

Apprentissage par renforcement

Philippe Preux
philippe.preux@univ-lille.fr

École d'Automne en Intelligence Artificielle, 2019

<https://philippe.preux.github.io/talks/IA2.pdf>



Motivations

- ▶ Comment un agent autonome peut-il apprendre à réaliser une tâche dans un environnement qu'il ne connaît pas parfaitement ?

Motivations

- ▶ Comment un agent autonome peut-il apprendre à réaliser une tâche dans un environnement qu'il ne connaît pas parfaitement ?
- ▶ Apprendre à faire est plus facile à programmer que faire.
Illustration : aux échecs, Alpha Zero >> Deep Blue.

Motivations

Applications

- ▶ jeux vidéos, jeux de plateau
- ▶ contrôle de robots
- ▶ contrôle de smart-grid
- ▶ contrôle alimentation électrique serveurs
- ▶ gestion de flotte de véhicules
- ▶ ...

L'apprentissage par renforcement est à l'intersection de nombreux domaines :

- ▶ psychologie (analyse scientifique du comportement)
- ▶ informatique
- ▶ mathématiques appliquées (probabilités, statistiques, optimisation)
- ▶ économie
- ▶ automatique
- ▶ neurosciences
- ▶ apprentissage automatique numérique
- ▶ contrôle optimal

Très bref historique

- ▶ depuis fin XIX^e siècle : étude de l'adaptation du comportement animal (Thorndike, Pavlov, Skinner, Tolmann, Rescorla-Wagner, Staddon, ...)
- ▶ vers 1955 : naissance de l'IA ; cybernétique ; invention du neurone formel.
- ▶ 1984 : R.S. Sutton défend sa thèse de doctorat où il formalise l'apprentissage du comportement animal avec des modèles algorithmiques. Il y introduit les notions essentielles de l'AR.
- ▶ 1986 : re-découverte d'une méthode permettant d'entraîner un réseau de neurones.
- ▶ vers 1990 : combinaison réseau de neurones et AR ; diverses applications dont Backgammon.
- ▶ vers 2010 : apprentissage profond.
- ▶ 2016 : victoire d'AlphaGo contre Lee Sedol.
- ▶ 2017 : Alpha Zero apprend à jouer tout seul au go.

Plan

- ▶ Outilage (rappels ou brève introduction) :
 - ▶ régression,
 - ▶ réseaux de neurones
 - ▶ descente de gradient
- ▶ Les problèmes de décision de Markov
- ▶ Planification
- ▶ Apprentissage par renforcement
- ▶ Conclusion et enjeux du domaine



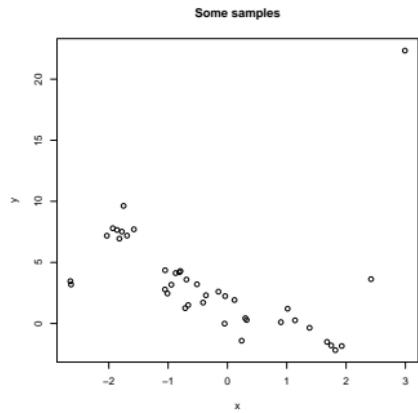
Le problème de régression

- ▶ On considère un espace de données $\mathcal{X} = \mathbb{R}^P$.
- ▶ Chaque donnée $x \in \mathcal{X}$ est associée à une étiquette $y(x) \in \mathbb{R}$.
- ▶ On dispose d'un ensemble de N paires $(x, y)_i$ (exemples).
- ▶ Question : trouver un moyen de prédire $y(x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$

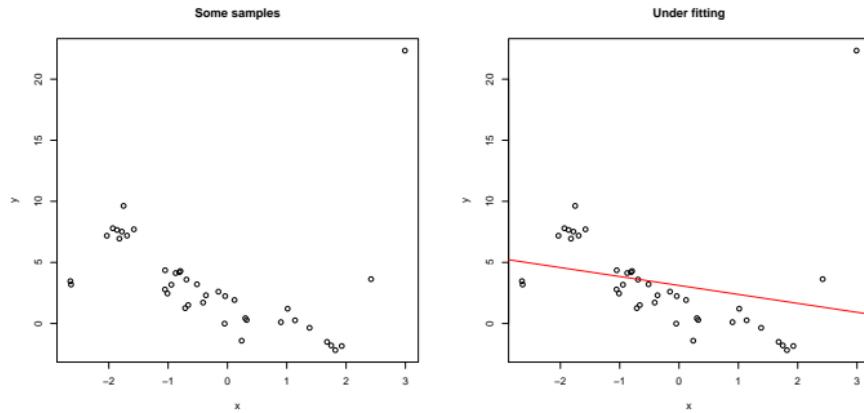
Le problème de régression

- ▶ On considère un espace de données $\mathcal{X} = \mathbb{R}^P$.
 - ▶ Chaque donnée $x \in \mathcal{X}$ est associée à une étiquette $y(x) \in \mathbb{R}$.
 - ▶ On dispose d'un ensemble de N paires (x, y) ; (exemples).
 - ▶ Question : trouver un moyen de prédire $y(x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$
-
- ▶ On suppose que $y = f + \text{bruit}$.
 - ▶ On cherche un modèle permettant d'estimer ce $f(x)$.
 - ▶ Beaucoup de méthodes ont été inventées et continuent à l'être.
 - ▶ Modèle paramétré :
 - ▶ nombre de paramètres fixés (*a priori* ou non);
 - ▶ paramètres de différentes natures : scalaire, vecteur, matrice, fonction.

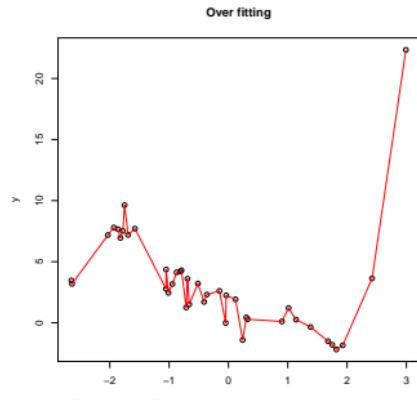
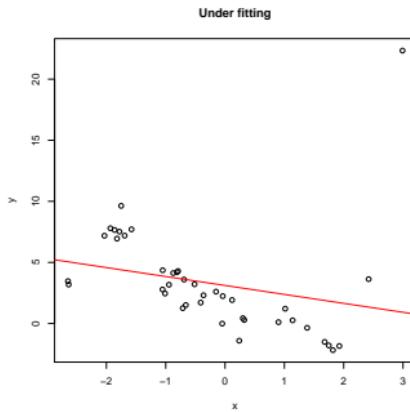
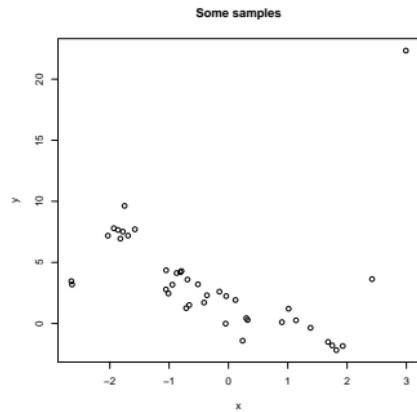
Le problème de régression



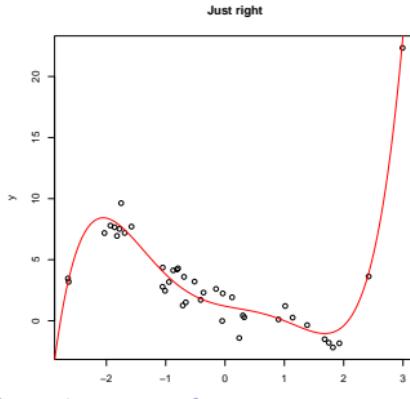
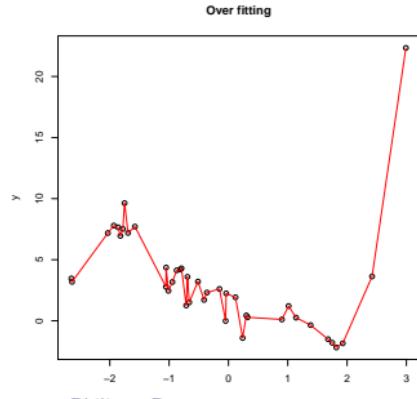
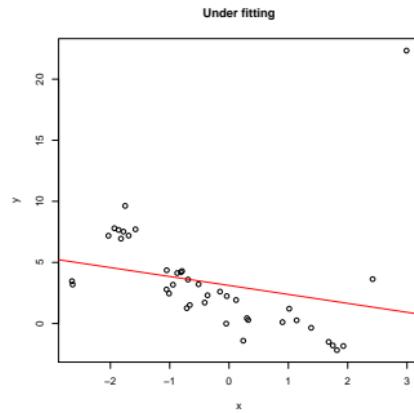
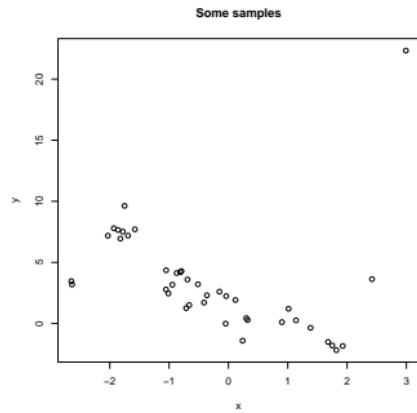
Le problème de régression



Le problème de régression



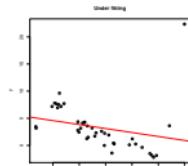
Le problème de régression



Le problème de régression

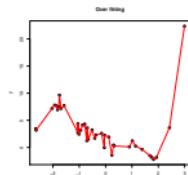
Sous-ajustement/apprentissage (*under-fitting*) : modèle trop simple pour y .

Le modèle n'a pas assez de paramètres pour s'ajuster à la complexité des données.

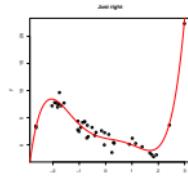


Sur-ajustement/apprentissage (*over-fitting*) : modèle trop complexe pour y .

Le modèle a trop de paramètres pour la complexité du jeu de données.



Le bon modèle retire juste le bruit.



Le problème de régression

Parmi les techniques existantes, quelques mots sur les réseaux de neurones formels.

Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$

Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$

Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ $x \mapsto f(x) = \varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
où $x_{j\neq 0}$ est le j^{th} élément du vecteur x et $x_0 = 1$.

Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ $x \mapsto f(x) = \varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
où $x_{j \neq 0}$ est le j^{th} élément du vecteur x et $x_0 = 1$.
- ▶ les $x_{j \neq 0}$: entrées du neurone

Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

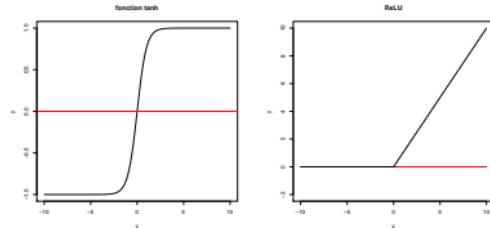
- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ $x \mapsto f(x) = \varphi\left(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j\right)$
où $x_{j \neq 0}$ est le j^{th} élément du vecteur x et $x_0 = 1$.
- ▶ les $x_{j \neq 0}$: entrées du neurone
- ▶ θ_j sont des poids (synaptiques) = paramètres du neurone

Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ $x \mapsto f(x) = \varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
où $x_{j \neq 0}$ est le j^{th} élément du vecteur x et $x_0 = 1$.
- ▶ les $x_{j \neq 0}$: entrées du neurone
- ▶ θ_j sont des poids (synaptiques) = paramètres du neurone
- ▶ φ est la fonction d'activation :

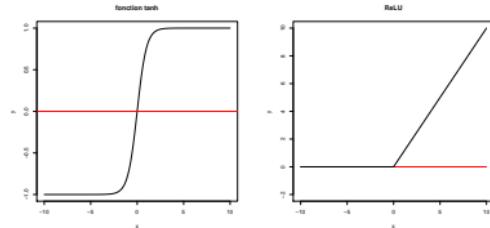


Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ $x \mapsto f(x) = \varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
où $x_{j \neq 0}$ est le j^{th} élément du vecteur x et $x_0 = 1$.
- ▶ les $x_{j \neq 0}$: entrées du neurone
- ▶ θ_j sont des poids (synaptiques) = paramètres du neurone
- ▶ φ est la fonction d'activation :
 - ▶ linéaire

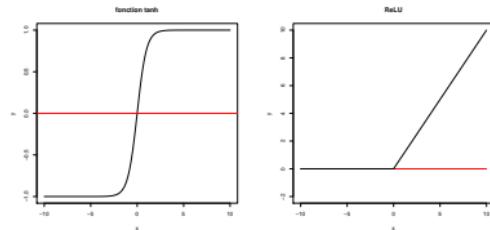


Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ $x \mapsto f(x) = \varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
où $x_{j \neq 0}$ est le j^{th} élément du vecteur x et $x_0 = 1$.
- ▶ les $x_{j \neq 0}$: entrées du neurone
- ▶ θ_j sont des poids (synaptiques) = paramètres du neurone
- ▶ φ est la fonction d'activation :
 - ▶ linéaire
 - ▶ logistique ou tanh

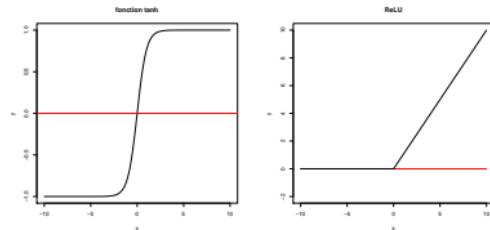


Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ $x \mapsto f(x) = \varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
où $x_{j \neq 0}$ est le j^{th} élément du vecteur x et $x_0 = 1$.
- ▶ les $x_{j \neq 0}$: entrées du neurone
- ▶ θ_j sont des poids (synaptiques) = paramètres du neurone
- ▶ φ est la fonction d'activation :
 - ▶ linéaire
 - ▶ logistique ou tanh
 - ▶ fonction à base radiale (RBF)

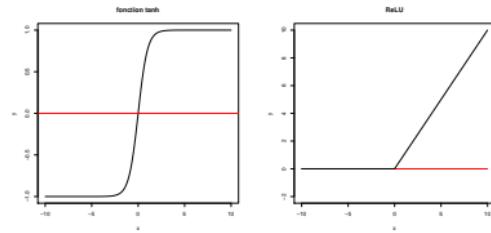


Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ $x \mapsto f(x) = \varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
où $x_{j \neq 0}$ est le j^{th} élément du vecteur x et $x_0 = 1$.
- ▶ les $x_{j \neq 0}$: entrées du neurone
- ▶ θ_j sont des poids (synaptiques) = paramètres du neurone
- ▶ φ est la fonction d'activation :
 - ▶ linéaire
 - ▶ logistique ou tanh
 - ▶ fonction à base radiale (RBF)
 - ▶ ReLU = $\max(0, x)$

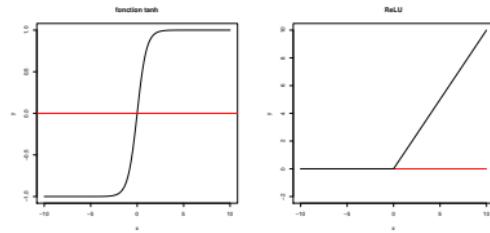


Réseaux de neurones artificiels / formels

Le neurone

Unité élémentaire : le neurone formel = le perceptron :

- ▶ une donnée (= un vecteur réel) $\in \mathbb{R}^P$
- ▶ un neurone est une fonction réelle : $f : \mathbb{R}^{P+1} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ $x \mapsto f(x) = \varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
où $x_{j \neq 0}$ est le j^{th} élément du vecteur x et $x_0 = 1$.
- ▶ les $x_{j \neq 0}$: entrées du neurone
- ▶ θ_j sont des poids (synaptiques) = paramètres du neurone
- ▶ φ est la fonction d'activation :
 - ▶ linéaire
 - ▶ logistique ou tanh
 - ▶ fonction à base radiale (RBF)
 - ▶ ReLU = $\max(0, x)$
 - ▶ ...



