Inhaltsverzeichnis

1 Aussagen und Prädikate

Aussagen müssen einen distinkten Wahrheitswert haben. Z.b. *Heute ist es über 10°C*. Ein ambiger Term wie $x + 3 = 5$ ist keine Aussage, da der Wahrheitswert abhängig ist.

Spezialfälle sind Tautologien und Widersprüche. Eine Tautologie z.b. $A \vee \neg A$ ist eine Aussage, die immer wahr ist und ein Widerspruch z.b. $A \wedge \neg A$ ist eine Aussage, die immer falsch ist.

Prädikate sind Aussagen, die n freie Variabeln beinhalten.

Elementaraussagen sind nicht weiter zerlegbare Aussagen. Z.b. "48 ist keine Primzahl̈ist eine Elementaraussage.

2 Junktoren

Junktoren sind verknüpfende Elemente, die mehrere Elementaraussagen kombinieren können.

2.1 Negation

Eine Negation kehrt die Aussage nicht einfach um, sie besagt lediglich, dass die Aussage in ≥ 1 Fällen nicht stimmt.

Tabelle 1: Wahrheitstabelle Negation

A	$\neg A$
0	1
1	0

2.2 Konjunktion

Die Konjuktion ist das logische *und.*

Tabelle 2: Wahrheitstabelle Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2.3 Disjunktion

Die Disjunktion ist das logische *oder*.

Tabelle 3: Wahrheitstabelle Disjunktion

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2.4 Implikation

Eine Implikation verbindet zwei Aussagen im Muster von *wenn A, dann B*. Dabei gilt *wenn A,* ***muss*** *B. Wenn A nicht,* ***kann*** *B*. Eine Implikation ist nur falsch, wenn $A = w$ *und* $B = f$.

Tabelle 4: Wahrheitstabelle Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2.5 Äquivalenz

Eine Äquivalenz stellt ein logisches Gleichnis dar. Dabei gilt, wenn $A \Leftrightarrow B$, dann $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$.

Tabelle 5: Wahrheitstabelle Äquivalenz

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2.6 Junktorenregeln

Doppelte Negation $\neg\neg A = A$

Kommutativität $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

Assoziativität $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

Distributivität $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Implikation $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

3 Quantoren

Quantore erlauben uns aus bestehenden Prädikaten neue Prädikate oder Aussagen zu bilden. Dafür gibt es zwei quantifizierende Operatoren: den Allquantor $\forall$, der besagt *für alle gilt* und der Existenzquantor $\exists$, der besagt *für mindestens 1 Element gilt*. Durch die quantifizierung wird ein n-stelliges Prädikat in ein $n-1$-stelliges Prädikat umgeformt.

Beispiel. Das 2-stellige Prädikat A besagt, dass $A(x,y) :=$ "$x < y$"

$$\forall_x \in \mathbb{R}(\exists_y \in \mathbb{R} A(x,y))$$

gesprochen: "Für alle x der Menge $\mathbb{R}$ gilt, es gibt mindestens ein y der Menge $\mathbb{R}$ für das gilt $x < y$"

3.1 Quantorenregeln

Bindung Quantoren binden stärker als Junktoren

Abkürzung

$$\forall_x \in M(\forall_y \in M A(x,y)) \Leftrightarrow \forall_{x,y} \in M A(x,y)$$

Negation Die Negation muss stur wörtlich verstanden werden. Z.b. *Nur ein Element erfüllt das Prädikat A(x)*

$$\exists_x \in P A(x) \wedge \forall_{y,z} \in P(A(y) \wedge A(z) \Rightarrow y = z)$$

Kommutativität

Distributivität

4 Peano-Axiome

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall_x \in \mathbb{N}(x = x)$
3. $\forall_{x,y} \in \mathbb{N}(x = y \Rightarrow y = x)$
4. $\forall_{x,y,z} \in \mathbb{N}(x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$
5. $\forall_x \in \mathbb{N}(x = y \Rightarrow y \in \mathbb{N})$
6. $\forall_x \in \mathbb{N}(x + 1 \in \mathbb{N})$
7. $\forall_{x,y} \in \mathbb{N}(x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y)$
8. $\neg\exists_x \in \mathbb{N}(x + 1 = 0)$
9. $\phi(n) \wedge \phi(n + 1), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall_x \in \mathbb{N}\phi(x)$

5 Beweistechniken

5.1 Implikation

Bei einer Aussage $A \Rightarrow B$ kann man den Wahrheitsgehalt mittels einer Implikation ermitteln. Sprich wenn A richtig ist, muss B automatisch auch richtig sein.

5.2 Widerspruch

Ein einfaches Prädikat A kann unter anderem bewiesen werden, in dem man denn Beweis dafür liefert, dass $\neg A$ falsch sei.

