

Lie-Algebren (Vortrag am 5. Juni)

Philipp Arras

9. Oktober 2014

0 Vorbemerkungen

0.1 Setup

Sei L halbeinfache Lie-Algebra über einem abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null. Sei H eine maximale torische Unterálgebra.

Im Vortrag von Dr. Kasten wurde folgende Abbildung beschrieben:

$$(L, H) \mapsto (E, \Phi)$$

wobei E ein euklidischer Vektorraum und Φ ein Wurzelsystem ist. Wir klassifizieren jetzt die Paare (E, Φ) . Im nächsten Vortrag werden wir sehen, dass obige Abbildung bijektiv und die Wahl von H nicht entscheidend ist.

0.2 Bezeichnungen

Im Folgenden sei immer Φ ein Wurzelsystem vom Rang l in einem euklidischen Raum E mit Weyl-Gruppe \mathcal{W} und Δ eine Basis von Φ .

3 min

10 Einfache Wurzeln und die Weyl-Gruppe

10.4 Irreduzible Wurzelsysteme

Definition (irreduzible Wurzelsysteme) Wir nennen Φ irreduzibel, wenn es nicht in zwei echte zueinander orthogonale Teilmengen zerlegt werden kann, d.h. dass jede Wurzel der einen Teilmenge orthogonal auf jeder Wurzel der anderen Teilmenge steht.

Beispiel: $A_1 \times A_1$ ist reduzibel. A_2 ist irreduzibel.

Bemerkung Φ ist irreduzibel $\Leftrightarrow \Delta$ ist irreduzibel.

„ \Leftarrow “: Beweis durch Kontraposition. Sei $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ nicht irreduzibel, also reduzibel. Wenn Δ nicht komplett in einer der Teilmengen enthalten ist, induziert die Zerlegung eine Zerlegung von Δ . Wenn aber $\Delta \subset \Phi_1$, folgt $0 = (\Delta, \Phi_2) = (E, \Phi_2)$, weil Δ Basis von E ist. Δ kann also nicht komplett in Φ_1 liegen.

„ \Rightarrow “: Sei Φ irreduzibel, aber Δ nicht: $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ mit $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Theorem 10.3(c) besagt, dass jede Wurzel zu einer einfachen Wurzel konjugiert ist (über die Weylgruppe)

$\Rightarrow \Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ mit $\Phi_i = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \text{ ist konjugiert zu einem } \alpha' \in \Delta_i\}$. Dies ist wegen der Definition von Basis wohldefiniert.

Wir wissen: $(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 0$. Weil \mathcal{W} von den einfachen Spiegelungen $\sigma_\alpha, \alpha \in \Delta$ erzeugt wird, kann jede Wurzel aus Φ_i aus einer Summe oder Differenz von Elementen aus Δ_i geschrieben werden.

$\Rightarrow \Phi_i \subset E_i \equiv \text{span}(\Delta_i)$. Damit sehen wir, dass $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Weil Φ irreduzibel ist, folgt: $\Phi_1 = \emptyset$ oder $\Phi_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \Delta_1 = \emptyset$ oder $\Delta_2 = \emptyset$.

□ 11 min

Lemma 1 Sei Φ irreduzibel. (1) Bezüglich der partiellen Ordnung¹ \prec gibt es eine eindeutig bestimmte maximale Wurzel β . (2) Wenn $\beta = \sum k_\alpha \alpha, \alpha \in \Delta \Rightarrow k_\alpha > 0$

Beweis von (2): Sei $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ maximal bezüglich der Ordnung, also $\beta \succ 0$.

Sei $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha > 0\}$ und $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha = 0\}$. Dann gilt: $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Angenommen $\Delta_2 \neq \emptyset$. Es gilt: $(\alpha, \beta) \leq 0 \forall \alpha \in \Delta_2$ (Lemma 10.1).

Weil Φ irreduzibel ist, muss mindestens ein $\alpha \in \Delta_2$ nicht-orthogonal zu Δ_1 sein:

$(\alpha, \alpha') \stackrel{10.1}{<} 0, \alpha' \in \Delta_1$. Damit ist $(\alpha, \beta) < 0$. Aus Lemma 9.4 folgt, dass $\alpha + \beta$ eine Wurzel ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass β maximal ist. Damit ist $\Delta_2 = \emptyset, k_\alpha > 0$. Außerdem haben wir damit gezeigt, dass $(\alpha, \beta) \geq 0 \forall \alpha \in \Delta$ und $(\alpha, \beta) > 0$ für mindestens ein α , weil $E = \text{span}(E)$.