Réseaux de neurones artificiels / formels

Entraîner un neurone

- ▶ un neurone est entraîné avec un ensemble d'exemples : (donnée, valeur)

Réseaux de neurones artificiels / formels

Entraîner un neurone

- ▶ un neurone est entraîné avec un ensemble d'exemples : (donnée, valeur)
- ▶ quand la donnée est placée en entrée du neurone, on veut que sa sortie soit cette valeur.

Réseaux de neurones artificiels / formels

Entraîner un neurone

- ▶ un neurone est entraîné avec un ensemble d'exemples : (donnée, valeur)
- ▶ quand la donnée est placée en entrée du neurone, on veut que sa sortie soit cette valeur.
- ▶ (vu plus haut) on suppose que : valeur = $f(\text{donnée}) + \text{bruit}$.

Réseaux de neurones artificiels / formels

Entraîner un neurone

- ▶ un neurone est entraîné avec un ensemble d'exemples : (donnée, valeur)
- ▶ quand la donnée est placée en entrée du neurone, on veut que sa sortie soit cette valeur.
- ▶ (vu plus haut) on suppose que : valeur = $f(\text{donnée}) + \text{bruit}$.
- ▶ objectif : le perceptron représente aussi précisément que possible f .

Réseaux de neurones artificiels / formels

Entraîner un neurone

- ▶ un neurone est entraîné avec un ensemble d'exemples : (donnée, valeur)
- ▶ quand la donnée est placée en entrée du neurone, on veut que sa sortie soit cette valeur.
- ▶ (vu plus haut) on suppose que : valeur = $f(\text{donnée}) + \text{bruit}$.
- ▶ objectif : le perceptron représente aussi précisément que possible f .
- ▶ la sortie du perceptron = $\varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$

Réseaux de neurones artificiels / formels

Entraîner un neurone

- ▶ un neurone est entraîné avec un ensemble d'exemples : (donnée, valeur)
- ▶ quand la donnée est placée en entrée du neurone, on veut que sa sortie soit cette valeur.
- ▶ (vu plus haut) on suppose que : valeur = $f(\text{donnée}) + \text{bruit}$.
- ▶ objectif : le perceptron représente aussi précisément que possible f .
- ▶ la sortie du perceptron = $\varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
- ▶ ↵ ajuster les θ_j pour que la sortie du perceptron devienne = $f(\text{entrée})$.

Réseaux de neurones artificiels / formels

Entraîner un neurone

- ▶ un neurone est entraîné avec un ensemble d'exemples : (donnée, valeur)
- ▶ quand la donnée est placée en entrée du neurone, on veut que sa sortie soit cette valeur.
- ▶ (vu plus haut) on suppose que : valeur = $f(\text{donnée}) + \text{bruit}$.
- ▶ objectif : le perceptron représente aussi précisément que possible f .
- ▶ la sortie du perceptron = $\varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
- ▶ ↵ ajuster les θ_j pour que la sortie du perceptron devienne = $f(\text{entrée})$.
- ▶ ajustement par les moindres-carrés : trouver $\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_i (\varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_{i,j}) - y_i)^2$

Réseaux de neurones artificiels / formels

Entraîner un neurone

- ▶ un neurone est entraîné avec un ensemble d'exemples : (donnée, valeur)
- ▶ quand la donnée est placée en entrée du neurone, on veut que sa sortie soit cette valeur.
- ▶ (vu plus haut) on suppose que : valeur = $f(\text{donnée}) + \text{bruit}$.
- ▶ objectif : le perceptron représente aussi précisément que possible f .
- ▶ la sortie du perceptron = $\varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)$
- ▶ ↵ ajuster les θ_j pour que la sortie du perceptron devienne = $f(\text{entrée})$.
- ▶ ajustement par les moindres-carrés : trouver $\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_i (\varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_{i,j}) - y_i)^2$
- ▶ il existe différents algorithmes d'optimisation pour cela. En général, on effectue une descente de gradient.

Réseaux de neurones artificiels / formels

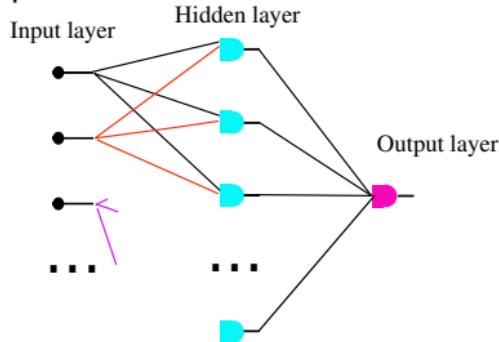
Du neurone au réseau de neurones

- ▶ un perceptron peut seulement représenter φ
- ▶ pour représenter d'autres fonctions, on utilise un ensemble de neurones
- ▶ fondement : théorème : toute fonction réelle, bornée, continue et définie sur un compact peut être approximée avec une précision arbitraire par une combinaison finie de fonctions de base.
Exemples de fonctions de base : fonction logistique, tanh, RBF.

Réseaux de neurones artificiels / formels

Du neurone au réseau de neurones

- prendre N neurones et sommer leurs sorties pondérées.



- la sortie du réseau de neurones est $\varphi_o(\sum_{k=0}^{K=N} \theta_k \varphi_k(\sum_{j=0}^{J=P} \theta_j x_j))$
- à nouveau, on cherche les θ_j^* et θ_k^* minimisant les moindres-carrés.
Rétro-propagation du gradient de l'erreur.
- « Perceptrons multi-couches »

Réseaux de neurones artificiels / formels

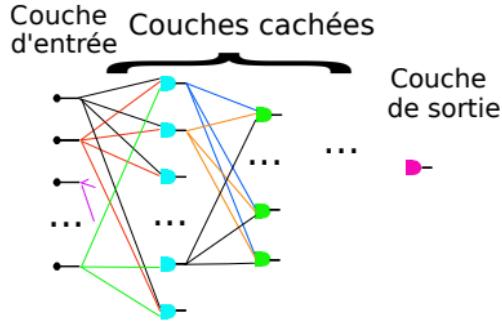
Du neurone au réseau de neurones

- avoir plus d'une couche cachée ne permet pas de représenter une plus grande variété de fonctions.

Réseaux de neurones artificiels / formels

Du neurone au réseau de neurones

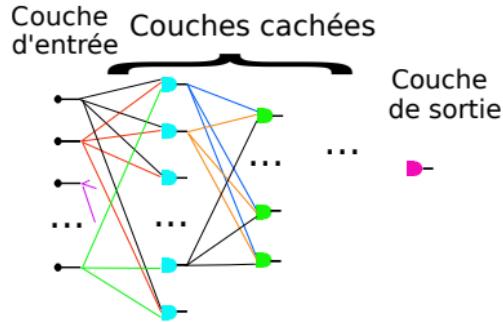
- ▶ avoir plus d'une couche cachée ne permet pas de représenter une plus grande variété de fonctions.
- ▶ mais c'est très utile d'un pdv pratique : au lieu d'utiliser une couche cachée très large, on utilise plusieurs couches cachées plus petites.



Réseaux de neurones artificiels / formels

Du neurone au réseau de neurones

- ▶ avoir plus d'une couche cachée ne permet pas de représenter une plus grande variété de fonctions.
- ▶ mais c'est très utile d'un pdv pratique : au lieu d'utiliser une couche cachée très large, on utilise plusieurs couches cachées plus petites.

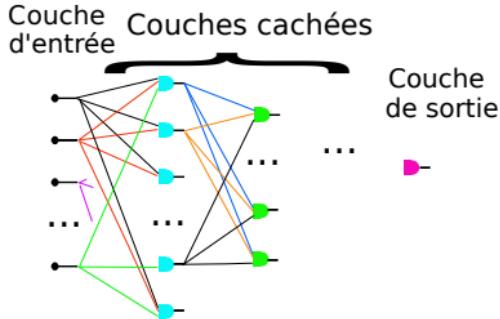


- ▶ Rétro-propagation du gradient de l'erreur.

Réseaux de neurones artificiels / formels

Du neurone au réseau de neurones

- ▶ avoir plus d'une couche cachée ne permet pas de représenter une plus grande variété de fonctions.
- ▶ mais c'est très utile d'un pdv pratique : au lieu d'utiliser une couche cachée très large, on utilise plusieurs couches cachées plus petites.

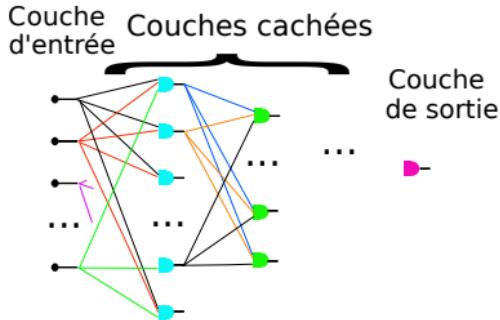


- ▶ Rétro-propagation du gradient de l'erreur.
- ▶ Plusieurs applications très pratiques : reconnaissance des codes postaux, montant des chèques, ...

Réseaux de neurones artificiels / formels

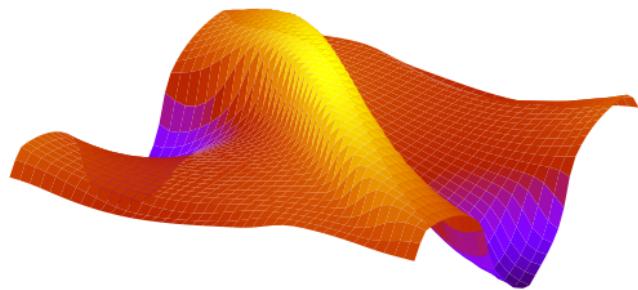
Du neurone au réseau de neurones

- ▶ avoir plus d'une couche cachée ne permet pas de représenter une plus grande variété de fonctions.
- ▶ mais c'est très utile d'un pdv pratique : au lieu d'utiliser une couche cachée très large, on utilise plusieurs couches cachées plus petites.



- ▶ Rétro-propagation du gradient de l'erreur.
- ▶ Plusieurs applications très pratiques : reconnaissance des codes postaux, montant des chèques, ...
- ▶ Beaucoup de problèmes pratiques si le nombre de couches cachées supérieur à 10. Résolution de ces problèmes \leadsto révolution de l'apprentissage profond (AP).

Optimisation de fonctions



Optimisation de fonctions

Supposons que vous vouliez trouver le minimum d'une fonction à une variable.

- ▶ Vous ne connaissez pas la fonction.

Optimisation de fonctions

Supposons que vous vouliez trouver le minimum d'une fonction à une variable.

- ▶ Vous ne connaissez pas la fonction.
- ▶ La fonction est continue.

Optimisation de fonctions

Supposons que vous vouliez trouver le minimum d'une fonction à une variable.

- ▶ Vous ne connaissez pas la fonction.
- ▶ La fonction est continue.
- ▶ Vous pouvez proposer une valeur de la variable et obtenir la valeur de la fonction en ce point.

Optimisation de fonctions

Supposons que vous vouliez trouver le minimum d'une fonction à une variable.

- ▶ Vous ne connaissez pas la fonction.
- ▶ La fonction est continue.
- ▶ Vous pouvez proposer une valeur de la variable et obtenir la valeur de la fonction en ce point.
- ▶ Comment faites-vous ?

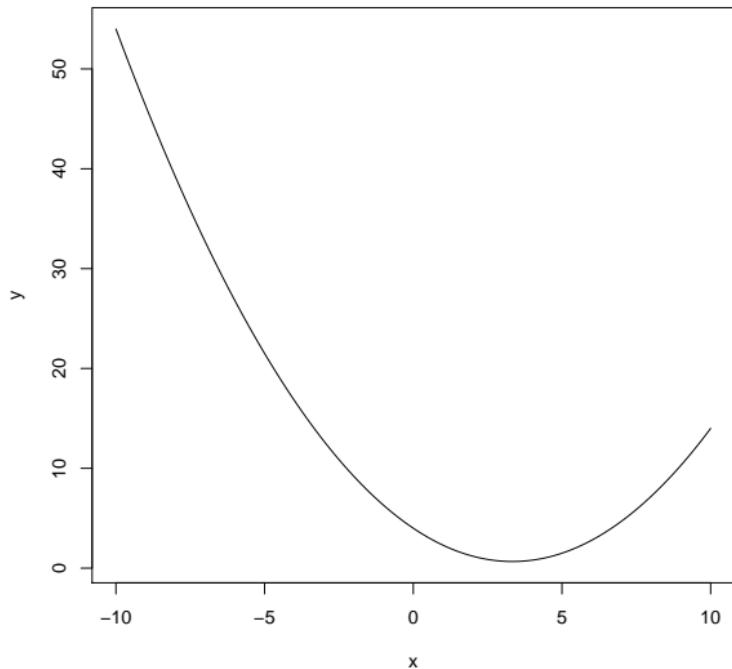
Optimisation de fonctions

Supposons que vous vouliez trouver le minimum d'une fonction à une variable.

- ▶ Vous ne connaissez pas la fonction.
- ▶ La fonction est continue.
- ▶ Vous pouvez proposer une valeur de la variable et obtenir la valeur de la fonction en ce point.
- ▶ Comment faites-vous ?
- ▶ Il existe des tas de méthodes.

Optimisation de fonctions

fonction à minimiser



Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique

- ▶ Méthode générale de minimisation d'une fonction ayant un nombre de variables quelconque.

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique

- ▶ Méthode générale de minimisation d'une fonction ayant un nombre de variables quelconque.
- ▶ Trouve un minimum *local*.

