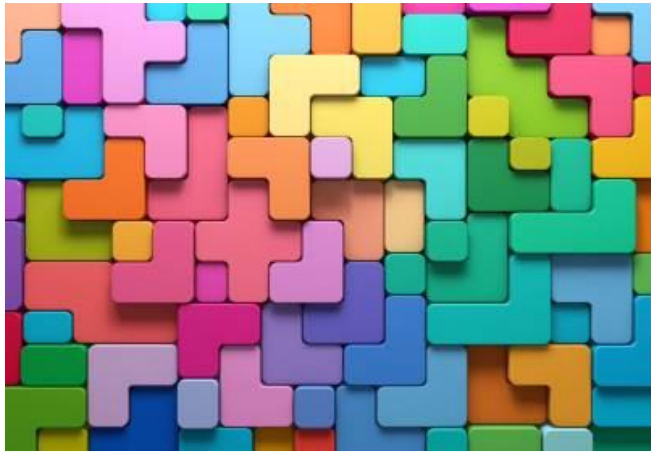
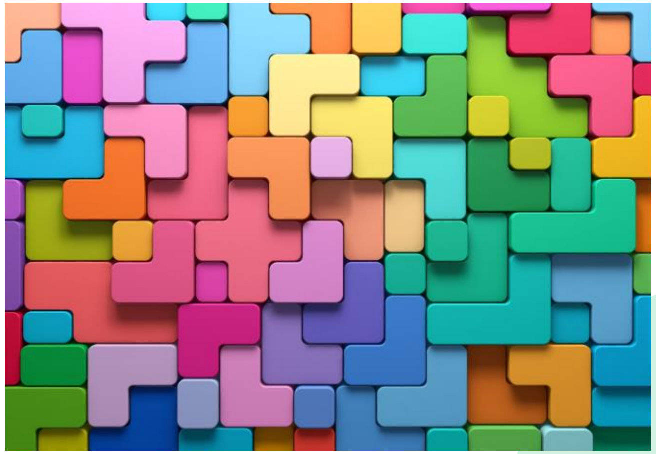
VIRREVANDRING (RANDOM WALKS)

FORELESNING 16

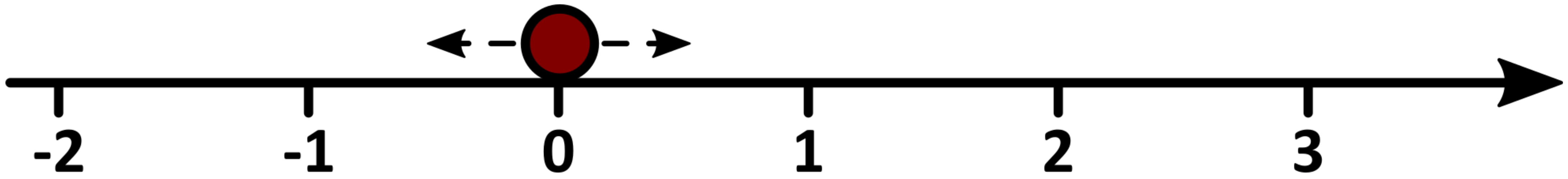
FREDAG 18/10





(bilder generert av bing image creator)

Endimensjonal virrevandring



$$X_{N+1} = X_N + K_N,$$

$$K_N = \begin{cases} 1 & \text{with 50\% chance} \\ -1 & \text{with 50\% chance} \end{cases}$$

LIVE-KODING: VIRRE-VANDRING I 1D

- 2D-array: første indeks rad, andre indeks kolonne (her s for steg og w for walker)

$$X = \begin{bmatrix} s_0 w_0 & s_0 w_1 \\ s_1 w_0 & s_1 w_1 \end{bmatrix}$$

```
X[1, 0]
```

