Algèbre commutative et effectivité

Alexandre Guillemot

24 octobre 2022

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce cours est de "résoudre" des systèmes d'équations polynômiales. Formellement, si $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$, $I = (f_1, \cdots, f_r)$, alors

$$f \in I \iff \exists g_1, \cdots, g_r \in k[x_1, \cdots, x_n] \mid f = f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r$$

On voudrait ainsi déterminer si $f \in I$. Références : 2 livres de Cox, Little, O'Shea

Chapitre 1

Bases de Gröbner

Dans ce chapitre, tous les anneaux seront commutatifs. Fixons dès à présent un $k \in \mathbf{Fld}$ (on supposera toujours qu'on dispose d'algorithmes pour les opérations du corps).

1.1 Préliminaires

Définition 1.1.1. (Anneau noéthérien) Un anneau est noéthérien si toute suite croissante d'idéaux $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ est stationnaire i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall m \geq N, I_m = I_N$$

Proposition 1.1.1. *Un anneau est noéthérien si et seulement si tout idéal de A est finiment engendré.*

Ex 1.1.1. Voici des exemples d'anneaux noéthériens/non noéthériens

Anneaux noéthériens	Anneaux non noéthériens
$\mathbb{Q}$	$k[\mathbb{N}]$
Plus généralement, tout corps k	
$\mathbb{R}[x]$	
Plus généralement, tout PID	
$\mathbb{Z}$	
$k[x_1, \cdots, x_n]$ (conséquence de 1.1.1)	
Anneaux finis	
Anneaux artiniens	

Théorème 1.1.1. *(Théorème de la base de Hilbert) Soit A un anneau noéthérien. Alors $A[x]$ est un anneau noéthérien.*

Corollaire 1.1.1. *Si k est un corps, alors $k[x_1, \cdots, x_n]$ est noeth pour $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. On veut montrer que tout idéal $I \overset{\text{id}}{\subseteq} A[x]$ est finiment engendré. Soit $I \overset{\text{id}}{\subseteq} A[x]$, montrons qu'il est finiment engendré. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit

$$I_n := \{a_n \in A \mid \exists a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in I\}$$

Il est facile de voir que $I_n \overset{\text{id}}{\subseteq} A$. Ensuite (I_i) est croissante, car si $a_i \in I_i$ pour un $i \in \mathbb{N}$, alors $\exists f \in I$ tq le coefficient directeur de f soit a_i. Mais alors $xf(x) \in I$ est de degré $i+1$ et son coefficient directeur est encore a_i, d'où $a_i \in I_{i+1}$. Ainsi cette suite d'idéaux est stationnaire (A noeth). Notons $N \in \mathbb{N}$ tq $m \geq N \Rightarrow I_m = I_N$. Les idéaux $I_0, \cdots, I_N$ sont finiment engendrés, notons $\{a_{i,j}\}_{1 \leq j \leq r_i}$ des familles génératrices pour I_i, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$. Pour chaque $a_{i,j}$, $\exists f_{ij} \in I$ tq $\deg(f_{ij}) \leq i$ et le terme de degré i de $f_{i,j}$ est $a_{i,j}$ (par définition de I_i). Montrons que $I = (\{f_{i,j}\}_{0,1 \leq i,j \leq N, r_i})$: soit $f \in I$,

1. si $\deg(f) = 0$, alors posons $a \in A$ tq $f = ax^0$. Ainsi $a \in I_0$, ainsi $\exists b_1, \cdots, b_{r_0}$ tq $a = \sum_{i=1}^{r_0} b_i a_{0,i}$. Or $f_{0,i} = a_{0,i} x^0$, ainsi $f = \sum_{i=1}^{r_0} b_i f_{0,i}$.
2. Si $d = \deg f > 0$, notons b le coeff directeur de f. Ainsi $b \in I_d$
   Cas où $d \leq N$: On peut écrire $b = \sum_{i=1}^{r_d} \lambda_i a_{d,i}$ avec $\lambda_i \in A$. Posons $S = \sum_{i=1}^{r_d} \lambda_i f_{d,i}$, alors le coefficient directeur de S est précisément b (et $\deg S \leq d$). Ainsi $\deg(f - S) < d$, et $f - S \in I$. Par hypothèse de récurrence, $f - S \in (\{f_{i,j}\})$ et $S \in (\{f_{i,j}\})$, donc finalement $f \in (\{f_{i,j}\})$.
   Cas où $d > N$: Notons b le coeff directeur de f, $b \in I_d = I_N \Rightarrow b = \sum \lambda_i a_{N,i}$. Posons $T := \sum \lambda_i f_{N,i} X^{d-N}$ est de degré d et de coeff directeur b, puis on conclut comme précedemment en regardant le polynômes $f - T$.

Ainsi les idéaux de $A[x]$ sont finiment engendrés, donc $A[x]$ est noeth. $\square$

1.2 Division multivariée

1.2.1 Ordres monomiaux

Fixons $k \in \mathbf{Fld}$. Rappelons que si $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x]$ non nul, alors $\exists g \in k[x]$ t.q. $I = (g)$ (car $k[x]$ est principal, euclidien). Soit $f \in k[x]$, alors $f \in (g) \iff g \mid f \iff$ le reste de la division euclidienne de f par g est nul (et on dispose d'un algorithme pour réaliser la division euclidienne). Question : peut-on généraliser à $k[x_1, \cdots, x_n]$?

Rq 1.2.1. Soit $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x]$, $I = (f_1, \cdots, f_r)$. Alors $I = (\text{pgcd}(f_1, \cdots, f_r))$

Définition 1.2.1. (Ordre monomial) Un ordre monomial sur $k[x_1, \cdots, x_n]$ est une relation d'ordre $\leq$ sur l'ensemble des $\{x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ tq

1. $\leq$ est un ordre total (pour tout $x^\alpha, x^\beta \in k[x_1, \cdots, x_n]$, $(x^\alpha \leq x^\beta) \vee (x^\beta \leq x^\alpha)$).
2. $x^\alpha \leq x^\beta \Rightarrow \forall \gamma \in \mathbb{N}^n$, $x^{\alpha+\gamma} \leq x^{\beta+\gamma}$
3. $1 \leq x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Notation. On écrira $\alpha \leq \beta$ au lieu de $x^\alpha \leq x^\beta$.

Ex 1.2.1. 1. Dans $k[x]$, il est facile de vérifier qu'il n'existe qu'un seul ordre monomial $\leq : x^n \leq x^m \iff n \leq m$.

2. Ordre lexicographique $\leq_{lex}$: soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tq $\alpha \neq \beta$,

$$\alpha <_{lex} \beta \iff \exists 1 \leq r \leq n \mid \alpha_i = \beta_i \text{ pour } i < r \text{ et } \alpha_r < \beta_r$$

(i.e. le premier coeff non nul d $\beta - \alpha$ est positif). Par exemple, dans $k[x_1, x_2, x_3]$, $x_1^2 >_{lex} x_1 x_2 >_{lex} x_2^2 >_{lex} x_3^{2097434}$

3. Ordre lexicographique gradué $\leq_{deglex}$: Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, notons $|\alpha| = \sum \alpha_i$. Alors soient $\alpha \neq \beta$ dans $\mathbb{N}^n$,

$$\alpha <_{deglex} \beta \iff (|\alpha| < |\beta|) \vee (|\alpha| = |\beta| \wedge \alpha <_{lex} \beta)$$

4. Ordre lexicographique renversé gradué $<_{degrevlex}$:

$$\alpha <_{degrevlex} \beta \iff (|\alpha| < |\beta|) \vee (|\alpha| = |\beta| \wedge (\exists r \in [\![1, n]\!] \mid \forall i \in [\![r+1, n]\!], \alpha_i = \beta_i \text{ et } \alpha_r > \beta_r))$$

(la deuxième condition reviens a vérifier que le dernier coeff non nul de $\beta - \alpha$ est négatif dans le cas où $|\alpha| = |\beta|$)

Exercice. Vérifier que ces ordres sont des ordres monomiaux.

Dans sage, on appelle "term orders" de tels ordres.

Proposition 1.2.1. *Soit $\leq$ un ordre sur $\mathbb{N}^n$ satisfaisant les propriétés 1 et 2 de la def 1.2.1. Alors tfae*

3. $0_{\mathbb{N}^n} \leq \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

4. *$\leq$ est un bon ordre : $\forall E \subseteq \mathbb{N}^n$ non vide, E contient un élément minimal pour $<$.*

Démonstration. $4 \Rightarrow 3$: Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tq $\alpha < 0$, alors $2\alpha < \alpha$, $3\alpha < 2\alpha$ et ainsi de suite, donc $\cdots < 2\alpha < \alpha < 0$, mais alors $\{m\alpha \mid m \in \mathbb{N}\}$ n'a pas d'élément minimal, donc $\leq$ n'est pas un bon ordre.

$3 \Rightarrow 4$: Supposons qu'il existe $F \subseteq \mathbb{N}^n$ non vide et sans élément minimal. Alors considérons l'idéal $I = (x^\alpha \mid \alpha \in F)$, d'après le théorème de la base de Hilbert, il existe un sous-ensemble fini de F, noté $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ tel que $I = (x^{\alpha_1}, \cdots, x^{\alpha_r})$. Alors considérons $m = \min\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$, c'est un élément de F. Mais par hypothèse, il existe $\beta \in F$ tel que $\beta < s$. Mais comme $x^\beta \in I$, il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $x^{\alpha_i} \mid x^\beta$, et ainsi $\beta - \alpha_i \in \mathbb{N}^n$. Mais $\beta - \alpha_i < 0$ car sinon on aurait $\beta \geq \alpha_i \geq m$. □

1.2.2 Algorithme de division multivariée

Fixons maintenant un ordre monomial $\leq$ sur $k[x_1, \cdots, x_n]$.

Définition 1.2.2. Soit $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \cdots, x_n] \backslash \{0\}$,

1. Le multidegré de f est $\mathrm{mdeg}(f) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \lambda_\alpha \neq 0\}$
2. Le coefficient dominant de f $\mathrm{LC}(f) = \lambda_{\mathrm{mdeg}(f)}$
3. Le mo,ome dominant de f est $\mathrm{LM}(f) = x^{\mathrm{mdeg}(f)}$
4. Le terme dominant de f est $\mathrm{LT}(f) = \lambda_{\mathrm{mdeg}(f)} x^{\mathrm{mdeg}(f)}$

Soit $(f_1, \cdots, f_r)$ un r-tuple de polynômes non nuls de $k[x_1, \cdots, x_n]$. Soit $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$, on cherche $Q_1, \cdots, Q_r, R \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tq

1. $f = Q_1 f_1 + \cdots + Q_r f_r + R$
2. $R = 0$ ou aucun des termes de R n'est divisible par $\mathrm{LT}(f_1), \cdots, \mathrm{LT}(f_r)$.

