Résolution automatique
de problèmes de Hermite-Padé

Sujet de stage

Alin Bostan Pierre Lairez Tanguy Rivoal

9 décembre 2022

1 Contexte

Depuis Hermite (1873) et sa démonstration de la transcendance de e, l'approximation de fonctions transcendantes par des fractions rationnelles est une des pierres angulaires des résultats d'irrationnalité ou de transcendance connus jusqu'ici.

Les démonstrations de propriétés diophantiennes d'une constante α donnée passent très souvent par la construction de suites d'approximations rationnelles de c dont la convergence est rapide par rapport à la croissance du dénominateur ; on parle d'*approximation diophantienne*. Une idée pour construire ces suites, dans le cas où α s'exprime comme $F(1)$ pour une certaine série entière convergente $F(z)$, consiste à calculer explicitement les *approximants de Padé* de F — c.-à-d. les meilleures approximations rationnelles de F en un sens précis — puis à évaluer ces approximants en $z = 1$. Toutefois, on ne sait pas, en général, décrire les approximants de Padé de F, et quand on y parvient, la convergence des suites obtenues n'est pas suffisante pour obtenir des résultats diophantiens pertinents.

Dans le cas du nombre e, Hermite est en fait parvenu à construire ds très bonnes approximations simultanées du nombre e et de ses puissances en étudiant (avant l'heure) des approximants de Padé simultanés des fonctions $\exp(nx)$, pour tout n dans un sous-ensemble fini quelconque des entiers positifs. Dans le cas de l'approximation simultanée de plusieurs séries entières, on parle alors d'approximants de type Hermite-Padé.

Plus récemment, une mécanique générale pour les polyzêtas a émergé (Beukers, 1981 ; Fischler & Rivoal, 2003 ; Sorokin, 1996), fondée sur l'approximation simultanée de fonctions transcendantes. Montrons, par exemple, comment contruire des approximations rationnelles pour $\zeta(3)$ à partir d'une approximation simultanée des polylogarithmes $\mathrm{Li}_1 = -\log(1-z)$, Li_2 et Li_3, où

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k^s}, \quad s \in \mathbb{Z}, |z| \leq 1.$$

Beukers (1981) propose de résoudre explicitement le problème suivant, qui admet une unique solution : pour $n \geq 0$ donné, trouver des polynômes $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$ et $D_n(z)$ de degré n vérifiant

$$\begin{cases} A_n(z)\,\mathrm{Li}_2(z) + B_n(z)\,\mathrm{Li}_1(z) + C_n(z) = O(z^{2n+1}) \\ 2A_n(z)\,\mathrm{Li}_3(z) + B_n(z)\,\mathrm{Li}_2(z) + D_n(z) = O(z^{2n+1}) \\ B_n(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

C'est un problème de *type Hermite-Padé*. La seconde ligne du système permet de construire une approximation rationnelle de $\zeta(3)$, à savoir $-\frac{1}{2}D_n(1)/A_n(1)$. Beukers montre que

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 z^k. \tag{2}$$

Il prouve des formules similaires pour B_n, C_n et D_n, retrouvant ainsi la suite d'approximants d'Apéry (1979). Il y a plusieurs difficultés ici : trouver un problème de type Hermite-Padé pertinent, le résoudre explicitement, et exploiter les approximations construites pour obtenir des propriétés diophantiennes.

Bien que la construction d'un problème de Hermite-Padé pertinent soit en partie une affaire d'intuition et de réglages fins (celui de Beukers est assez subtil, comme le montre le facteur 2 dans la seconde équation, ou la condition d'annulation de B_n), les travaux susmentionnés essaient de faire ressortir des principes généraux pour construire des problèmes d'approximations simultanées à la manière de Beukers. L'application plus systématique de ces principes pourrait bénéficier de calculs assistés par ordinateur. C'est l'objet de ce stage.

2 Objectifs

Ce stage vise à explorer la possibilité de résoudre automatiquement certains problèmes de type Hermite-Padé, comme celui de Beukers. On imagine un algorithme dont l'entrée serait le système d'équations (1) et la sortie une description de ses solutions, soit explicite comme (2), soit implicite, par équations différentielles et relations de récurrence. On parlera de description *holonome*.

La première difficulté est théorique : on ne s'attend pas à ce que les solutions d'un problème d'Hermite-Padé quelconque admettent une description holonome. On aimerait donc comprendre pourquoi les deux problèmes (disjoints) tels que

$$A_n(z)\,\mathrm{Li}_1(z) + B_n(z) = O(z^{2n+1}), \quad \deg(A_n) = \deg(B_n) = n,$$

$$A_n(z)\sin(z) + B_n(z)\cos(z) = O(z^{2n+1}), \quad \deg(A_n) = \deg(B_n) = n$$

admettent une solution holonome, alors que

$$A_n(z)\,\mathrm{Li}_2(z) + B_n(z) = O(z^{2n+1}), \quad \deg(A_n) = \deg(B_n) = n,$$

$$A_n(z)\sqrt{1+z} + B_n(z)\exp(z) = O(z^{2n+1}), \quad \deg(A_n) = \deg(B_n) = n$$

semblent ne pas en avoir.

Ensuite, il faut automatiser la résolution. C'est fondamentalement un problème de calcul avec des fonctions holonomes multivariées. L'approche naturelle, et déjà bien établie en calcul formel, consiste à reconstruire les équations satisfaites par la solution recherchée, de manière plus ou moins heuristique, à partir de résolutions explicites pour certaines valeurs de n. On obtient ainsi un candidat et il reste ensuite à démontrer que ce candidat est effectivement une solution, en utilisant la machinerie des fonctions holonomes. Par exemple cette approche est appliquée, dans un contexte proche, par Maulat et Salvy (2015).

La résolution des difficultés précédemment décrites est ambitieuse et y parvenir en toute généralité ferait l'objet d'un travail de thèse. **Durant le stage de M2R proprement dit, le premier but est de se familiariser avec la littérature, plus spécifiquement de comprendre la construction de Beukers (1981) en complétant les détails manquants.** En particulier, compléter ces détails sera un premier pas vers l'automatisation suggérée ci-dessus. Il sera également proposer d'étudier l'article (Fischler & Rivoal, 2003), où une vaste généralisation de l'article de Beukers est proposée.

Références

Apéry, R. (1979). Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. *Astérisque*, *61*, 11-13.

Beukers, F. (1981). Padé-Approximations in Number Theory. In *Padé Approximation and Its Applications* (p. 90-99). Springer. https://doi.org/10/dw4xp6

Fischler, S., & Rivoal, T. (2003). Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées. *J. Math. Pures Appl. (9)*, *82*(10), 1369-1394. https://doi.org/10/d7k2f2

Hermite, C. (1873). Sur la fonction exponentielle. *C. R. Acad. Sci. Paris*, *77*, 18-24.

Maulat, S., & Salvy, B. (2015). Formulas for Continued Fractions : An Automated Guess and Prove Approach. *Proc. ISSAC 2015*, 275-282. https://doi.org/10/ggck9b

Sorokin, V. N. (1996). A transcendence measure for π^2. *Sb. Math.*, *187*(12), 1819-1852. https://doi.org/10/cd25db