Lie-Algebren (Vortrag am 5. Juni)

Philipp Arras

9. Oktober 2014

0 Vorbemerkungen

0.1 Setup

Sei L halbeinfache Lie-Algebra über einem abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null. Sei H eine maximale torische Unteralgebra.

Im Vortrag von Dr. Kasten wurde folgende Abbildung beschrieben:

$$(L, H) \mapsto (E, \Phi)$$

wobei E ein euklidischer Vektorraum und Φ ein Wurzelsystem ist. Wir klassifizieren jetzt die Paare (E, Φ). Im nächsten Vortrag werden wir sehen, dass obige Abbildung bijektiv und die Wahl von H nicht entscheidend ist.

0.2 Bezeichnungen

Im Folgenden sei immer Φ ein Wurzelsystem vom Rang l in einem euklidischen Raum E mit Weyl-Gruppe $\mathcal{W}$ und Δ eine Basis von Φ. 3 min

10 Einfache Wurzeln und die Weyl-Gruppe

10.4 Irreduzible Wurzelsysteme

Definition (irreduzible Wurzelsysteme) Wir nennen Φ irreduzibel, wenn es nicht in zwei echte zueinander orthogonale Teilmengen zerlegt werden kann, d.h. dass jede Wurzel der einen Teilmenge orthogonal auf jeder Wurzel der anderen Teilmenge steht.
Beispiel: $A_1 \times A_1$ ist reduzibel. A_2 ist irreduzibel.

Bemerkung Φ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ Δ ist irreduzibel.
„$\Leftarrow$“: Beweis durch Kontraposition. Sei $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ nicht irreduzibel, also reduzibel. Wenn Δ nicht komplett in einer der Teilmengen enthalten ist, induziert die Zerlegung eine Zerlegung von Δ. Wenn aber $\Delta \subset \Phi_1$, folgt $0 = (\Delta, \Phi_2) = (E, \Phi_2)$, weil Δ Basis von E ist. Δ kann also nicht komplett in Φ_1 liegen.

„$\Rightarrow$“: Sei Φ irreduzibel, aber Δ nicht: $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ mit $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Theorem 10.3(c) besagt, dass jede Wurzel zu einer einfachen Wurzel konjugiert ist (über die Weylgruppe)
$\Rightarrow \quad \Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ mit $\Phi_i = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \text{ ist konjugiert zu einem } \alpha' \in \Delta_i\}$. Dies ist wegen der Definition von Basis wohldefiniert.

Wir wissen: $(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 0$. Weil $\mathcal{W}$ von den einfachen Spiegelungen $\sigma_\alpha, \alpha \in \Delta$ erzeugt wird, kann jede Wurzel aus Φ_i aus einer Summe oder Differenz von Elementen aus Δ_i geschrieben werden.
$\Rightarrow \quad \Phi_i \subset E_i \equiv \operatorname{span}(\Delta_i)$. Damit sehen wir, dass $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Weil Φ irreduzibel ist, folgt: $\Phi_1 = \varnothing$ oder $\Phi_2 = \varnothing$
$\Rightarrow \quad \Delta_1 = \varnothing$ oder $\Delta_2 = \varnothing$. □ 11 min

