

Courbes algébriques - TD

Alexandre Guillemot

22 octobre 2022

Table des matières

1	TD1	2
1.1	Exercice 1	2
1.2	Exercice 2	2
1.3	Exercice 3	2
1.4	Exercice 4	3
1.5	Exercice 5	3
1.6	Exercice 6	4
1.7	Exercice 7	4
1.8	Exercice 8	4
1.9	Exercice 9	5
1.10	Exercice 10	6
1.11	Exercice 11	8
1.12	Exercice 12	8
1.13	Exercice 13	8
1.14	Exercice 14	8
1.15	Exercice 15	9
1.16	Exercice 16	9
2	TD2	10
2.1	Exercice 1	10
2.2	Exercice 2	11
2.3	Exercice 3	11
2.4	exercice 4	11
2.5	Exercice 5	12
2.6	Exercice 6	12
2.7	Exercice 7	13
2.8	Exercice 8	13
2.9	Exercice 9	13
2.10	Exercice 10	14

3	TD3	15
3.1	Exercice 1	15
3.2	Exercice 2	15
3.3	Exercice 3	16
3.4	Exercice 4	16
3.5	Exercice 5	16
3.6	Exercice 6	16
3.7	Exercice 7	16
3.8	Exercice 8	16
3.9	Exercice 9	17
3.10	Exercice 10	19
3.11	Exercice 11	20
3.12	Exercice 12	20

Chapitre 1

TD1

1.1 Exercice 1

Soit $V \subset \mathbb{A}^1$ un sous ensemble algébrique, alors il existe $M \subseteq k[x]$ tq $V = V(M)$. Maintenant $V(M) = V((M))$ et comme $k[x]$ est principal, il existe $P \in k[x]$ tq $V = V(P)$. Remarquons alors que $P \neq 0$ car sinon $V(P) = V(0) = \mathbb{A}^1$. Mais alors $V(P) = \{a \in \mathbb{A}^1 \mid P(a) = 0\}$ donc c'est l'ensemble des racines, qui est un ensemble fini (de cardinal inférieur à $\deg P$).

1.2 Exercice 2

Vérifions la double inclusion : L'inclusion $\mathfrak{m}_a \subseteq \ker ev_a$ est triviale. Réciproquement, prenons $P \in k[x_1, \dots, x_n]$ tq $P(a) = 0$. Alors par divisions euclidiennes successives, on peut écrire

$$P(x_1, \dots, x_n) = Q_1(x_1, \dots, x_n)(x_1 - a_1) + \dots + Q_n(x_1, \dots, x_n)(x_n - a_n) + r$$

avec r un polynôme constant. Alors $r = 0$ puisque $P(a) = 0$ et ainsi $P \in \mathfrak{m}_a$.

1.3 Exercice 3

Soit k un corps infini. On montre par récurrence sur n que $I(\mathbb{A}_k)^n = 0$:

1. Si $n = 1$, alors $I(\mathbb{A}_k^n) = \{f \in k[x] \mid \forall a \in k, f(a) = 0\}$. Mais alors soit $f \in I(\mathbb{A}_k^n)$, f a une infinité de racines, donc f est forcément nul (tout polynôme g non nul ayant au maximum $\deg g$ racines).
2. Soit $f \in I(\mathbb{A}_k^n)$. Alors regardons f comme un élément de $k[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$:

$$f = \sum Q_i x_n^i$$

avec $Q_i \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Maintenant fixons $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$, alors pour tout $t \in k$

$$f(a_1, \dots, a_{n-1}, t) = 0$$

donc le polynome $\sum Q_i(a_1, \dots, a_{n-1})x_n^i \in k[x_n]$ est nul (on utilise l'initialisation). Ainsi chaque $Q_i(a_1, \dots, a_{n-1})$ est nul, et ceci pour tout $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$. Ainsi par hypothèse de récurrence les $Q_i \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ sont nuls et alors f est nul, donc $I(\mathbb{A}_k^n) = 0$.

1.4 Exercice 4

\supseteq est trivial. Réciproquement, soit $f \in \mathbb{F}_q[x]$ tel que $f(a) = 0$, pour tout $a \in \mathbb{F}_q$. Remarquons alors que $x^q - x$ s'annule sur tout \mathbb{F}_q et a au maximum q racines, donc doit forcément s'écrire $x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a)$. Maintenant, on peut factoriser f en

$$f = g \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a) = g(x^q - x) \in (x^q - x)$$

et donc l'inclusion réciproque est prouvée.

1.5 Exercice 5

1) Montrons que $V = V(x^2 + y^2 - 1)$: il est clair que $V \subseteq V(x^2 + y^2 - 1)$. Réciproquement, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a^2 + b^2 - 1 = 0$. Alors $a \in [-1, 1]$ donc il existe $t \in \mathbb{R} \mid x = \cos t$. Et alors $b^2 = 1 - (\cos t)^2 = (\sin t)^2$ donc $b = \pm \sin t$. Si $b = \sin t$, alors on a terminé, sinon posons $t' = -t$, alors $a = \cos t'$ et $b = \sin t'$ et donc $(a, b) \in V$.

2) Supposons que V_2 est algébrique, disons $V_2 = V(I)$ pour $I \stackrel{\text{id}}{\subseteq} k[x, y]$. Alors prenons $P \in I$, on a $P(t, \sin t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mais alors regardons P comme un polynôme de $k[x][y]$

$$P = \sum Q_i y^i$$

avec $Q_i \in k[x]$. Alors fixons $t \in \mathbb{R}$, alors $\sum Q_i(t)y^i \in k[y]$ admet une infinité de racines, puisque $\sin(t+2k\pi)$ sont des racines, pour $k \in \mathbb{Z}$: en effet, $P(t, \sin(t+2k\pi)) = P(t, \sin t) = 0$. Ainsi $\sum Q_i(t)y^i = 0 \in k[y]$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q_i(t) = 0$ et donc $Q_i = 0 \in k[x]$, et ainsi $P = 0$. Mais alors $I = 0$, donc $V_2 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ absurde.

