Exercices sur les courbes elliptiques

Exercices sur les courbes elliptiques

Equations de Weierstrass en caractéristique 2 et 3

Exercice 1. Soit E une courbe de Weierstrass définie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique $p = 2$ ou 3 par l'équation affine

$$(E) : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

Montrer que E est équivalente à une courbe E' d'équation de la forme :

1) $E' : y'^2 = x'^3 + a_2'x'^2 + a_6'$ si $p = 3$ et $a_1^2 + a_2 \neq 0$ et on a $\Delta(E') = -a'^3_2 a_6'$
2) $E' : y'^2 = x'^3 + a_4'x' + a_6'$ si $p = 3$ et $a_1^2 + a_2 = 0$ et on a $\Delta(E') = -a'^3_4$
3) $E' : y'^2 + x'y' = x'^3 + a_2'x'^2 + a_6'$ si $p = 2$ et $a_1 \neq 0$ et on a $\Delta(E') = a_6'$
4) $E' : y'^2 + a_3'y' = x'^3 + a_4'x' + a_6'$ si $p = 2$ et $a_1 = 0$ et on a $\Delta(E') = a'^4_3$

Rappelons d'abord qu'à une équation générale de Weierstrass $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ sont associés les invariants suivants $b_2, b_4, b_6, b_8, c_4, c_6, \Delta, j$ définis par

$$\begin{cases} b_2 &= a_1^2 + 4a_2 \\ b_4 &= a_1a_3 + 2a_4 \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6 \\ c_4 &= b_2^2 - 24b_4 \\ c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 \\ \Delta &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 \\ j &= c_4^3/\Delta \text{ si } \Delta \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Vérifions d'abord que les équations (E') de l'énoncé ont bien le bon discriminant. Pour alléger les écritures on notera ici les coefficients et les invariants $a_i', b_i', c_i', \Delta', j'$ de la courbe E' sans les primes. On a donc :

$$1) \begin{cases} p &= 3; a_1 = a_3 = a_4 = 0 \\ b_2 &= a_1^2 + 4a_2 = a_2 \\ b_4 &= a_1a_3 + 2a_4 = 0 \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6 = a_6 \\ c_4 &= b_2^2 - 24b_4 = a_2^2 \\ c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6 = -a_2^3 \\ b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 = a_2a_6 \\ \Delta &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 = -a_2^3a_6 \\ j &= c_4^3/\Delta = -a_2^3/a_6 \text{ si } a_2a_6 \neq 0 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} p &= 3; a_1 = a_3 = a_2 = 0 \\ b_2 &= a_1^2 + 4a_2 = 0 \\ b_4 &= a_1a_3 + 2a_4 = -a_4 \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6 = a_6 \\ c_4 &= b_2^2 - 24b_4 = 0 \\ c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6 = 0 \\ b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 = -a_4^2 \\ \Delta &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 = -a_4^3 \\ j &= c_4^3/\Delta = 0 \text{ si } a_4 \neq 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} p &= 2; a_3 = a_4 = 0; a_1 = 1 \\ b_2 &= a_1^2 + 4a_2 = 1 \\ b_4 &= a_1a_3 + 2a_4 = 0 \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6 = 0 \\ c_4 &= b_2^2 - 24b_4 = 1 \\ c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6 = 1 \\ b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 = a_6 \\ \Delta &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 = a_6 \\ j &= c_4^3/\Delta = 1/a_6 \text{ si } a_6 \neq 0 \end{cases} \qquad 4) \begin{cases} p &= 2; a_1 = a_2 = 0 \\ b_2 &= a_1^2 + 4a_2 = 0 \\ b_4 &= a_1a_3 + 2a_4 = 0 \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6 = a_3^2 \\ c_4 &= b_2^2 - 24b_4 = 0 \\ c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6 = 0 \\ b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 = a_4^2 \\ \Delta &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 = a_3^4 \\ j &= c_4^3/\Delta = 0 \text{ si } a_3 \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que E et E' sont équivalentes revient à trouver un changement de coordonnées de la forme

$$\boxed{(x,y) = (u^2x' + r, u^3y' + u^2sx' + t) \quad \text{avec } u,s,t,r \in \overline{\mathbb{K}}, u \neq 0} \tag{2}$$

de sorte que si (x,y) vérifie (E) alors (x',y') vérifie (E').