Lemma 1 *Sei Φ irreduzibel. (1) Bezüglich der partiellen Ordnung*[1] $\prec$ *gibt es eine eindeutig bestimmte maximale Wurzel β. (2) Wenn $\beta = \sum k_\alpha \alpha, \alpha \in \Delta \quad \Rightarrow \quad k_\alpha > 0$*
Beweis von (2): Sei $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ maximal bezüglich der Ordnung, also $\beta \succ 0$.
Sei $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha > 0\}$ und $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha = 0\}$. Dann gilt: $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$.
Angenommen $\Delta_2 \neq \varnothing$. Es gilt: $(\alpha, \beta) \leq 0 \; \forall \alpha \in \Delta_2$ (Lemma 10.1).
Weil Φ irreduzibel ist, muss mindestens ein $\alpha \in \Delta_2$ nicht-orthogonal zu Δ_1 sein: $(\alpha, \alpha') \overset{10.1}{<} 0, \alpha' \in \Delta_1$. Damit ist $(\alpha, \beta) < 0$. Aus Lemma 9.4 folgt, dass $\alpha + \beta$ eine Wurzel ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass β maximal ist. Damit ist $\Delta_2 = \varnothing, k_\alpha > 0$. Außerdem haben wir damit gezeigt, dass $(\alpha, \beta) \geq 0 \; \forall \alpha \in \Delta$ und $(\alpha, \beta) > 0$ für mindestens ein α, weil $E = \operatorname{span}(E)$.
Beweis von (1): Sei β' eine weitere maximale Wurzel. Wie wir gerade gesehen haben, gilt $(\alpha, \beta) > 0$ für mindestens ein $\alpha \in \Delta$.
$\Rightarrow \quad (\beta, \beta') > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta - \beta'$ ist eine Wurzel, solange nicht $\beta = \beta'$. Aber wenn $\beta - \beta'$ eine Wurzel ist, muss entweder $\beta \succ \beta'$ oder $\beta' \succ \beta$. Beides führt unmittelbar zum Widerspruch. □ 18 min

Lemma 2 *Sei Φ irreduzibel. Dann operiert $\mathcal{W}$ irreduzibel auf E, d.h. außer E und 0 gibt es keine $\mathcal{W}$-invarianten Unterräume. Insbesondere spannt der $\mathcal{W}$-Orbit einer Wurzel ganz E auf.*
Es ist klar, dass die zweite Aussage aus der Ersten folgt. Wir zeigen also den ersten Teil.
Sei $\varnothing \neq E' \subset E$ ein $\mathcal{W}$-invarianter Teilraum. Das orthogonale Komplement E'' ist natürlich ebenfalls $\mathcal{W}$-invariant.
Jedes $\alpha \in \Phi$ liegt entweder in E' oder E' liegt in P_α, weil $\sigma_\alpha(E') = E'$.
$\alpha \notin E' \Rightarrow \alpha \in E''$. Jede Wurzel liegt also entweder in dem einen oder dem anderen Unterraum. Weil Φ E erzeugt, folgt $E' = E$. □ 20 min

Lemma 3 *Sei Φ irreduzibel. Dann (1) existieren höchstens zwei Wurzellängen in Φ und (2) alle Wurzeln einer bestimmten Länge sind konjugiert unter $\mathcal{W}$.*
Seien α, β beliebige Wurzeln.
Nicht alle $\sigma(\alpha)$ $(\sigma \in \mathcal{W})$ können orthogonal zu β sein, weil $E = \operatorname*{span}_{\sigma \in \mathcal{W}}(\sigma(\alpha))$.
(1 mündlich): Wenn $(\alpha, \beta) \neq 0$ wissen wir (aus Abschnitt 9.4), dass alle Verhältnisse von quadrierten Wurzellängen $1, 2, 3, 1/2$ oder $1/3$ sein müssen. Gäbe es drei unterschiedliche Wurzellängen, würde u.a. das Verhältnis $3/2$ auftreten. #
(2): Seinen nun α, β Wurzeln gleicher Länge. Wir können OE annehmen, dass sie nichtorthogonal sind (ersetze eine Wurzel durch eine $\mathcal{W}$-Konjugierte) und verschieden (sonst sind wir schon fertig).
$\overset{(9.4)}{\Rightarrow} \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$. Falls nötig ersetzen wir $\beta \to -\beta = -\sigma_\beta(\beta)$[2], sodass

[1] Δ definiert $\prec$: $\mu \prec \lambda :\Leftrightarrow \mu - \lambda$ ist Summe von (positiven=einfachen) Wurzeln oder $\lambda = \mu$. Eine partielle Ordnung ist transitiv, reflexiv und antisymmetrisch (nicht total)
[2] auch hier wird wieder ein Element von $\mathcal{W}$ angewendet

$\langle \alpha, \beta \rangle = 1$.
Aus $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ folgt $(\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha)(\beta) = \sigma_\alpha\sigma_\beta(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$
□ 24 min

Definition Sei Φ irreduzibel. Haben wir zwei Wurzellängen, sprechen wir von kurzen und von langen Wurzeln. Haben alle Wurzeln gleiche Länge, nennen wir sie lang.