Algorithm 1 Réalise la division multivariée de f par $f_1, \cdots, f_r$

function DIVISION MULTIVARIÉE($f, f_1, \cdots, f_r \in k[x_1, \cdots, x_n]$)
  $g \leftarrow f$
  $Q_1, \cdots, Q_r \leftarrow 0$
  $R \leftarrow 0$
  while $g \neq 0$ **do**
    $b \leftarrow True$
    $i \leftarrow 1$
    while b **and** $i \leq r$ **do**
      if $\mathrm{LT}(f_i) \mid \mathrm{LT}(g)$ **then**
        $g \leftarrow g - \frac{\mathrm{LT}(g)}{\mathrm{LT}(f_i)} f_i$
        $Q_i \leftarrow Q_i + \frac{\mathrm{LT}(g)}{\mathrm{LT}(f_i)}$
        $b \leftarrow False$
      end if
      $i \leftarrow i + 1$
    end while
    if b **then**
      $h \leftarrow LT(g)$
      $g \leftarrow g - h$
      $R \leftarrow R + h$
    end if
  end while
  return $R, Q_1, \cdots, Q_r$
end function

Rq 1.2.2. Après chaque tour de boucle while principale, on a toujours

$$f = g + \sum Q_i f_i + R$$

au vu des calculs réalisés dans la boucle. Et comme l'algorithme se termine lorsque $g = 0$, on obtiens finalement

$$f = \sum Q_i f_i + R$$

et aucun des termes de R n'est divisible par $\mathrm{LT}(f_i)$ vu que l'on ajoute que des termes divisibles par aucun des $\mathrm{LT}(f_i)$ dans l'algorithme. Finalement, l'algorithme termine puisque à chaque étape de la boucle while principale, le multidegré de g diminue strictement au vu des calculs effectués et du fait que $\leq$ est une relation d'ordre monomiale.

Notation. Le reste obtenu s'écrira $\bar{f}^{f_1,\cdots,f_t}$. Si $F = \{f_1, \cdots, f_r\}$, on écrira $\bar{f}^F$.

Rq 1.2.3. L'algo donne l'exitence de Q_i et R tq $f = \sum Q_i f_i + R$ satisfaisant les conditions imposées précédemment. Ces Q_i et R ne sont pas uniques.

Ex 1.2.2. $k[x_1, x_2]$, $<_{lex}=:<$, $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, $f_1 = x_1$, $f_2 = x_1 + x_2$. Alors

$$f = (x_1 + x_2)f_1 + x_2^2$$

(Résultat obtenu en appliquant l'algorithme de division multivariée)

$$\begin{aligned} &= x_1 f_2 + x_2^2 \\ &= x_1 f_1 + x_2 f_2 + 0 \end{aligned}$$

donc $f \in (f_1, f_2)$ mais $\bar{f}^{f_1,f_2} \neq 0$!

1.3 Bases de Gröbner

Définition 1.3.1. (Base de Gröbner, 1) Soit $I \overset{\mathrm{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$ non nul. Une base de Gröbner de I est un ensemble fini $G \subseteq I$ tq

1. $I = (G)$,
2. $f \in I \iff \bar{f}^G = 0$

Par convention, $\emptyset$ est une base de Gröbner de l'idéal nul.

Ex 1.3.1.
1. Si $0 \neq g \in k[x]$, alors $\{g\}$ est une BDG (base de Gröbner) de (g).
2. Si $0 \neq g \in k[x_1, \cdots, x_n]$, alors $\{g\}$ est une BDG de (g).

Comment peut-on avoir $f \in (f_1, \cdots, f_r)$ mais $\bar{f}^{f_1,\cdots,f_r} \neq 0$? Il faut qu'à une étape de la division, $\mathrm{LT}(f)$ ne soit pas divisible par aucun des $\mathrm{LT}(f_i)$.

Définition 1.3.2. (Idéal monomial) Un idéal $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$ est monomial s'il existe des monômes $m_1, \cdots, m_r$ tq $I = (m_1, \cdots, m_r)$ (par convention $\{0\}$ est monomial).

Proposition 1.3.1. *Soient $m_1, \cdots, m_r \in k[x_1, \cdots, x_n]$ des monömes, alors*

$$m \in (m_1, \cdots, m_r) \iff m \textit{ est divisible par l'un des } m_i$$

Démonstration. Si m est divisible par l'un des m_i, il est clair que $m \in (m_1, \cdots, m_r)$. Pour prouver l'implication réciproque, supposons que $m \in (m_1, \cdots, m_r)$. Alors on peut écrire

$$m = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i$$

avec $a_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$. Maintenant écrivons chaque a_i comme

$$a_i(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha^i x^\alpha$$

Alors

$$m = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \lambda_\alpha^i x^\alpha m_i$$

Maintenant comme m est un monome, il va exister i, α tels que $m = \lambda x^\alpha m_i$, donc $m_i \mid m$. □

Soient $f_1, \cdots, f_r \in k[x_1, \cdots, x_n]$. $\mathrm{LT}(f)$ divisible par l'un des $\mathrm{LT}(f_1), \cdots, \mathrm{LT}(f_r)$ si et seulement si $\mathrm{LT}(f) \in (\{\mathrm{LT}(f_i)\})$ d'après la proposition précédente.

Notation. Soit $E \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$, on note

$$\mathrm{LT}(E) := \{\mathrm{LT}(f) \mid f \in E\}$$

Définition 1.3.3. (Base de Gröbner, 2) Une base de Gröbner d'un idéal $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$ est un ensemble (fini) $G \subseteq I$ tq $(\mathrm{LT}(I)) = (\mathrm{LT}(G))$

Théorème 1.3.1. *Les deux définitions de bases de Gröbner sont équivalentes.*

Démonstration. def 1 $\Rightarrow$ def 2 : Soit $f \in I$ si $\mathrm{LT}(f) \notin (\mathrm{LT}(G))$, alors $\mathrm{LT}(f)$ n'est divisible par aucun des $\mathrm{LT}(g)$, $g \in G$ donc $\bar{f}^G \neq 0$.
def 2 $\Rightarrow$ def 1 : Notons $G = \{g_1, \cdots, g_r\}$. Soit $f \in I$, on veut que $\bar{f}^G = 0$. Il suffit de montrer que le reste est nul à chaque étape de l'algo de division. Or à l'étape 0 il l'est, puis en supposant qu'il l'est à l'étape m, on a

$$f = g + \sum Q_i g_i \in I$$

et donc $g \in I$. Ainsi $LT(g) \in (LT(I)) = (LT(G))$ et donc il existe un g_i tel que $LT(g_i) \mid LT(g)$ daprès 1.3.1, et ainsi le reste est inchangé à cette étape. □

Théorème 1.3.2. *Tout $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$ admet une base de Gröbner.*

Démonstration. On cherche $G \overset{\text{fini}}{\subseteq} I$ tq $(\mathrm{LT}(G)) = (\mathrm{LT}(I))$. D'après 1.1.1, $\exists H \overset{\text{fini}}{\subseteq} \mathrm{LT}(I)$ tq $(H) = (\mathrm{LT}(I))$. Notons $h_1, \cdots, h_r$ des polynômes de I dont les termes dominants sont les éléments de H. Alors $\{h_1, \cdots, h_r\}$ est une BDG de I. □

1.4 Algorithme de Buchberger

Définition 1.4.1. $f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$, alors

$$S(f,g) := \frac{\mathrm{ppcm}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))}{\mathrm{LT}(f)} f - \frac{\mathrm{ppcm}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))}{\mathrm{LT}(g)} g$$

Théorème 1.4.1. *(Critère de Buchberger) Soit $G = \{g_1, \cdots, g_r\} \subseteq k[x_1, \cdots, x_r]$. Alors G est une BDG de (G) si et seulement si $\forall g, h \in G$, $\overline{S(g,h)}^G = 0$*

Démonstration. $\Rightarrow$: G BDF, $f, g \in G$. Comme $S(f,g) \in I$, alors $\overline{S(f,g)}^G = 0$.
$\Leftarrow$: Supposons que pour tout $g, h \in G$, alors $\overline{S(g,h)}^G = 0$. Soit $f \in I$, on veut mq $LT(f) \in (LT(G))$. Or $I = (g_1, \cdots, g_r)$. Donc il existe $q_1, \cdots, q_r \in k[x_1, \cdots, x_n]$ tq

$$f = \sum_{i=1}^{r} q_i g_i$$

Alors $LM(f) \leq \max_i\{LM(q_i g_i)\} = \mathbb{M}$.

1. Si $LM(f) = \mathbb{M}$: Alors $LM(f) = LT(q_i g_i)$ pour un certain i. Mais $LM(q_i g_i) = LM(q_i) LM(g_i)$ et donc $LM(f) \in (LT(G))$.

2. Si $LM(f) < \mathbb{M}$: Soit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq r$ les indices tels que $LM(q_{i_j} g_{i_j}) = \mathbb{M}$. Alors on peut réécrire f comme

$$f = \sum_{j=1}^{s} LT(q_{i_j}) g_{i_j} + \sum_{i=1}^{r} q'_i g_i$$

(et donc $LM(q'_i g_i) < \mathbb{M}$). Considérons $\sum_j LT(q_{i_j}) g_{i_j}$, on peut l'exprimer en fonction des $S(g_{i_j}, g_{i_{j+1}})$. Pour le voir, notons $h_j = LT(q_{i_j}) g_{i_j}$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_j h_j =& LC(h_1) \left(\frac{h_1}{LC(h_1)} - \frac{h_2}{LC(h_2)} \right) \\
&+ (LC(h_1) + LC(h_2)) \left(\frac{h_2}{LC(h_2)} - \frac{h_3}{LC(h_3)} \right) \\
&+ (LC(h_1) + LC(h_2) + LC(h_3)) \left(\frac{h_3}{LC(h_3)} - \frac{h_4}{LC(h_4)} \right) \\
&+ \cdots \\
&+ (LC(h_1) + \cdots + LC(h_{s-1})) \left(\frac{h_{s-1}}{LC(h_{s-1})} - \frac{h_s}{LC(h_s)} \right) \\
&+ (LC(h_1) + \cdots + LC(h_s)) \frac{h_s}{LC(h_s)}
\end{aligned}$$

Or $\sum_j LC(h_j) = 0$ car $LM(f) < \mathbb{M}$, donc le dernier terme s'annule et donc on a bien

$$\sum_j h_j = \sum_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{k=1}^{j} LC(h_k) \right) S(h_j, h_{j+1})$$