Rappelons aussi qu'en toute caractéristique, si on opère un changement de coordonnées (2) sur une courbe de Weierstrass d'équation $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ alors les nouvelles valeurs des quantités a'_i, Δ' et du j-invariant j' associés à la nouvelle courbe E' sont telles que :

$$\begin{cases} ua'_1 &= a_1 + 2s \\ u^2a'_2 &= a_2 - sa_1 + 3r - s^2 \\ u^3a'_3 &= a_3 + ra_1 + 2t \\ u^4a'_4 &= a_4 - sa_3 + 2ra_2 - (t+rs)a_1 + 3r^2 - 2st \\ u^6a'_6 &= a_6 + ra_4 + r^2a_2 + r^3 - ta_3 - t^2 - rta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u^4c'_4 &= c_4 \\ u^6c'_6 &= c_6 \\ u^{12}\Delta' &= \Delta \\ j' &= j \end{cases} \tag{3}$$

$\boxed{\text{1) et 2) : en caractéristique 3}}$

On suppose la caractéristique de $\mathbb{K}$ égale à 3 et on part d'une équation générale de Weierstrass

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

• Si $a_1^2 + a_2 \neq 0$ on veut arriver à une équation (E') où $a'_1 = a'_3 = a'_4 = 0$. Les formules (3) donnent :

$$\begin{aligned} a'_1 = 0 &\Longrightarrow a_1 - s = 0 \Longrightarrow s = a_1 \\ a'_3 = 0 &\Longrightarrow t - a_1r = a_3 \\ a'_4 = 0 &\Longrightarrow (a_2 + a_1^2)r = a_4 - a_1a_3 \end{aligned}$$

D'où, on peut prendre

$$\begin{aligned} u &= 1 \\ s &= a_1 \\ r &= \frac{a_4 - a_1a_3}{a_2 + a_1^2} \\ t &= a_3 + a_1r = \frac{a_4a_1 + a_2a_3}{a_2 + a_1^2} \end{aligned}$$

Le changement de coordonnées recherché est donc

$$\boxed{(x,y) = \left(x' + \frac{a_4 - a_1a_3}{a_2 + a_1^2}, y' + a_1x' + \frac{a_4a_1 + a_2a_3}{a_2 + a_1^2}\right)}$$

• Si $a_1^2 + a_2 = 0$, on veut arriver à une équation où $a'_1 = a'_3 = a'_2 = 0$. Les formules (3) donnent encore :

$$\begin{aligned} a'_1 = 0 &\Longrightarrow a_1 - s = 0 \Longrightarrow s = a_1 \\ a'_3 = 0 &\Longrightarrow t = a_1r + a_3 \end{aligned}$$

a'_4 et a'_6 n'imposent aucune condition donc on peut prendre $r = 0$ et $u = 1$ d'où $t = a_3$. Et le changement de coordonnées recherché est donc

$$\boxed{(x,y) = (x', y' + a_1x' + a_3)}$$

$\boxed{\text{3) et 4) : en caractéristique 2}}$

On suppose la caractéristique de $\mathbb{K}$ égale à 2 et on part d'une équation générale de Weierstrass

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

• si $a_1 = 0$. Le changement de variables cherché aura pour but d'avoir $a'_1 = a'_2 = 0$. Les formules (3) donnent :

$$\begin{aligned} a'_1 &= 0 \Longrightarrow a_1 + 2s = a_1 = 0 \Longrightarrow \text{ on peut prendre } s = 0 \text{ et } u = 1 \\ a'_2 &= 0 \Longrightarrow a_2 + 3r = a_2 + r = 0 \Longrightarrow r = a_2 \\ a'_3 &= a_3 + 2t \Longrightarrow \text{ on peut prendre } t = 0 \end{aligned}$$