3) Supposons que $V_3 = V(I)$. Alors soit $P \in I$, alors $P(t, e^t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Supposons que P est non nul, alors regardons P comme un élément de $k[x][y]$

$$P = \sum_{n=1}^k Q_n y^n$$

où $Q_k \neq 0$. Alors

$$0 = \sum_{n=1}^k Q_n(t) e^{nt} \iff 0 = \sum_{n=1}^k Q_n(t) e^{(n-k)t}$$

et alors en passant à la limite, par croissances comparées on obtiens que $Q_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ et donc $Q_n = 0 \in k[x]$ absurde. Ainsi $P = 0$, donc $V_3 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, absurde.

1.6 Exercice 6

1) Il est clair que $V_1 = V(y - x^2, z - x^3)$.

2) Montrons que $V_2 = V(xy - 1) : \subseteq$ est claire. Réciproquement, soit $(a, b) \in V(xy - 1)$, alors $ab = 1$. Maintenant a et b sont non nuls, et alors $b = 1/a$, donc $(a, b) = (a, 1/a) \in V_2$.

3) Remarquons dans un premier temps que

$$V_3 = \{(t, (t+1)^2 - 1) \in \mathbb{A}^2 \mid t \in k\} = \{(t, t^2 + 2t) \in \mathbb{A}^2 \mid t \in k\}$$

Ainsi il est clair que $V_3 = V(x^2 + 2x - y)$.

1.7 Exercice 7

1) Soit $(x, y) \in V(I)$. Alors $xy^3 = 0$ et $x^2 + y^2 = 0$. Alors

1. Soit $x = 0$ et alors $y^2 = 0$ donc $y = 0$

2. Soit $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

et ainsi $V(I) = \{0\}$. Soit $(x, y) \in V(J)$, alors $x^2 = 0$ et $y^3 = 0$, donc $x = 0$ et $y = 0$. Ainsi $V(J) = \{0\}$.

2) $I(V(I)) = I(V(J)) = (x, y)$.

1.8 Exercice 8

1) Comme k est un corps infini, $I(V) = 0$ (cf 1.3). On a donc $V(I(V)) = \mathbb{A}^2$.

2) Comme $V \neq V(I(V))$, V n'est pas un ensemble algébrique affine.

1.9 Exercice 9

1) Oui, vu qu'un singleton n'a aucun sous ensemble propre.

2) Non. Une paire de points et l'union de deux points qui sont des sous-ensembles algébriques propres de cette paire de points.

3) Non : d'après le cours, $V(xy) = V(x) \cup V(y)$.

4) Si le corps n'est pas infini, alors $V(X - Y) = V((X - Y)^2)$ est un union fini disjoint de points, donc n'est pas irréductible. Si le corps est infini, montrons que $I(V(x-y)) = I(V((x-y)^2)) = (x-y) : \supseteq$ est donné directement par le cours. Réciproquement, soit $P \in I(V((x-y)^2))$, alors $V((x-y)^2) = \{(t, t) \in \mathbb{A}^2 \mid t \in k\}$ et donc $P(t, t) = 0$ pour tout $t \in k$. Ainsi si on considère P en tant qu'élément de $k[x][y]$ puis qu'on réalise la division euclidienne de celui-ci par $x - y$, alors on obtiens

$$P = Q_1(x, y)(x - y) + R(x, y)$$

et R s'identifie à un polynôme de $k[x]$ vu que $\deg_y R < 1$. Mais alors $|k| = \infty$ et $R(t) = 0$ pour tout $t \in k$, donc finalement $R = 0$ et $P \in (x, y)$. Pour conclure, remarquons (au vu de ce que l'on vient de faire) que $(x - y)$ est le noyau de

$$\begin{array}{ccc} k[x, y] & \rightarrow & k[t] \\ P & \mapsto & P(t, t) \end{array}$$

donc finalement $k[x, y]/(x - y) = k[t]$ qui est intègre donc $(x - y)$ est premier, prouvant l'irréductibilité de $V(x - y) = V((x - y)^2)$.

5) $V(y - x^2) = \{(t, t^2) \mid t \in k\}$. Montrons alors que $I(V(y - x^2)) = (y - x^2)$ (si $|k| = \infty$). Si k est fini, alors $V(y - x^2)$ contient au moins deux points $((0, 0)$ et $(1, 1)$ par exemple) et n'est donc pas irréductible. Sinon, prouver l'égalité souhaitée revient à prouver que le noyau de

$$\begin{array}{ccc} \varphi : k[x, y] & \rightarrow & k[t] \\ P & \mapsto & P(t, t^2) \end{array}$$

vaut $(y - x^2)$ (du fait que dans un corps infini un polynôme est nul si et seulement si sa fonction polynomiale associée est nulle). Mais alors soit $P \in \ker \varphi$, on réalise la division euclidienne de P par $y - x^2$ dans $k[x][y]$:

$$P = Q(y - x^2) + R(x, y)$$

mais R s'identifie à un polynôme de $k[x]$ puisque $\deg_y R < 1$. Mais alors $R(a) = 0$ pour tout $a \in k$ et comme $|k| = \infty$, $R = 0$ et donc $P \in (y - x^2)$. L'inclusion réciproque est triviale. Finalement, on a bien $\ker \varphi = (y - x^2)$ et donc $I(V(y - x^2)) = (y - x^2)$ est un idéal premier, du fait que $k[x, y]/(y - x^2) \simeq k[t]$ qui est un anneau intègre.