En liten analyse

$$\langle X_{N+1} \rangle = \langle X_N + K_N \rangle.$$

$$\langle X_{N+1} \rangle = \langle X_N \rangle + \langle K_N \rangle.$$

$$\langle K_N \rangle = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$\langle X_{N+1} \rangle = \langle X_N \rangle.$$

$$\langle X_N \rangle = 0.$$

Gjennomsnittlig avvik fra snittet er generelt ikke så nyttig

- Positive og negative avvik fra snittet nuller hverandre ut
- Ingen forskjell på ingen spredning og symmetrisk spredning!
- I statistikk regner vi isteden ut det gjennomsnittlige *kvadratavviket* slik at både negative og positive avvik bidrar til spredningsmålet
- Dette bruker så ofte at det har fått navnet *varians*
- For å få samme enhet som et datapunkt (og snittet) tar vi ofte kvadratroten etterpå → *standardavvik*

En litt mer meningsfull analyse

$$X_{N+1}^2 = (X_N + K_N)^2 = X_N^2 + 2X_N \cdot K_N + K_N^2.$$

$$\langle X_{N+1}^2 \rangle = \langle X_N^2 \rangle + 2\langle X_N \cdot K_N \rangle + \langle K_N^2 \rangle.$$

$\langle X_N \rangle = 0.$ **uavhengig av** $\langle K_N \rangle = 0.$

$$\langle X_{N+1}^2 \rangle = \langle X_N^2 \rangle + \langle K_N^2 \rangle.$$

$$\langle K_N^2 \rangle = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\langle X_{N+1}^2 \rangle = \langle X_N^2 \rangle + 1.$$

$$\langle X_N^2 \rangle = N.$$

Dermed kan vi finne variansen fra $\langle X_N^2 \rangle = N.$

- Varians er gjennomsnittlig kvadrat-avvik: $\langle (X_N - \langle X_N \rangle)^2 \rangle$
- $= \left\langle X_N^2 - 2X_N \langle X_N \rangle + \langle X_N \rangle^2 \right\rangle$
- $= \left\langle X_N^2 \right\rangle$ fordi $\langle X_N \rangle = 0.$
- $\mathrm{Var}(X_N) = N$
- Standardavvik: $\sqrt{N}$

Vi kan også finne RMS (Root Mean Square)

$$\langle X_N^2 \rangle = N,$$

$$\mathrm{RMS} = \sqrt{\langle X_N^2 \rangle} = \sqrt{N}.$$

- OBS: RMS er bare likt standardavviket når gjennomsnittet er 0 (slik som her), ikke generelt!

Store avvik teller mer enn små

- Hvis snittet er 0, vektes et avvik på 1 eller -1 → 1, mens et avvik på 8 eller -8 → 64 ganger mer vekt
- Gjelder både varians/standardavvik og RMS

LIVE-KODING: RMS + 2D-WALK

$$\vec{R}_N = (X_N, Y_N).$$

RMS for 2D-vandreren vår

$$\langle \vec{R}_N \rangle = (\langle X_N \rangle, \langle Y_N \rangle).$$

$$\langle \vec{R}_N \rangle = (0, 0).$$

X og Y uavhengige 1D-størrelser

$$\langle |\vec{R}_N|^2 \rangle = \langle X_N^2 \rangle + \langle Y_N^2 \rangle.$$

$|\vec{R}|^2 = \left(\sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}\right)^2 = \vec{R} \cdot \vec{R}$

$$\langle |\vec{R}_N|^2 \rangle = 2N.$$

Bruker 1D-resultatet

$$\text{RMS} = \sqrt{\langle |\vec{R}_N|^2 \rangle} = \sqrt{2N}.$$

LIVE-KODING: 2D-RMS

Ting vi kan modellere med virrevandring

- Priser på aksjer
- Populasjoner i biologi
- Genetiske endringer
- Polymerer (materialvitenskap)
- Bildeprosessering (deler opp bilde med random walkers)
- Forslag til hvem man kan følge på sosiale medier

Etter forelesningen

- Husk fristen på prosjekt 2 i dag (kl. 23:59)
- Sjekk beskjeder på emnesiden for å få med siste oppdateringer der
- Husk å levere det dere har selv om dere ikke er ferdig med alt
- Og husk hvile etter en hektisk innspurt!