D'où le changement de coordonnées

$$\boxed{(x, y) = (x' + a_2, y')}$$

• Si $a_1 \neq 0$. Ici il s'agit d'arriver à $a'_4 = a'_3 = 0$ et $a'_1 = 1$. D'où les formules (3) donnent :

$$\begin{aligned} a'_1 &= 1 \Longrightarrow u = a_1 + 2s = a_1 \text{ et on peut prendre } s = 0 \text{ et} \\ a'_3 &= 0 \Longrightarrow a_3 + ra_1 = 0 \Longrightarrow r = a_3/a_1 \\ a'_4 &= 0 \Longrightarrow a_4 + ta_1 + r^2 = 0 \Longrightarrow t = \frac{a_4 + r^2}{a_1} = \frac{a_1^2a_4 + a_3^2}{a_1^3} \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie facilement que la substitution ci-dessous donne bien la forme souhaitée de l'équation

$$\boxed{(x, y) = \left(a_1^2x' + \frac{a_3}{a_1}, a_1^3y' + \frac{a_1^2a_4 + a_3^2}{a_1^3}\right)}$$

Exercice 2. Soit E une courbe de Weierstrass définie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 2 ou 3. On suppose que $\Delta(E) = 0$. Montrer que E n'est pas lisse en montrant qu'elle admet un unique point singulier que l'on précisera.

On sait que le point $\mathcal{O}$ est lisse. Si on note $(f(x, y) = 0$ une équation affine de la courbe E, un point fini $P_0 = (x_0, y_0)$ de E est singulier s'il vérifie les conditions

$$f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0 \tag{4}$$

$\boxed{\text{• Si la caractéristique de } \mathbb{K} \text{ est égale à 3.}}$

par l'exercice 1., une équation de E est de la forme $y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_6$ ou bien $y^2 = x^3 + a_4x + a_6$. D'après le formulaire () on a $\Delta(E) = -a_2^3a_6$ dans le premier cas et $\Delta(E) = -a_4^3$ dans le second. Puisqu'ici on suppse ici que $\Delta(E) = 0$ alors on peut déduire qu'une équation de E est de la forme $y^2 = x^3 + a_2x^2$ ou bien $y^2 = x^3 + a_6$. Donc, dans le premier cas on a

$$f(x, y) = y^2 - (x^3 + a_2x^2) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a_2x$$

Le seul point vérifiant les conditions (4) est le point $(0,0)$. C'est donc le seul point singulier de E.

Dans le second cas on a

$$f(x,y) = y^2 - (x^3 + a_6) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

Le seul point vérifiant les conditions (4) est le point $(x_0, 0)$ où $x_0 \in \mathbb{K}$ est tel que $x_0^3 = -a_6$. L'existence et l'unicité de x_0 sont assurés par le fait l'application $x \to x^3$ est un automorphisme de $\mathbb{K}$ en caractéristique 3.

• Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est égale à 2,

par l'exercice 1, on sait qu'une équation de E est de la forme $y^2+xy = x^3+a_2x^2+a_6$ ou bien $y^2+a_3y = x^3+a_4x+a_6$. D'après le formulaire () on a $\Delta(E) = a_6$ dans le premier cas et $\Delta(E) = a_3^4$ dans le second. Alors puisqu'on suppose ici que $\Delta(E) = 0$, l'équation de E est de la forme $y^2 + xy = x^3 + a_2x^2$ ou bien $y^2 = x^3 + a_4x + a_6$. Dans le premier cas on a

$$f(x,y) = y^2 + xy + (x^3 + a_2x^2) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + x^2$$

donc le seul point qui vérifie les conditions (4) est $(0,0)$. C'est donc le seul point singulier de E.

