1 Matrizen

Eine Matrix ist ein rechteckiges, mathematisches Konstrukt, dass auf m Zeilen und n Spalten mathematische Objekte (Zahlen, Symbole, Ausdrücke, ...) beinhaltet. Die Dimension einer Matrix wird im Format $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ angegeben. Eine Matrix mit $n = 1$ kann als m-dimensionaler Vektor betrachtet werden. Sind alle Elemente einer Matrix 0, spricht mann von einer Nullmatrix.

1.1 Operationen

1.1.1 Addition/Subtraktion

Bei einer Addition/Subtraktion von Matrizen müssen die Schemata aller Operanden gleich sein, ansonsten ist die Operation nicht definiert. Bei gleichen Schemata kann jedes Element mit dem entsprechenden Element der anderen Matrix addiert/subtrahiert werden.

1.1.2 Multiplikation - Skalar

Bei einer Multiplikation mit einem skalaren Wert wird jedes Element der Matrix mit dem Wert multipliziert. Das Schema der Matrix spielt dabei keine Rolle.

1.1.3 Multiplikation - Matrix

Für eine Multiplikation zwischen zwei Matrizen M_1, M_2 muss $m_1 = n_2$ sein, ansonsten ist die Operation nicht definiert.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$$

1.1.4 Division

Eine Division zwischen zwei Matrizen M_1, M_2 kann mit einer Multiplikation mit dem Inversen betrachtet werden.

$$\frac{M_1}{M_2} = M_1 \cdot M_2^{-1}$$

1.1.5 Transposition

Bei einer Transposition (notiert mit einem hochgestellten T) werden die Zeilen und Spalten einer Matrix vertauscht. Aus einer Matrix mit Schema 3×2 folgt demnach eine transponierte Matrix mit Schema 2×3.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

2 Lineare Gleichungssysteme

LGS und Matrizen sind eng miteinander verknüpft, da lineare Gleichungssyteme als Matrizengleichung aufgefasst und als Koeffizientenmatrix dargestellt werden können.

Jedes LGS entspricht einer Matrizengleichung:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{\vec{c}}$$

Wir fassen A und $\vec{c}$ zur *erweiterten Koeffizientenmatrix* zusammen:

$$(A|\,\vec{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

2.1 Zeilenstufenformen

Die Zeilenstufenform wird durch gewichtete Additionen erreicht, mit welchen gewisse Koeffizienten eliminiert werden können. Unter einem Zeilenführer versteht man das erste Element einer Zeile, das nicht 0 ist. Die Zeilenstufenform ist erreicht, wenn jeder Zeilenführer eine 1 ist und jeder Zeilenführer weiter rechts vom darüber liegenden Zeilfenführer liegt und Nullzeilen ganz unten sind. Die **reduzierte Zeilenstufenform** wird erreicht, indem von der normalen Zeilenstufenform ausgehend alle Spaltenelemente in der sich ein Zeilenführer befindet mit gewichteten Additionen auf 0 gesetzt werden.

2.2 Gauss-Jordan-Algorithmus

Der Gauss-Jordan-Algorithmus wird angewendet um eine Koeffizientenmatrix in die reduzierte Zeilenstufenform zu bringen. Der Algorithmus verwendet wiederholte, gewichtete Additionen und Matrixoperationen um die reduzierte Zeilenstufenform zu erreichen.