Feuille 2,
Courbes algébriques
Ensembles Algébriques Affines

Exercice 1 Pour $f \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ on note $D(f) := \mathbb{A}^n \setminus V(f)$.

1. Montrer que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.
2. Montrer que les ensembles $D(f)$ (pour tout $f \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$) forment une base pour la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n$.

On suppose que le corps k est infini.

3. Montrer que $D(f) = \emptyset$ si et seulement si $f = 0$.
4. Montrer que si $U, V \neq \emptyset$ sont des ensembles ouverts dans $\mathbb{A}^n$, on a $U \cap V \neq \emptyset$.

Exercice 2 Soient $P_1, \cdots, P_r \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ tels que

$$P_1 + \cdots + P_r = 1.$$

Montrer que $(D(P_i))_{i \in [1.r]}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{A}^n$.

Exercice 3 Soit $V \subsetneq \mathbb{A}^n$ un ensemble algébrique et soit $x \in \mathbb{A}^n \setminus V$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $P(x) = 1$ et $P(y) = 0$ pour tout $y \in V$.

Exercice 4 Soit X un espace topologique. On suppose qu'il existe des ouverts U_1 et U_2 non vide et irréductibles de X tels que $X = U_1 \cup U_2$ und $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Montrer que X est irréductible.

Exercice 5 Soit k un corps algebriquement clos.

1. Soient I et J des idéaux $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Montrer que $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ si et seulement si $V(I) = V(J)$.
2. Soient V_1 et V_2 des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{A}^n$. Montrer que

$$I(V_1 \cap V_2) = \sqrt{I(V_1) + I(V_2)}.$$

Exercice 6 Soit $V = V(Y^2 - X^2(X+1))$. Soit $f : \mathbb{A}^1 \to V$,

$$f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$

Montrer que :

1. L'application f est régulière, mais n'est pas bijective.
2. L'application $f^* : \mathsf{k}[V] \to \mathsf{k}[\mathbb{A}^1]$ n'est pas un isomorphisme de k-algèbres.
3. Il n'y a pas d'isomorphisme de k-algèbres entre $\mathsf{k}[V]$ et $\mathsf{k}[\mathbb{A}^1]$.
4. Les ensembles algébriques V et $\mathbb{A}^1$ ne sont pas isomorphes.

On pose $\mathsf{k}[V] := \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/I(V)$.

Exercice 7 Soit V l'image de l'application $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$ donné par $f(t) = (t, t^2, t^3)$. Montrer que $\mathsf{k}[V]$ est isomorphe à $\mathsf{k}[T]$ de deux façons différentes.

Exercice 8 Dans les cas suivants, construire un isomorphisme $f : V \to W$ des ensembles algébriques affines. Calculer sa réciproque et le morphisme f^*.

1. $V = V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^2$, $W = V(X + Y) \subseteq \mathbb{A}^2$.
2. $V = V(X - Y^2) \subseteq \mathbb{A}^2$, $W = V(Y - X^2) \subseteq \mathbb{A}^2$.
3. $V = V(Z - X, Y - X^2) \subseteq \mathbb{A}^3$, $W = \mathbb{A}^1$.
4. $V = V(Z - XY) \subseteq \mathbb{A}^3$, $W = \mathbb{A}^2$.

Exercice 9 Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. On suppose que X est irréductible. Montrer que l'adhérence $\overline{f(X)}$ de $f(X)$ dans Y est irréductible.

Exercice 10 Soit k un corps algébriquement clos, de caractéristique 0. Soit $C = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ donné par

$$f = Y^2 - X(X-1)(X-a), \quad a \in k.$$

1. Quelle est la dimension de C? Explicitez $k[C]$ et $k(C)$.
2. Quelles sont les points singuliers de C ?
3. Montrer que si $a \neq 0, 1$, il n'y a pas d'application régulière $\mathbb{A}^1 \to C$ non-constante.
4. Montrer que si $a \neq 0, 1$, il n'y a pas d'application rationnelle $\mathbb{A}^1 \dashrightarrow C$ non-constante.
5. Pour $a = 0$ et 1, expliciter une application régulière et birationnelle $f : \mathbb{A}^1 \to C$. Pour $a = 0$, montrer que l'application rationnelle inverse $f^{-1} : C \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ n'est pas régulière.