \in k[X, Y, Z, T]$ est irréductible. Ecrivons $XT - YZ = PQ$, $P, Q \in k[X, Y, Z, T]$, alors soit $\deg_X P = 1$ et alors $\deg_X Q = 0$, soit $\deg_X Q = 1$ et alors $deg_X P = 0$. Sans perte de généralité, supposons que $\deg_X P = 1$. Alors si on avait $\deg_Y Q = 1$, PQ contiendrait un terme divisible par XY. Or aucun terme de $XT - YZ$ n'est divisible par XY, ainsi $\deg_Y Q = 0$ et donc $\deg_Y P = 1$. De même, $\deg_Z P = 1$. Finalement comme $\deg_Y P = 1$, si $\deg_T Q$ valait 1, on aurait un terme de PQ qui serait divisible par YT, or aucun termes de $XT - YZ$ n'est divisible par YT, et donc on doit avoir que $\deg_T P = 1$. Au final, $\deg_X Q = \deg_Y Q = \deg_Z Q = \deg_T Q = 0$ et donc $Q \in k$, et donc $XT - YZ$ est irréductible.

4.7 Exercice 7

4.8 Exercice 8

4.9 Exercice 9

4.10 Exercice 10

4.11 Exercice 11

4.12 Exercice 12