5.3 Gegenbeispiel

Bei totalen Aussagen wie $\forall$ oder $\neg\exists$ kann man den Gehalt für falsch erklären, wenn sich mindestens ein Gegenbeispiel finden lässt.

5.4 Kontraposition

Eine Aussage die ein Verhältnis zwischen zwei Aussagen impliziert kann auch mithilfe der Kontraposition ebendieser Aussage bewiesen werden. Verhältnis: $A \Rightarrow B$ Kontraposition: $\neg B \Rightarrow \neg A$

5.5 Äquivalenz

Eine Äquivalenz zwischen zwei Aussagen $A \Leftrightarrow B$ kann mithilfe zweier Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ belegt werden.

6 Belegung

Eine Belegung ist eine Funktion, die einer Variablen, dies kann auch ein ganzes Prädikat sein, einen Wahrheitswert zuordnet. Bsp.:

$$\hat{B}(x) := true$$

Um zu kontrollieren, ob eine Belegung für einen bestimmten Fall zutrifft, vereinfacht man das Prädikat, indem man es in die boolsche Form umschreibt. Aus dieser Form kann man leicht von Auge sehen, ob das Endresultat für den vorgelegten Fall $true$ oder $false$ ist.

7 Normalformen

Im Grunde gibt es 3 Normalformen. Die Negationsnormalform, die konjunktive Normalform und die disjunktive Normalform. Jede beliebige Formel hat je eine NNF, eine KNF und eine DNF. Diese sind eindeutig und können genutzt werden, um zu prüfen ob zwei Formeln Äquivalent sind. Die Normalformen können aus der Ursprungsformel mithilfe von endlichen Äquivalenzumformungen erreicht werden.

7.1 Negationsnormalform

Die NNF ist dadurch auszumachen, dass nur atomare Elemente negiert werden. Bsp. einer Umformung:

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Die NNF muss erreicht werden, um die Formel weiter in eine KNF oder eine DNF umzuformen.

7.2 konjunktive Normalform

Die KNF zeichnet sich dadurch aus, dass der oberste Junktor/die obersten Junktoren ausschliesslich Konjunktionen ($\wedge$) sind. Diese Form kann aus der NNF hergeleitet werden in dem man das Distributivgesetz andwendet.

7.3 disjunktive Normalform

Die DNF zeichnet sich dadurch aus, dass der oberste Junktor/die obersten Junktoren ausschliesslich Disjunktionen ($\vee$) sind. Diese Form kann aus der NNF hergeleitet werden in dem man das Distributivgesetz andwendet.

8 Mengenlehre

Eine Menge ist eine duplikatfreie Sammlung von Objekten. Mengen können auf mehrere Arten aufgezeigt werden.

Aufzählende Schreibweise

$$\{1, 2, 3, ...\}$$

Intervallschreibweise

$$[0; \infty[$$

$$[0; 3]$$

Prädikatschreibweise

$$\{x \in \mathbb{R} | \text{x ist gerade}\}$$

Eine Menge kann auch graphisch mithilfe eines Venn-Diagramms dargestellt werden.

8.1 Mengenoperationen

8.1.1 Teilmengen

Eine Menge besteht aus > 1 Teilmengen. Dabei ist die leere Menge Teilmenge jeder Menge. Bei den Teilmengen wird unterschieden zwischen normalen Teilmengen ($X \subseteq Y$) und echten Teilmengen ($X \subset Y$), wobei bei normalen Teilmengen X auch alle Elemente aus Y enthalten, bei den echten Teilmengen hingegen nicht.

8.1.2 Gleichheit

Zwei Mengen sind identisch, wenn sie aus denselben Teilmengen zusammengesetzt werden. Die Reihenfolge der Elemente spielt dabei keine Rolle, da mathematische Mengen unsortierte Sammlungen sind.

8.1.3 Potenzmenge

Die Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller möglichen Teilmengenkombinationen. Die Mächtigkeit der Potenzmenge beträgt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Deshalb auch der Name "Potenzmenge".

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\}$$

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$
$$\mathcal{P}(\{a, \{b\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, \{a, \{b\}\}\}$$

8.1.4 Partition

Die Partition einer Menge ist eine Menge von Aufteilungen der Potenzmengen von A wobei die leere Menge nicht dabei ist und jedes Element von A genau einmal vorkommen darf. Für eine Menge kann es mehrere erlaubte Partitionen geben.

$$S \subseteq \mathcal{P}(A)$$
$$A = \{1,2,3,4\} \Rightarrow S = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\} \vee \{\{1,2\},\{3,4\}\} \vee \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$$

