Exercices

Alexandre Guillemot

28 septembre 2022

Exercice 10, feuille 1, question 3

3) Tout d'abord, si le corps est fini, alors $V(Y^2 - X^3)$ contiens $(0,0)$ et $(1,1)$, donc n'est pas irréductible. Supposons maintenant que $|k| = \infty$, montrons que

$$V(Y^2 - X^3) = \{(t^2, t^3) \in k^2 \mid t \in k\} =: V$$

Si $(x,y) \in V$, alors $\exists t \in k \mid (x,y) = (t^2, t^3)$. Et alors $y^2 - x^3 = t^6 - t^6 = 0$, donc $(x,y) \in V(Y^2 - X^3)$. Réciproquement, si $(x,y) \in V(Y^2 - X^3)$, alors $y^2 = x^3$ dans k. Et alors si $x = 0$, alors $y = 0$ et $(0,0) \in V$. Sinon,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = x$$
$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = y$$

donc en posant $t = y/x$, $(x,y) = (t^2, t^3) \in V$.
Ensuite, montrons que $I(V(Y^2 - X^3)) = (Y^2 - X^3)$: remarquons dans un premier temps que pour tout $P \in k[T]$, $P = 0 \iff P(t) = 0, \forall t \in k$ du fait que $|k| = \infty$. Ainsi prouver $(Y^2 - X^3) = I(V(Y^2 - X^3))$ reviens à prouver que le noyau de

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & k[X,Y] & \to & k[T] \\ & P & \mapsto & P(T^2, T^3) \end{array}$$

vaut $(Y^2 - X^3)$. En effet, $P \in I(V(Y^2 - X^3)) \iff P(t^3, t^3) = 0, \forall t \in k \iff P(T^2, T^3) = 0$ au vu de la remarque faite précédemment, donc $\ker\varphi = I(V(Y^2 - X^3))$. Il est clair que $(Y^2 - X^3) \subseteq \ker\varphi$. Réciproquement, soit $P \in \ker\varphi$, réalisons la division euclidienne de P par $Y^2 - X^3$ dans $k[X][Y]$:

$$P(X,Y) = Q(X,Y)(Y^2 - X^3) + R(X,Y)$$

où $\deg_Y R \leq 1$. Ecrivons alors $R(X,Y) = a(X)Y + b(X)$, montrons que a et b sont nuls. Développons alors a et b : si on écrit

$$\begin{aligned} a(X) &= \sum_{i \geq 0} a_i X^i \\ b(X) &= \sum_{i \geq 0} b_i X^i \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} R(T^2, T^3) &= a(T^2)T^3 + b(T^2) \\ &= \sum_{i \geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{i \geq 0} a_i T^{2i+3} + b_i T^{2i} \\ &= \sum_{j \geq 0} c_j T^j \end{aligned}$$

où

$$c_j = \begin{cases} a_i & \text{si } j = 2i+3 \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ b_i & \text{si } j = 2i \text{ pour un certain } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Les coefficients de $a(T^2)T^3$ n'intéragissent pas avec ceux de $b(T^2)$, car devant des monômes de degré impair alors que ceux de $b(T^2)$ n'aparaissent que devant des monômes de degré pair). Ainsi comme $P \in \ker \varphi$, $0 = \varphi(R) = R(T^2, T^3)$ et donc $a_i, b_i = 0$ pour tout $i \geq 0$. Finalement, $a, b = 0$ et donc $R = 0$, d'où $P \in (Y^2 - X^3)$. Ainsi on a bien égalité $I(V(Y^2 - X^3)) = (Y^2 - X^3)$, et $V(Y^2 - X^3)$ est irréductible puisque $K[X,Y]/(Y^2, X^3)$ s'injecte dans $k[T]$ qui est lui-même intègre.