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique

- ▶ Méthode générale de minimisation d'une fonction ayant un nombre de variables quelconque.
- ▶ Trouve un minimum *local*.
- ▶ Équation fondamentale de l'algorithme :

$$x_{t+1} \leftarrow x_t - \eta \nabla f(x_t)$$

soit pour une fonction ayant une seule variable :

$$x_{t+1} \leftarrow x_t - \eta f'(x_t)$$

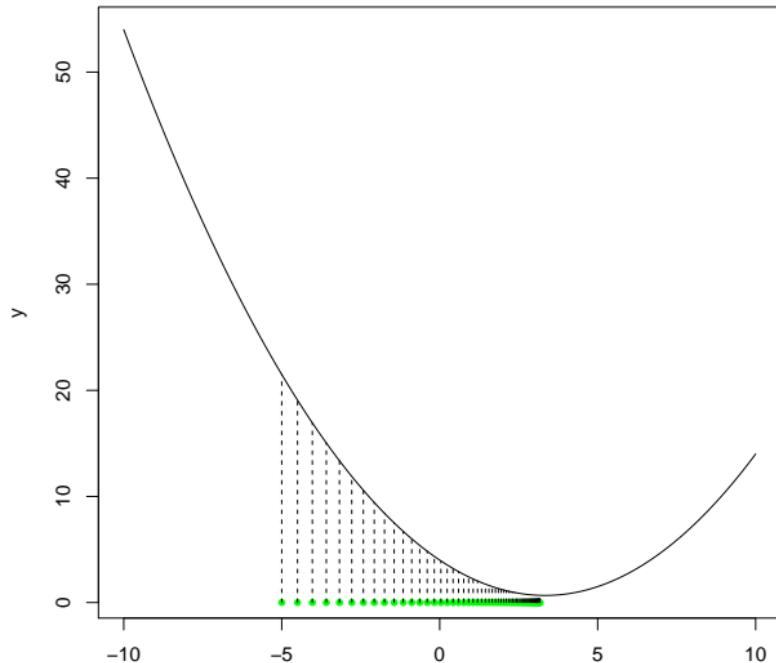
avec

$$f'(x) = \frac{d}{d x} f$$

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique

Itération finale



Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique

- ▶ Réaliser une DGS sur la fonction
 $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$

- ▶ définir une fonction qui calcule la valeur de f en x
- ▶ calculer la dérivée de $f(x)$
- ▶ définir une fonction qui calcule la dérivée de f en x
- ▶ prendre $\eta = 0.1$
- ▶ réaliser la DGS

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$

- ▶ définir une fonction qui calcule la valeur de f en x

```
f <- function (x) 0.2 * x^5 - 1.1 * x^3 + .7 * x^2 - x + 1.2
```

- ▶ calculer la dérivée de $f(x)$
- ▶ définir une fonction qui calcule la dérivée de f en x
- ▶ prendre $\eta = 0.1$
- ▶ réaliser la DGS

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$

- ▶ définir une fonction qui calcule la valeur de f en x

```
f <- function (x) 0.2 * x^5 - 1.1 * x^3 + .7 * x^2 - x + 1.2
```

- ▶ calculer la dérivée de $f(x)$

$$\frac{d f}{d x} = x^4 - 3.3x^2 + 1.4x - 1$$

- ▶ définir une fonction qui calcule la dérivée de f en x

- ▶ prendre $\eta = 0.1$

- ▶ réaliser la DGS

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$

- ▶ définir une fonction qui calcule la valeur de f en x

```
f <- function (x) 0.2 * x^5 - 1.1 * x^3 + .7 * x^2 - x + 1.2
```

- ▶ calculer la dérivée de $f(x)$

$$\frac{df}{dx} = x^4 - 3.3x^2 + 1.4x - 1$$

- ▶ définir une fonction qui calcule la dérivée de f en x

```
df <- function (x) x^4 - 3.3 * x^2 + 1.4 * x - 1
```

- ▶ prendre $\eta = 0.1$

- ▶ réaliser la DGS

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$

- ▶ définir une fonction qui calcule la valeur de f en x

```
f <- function (x) 0.2 * x^5 - 1.1 * x^3 + .7 * x^2 - x + 1.2
```

- ▶ calculer la dérivée de $f(x)$

$$\frac{df}{dx} = x^4 - 3.3x^2 + 1.4x - 1$$

- ▶ définir une fonction qui calcule la dérivée de f en x

```
df <- function (x) x^4 - 3.3 * x^2 + 1.4 * x - 1
```

- ▶ prendre $\eta = 0.1$

```
eta <- .1
```

- ▶ réaliser la DGS

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$

- ▶ définir une fonction qui calcule la valeur de f en x

```
f <- function (x) 0.2 * x^5 - 1.1 * x^3 + .7 * x^2 - x + 1.2
```

- ▶ calculer la dérivée de $f(x)$

$$\frac{df}{dx} = x^4 - 3.3x^2 + 1.4x - 1$$

- ▶ définir une fonction qui calcule la dérivée de f en x

```
df <- function (x) x^4 - 3.3 * x^2 + 1.4 * x - 1
```

- ▶ prendre $\eta = 0.1$

```
eta <- .1
```

- ▶ réaliser la DGS

```
repeat {
  xt <- xt - eta * df (xt)
  if (abs (df (xt)) < 0.1)
    break
}
```

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$

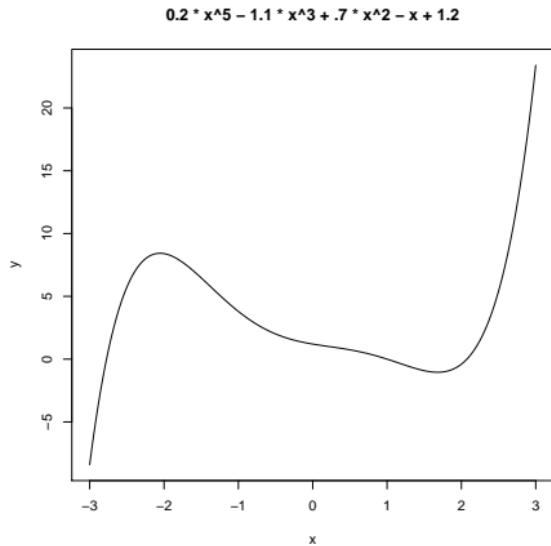
Tout mis bout à bout :

```
f <- function (x) 0.2 * x^5 - 1.1 * x^3 + .7 * x^2 - x + 1.2
df <- function (x) x^4 - 3.3 * x^2 + 1.4 * x - 1
xi <- runif (1, min = -2, max = 3)

eta <- .1
repeat {
  xi <- xi - eta * df (xi)
  if (abs (df (xi)) < 0.00001)
    break
}
```

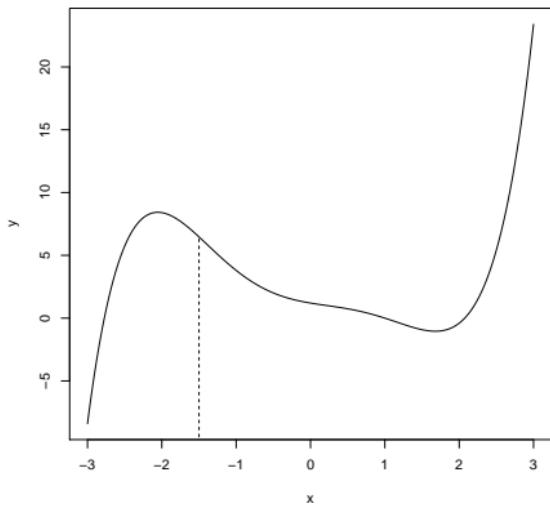
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



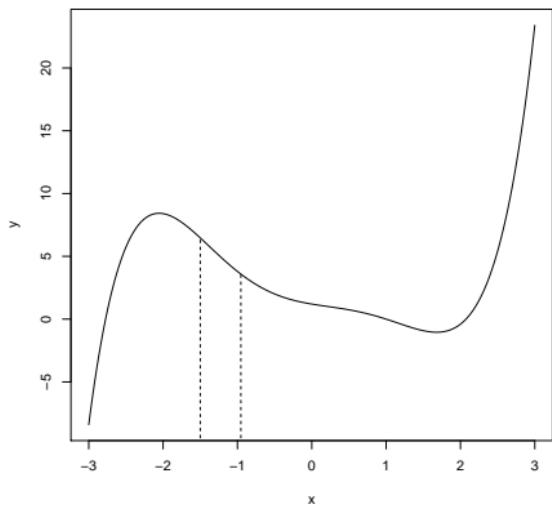
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



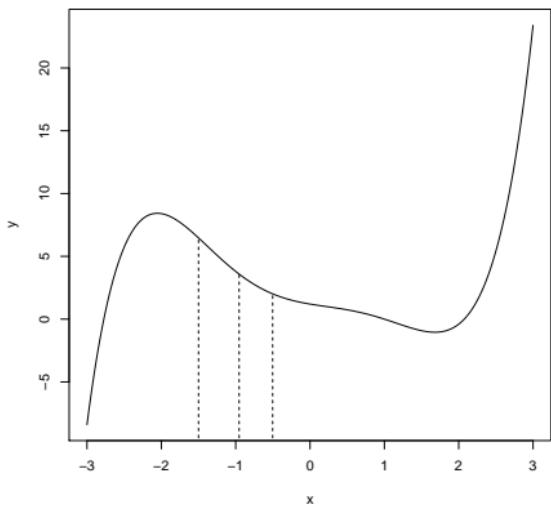
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



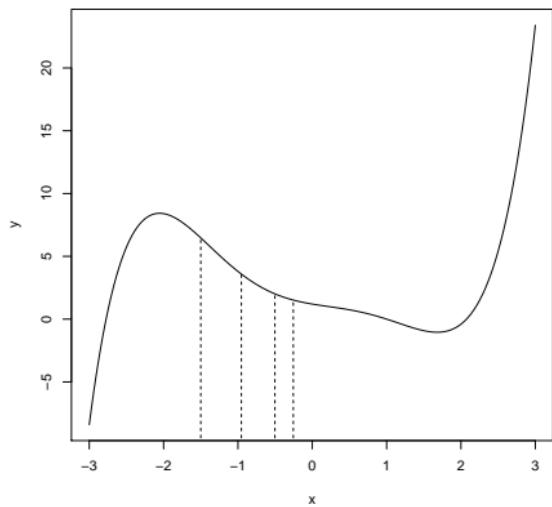
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



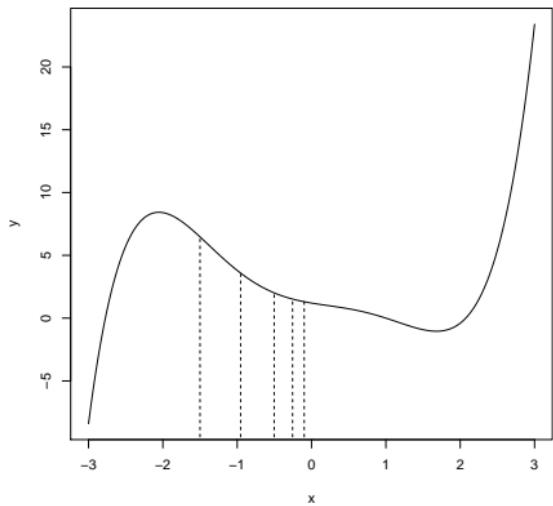
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



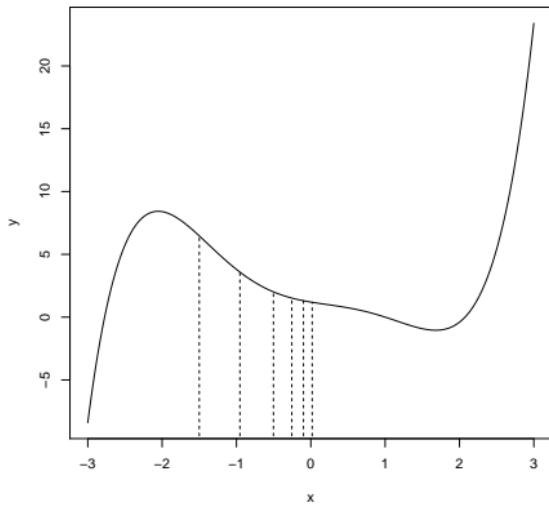
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



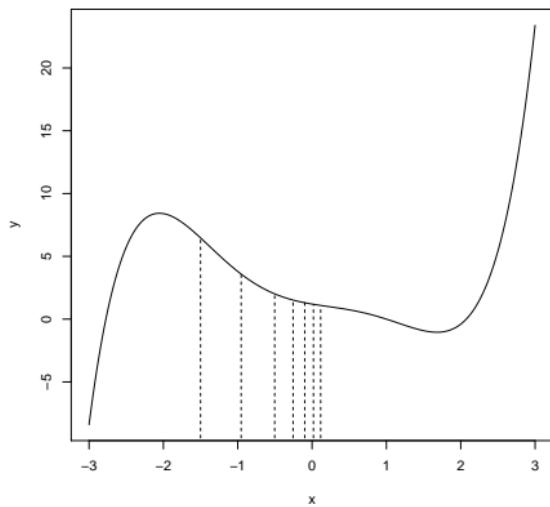
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



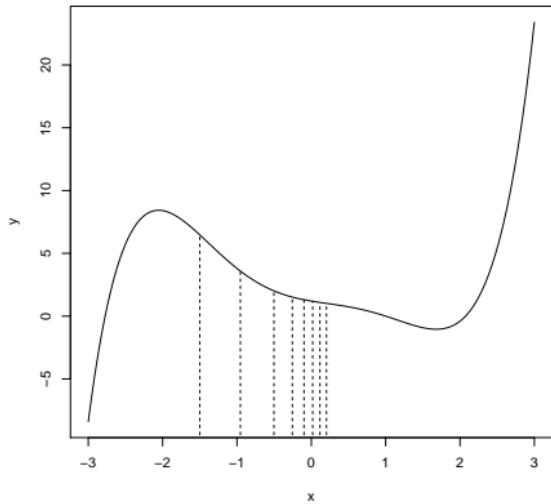
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



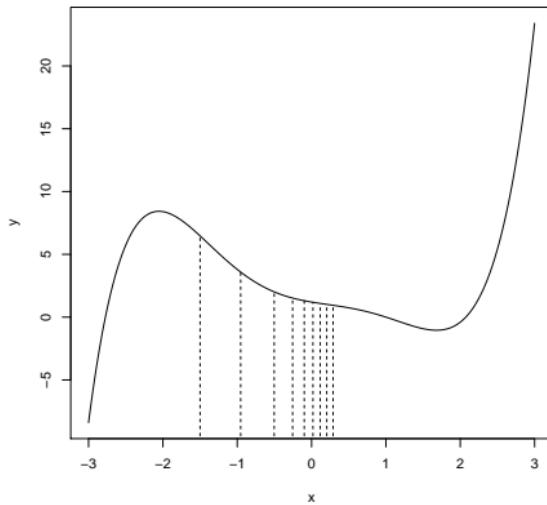
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



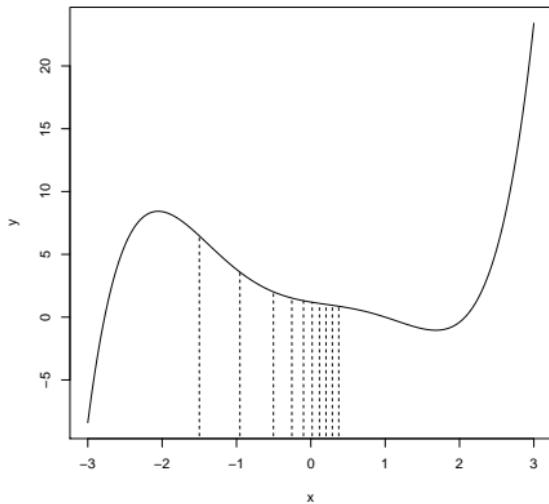
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



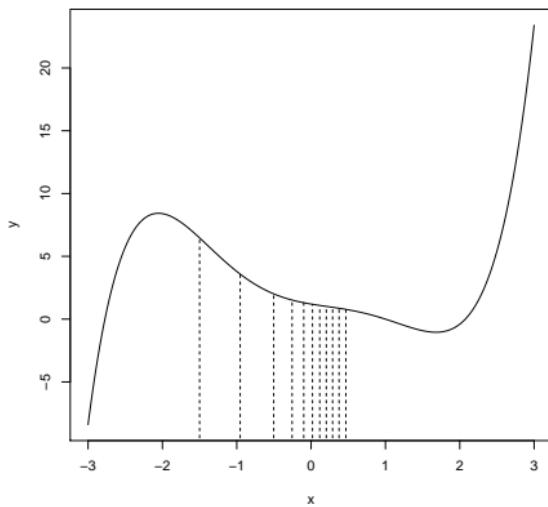
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



