Feuille 2,
Courbes algébriques
Ensembles Algébriques Affines

Exercice 1 Pour $f \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ on note $D(f) := \mathbb{A}^n \setminus V(f)$.

1. Montrer que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

2. Montrer que les ensembles $D(f)$ (pour tout $f \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$) forment une base pour la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n$.

On suppose que le corps k est infini.

3. Montrer que $D(f) = \emptyset$ si et seulement si $f = 0$.

4. Montrer que si $U, V \neq \emptyset$ sont des ensembles ouverts dans $\mathbb{A}^n$, on a $U \cap V \neq \emptyset$.

Exercice 2 Soient $P_1, \cdots, P_r \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ tels que

$$P_1 + \cdots + P_r = 1.$$

Montrer que $(D(P_i))_{i \in [1.r]}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{A}^n$.

Exercice 3 Soit $V \subsetneq \mathbb{A}^n$ un ensemble algébrique et soit $x \in \mathbb{A}^n \setminus V$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $P(x) = 1$ et $P(y) = 0$ pour tout $y \in V$.

Exercice 4 Soit X un espace topologique. On suppose qu'il existe des ouverts U_1 et U_2 non vide et irréductibles de X tels que $X = U_1 \cup U_2$ und $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Montrer que X est irreductible.

Exercice 5 Soit k un corps algebriquement clos.

1. Soient I et J des idéaux $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Montrer que $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ si et seulement si $V(I) = V(J)$.

2. Soient V_1 et V_2 des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{A}^n$. Montrer que

$$I(V_1 \cap V_2) = \sqrt{I(V_1) + I(V_2)}.$$

Exercice 6 Soit $V = V(Y^2 - X^2(X+1))$. Montrer que l'application $f : \mathbb{A}^1 \to V$, $f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ est régulière, bijective, mais n'est pas un isomorphisme.

On pose $\mathsf{k}[V] := \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/I(V)$.

Exercice 7 Soit V l'image de l'application $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$ donné par $f(t) = (t, t^2, t^3)$. Montrer que $\mathsf{k}[V]$ est isomorphe à $\mathsf{k}[T]$ de deux façons différentes.

Exercice 8 Dans les cas suivants, construire un isomorphisme $f : V \to W$ des ensembles algébriques affines. Calculer sa reciproque et le morphisme f^*.

1. $V = V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^2$, $W = V(X + Y) \subseteq \mathbb{A}^2$.
2. $V = V(X - Y^2) \subseteq \mathbb{A}^2$, $W = V(Y - X^2) \subseteq \mathbb{A}^2$.
3. $V = V(Z - X, Y - X^2) \subseteq \mathbb{A}^3$, $W = \mathbb{A}^1$.
4. $V = V(Z - XY) \subseteq \mathbb{A}^3$, $W = \mathbb{A}^2$.