Exercice 15, feuille 1

Soient $V_1 \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $V_2 \subseteq \mathbb{A}_k^m$ des ensembles algébriques affines. On note

$$\begin{aligned} k[x_1, \cdots, x_n] &=: A \\ k[y_1, \cdots, y_m] &=: B \\ k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m] &=: C \end{aligned}$$

Alors il existe $I \overset{\text{id}}{\subseteq} A$ et $J \overset{\text{id}}{\subseteq} B$ tels que $V_1 = V(I)$ et $V_2 = V(J)$. Considérons le morphisme

$$\varphi := p_I \otimes p_J : A \otimes_k B \to A/I \otimes_k B/J \tag{1}$$

Où $p_I : A \to A/I$, $p_J : B \to B/J$ sont les projections canoniques des quotients respectifs. On sait que le morphisme $A \otimes_k B \to C$ induit par les morphismes canoniques $i_1 : A \to C$, $i_B : B \to C$ (issus de la propriété universelle des anneaux de polynômes) est un isomorphisme ($\sum_{finie} P_i \otimes Q_i$ est envoyé sur $\sum_{finie} i_A(P_j)i_B(Q_j)$). Une dernière remarque est qu'au vu de la naturalité de $\mathbf{Hom_{Sets}}(S, k) \simeq \mathbf{Hom}_{k-\mathbf{CAlg}}(k[S], k)$, nous avons la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_a"'] & C \arrow[d, "\mathrm{ev}_{(a,b)}"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathrm{ev}_b"] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

Pour terminer l'exercice, montrons que $V(\ker\varphi) = V_1 \times V_2$ (où $\ker\varphi$ est vu comme un idéal de C par l'isomorphisme naturel donné précédemment). Prenons $(a, b) \in V(\ker\varphi)$, puis soient $P \in I$, $Q \in J$. Alors $P \otimes 1, 1 \otimes Q \in \ker\varphi$ et donc

$$0 = \mathrm{ev}_{(a,b)}(i_1(P)i_2(1)) = P(a)$$

et de même, $Q(b) = 0$, et ainsi $(a, b) \in V_1 \times V_2$. Réciproquement, soit $(a, b) \in V_1 \times V_2$. Alors tout élément de $\ker\varphi$ s'écrit comme une somme finie $\sum_{\text{finie}} P_j \otimes Q_j$. Mais

$$\mathrm{ev}_{(a,b)}\left(\sum_{\text{finie}} i_A(P_j)i_B(Q_j)\right) = \sum_{\text{finie}} P_j(a)Q_j(b) = 0$$

et ainsi $(a, b) \in V(\ker\varphi)$.

Exercice 1, feuille 2

1) Montrons que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$: en passant au complémentaire, il faut montrer que $V(fg) = V(f) \cup V(g)$, ce que l'on sait vrai d'après le cours.

2) Soit $U = \mathbb{A}^n \backslash V(I)$ un ouvert de $\mathbb{A}^n$, avec $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. Alors

$$\begin{aligned} V(I) &= V\left(\bigcup_{f \in I} (f)\right) \\ &= \bigcap_{f \in I} V((f)) \end{aligned}$$

donc finalement

$$U = \bigcup_{f \in I} D(f)$$

en passant au complémentaire.

3) $D(f) = \emptyset \iff V((f)) = \mathbb{A}_k^n \iff \forall x \in k^n,\, f(x) = 0 \iff f = 0$, la dernière équivalence provenant du fait que $|k| = \infty$ (résultat que l'on a prouvé par récurrence en td).

4) On utilise les questions précédentes : comme les ensembles $D(f)$ forment une base pour la topologie de $\mathbb{A}^n$ (question 2), et que $U, V \neq \emptyset$, pour tout $x \in U$, $y \in V$, il existe $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tels que $x \in D(f) \subseteq U$ et $y \in D(g) \subseteq V$. Maintenant $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ (question 1) mais alors si $D(f) \cap D(g) = \emptyset$, alors $fg = 0$ (question 3) donc $f = 0$ ou $g = 0$ et donc $D(f) = \emptyset$ ou $D(g) = \emptyset$, absurde. Ainsi, $D(f) \cap D(g)$ est non vide, et donc $U \cap V \neq \emptyset$.