Lemma 4 *Sei Φ irreduzibel mit zwei unterschiedlichen Wurzellängen. Dann ist die maximale Wurzel aus Lemma 1 eine lange Wurzel.*
Sei $\alpha \in \Phi$. Es reicht z.z, dass $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$.
Ersetze α durch eine $\mathcal{W}$-Konjugierte, die im Abschluss der zu Δ fundamentalen Weyl-Kammer liegt. Weil $\beta - \alpha \succ 0$ (Lemma 1)[3], gilt $(\gamma, \beta - \alpha) \geq 0 \quad \forall \gamma \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$.
setze $\gamma = \beta$ und $\gamma = \alpha$.
$\Rightarrow \quad (\beta, \beta) \geq (\beta, \alpha) \geq (\alpha, \alpha)$. □ 27 min

11 Klassifikation

11.1 Cartan-Matrix von Φ

Definition (Cartan Matrix) Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ eine geordnete Liste der einfachen Wurzeln. Wir nennen $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{ij}$ *Cartan-Matrix* von Φ.

Bemerkungen

- Diese Definition ist abhängig von der Ordnung der einfachen Wurzeln.
- Die Cartan-Matrix ist unabhängig von der Wahl von Δ (folgt aus Theorem 10.3(b)).
- Die Cartan-Matrix ist nichtsingulär (folgt aus Abschnitt 8.5).
- Wir werden sehen, dass die Cartan-Matrix Φ komplett charakterisiert.
- Sei $(\Phi' \subset E', \Delta')$ ein weiteres Wurzelsystem mit Basis Δ'. Wenn $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$ für $1 \leq i, j, \leq l$, dann gilt:
  Die Abbildung $\Psi : \alpha_i \mapsto \alpha'_i$ ist ein VR-Isomorphismus mit:
  - $\Psi : \Phi \twoheadrightarrow \Phi'$
  - $\langle \Psi(\alpha), \Psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi$

  Damit können wir im Prinzip aus der Cartan-Matrix Φ bestimmen.[4]

  Beweis:

  - Ψ *existiert und ist eindeutig:*
    $\left\{ \begin{matrix} \Delta \\ \Delta' \end{matrix} \right\}$ ist Basis von $\left\{ \begin{matrix} E \\ E' \end{matrix} \right\} \Rightarrow \exists!$ VR-Isomorphismus $\Psi : E \to E'$ mit $\Psi(\alpha_i) = \alpha'_i \quad \forall i$.

[3] Warum?
[4] s. Seite 56

– *Folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & E' \\ \sigma_\alpha \big\downarrow & & \big\downarrow \sigma_{\Psi(\alpha)} \\ E & \xrightarrow{\Psi} & E' \end{array}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Psi(\alpha)}(\Psi(\beta)) &= \sigma_{\alpha'}(\beta') \\ &= \beta' - \langle \beta', \alpha' \rangle \alpha' \\ &= \Psi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \Psi(\alpha) \\ &= \Psi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) \\ &= \Psi(\sigma_\alpha(\beta)) \end{aligned}$$

