1 Polynomfunktionen

1.1 Bestimmung von Nullstellen

Wenn eine Nullstelle x_0 einer Funktion $y = f(x)$ vom Grad n ist, dann gibt es eine eindeutige Polynomfunktion vom Grad $n - 1$

1.2 Ableitung

Die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ beschreibt die Steigung des Graphes von $f(x)$. Die Ableitungsfunktion $f'(x_0$ kann mit

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

berechnet werden. Man kann diesen Ausdruck vereinfachen zu $f'(x_0) = nx^{n-1}$

Aus einer komplexeren Polynomfunktion

$$f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 8x^2 - x + 17$$

kann Päckchenweise die Funktion

$$f'(x) = 20x^3 - 6x^2 + 16x - x^{-1}$$

abgeleitet werden.

1.2.1 Ableitung der Grundfunktionen

Funktion	**Ableitung**
e^x	e^x
$a^x \wedge a > 0$	$a^x \cdot ln(a)$
$ln(x) \wedge x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x) \wedge a > 0 \wedge x > 0$	$\frac{1}{x \cdot ln(a)}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

1.2.2 Tangentengleichungen

Bei der Ableitung einer Funktion $f'(x)$ bestimmt man die Steigung der Tangenten, welche an x gelegt wird. Die Gleichung dieser Tangenten kann für eine differenzierbare Funktion für ein $x_0 \in D$ wie folgt berechnet werden.

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

1.2.3 Graphisches Ableiten

Um eine Funktion graphisch qualitativ abzuleiten muss man die lokalen Extrema, die Wendepunkte sowie die Steigung beachten. Bei den lokalen Extrema des Funktiongraphes sind die Nullstellen des Graphes der Ableitungsfunktion. Bei den Wendepunkten des ursprünglichen Graphes findet man wiederum die lokalen Extrema des abgeleiteten Graphes.

1.3 Integral

Mithilfe des Integrals kann man die Fläche zwischen einem Polynom und der X-Achse auf einem bestimmten Intervall berechnen.

1.3.1 Stammfunktion

Die Stammfunktion ist die Gegenoperation zur Ableitung und wird für eine Funktion $f(x)$ mit $F(x)$ beschrieben. Demnach gilt $F'(x) = f(x)$

1.3.2 unbestimmtes Integral

Ein unbestimmtes Integral wird mit der Notation

$$\int f(x)dx$$

beschrieben. Dabei steht das $f(x)$ für das Polynom. Das dx besagt auf welche Variable integriert wird.

1.3.3 bestimmtes Integral

2 Folgen

Elemente einer Folge heissen Glieder. Das Glied a_n ist das n-te Glied der Folge.

2.1 Rekursiv definierte Folgen

Rekursive Folgen geben in der Regel einen Startwert a_1 vor und eine Formel für die Berechnung des nächsten Gliedes. Bsp:

$$a_1 = 2$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

2.2 Arithmetische Folgen

Arithmetische Folgen zeichnen sich dadurch aus, dass die Differenz d zwischen den Gliedern immer gleich gross ist. Es gilt also

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

2.3 Geometrische Folgen

Eine Geometrische Folge wird durch die Konstanz des Quotienten q bestimmt. Dabei gilt

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Der Quotient q wird mit

$$q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

berechnet.

3 Reihen

Eine Reihe bezeichnet die Summe aller Glieder einer Folge und wird mit einem grossen Sigma Σ notiert. Dabei wird eine Laufvariable definiert, eine Obergrenze und einen Term. Bsp:

$$\sum_{i=0}^{5} i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

3.1 Arithmetische Folgen

Die Summe einer arithmetischen Folge wird wie folgt berechnet

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1) \cdot d) = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

3.2 Geometrische Folgen

Die Summe aller Glieder einer geometrischen Folge wird mithilfe von

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot q^{i-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

berechnet.

3.3 unendliche Folgen

3.3.1 Geometrische Folgen

$$s_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

4 Grenzwert

Der Grenzwert, auch Limes genannt, ist der Wert, dem sich eine Funktion oder eine Folge zu einem bestimmten Punkt annähert. Notiert wird der Limes mit

$$\lim_{x \to y}$$

wobei das x für den Funktionswert und das y für den anzunähernden Wert steht. Die Schwierigkeit beim vereinfachen von Termen mit Limes ist, dass man keine 0 im Zähler oder im Nenner hat.

4.1 Existenz eines Grenzwertes

Man kann überprüfen ob eine Funktion f einen Grenzwert besitzt, sprich sie ist Konvergent, wenn es eine Zahl a gibt für die gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = a$$

Wenn eine Zahl a in der Definitionsmenge vorhanden ist, ist f Konvergent, ansonsten ist sie Divergent

4.2 Standard-Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) n = e$$

4.3 Übliche Lösungsmuster

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^6 - n^3}{7n^6 + n^5 - 3}$$

Lösung: erweitern mit $\frac{1}{n^k}$, wobei k der grösste Exponent ist.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{7^{n-1} + 2^{n+1}}{7^n + 5}$$

Lösung: erweitern mit $\frac{1}{a^k}$, wobei a die grösste Basis und k der kleinste Exponent ist.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$$

Lösung: erweitern mit $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n}$$

Lösung: umformen zu $\lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^a = e^a$

4.4 Stetige Funktionen

Eine Funktion ist umgangssprachlich stetig, wenn der Funktionsgraph eine durchgehende Linie ist, sprich man kann ihn zeichnen, ohne den Stift abzusetzen. Mathematisch definiert ist eine stetige Funktion f mit einer Definitionsmenge D definiert als

$$\forall_x \in D(f(x) = \lim_{n \to x} f(n))$$