Beweis von (1): Sei β' eine weitere maximale Wurzel. Wie wir gerade gesehen haben, gilt $(\alpha, \beta) > 0$ für mindestens ein $\alpha \in \Delta$.

$\Rightarrow (\beta, \beta') > 0 \Rightarrow \beta - \beta'$ ist eine Wurzel, solange nicht $\beta = \beta'$. Aber wenn $\beta - \beta'$ eine Wurzel ist, muss entweder $\beta \succ \beta'$ oder $\beta' \succ \beta$. Beides führt unmittelbar zum Widerspruch.

□ 18 min

Lemma 2 Sei Φ irreduzibel. Dann operiert \mathcal{W} irreduzibel auf E , d.h. außer E und 0 gibt es keine \mathcal{W} -invarianten Unterräume. Insbesondere spannt der \mathcal{W} -Orbit einer Wurzel ganz E auf.

Es ist klar, dass die zweite Aussage aus der Ersten folgt. Wir zeigen also den ersten Teil.

Sei $\emptyset \neq E' \subset E$ ein \mathcal{W} -invarianter Teilraum. Das orthogonale Komplement E'' ist natürlich ebenfalls \mathcal{W} -invariant.

Jedes $\alpha \in \Phi$ liegt entweder in E' oder E' liegt in P_α , weil $\sigma_\alpha(E') = E'$.

$\alpha \notin E' \Rightarrow \alpha \in E''$. Jede Wurzel liegt also entweder in dem einen oder dem anderen Unterraum. Weil Φ E erzeugt, folgt $E' = E$.

□ 20 min

Lemma 3 Sei Φ irreduzibel. Dann (1) existieren höchstens zwei Wurzellängen in Φ und (2) alle Wurzeln einer bestimmten Länge sind konjugiert unter \mathcal{W} .

Seien α, β beliebige Wurzeln.

Nicht alle $\sigma(\alpha)$ ($\sigma \in \mathcal{W}$) können orthogonal zu β sein, weil $E = \text{span}(\sigma(\alpha))$.

(1 mündlich): Wenn $(\alpha, \beta) \neq 0$ wissen wir (aus Abschnitt 9.4), dass alle Verhältnisse von quadrierten Wurzellängen 1, 2, 3, 1/2 oder 1/3 sein müssen. Gäbe es drei unterschiedliche Wurzellängen, würde u.a. das Verhältnis 3/2 auftreten. #

(2): Seien nun α, β Wurzeln gleicher Länge. Wir können OE annehmen, dass sie nichtorthogonal sind (ersetze eine Wurzel durch eine \mathcal{W} -Konjugierte) und verschieden (sonst sind wir schon fertig).

$\stackrel{(9.4)}{\Rightarrow} \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$. Falls nötig ersetzen wir $\beta \rightarrow -\beta = -\sigma_\beta(\beta)^2$, sodass

¹ Δ definiert $\prec: \mu \prec \lambda \Leftrightarrow \mu - \lambda$ ist Summe von (positiven=einfachen) Wurzeln oder $\lambda = \mu$.
Eine partielle Ordnung ist transitiv, reflexiv und antisymmetrisch (nicht total)

² auch hier wird wieder ein Element von \mathcal{W} angewendet

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 1.$$

Aus $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$ folgt $(\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha)(\beta) = \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$

□

24 min

Definition Sei Φ irreduzibel. Haben wir zwei Wurzellängen, sprechen wir von kurzen und von langen Wurzeln. Haben alle Wurzeln gleiche Länge, nennen wir sie lang.

Lemma 4 Sei Φ irreduzibel mit zwei unterschiedlichen Wurzellängen. Dann ist die maximale Wurzel aus Lemma 1 eine lange Wurzel.

Sei $\alpha \in \Phi$. Es reicht z.z., dass $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$.