8.1.5 Schnittmenge

Mit dem Schnittmengenoperator kann man die Elemente bestimmen, welche in allen geschnittenen Mengen vorkommen. Bsp. A ist die Schnittmenge von B und C:

$$A = B \cap C$$

8.1.6 Vereinigung

Die Vereinigung bezeichnet alle Elemente die in einer der beiden oder auch in beiden zugleich vorkommen. Bsp. Die Menge A besteht aus allen Elementen der Mengen B und C:

$$A = B \cup C$$

8.1.7 Differenz

Bei der Differenz zwischen zwei Mengen werden alle Elemente der ersten Menge ausgewählt, welche nicht in der zweiten vorkommen.

$$\{1,2,3\} \setminus \{3,4\} = \{1,2\}$$

8.1.8 Komplement

Das Komplement fungiert als eine Art Negation in der Mengenlehre. Es wird alles aus der Grundmenge ausgewählt, was nicht in der komplementierten Menge vorkommt.

$$\overline{X} = \{x | x \in G \wedge x \notin X\}$$

8.1.9 Kartesisches Produkt

Beim kartesischen Produkt wird jedes Element der ersten Menge mit jedem Element der zweiten Menge zu einem Tupel kombiniert, wobei es tupelintern auf die Reihenfolge ankommt.

$$\{a,b,c\} \times \{1,2\} = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

8.1.10 Disjunkte Mengen

Mengen werden als disjunkt bezeichnet, wenn sie keine gemeinsamen Elemente enthalten. Das heisst, die Schnittmenge A von den zwei disjunkten Mengen B und C ist eine Leere Menge:

$$A = B \cap C = \emptyset$$

9 Funktionen

Eine Funktion ist eine Relation, die linkstotal und rechtseindeutig sind. Das heisst, dass jedem Element der Definitionsmenge wird genau ein Wert der Wertemenge zugewiesen, wobei ein Element der Wertemenge mehrmals getroffen werden kann.

10 Relationen

Eine Relation ist eine bestimmte Verbindung, die je ein Element $a \in A$ und ein Element $b \in B$ verbindet. Geschrieben wird das als aRb. Bekannte Relationen sind z.b. $a = b$, $a > b$, $3a < \frac{b}{2}$, ...

10.1 Homogene Relationen

Eine Homogene Relation ist eine Beziehung zwischen zwei Elementen der selben Menge.

$$R \subseteq X \times X$$

Homogene Relationen können reflexiv, symmetrisch, anti-symmetrisch und transitiv sein. Diese vier Attribute können alle zugleich, nur teilweise oder gar keine zutreffen.

10.1.1 Reflexion

Eine homogene Relation ist reflexiv, wenn gilt

$$\forall_x \in X(xRx)$$

Dabei kann eine reflexive Relation auch noch andere Attribute aufweisen, Reflexion bedeutet lediglich, dass die Relation mind. für jedes Element zu sich selbst zutrifft.

10.1.2 Symmetrie

Eine symmetrische Relation bedeutet, dass die Relation in beide Richtungen gilt wie z.B. bei der Äquivalenzrelation.

$$\forall_{x,y} \in X(xRy \Rightarrow yRx)$$

10.1.3 Anti-Symmetrie

Eine homogene Relation ist anti-symmetrisch, wenn eine Relation in keinem Fall in beid Richtungen gilt. Ein Beispiel dafür wären die Relationen $<$ oder $>$.

$$\forall_{x,y} \in X(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$$

10.1.4 Transition

Eine homogene Relation ist transitiv, wenn die Relation "weitergegeben" wird, wie z.B. bei den Relationen $<$ und $>$.

$$\forall_{x,y,z} \in X(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

10.2 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation überprüft, ob die beiden Argumente gleichwertig sind. Notiert wird sie nicht wie gewohnt mit dem Gleichheitszeichen $=$ sondern mit einer Tilde $\sim$. Eine Äquivalenzrelation ist immer zugleich reflexiv, symmetrisch und transitiv.

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a$$

10.2.1 Äquivalenzklassen

Eine Äquivalenzklasse ist eine Menge von Elementen, die gleich sind. Das heisst, dass eine Menge von Elementen so viele Äquivalenzklassen hat, wie sie distinkte Elemente hat. Dabei gilt, dass eine Äquivalenzklasse eine nicht-leere Teilmenge der Ausgangsmengeist, wobei mehrere Äquivalenzklassen paarweise-disjunkt sind und die Vereinigung aller Äquivalenzklassen die Ausgangsmenge ergibt.

10.3 Ordnungsrelation

Unter Ordnungsrelationen fasst man alle Arten von Relationen zusammen, mithilfe derer man Objekte in gewisser Weise vergleichen und mehr oder weniger eindeutig sortieren kann. Dabei sind zwei Werte unvergleichbar, falls weder xRy noch yRx gilt. Minimal nennt man ein Objekt x, falls für kein anderes Objekt y gilt: yRx. Maximal nennt man ein Objekt x, falls für kein anderes Objekt y gilt xRy.