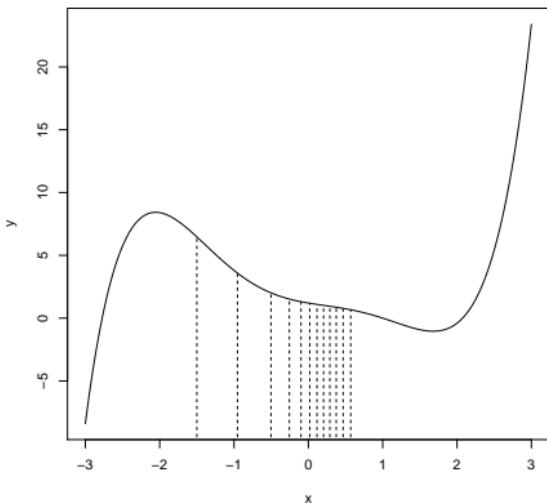
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



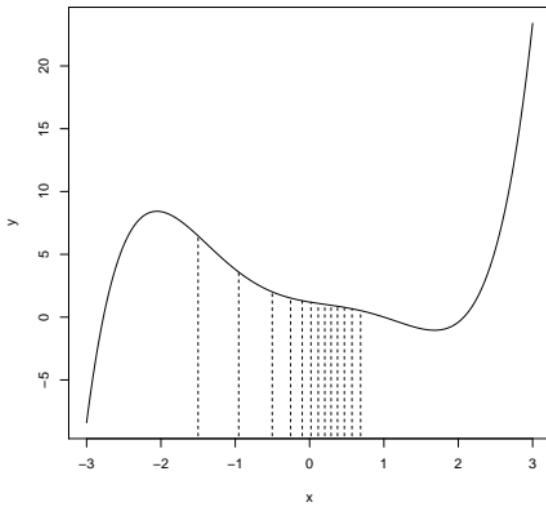
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



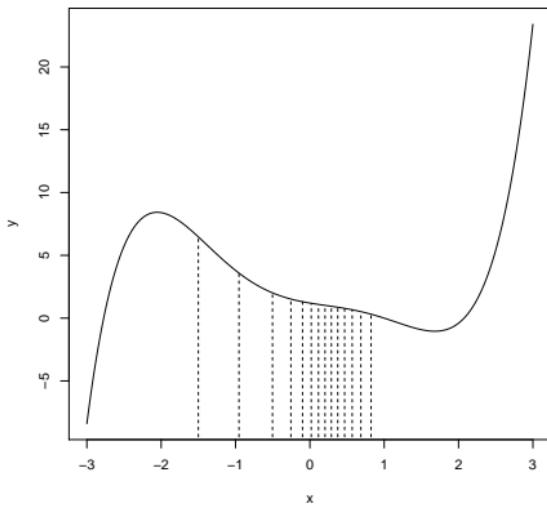
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



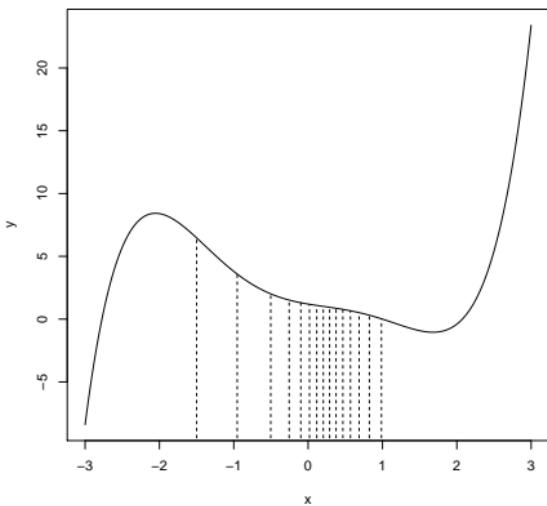
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



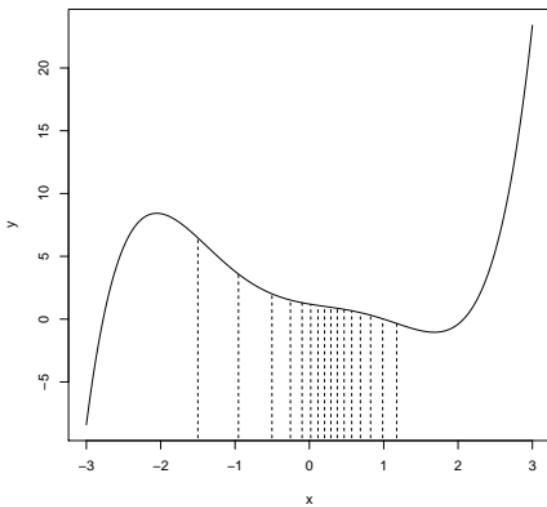
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



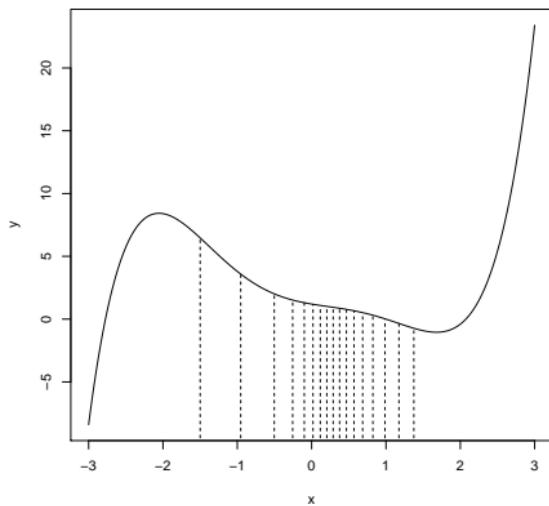
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



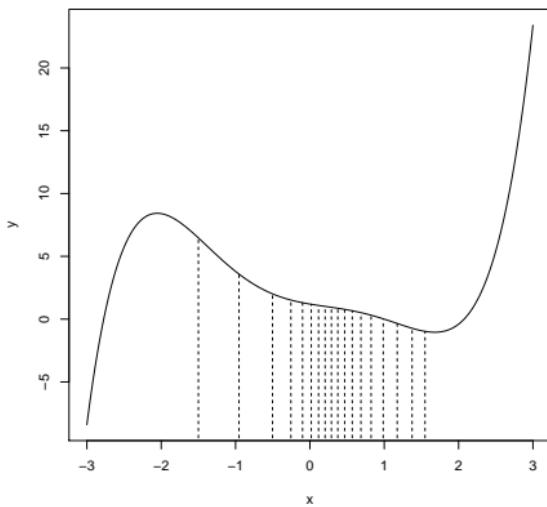
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



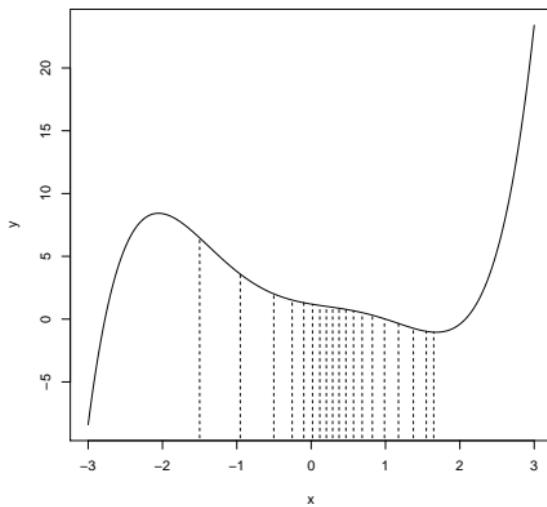
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



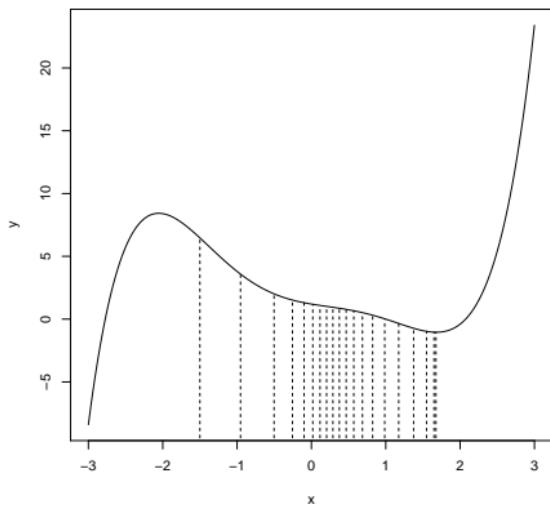
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



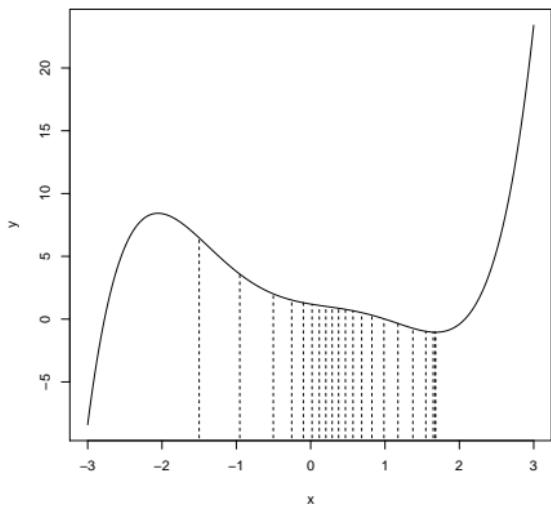
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



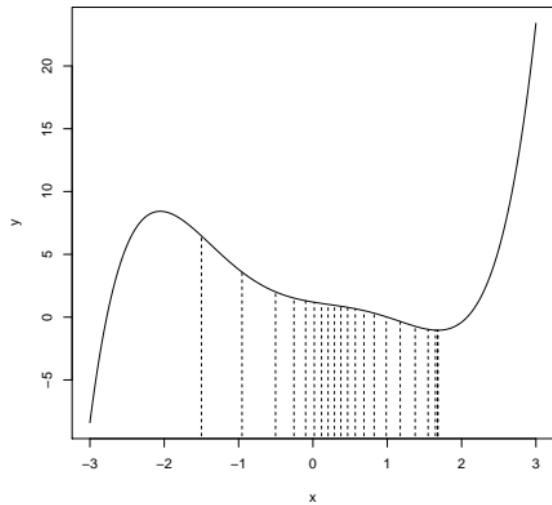
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



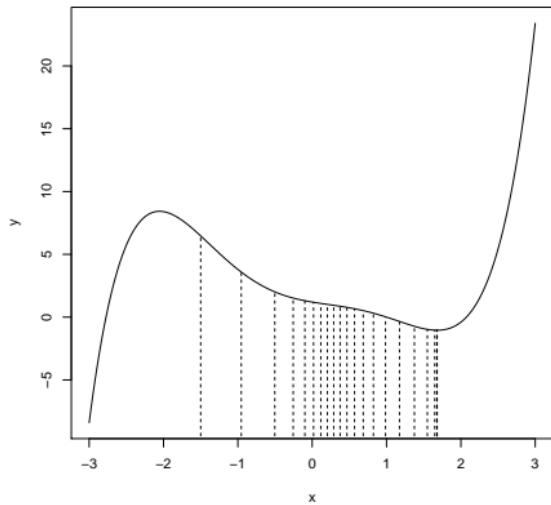
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



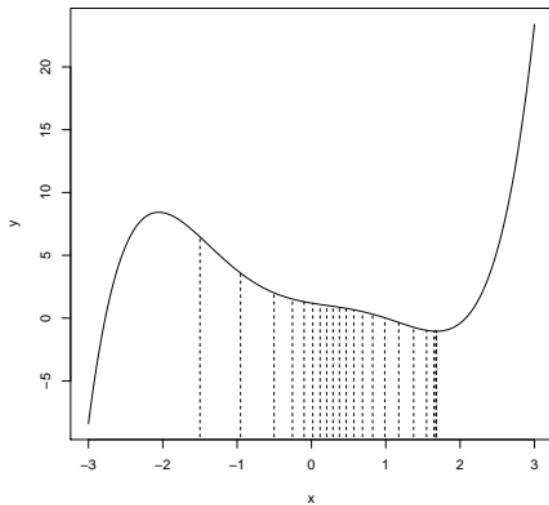
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



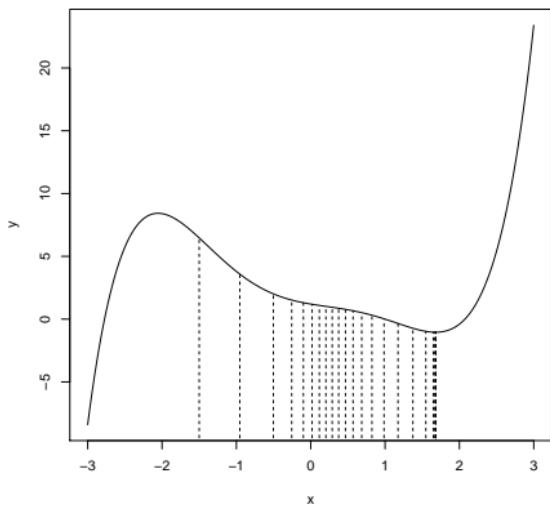
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



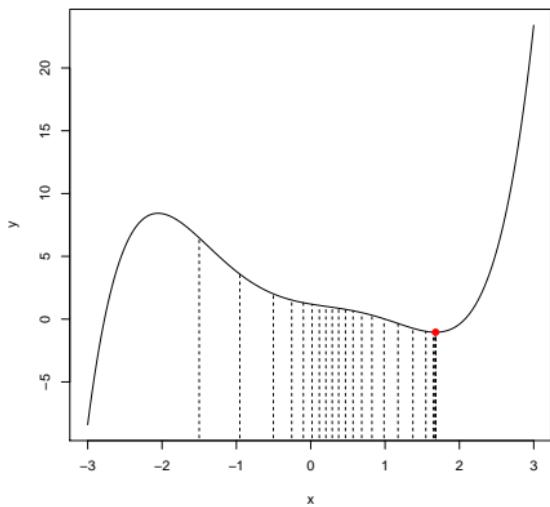
Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique : minimiser $f(x) = 0.2x^5 - 1.1x^3 + .7x^2 - x + 1.2$



Descente de gradient stochastique

Exercice :

- ▶ Minimiser :

$$g(x) = (x + 4)(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - .5)(x + 1.5)/20$$

soit

$$g(x) =$$

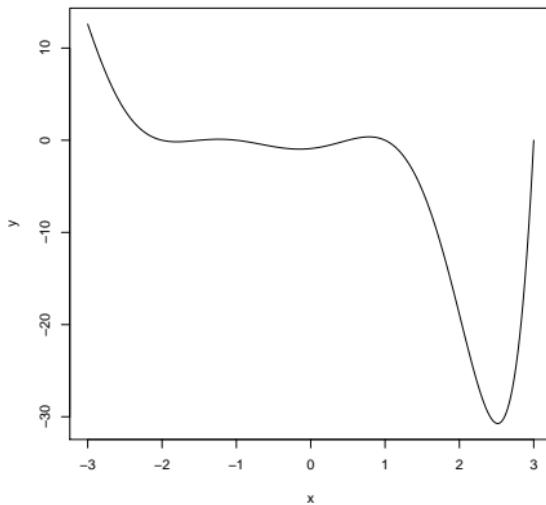
$$\frac{x^7}{20} + \frac{x^6}{5} - 0.4375x^5 - 2.0125x^4 - 0.4375x^3 + 2.7125x^2 + 0.825x - 0.9$$

- ▶ en prenant $x \in [-3, 3]$

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique

$$g(x) = (x + 4)(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - .5)(x + 1.5) / 20$$



Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique améliorée

- ▶ l'algorithme DGS vu précédemment trouve le minimum local le plus proche de son point de départ.