Dans le second cas on a

$$f(x,y) = y^2 + (x^3 + a_4x + a_6) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + a_4$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff x^2 + a_4 = 0 \iff x^2 = a_4$. Or, en caractéristique 2, l'application $x \mapsto x^2$ est un automorphisme de $\mathbb{K}$, donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha^2 = a_4$. Ensuite

$$\begin{aligned} f(\alpha, y) = 0 &\Longrightarrow y^2 + \alpha^3 + a_4\alpha + a_6 = 0 \\ &\Longrightarrow y^2 + \alpha a_4 + a_4\alpha + a_6 = 0 \\ &\Longrightarrow y^2 + a_6 = 0 \end{aligned}$$

et on sait qu'il existe un unique $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $\beta^2 = a_6$. Il existe donc un seul point singulier $P_0 = (\alpha, \beta)$ où $\alpha^2 = a_4$ et $\beta^2 = a_6$. Remarquons que l'équation de la courbe s'écrit successivement alors

$$\begin{aligned} y^2 &= x^3 + a_4x + a_6 \\ y^2 + a_6 &= x(x^2 + a_4) \\ y^2 + \beta^2 &= x(x^2 + \alpha^2) \\ (y + \beta)^2 &= x(x + \alpha)^2 \end{aligned}$$

et le point P_0 est le seul point singulier de E.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique égale à 2 ou 3. Montrer que deux courbes de Weierstrass E et E' définies sur $\mathbb{K}$, de discriminants respectifs $\Delta \neq 0, \Delta' \neq 0$ et d'invariants modulaires $j = j'$, sont équivalentes sur $\overline{\mathbb{K}}$.

Si deux courbes d'invariants j et j' sont équivalentes alors on sait par le formulaire () que $j = j'$. Inversement, supposons que E et E' sont deux courbes de Weierstrass de discriminants $\neq 0$ et d'invariants modulaires j

et j' tels que $j = j'$. Montrons qu'elles sont équivalentes. Pour cela on doit trouver un changement de coordonnées $(x, y) = (u^2x' + r, u^3y' + u^2sx' + t)$ avec $u, s, t, r \in \overline{\mathbb{K}}, u \neq 0$ de la forme (2) de sorte que si (x, y) vérifie l'équation de E alors (x', y') vérifie celle de E'.

$\boxed{\text{Si caract}(\mathbb{K}) = 3 \text{ et } j = j' \neq 0}$

alors par l'exercice 1, E et E' ont des équations et des invariants définis par

$$\begin{cases} E: & y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_6 \\ E': & y'^2 = x'^3 + a_2'x'^2 + a_6' \end{cases} \qquad \begin{cases} j & = \dfrac{-a_2^3}{a_6} \\ j' & = \dfrac{-a'^3_2}{a_6'} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta & = -a_2^3a_6 \\ \Delta' & = -a'^3_2a'_6 \end{cases}$$

Par hypothèse $\Delta \neq 0$ et $\Delta' \neq 0$. Donc a_2, a_6, a_2', a_6' sont non nuls et

$$j = j' \iff a_2^3a_6' = a'^3_2a_6 \iff \left(\frac{a_2}{a'_2}\right)^3 = \frac{a_6}{a_6'}$$

D'autre part, si un changement de coordonnées (2) existe on a $u^{12}\Delta' = \Delta$ d'après (3), donc ici on aura

$$u^{12} = \frac{\Delta}{\Delta'} = \left(\frac{a_2}{a_2'}\right)^3 \times \frac{a_6}{a_6'} = \left(\frac{a_2}{a_2'}\right)^6 = \left(\frac{a_6}{a_6'}\right)^2$$

et on peut donc prendre

$$u = \left(\frac{a_2}{a'_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{a_6}{a_6'}\right)^{1/6}$$

De même, on a successivement,

$$\begin{aligned} ua_1' &= a_1 + 2s \Longrightarrow s = 0 \text{ car } a_1 = a_1' = 0 \\ u^2a_2' &= a_2 + 3r \Longrightarrow r = 0 \text{ car } u^2a_2' = a_2 \\ u^3a_3' &= a_3 + 2t \Longrightarrow t = 0 \text{ car } a_3' = a_3 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Montrons alors que le changement de coordonnées $(x, y) = (u^2x', u^3y')$ répond à la question.