Ersetze α durch eine \mathcal{W} -Konjugierte, die im Abschluss der zu Δ fundamentalen Weyl-Kammer liegt. Weil $\beta - \alpha \succ 0$ (Lemma 1)³, gilt $(\gamma, \beta - \alpha) \geq 0 \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}(\Delta)$. setze $\gamma = \beta$ und $\gamma = \alpha$.

$$\Rightarrow (\beta, \beta) \geq (\beta, \alpha) \geq (\alpha, \alpha).$$

□ 27 min

11 Klassifikation

11.1 Cartan-Matrix von Φ

Definition (Cartan Matrix) Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ eine geordnete Liste der einfachen Wurzeln. Wir nennen $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{ij}$ *Cartan-Matrix* von Φ .

Bemerkungen

- Diese Definition ist abhängig von der Ordnung der einfachen Wurzeln.
- Die Cartan-Matrix ist unabhängig von der Wahl von Δ (folgt aus Theorem 10.3(b)).
- Die Cartan-Matrix ist nichtsingulär (folgt aus Abschnitt 8.5).
- Wir werden sehen, dass die Cartan-Matrix Φ komplett charakterisiert.
- Sei $(\Phi' \subset E', \Delta')$ ein weiteres Wurzelsystem mit Basis Δ' . Wenn $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$ für $1 \leq i, j \leq l$, dann gilt:
Die Abbildung $\Psi : \alpha_i \mapsto \alpha'_i$ ist ein VR-Isomorphismus mit:

$$- \Psi : \Phi \rightarrow \Phi'$$

$$- \langle \Psi(\alpha), \Psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi$$

Damit können wir im Prinzip aus der Cartan-Matrix Φ bestimmen.⁴

Beweis:

- Ψ existiert und ist eindeutig:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta \\ \Delta' \end{array} \right\} \text{ ist Basis von } \left\{ \begin{array}{c} E \\ E' \end{array} \right\} \Rightarrow \exists! \text{ VR-Isomorphismus } \Psi : E \rightarrow E' \text{ mit } \Psi(\alpha_i) = \alpha'_i \quad \forall i.$$

³Warum?

⁴s. Seite 56

– Folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & E' \\ \sigma_\alpha \downarrow & & \downarrow \sigma_{\Psi(\alpha)} \\ E & \xrightarrow{\Psi} & E' \end{array}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Psi(\alpha)}(\Psi(\beta)) &= \sigma_{\alpha'}(\beta') \\ &= \beta' - \langle \beta', \alpha' \rangle \alpha' \\ &= \Psi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \Psi(\alpha) \\ &= \Psi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) \\ &= \Psi(\sigma_\alpha(\beta)) \end{aligned}$$

– Ψ bildet Φ surjektiv auf Φ' ab.

Die Weyl-Gruppen $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$ werden von einfachen Spiegelungen erzeugt.

$\xRightarrow{\text{Theorem 10.3(d)}} \xi_\Psi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}', \sigma \mapsto \Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}$ ist ein Gruppen-Isomorphismus mit $\xi_\Psi(\sigma_\alpha) = \sigma_{\Psi(\alpha)} \quad \alpha \in \Delta$ (folgt aus dem kommutativen Diagramm).

Weil jedes $\beta \in \Phi$ zu einem $\alpha \in \Delta$ konjugiert ist (also $\exists \sigma \in \mathcal{W} : \sigma(\alpha) = \beta$, Theorem 10.3(c)), gilt

$$\Psi(\beta) = \Psi(\sigma(\alpha)) = (\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1})(\Psi(\alpha)) \in \Phi'$$

Lassen wir $\sigma \in \mathcal{W}$ und $\alpha \in \mathcal{W}$ laufen, erreichen wir ganz Φ' . Also:

$$\Psi : \Phi \twoheadrightarrow \Phi'$$

36 min

– Die Cartan-Zahlen bleiben unter Ψ erhalten.

Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ und $\sigma, \tau \in \mathcal{W}$, s.d. $\alpha = \sigma(\alpha_i), \beta = \tau(\alpha_j)$ mit $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \langle \sigma(\alpha_i), \tau(\alpha_j) \rangle \\ &\stackrel{\text{Lemma 9.2}}{=} \langle \underbrace{\tau^{-1}\sigma(\alpha_i)}_{=\sum_k c_k \alpha_k}, \alpha_j \rangle \\ &= \sum_k c_k \langle \alpha_k, \alpha_j \rangle \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{=} \sum_k c_k \langle \Psi(\alpha_k), \Psi(\alpha_j) \rangle \\ &= \langle \Psi(\tau^{-1}\sigma(\alpha_i)), \Psi(\alpha_j) \rangle \\ &= \langle \tau^{-1}\Psi(\sigma(\alpha_i)), \Psi(\alpha_j) \rangle \\ &= \langle \Psi(\sigma(\alpha_i)), \tau\Psi(\alpha_j) \rangle \\ &= \langle \Psi(\sigma(\alpha_i)), \Psi(\tau(\alpha_j)) \rangle \\ &= \langle \Psi(\alpha), \Psi(\beta) \rangle \end{aligned}$$