– *Ψ bildet Φ surjektiv auf Φ' ab.*
Die Weyl-Gruppen $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$ werden von einfachen Spiegelungen erzeugt.
$\overset{\text{Theorem 10.3(d)}}{\Longrightarrow}$ $\xi_\Psi : \mathcal{W} \to \mathcal{W}'$, $\sigma \mapsto \Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}$ ist ein Gruppen-Isomorphismus mit $\xi_\Psi(\sigma_\alpha) = \sigma_{\Psi(\alpha)} \quad \alpha \in \Delta$ (folgt aus dem kommutativen Diagramm).
Weil jedes $\beta \in \Phi$ zu einem $\alpha \in \Delta$ konjugiert ist (also $\exists \sigma \in \mathcal{W} : \sigma(\alpha) = \beta$, Theorem 10.3(c)), gilt

$$\Psi(\beta) = \Psi(\sigma(\alpha)) = (\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1})(\Psi(\alpha)) \in \Phi'$$

Lassen wir $\sigma \in \mathcal{W}$ und $\alpha \in \mathcal{W}$ laufen, erreichen wir ganz Φ'. Also:

$$\Psi : \Phi \twoheadrightarrow \Phi'$$

36 min

– *Die Cartan-Zahlen bleiben unter Ψ erhalten.*
Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ und $\sigma, \tau \in \mathcal{W}$, s.d. $\alpha = \sigma(\alpha_i), \beta = \tau(\alpha_j)$ mit $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \langle \sigma(\alpha_i), \tau(\alpha_j) \rangle \\ &\overset{\text{Lemma 9.2}}{=} \langle \underbrace{\tau^{-1}\sigma(\alpha_i)}_{=\sum_k c_k \alpha_k}, \alpha_j \rangle \\ &= \sum_k c_k \langle \alpha_k, \alpha_j \rangle \\ &\overset{\text{Vor.}}{=} \sum_k c_k \langle \Psi(\alpha_k), \Psi(\alpha_j) \rangle \\ &= \langle \Psi(\tau^{-1}\sigma(\alpha_i)), \Psi(\alpha_j) \rangle \\ &= \langle \tau^{-1}\Psi(\sigma(\alpha_i)), \Psi(\alpha_j) \rangle \\ &= \langle \Psi(\sigma(\alpha_i)), \tau\Psi(\alpha_j) \rangle \\ &= \langle \Psi(\sigma(\alpha_i)), \Psi(\tau(\alpha_j)) \rangle \\ &= \langle \Psi(\alpha), \Psi(\beta) \rangle \end{aligned}$$

$\square$

39 min

11.2 Coxeter-Graphen und Dynkin-Diagramme

Seien α, β zwei positive Wurzeln. Dann gilt: $\langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 0$, 1, 2 oder 3 (Abschnitt 9.4). Wir betrachten ab jetzt nur noch positive Wurzeln, weil $\Phi^- = -\Phi^+$ und wir deshalb schon alle Wurzeln beschrieben haben, wenn wir die positiven Wurzeln beschrieben haben.
Zur besseren Anschaulichkeit folgende Definition.

Definition (Coxeter Graph) Der Coxeter Graph von Φ ist ein Graph mit l Vertices, wobei die $i$te und die $j$te Vertex ($i \neq j$) durch $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$ Kanten verbunden sind.

Bemerkung: Wenn alle Wurzeln gleiche Länge haben, gilt $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$. Deshalb sind durch den Coxeter-Graph alle Cartan-Zahlen bestimmt.
Haben die Wurzeln unterschiedliche Länge, funktioniert das nicht mehr. In diesem Fall erweitern wir unsere Definition.

Definition (Dynkin-Diagramm) Ein Dynkin-Diagramm ist ein Coxeter-Graph, bei dem an jeder Kante, die zwischen Wurzeln unterschiedlicher Länge liegt, ein Pfeil hinzugefügt wird, der von der langen zur kurzen Wurzel zeigt.[5] 42 min

11.3 Irreduzible Komponenten

Wie wir in Abschnitt 10.4 gesehen haben, ist Φ irreduzibel genau dann wenn Φ (oder äquivalent Δ) nicht in zwei echte orthogonale Teilmengen aufgeteilt werden kann. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn der Coxeter Graph im gewöhnliche Sinne zusammenhängend ist.[6]

11.4 Klassifikationssatz

Wir wir gerade gesehen haben, reicht es irreduzible Wurzelsysteme, also zusammenhängende Dynkin-Diagramme zu betrachten.