Rq 1.4.1. Si f et g sont de même multidegré,

$$S(f,g) := \frac{1}{\mathrm{LC}(f)} f - \frac{1}{\mathrm{LC}(g)} g$$

Ainsi,

$$S(h_j, h_{j+1}) = \frac{1}{LC(h_j)} h_j - \frac{1}{LC(h_{j+1})} h_{j+1}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
S(h_j, h_{j+1}) &= \frac{1}{LC(h_j)} h_j - \frac{1}{LC(h_{j+1})} h_{j+1} \\
&= \frac{LT(q_{i_j})}{LC(q_{i_j} g_{i_j})} g_{i_j} - \frac{LT(q_{i_{j+1}})}{LC(q_{i_{j+1}} g_{i_{j+1}})} g_{i_{j+1}} \\
&= \frac{LM(q_{i_j})}{LC(g_{i_j})} g_{i_j} - \frac{LM(q_{i_{j+1}})}{LC(g_{i_{j+1}})} g_{i_{j+1}} \\
&= \frac{LM(g_{i_j} q_{i_j})}{LT(g_{i_j})} g_{i_j} - \frac{LM(g_{i_{j+1}} q_{i_{j+1}})}{LT(g_{i_{j+1}})} g_{i_{j+1}} \\
&= m_j S(g_{i_j}, g_{i_{j+1}})
\end{aligned}$$

pour un certain monôme m_j. Donc

$$\begin{aligned}
f &= \sum_j LT(g_{i_j}) g_{i_j} + \sum_i q'_i g_i \\
&= \sum_j h_j + \sum_i q'_i g_i \\
&= \sum_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{k=1}^{j} LC(h_k) \right) S(h_j, h_{j+1}) + \sum_i q'_i g_i \\
&= \sum_{j=1}^{s-1} m_j \left(\sum_{k=1}^{j} LC(h_k) \right) S(g_{i_j}, g_{i_{j+1}}) + \sum_i q'_i g_i
\end{aligned}$$

et $\max(LM(q'_i g_i)) < \mathbb{M}$. Par hypothèse, $\overline{S(g_{i_j}, g_{i_{j+1}})}^G = 0$. Donc l'algorithme de division multivariée donne

$$S(g_{i_j}, g_{i_{j+1}}) = \sum_{i=1}^{r} b_i^j g_i$$

Par définition de l'algorithme, chaque $b_i^j q_i$ est de multidegré au plus $mdeg(S(g_{i_j}, g_{i_{j+1}}))$. Mais alors

$$\mathrm{mdeg}(m_j S(g_{i_j}, g_{i_{j+1}})) = \mathrm{mdeg}(S(h_j, h_{j+1})) < \mathbb{M}$$

Donc

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{k=1}^{j} LC(h_k) \right) m_j S(g_{i_j}, g_{i_{j+1}}) + \sum_i q'_i g_i \\
&= \sum c_i g_i
\end{aligned}$$

avec $LM(c_ig_i) < \mathbb{M}$. Par récurrence sur la différence entre $LM(f) - \mathbb{M}$, on peut conclure.

□

Corollaire 1.4.1. *(Algorithme de Buchberger) Soit* $I = (f_1, \cdots, f_r) \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. *Posons* $G^0 = \{f_1, \cdots, f_r\}$ *et pour* $n \geq 1$*, on définit*

$$G^n = G^{n-1} \cup \left\{ \overline{S(f,g)}^{G^{n-1}} \mid f, g \in G^{n-1},\ \overline{S(f,g)}^{G^{n-1}} \neq 0 \right\}$$

Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq N \Rightarrow G^n = G^N$. *Dans ce cas,* G^N *est une bdg de* I.

Démonstration. Si $G^n = G^{n+1}$, alors par le critère de Buchberger G^n est une bdg. Il faut donc montrer que la suite (G^n) est stationnaire. Supposons le contraire, alors pour tout $n \geq 0, \exists f, g \in G^n$ tq $\overline{S(f,g)}^{G^n} \neq 0$. Par définition de l'algorithme de division multivariée, aucun des termes de $\overline{S(f,g)}^{G^n}$ n'est dans $(LT(G^n))$. En particulier, $LT(\overline{S(f,g)}^{G^n}) \notin (LT(G^n))$. On a donc $(LT(G^n)) \subsetneq (LT(G^{n+1}))$ et donc on obtiens une suite d'idéaux strictement croissante dans $k[x_1, \cdots, x_n]$, contradiction. □

Rq 1.4.2. L'algorithme de Buchberger n'est pas optimal. Pour des versions optimisées, voir les algorithmes F4 et F5 (Faugère)

1.5 Bases de Gröbner réduites, unicité

Ex 1.5.1. $(x - y, y - z) = (x - z, y - z)$. Les deux couples de générateurs sont des bdg pour l'ordre lex.

Définition 1.5.1. (bdg réduite) Soit G une bdg de $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. Cette base est réduite si

1. Pour tout $g \in G$, $LC(g) = 1$
2. Pour tout $g, h \in G$ distincts, aucun monôme de g n'est divisible par $LT(h)$.

Théorème 1.5.1. *Tout idéal* $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$ *admet une unique bdg réduite.*

Rq 1.5.1. La bdg réduite dépend de l'ordre monomial !

On aura besoin d'outils de réduction.

Lemme 1.5.1. *Soit $G = \{g_1, \cdots, g_r\}$ une bdg de I idéal.*

1. *Si $1 \leq i, j \leq r$ distincts sont tq $LT(g_i) \mid LT(g_j)$, alors $G \backslash \{g_j\}$ est une bdg de I*
2. *Si $h_1, \cdots, h_r \in I$ sont tq $\text{mdeg}(h_i) = \text{mdeg}(g_i)$, alors $H = (h_1, \cdots, h_r)$ est une bdg de I.*

Démonstration.

1. Comme G est une bdg, $(LT(G)) = (LT(I))$. Maintenant si $LT(g_i) \mid LT(g_j)$, alors $(LT(G \backslash \{g_j\})) = (LT(G))$ et donc $G \backslash \{g_j\}$ est une bdg.
2. $(LT(G)) = (LT(H))$ vu que $LM(G) = LM(H)$.

□

Démonstration. (1.5.1) Soit $G = (g_1, \cdots, g_r)$ une bdg de I.

1. Divisons chaque g_i par $LC(g_i)$. On peut donc supposer que $LC(g_i) = 1$.
2. Chaque fois que $LT(g_i) \mid LT(g_j)$, on peut toujours retirer g_j et toujours avoir une bdg. On peut donc supposer que $\forall i \neq j$, $LT(g_i) \nmid LT(g_j)$.
3. Enfin, pour chaque i, considérons $\bar{g}_i^{G \backslash \{g_i\}} \in I$, et par définition aucun monôme de $\bar{g}_i^{G \backslash \{g_i\}}$ n'est divisible par un des $LT(g_j)$, et $LT\left(\bar{g}_i^{G \backslash \{g_i\}}\right) = LT(g_i)$. Par le 2 du lemme, alors $\left(\bar{g}_1^{G \backslash \{g_1\}}, \cdots, \bar{g}_r^{G \backslash \{g_r\}}\right)$ est une bdg, qui de plus est réduite.

Ceci prouve l'existence d'une bdg réduite pour I. Reste à montrer l''unicité : soient G, G' deus bdg réduites de I. Soit $g \in G$, il existe $g' \in G'$ tel que $LT(g') \mid LT(g)$. De même, il existe $g'' \in G$ tel que $LT(g'') \mid LT(g')$, et ainsi $LT(g'') \mid LT(g)$, donc $g'' = g$, et donc $LT(g') = LT(g)$. Ainsi on a montré que $LT(G) = LT(G')$. Considérons maintenant $g - g' \in I$, en particulier $\overline{g - g'}^G = 0$. Notons que si $h \in G \backslash \{g\}$, alors aucun des termes de g n'est divisible par $LT(h)$. De même pour g', car $LT(G) = LT(G')$. De même aucun monôme de $g - g'$ n'est divisible par $LT(g)$ car $LT(g) = LT(g')$ donc $LT(g - g') < LT(g)$. D'où $\overline{g - g'}^G = g - g' = 0$ donc $g = g'$. □

Chapitre 2

Théorie de l'élimination

Définition 2.0.1. (Idéaux d'élimination) Soit $E \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$. On pose

1. $E_1 = E \cap k[x_2, \cdots, x_n]$
2. $E_2 = E \cap k[x_3, \cdots, x_n]$
3. $\cdots$
4. $E_{n-1} = E \cap k[x_n]$
5. $E_n = E \cap k$

Si $E = I$ est un idéal, les I_i sont appelés idéaux d'élimination de I.

Ex 2.0.1. $I = (x - y + 1, x + y)$. Alors $I_1 = (2y - 1)$. $I_2 = \{0\}$.

Théorème 2.0.1. *(Théorème d'élimination) Soit $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$, soit $<$ l'ordre lex avec $x_1 > \cdots > x_n$. Soit G une bdg de I. Pour chaque $l \in [\![1, n]\!]$, une base de Gröbner de I_l est G_l.*

Démonstration. Clairement, $G_l \subseteq I_l$ donc $(LT(G_l)) \subseteq (LT(I_l))$. Il faut montrer $\supseteq$. Soit $f \in I_l$. Alors $f \in I$, d'où $LT(f) \in (LT(G))$. On sait que $f \in k[x_{l+1}, \cdots, x_n]$. Soit $g \in G$ tq $LT(g) \mid LT(f)$. D'où $LT(g) \in k[x_{l+1}, \cdots, x_n]$. Comme $<$ est l'ordre lex, on en déduite que $g \in k[x_{l+1}, \cdots, x_n]$. Donc $g \in G_l$ et $LT(f) \in (LT(G_l))$. $\square$

Par conséquent, une bdg pour l'ordre lex contient des éléments qui font intervenir de moins en moins de variables.

2.1 Application 1 : Intersection d'idéaux

Problème : $I = (f_1, \cdots, f_r)$, $J = (g_1, \cdots, g_s)$. Calculer des générateurs de $I \cap J$. Pour cela, on ajoute une variable t.