□

39 min

11.2 Coxeter-Graphen und Dynkin-Diagramme

Seien α, β zwei positive Wurzeln. Dann gilt: $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2$ oder 3 (Abschnitt 9.4). Wir betrachten ab jetzt nur noch positive Wurzeln, weil $\Phi^- = -\Phi^+$ und wir deshalb schon alle Wurzeln beschrieben haben, wenn wir die positiven Wurzeln beschrieben haben.

Zur besseren Anschaulichkeit folgende Definition.

Definition (Coxeter Graph) Der Coxeter Graph von Φ ist ein Graph mit l Vertices, wobei die i te und die j te Vertex ($i \neq j$) durch $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ Kanten verbunden sind.

Bemerkung: Wenn alle Wurzeln gleiche Länge haben, gilt $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$. Deshalb sind durch den Coxeter-Graph alle Cartan-Zahlen bestimmt. Haben die Wurzeln unterschiedliche Länge, funktioniert das nicht mehr. In diesem Fall erweitern wir unsere Definition.

Definition (Dynkin-Diagramm) Ein Dynkin-Diagramm ist ein Coxeter-Graph, bei dem an jeder Kante, die zwischen Wurzeln unterschiedlicher Länge liegt, ein Pfeil hinzugefügt wird, der von der langen zur kurzen Wurzel zeigt.⁵

42 min

11.3 Irreduzible Komponenten

Wie wir in Abschnitt 10.4 gesehen haben, ist Φ irreduzibel genau dann wenn Φ (oder äquivalent Δ) nicht in zwei echte orthogonale Teilmengen aufgeteilt werden kann. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn der Coxeter Graph im gewöhnliche Sinne zusammenhängend ist.⁶

11.4 Klassifikationssatz

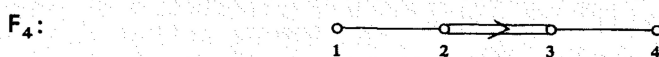
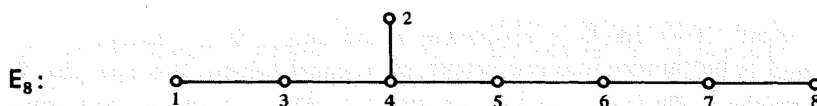
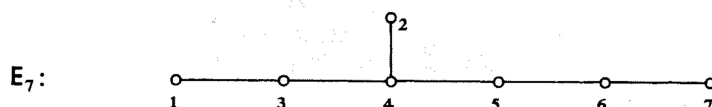
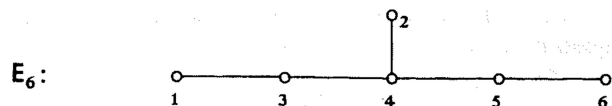
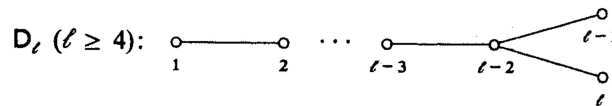
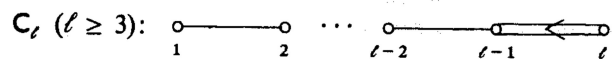
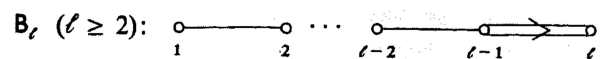
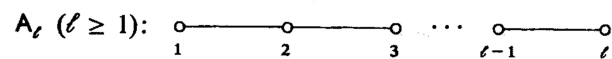
Wie wir gerade gesehen haben, reicht es irreduzible Wurzelsysteme, also zusammenhängende Dynkin-Diagramme zu betrachten.

Theorem

Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem vom Rang l . Dann ist sein Dynkin-Diagramm eines der Folgenden:

⁵Im Buch wird dies am Beispiel von F_4 vorgeführt: S. 57

⁶Hier fehlt noch was, wobei mir noch nicht klar ist, wofür man das braucht.