- 6) 1. $V(x^2 - y^2) = V((x - y)(x + y)) = V(x - y) \cup V(x + y)$, donc $V(x^2 - y^2)$ n'est pas irréductible en caractéristique différente de 2. En caractéristique 2,

$$V(x^2 - y^2) = V(x^2 + y^2) = V((x + y)^2) = V(x + y)$$

est irréductible si et seulement si $|k| = \infty$.

2. On sépare en deux cas

- (a) S'il existe $i \in k$ tel que $i^2 = -1$, alors $V(x^2 + y^2) = V(x - iy) \cup V(x + iy)$ et ces sous-ensembles sont propres si $\text{char } k \neq 2$. En caractéristique 2, $V(x^2 + y^2) = V((x + y)^2) = V(x + y)$ qui est irréductible si $|k| = \infty$, et réductible sinon.
- (b) Si -1 n'est pas un carré dans k , alors $V(x^2 + y^2) = \{0\}$: soit $(a, b) \in V(x^2 + y^2)$, alors $a^2 + b^2 = 0$. Alors si a est non nul,

$$b^2 = -a^2 \iff \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -1$$

absurde. Ainsi $a = 0$ et donc $b = 0$. $V(x^2 + y^2)$ est donc irréductible dans ce cas.

7) Montrons que $V(y^4 - x^2, y - x) = \{\pm(1, 1)\}$: si $(a, b) \in V(y^4 - x^2, y - x)$ alors $a = b$ et $a^2 = b^4$. Ainsi $a^2 = a^4$ et donc $a^2 = 1$, donc soit $a = 1$ et donc $b = 1$, soit $a = -1$ et donc $b = -1$. Ainsi si la caractéristique est différente de 2, c'est un ensemble réductible, sinon il est irréductible car composé d'un seul point.

1.10 Exercice 10

1) Montrons que $I(V(x^3)) = (x)$: clairement, $V(x^3) = \{(0, b, c) \in \mathbb{A}^3 \mid\}$. Maintenant soit $P \in I(V(x^3))$, alors $P(0, b, c) = 0$ pour tous $b, c \in k$. Mais alors en réalisant la division euclidienne de P par x dans $k[y, z][x]$, on voit facilement que $P \in (x)$ (dans le cas où $|k| = \infty$). Finalement, $k[x, y, z]/(x) \simeq k[y, z]$ qui est un anneau intègre, donc $V(x^3)$ est irréductible.

2) **aled**

3) Tout d'abord, si le corps est fini, alors $V(Y^2 - X^3)$ contient $(0, 0)$ et $(1, 1)$, donc n'est pas irréductible. Supposons maintenant que $|k| = \infty$, montrons que

$$V(Y^2 - X^3) = \{(t^2, t^3) \in k^2 \mid t \in k\} =: V$$

Si $(x, y) \in V$, alors $\exists t \in k \mid (x, y) = (t^2, t^3)$. Et alors $y^2 - x^3 = t^6 - t^6 = 0$, donc $(x, y) \in V(Y^2 - X^3)$. Réciproquement, si $(x, y) \in V(Y^2 - X^3)$, alors $y^2 = x^3$ dans k . Et

alors si $x = 0$, alors $y = 0$ et $(0, 0) \in V$. Sinon,

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{x}\right)^2 &= x \\ \left(\frac{y}{x}\right)^3 &= y\end{aligned}$$

donc en posant $t = y/x$, $(x, y) = (t^2, t^3) \in V$.

Ensuite, montrons que $I(V(Y^2 - X^3)) = (Y^2 - X^3)$: remarquons dans un premier temps que pour tout $P \in k[T]$, $P = 0 \iff P(t) = 0, \forall t \in k$ du fait que $|k| = \infty$. Ainsi prouver $(Y^2 - X^3) = I(V(Y^2 - X^3))$ revient à prouver que le noyau de

$$\begin{array}{ccc} \varphi : k[X, Y] & \rightarrow & k[T] \\ P & \mapsto & P(T^2, T^3) \end{array}$$

vaut $(Y^2 - X^3)$. En effet, $P \in I(V(Y^2 - X^3)) \iff P(t^2, t^3) = 0, \forall t \in k \iff P(T^2, T^3) = 0$ au vu de la remarque faite précédemment, donc $\ker \varphi = I(V(Y^2 - X^3))$. Il est clair que $(Y^2 - X^3) \subseteq \ker \varphi$. Réciproquement, soit $P \in \ker \varphi$, réalisons la division euclidienne de P par $Y^2 - X^3$ dans $k[X][Y]$:

$$P(X, Y) = Q(X, Y)(Y^2 - X^3) + R(X, Y)$$

où $\deg_Y R \leq 1$. Écrivons alors $R(X, Y) = a(X)Y + b(X)$, montrons que a et b sont nuls. Développons alors a et b : si on écrit

$$\begin{aligned}a(X) &= \sum_{i \geq 0} a_i X^i \\ b(X) &= \sum_{i \geq 0} b_i X^i\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}R(T^2, T^3) &= a(T^2)T^3 + b(T^2) \\ &= \sum_{i \geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{i \geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{j \geq 0} c_j T^j\end{aligned}$$

où

$$c_j = \begin{cases} a_i & \text{si } j = 2i + 3 \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ b_i & \text{si } j = 2i \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Les coefficients de $a(T^2)T^3$ n'interagissent pas avec ceux de $b(T^2)$, car devant des monômes de degré impair alors que ceux de $b(T^2)$ n'apparaissent que devant des monômes de degré pair). Ainsi comme $P \in \ker \varphi$, $0 = \varphi(R) = R(T^2, T^3)$ et donc $a_i, b_i = 0$ pour tout $i \geq 0$. Finalement, $a, b = 0$ et donc $R = 0$, d'où $P \in (Y^2 - X^3)$. Ainsi on a bien égalité $I(V(Y^2 - X^3)) = (Y^2 - X^3)$, et $V(Y^2 - X^3)$ est irréductible puisque $K[X, Y]/(Y^2, X^3)$ s'injecte dans $k[T]$ qui est lui-même intègre.