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique améliorée

- ▶ l'algorithme DGS vu précédemment trouve le minimum local le plus proche de son point de départ.
- ▶ Nombreux trucs pour améliorer ce comportement.

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique améliorée

- ▶ l'algorithme DGS vu précédemment trouve le minimum local le plus proche de son point de départ.
- ▶ Nombreux trucs pour améliorer ce comportement.
- ▶ DGS à départs multiples :
on exécute plusieurs fois DGS en partant de x_0 différents à chaque fois et on conserve le meilleur minimum trouvé.
Exercice : programmer ce DGS à départ multiple. Appliquez-le à la fonction g . Trouvez-vous le bon minimum ?

Optimisation de fonctions

Descente de gradient stochastique améliorée

- ▶ l'algorithme DGS vu précédemment trouve le minimum local le plus proche de son point de départ.
- ▶ Nombreux trucs pour améliorer ce comportement.
- ▶ DGS à départs multiples :
on exécute plusieurs fois DGS en partant de x_0 différents à chaque fois et on conserve le meilleur minimum trouvé.
Exercice : programmer ce DGS à départ multiple. Appliquez-le à la fonction g . Trouvez-vous le bon minimum ?
- ▶ C'est un problème qui s'amplifie quand le nombre de variables augmente.

Descente de gradient stochastique

Pour réseau de neurones

- ▶ 1 perceptron : $\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_i (\varphi(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_{i,j}) - y_i)^2$
- ▶ 1 réseau à une couche cachée :

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_i (\varphi_o(\sum_{k=0}^{k=N} \theta_k \varphi_k(\sum_{j=0}^{j=P} \theta_j x_j)) - y_i)^2$$
- ▶ 1 MLP : ...
- ▶ cas simple : le perceptron avec $\varphi = Id$.
 Exercice : calculer le gradient de la fonction et appliquer la DGS.
- ▶ MLP : beaucoup plus compliqué : calcul du gradient de l'erreur pour chaque poids θ
 ↵ algorithme de rétro-propagation du gradient de l'erreur [Werbos, 1974;
 Rumelhart et al. 1986 ; Le Cun, 1986]

Nombreux problèmes pratiques résolus dans les années 2000
 + Très nombreuses idées. } ↵ apprentissage profond.

Les problèmes de décision de Markov

Processus de décision de Markov

Définition

Un processus de décision de Markov décrit la dynamique d'un système.

- ▶ ensemble d'instants : $t \in \mathcal{T}$
- ▶ ensemble d'états : $x \in \mathcal{X}$
- ▶ ensemble d'actions : $a \in \mathcal{A}$
- ▶ fonction de transition : $\mathcal{P}(x, a, x') = Pr(x'|x, a)$
- ▶ fonction de retour : $\mathcal{R}(x, a, x') = \mathbb{E}(r(x'|x, a))$

Markov = l'état suivant ne dépend que de l'état et de l'action courants.

Problèmes de décision de Markov

Définition

Un problème de décision de Markov est un problème de contrôle d'un système dynamique.

- ▶ ensemble d'instants : $t \in \mathcal{T}$
- ▶ ensemble d'états : $x \in \mathcal{X}$
- ▶ ensemble d'actions : $a \in \mathcal{A}$
- ▶ fonction de transition : $\mathcal{P}(x, a, x') = Pr(x'|x, a)$
- ▶ fonction de retour : $\mathcal{R}(x, a, x') = \mathbb{E}(r(x'|x, a))$
- ▶ fonction objectif : ζ

- ▶ **Objectif** : trouver une politique π^* qui optimise ζ .
- ▶ Une politique π spécifie l'action à effectuer dans chacun des états.
 - ▶ déterministe : $\pi(x) = a$
 - ▶ stochastique : $\pi(x, a) \rightarrow Pr[a_t = a | x_t = x]$

Problème de décision de Markov

Autres notions

- ▶ état initial

Problème de décision de Markov

Autres notions

- ▶ état initial
- ▶ trajectoire : séquence d'états parcourus au fil du temps

Problème de décision de Markov

Autres notions

- ▶ état initial
- ▶ trajectoire : séquence d'états parcourus au fil du temps
- ▶ horizon : fini vs. infini

Problème de décision de Markov

Autres notions

- ▶ état initial
- ▶ trajectoire : séquence d'états parcourus au fil du temps
- ▶ horizon : fini vs. infini
- ▶ ζ les plus courantes :

Problème de décision de Markov

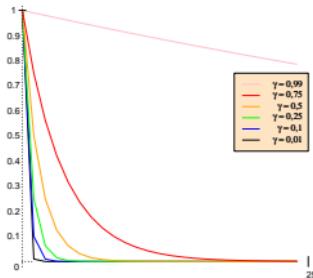
Autres notions

- ▶ état initial
- ▶ trajectoire : séquence d'états parcourus au fil du temps
- ▶ horizon : fini vs. infini
- ▶ ζ les plus courantes :
 - ▶ horizon fini : $\zeta = \sum_t r_t$.

Problème de décision de Markov

Autres notions

- ▶ état initial
- ▶ trajectoire : séquence d'états parcourus au fil du temps
- ▶ horizon : fini vs. infini
- ▶ ζ les plus courantes :
 - ▶ horizon fini : $\zeta = \sum_t r_t$.
 - ▶ horizon fini ou infini : $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.

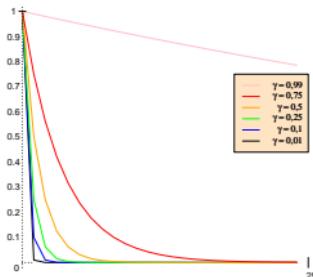


γ^t garantit que $|\sum_t \gamma^t r_t| < \infty$.
 Selon la valeur de γ , les retours futurs sont pris en compte sur un plus ou moins long terme.

Problème de décision de Markov

Autres notions

- ▶ état initial
- ▶ trajectoire : séquence d'états parcourus au fil du temps
- ▶ horizon : fini vs. infini
- ▶ ζ les plus courantes :
 - ▶ horizon fini : $\zeta = \sum_t r_t$.
 - ▶ horizon fini ou infini : $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.



γ^t garantit que $|\sum_t \gamma^t r_t| < \infty$.
 Selon la valeur de γ , les retours futurs sont pris en compte sur un plus ou moins long terme.

- ▶ retour immédiat : r_t vs. retour long terme $\sum_t \dots$

Modélisation d'une situation comme un PDM

Problème du chauffeur de taxi

- ▶ $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$
- ▶ $\mathcal{A} = \{$
 - ▶ $a_1 = \text{marauder}$
 - ▶ $a_2 = \text{stationner à une station}$
 - ▶ $a_3 = \text{stationner et attendre un appel radio}$
- ▶ dans la ville B, il n'y a pas de station de taxi.

Modélisation d'une situation comme un PDM

Problème du chauffeur de taxi

\mathcal{P}	état courant x_t (ville courante)	action a_t	état suivant x_{t+1} ville suivante		
			A	B	C
A		a_1	1/2	1/4	1/4
		a_2	1/16	3/4	3/16
		a_3	1/4	1/8	5/8
B		a_1	1/2	0	1/2
		a_3	1/16	7/8	1/16
C		a_1	1/4	1/4	1/2
		a_2	1/8	3/4	1/8
		a_3	3/4	1/16	3/16

\mathcal{R}	état courant x_t (ville courante)	action a_t	état suivant x_{t+1} ville suivante		
			A	B	C
A		a_1	10	4	8
		a_2	8	2	4
		a_3	4	6	4
B		a_1	14	0	18
		a_3	8	16	8
C		a_1	10	2	8
		a_2	6	4	2
		a_3	4	0	8

Exo : en terme de retour immédiat espéré, quelle est la meilleure action dans A ? (dans B, dans C ?)

Problème de décision de Markov

Énoncé du problème de planification :

- ▶ Donnée : un PDM.
- ▶ Question : en calculer la/une politique optimale.
- ▶ Solutions :
 - ▶ résolution d'un système d'équations linéaires
 - ▶ programmation dynamique
 - ▶ programmation linéaire

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

« Markov » signifie que toute l'information utile est contenue dans l'état courant : toute l'information concernant le passé de l'agent est présente dans l'état.

Markov implique que π^* ne dépend que de l'état courant (pas des états passés, des actions passées, ...).

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :
 - ▶ que le PDM est stationnaire.

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :
 - ▶ que le PDM est stationnaire.
 - ▶ $\gamma \in [0, 1[$

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :
 - ▶ que le PDM est stationnaire.
 - ▶ $\gamma \in [0, 1[$
 - ▶ que les retours sont bornés ($|\mathcal{R}(x, a, x')| < +\infty$).

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :
 - ▶ que le PDM est stationnaire.
 - ▶ $\gamma \in [0, 1[$
 - ▶ que les retours sont bornés ($|\mathcal{R}(x, a, x')| < +\infty$).
 - ▶ \mathcal{X} est fini et discret.

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :
 - ▶ que le PDM est stationnaire.
 - ▶ $\gamma \in [0, 1[$
 - ▶ que les retours sont bornés ($|\mathcal{R}(x, a, x')| < +\infty$).
 - ▶ \mathcal{X} est fini et discret.
 - ▶ \mathcal{A} est fini.

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :
 - ▶ que le PDM est stationnaire.
 - ▶ $\gamma \in [0, 1[$
 - ▶ que les retours sont bornés ($|\mathcal{R}(x, a, x')| < +\infty$).
 - ▶ \mathcal{X} est fini et discret.
 - ▶ \mathcal{A} est fini.
- ▶ Théorème de Blackwell : sous ces hypothèses, π^* existe et est stationnaire et déterministe.

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :
 - ▶ que le PDM est stationnaire.
 - ▶ $\gamma \in [0, 1[$
 - ▶ que les retours sont bornés ($|\mathcal{R}(x, a, x')| < +\infty$).
 - ▶ \mathcal{X} est fini et discret.
 - ▶ \mathcal{A} est fini.
- ▶ Théorème de Blackwell : sous ces hypothèses, π^* existe et est stationnaire et déterministe.
- ▶ Remarques :

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :
 - ▶ que le PDM est stationnaire.
 - ▶ $\gamma \in [0, 1[$
 - ▶ que les retours sont bornés ($|\mathcal{R}(x, a, x')| < +\infty$).
 - ▶ \mathcal{X} est fini et discret.
 - ▶ \mathcal{A} est fini.
- ▶ Théorème de Blackwell : sous ces hypothèses, π^* existe et est stationnaire et déterministe.
- ▶ Remarques :
 - ▶ pour un γ -PDM donné, il existe en général plusieurs politiques optimales équivalentes ;

Problème de décision de Markov

Quelques propriétés

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On suppose :
 - ▶ que le PDM est stationnaire.
 - ▶ $\gamma \in [0, 1[$
 - ▶ que les retours sont bornés ($|\mathcal{R}(x, a, x')| < +\infty$).
 - ▶ \mathcal{X} est fini et discret.
 - ▶ \mathcal{A} est fini.
- ▶ Théorème de Blackwell : sous ces hypothèses, π^* existe et est stationnaire et déterministe.
- ▶ Remarques :
 - ▶ pour un γ -PDM donné, il existe en général plusieurs politiques optimales équivalentes ;
 - ▶ π^* dépend de γ en général.

Problème de décision de Markov

Valeur d'un état

Intuition

Si on est capable de calculer l'intérêt d'être dans un état quelconque, on peut ensuite chercher à atteindre les états les plus intéressants.

Problème de décision de Markov

Valeur d'un état

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.

Problème de décision de Markov

Valeur d'un état

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On définit la **valeur** d'un état x selon une politique π , $V^\pi(x)$:
$$V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_{k \geq 0} \gamma^k r_{t+k} | x_t = x].$$

Problème de décision de Markov

Valeur d'un état

- ▶ On considère un PDM défini par $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ et la fonction objectif $\zeta = \sum_t \gamma^t r_t, \gamma \in [0, 1[$.
- ▶ On définit la valeur d'un état x selon une politique π , $V^\pi(x)$:
$$V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_{k \geq 0} \gamma^k r_{t+k} | x_t = x].$$
- ▶ Question : comment calculer $V^\pi(x), \forall x \in \mathcal{X}$?

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

$$\blacktriangleright V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :

$$\sum_{k \geq 0} \gamma^k r_{t+k} =$$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :

$$\sum_{k \geq 0} \gamma^k r_{t+k} = r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \gamma^3 r_{t+3} + \dots$$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :

$$\sum_{k \geq 0} \gamma^k r_{t+k} = r_t + \gamma (r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots)$$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :

$$\sum_{k \geq 0} \gamma^k r_{t+k} = \frac{r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \gamma^3 r_{t+3} + \dots}{r_t + \gamma (\sum_{k \geq 0} \gamma^k r_{t+1+k})}$$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :
- ▶ $\sum_{t \geq 0} \gamma^k r_{t+k} = \underbrace{r_t}_{\text{retour immédiat}} + \gamma \underbrace{\left(\sum_{k \geq 1} \gamma^k r_{t+k} | x_t = x \right)}_{\text{ensuite}}$
- ▶ examinons maintenant ce \mathbb{E} .
 - ▶ si on effectue a dans x , on va dans l'état x' avec la probabilité $\mathcal{P}(x, a, x')$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :
- ▶ $\sum_{t \geq 0} \gamma^k r_{t+k} = \underbrace{r_t}_{\text{retour immédiat}} + \gamma \underbrace{\left(\sum_{k \geq 1} \gamma^k r_{t+k} | x_t = x \right)}_{\text{ensuite}}$
- ▶ examinons maintenant ce \mathbb{E} .
 - ▶ si on effectue a dans x , on va dans l'état x' avec la probabilité $\mathcal{P}(x, a, x')$
 - ▶ la probabilité d'effectuer a dans x est $\pi(x, a)$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :
- ▶ $\sum_{t \geq 0} \gamma^k r_{t+k} = \underbrace{r_t}_{\text{retour immédiat}} + \gamma \underbrace{\left(\sum_{k \geq 1} \gamma^k r_{t+k} | x_t = x \right)}_{\text{ensuite}}$
- ▶ examinons maintenant ce \mathbb{E} .
 - ▶ si on effectue a dans x , on va dans l'état x' avec la probabilité $\mathcal{P}(x, a, x')$
 - ▶ la probabilité d'effectuer a dans x est $\pi(x, a)$
 - ▶ donc la probabilité d'atteindre x' depuis x est $\sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x')$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :
- ▶ $\sum_{t \geq 0} \gamma^k r_{t+k} = \underbrace{r_t}_{\text{return immédiat}} + \gamma \underbrace{\left(\sum_{k \geq 1} \gamma^k r_{t+k} | x_t = x \right)}_{\text{ensuite}}$
- ▶ examinons maintenant ce \mathbb{E} .
 - ▶ si on effectue a dans x , on va dans l'état x' avec la probabilité $\mathcal{P}(x, a, x')$
 - ▶ la probabilité d'effectuer a dans x est $\pi(x, a)$
 - ▶ donc la probabilité d'atteindre x' depuis x est $\sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x')$
 - ▶ donc $\sum_{x' \in \mathcal{X}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x')$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_{t \geq 0} \gamma^t r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :
- ▶ $\sum_{t \geq 0} \gamma^t r_{t+k} = \underbrace{r_t}_{\text{return immédiat}} + \gamma \underbrace{\left(\sum_{k \geq 1} \gamma^k r_{t+k} | x_t = x \right)}_{\text{ensuite}}$
- ▶ examinons maintenant ce \mathbb{E} .
 - ▶ si on effectue a dans x , on va dans l'état x' avec la probabilité $\mathcal{P}(x, a, x')$
 - ▶ la probabilité d'effectuer a dans x est $\pi(x, a)$
 - ▶ donc la probabilité d'atteindre x' depuis x est $\sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x')$
 - ▶ donc $\sum_{x' \in \mathcal{X}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x')$
 - ▶ $\mathbb{E}[\sum_{t \geq 0} \gamma^t r_t] = V^\pi(x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + V^\pi(x')]$