$$\begin{aligned} y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_6 &\iff (u^3y')^2 = (u^2x')^3 + a_2(u^2x')^2 + a_6 \\ &\iff y'^2 = x'^3 + \frac{a_2}{u^2}x'^2 + \frac{a_6}{u^6} \\ &\iff y'^2 = x'^3 + a_2'x'^2 + a_6' \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si caract}(\mathbb{K}) = 3 \text{ et } j = j' = 0}$

alors par l'exercice 1, E et E' ont des équations et des invariants définis par

$$\begin{cases} E & y^2 = x^3 + a_4x + a_6 \\ E' & y'^2 = x'^3 + a_4'x' + a_6' \end{cases} \qquad \begin{cases} j & = 0 \\ j' & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta & = -a_4^3 \\ \Delta' & = -a'^3_4 \end{cases}$$

Par hypothèse $\Delta \neq 0$ et $\Delta' \neq 0$. Donc a_4, a_4' sont non nuls. D'autre part, si un changement de coordonnées (2) existe on a $u^{12}\Delta' = \Delta$, donc ici on aura

$$u^{12} = \frac{\Delta}{\Delta'} = \left(\frac{a_4}{a_4'}\right)^3$$

et on peut donc prendre

$$u = \left(\frac{a_4}{a'_4}\right)^{1/4}$$

De même $ua_1' = a_1 + 2s \Longrightarrow s = 0$ car $a_1 = a_1' = 0$. D'où $u^3a_3' = a_3 + 2t = 0 \Longrightarrow t = 0$ car $a_3' = a_3 = 0$ et enfin on doit avoir $u^6a_6' = a_6 + ra_4 + r^3$. Prenons alors pour r une solution dans $\overline{\mathbb{K}}$ de l'équation

$$r^3 + ra_4 + a_6 - u^6a_6' = 0$$

et montrons que le changement de coordonnées $(x, y) = (u^2x' + r, u^3y')$ répond à la question.

$$\begin{aligned} y^2 = x^3 + a_4x^+a_6 &\iff (u^3y')^2 = (u^2x' + r)^3 + a_4(u^2x' + r) + a_6 \\ &\iff u^6y'^2 = u^6x'^3 + r^3 + a_4u^2x' + a_4r + a_6 \\ &\iff y'^2 = x'^3 + \frac{a_4}{u^4}x' + \frac{r^3 + a_4r + a_6}{u^6} \\ &\iff y'^2 = x'^3 + a_4'x'^2 + a_6' \end{aligned}$$

Si caract($\mathbb{K}$) $= 2$ et $j = j' \neq 0$

alors par l'exercice 1, E et E' ont des équations et des invariants définis par

$$\begin{cases} E & y^2 + xy = x^3 + a_2x^2 + a_6 \\ E' & y'^2 + x'y' = x'^3 + a_2'x'^2 + a_6' \end{cases} \qquad \begin{cases} j & = \dfrac{1}{a_6} \\ j' & = \dfrac{1}{a_6'} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta & = a_6 \\ \Delta' & = a_6' \end{cases}$$

Par hypothèse $\Delta \neq 0$ et $\Delta' \neq 0$. Donc a_6, a_6' sont non nuls et puisque $j = j'$ on a $a_6 = a_6'$. D'autre part, si un changement de coordonnées (2) existe on a $u^{12}\Delta' = \Delta$, donc ici on aura

$$u^{12} = \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{a_6}{a_6'} = 1$$

et on peut donc prendre $u = 1$. De même $ua_3' = a_3 + ra_1 \Longrightarrow r = 0$ car $a_3 = a_3' = 0$ et $a_1 = 1$. D'où $u^4a_4' = a_4 - t \Longrightarrow t = 0$ car $a_4' = a_4 = 0$ et enfin on doit avoir $u^2a_2' = a_2 - s + s^2$. En définitive, on peut prendre $u = 1$ et pour s une solution quelconque dans $\overline{\mathbb{K}}$ de l'equation

$$s^2 + s + a_2 + a_2' = 0$$

Une telle solution existe dans $\overline{\mathbb{K}}$. Montrons alors que le changement de coordonnées $(x, y) = (x', y' + sx')$ répond à la question.