1.11 Exercice 11

A faire

1.12 Exercice 12

A faire

1.13 Exercice 13

A faire

1.14 Exercice 14

1) Il est clair que $V = V(X_2 - X_1^2, \dots, X_n - X_1^n)$.

2) Montrons que $I(V) = (X_2 - X_1^2, \dots, X_n - X_1^n)$. \supseteq est claire, montrons l'inclusion réciproque : soit $P \in I(V)$, alors on peut écrire $P = \sum_{i=2}^n Q_i(X_i - X_1^i) + R$ où $R \in k[X_1]$. Maintenant pour tout $t \in k$, $P(t, t^2, \dots, t^n) = R(t) = 0$ et donc comme k est de caractéristique nulle, il est infini et $R = 0$. Finalement $P \in (X_2 - X_1^2, \dots, X_n - X_1^n)$ et on a égalité. Finalement le noyau du morphisme

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_n] & \rightarrow & K[T] \\ X_i & \mapsto & T^i \end{array}$$

est de noyau $(X_2 - X_1^2, \dots, X_n - X_1^n) = I(V)$, et est surjectif, donc $k[V] \simeq k[T]$

3) $k[V]$ est intègre, donc V est irréductible.

1.15 Exercice 15

Soient $V_1 \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $V_2 \subseteq \mathbb{A}_k^m$ des ensembles algébriques affines. On note

$$\begin{aligned} k[x_1, \dots, x_n] &=: A \\ k[y_1, \dots, y_m] &=: B \\ k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m] &=: C \end{aligned}$$

Alors il existe $I \subseteq A$ et $J \subseteq B$ tels que $V_1 = V(I)$ et $V_2 = V(J)$. Considérons le morphisme

$$\varphi := p_I \otimes p_J : A \otimes_k B \rightarrow A/I \otimes_k B/J \quad (1.1)$$

Où $p_I : A \rightarrow A/I$, $p_J : B \rightarrow B/J$ sont les projections canoniques des quotients respectifs. On sait que le morphisme $A \otimes_k B \rightarrow C$ induit par les morphismes canoniques $i_1 : A \rightarrow C$, $i_B : B \rightarrow C$ (issus de la propriété universelle des anneaux de polynômes) est un isomorphisme ($\sum_{finie} P_i \otimes Q_i$ est envoyé sur $\sum_{finie} i_A(P_j) i_B(Q_j)$). Une dernière remarque est qu'au vu de la naturalité de $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Sets}}(S, k) \simeq \mathbf{Hom}_{k\text{-}\mathbf{CAlg}}(k[S], k)$, nous avons la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_1} & C & \xleftarrow{i_2} & B \\ & \searrow \text{ev}_a & \downarrow \text{ev}_{(a,b)} & \swarrow \text{ev}_b & \\ & & k & & \end{array}$$

Pour terminer l'exercice, montrons que $V(\ker \varphi) = V_1 \times V_2$ (où $\ker \varphi$ est vu comme un idéal de C par l'isomorphisme naturel donné précédemment). Prenons $(a, b) \in V(\ker \varphi)$, puis soient $P \in I$, $Q \in J$. Alors $P \otimes 1, 1 \otimes Q \in \ker \varphi$ et donc

$$0 = \text{ev}_{(a,b)}(i_1(P) i_2(1)) = P(a)$$

et de même, $Q(b) = 0$, et ainsi $(a, b) \in V_1 \times V_2$. Réciproquement, soit $(a, b) \in V_1 \times V_2$. Alors tout élément de $\ker \varphi$ s'écrit comme une somme finie $\sum_{finie} P_j \otimes Q_j$. Mais

$$\text{ev}_{(a,b)} \left(\sum_{finie} i_A(P_j) i_B(Q_j) \right) = \sum_{finie} P_j(a) Q_j(b) = 0$$

et ainsi $(a, b) \in V(\ker \varphi)$.

1.16 Exercice 16

Chapitre 2

TD2

2.1 Exercice 1

1) Montrons que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$: en passant au complémentaire, il faut montrer que $V(fg) = V(f) \cup V(g)$, ce que l'on sait vrai d'après le cours.

2) Soit $U = \mathbb{A}^n \setminus V(I)$ un ouvert de \mathbb{A}^n , avec $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Alors

$$\begin{aligned} V(I) &= V\left(\bigcup_{f \in I} (f)\right) \\ &= \bigcap_{f \in I} V((f)) \end{aligned}$$

donc finalement

$$U = \bigcup_{f \in I} D(f)$$

en passant au complémentaire.

3) $D(f) = \emptyset \iff V((f)) = \mathbb{A}_k^n \iff \forall x \in k^n, f(x) = 0 \iff f = 0$, la dernière équivalence provenant du fait que $|k| = \infty$ (résultat que l'on a prouvé par récurrence en td).

4) On utilise les questions précédentes : comme les ensembles $D(f)$ forment une base pour la topologie de \mathbb{A}^n (question 2), et que $U, V \neq \emptyset$, pour tout $x \in U, y \in V$, il existe $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ tels que $x \in D(f) \subseteq U$ et $y \in D(g) \subseteq V$. Maintenant $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ (question 1) mais alors si $D(f) \cap D(g) = \emptyset$, alors $fg = 0$ (question 3) donc $f = 0$ ou $g = 0$ et donc $D(f) = \emptyset$ ou $D(g) = \emptyset$, absurde. Ainsi, $D(f) \cap D(g)$ est non vide, et donc $U \cap V \neq \emptyset$.

