# Correction preuve

Alexandre Guillemot

26 septembre 2022

**Définition 0.1.** (Ordre monomial) Un ordre monomial sur $k[x_1, \cdots, x_n]$ est une relation d'ordre $\leq$ sur l'ensemble des $\{x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ tq

1. $\leq$ est un ordre total (pour tout $x^\alpha, x^\beta \in k[x_1, \cdots, x_n]$, $(x^\alpha \leq x^\beta) \vee (x^\beta \leq x^\alpha)$).
2. $x^\alpha \leq x^\beta \Rightarrow \forall \gamma \in \mathbb{N}^n$, $x^{\alpha+\gamma} \leq x^{\beta+\gamma}$
3. $1 \leq x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

**Notation.** On écrira $\alpha \leq \beta$ au lieu de $x^\alpha \leq x^\beta$.

**Proposition 0.1.** *Soit $\leq$ un ordre sur $\mathbb{N}^n$ satisfaisant les propriétés* 1 *et* 2 *de la def 0.1. Alors tfae*

*3.* $0_{\mathbb{N}^n} \leq \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

*4.* $\leq$ *est un bon ordre : $\forall E \subseteq \mathbb{N}^n$ non vide, $E$ contient un élément minimal pour $<$.*

*Démonstration.* **(Preuve originale)** (3) $\Rightarrow$ (4) : On raisonne par contraposée : soit $F \neq \emptyset$ une partie de $\mathbb{N}^n$. Supposons que $F$ n'a pas d'élément minimal. Posons

1. $m_1 = \min\{\alpha_1 \in \mathbb{N} \mid \alpha \in F\}$, il existe $\alpha^{(1)} \in F$ tel que $\alpha_1^{(1)} = m_1$ et finalement on pose $F_1 = \{\beta \in F \mid \beta \leq \alpha^{(1)}\}$.
2. $m_2 = \min\{\alpha_2 \in \mathbb{N} \mid \alpha \in F_1\}$, il existe $\alpha^{(2)} \in F_1$ tel que $\alpha_1^{(2)} = m_1$, $\alpha_2^{(2)} = m_2$. Enfin on pose $F_2 = \{\beta \in F_1 \mid \beta \leq \alpha^{(2)}\}$.
3. $\vdots$
4. $m_n = \min\{\alpha_n \in \mathbb{N} \mid \alpha \in F_{n-1}, \alpha_1 = m_1, \cdots, \alpha_{n-1} = m_{n-1}\}$. Il existe $\alpha^{(n)}$ tel que $\alpha_i^{(n)} = m_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Finalement, on pose $F_n = \{\beta \in F_{n-1} \mid \beta \leq \alpha^{(n)}\}$.

$F_n$ est infini, et on a $F_n \subseteq F_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq F_1 \subseteq F$. Alors soit $\beta \in F_n$ tq $\beta \leq \alpha^{(n)}$, alors $\beta_i \geq \alpha_i^{(n)}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. En particulier, $\beta - \alpha^{(n)} \in \mathbb{N}^n \backslash \{0\}$. Mais $\beta - \alpha^{(n)} \leq 0$ car sinon $\beta \geq \alpha^{(n)}$. $\square$

**Rq 0.1.** $n = 2$, $\leq = \geq_{lex}$ $((a,b) \leq (a',b') \iff (a,b) \geq_{lex} (a',b'))$

1. Le il existe du point 2 (en rouge) pose problème. Par exemple, considérer l'ensemble $\mathbb{N}^2 \backslash \{0\}$, alors $m_1 = 0$, et $F_1 = \mathbb{N}^2 \backslash \{0\}$, et donc $m_2 = 0$ et il n'existe aucun $(a,b) \in \mathbb{N}^2 \backslash \{0\}$ tel que $a = 0$ et $b = 0$.
2. Si on rectifie en écrivant $m_2 = \min\{\alpha_2 \in \mathbb{N} \mid \alpha \in F_1, \alpha_1 = m_1\}$, alors le problème survient après : si on prend $\beta \in F_n$, alors $\beta \in F_1$ mais le minimum n'est pas pris sur $F_1$ mais sur les éléments de $F_1$ de première coordonnée $m_1$ donc on ne peut pas comparer facilement $\beta_1$ et $m_1$. Par exemple, considérons encore $\mathbb{N}^2 \backslash \{0\}$, alors $m_1 = 0$, prenons $\alpha^{(1)} = (0,1)$, $F_1 = \mathbb{N}^2 \backslash \{0\}$. ensuite $m_2 = 1$, $\alpha^{(2)} = (0,1)$ forcément, et $F_2 = \mathbb{N}^2 \backslash \{0\}$. Mais alors $\beta = (1,0) \in F_2$ et n'est pas égal à $\alpha^{(2)}$, et pour autant $\beta - \alpha^{(2)} \notin \mathbb{N}^2 \backslash \{0\}$. Il existe bien pourtant des éléments $\beta \in F_2 = \mathbb{N}^2 \backslash \{0\}$ (quoiqu'on doit même pouvoir modifier $F$ pour qu'il n'existe aucun $\beta$ qui convient, il doit falloir être plus subtil sur le choix des $\alpha^{(i)}$ et peut être même faire attention à l'ordre que l'on choisit pour minimiser les coordonnées)