Notation. SI $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$ et $f \in k[t]$, on pose

$$fI = (fp \mid p \in I) \overset{\text{id}}{\subseteq} k[t, x_1, \cdots, x_n]$$

Théorème 2.1.1. *Avec les notations ci-dessus,*

$$I \cap J = (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, \cdots, x_n]$$

Démonstration. $\subseteq$: Soit $f \in I \cap J$, alors $f = tf + (1-t)f \in (tI + (1-t)J)$, puis $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$.
$\supseteq$: Soit $f \in (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, \cdots, x_n]$. Posons

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_\lambda : & k[t, x_1, \cdots, x_n] & \to & k[x_1, \cdots, x_n] \\ & h & \mapsto & h(\lambda, x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

Remarquons alors que $\varepsilon_0(tI) = \{0\}$, $\varepsilon_1(tI) = I$. De même, $\varepsilon_0((1-t)J) = J$, $\varepsilon_1((1-t)J) = \{0\}$. Ecrivons $f = f' + f''$ avec $f' \in tI$, $f'' \in (1-t)J$. Alors $\varepsilon_0(f) = \varepsilon_0(f'') \in J$. $\varepsilon_1(f) = \varepsilon_1(f') \in I$. Et $\varepsilon_0(f) = \varepsilon_1(f) = f$ vu que $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$. □

Corollaire 2.1.1. *Si $I = (f_1, \cdots, f_r)$, $J = (g_1, \cdots, g_s)$. Alors une bdf de $I \cap J$ pour l'ordre lex est obtenue en calculant une bdg de $(tI + (1-t)J) \overset{\text{id}}{\subseteq} k[t, x_1, \cdots, x_n]$ et en élimnant t (i.e. en prenant l'intersection avec $k[x_1, \cdots, x_n]$).*

2.2 Application 2 : extension

Soit k un corps algébriquement clos. On veut montrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *(Théorème d'extension) Soit $I = (f_1, \cdots, f_r) \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. Notons*

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = g_i(x_2, \cdots, x_n) x_1^{N_1} + h_i$$

où $\deg_{x_1} h_i < N_i$. Alors soit $(a_2, \cdots, a_n) \in V(I_1)$ tel que $(a_2, \cdots, a_n) \notin V(g_1, \cdots, g_r)$, il existe $a_1 \in k$ tel que $(a_1, \cdots, a_n) \in V(I)$.

Pour cela, nous aurons besoin des résultants.

2.2.1 Résultants

On veut une façon de déterminer si deux polynômes ont un facteur non trivial en commun. **Idée :** soient $f, g \in k[x]$ de degré $d, e > 0$ respectivement. Alors f et g ont un facteur commun non constant ssi $\exists \alpha, \beta \in k[x]$ tq

1. $\alpha, \beta \neq 0$
2. $\alpha f + \beta g = 0$
3. $\deg \alpha < e$, $\deg \beta < d$.

$f = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$, $\alpha = \sum_{i=0}^{e-1} \alpha_i x^i$, $\beta = \sum_{i=0}^{d-1} \beta_i x^i$. Il suffit de vérifier si

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{e-1} x^{e-1}) f + (\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{d-1} x^{d-1}) g = 0$$

admet une solution non nulle en les α_i, β_i. Ce système est donné par la matrice de Sylvester

$$Syl(f,g,x) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & b_1 & \ddots & 0 \\ a_{d-1} & \vdots & \ddots & a_0 & b_{e-1} & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_d & a_{d-1} & & a_1 & b_e & b_{e-1} & & b_1 \\ 0 & a_d & \ddots & \vdots & 0 & b_e & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{d-1} & \vdots & \ddots & \ddots & b_{e-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_d & 0 & \cdots & 0 & b_e \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{d+e}(k)$$

Définition 2.2.1. Le résultant de f et g est $Res(f,g,x) := \det Syl(f,g,x)$

Proposition 2.2.1. *$Res(f,g,x) = 0 \iff f$ et g ont un facteur non constant en commun.*

Proposition 2.2.2. *Fixons $d, e \geq 1$. Il existe $A, B \in \mathbb{Z}[X_0, \cdots, X_d, Y_0, \cdots, Y_e, x]$ tq pour tout $f, g \in k[x]$ avec $\deg f, \deg g = d, e$, on a*

$$Res(f,g,x) = A(a_0, \cdots, a_d, b_0, \cdots, b_e, x) f + B(a_0, \cdots, a_d, b_0, \cdots, b_e, x) g$$

Démonstration. $Syl(f,g,x)$ est la matrice de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & k[x]_{<e} \times k[x]_{<d} & \to & k[x]_{<e+d} \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha f + \beta g \end{array}$$

dans les bases canoniques de $k[x]_{<e}, k[x]_{<d}$. Soit M la transposée de la comatrice de $Syl(f, g, x)$. Alors par définition,

$$Syl(f, g, x)M = Res(f, g, x)I_{d+e}$$

donc

$$Syl(f, g, x)M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Res(f, g, x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maintenant M times vecteur est un vecteur dont les coord sont des polynômes évalués en les a_i et b_j. Ainsi

$$\varphi(P_0 + P_1X + \cdots + P_{e-1}X^{e-1}, Q_0 + Q_1X + \cdots + Q_{d-1}X^{d-1}) = Res(f, g, x)$$

où $P_i, Q_j \in \mathbb{Z}[a_i, b_j]$.

$$\Rightarrow (P_0 + P_1X + \cdots + P_{e-1}X^{e-1})f + (Q_0 + Q_1X + \cdots + Q_{d-1}X^{d-1})g = Res(f, g, x)$$

Ainsi on pose $A = P_0 + P_1X + \cdots + P_{e-1}X^{e-1}$, $B = Q_0 + Q_1X + \cdots + Q_{d-1}X^{d-1}$. □

Rq 2.2.1. La proposition et sa preuve restent vraies si on remplace k par un anneau commutatif.

2.2.2 Théorème d'extension

$f, g \in k[x_1, \cdots, x_n]$, alors $Res(f, g, x_1) \in k[x_2, \cdots, x_n]$. Notons $I = (f_1, \cdots, f_r) \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$, pour tout i

$$f_i = g_i(x_2, \cdots, x_n)x_1^{N_1} + \text{ termes de } \deg_{x_1} < N_1$$

‖ **Lemme 2.2.1.** *Le théorème d'extension est vrai pour $n = 2$.*

Démonstration. Notons $\deg f_1 = d$, $\deg f_2 = e$. Alors il existe $A, B \in \mathbb{Z}[X_0, \cdots, X_d, Y_0, \cdots, Y_e, x_1, \cdots, x_n]$. Alors

$$\begin{aligned} Res(f_1, f_2, x_1) = &A(a_0, \cdots, a_d, b_0, \cdots, b_e, x_2, \cdots, x_n, x_1)f_1 + \\ &B(a_0, \cdots, a_d, b_0, \cdots, b_e, x_2, \cdots, x_n, x_1)f_2 \end{aligned}$$

Le membre de droite de cette égalité est dans I, et $Res(f_1, f_2, x_1) \in k[x_1, \cdots, x_n]$. Ainsi $Res(f_1, f_2, x_1) \in I \cap k[x_2, \cdots, x_n] = I_1$. Soit $(c_2, \cdots, c_b) \in V(I_1)$. En particulier, $Res(f_1, f_2, x_1)(c_2, \cdots, c_n) = 0$.

On cherche $c_1 \in k$ solution commune de $f_1(x_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$ et $f_2(x_1, c_2, \cdots, c_n)$. Comme k est algébriquement clos, $f_1(x_1, c_2, \cdots, c_n)$ et $f_2(x_1, c_2, \cdots, c_n)$ ont un zéro commun si et seulement si leur pgcd est non trivial ssi leur résultat s'annule. Maintenant

$$Res(f_1(x_1, c_2, \cdots, c_n), f_2(x_1, c_2, \cdots, c_n), x_1) = Res(f_1(x_1, \cdots, x_n), f_1(x_1, \cdots, x_n), x_1)(c_2, \cdots, c_n)$$

En effet, on a supposé que $(c_2, \cdots, c_n) \notin V(g_1, g_2)$, et alors deux cas se présentent :

1. aucun des g_i ne s'annule en $(c_2, \cdots, c_n)$, dans ce cas
$$\deg_{x_1} f_i(x_1, c_2, \cdots, c_n) = \deg_{x_1} f(x_1, \cdots, x_n)$$
et donc l'égalité précédente est vraie.
2. l'un des g_i s'annule en $(c_2, \cdots, c_n)$. Sans perte de généralité, supposons que g_2 s'annule (et donc g_1 ne s'annule pas) en $(c_2, \cdots, c_n)$. En remplaçant f_2 par $f_2' = f_2 + x_1^N f_1$, avec $N >> 0$ ($N \geq \deg_{x_1} f_2$), on se ramène au cas 1 en remarquant que f_1, f_2 one une solution commune en c_1 si et seulement si f_1, f_2' ont une solution commune en c_1.

d'où $f_1(x_1, c_2, \cdots, c_n)$ et $f_2(x_1, c_2, \cdots, c_n)$ ont un zéro commun c_1. $\square$

Définition 2.2.2. Soient $f_1, \cdots, f_r \in k[x_1, \cdots, x_n]$. Considérons
$$u_2 f_2 + \cdots + u_r f_r \in k[x_1, \cdots, x_n, u_2, \cdots, u_r]$$
Alors
$$Res(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_r f_r, x_1) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{r-1}} h_\alpha(x_2, \cdots, x_n) u^\alpha \in k[x_2, \cdots, x_n, u_2, \cdots, u_r]$$
et les $h_\alpha \in k[x_1, \cdots, x_n]$ sont les résultants généralisés de $f_1, \cdots, f_r$ par rapport à x_1.

Démonstration. (Théorème d'extension) On cherche une racine commune aux $f_i(x_1, c_2, \cdots, c_n)$. Le cas $r = 2$ a été fait dans le lemme 2.2.1. Ainsi supposons que $r \geq 3$, et supposons sans perte de généralité que $g_1(c_2, \cdots, c_n) \neq 0$. On a

$$Res(f_1, u_2 f_2 + \cdots + u_r f_r, x_1) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{r-1}} h_\alpha(x_2, \cdots, x_n) u^\alpha$$

Montrons que $h_\alpha \in I_1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{r-1}$. Par la proposition, il existe

$$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{Z}[u_2, \cdots, u_r, x_1, \cdots, x_n, X_0, \cdots, X_d, Y_0, \cdots, Y_e]$$

tq

$$Af_A + B(u_2f_2 + \cdots + u_rf_r) = Res(f_1, u_2f_2 + \cdots + u_rf_r, x_1) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{r-1}} h_\alpha(x_2, \cdots, x_n)u^\alpha$$

où A, B sont des évaluations de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$. Ecrivons

$$A = \sum_\alpha A_\alpha u^\alpha$$
$$B = \sum_\alpha B_\alpha u^\alpha$$

Alors

$$\sum_\alpha h_\alpha u^\alpha = \sum_\alpha \underbrace{(A_\alpha f_1)}_{\in I} u^\alpha + \sum_{i=2}^{r} \sum_\beta \underbrace{(B_\beta f_i)}_{\in I} u^{\beta + e_i}$$

où $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ (le 1 est à la i-ème position). Par comparaison des coeffs devant chaque u^α, on obtient que $h_\alpha \in I$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{r-1}$. Par définition, $h_\alpha \in k[x_2, \cdots, x_n]$ donc $h_\alpha \in I_1$. En particulier, $h_\alpha(c_2, \cdots, c_n) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{r-1}$.