Problème de décision de Markov

Équation de Bellman [Bellman, 1957]

- ▶ $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_{t \geq 0} \gamma^t r_{t+k} | x_t = x]$
- ▶ examinons le terme dont on veut calculer l'espérance :
- ▶ $\sum_{t \geq 0} \gamma^t r_{t+k} = \underbrace{r_t}_{\text{retour immédiat}} + \gamma \underbrace{\left(\sum_{k \geq 1} \gamma^k r_{t+k} | x_t = x \right)}_{\text{ensuite}}$
- ▶ examinons maintenant ce \mathbb{E} .
 - ▶ si on effectue a dans x , on va dans l'état x' avec la probabilité $\mathcal{P}(x, a, x')$
 - ▶ la probabilité d'effectuer a dans x est $\pi(x, a)$
 - ▶ donc la probabilité d'atteindre x' depuis x est $\sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x')$
 - ▶ donc $\mathbb{E}[\sum_{t \geq 0} \gamma^t r_t] = V^\pi(x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + V^\pi(x')]$
 - ▶ Équation de Bellman

Problème de décision de Markov

Calcul de V^π

$$\blacktriangleright V^\pi(x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + V^\pi(x')]$$

Problème de décision de Markov

Calcul de V^π

- ▶
$$V^\pi(x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + V^\pi(x')]$$
- ▶ π , \mathcal{P} et \mathcal{R} sont connus.

Problème de décision de Markov

Calcul de V^π

- ▶
$$V^\pi(x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + V^\pi(x')]$$
- ▶ π , \mathcal{P} et \mathcal{R} sont connus.
- ▶ $V^\pi(x)$ est inconnu, $\forall x$.

Problème de décision de Markov

Calcul de V^π

- ▶
$$V^\pi(x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + V^\pi(x')]$$
- ▶ π , \mathcal{P} et \mathcal{R} sont connus.
- ▶ $V^\pi(x)$ est inconnu, $\forall x$.
- ▶ Première approche : c'est donc un système de N équations linéaires à N inconnues.
...

Problème de décision de Markov

Calcul de V^π II

- ▶ $V^\pi(x) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(x, a) \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + V^\pi(x')]$
- ▶ π , \mathcal{P} et \mathcal{R} sont connus.
- ▶ $V^\pi(x)$ est inconnu, $\forall x$.
- ▶ Deuxième approche : algorithme d'évaluation d'une politique :

Nécessite: un γ -PDM $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma)$, une politique π , un seuil ϵ

initialiser $V_0^\pi \leftarrow 0$

$i \leftarrow 0$

répéter

pour tout état $x \in \mathcal{X}$ **faire**

$V_{i+1}^\pi(x) \leftarrow \sum_{a \in \mathcal{A}(x)} \pi(x, a) \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V_i^\pi(x')]$

fin pour

$i \leftarrow i + 1$

jusque $\|V_i^\pi - V_{i-1}^\pi\|_\infty \leq \epsilon$

Planification

Application au problème du chauffeur de taxi

Calcul de V^π pour une politique uniformément aléatoire et $\gamma = 0,9$ avec différentes méthodes :

- ▶ calcul de V^* par résolution de systèmes linéaires :
$$V^*(A) = \frac{156420}{1789} \approx 87,43, V^*(B) = \frac{5113540}{51881} \approx 98,56, V^*(C) = \frac{13602460}{155643} \approx 87,40.$$
- ▶ Estimation de V^π par algorithme d'évaluation d'une politique : avec ϵ suffisamment petit :
$$V^*(A) \approx 87,43, V^*(B) \approx 98,56, V^*(C) \approx 87,40.$$

Planification

Améliorer π

- ▶ On peut définir un ordre (partiel) sur les politiques :
 $\pi \leq \pi' \iff V^\pi(x) \leq V^{\pi'}(x), \forall x$

Planification

Améliorer π

- ▶ On peut définir un ordre (partiel) sur les politiques :
 $\pi \leq \pi' \iff V^\pi(x) \leq V^{\pi'}(x), \forall x$
- ▶ On peut améliorer une politique en la rendant gloutonne : politique

gloutonne = dans chaque état, on choisit la meilleure action.

$$\pi'(x) \leftarrow \arg \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V^\pi(x')], \forall x$$

entraîne $\pi \leq \pi'$

Planification

Itération sur les politiques (IP) [Howard, 1960]

Partant d'une politique $\pi_{k=0}$ quelconque, alterner évaluation et amélioration :

- ▶ évaluation de V^{π_k}
- ▶ calculer π_{k+1} par « gloutonnisation » de V^{π_k}
- ▶ $k++$
- ▶ itérer tant que $\pi_{k-1} \neq \pi_k$

Planification

Itération sur les politiques (IP) [Howard, 1960]

Partant d'une politique $\pi_{k=0}$ quelconque, alterner évaluation et amélioration :

- ▶ évaluation de V^{π_k}
- ▶ calculer π_{k+1} par « gloutonnisation » de V^{π_k}
- ▶ $k++$
- ▶ itérer tant que $\pi_{k-1} \neq \pi_k$

- ▶ Algorithme très efficace

Planification

Itération sur les politiques (IP) [Howard, 1960]

Partant d'une politique $\pi_{k=0}$ quelconque, alterner évaluation et amélioration :

- ▶ évaluation de V^{π_k}
 - ▶ calculer π_{k+1} par « gloutonnisation » de V^{π_k}
 - ▶ $k++$
 - ▶ itérer tant que $\pi_{k-1} \neq \pi_k$
-
- ▶ Algorithme très efficace
 - ▶ Converge vers π^* sous quelques conditions ... délicates.

Planification

Itération sur les valeurs (IV)

- ▶ Équation d'optimalité de Bellman :

$$V^*(x) = \max_{\pi} V^{\pi}(x) = \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V^*(x')]$$

équation caractérisant la valeur de la politique optimale π^* .

Planification

Itération sur les valeurs (IV)

- ▶ Équation d'optimalité de Bellman :

$$V^*(x) = \max_{\pi} V^{\pi}(x) = \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V^*(x')]$$

équation caractérisant la valeur de la politique optimale π^* .

- ▶ V^* peut être calculé par l'algorithme d'itération sur les valeurs.

Planification

Itération sur les valeurs (IV)

- ▶ Équation d'optimalité de Bellman :

$$V^*(x) = \max_{\pi} V^{\pi}(x) = \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V^*(x')]$$

équation caractérisant la valeur de la politique optimale π^* .

- ▶ V^* peut être calculé par l'algorithme d'itération sur les valeurs.
- ▶ Pour un γ -PDM, cet algorithme converge asymptotiquement vers V^* .

Planification

Itération sur les valeurs (IV)

- ▶ Équation d'optimalité de Bellman :

$$V^*(x) = \max_{\pi} V^{\pi}(x) = \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V^*(x')]$$

Planification

Itération sur les valeurs (IV)

- ▶ Équation d'optimalité de Bellman :

$$V^*(x) = \max_{\pi} V^{\pi}(x) = \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V^*(x')]$$

- ▶ Nécessite: un γ -PDM, un seuil de précision ϵ

initialiser $V_0 \leftarrow 0, k \leftarrow 0$

répéter

pour tout état $x \in \mathcal{X}$ **faire**

$$V_{k+1}(x) \leftarrow \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V_k(x')]$$

fin pour

$$k \leftarrow k + 1$$

jusque $\|V_k - V_{k-1}\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon(1-\gamma)}{2\gamma}$

pour tout état $x \in \mathcal{X}$ **faire**

$$\pi(x) \leftarrow \arg \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V_k(x')]$$

fin pour

Planification

Itération sur les valeurs (IV)

- ▶ Équation d'optimalité de Bellman :

$$V^*(x) = \max_{\pi} V^\pi(x) = \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V^*(x')]$$

- ▶ Nécessite: un γ -PDM, un seuil de précision ϵ

initialiser $V_0 \leftarrow 0, k \leftarrow 0$

répéter

pour tout état $x \in \mathcal{X}$ **faire**

$$V_{k+1}(x) \leftarrow \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V_k(x')]$$

fin pour

$$k \leftarrow k + 1$$

jusque $\|V_k - V_{k-1}\|_\infty \leq \frac{\epsilon(1-\gamma)}{2\gamma}$

pour tout état $x \in \mathcal{X}$ **faire**

$$\pi(x) \leftarrow \arg \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V_k(x')]$$

fin pour

- ▶ Propriété : $\|V_k - V^*\|_\infty \leq \epsilon$

Planification

Application au problème du chauffeur de taxi

Calcul de π^* pour $\gamma = 0,9$ avec différentes méthodes :

- ▶ estimation de V^* par IV :

avec ϵ suffisamment petit :

$$V^*(A) \approx 121,65, V^*(B) \approx 135,31, V^*(C) \approx 122,84$$

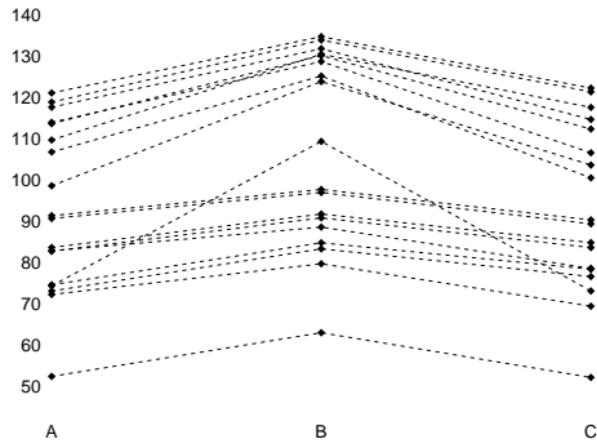
$$\text{Gloutonnisation} \rightsquigarrow \pi^*(A) = a_2, \pi^*(B) = a_3, \pi^*(C) = a_2$$

- ▶ estimation de π^* par IP :

$$\pi^*(A) = a_2, \pi^*(B) = a_3, \pi^*(C) = a_2$$

Planification

Application au problème du chauffeur de taxi



Fonction valeur pour toutes les politiques déterministes stationnaires pour le problème du chauffeur de taxi pour $\gamma = 0,9$.

Planification

Résolution par programmation linéaire

- ▶ V^* est la solution du PL suivant :

$V \in \mathbb{R}^N$, où $N = |\mathcal{X}|$:

$$\min \sum_{x=1}^{x=N} V[x]$$

vérifiant $\forall (x, a) \in \mathcal{X} \times \mathcal{A}$

$$V[x] - \sum_{x'} \gamma \mathcal{P}(x, a, x') V[x'] \geq \sum_{x'} \mathcal{P}(x, a, x') \mathcal{R}(x, a, x')$$

Planification

Résolution par programmation linéaire

- ▶ V^* est la solution du PL suivant :

$$V \in \mathbb{R}^N, \text{ où } N = |\mathcal{X}| :$$

$$\min \sum_{x=1}^{x=N} V[x]$$

vérifiant $\forall (x, a) \in \mathcal{X} \times \mathcal{A}$

$$V[x] - \sum_{x'} \gamma \mathcal{P}(x, a, x') V[x'] \geq \sum_{x'} \mathcal{P}(x, a, x') \mathcal{R}(x, a, x')$$

- ▶ Le problème dual est :

$$\max \sum_{(x,a)} \sum_{x'} \mathcal{P}(x, a, x') \mathcal{R}(x, a, x') \xi(x, a)$$

vérifiant

$$\sum_a \xi(x', a) - \sum_{x,a} \gamma \mathcal{P}(x, a, x') \xi(x, a) \leq 1, \forall x' \in \mathcal{X}$$

et $\xi(x, a) \geq 0, \forall (x, a) \in \mathcal{X} \times \mathcal{A}$

La solution du dual spécifie $\pi^* : \forall x \in \mathcal{X}, \xi(x, a) \neq 0 \iff a \in \pi^*(x)$.

Planification

Application au problème du chauffeur de taxi

Calcul de π^* pour $\gamma = 0,9$ par PL :

- ▶ $V(A) = 121.6535, V(B) = 135.3063, V(C) = 122.8369$

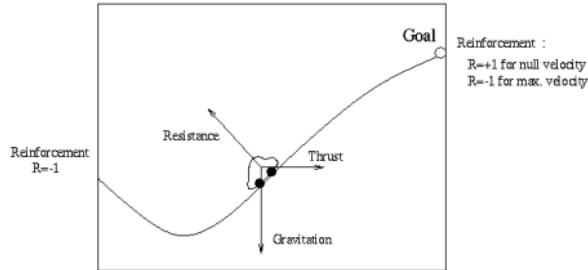
- ▶ $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.866906 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 23.94366 \\ 0 \\ 3.189432 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \pi^*(A) = a_2, \pi^*(B) = a_3, \pi^*(C) = a_2$

Planification

Les limites : \mathcal{X} grand

Planification

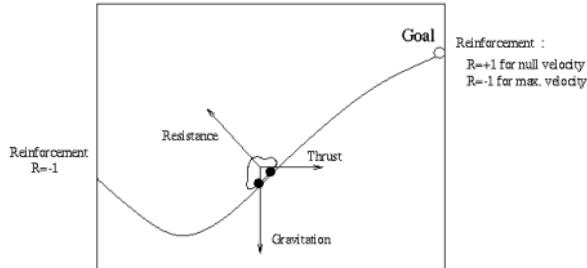
Les limites : \mathcal{X} grand



Voiture pas assez puissante pour atteindre le sommet de la colline : doit prendre de l'élan puis accélérer !

Planification

Les limites : \mathcal{X} grand

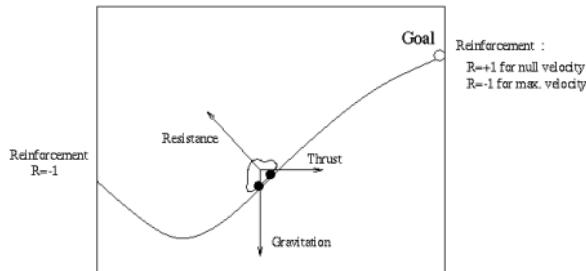


Voiture pas assez puissante pour atteindre le sommet de la colline : doit prendre de l'élan puis accélérer !

