Exercices

Alexandre Guillemot

11 octobre 2022

Exercice 10, feuille 2

Avant de résoudre les questions, il faut prouver que C est bien une variété algébrique, i.e. $Y^2 - X(X-1)(X-a)$ est irréductible (car dans ce cas $I(C) = \sqrt{(Y^2 - X(X-1)(X-a))}$ sera un idéal premier). Pour cela, utilisons le résultat suivant :

Lemme 0.1. *Soit A un anneau commutatif, et $a \in A$. Alors le polynôme $X^2 - a \in A[X]$ est irréductible si et seulement si a est un carré dans A.*

Démonstration.

Si a est un carré, disons $a = b^2$ avec $b \in A$, alors $X^2 - a = (X-b)(X+b)$ et donc $X^2 - a$ est réductible.

Supposons maintenant que $X^2 - a$ est réductible, écrivons $X^2 - a = PQ$ avec $P, Q \in A[X]$ qui ne sont pas des unités dans A. Alors 3 cas se présentent :

1. $\deg P = 0$, $\deg Q = 2$, écrivons $P = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 X + \lambda_3$, et $Q = \lambda$. Alors $\lambda\lambda_1 = 1$ donc λ est inversible dans A, absurde.
2. $\deg P = 2$, $\deg Q = 0$, c'est le même cas que dans le point précédent.
3. $\deg P = \deg Q = 1$: écrivons $P = \lambda_1 X + \lambda_2$, $Q = \lambda_3 X + \lambda_4$. Comme $\lambda_1\lambda_2 = 1$, on peut se ramener au cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Mais alors on dispose des équations $\lambda_2 + \lambda_4 = 0$ et $\lambda_2\lambda_4 = -a$, d'où $a = \lambda_2^2$ est bien un carré dans A.

$\square$

Maintenant considérons f comme un élément de $k[X][Y]$, alors par analyse de degré en X on remarque que $X(X-1)(X-a)$ n'est pas un carré dans $k[X]$, et ainsi par le lemme précédent f est irréductible dans $k[X][Y] = k[X,Y]$.

1. Comme k est algébriquement clos et f est irréductible,

$$K[V] = k[X,Y]/I(C) = k[X,Y]/I(V(f)) = k[X,Y]/\sqrt{(f)} = k[X,Y]/(f) =: k[x,y]$$

où $x = [X], y = [Y] \in k[X,Y]/(f)$ (et donc $y^2 = x(x-1)(x-a)$). Maintenant calculons le degré de transcendance de $k(x,y) = \mathrm{Frac}k[x,y]$: montrons que $\{y\}$ est une base de transcendance :

1. Soit $P \in k[T]$ tel que $P(y) = 0$. Alors $P(Y) \in (f)$ et donc il existe $Q \in k[X, Y]$ tel que $P(Y) = Q(X, Y)(Y^2 - X(X-1)(X-a))$. Finalement, comme $k[Y]$ est intègre, $\deg_X P(Y) = \deg_X Q + 3$ donc si P est non nul, $\deg_X P(Y) > 0$ ce qui est absurde. Donc $P = Q = 0$ et donc $\{x\}$ est algébriquement indépendante.
2. Comme $y^2 = x(x-1)(x-a)$, le polynôme $y^2 - T(T-1)(T-a) \in k(y)[T]$ convient pour prouver que x est algébrique sur $k(y)$ et donc $k(x, y)$ est une extension algébrique de $k(y)$.

Finalement, C est de dimension 1.

2. Pour calculer les points singulier de $C = V(f)$, on calcule la matrice jacobienne associée au morphisme $\varphi : (x, y) \in \mathbb{A}^2 \mapsto f(x, y) \in C$: soit $(x, y) \in C$,

$$d\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} -3x^2 + 2x(1+a) - a & 2y \end{bmatrix}$$

Maintenant comme la dimension de C est 1, (x, y) est un point régulier si et seulement si elle est de rang 1, i.e. elle admet un coefficient non nul. De manière équivalente, (x, y) est singulier si on a

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ -3x^2 + 2x(1+a) - a = 0 \end{cases}$$

Ainsi $y = 0$. Mais comme $(x, y) \in C$, $0 = x(x-1)(x-a)$ et donc $x = 0, 1$ ou a. Alors on sépare en 3 case :

1. Si $a = 0$, alors $(0, 0) \in C$ est un point singulier, et $(0, 1)$ n'en est pas un.
2. Si $a = 1$, alors $(0, 1)$ est un point singulier, $(0, 0)$ n'en est pas un.
3. Sinon, $(0, 0)$ et $(0, 1)$ ne sont pas points singuliers, et $(0, a)$ non plus (calculs).

3.

Exercice 6, feuille 3

Si deux variétés sont isomorphes, alors leurs algèbres de fonctions régulières sont isomorphes. La dimension d'une variété étant égale à la dimension de Krull de leurs algèbres de fonctions régulières, deux variétés isomorphes sont de même dimension. Pour terminer l'exercice, considérons les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \to & V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^2 \\ x & \mapsto & (x, x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \to & V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, x, y) \end{array}$$

Ainsi $V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^2$ est de dimension 1, alors que $V(X - Y) \subseteq \mathbb{A}^3$ est de dimension 2.

Exercice 7, feuille 3

1. Première méthode : si le corps k est infini, on a déja bu
   on a déja vu dans un exercice précédent que $V(X^2 - Y, Y^2 - Z) = \{(t, t^2, t^4) \in \mathbb{A}^3 \mid t \in k\}$ et $I(V(X^2 - Y, Y^2 - Z)) = (X^2 - Y, Y^2 - Z)$. Ainsi considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & \mathbb{A}^3 & \to & \mathbb{A}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x^2 - y, y^2 - z) \end{array}$$

   sa jacobienne en $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$ est donné par

$$\begin{bmatrix} 2x & -1 & 0 \\ 0 & 2y & -1 \end{bmatrix}$$

   Maintenant soit $(x, y, z) \in V(X^2 - Y, Y^2 - Z)$, alors $\exists t \in k$ tq $(x, y, z) = (t, t^2, t^4)$. Mais alors