

# 1 Integrationsregeln

## 1.1 Faktorregel

Ein konstanter Faktor im Integranden kann vor das Integralzeichen gezogen werden.

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

## 1.2 Summen- und Differenzregel

Summen und Differenzen im Integranden können auseinander gezogen werden und als zwei Integrale geschrieben werden.

$$\int f(x) + g(x) - h(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx$$

## 1.3 Partielle Integration

Die partielle Integration ist das Pendant zur Produktregel beim Ableiten und wird benötigt, wenn im Integranden Funktionen multipliziert werden. Die Formel der partiellen Integration ist

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Wobei für eine Funktion  $u(x)$  und für die andere  $v'(x)$  eingesetzt wird.

Beispiel:

$$\int x \cdot e^x dx$$

$$u(x) = x, v'(x) = e^x$$

Daraus folgt

$$x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = e^x(x - 1)$$

## 1.4 Partialbruchzerlegung

Mithilfe einer Partialbruchzerlegung kann man eine rationale Funktion als eine Addition von einfacheren Brüchen betrachten. Dies erlaubt uns die einfacheren Brüche einzeln zu integrieren und danach aufzusummieren. Dafür wird das Nennerpolynom als erstes in die Nullstellenform gebracht, woraufhin man die einzelnen Nullstellen ihrer Vielfachheit nach als separate Brüche mit unbekannten Zählern darstellen kann. Die Summe von Brüchen kann mit dem ursprünglichen Nennerpolynom multipliziert und dem ursprünglichen Zählerpolynom gleichgesetzt werden. Das erlaubt uns ein Gleichungssystem aufzustellen, mit welchem wir die unbekannten Zähler der Partialbrüche berechnen können. Die Summe von Brüchen kann mit dem ursprünglichen Nennerpolynom multipliziert und

dem ursprünglichen Zählerpolynom gleichgesetzt werden. Das erlaubt uns ein Gleichungssystem aufzustellen, mit welchem wir die unbekannten Zähler der Partialbrüche berechnen können. Schlussendlich werden die Partialbrüche einzeln integriert.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx &= \int \frac{5x+11}{(x+5)(x-2)} dx \\ &= \int \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} dx \Rightarrow 5x+11 = A(x-2) + b(x+5) \\ x = -5 &\Rightarrow A = 2 \\ x = 2 &\Rightarrow B = 3 \\ \int \frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-2} dx &= \int 2 \frac{1}{x+5} + 3 \frac{1}{x-2} dx \\ &= 2 \ln |x+5| + 3 \ln |x-2| + c\end{aligned}$$

## 1.5 Substitution

Mithilfe einer Substitution können wir verschachtelte Funktionen einfacher integrieren. Dafür substituiert man eine Funktion, welche die Unbekannte beinhaltet, durch einen Term  $u$ . Um diesen Term zu ersetzen, müssen, falls vorhanden, die Grenzen des Integrals ebenfalls zu “ $u$ -Grenzen” umgeformt werden.

## 2 Anwendungen der Integralrechnung

### 2.1 Mittelwert einer Funktion

Der Mittelwert einer Funktion wird immer in Abhängigkeit von 2 Grenzen berechnet.

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

### 2.2 Rotationskörper

#### 2.2.1 Volumen

Mithilfe eines Integrals kann man das Volumen eines Körpers berechnen, welcher entsteht, wenn man einen Funktionsabschnitt um die X-Achse rotiert. Die Formel dazu lautet

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

### 2.2.2 Mantelfläche

Die Mantelfläche eines Rotationkörpers kann durch die aufsummierte Fläche von Kegelstümpfen approximiert werden.

Notation als Summe:

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \sum_{k=1}^n (f(x_k) + f(x_{k+1})) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k$$

Notation als Integral:

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

### 2.2.3 Schwerpunkt

Mithilfe des Volumens kann der Schwerpunkt eines Rotationkörpers ermittelt werden.

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f(x)^2 dx$$

## 2.3 Bogenlänge einer Kurve

Die Bogenlänge einer Kurve kann mithilfe eines Integrals als Summe von infinitesimalen Geraden Strecken approximiert werden.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## 2.4 Ebene Flächen

### 2.4.1 Schwerpunkt

Der Schwerpunkt einer ebenen Fläche die durch zwei Funktionen eingegrenzt wird kann ebenfalls mithilfe von integrieren approximiert werden.

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$x_s = \frac{1}{2A} \int_a^b x \cdot (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

### 2.4.2 Fläche

Die Fläche, welche von zwei Funktionen eingeschlossen wird beträgt

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$