- ▶ $\mathcal{X} = [-1,2; 0,5] \times [-0,07; 0,07]$: position, vitesse ;
 $x_0 \in ([-0,6; -0,4]; 0)$
- ▶ $\mathcal{A} = \{-1, 0, +1\}$: accélération
- ▶ \mathcal{P} : déterministe : dynamique Newtonienne approximative :
 $x_{t+1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{bound}(\dot{x}_t + 0,001a_t - \cos(3x_t))$ et $x_{t+1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{bound}(x_t + x_{t+1})$
- ▶ $r_t = -1$ à chaque pas de temps
- ▶ Objectif : atteindre le sommet de la colline en moins de 200 pas de temps.

Planification

Les limites : \mathcal{X} grand

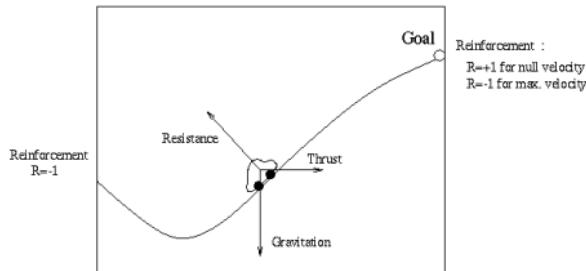


Partitionnement progressif et adaptatif [Munos & Moore, 2002]

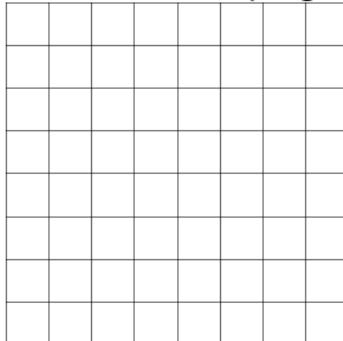
Ce type de techniques est limité à des espaces de petites dimensions : $\mathbb{R}^{\leq 5}$.

Planification

Les limites : \mathcal{X} grand



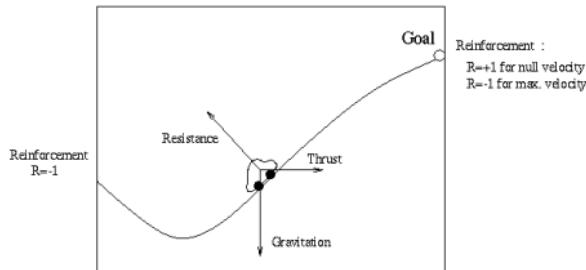
Partitionnement progressif et adaptatif [Munos & Moore, 2002]



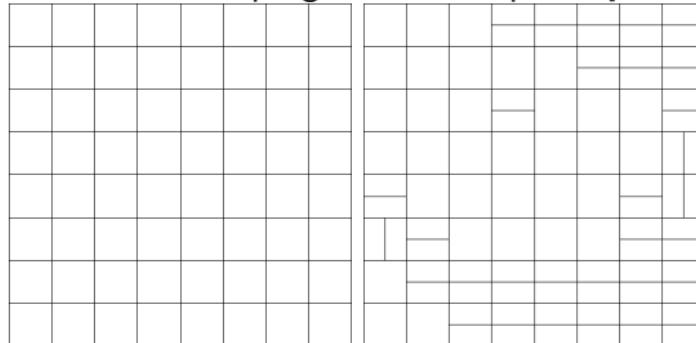
Ce type de techniques est limité à des espaces de petites dimensions : $\mathbb{R}^{\leq 5}$.

Planification

Les limites : \mathcal{X} grand



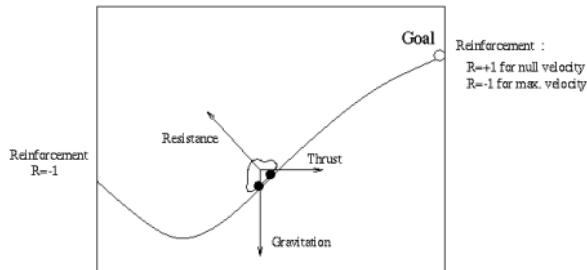
Partitionnement progressif et adaptatif [Munos & Moore, 2002]



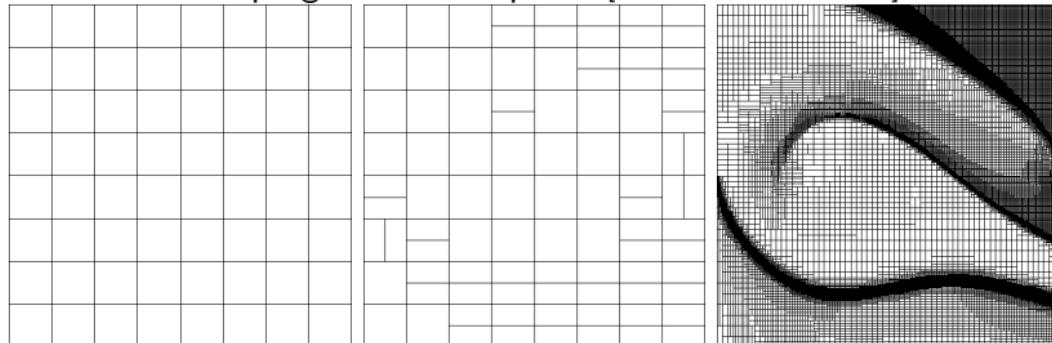
Ce type de techniques est limité à des espaces de petites dimensions : $\mathbb{R}^{\leq 5}$.

Planification

Les limites : \mathcal{X} grand



Partitionnement progressif et adaptatif [Munos & Moore, 2002]



Ce type de techniques est limité à des espaces de petites dimensions : $\mathbb{R}^{\leq 5}$.

Planification

Techniques approchées : programmation dynamique approchée

- ▶ Quand \mathcal{X} est trop grand, on utilise une approximation de V .
« Programmation dynamique approchée »
Voir e.g. W. Powell, Castlelab, Princeton.

Planification

Techniques approchées : programmation dynamique approchée

- ▶ Quand \mathcal{X} est trop grand, on utilise une approximation de V .
« Programmation dynamique approchée »
Voir e.g. W. Powell, Castlelab, Princeton.
- ▶ \mathcal{A} peut aussi être trop grand, voire infini.
Exemple : jeu de go : technique arborescente (MCTS).

Planification

Techniques approchées : programmation dynamique approchée

- ▶ Quand \mathcal{X} est trop grand, on utilise une approximation de V .
« Programmation dynamique approchée »
Voir e.g. W. Powell, Castlelab, Princeton.
- ▶ \mathcal{A} peut aussi être trop grand, voire infini.
Exemple : jeu de go : technique arborescente (MCTS).
- ▶ Il y a beaucoup moins de garanties théoriques que dans les approches à la Bellman.

Planification

Techniques approchées : programmation dynamique approchée

- ▶ Quand \mathcal{X} est trop grand, on utilise une approximation de V .
« Programmation dynamique approchée »
Voir e.g. W. Powell, Castlelab, Princeton.
- ▶ \mathcal{A} peut aussi être trop grand, voire infini.
Exemple : jeu de go : technique arborescente (MCTS).
- ▶ Il y a beaucoup moins de garanties théoriques que dans les approches à la Bellman.
- ▶ Idée que l'on va détailler dans la partie suivante.

Apprentissage

Apprentissage

- ▶ Maintenant, on suppose connus :
 - ▶ l'espace d'états \mathcal{X} ,
 - ▶ l'espace d'actions \mathcal{A} ,
 - ▶ la fonction objectif ζ ,
- ▶ et inconnues :
 - ▶ la fonction de transition \mathcal{P}
 - ▶ la fonction de retour \mathcal{R}

Apprentissage

- ▶ Maintenant, on suppose connus :
 - ▶ l'espace d'états \mathcal{X} ,
 - ▶ l'espace d'actions \mathcal{A} ,
 - ▶ la fonction objectif ζ ,
- ▶ et inconnues :
 - ▶ la fonction de transition \mathcal{P}
 - ▶ la fonction de retour \mathcal{R}

Objectif : trouver π^* qui optimise ζ .

Apprentissage

- ▶ Maintenant, on suppose connus :
 - ▶ l'espace d'états \mathcal{X} ,
 - ▶ l'espace d'actions \mathcal{A} ,
 - ▶ la fonction objectif ζ ,
- ▶ et inconnues :
 - ▶ la fonction de transition \mathcal{P}
 - ▶ la fonction de retour \mathcal{R}

Objectif : trouver π^* qui optimise ζ .

✓ Certaines quantités indispensables à cette optimisation sont inconnues.

Apprentissage

- ▶ Maintenant, on suppose connus :
 - ▶ l'espace d'états \mathcal{X} ,
 - ▶ l'espace d'actions \mathcal{A} ,
 - ▶ la fonction objectif ζ ,
- ▶ et inconnues :
 - ▶ la fonction de transition \mathcal{P}
 - ▶ la fonction de retour \mathcal{R}

Objectif : trouver π^* qui optimise ζ .

- ✓ Certaines quantités indispensables à cette optimisation sont inconnues.
- ✓ Ces quantités définissent l'environnement : en **interagissant** avec l'environnement, on n'a pas besoin de les connaître.

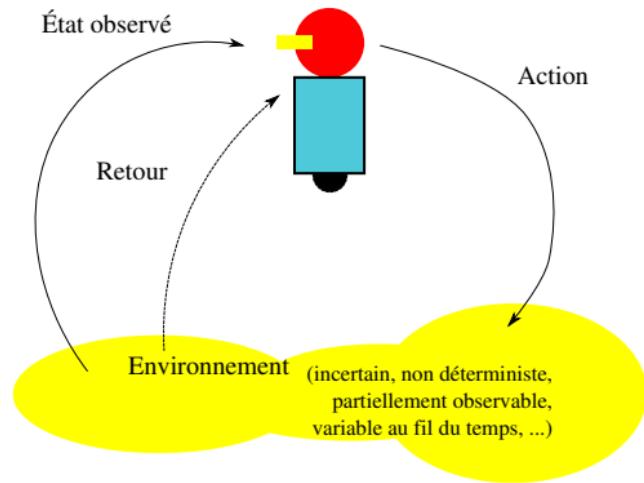
Apprentissage

- ▶ Maintenant, on suppose connus :
 - ▶ l'espace d'états \mathcal{X} ,
 - ▶ l'espace d'actions \mathcal{A} ,
 - ▶ la fonction objectif ζ ,
- ▶ et inconnues :
 - ▶ la fonction de transition \mathcal{P}
 - ▶ la fonction de retour \mathcal{R}

Objectif : trouver π^* qui optimise ζ .

Tout ce qui suit s'appuie donc sur l'**interaction** entre l'agent et son environnement.

Apprentissage par renforcement = apprentissage par interaction



Apprentissage

Méthode de Monte Carlo

Intuition

Apprentissage

Méthode de Monte Carlo

Intuition

Méthode de Monte Carlo \rightsquigarrow estime une quantité liée à un processus stochastique.

Apprentissage

Méthode de Monte Carlo

Intuition

Méthode de Monte Carlo \rightsquigarrow estime une quantité liée à un processus stochastique.
(Ou de trop grande taille pour être simulé exactement.)

Apprentissage

Méthode de Monte Carlo

- ▶ on suppose disposer d'un simulateur de l'environnement :
 $(x_t, a_t) \mapsto (x_{t+1}, r_t)$
- ▶ on peut estimer $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$ par simulation :
 - sélectionner $x_0 \in \mathcal{X}$
 - $t \leftarrow 0$
 - $W \leftarrow 0$
 - tant-que** $\gamma^k \geq \epsilon$ **faire**
 - choisir a_t en fonction de π
 - $(x_{t+1}, r_t) \leftarrow \text{simule}(x_t, a_t)$
 - $W \leftarrow W + \gamma^t r_t$
 - $t++$
 - fin tant-que**

Apprentissage

Méthode de Monte Carlo

- ▶ on suppose disposer d'un simulateur de l'environnement :
 $(x_t, a_t) \mapsto (x_{t+1}, r_t)$
- ▶ on peut estimer $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$ par simulation :
 - sélectionner $x_0 \in \mathcal{X}$
 - $V[x_0] \leftarrow 0$
 - pour** $i \in \{1,..N\}$ **faire**
 - $t \leftarrow 0$
 - $W \leftarrow 0$
 - tant-que** $\gamma^k \geq \epsilon$ **faire**
 - choisir a_t en fonction de π
 - $(x_{t+1}, r_t) \leftarrow \text{simule}(x_t, a_t)$
 - $W \leftarrow W + \gamma^t r_t$
 - $t++$
 - fin tant-que**
 - $V[x_0] \leftarrow V[x_0] + W$
 - fin pour**
 - $V[x_0] \leftarrow V[x_0]/N$

Apprentissage

Méthode de Monte Carlo

- ▶ on suppose disposer d'un simulateur de l'environnement :
 $(x_t, a_t) \mapsto (x_{t+1}, r_t)$
- ▶ on peut estimer $V^\pi(x) = \mathbb{E}[\sum_k \gamma^k r_{t+k} | x_t = x]$ par simulation :
 - sélectionner $x_0 \in \mathcal{X}$
 - $V[x_0] \leftarrow 0$
 - pour** $i \in \{1,..N\}$ **faire**
 - $t \leftarrow 0$
 - $W \leftarrow 0$
 - tant-que** $\gamma^k \geq \epsilon$ **faire**
 - choisir a_t en fonction de π
 - $(x_{t+1}, r_t) \leftarrow \text{simule}(x_t, a_t)$
 - $W \leftarrow W + \gamma^t r_t$
 - $t++$
 - fin tant-que**
 - $V[x_0] \leftarrow V[x_0] + W$
 - fin pour**
 - $V[x_0] \leftarrow V[x_0]/N$
- ▶ $V[x_0]$ contient une estimation non biaisée de $V^\pi(x_0)$.

Apprentissage

Méthode de Monte Carlo : illustration sur le problème du chauffeur de taxi

- ▶ Pour π^* , $\epsilon = 2 \cdot 10^{-10}$, $\gamma = 0,9$, on obtient :
 $V^*(A) = 120,18 \pm 1,06$, $V^*(B) = 133,24 \pm 0,90$,
 $V^*(C) = 122,03 \pm 0,98$.
Écart-type obtenu sur 100 exécutions.
À comparer avec le résultat d'IV :
 $V^*(A) \approx 121,65$, $V^*(B) \approx 135,31$, $V^*(C) \approx 122,84$

Apprentissage

Méthode de Monte Carlo : illustration sur le problème du chauffeur de taxi

- ▶ Pour π^* , $\epsilon = 2 \cdot 10^{-10}$, $\gamma = 0,9$, on obtient :
 $V^*(A) = 120,18 \pm 1,06$, $V^*(B) = 133,24 \pm 0,90$,
 $V^*(C) = 122,03 \pm 0,98$.
Écart-type obtenu sur 100 exécutions.
À comparer avec le résultat d'IV :
 $V^*(A) \approx 121,65$, $V^*(B) \approx 135,31$, $V^*(C) \approx 122,84$
- ▶ Utilisation de cette méthode pour évaluer une politique, puis l'améliorer (IP).

Apprentissage

Méthode de Monte Carlo

- ▶ Idée et algorithme très simples.
- ▶ Idée qui peut s'appliquer dans de très nombreux cas.
- ▶ Estimateur converge ... lentement.
- ▶ Idée à la base de nombreux algorithmes beaucoup plus subtils.