Theorem

Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem vom Rang l. Dann ist sein Dynkin-Diagramm eines der Folgenden:

[5] Im Buch wird dies am Beispiel von F_4 vorgeführt: S. 57
[6] Hier fehlt noch was, wobei mir noch nicht klar ist, wofür man das braucht.

00.jpg

Bemerkungen

- Der Index l wird eingeschränkt um Dopplungen zu vermeiden.
- Man erkennt, dass abgesehen von B_l und C_l bereits die Coxeter Graphen ausreichen um die einfachen Wurzeln zu beschreiben.

47 min

Beweis

Wir werden nun die Coxeter Graphen klassifizieren und danach sehen, welche Dynkin-Diagramme sich daraus ergeben können. Wir ignorieren also zunächst die Längen der Wurzeln und können deshalb mit Einheitsvektoren arbeiten.

Definition Sei E ein euklidischer Raum, $\mathcal{U} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\} \subset E$ n linear unabhängige Einheitsvektoren. Wenn für $i \neq j$

$$\boxed{(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq 0 \quad \text{und} \quad 4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 = 0,\ 1,\ 2 \text{ oder } 3}$$

gilt, nennen wir $\mathcal{U}$ zulässiges System (von Einheitsvektoren).
Zu einer zulässigen Menge ordnen wir wie oben den Graphen Γ zu, bei dem die Vertices i und j $(i \neq j)$ von $4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2$ Kanten verbunden werden.

Wir wollen nun alle zusammenhängenden Graphen finden, die zu zulässigen Systemen gehören. Das sind offensichtlich genau die zusammenhängenden Coxeter-Graphen. 50 min

1. Zunächst eine einfache Feststellung: *Entfernt man aus einem zulässigen System einige ϵ_i, bilden die Verbleibenden wieder ein zulässiges System. Den neuen Graphen erhält man, indem man die entsprechenden Vertices und alle dorthin zeigenden Kanten entfernt.*

2. *Die Zahl von Vertexpaaren in Γ, die von mindestens einer Kante verbunden werden, ist $\lneq n$.*
Sei $\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$. Weil die ϵ_i linear unabhängig sind, folgt $\epsilon \neq 0$ und damit:
$$0 < (\epsilon, \epsilon) = n + 2 \sum_{i<j} (\epsilon_i, \epsilon_j) \tag{1}$$
Sei nun i, j ein Paar von Indices dessen Vertices verbunden sind, also:
$$\begin{aligned} & (\epsilon_i, \epsilon_j) \neq 0 \\ \Rightarrow \quad & 4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 = 1, \text{ 2 oder 3} \\ \Rightarrow \quad & 4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 \geq 1 \\ \Rightarrow \quad & 2|(\epsilon_i, \epsilon_j)| \geq 1 \\ \Rightarrow \quad & 2(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq -1 \end{aligned}$$
Wir erhalten also mit Ungleichung (1), dass die Anzahl dieser Paare nicht größer als $n-1$ werden kann.

3. Γ *enthält keine Kreise.*
Ein Kreis wäre der Graph Γ' eines zulässigen Systems $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. $\mathcal{U}'$ würde gegen Punkt 2 des Beweises verstoßen.