1. Supposons que $g_2(c_2, \cdots, x_n) \neq 0$ et $\deg_{x_1} f_2 > \max(\deg_{x_1}(f_i))_{3 \leq i \leq r}$. Alors

   $$\deg_{x_1}(u_2f_2 + \cdots + u_rf_r) = \deg_{x_1}((u_2f_2 + \cdots + u_rf_r)(c_2, \cdots, c_n))$$

   Alors

   $$0 = Res(f_1, u_2f_2 + \cdots + u_rf_r, x_1)(c_2, \cdots, c_n) = Res(f_1(c_2, \cdots, c_n), u_2f_2(c_2, \cdots, c_n) + \cdots + u_rf_r(c_2, \cdots, c_n), x_1)$$

   Alors $f_1(x_1, c_2, \cdots, c_n)$ et $\sum_{i=2}^r u_i f_i(x_1, c_2, \cdots, c_n)$ ont un facteur en commun non constant dans $k[u_2, \cdots, u_r][x_1]$. Comme $f_1(x_1, c_2, \cdots, c_n) \in k[x_1]$, ce facteur commun $D(x_1)$ est dans $k[x_1]$. En évaluant u_j en 1 et u_k en 0 pour $k \neq j$, on obtient que $D(x_1) \mid f_j(x_2, c_2, \cdots, c_n)$ pour chaque j. Ainsi il existe $c_1 \in k$ tq $f_i(c_1, \cdots, c_n) = 0$ pour tout i (on prend une racine de D, qui existe car $k = \bar{k}$).
2. On se ramène au cas 1 en remplaçant f_2 par $x_1^N f_1 + f_2$ avec N suffisament grand.

□

2.3 Application 3 : variétés paramétrées

Une variété est $V(I)$, $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. Paramètres ? $x = t$, $y = 2t$ est une paramtrisation d'une variété $V(y - 2x)$. Donnons un autre exemple : $x = t^2$, $y = t^3$ est la paramétrisation de $V(y^2 - x^3)$. Un dernier exemple : $x = s^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = st$. Il est difficile de savoir directement si c'est une variété. Formalisme : on a des équations polynomiales

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t_1, \cdots, t_m) \\ \vdots \\ x_n = f_n(t_1, \cdots, t_m) \end{cases}$$

De façon équivalente, on a un morphisme de variétés

$$\begin{array}{cccc} F : & \mathbb{A}^m & \to & \mathbb{A}^n \\ & (t_1, \cdots, t_m) & \mapsto & (f_1(t_1, \cdots, t_m), \cdots, f_n(t_1, \cdots, t_m)) \end{array}$$

Quetion : quelle est la plus petite variété contenant $F(\mathbb{A}^m)$? Idée : considérer le graphe de F : $\{(\underline{t}, F(\underline{t})) \in \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n\}$. C'est l'ensemble $V(x_1 - f_1, \cdots, x_n - f_n) \subseteq \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \arrow[dr, "p"] & \\ \mathbb{A}^m \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "F"'] & & \mathbb{A}^n \end{tikzcd}$$

où i est l'inclusion

$$\begin{array}{cccc} i : & \mathbb{A}^m & \to & \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \\ & t & \mapsto & (t, f(t)) \end{array}$$

et p la projection sur la deuxième coordonnée.

Théorème 2.3.1. *(Implicitisation) Soit k un corps infini, notons $I = (x_i - f_i \mid 1 \leq i \leq n) \overset{\text{id}}{\subseteq} k[t_1, \cdots, t_m, x_1, \cdots, x_n]$. Alors $\overline{F(\mathbb{A}^m)} = V(I_m)$ où I_m est l'idéal d'élimination $I \cap k[x_1, \cdots, x_n]$.*

On montre d'abord le cas où $k = \bar{k}$.

Théorème 2.3.2. *(Théorème de cloture) Supposons que k est algébriquement clos. Soit $I = (f_1, \cdots, f_r) \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. Soit $1 \leq l \leq n$ un entier et considérons I_l. Enfin soit*

$$\begin{array}{cccc} \pi_l : & \mathbb{A}^n & \to & \mathbb{A}^{n-l} \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & (x_{l+1}, \cdots, x_n) \end{array} \tag{2.1}$$

Alors $\overline{\pi_l(V(I))} = V(I_l)$.

Démonstration. Découle du nullstellensatz : déja, $\pi_l(V(I)) \subseteq (I_l)$. En effet, si $(a_1, \cdots, a_n) \in V(I)$, alors $\pi_l(a_1, \cdots, a_n) = (a_{l+1}, \cdots, a_n)$. Mais si $g \in I_l$, alors $g \in I$ donc $g(a_1, \cdots, a_n) = 0$ puis g ne fait pas intervenir les l premières variables. Ainsi $(a_{l+1}, \cdots, a_n) \in V(I_l)$. Soit $f \in I(\pi_l(V(I))) \subseteq k[x_{l+1}, \cdots, x_n]$, puis considérons f comme élément de $k[x_1, \cdots, x_n]$. Alors $f \in I(V(I))$ puisque f ne fait pas intervenir les l première variables. Ainsi $\exists N > 0$ tel que $f^N \in I$. Mais f ne fait pas intervenir les l premières variables, donc $f^N \in I_l$. et ainsi $f \in \sqrt{I_l} = I(V(I_l))$. Donc $I(\pi_l(V(I))) \subseteq I(V(I_l))$. On applique V :

$$V(I_l) \supseteq V(I(\pi_l(V(I)))) \supseteq V(I(V(I_l))) \supseteq V(\sqrt{I_l}) = V(I_l)$$

donc toutes ces inclusions sont des égalités. □

Démonstration. (2.3.1)

Cas 1 : k algébriquement clos On veut montrer que $\overline{F(\mathbb{A}^n)} = V(I_m)$ où $I = (x_i - f_i)$. Le théorème de cloture appliqué à p et $V(I)$: $\overline{p(V(I))} = V(I_m)$. Mais $p(V(I)) = F(\mathbb{A}^n)$.

Cas 2 : k n'est pas algébriquement clos Soit $\bar{k}$ sa clôture algébrique. Le morphisme $F : \mathbb{A}_k^m \to \mathbb{A}_k^n$ s'étend naturellement en un morphisme $\bar{F} : \mathbb{A}_{\bar{k}}^n \to \mathbb{A}_{\bar{k}}^m$ qui envoie $\underline{t}$ sur $\underline{f}(\underline{t})$. Notons $\bar{I} = (x_i - f_i) \overset{\mathrm{id}}{\subseteq} \bar{k}[x_1, \cdots, x_n]$. Par ce qui précède, $\overline{\bar{F}(\mathbb{A}_{\bar{k}}^n)} = V((\bar{I})_m)$. Or les générateurs de $(\bar{I})_m$ dans une BDG pour l'odre lex sont dans $k[x_1, \cdots, x_n]$, et ainsi $(\bar{I})_m = \overline{I_m}$. Finalement, on a (comme précédemment) que $F(\mathbb{A}_k^m) \subseteq V(I_m)$. Supposons que $V(J)$ est une autre variété tq $F(\mathbb{A}_k^m) \subseteq V(J) \subseteq V(I_m)$ où $J \overset{\mathrm{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. Prenons $g \in J$, alors $g \circ F \in k[t_1, \cdots, t_m]$. Alors $g \circ F$ s'annule sur $\mathbb{A}^m$ (car $F(\mathbb{A}_k^m) \subseteq V(J)$). Comme le corps est ifini, $g \circ F = 0$. En particulier, $g \circ F$, vu comme élément de $\bar{K}[t_1, \cdots, t_n]$ s'annule sur $\mathbb{A}_{\bar{k}}^m$ et est donc nul. Donc

$$\bar{F}(\mathbb{A}_{\bar{k}}^m) \subseteq V(\bar{J})$$

Or $\overline{\bar{F}(\mathbb{A}_{\bar{k}}^n)} = V(\bar{I}_m)$. Ainsi $V(\bar{I}_m) \subseteq V(\bar{J})$, donc $V(I_m) \subseteq V(J)$. □

Chapitre 3

Changements de bases de Grobner

3.1 Ordres matriciels

Définition 3.1.1. Soit $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. On définit une relation $<_M$ sur $\mathbb{N}^n$ de la façon suivante :

$$\alpha <_M \beta \iff M\alpha <_{lex} M\beta$$

Ex 3.1.1. Sur $k[x_1, x_2, x_3]$, I_3 convient pour $<_{lex}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

convient pour $<_{deglex}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

convient pour $<_{degrevlex}$.

Rq 3.1.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

convient aussi pour lex.

Définition 3.1.2. (Noyau à droite) Le noyau à droite de $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est

$$\ker M := \{v \in \mathbb{R}^n \mid Mv = 0\}$$

Proposition 3.1.1. *Soit $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, alors*

1. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$,

$$\alpha <_M \beta \iff \alpha + \gamma <_M \beta + \gamma$$

2. *Si* $\ker M \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, *alors* $\forall \alpha \neq \beta \in \mathbb{N}^n$, $(\alpha <_M \beta) \vee (\beta <_M \alpha)$.
3. *S'il existe une matrice $T \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs et t.q. $TM \in M_{m,n}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $0 \leq_M \alpha$.*

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} \alpha <_M \beta &\iff M\alpha <_{lex} M\beta \\ &\iff M\alpha + M\gamma <_{lex} M\beta + M\gamma \\ &\iff M(\alpha + \gamma) <_{lex} M(\beta + \gamma) \\ &\iff \alpha + \gamma <_M \beta + \gamma \end{aligned}$$

2. Soient $\alpha \neq \beta \in \mathbb{N}^n$, alors

$$\begin{aligned} \alpha <_M \beta \vee \beta <_M \alpha &\iff M\alpha <_{lex} M\beta \vee M\beta <_{lex} M\alpha \\ &\iff M\alpha \neq M\beta \iff \alpha - \beta \notin \ker M \end{aligned}$$

   et comme $\ker M \cap \mathbb{Z}^n = 0$ et $\alpha \neq \beta$, alors $\alpha - \beta \notin \ker M$ est toujours vraie.
3. Notons w_i les lignes de M. TM est obtenue en effectuant les opérations suivantes :
   - Remplacer w_1 par un multiple strictement positif de w_1.
   - Remplacer w_2 par un multiple strictement positif de w_2 plus une combinaison linéaire de W_1.
   - Remplacer w_3 par un multiple strictement positif de w_3 plus une combinaison linéaire de w_1, w_2.
   - $\vdots$

   Pour comparer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ pour $<_M$ on calcule

$$M\alpha = \begin{bmatrix} w_1 \cdot \alpha \\ \vdots \\ w_b \cdot \alpha \end{bmatrix}, \ M\beta = \begin{bmatrix} w_1 \cdot \beta \\ \vdots \\ w_b \cdot \beta \end{bmatrix}$$

Montrons que $<_M=<_{TM}$. Notons $T = (T_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$. Alors

$$TM = \begin{bmatrix} t_{11}w_1 \\ t_{21}w_1 + t_{22}w_2 \\ t_{31}w_1 + t_{32}w_2 + t_{33}w_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \alpha <_M \beta \iff & \begin{cases} w_1\alpha < w_2\beta \\ \text{ou alors } w_1\alpha = w_1\beta \text{ et } w_2\alpha < w_2\beta \\ \text{ou alors } w_1\alpha = w_1\beta \text{ et } w_2\alpha = w_2\beta \text{ et } w_3\alpha < w_3\beta \\ \vdots \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} t_{11}w_1\alpha < t_{11}w_1\beta \\ \text{ou alors } t_{11}w_1\alpha = t_{11}w_1\beta \text{ et } t_{22}w_2\alpha + t_{21}w_1\alpha < t_{22}w_2\beta + t_{21}w_1\beta \\ \vdots \end{cases} \\ \iff & TM\alpha <_{lex} TM\beta \iff \alpha <_{TM} \beta \end{aligned}$$

et aini $<_M=<_{TM}$. Maintenant comme $TM \in M_{m,n}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $TM\alpha \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ et donc $0 \leq_{TM} \alpha$, d'où $0 \leq_M \alpha$.