2.2 Exercice 2

On a

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} D(P_i) &= \mathbb{A}^n \setminus \bigcap_{i \in I} V(P_i) \\ &= \mathbb{A}^n \setminus V\left(\bigcup_{i \in I} \{P_i\}\right) \\ &= \mathbb{A}^n \setminus V((P_1, \dots, P_r))\end{aligned}$$

mais $1 \in (P_1, \dots, P_r)$ donc

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} D(P_i) &= \mathbb{A}^n \setminus V(k[X_1, \dots, X_n]) \\ &= \mathbb{A}^n \setminus \emptyset = \mathbb{A}^n\end{aligned}$$

2.3 Exercice 3

Considérons l'ouvert $U = \mathbb{A}^n \setminus V$. Alors comme les $D(f)$ forment une base pour la topologie de \mathbb{A}^n , il existe $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $x \in D(f) \subseteq U$. Mais alors $f(x) \neq 0$ comme $x \in D(f)$, puis $V = \mathbb{A}^n \setminus U \subseteq \mathbb{A}^n \setminus D(f) = V(f)$ donc pour tout $y \in V$, $f(y) = 0$. Ainsi quitte à renormaliser f (en $f/f(x)$), il existe $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in V$.

2.4 exercice 4

Soient $V_1, V_2 \subseteq X$ des fermés tels que $X = V_1 \cup V_2$. Alors $U_1 = (V_1 \cap U_1) \cup (V_2 \cap U_1)$ et $U_2 = (V_1 \cap U_2) \cup (V_2 \cap U_2)$. Maintenant, par irréductibilité de U_1 et U_2 , 4 cas se présentent :

1. $U_1 = (V_1 \cap U_1)$, $U_2 = (V_1 \cap U_2)$. Alors $U_1, U_2 \subseteq V_1$ et ainsi $X \subseteq V_1$.
2. $U_1 = (V_2 \cap U_1)$, $U_2 = (V_2 \cap U_2)$. Alors $U_1, U_2 \subseteq V_2$ et ainsi $X \subseteq V_2$.
3. $U_1 = (V_1 \cap U_1)$, $U_2 = (V_2 \cap U_2)$. Ainsi $U_1 \subseteq V_1$ et $U_2 \subseteq V_2$. Maintenant considérons $X \setminus U_1 \subseteq U_2$ et $F_1 \cap U_2 \subseteq U_2$. Alors

$$(V_1 \cap U_2) \cup (X \setminus U_1) = (V_1 \cap U_2) \cup (U_2 \setminus (U_1 \cap U_2)) \supseteq (U_1 \cap U_2) \cup (U_2 \setminus (U_1 \cap U_2)) = U_2$$

donc finalement $U_2 = (V_1 \cap U_2) \cup (X \setminus U_1)$. Mais alors soit $U_2 = V_1 \cap U_2$ du fait que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ et donc forcément $U_2 \neq X \setminus U_1$. Ainsi $U_2 \subseteq V_1$ donc $X \subseteq V_1$.

4. Le dernier cas $U_1 = (V_2 \cap U_1)$, $U_2 = (V_1 \cap U_2)$ se traite comme le précédent, en inversant V_1 et V_2 .

Dans tous les cas, X est irréductible.

2.5 Exercice 5**1.**Si $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, $V(I) = V(\sqrt{I}) = V(\sqrt{J}) = V(J)$.Si $V(I) = V(J)$, alors $\sqrt{I} = I(V(I)) = I(V(J)) = \sqrt{J}$ d'après le nullstellensatz.**2.**

$$V(I(V_1 \cap V_2)) = V_1 \cap V_2$$

$$V(\sqrt{I(V_1) + I(V_2)}) = V(I(V_1) + I(V_2)) = V(I(V_1)) \cap V(I(V_2)) = V_1 \cap V_2$$

$$\text{donc } I(V_1 \cap V_2) = \sqrt{I(V_1 \cap V_2)} = \sqrt{I(V_1) + I(V_2)}.$$

2.6 Exercice 6

1. L'application est régulière : en considérant les polynômes $P := X^2 - 1, Q := X(X^2 - 1) \in k[X]$, alors $f(t) = (P(t), Q(t))$. Elle n'est cependant pas bijective, par exemple -1 et 1 ont la même image par f .

2. Le foncteur $k[-]$ est pleinement fidèle, donc il préserve et réfléchit les isomorphismes. Ainsi $f^* = k[f]$ n'est pas un isomorphisme, puisque f n'est pas un, n'étant pas bijectif.

3. Montrons que $k[V]$ n'est pas factoriel, alors comme $k[\mathbb{A}^1] \simeq k[X]$ est factoriel, on ne peut pas avoir $k[V] \simeq k[X]$. Par définition,

$$k[V] = k[X, Y]/I(V)$$

Calculons $I(V)$: pour cela, dans un premier temps montrons que $V = \{(t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \mid t \in k\} =: W$:

1. Soit $(x, y) \in W$, alors il existe $t \in k$ tel que $(x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Mais

$$(t(t^2 - 1))^2 - (t^2 - 1)^2(t^2 - 1 + 1) = 0$$

donc $(x, y) \in V$.

2. Soit $(x, y) \in V$, alors $y^2 - x^2(x + 1) = 0$. Si $x = 0$, alors $y = 0$ et en prenant $t = 1 \in k$, on a bien $(x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Sinon, posons $t = y/x$, alors

$$\begin{aligned} t^2 - 1 &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = x \\ t(t^2 - 1) &= \frac{y}{x}x = y \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $V = W$. Finalement, prouvons que $I(V) = (Y^2 - X^2(X + 1)) : \supseteq$ est toujours vraie, montrons \subseteq . Soit $P \in I(V)$, alors **A finir, préciser si le corps est infini? algébriquement clos?**

4. Comme $k[W]$ n'est pas isomorphe à $k[\mathbb{A}^1]$, toujours du fait que $k[-]$ est pleinement fidèle, W et \mathbb{A}^1 ne sont pas isomorphes.