4. *Es können nicht mehr als 3 Kanten mit einer Vertex verbunden sein.*
Sei $\epsilon \in \mathcal{U}$ und $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \mathcal{U}$ die paarweise verschiedenen Vektoren, die mit ϵ verbunden sind:
$$(\epsilon, \eta_i) < 0 \text{ wobei } \{\epsilon, \eta_1, \ldots\} \text{ paarweise verschieden}$$
Aus Punkt 3 des Beweises wissen wir, dass die η_i's nicht miteinander verbunden sein können, also: $(\eta_i, \eta_j) = 0$ für $i \neq j$.
Weil $\mathcal{U}$ linear unabhängig ist, können wir einen Einheitsvektor η_0 finden, der im Erzeugnis von $\mathcal{U}$ liegt und orthogonal zu allen η_i ist. Damit kann η_0 nicht auch noch zu ϵ orthogonal sein:
$$(\epsilon, \eta_0) \neq 0 \tag{2}$$
Es gilt nun:
$$\begin{aligned} & \epsilon = \sum_{i=0}^{k} (\epsilon, \eta_i)\, \eta_i \\ \Rightarrow \quad & 1 = (\epsilon, \epsilon) = \sum_{i=0}^{k} (\epsilon, \eta_i)^2 \\ \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad & \sum_{i=1}^{k} (\epsilon, \eta_i)^2 < 1 \qquad (3) \\ \Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{k} 4(\epsilon, \eta_i)^2 < 4 \end{aligned}$$

Die Gesamtzahl der Vertices, die mit ϵ verbunden sind, ist also strikt kleiner als 4. 59 min

5. *Der einzige zusammenhängende Graph eines zulässigen Systems, der eine Dreier-Kante enthält, ist der Graph G_2*
   Die folgt sofort aus Punkt 4 des Beweises.

6. *Sei $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\} \subset \mathcal{U}$ eine Teilmenge, zu der eine einfache Kette gehört. Dann ist $\mathcal{U}' = (\mathcal{U} \setminus \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}) \cup \{\epsilon\}$ mit $\epsilon := \sum_{i=1}^k \epsilon_i$ ein zulässiges System. Man darf also eine einfache Kette zu einem Punkt zusammenschrumpfen.*
   Wir müssen also zeigen, dass $\mathcal{U}'$ ein zulässiges System ist. Die lineare Unabhängigkeit ist klar. Nach Voraussetzung haben wir $2(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = -1$ für alle $1 \leq i \leq k-1$. Damit ist ϵ ein Einheitsvektor:

   $$(\epsilon, \epsilon) = k + 2\sum_{i<j}(\epsilon_i, \epsilon_j) = k - 2 \cdot \frac{k-1}{2} = 1$$

   Mit Punkt 3 des Beweises wissen wir, dass jedes $\eta \in \mathcal{U} \setminus \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ mit maximal einem $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ verbunden sein kann. Damit

   $$(\eta, \epsilon) = 0 \text{ oder } (\eta, \epsilon) = (\eta, \epsilon_i) \quad 1 \leq i \leq k$$

   Auf jeden Fall gilt $4(\eta, \epsilon)^2 = 0,\ 1,\ 2$ oder 3.
   Damit ist $\mathcal{U}'$ ein zulässiges System. 64 min

7. Γ *enthält keinen Teilgraphen der folgenden Form:*

   71.jpg

   Mit Punkt 1 des Beweises wissen wir, dass diese Graphen Teil eines zulässigen Systems wären. Punkt 6 erlaubt es die einfache Kette in der Mitte so zu entfernen, dass die entstehenden Graphen gegen Punkt 4 verstoßen.

   72.jpg

8. *Jeder Graph eines zulässigen Systems hat eine der folgenden Formen:*

81.jpg

9. *Die einzigen zusammenhängenden Graphen des zweiten Typs in Punkt 8 sind der Coxeter Graph F_4 oder der Coxeter Graph $B_n (= C_n)$.*
Seien $\epsilon = \sum_{j=1}^{p} j\epsilon_j$ und $\eta = \sum_{j=1}^{q} j\eta_j$ mit ϵ_i, η_j wie in Punkt 8. Nach Voraussetzung $2(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = -1 = 2(\eta_i, \eta_{i+1})$ und $(\epsilon_i, \eta_j) = 0$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} & (\epsilon, \epsilon) = \sum_{j=1}^{p} j^2 - \sum_{j=1}^{p-1} j(j+1) = p(p+1)/2 \qquad (4) \\ \text{und} \quad & (\eta, \eta) = q(q+1)/2 \end{aligned}$$