□

Corollaire 3.1.1. *Pour tout T triangulaire inférieure avec coefficients diagonaux strictement positifs, alors $<_{TM}=<_M$.*

Corollaire 3.1.2. *Si une ligne de M est combinaison linéaire des lignes au dessus, alors la retirer ne change pas l'ordre matriciel.*

Corollaire 3.1.3. *Tout ordre matriciel est égal à un ordre matriciel $<_M$, où M a au plus n lignes.*

Ex 3.1.2. $M = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ définit un ordre monomial.

Corollaire 3.1.4. *Tout ordre monomial matriciel est égal à $<_M$ où M a exactement n lignes.*

Démonstration. D'après le corolaire précédent, on peut prendre M avec moins de n lignes. Mais alors rajouter des lignes de zéros ne change pas l'ordre. □

Rq 3.1.2. Si $n \geq 2$, alors $k[x_1, \cdots, x_n]$ admet une infinité d'ordres monomiaux. Par exemple, pour $n = 2$, pour tout $a \in \mathbb{N}$, on définit

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors $y >_{M_a} x^a$ et $y <_{M_a} x^{a+1}$, donc les $<_{M_a}$ définissent une infinité d'ordre monomiaux différents.

Théorème 3.1.1. *(Robbiano, 1985) Tout ordre monomial est un ordre matriciel.*

Démonstration. Soit $<$ un ordre monomial sur $\mathbb{N}^n$.

Etape 1 : $<$ s'étend en un unique ordre total additif sur $\mathbb{Z}^n$: si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, alors $\exists \gamma \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\alpha + \gamma, \beta + \gamma \in \mathbb{N}^n$. On pose ainsi

$$\alpha < \beta \iff \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

Clairement, cette définition ne dépend pas du choix de γ. Donc $<$ est étendu en un ordre total à $\mathbb{Z}^n$.

Etape 2 : L'ordre total additif $<$ sur $\mathbb{Z}^n$ s'étend en un unique ordre total additif sur $\mathbb{Q}^n$: si $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^n$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{N}^n$ tq $\lambda\alpha, \lambda\beta \in \mathbb{Z}^n$. Ainsi on pose

$$\alpha < \beta \iff \lambda\alpha < \lambda\beta$$

Ceci ne dépend pas de λ, et on a ainsi étendu $<$ à un ordre total additif sur $\mathbb{Q}^n$.

Etape 3 : Soient

$$H_- = \{v \in \mathbb{Q}^n \mid v < 0\}$$
$$H_+ = \{v \in \mathbb{Q}^n \mid v > 0\}$$

Ainsi $\mathbb{Q}^n = H_- \sqcup \{0\} \sqcup H_+$. Alors considérons les adhérences $\bar{H}_-$, $\bar{H}_+$, puis $I_0 = \bar{H}_- \cap \bar{H}_+$. Montrons que I_0 est un sev de $\mathbb{R}^n$ de codimension 1.

- H_+, H_- sont stables pas somme.
- H_+, H_- sont stables par produit par des éléments de $\mathbb{Q}_{>0}$.
- L'opération $\sigma : v \mapsto -v$ est une bijection de H_+ dans H_-.

Ainsi

- $\bar{H}_+, \bar{H}_-$ sont stables par somme.
- $\bar{H}_+, \bar{H}_-$ sont stables par produits par des éléments de $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- $\sigma : v \mapsto -v$ induit une bijection entre $\bar{H}_+$ et $\bar{H}_-$.

Par conséquent, I_0 est stable par somme et produit par un réél quelconque. Comme $I_0 \neq \emptyset$, car $0 \in I_0$, ceci donne que I_0 est un sev de $\mathbb{R}^n$. Montrons que $\dim I_0 = n-1$ en montrant que $I_0 \neq \mathbb{R}^n$, et que $\mathbb{R}^n \backslash I_0$ n'est pas connexe. Puisque $\mathbb{Q}^n_{>0} \cap H_- = \emptyset$, on obtiens que $I_0 \neq \mathbb{R}^n$. De plus, $\mathbb{R}^n \backslash I_0 = (\bar{H}_+ \backslash I_0) \sqcup (\bar{H}_- \backslash I_0)$, et ces deux composantes sont des fermés, donc $\mathbb{R}^n \backslash I_0$ n'est pas connexe.

Etape 4 : Soit w_1 un vecteur non nul, orthogonal à I_0 tel que pour tout $h \in \bar{H}_+$, alors $\langle w_1, h \rangle \geq 0$ (w_1 existe quitte à le multiplier par -1, et est unique à produit par $\mathbb{R}_{>0}$ près). Alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

— $v \in \bar{H}_+ \iff \langle w_1, v \rangle \geq 0$
— $v \in \bar{H}_- \iff \langle w_1, v \rangle \leq 0$
— $v \in I_0 \iff \langle w_1, v \rangle = 0$

Si $v, v' \in \mathbb{Q}^n$, alors $v < v' \iff v - v' < 0 \iff v - v' \in H_- \Leftarrow \langle w_1, v - v' \rangle < 0$. Le vecteur w_1 sera la première ligne d'une matrice M telle que $<_M = <$ sur $\mathbb{N}^n$.

Etape 5 : Si $\langle v - v', w_1 \rangle = 0$, alors $v - v' \in I_0$. Soit $G_1 = I_0 \cap \mathbb{Q}^n$, alors G_1 est une $\mathbb{Q}$-ev de dimension au plus $n-1$. Posons

$$H_{1,+} = \{v \in G_1 \mid v > 0\}$$
$$H_{1,-} = \{v \in G_1 \mid v < 0\}$$

$I_1 = \bar{H}_{1,+} \cap \bar{H}_{1,-}$. Comme pour I_0, on montre que I_1 est un sev de codim 1 dans $\bar{G}_1$. Soit w_2 un vecteur orthogonal à I_1 dans $\bar{G}_1$ tq $\forall h \in \bar{H}_{1,r}$, $\langle w_2, h \rangle \geq 0$. On a donc

$$\alpha <_{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}} \beta \Rightarrow \begin{cases} w_1\alpha < w_1\beta \\ \text{ou } w_1\alpha = w_1\beta \text{ et } w_2\alpha < w_2\beta \\ \text{ou } w_1\alpha = w_1\beta \text{ et } w_2\alpha = w_2\beta \end{cases}$$

Etape 6 : On pose $G_2 = \mathbb{Q}^n \cap I_1$. et ainsi de suite. On construit au plus n vecteur $w_1, \cdots, w_m$ tq

$$\alpha <_{\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}} \beta \iff \alpha < \beta$$

$\square$

Notation. — $<$ ordre monomial, $E \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$. Alors

$$LT_<(E) := \{LT_<(f) \mid f \in E\}$$

—

$$Mon(E) = \{(LT_<(E)) \mid < \text{ ordre monomial}\}$$

Théorème 3.1.2. *Soit* $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$*. Alors* $Mon(I)$ *est fini.*

Démonstration. Supposons le contraire, pour chaque $J \in Mon(I)$, soit $<^J$ un ordre monomial tel que $J = (LT_{<^J}(I))$. Soit

$$\Sigma = \{<^J \mid J \in Mon(I)\}$$

Par le théorème de la base de Hilbert il existe $f_1, \cdots, f_r \in I$ tq $I = (f_1, \cdots, f_r)$. Chaque f_i n'a qu'un nombre fini de termes, puisque Σ est infini, $\exists \Sigma_1 \subseteq \Sigma$ infini tel que $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $LT_<(f_i)$ prend la même valeur pour tout $<\in \Sigma_1$. Posons

$$J := (LT_<(f_1), \cdots, LT_<(f_r))$$

pour $<\in \Sigma_1$. Montrons que $\{f_1, \cdots, f_r\}$ n'est pas une bdg de I, pour $<\in \Sigma_1$. Si c'était le cas, alors ce serait une bdg pour tout $<' \in \Sigma_1$:

$$(LT_<(I)) = (LT_<(f_i)) = (LT_{<'}(f_i)) \subseteq (LT_{<'}(I))$$

puis si un monôme m est dans $(LT_{<'}(I))$ mais pas dans $(LT_<(I))$, alors la division de m par $f_1, \cdots, f_r$ donne un reste non nul, pour $<$ comme pour $<'$. Mais si $m = LT_{<'}(f)$, $f \in I$, alors le reste de la dibision de f par $f_1, \cdots, f_r$ pour $<$ est nul. Ce reste contient pourtant le terme m, contradiction. Donc $\{f_1, \cdots, f_r\}$ est une bdg pour tout $<' \in \Sigma_1$, donc pour tout $<, <' \in \Sigma_1$,

$$(LT_<(I)) = (LT_{<'}(I))$$

mais par définition de Σ_1, si $< \neq <'$, alors $(LT_<(I)) \neq (LT_{<'}(I))$, contradiction. Ainsi $\{f_1, \cdots, f_r\}$ n'est pas une bdg pour I et pour $<\in \Sigma_I$. Il existe donc $f_{r+1} \in I$ tq $LT_<(f_{r+1}) \notin (LT_<(f_i))$. Alors $\exists \Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$ infini tel que les valeurs de $LT_<(f_i)$, $i \in [\![1, r+1]\!]$, sont les mêmes pour tout $<\in \Sigma_2$. Comme plus haut, on mq $(f_1, \cdots, f_{r+1})$ n'est pas une bdg de I pour $<\in \Sigma_2$. Donc $\exists f_{r+2} \in I$ tel que $LT_<(f_{r+2}) \notin (LT_<(f_1), \cdots, LT_<(f_{r+1}))$ pour $<\in \Sigma_2$. Ainsi on construit par récurrence une famille d'ensembles infinis $\Sigma \supseteq \Sigma_1 \supseteq \Sigma_2 \supseteq \cdots$ et des éléments $f_1, f_2, \cdots$ pour $<_i \in \Sigma_i$ tels que

$$(LT_{<_1}(f_1), \cdots, LT_{<_1}(f_{r+1})) \not\subseteq (LT_{<_2}(f_1), \cdots, LT_{<_1}(f_{r+2})) \supseteq \cdots$$

ce qui contredit la noethérianité de $k[x_1, \cdots, x_n]$. $\square$

Définition 3.1.3. (Base de grobner marquée) Soit $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[x_1, \cdots, x_n]$. Une base de grobner marquée pour I est un ensemble de polynômes $\{g_1, \cdots, g_r\} \subseteq I$ et un choix de monôme m_i de g_i tel qu'il existe un ordre monomial $<$ pour lequel $\{g_1, \cdots, g_r\}$ est la base de grobner réduite et $m_i = LT_<(g_i)$.