2.7 Exercice 7

Pour que cet exercice soit juste, il faut supposer que k est infini. Remarquons qu'en toute généralité, on a toujours $k[V] \simeq k[\mathbb{A}^1]$ mais $k[\mathbb{A}^1]$ n'est pas forcément isomorphe à $k[T]$ si k n'est pas infini (considérer par exemple $k = \mathbb{F}_2$).

1. Première méthode : f est un isomorphisme, d'inverse

$$\begin{aligned} g : V &\rightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, y, z) &\mapsto x \end{aligned}$$

Ainsi $f^* : k[V] \rightarrow k[\mathbb{A}^1]$ est un isomorphisme d'inverse g^* par fonctorialité de $*$. Finalement, comme k est infini, $k[\mathbb{A}^1] \simeq k[T]$ (voir les exercices précédents, les fonctions polynomiales s'identifient aux polynômes dans ce cas).

2. Deuxième méthode : montrons que

$$\begin{aligned} \varphi : k[X, Y, Z] &\rightarrow k[T] \\ X &\mapsto T \\ Y &\mapsto T^2 \\ Z &\mapsto T^3 \end{aligned}$$

est un isomorphisme est de noyau $I(V)$: si $P \in \ker \varphi$, alors $P(T, T^2, T^3) = 0$ et ainsi pour tout $(x, y, z) \in V$, $\exists t \in k$ tel que $(x, y, z) = (t, t^2, t^3)$ et donc $P(t, t^2, t^3) = 0$ et $P \in I(V)$. Réciproquement, si $P \in I(V)$, alors pour tout $t \in k$, $P(t, t^2, t^3) = 0$. Ainsi comme k est infini, $P(T, T^2, T^3) = 0 \in k[T]$ et $P \in \ker \varphi$. Pour terminer, remarquons que φ est surjective, ce qui prouve que $k[V] = k[X, Y, Z]/I(V) = k[X, Y, Z]/\ker \varphi \simeq k[T]$.

2.8 Exercice 8

A faire

2.9 Exercice 9

Soient V_1, V_2 des fermés de $\overline{f(X)}$ tels que $\overline{f(X)} = V_1 \cup V_2$. Comme $\overline{f(X)}$ est fermé, V_1 et V_2 sont des fermés de Y , et donc $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2)$ sont des fermés de X . Maintenant comme $f(X) \subseteq V_1 \cup V_2$, on a $X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$, et donc sans perte de généralité on peut supposer que $X = f^{-1}(V_1)$. Finalement, $f(X) \subseteq V_1 \subseteq \overline{f(X)}$, et donc $V_1 = \overline{f(X)}$.

2.10 Exercice 10

Hw2

Chapitre 3

TD3

3.1 Exercice 1

Remarquons que pour parler de dimension, V doit être non vide (sinon $k[V] = \{0\}$ et parler de corps des fractions d'un tel anneau n'a aucun sens). Ainsi supposons le :

1. Si $V = \{a\} \subseteq \mathbb{A}^n$, alors $V = V(\mathfrak{m}_a)$, où $\mathfrak{m}_a = (X_i - a_i, 1 \leq i \leq n)$. Mais alors $k[V] \simeq k$, et ainsi $\dim V = \text{trdeg}_k k = 0$.
2. Réciproquement, supposons que $\text{trdeg}_k k(V) = 0$. Alors $k(V)$ est algébrique sur k , mais k est algébriquement clos donc toutes ses extensions algébriques sont triviales, i.e. $k(V) \simeq k$. Maintenant, au vu de la suite de morphismes d'anneau $k \hookrightarrow k[V] \hookrightarrow k(V) \simeq k$, $k[V]$ doit être un corps, i.e. $I(V)$ doit être un idéal maximal. Mais $k = \bar{k}$ et donc $I(V) = \mathfrak{m}_a$ pour un certain $a \in \mathbb{A}^n$, et ainsi $V = V(I(V)) = V(\mathfrak{m}_a) = \{a\}$ est un point.

3.2 Exercice 2

1. $d = 0 : F_1 = X, F_2 = Y, F_3 = Z$. Alors $V = 0$ est un point donc d'après l'exercice précédent elle est de dimension 0.
2. $d = 1 : F_1 = F_2 = X, F_3 = Y$. Alors $k[V] \simeq k[Z]$ est de degré de transcendance 1 sur k .
3. $d = 2 : F_1 = F_2 = F_3 = X$. Alors $k[V] \simeq k[Y, Z]$ est de degré de transcendance 2 sur k .
4. $d = 3 : F_1 = F_2 = F_3 = 0$. Alors $V = \mathbb{A}^3$ est de dimension 3.

3.3 Exercice 3

1. Notons $k[V] = k[x, y]$, $k(V) = k(x, y)$ ($x, y = [X], [Y]$). Montrons que $\{x\}$ est une base de transcendance de $k(V)$ sur k . Déjà, soit $P \in k[T]$ tel que $P(x) = 0$, alors $P([X]) = [P(X)] = 0$ et donc $P(X) \in I(V) = (X - Y)$. Ainsi $P = Q(X - Y)$, mais $\deg_Y P = 0$, donc Q est forcément nul, et donc $P = 0$, ce qui prouve que $\{x\}$ est algébriquement indépendante. Finalement, $k(x, y)$ est algébrique sur $k(x)$, puisque $x - y = 0$ dans $k(x, y)$. On conclut donc que $\dim V = 1$.

2. Notons $k[V] = k[x, y, z]$. Sans démonstration, une base de transcendance de $k(x, y, z)$ est $\{y, z\}$, donc V est de dimension 2.