Aus $4(\epsilon_p, \eta_q)^2 = 2$ können wir

$$(\epsilon, \eta)^2 = p^2 q^2 (\epsilon_p, \eta_q)^2 = p^2 q^2 / 2$$

folgern. Wir verwenden die Schwarzsche Ungleichung. Hier gilt sogar strikte Ungleichheit, weil ϵ und η linear unabhängig sind.

$$\begin{aligned} & (\epsilon, \eta)^2 < (\eta, \eta)(\epsilon, \epsilon) \\ \Rightarrow \quad & p^2 q^2 / 2 < p(p+1)q(q+1)/4 = (p^2 q^2 + pq^2 + p^2 q + pq)/4 && | : (pq) \\ \Rightarrow \quad & 0 < -pq + q + p + 1 && | \cdot (-1) \quad | + 2 \\ \Rightarrow \quad & 2 > pq - q - p + 1 = (p-1)(q-1) \end{aligned}$$

Die Möglichkeiten diese Ungleichung zu erfüllen sein:

- $p = 2 = q$: Dies ist der Fall F_4.
- $p = 2, q$ beliebig (oder umgekehrt): Hier liegt $B_l (= C_l)$ vor.

10. *Die einzigen Graphen vom vierten Typ in Punkt 8 sind die Coxeter-Graphen E_6, E_7, E_8 und D_n.*
Seien $\epsilon = \sum_{i=1}^{p-1} i\epsilon_i$, $\eta = \sum_{j=1}^{q-1} j\eta_j$ und $\zeta = \sum_{k=1}^{r-1} k\zeta_k$, wobei wir wieder die Notation aus Punkt 8 verwenden. ϵ, η und ζ sind linear unabhängig und orthogonal zueinander. ψ liegt nicht in ihrem Erzeugnis.
Wie in Gleichung (3) erhalten wir

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 < 1$$

wobei θ_i die Winkel zwischen ϵ, η, ζ und ψ sind.
Aus der analogen Rechnung wie in Punkt 9 folgt ($p-1$ statt p in Gleichung (4))

$$\begin{aligned} & (\epsilon, \epsilon) = p(p-1)/2 && (5)\\ \Rightarrow \quad & \cos^2\theta_1 = \frac{(\epsilon,\psi)^2}{(\epsilon,\epsilon)\underbrace{(\psi,\psi)}_{=1}} \\ & = \frac{(p-1)^2(\epsilon_{p-1},\psi)^2}{p(p-1)/2} = \frac{2(p-1)^2}{4p(p-1)} \\ & = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right) && (6) \end{aligned}$$

Diese Rechnungen (Gleichung (5) bis (6)) laufen für η und ζ analog. Insgesamt erhalten wir so:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) < 1$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1 \qquad (7)}$$

Nach eventueller Umbenennung haben wir: $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r}$. Sind nun p, q oder $r = 1$ sind wir im Typ A_n. Ansonsten haben wir:

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2} \qquad (8)$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} & 1 \overset{(7)}{<} 3 \cdot \frac{1}{r} \overset{(8)}{\leq} 3 \cdot \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \quad & r = 2 && (9) \end{aligned}$$

Dies setzt auch Einschränkungen an q (über (7) und (9)):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \quad & \frac{2}{q} > \frac{1}{2} && (10)\\ \Rightarrow \quad & 2 \overset{(8)}{\leq} q \overset{(10)}{<} 4 \end{aligned}$$

Sei $q = 3$. Dann ist $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ und damit $p < 6$.
Sei $q = 2$. Dann ist p beliebig.
Die erlaubten Tripel (p, q, r) sind also:

$$\begin{aligned}
(p, 2, 2) &= D_n \\
(3, 3, 2) &= E_6 \\
(4, 3, 2) &= E_7 \\
(5, 3, 2) &= E_8
\end{aligned}$$

Außer in den Fällen B_n, C_n legen die Coxeter-Graphen bereits eindeutig die Dynkin-Diagramme fest. Damit ist das Theorem gezeigt. $\square$

81 min