Corollaire 3.1.5. *L'ensemble des bdg marquée de I est en bijection avec $Mon(I)$, et est donc fini.*

Démonstration. Soit $\{(g_1, m_1), \cdots, (g_r, m_r)\}$ une badg marquée de I. Supposons que $<, <'$ sont deux ordres monomiaux pour lesquels $\{(g_1, m_1), \cdots, (g_r, m_r)\}$ est la base de grobner marquée. Alors

$$(LT_<(I)) = (LT_{<'}(I))$$

En effet, $(LT_<(I)) = (LT_<(g_i)) = (m_i) = (LT_{<'}(g_i)) = (LT_{<'}(I))$. On a donc défini une application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \{\text{bdg marquées}\} & \to & Mon(I) \\ & \{(g_i, m_i)\} & \mapsto & (LT_<(I)) \end{array}$$

où $<$ est un ordre pour lequel $\{(g_i, m_i)\}$ est une bdg marquée. On définit une inverse ψ à ϕ : Soit $J \in Mon(I)$, puis soient $<, <'$ tq $J = (LT_<(I)) = (LT_{<'}(I))$. Alors $<$ et $<'$ définissent la même bdg marquée de I. Soit $\{(g_i, m_i)\}$ la base de groebner marquée pour $<$. Ainsi

$$\begin{aligned} (LT_<(g_i)) &= (LT_<(I)) \\ &= (LT_{<'}(I)) \supseteq (LT_{<'}(g_i)) \end{aligned}$$

Pour chaque i, $LT_{<'}(g_i)$ est divisible par l'un des $LT_<(g_j)$, mais comme (g_i) est une bdg réduite, ceci entraine que $LT_{<'}(g_i) = LT_<(g_i)$. En particulier (g_i, m_i) est une bdg, réduite et marquée pour l'ordre $<'$. On a donc défini

$$\begin{array}{rccc} \psi : & Mon(I) & \to & \{\text{bdg marquées}\} \\ & J & \mapsto & \{(g_i, m_i)\} \end{array}$$

et il est clair que ϕ et ψ sont mutuellement inverses. □

Corollaire 3.1.6. *Il existe un ensemble fini $\mathcal{U} \subseteq I$ tel que $\mathcal{U}$ est une bdg de I, quelque soit l'ordre monomial.*

Définition 3.1.4. Ce $\mathcal{U}$ est appelé base de grobner universelle.

Définition 3.1.5.

1. Un cône dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble ayant la forme

$$C(v_1, \cdots, v_r) := \left\{ \sum_{finie} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}$$

   De façon équivalente, un cône est une intersection de demi espaces fermés.

2. Un hyperplan de définition d'un cône C est hyperplan $H = v^\perp$ tel que $v \cdot C \geq 0$.

3. Une face d'un cône C est une intersection de $\mathcal{C}$ avec l'un de ses hyperplans de définition. Remarquons que les faces d'un cône sont des cônes.
4. La dimension d'un cône est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^n$ qu'il engendre.
5. Les faces de dimension 1 de C sont les rayons de $\mathcal{C}$.
6. Les faces de codimension 1 de C sont les facettes de $\mathcal{C}$.
7. Un éventail est un ensemble $\mathcal{F}$ de cônes tels que
   — $C \in \mathcal{F} \Rightarrow$ toute face de C est dans $\mathcal{F}$.
   — $C, C' \in \mathcal{F} \Rightarrow C \cap C' \in \mathcal{F}$ et est une face de C et C'.

Définition 3.1.6. Soit $w \in \mathbb{R}^n_+$. Le w degré d'un monôme x^α est $\deg_w x^\alpha = w{\cdot}\alpha$. Un polynôme est w-homogène si tous ses termes ont le même w-degré. Si $0 \neq F \in k[X_1, \cdots, X_n]$, on pose

$$LT_w(f) = \sum \text{termes de } f \text{ de } w\text{-degré maximal}$$

Si $E \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]$, $LT_w(E) = \{LT_w(f) \mid f \in E\}$.

Notation. Si $<_M$ est un ordre monomial, on écrira LT_M au lieu de $LT_{<M}$.

Proposition 3.1.2. *Soit $<_M$ un ordre monomial, soit $w \in \mathbb{R}^n_+$. Posons*

$$\bar{M} := \begin{bmatrix} w \\ M \end{bmatrix}$$

de sorte que $<_{\bar{M}}$ soit un ordre monomial.

1. *$\forall f \in k[X_1, \cdots, X_n]$, $LT_{\bar{M}}(f) = LT_M(LT_w(f))$*
2. *Si $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[X_1, \cdots, X_n]$, alors*

$$\langle LT_M \langle LT_w(I)\rangle\rangle = \langle LT_{\bar{M}}(I)\rangle$$

3. *Si $\bar{G}$ est une bdg de I pour $<_{\bar{M}}$, alors $LT_w(\bar{G})$ est une bgd de $\langle LT_w(I)\rangle$ pour $<_M$.*

Lemme 3.1.1. *Soit $w \in \mathbb{R}^n_+$. Tout polynôme $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ s'écrit de façon unique comme*

$$f = \sum_{d \in \ltimes} f_{(d)}$$

où $f_{(d)}$ est homogène de w-degré d.

Démonstration. Exercice □

Démonstration. 1. Exercice

2. $\supseteq$:

$$\langle LT_{\bar{M}}(I)\rangle = \langle LT_M LT_w(I)\rangle \subseteq \langle LT_M \langle LT_w(I)\rangle\rangle$$

$\subseteq$: Il suffit de montrer que $LT_M \langle LT_w(I)\rangle \subseteq \langle LT_{\bar{M}}(I)\rangle$. Soit $f \in \langle LT_w(I)\rangle$. Alors

$$f = \sum_{i=1}^{r} q_i LT_w(f_i)$$

avec $q_i \in k[X_1, \cdots, X_n]$, $f_i \in I$.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{d\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{r} (q_i LT_w(f_i))_{(d)} \\ &= \sum_{d} \sum_{i=1}^{r} (q_i)_{(d-\deg_w LT_w f_i)} LT_w(f_i) \end{aligned}$$

Si $\sum_{i=1}^{r} (q_i)_{(d-\deg_w LT_w f_i)} LT_w(f_i) \neq 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{r} (q_i)_{(d-\deg_w LT_w f_i)} LT_w(f_i) = LT_w\left(\sum_{i=1}^{r} (q_i)_{(d-\deg_w LT_w f_i)} f_i\right) \in LT_w(I)$$

Si $\deg_w LT_M(f) = d$, alors

$$LT_M(f) = LT_M\left(\sum (q_i)_{(d-\deg_w LT_w f_i)} LT_w(f_i)\right) \in LT_M LT_w(I) = LT_{\bar{M}}(I)$$

3.

$$\begin{aligned} \langle LT_M \langle LT_w(I)\rangle\rangle &= \langle LT_{\bar{M}}(I)\rangle \\ &= \left\langle LT_{\bar{M}}(\bar{G})\right\rangle \\ &= \left\langle LT_M LT_w(\bar{G})\right\rangle \end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.3. *Soit $<$ un ordre monomial. Soit $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[X_1, \cdots, X_n]$. Soit B l'ensemble des monômes qui ne sont pas dans $\langle LT_<(I) \rangle$. Soit $\pi : k[X_1, \cdots, X_n] \twoheadrightarrow k[X_1, \cdots, X_n]$, alors $\pi(B)$ est un base du k-ev $k[X_1, \cdots, X_n]/I$.*

Démonstration. Soit G une bdg de I pour $<$. Si $0 \neq f \in k[X_1, \cdots, X_n]$, $\bar{f}^G$ est combinaison linéaire des éléments de B. Or $\pi(f) = \pi(\bar{f}^G)$, d'où $\pi(f)$ est combinaison linéaire des éléments de $\pi(B)$. De plus, $\pi(B)$ est libre car aucu,e combinaison linéaire d'éléments de B n'est dans I. □

Corollaire 3.1.7. *Si $< \neq <'$ sont deux ordres monomiaux, alors on ne peut pas avoir $\langle LT_<(I) \rangle \subsetneq \langle LT_{<'}(I) \rangle$.*

Démonstration. Si on avait une inclusion stricte, alors on aurait que $B' \subsetneq B$, et donc $\pi(B') \subsetneq \pi(B)$ sont deux bases du même espace vectoriel, impossible. □

Définition 3.1.7. Soit $I \overset{\text{id}}{\subseteq} k[X_1, \cdots, X_n]$. Soit $w \in \mathbb{R}^n_+$.

$$C[w] := \left\{ w' \in \mathbb{R}^n_+ \mid \langle LT_w(I) \rangle = \langle LT_{w'}(I) \rangle \right\} \tag{3.1}$$

Proposition 3.1.4. *Soit $<_M$ un ordre monomial, et*

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} w \\ M \end{bmatrix}$$

Soit $\bar{G}$ la bdg réduite de I pour $w_{\bar{M}}$. Alors

$$C[w] = \{ w' \in \mathbb{R}^n_+ \mid \forall g \in \bar{G}, \, LT_w(g) = LT_{w'}(g) \}$$

Démonstration.