Bemerkungen

- Der Index l wird eingeschränkt um Dopplungen zu vermeiden.
- Man erkennt, dass abgesehen von B_l und C_l bereits die Coxeter Graphen ausreichen um die einfachen Wurzeln zu beschreiben.

47 min

Beweis

Wir werden nun die Coxeter Graphen klassifizieren und danach sehen, welche Dynkin-Diagramme sich daraus ergeben können. Wir ignorieren also zunächst die Längen der Wurzeln und können deshalb mit Einheitsvektoren arbeiten.

Definition Sei E ein euklidischer Raum, $\mathcal{U} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\} \subset E$ n linear unabhängige Einheitsvektoren. Wenn für $i \neq j$

$$(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq 0 \quad \text{und} \quad 4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 = 0, 1, 2 \text{ oder } 3$$

gilt, nennen wir \mathcal{U} zulässiges System (von Einheitsvektoren).

Zu einer zulässigen Menge ordnen wir wie oben den Graphen Γ zu, bei dem die Vertices i und j ($i \neq j$) von $4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2$ Kanten verbunden werden.

Wir wollen nun alle zusammenhängenden Graphen finden, die zu zulässigen Systemen gehören. Das sind offensichtlich genau die zusammenhängenden Coxeter-Graphen.

50 min

1. Zunächst eine einfache Feststellung: *Entfernt man aus einem zulässigen System einige ϵ_i , bilden die Verbleibenden wieder ein zulässiges System. Den neuen Graphen erhält man, indem man die entsprechenden Vertices und alle dorthin zeigenden Kanten entfernt.*
2. *Die Zahl von Vertexpaaren in Γ , die von mindestens einer Kante verbunden werden, ist $\leq n$.*

Sei $\epsilon = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$. Weil die ϵ_i linear unabhängig sind, folgt $\epsilon \neq 0$ und damit:

$$0 < (\epsilon, \epsilon) = n + 2 \sum_{i < j} (\epsilon_i, \epsilon_j) \quad (1)$$

Sei nun i, j ein Paar von Indices dessen Vertices verbunden sind, also:

$$\begin{aligned} & (\epsilon_i, \epsilon_j) \neq 0 \\ \Rightarrow & 4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 = 1, 2 \text{ oder } 3 \\ \Rightarrow & 4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 \geq 1 \\ \Rightarrow & 2|(\epsilon_i, \epsilon_j)| \geq 1 \\ \Rightarrow & 2(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq -1 \end{aligned}$$

Wir erhalten also mit Ungleichung (1), dass die Anzahl dieser Paare nicht größer als $n - 1$ werden kann.

3. Γ enthält keine Kreise.

Ein Kreis wäre der Graph Γ' eines zulässigen Systems $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. \mathcal{U}' würde gegen Punkt 2 des Beweises verstoßen.

4. *Es können nicht mehr als 3 Kanten mit einer Vertex verbunden sein.*

Sei $\epsilon \in \mathcal{U}$ und $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathcal{U}$ die paarweise verschiedenen Vektoren, die mit ϵ verbunden sind:

$$(\epsilon, \eta_i) < 0 \text{ wobei } \{\epsilon, \eta_1, \dots\} \text{ paarweise verschieden}$$

Aus Punkt 3 des Beweises wissen wir, dass die η_i 's nicht miteinander verbunden sein können, also: $(\eta_i, \eta_j) = 0$ für $i \neq j$.

Weil \mathcal{U} linear unabhängig ist, können wir einen Einheitsvektor η_0 finden, der im Erzeugnis von \mathcal{U} liegt und orthogonal zu allen η_i ist. Damit kann η_0 nicht auch noch zu ϵ orthogonal sein:

$$(\epsilon, \eta_0) \neq 0 \quad (2)$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{i=0}^k (\epsilon, \eta_i) \eta_i \\ \Rightarrow 1 &= (\epsilon, \epsilon) = \sum_{i=0}^k (\epsilon, \eta_i)^2 \\ &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^k (\epsilon, \eta_i)^2 < 1 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^k 4(\epsilon, \eta_i)^2 &< 4 \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gesamtzahl der Vertices, die mit ϵ verbunden sind, ist also strikt kleiner als 4.