10.3.1 Präordnung

Relation ist reflexiv und transitiv

10.3.2 Halbordnung

Präordnung und es besteht eine Antisymmetrie.

10.3.3 Total-/ Linearordnung

Halbordnung und alle Elemente der Menge M können verglichen werden.

10.3.4 Wohlordnung

Totalordnung und jede nicht-leere Teilmenge der Menge M enthält ein R-minimales Element.

11 Unendlichkeiten

Eine undenlich grosse Menge ist eine Menge, die endlos viele Elemente enthält. Allerdings ist das rechnen mit solchen Mengen kompliziert, das z.b. $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$ wahr ist.

11.1 Mächtigkeiten

Unendlich grosse Mengen können in **abzählbar grosse** und in **überabzählbar grosse** Mengen unterteilt werden. Mit abzählbar grossen unendlichen Mengen sind Mengen gemeint, die mit den natürlichen Zahlen durch nummeriert werden können. Sprich es besteht eine *Bijektivität* von $\mathbb{N}$ zu dieser Menge. Beispiele für abzählbar unendlich grosse Mengen sind $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ aber auch kartesische Produkte wie $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ein Beispiel für eine überabzählbar grosse Menge ist z.b. $\mathbb{Q}$ oder demnach auch $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Eine Menge X ist genau dann überabzählbar, wenn eine Liste x_1, x_2, x_3, ... nie komplett ist.

11.2 Cantor

Georg Cantor war ein deutscher Mathematiker, der mit seinen zwei Diagonalargumenten bewiesen hat, dass 1. $\mathbb{R}$ abzählbar und 2. $\mathbb{Q}$ überabzählbar ist.

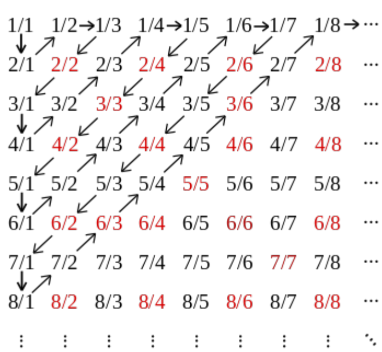

Abbildung 1: Erstes Diagonalargument

Abbildung 2: Zweites Diagonalargument

12 Rekursive Strukturen

Rekursive Strukturen berufen sich auf die folgenden Peano-Axiome:

- Die Zahl 0 ist eine natürliche Zahl. Jede natürliche Zahl k hat genau einen Nachfolger $k+1$. Der Nachfolger jeder natürlichen Zahl ist wiederum eine natürliche Zahl.
- Die Zahl 0 ist die einzige natürliche Zahl, die kein Nachfolger ist.
- Jede natürliche Zahl ist Nachfolger von höchstens einer natürlichen Zahl.

12.1 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine Beweistechnik, die es uns erlaubt rekursive Beweise zu führen. Diese Art von Beweisen werden benötigt, wenn eine Annahme A für eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ gilt, und überprüft werden soll, ob A auch für alle Zahlen $n \geq a, n \in \mathbb{N}$ gilt. Die vollständige Induktion folgt einem aus drei Schritte bestehenden Muster welches an folgendem Beispiel gezeigt wird.

$$A(n) := \text{Für alle Zahlen } n \in \mathbb{N} \text{ soll gelten: } \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang (IA): Im ersten Schritt wird überprüft, ob die Aussage für das kleinste Element zutrifft. Wenn die Aussage bereits für das kleinste Element nicht stimmt, stimmt sie auch für alle folgenden nicht. Die Aussage wäre in diesem Fall widerlegt.
Zur Überprüfung setzen wir für n 1 ein, da $\min(\mathbb{N}) = 1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{1} i &= \frac{1(1+1)}{2}\\ 1 &= \frac{2}{2}\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (IV) Aus der Überprüfung von IA folgt, dass

$$\exists_n \in \mathbb{N} A(n)$$

Daraus folgt, dass die Aussage für das kleinste Element bewiesen ist und, dass wir weitere Vorkommnisse von $\sum_{i=1}^{n} i$ durch $\frac{n(n+1)}{2}$ ersetzen können.

Induktionsschluss (IS) Im letzten Schritt wollen wir überprüfen, ob

$$A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

Um dies zu überprüfen, setzen wir $(n+1)$ für alle Vorkommnisse von n in $A(n)$ ein.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{(n+1)} i &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=(n+1)}^{(n+1)} i &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\frac{(n+1)(n+2)}{2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Hiermit haben wir bewiesen, dass $A(n) \Rightarrow A(n{+}1)$. Das heisst, dass die Aussage A für alle natürlichen Zahlen stimmt.

$$\forall_n \in \mathbb{N} A(n)$$