$\subset$: Soit $w' \in C[w]$. Alors $\langle LT_w(I) \rangle = \langle LT_{w'}(I) \rangle$. Par la prop précédente, $LT_w(\bar{G})$ est ma bdg réduite de $\langle LT_w(I) \rangle$ pour $<_M$. Soit $g \in \bar{G}$,

$$\overline{LT'_w(g)}^{LT_w(\bar{G})} = 0$$

Alors $LT_M LT_{w'}(g) \in \left\langle LT_M LT_w(\bar{G}) \right\rangle = \left\langle LT_{\bar{M}}(\bar{G}) \right\rangle$. Comme $\bar{G}$ est réduite, le seul terme de g qui soit dans $\left\langle LT_{\bar{M}}(\bar{G}) \right\rangle$ est $LT_{\bar{M}}(g)$. Donc

$$LT_M LT_{w'}(g) = LT_{\bar{M}}(g) = LT_M LT_w(g)$$

$LT_w(g) = LT_M LT_w(g) = h$, $LT_{w'}(g) = LT_M LT_{w'}(g) + h' = LT_M LT_w(g) + h'$. Donc $LT_w(g) - LT_{w'}(g) = h - h'$. Or $LT_w(g) - LT_{w'}(g) \in \langle LT_w(I) \rangle$. Donc $\overline{h - h'}^{LT_w(\bar{G})} = 0$. Or aucun des termes de h ou h' n'est divisible par un élément de $LT_M LT_w(\bar{G}) = LT_{\bar{M}}(\bar{G})$. D'où $h - h' = 0$, et $h = h'$. Donc $LT_w(g) = LT_{w'}(g)$. Ceci montre $\subseteq$.

$\supseteq$: Soit $w' \in \mathbb{R}_+^n$ tq $\forall g \in \bar{G}$, $LT_w(g) = LT_{w'}(g)$. Alors

$$\langle LT_w(I) \rangle = \left\langle LT_w(\bar{G}) \right\rangle = \left\langle LT_{w'}(\bar{G}) \right\rangle \subseteq \langle LT_{w'}(I) \rangle$$

Si l'inclusion était stricte, alors on aurait $\langle LT_M \langle LT_w(I) \rangle \rangle \nsubseteq \langle LT_M \langle LT_{w'}(I) \rangle \rangle$ (en effet, si $J \subseteq J'$ et $\langle LT_M(J) \rangle = \langle LT_M(J') \rangle$, alors une bdg de J pour $<_M$ est forcément une bdg de J' pour J', et donc $J = J'$). Maintenant

$$\langle LT_{\bar{M}}(I) \rangle = \langle LT_M \langle LT_w(I) \rangle \rangle \nsubseteq \langle LT_M \langle LT_{w'}(I) \rangle \rangle = \left\langle LT_{\begin{bmatrix} w \\ M \end{bmatrix}}(I) \right\rangle$$

contradiction avec le corollaire précédent. Donc $\langle LT_w(I) \rangle = \langle LT_{w'}(I) \rangle$, d'où $w' \in C[w]$. □

Corollaire 3.1.8. *$C[w]$ est un cône relativement ouvert, i.e. une intersection de demi-espaces ouverts et d'hyperplans.*

Démonstration. Soient $<_M$ un ordre monomial, $\bar{M} = \begin{bmatrix} w \\ M \end{bmatrix}$, $\bar{G}$ une bdg réduite de I pour $<_{\bar{M}}$. Alors

$$C[w] = \{w' \in \mathbb{R}_+^n \mid \forall g \in \bar{G},\, LT_w(g) = LT_{w'}(g)\}$$

Donc

$$\begin{aligned} w' \in C[w] &\iff \forall g \in \bar{G},\, LT_w(g) = LT_{w'}(g) \\ &\iff \forall g \in \bar{G}, \begin{cases} \text{Si } x^\alpha \text{ et } x^\beta \text{ sont deux monômes de } LT_w(g) \text{, alors } w' \cdot \alpha = w' \cdot \beta \\ \text{Si } x^\alpha \text{ est monôme de } LT_w(g) \text{ et } x^\beta \text{ est un monôme de } g \text{ mais pas} \\ \text{de } LT_w(g) \text{, alors } w' \cdot \alpha > w' \cdot \beta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} w' \in (\alpha - \beta)^\perp \\ w' \cdot (\alpha - \beta) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Ex 3.1.3. $I = \left\langle y^3 - xy, x^2 - y \right\rangle$. $y^3 - xy, x^2 - y$ bdg réduite pour degrevlex (matrice associée

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

) $w = (1,1)$. $v = (v_1, v_2) \in C[w]$, on a

$$\begin{cases} v \cdot (0,3) > v \cdot (1,1) \\ v \cdot (2,0) > v \cdot (0,1) \end{cases} \iff \begin{cases} -v_1 + 2v_2 > 0 \\ 2v_1 - v_2 > 0 \end{cases}$$

Corollaire 3.1.9. *$\overline{C[w]}$ est un cone.*

Démonstration. $\overline{C[w]}$ est défini en remplaçant les inégalités strictes du dernier corollaire par des $\leq$. □

Définition 3.1.8. On définit l'éventail de groebner $GF(I)$ comme l'ensemble des $\overline{C[w]}$.

Théorème 3.1.3. *$GF(I)$ est un éventail fini.*

Démonstration. Il faut montrer que

1. Toute face de $\overline{C[w]}$ a la forme $\overline{C[w']}$
2. $\overline{C[w]} \cap \overline{C[w]}$ est une face de $\overline{C[w]}$ et $\overline{C[w']}$.
3. $GF(I)$ est fini (On le montrera plus tard).

Prouvons les deux premiers points :

1. Soit F une face de $\overline{C[w]}$. F est défini en remplaçant certaines des inégalités "> 0" dans la définition de $C[w]$ par "$= 0$". Soit $w' \in F$, pour tout $g \in \bar{G}$, les termes de $LT_w(g)$ sont tous des termes de $LT_{w'}(g)$. Posons

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} w' \\ w \\ M \end{bmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left\langle LT_{\overline{\overline{M}}}(I) \right\rangle &= \langle LT_{w'} \langle LT_{\bar{M}}(I) \rangle \rangle && (3.2) \\ &= \left\langle LT_{w'} \left\langle LT_{\bar{M}}(\bar{G}) \right\rangle \right\rangle && (3.3) \\ &= \left\langle LT_{\bar{M}}(\bar{G}) \right\rangle && (3.4) \\ &= \langle LT_{\bar{M}}(I) \rangle && (3.5) \end{aligned}$$

(3.3) = (3.4) : $f \in \left\langle LT_{\bar{M}}(\bar{G}) \right\rangle$, alors

$$\sum_{i=1}^{r} g_i LT_{\bar{M}}(g_i) = \sum_{d \geq 0} \sum_i (g_i)_{d - \deg_{w'} LT_{\bar{M}}(g_i)} LT_{\bar{M}}(g_i)$$

$$\Rightarrow LT_{w'}(f) = \sum_i (g_i)_{d - \deg_{w'} LT_{\bar{M}}(g_i)} LT_{\bar{M}}(g_i) \in \left\langle LT_{\bar{M}}(\bar{G}) \right\rangle$$

En particulier, $\bar{G}$ est une bdg pour $w_{\overline{\overline{M}}}$. Donc

$$C[w'] = \{w'' \in \mathbb{R}_+^n \mid \forall g \in \bar{G},\, LT_{w'}(g) = LT_{w''}(g)\}$$

Si w' est "génériqueé (i.e. que toute inégalité définissant F est stricte pour w'). Alors $\overline{C[w']} = F$ car $w'' \in \overline{C[w']}$ ssi w'' satisfaisant aux mêmes (in)égalités que w'.

2. Soient $w, w' \in \mathbb{R}_+^n$. Condiréons $\overline{C[w]} \cap \overline{C[w']}$. Si $w'' \in \overline{C[w]} \cap \overline{C[w']}$, alors $\overline{C[w'']}$ est une face de $\overline{C[w]}$ et de $\overline{C[w']}$, par ce qui précède. Prenons w'' dans l'intérieur relatif, on obtiens que $\overline{C[w'']} = \overline{C[w]} \cap \overline{C[w']}$.

□

Rq 3.1.3. En sage, on dispose de la procédure `groebner_fan()`

3.2 Le cône maximal d'une bdg marquée

Soit $G = \{(g_i, x^{\alpha_i})\}_{1 \leq i \leq r}$ une bdgm. Écrivons

$$g_i = x^{\alpha_i} + \sum_{\beta \neq \alpha_i} c_{i,\beta} x^{\beta}$$

Fixons $<_M$ ordre monomial pour lequel g est la bdgm. Notons w la première ligne de M. Alors $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\forall \beta$ tq $c_{i,\beta} \neq 0$,

$$w \cdot \alpha_i \geq w \cdot w \cdot \beta \iff w \cdot (\alpha_i - \beta) \geq 0$$

Lemme 3.2.1. *Il existe $w' \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\forall \beta \neq \alpha_i$ t.q. $c_{i,\beta} \neq 0$,*

$$w' \cdot \alpha_i > w' \cdot \beta$$

Alors G est une bdgm pour $<_{\begin{bmatrix} w' \\ M \end{bmatrix}}$

Démonstration. On peut modifier w ainsi : S'il existe i, β tq $c_{i,\beta} \neq 0$ mais $w \cdot \alpha_i = w \cdot \beta$. Alors $w \in (\alpha_i - \beta)^{\perp}$. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ t.q. $v \cdot (\alpha_i - \beta) > 0$. Alors $(w + \varepsilon v) \cdot (\alpha_i - \beta) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour que les autres inégalités soient respectées, il sufit de prendre $0 < \varepsilon$ petit. On montre que si $w \cdot (\alpha_j - \beta') = 0$, on peut choisir v non-nul dans $(\alpha_j - \beta')^{\perp}$. □

Définition 3.2.1. Avec les notations précédentes, le cône de G est $C_G := C[w']$.

Rq 3.2.1. C_G est de dimension n, car c'est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces ouverts. En particulier, $\bar{C}_G$ est un cône maximal de l'éventail de Groebner. De plus, tout cône maximal de $GF(I)$ a cette forme. Tout cône a la forme $\overline{C[w]}$. Par ce qui précède, on peut trouver $w'' \in \mathbb{R}^n_+$ tel que $\bar{G}$ est la bdg pour $\begin{bmatrix} w'' \\ M \end{bmatrix}$ et $LT_{w''}(g)$ sont dest monômes. Donc $\overline{C[w]} \subseteq \overline{C[w'']}$. Comme $\overline{C[w'']}$ est de dimension n, tous les cônes maximaux de $GF(I)$ sont de dimension n et ont la forme $\overline{C[w'']}$.

Corollaire 3.2.1. *$GF(I)$ est fini.*

Ex 3.2.1. $k[x, y]$, $I = \langle x^2 - y, xy - y^3, y^5 - y^2 \rangle$. Calculons $GF(I)$: ses cônes maximaux ont la forme $\bar{C}_G$.