3. Il est facile de voir que $V = \{0\}$ (si k est infini), et donc $I(V) = (X, Y)$. Ainsi, $k(x, y) = k[x, y] = k$ est algébrique sur k , ce qui prouve que $\dim V = 0$.

4. Ces questions cassent les couilles antisash

3.4 Exercice 4

3.5 Exercice 5

3.6 Exercice 6

Si deux variétés sont isomorphes, alors leurs algèbres de fonctions régulières sont isomorphes. La dimension d'une variété étant égale à la dimension de Krull de leurs algèbres de fonctions régulières, deux variétés isomorphes sont de même dimension. Pour terminer l'exercice, considérons les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \rightarrow & V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^2 \\ x & \mapsto & (x, x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \rightarrow & V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, x, y) \end{array}$$

Ainsi $V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^2$ est de dimension 1, alors que $V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^3$ est de dimension 2 et donc ne peuvent être isomorphes.

3.7 Exercice 7

3.8 Exercice 8

1. Comme k est algébriquement clos et de caractéristique différente de 2, soit φ une forme bilinéaire, alors il existe une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de k^n telle que $\varphi(e_i, e_j) = 0$

pour tout $i \neq j$. Maintenant soit $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme homogène de degré 2. On peut lui associer une forme bilinéaire φ_P donnée par $\varphi_P(x, y) =$

3.9 Exercice 9

1. Soient $V, W \subseteq \mathbb{A}^n, \mathbb{A}^m$. Montrons que leur produit est une variété affine de \mathbb{A}^{n+m} . On a déjà vu dans un TD précédent que le produit d'ensembles algébriques est un ensemble algébrique. Il faut donc montrer que $V \times W$ est irréductible. Pour cela, remarquons dans un premier temps que pour tout $x \in V$, alors $\{x\} \times W \subseteq V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ est un fermé de $V \times W$ (du fait que la topologie sur $V \times W$ est induite par celle de \mathbb{A}^{n+m} et que $\{x\} \times W$ est un ensemble algébrique donc fermé de \mathbb{A}^{n+m}) et de plus, $\{x\} \times W \simeq W$ en tant qu'ensembles algébriques, et donc en tant qu'espace topologiques, vu que les morphismes sont continus pour la topologie de Zariski (et bien sur on a aussi $V \times \{y\} \subseteq V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ est un fermé de $V \times W$ et est isomorphe à V). Alors supposons que $V \times W = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 des fermés de $V \times W$. Considérons alors les ensembles

$$V_i = \{x \in V \mid \{x\} \times W \subseteq F_i\}$$

1. $V = V_1 \cup V_2$: soit $x \in V$, alors

$$\{x\} \times W = ((\{x\} \times W) \cap F_1) \cup ((\{x\} \times W) \cap F_2)$$

puis $\{x\} \times W$ est un fermé de $V \times W$, et donc les $(\{x\} \times W) \cap F_i$ sont des fermés de $\{x\} \times W$. Maintenant $W \simeq \{x\} \times W$ en tant qu'espaces topologiques, donc $\{x\} \times W$ est irréductible, et donc soit $\{x\} \times W \subseteq F_1$, soit $\{x\} \times W \subseteq F_2$, i.e. $x \in V_1$ ou $x \in V_2$.

2. Remarquons que

$$V_i = \bigcap_{y \in W} \{x \in V \mid (x, y) \in F_i\}$$

Ainsi il suffit de montrer que pour tout $y \in W$, $\{x \in V \mid (x, y) \in F_i\}$ est un fermé de V : $V \simeq V \times \{y\}$, et par cet isomorphisme $\{x \in V \mid (x, y) \in F_i\}$ est envoyé sur $V \times \{y\} \cap F_i$, qui est un fermé de $V \times \{y\}$. Cela permet de conclure sur le fait que V_i est un fermé de V .

Ainsi, par irréductibilité de V , on a $V = V_1$ ou $V = V_2$, qui implique que $V \times W = F_1$ ou $V \times W = F_2$, prouvant que $V \times W$ est irréductible.

2. Soient V, W des ensembles algébriques. Montrons que $k[V \times W] \simeq k[V] \otimes_k k[W]$. Avant cela, montrons un lemme intermédiaire :

Lemme 3.9.1. Soient A, B des C -algèbres, I, J des idéaux de A, B respectivement. Alors

$$A/I \otimes B/J \simeq (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$$

Démonstration. Montrons que le morphisme

$$\begin{aligned} \phi : A/I \otimes B/J &\rightarrow (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J) \\ [a] \otimes [b] &\mapsto [a \otimes b] \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Remarquons juste rapidement que ce morphisme est bien défini, car induit par les morphismes $A/I \rightarrow (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$ et $B/J \rightarrow (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$ eux même induits par $A \rightarrow A \otimes B \rightarrow (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$ et $B \rightarrow A \otimes B \rightarrow (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$, qui passent bien au quotient par I et J respectivement. Alors soit

$$\begin{aligned} \psi : A \otimes B &\rightarrow A/I \otimes B/J \\ a \otimes b &\mapsto [a] \otimes [b] \end{aligned}$$

alors si $x \in A \otimes B$ est dans $I \otimes B + A \otimes J$, on peut l'écrire comme une somme

$$x = \sum_n i_n \otimes b_n + \sum_m a_m \otimes j_m$$

Mais alors

$$\psi(x) = \sum_n [i_n] \otimes [b_n] + \sum_m [a_m] \otimes [j_m] = 0$$

donc ψ induit une application $\tilde{\psi} : (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J) \rightarrow A/I \otimes B/J$ qui envoie $[a \otimes b]$ sur $[a] \otimes [b]$. Il est finalement facile de voir que $\tilde{\psi}$ et ϕ sont inverses l'une de l'autre, prouvant l'isomorphisme. \square

