Feuille 1,
Courbes algébriques
Ensembles Algébriques Affines

Exercice 1 Montrer que les sous-ensembles algébriques affines propres de $\mathbb{A}^1$ sont finis.

Exercice 2 Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Montrer que le noyau du morphisme d'algèbres $P \mapsto P(\underline{a})$ de $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ dans k est l'idéal $\mathfrak{m}_{\underline{a}}$ engendré par $X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n$.

Exercice 3 Montrer que $I(\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}) = 0$ si k est un corps infini.

Exercice 4 Montrer que $I(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}) = (X^q - X)$.

Exercice 5 On suppose $n = 2$, $\mathsf{k} = \mathbb{R}$. Montrer que
1. L'ensemble $V = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un ensemble algébrique affine.
2. L'ensemble $V = \{(t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un ensemble algébrique affine.
3. L'ensemble $V = \{(t, e^t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un ensemble algébrique affine.

Exercice 6 Montrer que les ensembles suivants sont des ensembles algébriques affines :
1. $V_1 = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathsf{k}\} \subseteq \mathbb{A}^3$.
2. $V_2 = \{(t, \frac{1}{t}) \mid t \in \mathsf{k} \setminus 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$.
3. $V_3 = \{(t-1, t^2-1) \mid t \in \mathsf{k}\} \subseteq \mathbb{A}^2$.

Exercice 7 Soient $I = (X^2 + Y^2, XY^3)$ et $J = (X^2, Y^3)$.
1. Déterminer $V(I)$ et $V(J)$.
2. Déterminer $I(V(I))$ et $I(V(J))$.

Exercice 8 Soit k un corps infini et $V = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
1. Déterminer $I(V)$ et $V(I(V))$.
2. L'ensemble V est-il un ensemble algébrique affine ?

Exercice 9 Determinez si les ensembles algébriques suivantes de $\mathbb{A}^2$ sont irréductibles :
1. Un singleton.
2. Une paire de points.

3. L'ensemble $V(XY)$.
4. Les ensembles $V(X-Y)$ et $V((Y-X)^2)$.
5. L'ensemble $V(Y-X^2)$.
6. Les ensembles $V(X^2-Y^2)$ et $V(X^2+Y^2)$.
7. L'ensemble $V(Y^4-X^2, Y-X)$.

Exercice 10 Dans les cas suivants calculer $I(V(J))$ et déterminer si $V(J)$ est irréductible :
1. $J = (X^3) \subseteq \mathsf{k}[X,Y,Z]$.
2. $J = (Y-X^2, Z-XY) \subseteq \mathsf{k}[X,Y,Z]$.
3. $J = (X^3-Y^2) \subseteq \mathsf{k}[X,Y]$.

Exercice 11 Déterminer les composantes irréductibles des ensembles suivants et calculer leurs idéaux premiers :
1. $V(XY, YZ, XZ)$.
2. $V(X^2-YZY, XZ-X)$.
3. $V(XY, XY+1)$.

Exercice 12 Soit $J = (X+Y, Y^2) \subseteq \mathsf{k}[X,Y]$. Calculer $\sqrt{J}$. Verifier que $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

Exercice 13 Soit k algebriquement clos. Déterminer les idéaux $I(V)$ pour les ensembles V suivants

1. $V = V(XY^3 + X^3Y - X^2 + Y)$,
2. $V = V(X^2Y, (X-1)(Y+1)^2)$,
3. $V = V(Z-XY, Y^2+XZ-X^2)$.

Exercice 14 On suppose k de caractéristique nulle.
Soit $V = \{(t, t^2, \cdots, t^n) \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \mid t \in \mathsf{k}\}$.
1. Montrer que V est un ensemble algébrique.
2. Déterminer $I(V)$ et montrer que

$$\mathsf{k}(V) := \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/I(V) \simeq \mathsf{k}[X].$$

3. V est-il irréductible ?

Exercice 15 Soient $V \subset \mathbb{A}^n$ et $W \subset \mathbb{A}^m$ deux sous-ensembles algébriques. Montrer que $V \times W \subset \mathbb{A}^{n+m}$ est un sous-ensemble algébrique affine.

Exercice 16 Soit $M_n(\mathsf{k}) = \mathbb{A}_{\mathsf{k}}^{n^2}$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et soit $r \in [0, n]$. On pose

$$R_r = \{M \in M_n(k) \mid \mathrm{Rg}(M) \leq r\}$$

Montrer que R_r est un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbb{A}^{n^2}$.