59 min

5. *Der einzige zusammenhängende Graph eines zulässigen Systems, der eine Dreier-Kante enthält, ist der Graph G_2*

Die folgt sofort aus Punkt 4 des Beweises.

6. *Sei $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\} \subset \mathcal{U}$ eine Teilmenge, zu der eine einfache Kette gehört. Dann ist $\mathcal{U}' = (\mathcal{U} \setminus \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}) \cup \{\epsilon\}$ mit $\epsilon := \sum_{i=1}^k \epsilon_i$ ein zulässiges System. Man darf also eine einfache Kette zu einem Punkt zusammenschrumpfen.*

Wir müssen also zeigen, dass \mathcal{U}' ein zulässiges System ist. Die lineare Unabhängigkeit ist klar. Nach Voraussetzung haben wir $2(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = -1$ für alle $1 \leq i \leq k-1$. Damit ist ϵ ein Einheitsvektor:

$$(\epsilon, \epsilon) = k + 2 \sum_{i < j} (\epsilon_i, \epsilon_j) = k - 2 \cdot \frac{k-1}{2} = 1$$

Mit Punkt 3 des Beweises wissen wir, dass jedes $\eta \in \mathcal{U} \setminus \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ mit maximal einem $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ verbunden sein kann. Damit

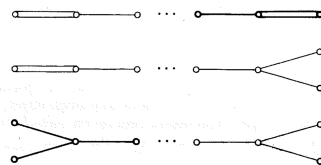
$$(\eta, \epsilon) = 0 \text{ oder } (\eta, \epsilon) = (\eta, \epsilon_i) \quad 1 \leq i \leq k$$

Auf jeden Fall gilt $4(\eta, \epsilon)^2 = 0, 1, 2$ oder 3 .

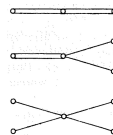
Damit ist \mathcal{U}' ein zulässiges System.

64 min

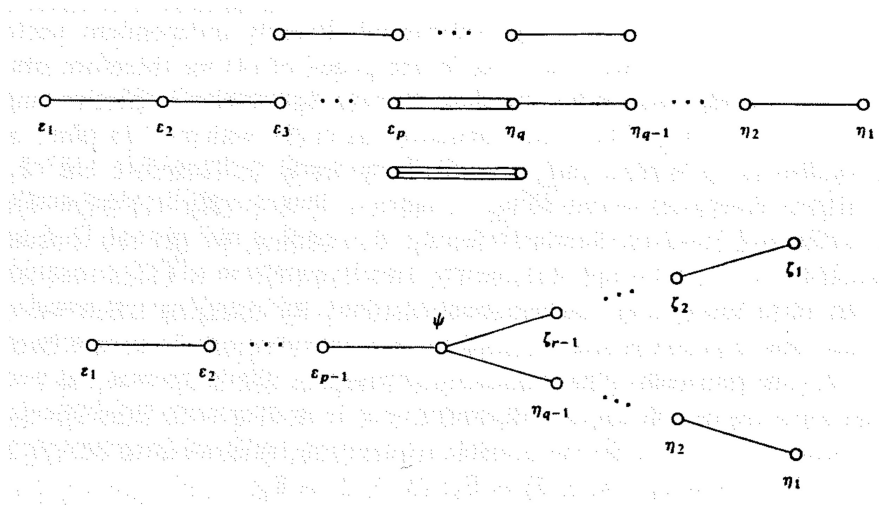
7. *Γ enthält keinen Teilgraphen der folgenden Form:*



Mit Punkt 1 des Beweises wissen wir, dass diese Graphen Teil eines zulässigen Systems wären. Punkt 6 erlaubt es die einfache Kette in der Mitte so zu entfernen, dass die entstehenden Graphen gegen Punkt 4 verstoßen.



8. *Jeder Graph eines zulässigen Systems hat eine der folgenden Formen:*



9. Die einzigen zusammenhängenden Graphen des zweiten Typs in Punkt 8 sind der Coxeter Graph F_4 oder der Coxeter Graph $B_n (= C_n)$.