Ainsi

$$k[V] \otimes_k k[W] \simeq k[X_1, \dots, X_n] \otimes k[Y_1, \dots, Y_m] / (I(V) \otimes B + A \otimes I(W))$$

mais on sait que $k[X_1, \dots, X_n] \otimes k[Y_1, \dots, Y_m] \simeq k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$, et $(I(V) \otimes B + A \otimes I(W))$ est envoyé sur l'idéal engendré par $I(V)$ et $I(W)$ vu comme des sous ensembles de $k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ par cet isomorphisme. Ainsi il suffit de montrer que $(I(V) \cup I(W)) = I(V \times W)$:

1. \subseteq : clair.
2. \supseteq : Soit $R \in I(V \times W)$. Alors on peut écrire

$$R = \sum_{i=1}^r P_i Q_i$$

avec $P_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ et $Q_i \in k[Y_1, \dots, Y_m]$. Maintenant soit $P_i \in I(V)$ pour tout i et alors on a terminé, soit il existe i tel que $P_i \notin I(V)$. Quitte à réindexer, OPS que $i = 1$. Alors il existe $x \in V$ tel que $P_1(x) \neq 0$. Maintenant $\sum P_i(x)Q_i \in k[Y_1, \dots, Y_m]$ est dans $I(W)$, car $R(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in V \times W$. Et alors

$$R' := \frac{P_1}{P_1(x)} \sum P_i(x)Q_i \in (I(V) \cup I(W))$$

puis $R \in (I(V) \cup I(W))$ si et seulement si $R - R' \in (I(V) \cup I(W))$. Mais

$$\begin{aligned} R - R' &= \sum_{i=1}^r \left(P_i - \frac{P_1}{P_1(x)} P_i(x) \right) Q_i \\ &= \sum_{i=2}^r P'_i Q_i \end{aligned}$$

où $P'_i \in k[X_1, \dots, X_n]$. Ainsi en itérant ce procédé, soit on va tomber sur le premier cas, soit on va finir par arriver sur le cas $R = 0$, qui est bien dans l'idéal $(I(V) \cup I(W))$.

3. Si k est algébriquement clos, alors on a une équivalence de catégories (donnée par le foncteur $k[-]$) entre la catégorie des variétés affines et des algèbres de tf intègres. Ainsi soient A, B des k -alg de tf intègres, il existe V, W des variétés affines telles que $k[V] \simeq A$, $k[W] \simeq B$. Mais alors

$$A \otimes_k B \simeq k[V] \otimes_k k[W] \simeq k[V \times W]$$

puis d'après la question 1, $V \times W$ est une variété affine et donc $k[V \times W]$ est intègre. Cela prouve au passage que la catégorie des k -alg de tf intègres admet un objet satisfaisant la propriété universelle de coproduit, et ainsi par équivalence de catégorie $V \times W$ satisfait la propriété universelle du produit dans la catégorie des variétés affines.

4.

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[X]/(X^2 + 1)$$

mais ce dernier anneau n'est pas intègre puisque $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$.

3.10 Exercice 10

Considérons le fermé $V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2$. Alors $V(XY) = \{(t, 0) \mid t \in k\} \cup \{(0, t) \mid t \in k\}$. Supposons alors que $V(XY) = V(I) \times V(J)$, comme $(t, 0) \in V(XY)$, on doit avoir $t \in V(I)$, pour tout $t \in k$ i.e. $V(I) = \mathbb{A}^1$. De même, on doit avoir $V(J) = \mathbb{A}^1$, mais $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2 \neq V(XY)$.

3.11 Exercice 11

Dans un premier temps, soit $f_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $\varphi(a) = (f_1(a), \dots, f_i(a))$. Alors montrer que φ est continue revient à montrer que $\tilde{\varphi} : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^l$ définie par $\tilde{\varphi}(a) = (f_1(a), \dots, f_i(a))$ pour tout $a \in \mathbb{A}^n$ est continue. En effet, soit Z un fermé de W , alors $Z = Z' \cap W$ pour Z un fermé de \mathbb{A}^l . Maintenant $\varphi^{-1}(Z) = \tilde{\varphi}^{-1}(Z') \cap V$ et est donc un fermé si et seulement si $\tilde{\varphi}^{-1}(Z')$ est un fermé. On peut donc se ramener au cas $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^l$. Ainsi considérons un fermé $V(J) \stackrel{\text{ferm}}{\subseteq} \mathbb{A}^l$, posons $I := k[\varphi](J)$, et montrons que $\varphi^{-1}(V(J)) = V(I)$.

1. \subseteq : soit $x \in \varphi^{-1}(V(J))$, alors pour tout $P \in I$, il existe $Q \in J$ tel que $P = k[\varphi](Q)$.
Maintenant

$$P(x) = k[\varphi](Q)(x) = Q(\varphi(x)) = 0$$

puisque $Q \in J$ et $\varphi(x) \in V(J)$.

2. \supseteq : Soit $x \in V(I)$, alors pour tout $Q \in J$, $k[\varphi](Q) \in I$ et donc

$$Q(\varphi(x)) = k[\varphi](Q)(x) = 0$$

et donc $\varphi(x) \in V(J)$.

3.12 Exercice 12

Soit $E \subseteq \mathbb{A}^n$. Montrons que $V(I(E)) = \bar{E}$: déjà, si $x \in E$, alors soit $P \in I(E)$, $P(x) = 0$ et ainsi $x \in V(I(E))$. Ensuite, soit $E \subseteq V(J)$ un ensemble algébrique, alors $J \subseteq I(V(J))$, et $I(V(J)) \subseteq I(E)$, donc $J \subseteq I(E)$ et finalement $V(I(E)) \subseteq V(J)$, ce qui prouve que $\bar{E} = V(I(E))$.