$$\begin{aligned} y^2 + xy = x^3 + a_2x^2 + a_6 &\iff (y' + sx')^2 + x'(y' + sx') = x'^3 + a_2x'^2 + a_6 \\ &\iff y'^2 + s^2x'^2 + x'y' + sx'^2 = x'^3 + a_2x'^2 + a_6' \\ &\iff y'^2 = x'^3 + (s^2 + s + a_2)x'^2 + a_6' \\ &\iff y'^2 = x'^3 + a_2'x'^2 + a_6' \end{aligned}$$

Si caract($\mathbb{K}$) $= 2$ et $j = j' = 0$

alors par l'exercice 1, E et E' ont des équations et des invariants définis par

$$\begin{cases} E & y^2 + a_3y = x^3 + a_4x + a_6, \\ E' & y'^2 + a_3'y' = x'^3 + a_4'x' + a_6' \end{cases} \qquad \begin{cases} j & = 0 \\ j' & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta & = a_3^4 \\ \Delta' & = a_3'^4 \end{cases}$$

Par hypothèse $\Delta \neq 0$ et $\Delta' \neq 0$. Donc a_3, a_3' sont non nuls. D'autre part, si un changement de coordonnées existe on a $u^{12}\Delta' = \Delta$, donc ici on aura

$$u^{12} = \frac{\Delta}{\Delta'} = \left(\frac{a_3}{a'_3}\right)^4$$

et on peut donc prendre

$$u = \left(\frac{a_3}{a'_3}\right)^{1/3}$$

De même on doit avoir $u^3 a'_3 = a_3 + 2t$ donc on peut prendre $t = 0$ même en caractéristique 2. On a aussi $u^2 a'_2 = a_2 - sa_1 + 3r - s^2 \Longrightarrow 0 = r + s^2$ car $a_1 = a_2 = a'_2 = 0$. Enfin, on doit aussi avoir $u^6 a'_6 = a_6 + ra_4 + r^3$ et $u^4 a'_4 = a_4 + sa_3 + r^2$. Prenons alors pour r et s une solution dans $\overline{\mathbb{K}}$ du système

$$\begin{cases} r^3 + ra_4 + a_6 + u^6 a'_6 & = 0 \\ sa_3 + r^2 + a_4 + u^4 a'_4 & = 0 \end{cases}$$

Ce système a toujours des solutions puisque la première équation donne r et la seconde donne s en substituant dans l'équation la valeur de r précédamment trouvée. Montrons que le changement de coordonnées

$$(x, y) = (u^2 x' + r, u^3 y' + u^2 s x')$$

ainsi trouvé répond à la question.

$$\begin{aligned} y^2 + a_3 y = x^3 + a_4 x + a_6 &\iff (u^3 y' + u^2 s x')^2 + a_3(u^3 y' + u^2 s x') = (u^2 x' + r)^3 + a_4(u^2 x' + r) + a_6 \\ &\iff u^6 y'^2 + a_3 u^3 y' = u^6 x'^3 + (u^4 r + u^4 s^2) x'^2 + (u^2 r^2 + a_4 u^2 + a_3 u^2 s) x' + a_4 r + a_6 + r^3 \\ &\iff y'^2 + \frac{a_3}{u^3} y' = x'^3 + \frac{1}{u^2}(r + s^2) x'^2 + \frac{1}{u^4}(r^2 + a_4 + a_3 s) x' + \frac{1}{u^6}(a_4 r + a_6 + r^3) \\ &\iff y'^2 = x'^3 + a'_4 x'^2 + a'_6 \end{aligned}$$