Seien $\epsilon = \sum_{j=1}^p j\epsilon_j$ und $\eta = \sum_{j=1}^q j\eta_j$ mit ϵ_i, η_j wie in Punkt 8. Nach Voraussetzung $2(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = -1 = 2(\eta_i, \eta_{i+1})$ und $(\epsilon_i, \eta_j) = 0$. Damit erhalten wir:

$$(\epsilon, \epsilon) = \sum_{j=1}^p j^2 - \sum_{j=1}^{p-1} j(j+1) = p(p+1)/2 \quad (4)$$

$$\text{und } (\eta, \eta) = q(q+1)/2$$

Aus $4(\epsilon_p, \eta_q)^2 = 2$ können wir

$$(\epsilon, \eta)^2 = p^2 q^2 (\epsilon_p, \eta_q)^2 = p^2 q^2 / 2$$

folgern. Wir verwenden die Schwarzsche Ungleichung. Hier gilt sogar strikte Ungleichheit, weil ϵ und η linear unabhängig sind.

$$\begin{aligned} & (\epsilon, \eta)^2 < (\eta, \eta)(\epsilon, \epsilon) \\ \Rightarrow & p^2 q^2 / 2 < p(p+1)q(q+1)/4 = (p^2 q^2 + p q^2 + p^2 q + p q)/4 & | : (pq) \\ \Rightarrow & 0 < -pq + q + p + 1 & | \cdot (-1) \quad | + 2 \\ \Rightarrow & 2 > pq - q - p + 1 = (p-1)(q-1) \end{aligned}$$

Die Möglichkeiten diese Ungleichung zu erfüllen sein:

- $p = 2 = q$: Dies ist der Fall F_4 .
- $p = 2, q$ beliebig (oder umgekehrt): Hier liegt $B_l (= C_l)$ vor.

10. Die einzigen Graphen vom vierten Typ in Punkt 8 sind die Coxeter-Graphen E_6, E_7, E_8 und D_n .

Seien $\epsilon = \sum_{i=1}^{p-1} i\epsilon_i$, $\eta = \sum_{j=1}^{q-1} j\eta_j$ und $\zeta = \sum_{k=1}^{r-1} k\zeta_k$, wobei wir wieder die Notation aus Punkt 8 verwenden. ϵ, η und ζ sind linear unabhängig und orthogonal zueinander. ψ liegt nicht in ihrem Erzeugnis.

Wie in Gleichung (3) erhalten wir

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 < 1$$

wobei θ_i die Winkel zwischen ϵ, η, ζ und ψ sind.

Aus der analogen Rechnung wie in Punkt 9 folgt ($p-1$ statt p in Gleichung

(4))

$$\begin{aligned}
(\epsilon, \epsilon) &= p(p-1)/2 & (5) \\
\Rightarrow \cos^2 \theta_1 &= \frac{(\epsilon, \psi)^2}{(\epsilon, \epsilon) \underbrace{(\psi, \psi)}_{=1}} \\
&= \frac{(p-1)^2 (\epsilon_{p-1}, \psi)^2}{p(p-1)/2} = \frac{2(p-1)^2}{4p(p-1)} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) & (6)
\end{aligned}$$

Diese Rechnungen (Gleichung (5) bis (6)) laufen für η und ζ analog. Insgesamt erhalten wir so:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1 \quad (7)$$

Nach eventueller Umbenennung haben wir: $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r}$. Sind nun p, q oder $r = 1$ sind wir im Typ A_n . Ansonsten haben wir:

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2} \quad (8)$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}
1 &\stackrel{(7)}{<} 3 \cdot \frac{1}{r} \stackrel{(8)}{\leq} 3 \cdot \frac{1}{2} \\
\Rightarrow r &= 2 & (9)
\end{aligned}$$

Dies setzt auch Einschränkungen an q (über (7) und (9)):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} &> \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \frac{2}{q} &> \frac{1}{2} & (10) \\
\Rightarrow 2 &\stackrel{(8)}{\leq} q \stackrel{(10)}{<} 4
\end{aligned}$$

Sei $q = 3$. Dann ist $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ und damit $p < 6$.

Sei $q = 2$. Dann ist p beliebig.

Die erlaubten Tripel (p, q, r) sind also:

$$\begin{aligned}
(p, 2, 2) &= D_n \\
(3, 3, 2) &= E_6 \\
(4, 3, 2) &= E_7 \\
(5, 3, 2) &= E_8
\end{aligned}$$

Außer in den Fällen B_n, C_n legen die Coxeter-Graphen bereits eindeutig die Dynkin-Diagramme fest. Damit ist das Theorem gezeigt. \square

81 min