Problèmes de décision de Markov (suite)

Valeur d'une paire état-action

- ▶ Outre la valeur d'un état $V^\pi(x)$ (resp. valeur optimale $V^*(x)$) , on peut aussi définir la valeur d'une paire état-action $Q^\pi(x, a)$ (resp. $Q^*(x, a)$) :
$$Q^\pi(x_t, a_t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\zeta(x_t | a_t = a, \pi)).$$

Problèmes de décision de Markov (suite)

Valeur d'une paire état-action

- ▶ Outre la valeur d'un état $V^\pi(x)$ (resp. valeur optimale $V^*(x)$) , on peut aussi définir la valeur d'une paire état-action $Q^\pi(x, a)$ (resp. $Q^*(x, a)$) :
- $Q^\pi(x_t, a_t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\zeta(x_t|a_t = a, \pi))$.
- ▶ Équation de Bellman pour Q :

$$Q^\pi(x, a) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(x', a') Q^\pi(x')]$$

Problèmes de décision de Markov (suite)

Valeur d'une paire état-action

- ▶ Outre la valeur d'un état $V^\pi(x)$ (resp. valeur optimale $V^*(x)$) , on peut aussi définir la valeur d'une paire état-action $Q^\pi(x, a)$ (resp. $Q^*(x, a)$) :
- $Q^\pi(x_t, a_t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\zeta(x_t|a_t = a, \pi))$.
- ▶ Équation de Bellman pour Q :

$$Q^\pi(x, a) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(x', a') Q^\pi(x')]$$

- ▶ Équation d'optimalité de Bellman pour Q^* :

$$Q^*(x, a) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}} Q^*(x', a')]$$

Problèmes de décision de Markov (suite)

Valeur d'une paire état-action

- ▶ Outre la valeur d'un état $V^\pi(x)$ (resp. valeur optimale $V^*(x)$) , on peut aussi définir la valeur d'une paire état-action $Q^\pi(x, a)$ (resp. $Q^*(x, a)$) :
- $Q^\pi(x_t, a_t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\zeta(x_t|a_t = a, \pi))$.
- ▶ Équation de Bellman pour Q :

$$Q^\pi(x, a) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(x', a') Q^\pi(x')]$$

- ▶ Équation d'optimalité de Bellman pour Q^* :

$$Q^*(x, a) = \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}} Q^*(x', a')]$$

- ▶ Relation entre V^* et Q^* :

$$V^*(x) = \max_{a \in \mathcal{A}(x)} Q^*(x, a), \forall x \in \mathcal{X}$$

Problèmes de décision de Markov (suite)

V vs. Q

- ▶ Avec V , trouver l'action qui emmène dans le meilleur état suivant x nécessite une optimisation :

$$\arg \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V(x')]$$

Problèmes de décision de Markov (suite)

V vs. Q

- ▶ Avec V , trouver l'action qui emmène dans le meilleur état suivant x nécessite une optimisation :

$$\arg \max_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathcal{P}(x, a, x') [\mathcal{R}(x, a, x') + \gamma V(x')]$$

- ▶ Si on connaît Q , c'est simplement :

$$\arg \max_{a \in \mathcal{A}(x)} Q(x, a)$$

Apprentissage par renforcement

Différence temporelle [Sutton, 1984]

- ▶ Supposons que tout soit déterministe $(\pi, \mathcal{P}, \mathcal{R})$

Apprentissage par renforcement

Différence temporelle [Sutton, 1984]

- ▶ Supposons que tout soit déterministe $(\pi, \mathcal{P}, \mathcal{R})$
- ▶ éq. Bellman se réduit à : $V^\pi(x) = \mathcal{R}(x, \pi(x), x') + \gamma V^\pi(x')$

Apprentissage par renforcement

Différence temporelle [Sutton, 1984]

- ▶ Supposons que tout soit déterministe $(\pi, \mathcal{P}, \mathcal{R})$
- ▶ éq. Bellman se réduit à : $V^\pi(x) = \mathcal{R}(x, \pi(x), x') + \gamma V^\pi(x')$
- ▶ au long d'une trajectoire, cette équation s'instancie à l'instant t :
$$V^\pi(x_t) = r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1})$$

Soit $r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1}) - V^\pi(x_t) = 0$

Apprentissage par renforcement

Différence temporelle [Sutton, 1984]

- ▶ Supposons que tout soit déterministe $(\pi, \mathcal{P}, \mathcal{R})$
- ▶ éq. Bellman se réduit à : $V^\pi(x) = \mathcal{R}(x, \pi(x), x') + \gamma V^\pi(x')$
- ▶ au long d'une trajectoire, cette équation s'instancie à l'instant t :
$$V^\pi(x_t) = r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1})$$

Soit $r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1}) - V^\pi(x_t) = 0$
- ▶ V^π est inconnue. On l'estime par \widehat{V}^π , donc :
$$r_t + \gamma \widehat{V}^\pi(x_{t+1}) - \widehat{V}^\pi(x_t) \neq 0$$

Apprentissage par renforcement

Différence temporelle [Sutton, 1984]

- ▶ Supposons que tout soit déterministe $(\pi, \mathcal{P}, \mathcal{R})$
- ▶ éq. Bellman se réduit à : $V^\pi(x) = \mathcal{R}(x, \pi(x), x') + \gamma V^\pi(x')$
- ▶ au long d'une trajectoire, cette équation s'instancie à l'instant t :

$$V^\pi(x_t) = r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1})$$
 Soit $r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1}) - V^\pi(x_t) = 0$
- ▶ V^π est inconnue. On l'estime par \widehat{V}^π , donc :

$$r_t + \gamma \widehat{V}^\pi(x_{t+1}) - \widehat{V}^\pi(x_t) \neq 0$$
- ▶ on peut utiliser ce terme pour corriger \widehat{V}^π :

$$\widehat{V}_{k+1}^\pi(x_t) \leftarrow \widehat{V}_{k+1}^\pi(x_t) + \alpha[r_t + \gamma \widehat{V}_k^\pi(x_{t+1}) - \widehat{V}_k^\pi(x_t)]$$

Apprentissage par renforcement

Différence temporelle [Sutton, 1984]

- ▶ Supposons que tout soit déterministe $(\pi, \mathcal{P}, \mathcal{R})$
- ▶ éq. Bellman se réduit à : $V^\pi(x) = \mathcal{R}(x, \pi(x), x') + \gamma V^\pi(x')$
- ▶ au long d'une trajectoire, cette équation s'instancie à l'instant t :

$$V^\pi(x_t) = r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1})$$
 Soit $r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1}) - V^\pi(x_t) = 0$
- ▶ V^π est inconnue. On l'estime par \widehat{V}^π , donc :

$$r_t + \gamma \widehat{V}^\pi(x_{t+1}) - \widehat{V}^\pi(x_t) \neq 0$$
- ▶ on peut utiliser ce terme pour corriger \widehat{V}^π :

$$\widehat{V}_{k+1}^\pi(x_t) \leftarrow \widehat{V}_{k+1}^\pi(x_t) + \alpha[r_t + \gamma \widehat{V}_k^\pi(x_{t+1}) - \widehat{V}_k^\pi(x_t)]$$
- ▶ **Différence temporelle.**

Apprentissage par renforcement

Différence temporelle [Sutton, 1984]

- ▶ Supposons que tout soit déterministe $(\pi, \mathcal{P}, \mathcal{R})$
- ▶ éq. Bellman se réduit à : $V^\pi(x) = \mathcal{R}(x, \pi(x), x') + \gamma V^\pi(x')$
- ▶ au long d'une trajectoire, cette équation s'instancie à l'instant t :

$$V^\pi(x_t) = r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1})$$
 Soit $r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1}) - V^\pi(x_t) = 0$
- ▶ V^π est inconnue. On l'estime par \widehat{V}^π , donc :

$$r_t + \gamma \widehat{V}^\pi(x_{t+1}) - \widehat{V}^\pi(x_t) \neq 0$$
- ▶ on peut utiliser ce terme pour corriger \widehat{V}^π :

$$\widehat{V}_{k+1}^\pi(x_t) \leftarrow \widehat{V}_{k+1}^\pi(x_t) + \alpha[r_t + \gamma \widehat{V}_k^\pi(x_{t+1}) - \widehat{V}_k^\pi(x_t)]$$
- ▶ Différence temporelle.
- ▶ La même idée s'applique aussi dans un environnement stochastique.

Apprentissage par renforcement

Évaluation d'une politique dans un environnement inconnu : TD(0) [Sutton, 1984]

- ▶ dans l'algorithme de Monte Carlo, remplacer la somme des $\gamma^t r_t$ par l'utilisation de la différence temporelle :

sélectionner $x_0 \in \mathcal{X}$

$V[x_0] \leftarrow 0$

pour $i \in \{1,..N\}$ **faire**

$t \leftarrow 0$

tant-que $\gamma^k \geq \epsilon$ **faire**

choisir a_t en fonction de π

$(x_{t+1}, r_t) \leftarrow \text{simule}(x_t, a_t)$

$V[x_t] \leftarrow V[x_t] + \alpha(r_t + \gamma V[x_{t+1}] - V[x_t]))$

$t++$

fin tant-que

fin pour

Algorithme TD(0)

Apprentissage par renforcement

Trace d'éligibilité : TD(λ)

- ▶ Supposons à nouveau que tout soit déterministe $(\pi, \mathcal{P}, \mathcal{R})$
- ▶ Bellman à t : $V^\pi(x_t) = r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1})$
- ▶ à $t-1$, on peut écrire : $V^\pi(x_{t-1}) = r_{t-1} + \gamma V^\pi(x_t)$
- ▶ et combiner $V^\pi(x_{t-1}) = r_{t-1} + \gamma[r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1})]$
- ▶ autre formulation de la TD :

$$r_{t-1} + \gamma[r_t + \gamma V^\pi(x_{t+1})] - V^\pi(x_{t-1})$$
 nulle pour V^π , non nulle pour \widehat{V}^π .
- ▶ correction possible de $\widehat{V}^\pi(x_{t-1})$:

$$\widehat{V}_{k+1}^\pi(x_{t-1}) \leftarrow \widehat{V}_{k+1}^\pi(x_{t-1}) + \lambda \alpha [r_{t-1} + \gamma \widehat{V}_k^\pi(x_{t+1})] - \widehat{V}_k^\pi(x_{t-1})]$$
- ▶ et on peut continuer à remonter le temps
et mettre à jour tous les états par lesquels on est passé précédemment.

Algorithme TD(λ)

Apprentissage par renforcement

Trace d'éligibilité : TD + *rollouts*

- ▶ dans la mise à jour de $\text{TD}(0)$, $\text{TD}(\lambda)$:
$$V[x_t] \leftarrow V[x_t] + \alpha(r_t + \gamma V[x_{t+1}] - V[x_t]))$$
on peut remplacer $V[x_{t+1}]$ par une estimation Monte Carlo :
on effectue un certain nombre de trajectoires aléatoires pour « aller voir au-delà de l'état suivant ce qui va nous arriver ».Ces trajectoires se nomment des *rollouts*.
- ▶ idée simple mais puissante.

Apprentissage par renforcement

Apprentissage d'une politique optimale

- ▶ pour \hat{Q} , TD s'exprime par :
$$r_t + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}} \hat{Q}(x_{t+1}, a') - \hat{Q}(x_t, a_t)$$
- ▶ ↵ suivre une trajectoire et corriger \hat{Q} :
$$\hat{Q}(x_t, a_t) = \hat{Q}(x_t, a_t) + \alpha[r_t + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}} \hat{Q}(x_{t+1}, a') - \hat{Q}(x_t, a_t)]$$
- ▶ idée de l'algorithme Q-Learning

Apprentissage par renforcement

Q-Learning [Watkins, 1989]

initialiser $\hat{Q}(x, a)$, $k \leftarrow 0$

répéter

$t \leftarrow 0$, $n(x, a) \leftarrow 0$, $\forall (x, a)$

 Initialiser l'état de l'agent x_t

tant-que épisode non terminé **faire**

 sélectionner a_t

 effectuer cette action et observer r_t et x_{t+1}

$\hat{Q}(x_t, a_t) \leftarrow \hat{Q}(x_t, a_t) + \alpha(x_t, a_t)[r_t + \max_{a'} \hat{Q}(x_{t+1}, a') - \hat{Q}(x_t, a_t)]$

$n(x_t, a_t) ++$, $t ++$

fin tant-que

$k ++$

jusque ...

$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Q} = Q^*$ et $\pi^*(x) = \arg \max_a \hat{Q}(x, a)$, $\forall x$.

Apprentissage par renforcement

Convergence du Q-Learning

Pour un γ -PDM, sous les hypothèses vues plus haut, \hat{Q} converge asymptotiquement vers Q^* si $\sum \alpha = +\infty$ et $\sum \alpha^2 < +\infty$.

Apprentissage par renforcement

Sélectionner a_t

Q-Learning :

initialiser $\hat{Q}(x, a)$, $k \leftarrow 0$

répéter

$t \leftarrow 0$, $n(x, a) \leftarrow 0$, $\forall (x, a)$

Initialiser l'état de l'agent x_t

tant-que épisode non terminé **faire**

sélectionner a_t

effectuer cette action et observer r_t et x_{t+1}

$\hat{Q}(x_t, a_t) \leftarrow \hat{Q}(x_t, a_t) + \alpha(x_t, a_t)[r_t + \max_{a'} \hat{Q}(x_{t+1}, a') - \hat{Q}(x_t, a_t)]$

$n(x_t, a_t) ++$, $t ++$

fin tant-que

$k ++$

jusque ...

Apprentissage par renforcement

Sélectionner a_t

Idée générale :

- ▶ initialement, l'agent ne sait rien : il doit essayer (explorer).
- ▶ petit à petit, l'agent découvre les bonnes actions : il doit refaire les actions identifiées comme bonnes (exploiter).



- ▶ Apprentissage par essai-erreur.

Apprentissage par renforcement

Sélectionner a_t

- ▶ ϵ -decreasing greedy : $\epsilon \in [0, 1]$,

$$a_t = \begin{cases} \arg \max_a \hat{Q}(x_t, a) \text{ avec proba } 1 - \epsilon \\ \text{action choisie aléatoirement sinon} \end{cases}$$

Au fil des itérations, ϵ diminue : l'exploration diminue \rightsquigarrow choix glouton.

Apprentissage par renforcement

Sélectionner a_t

- ▶ ϵ -decreasing greedy : $\epsilon \in [0, 1]$,

$$a_t = \begin{cases} \arg \max_a \widehat{Q}(x_t, a) \text{ avec proba } 1 - \epsilon \\ \text{action choisie aléatoirement sinon} \end{cases}$$

Au fil des itérations, ϵ diminue : l'exploration diminue \rightsquigarrow choix glouton.

- ▶ proportionnel à \widehat{Q} :
probabilité de sélectionner chacune des actions $\propto \widehat{Q}(x_t, a)$:

$$Pr[a_t = a | x_t] = \frac{\widehat{Q}(x_t, a)}{\sum_b \widehat{Q}(x_t, b)}$$

Apprentissage par renforcement

Sélectionner a_t

- ▶ ϵ -decreasing greedy : $\epsilon \in [0, 1]$,

$$a_t = \begin{cases} \arg \max_a \hat{Q}(x_t, a) \text{ avec proba } 1 - \epsilon \\ \text{action choisie aléatoirement sinon} \end{cases}$$

Au fil des itérations, ϵ diminue : l'exploration diminue \rightsquigarrow choix glouton.

- ▶ proportionnel à \hat{Q} :

probabilité de sélectionner chacune des actions $\propto \hat{Q}(x_t, a)$:

$$Pr[a_t = a | x_t] = \frac{\hat{Q}(x_t, a)}{\sum_b \hat{Q}(x_t, b)}$$

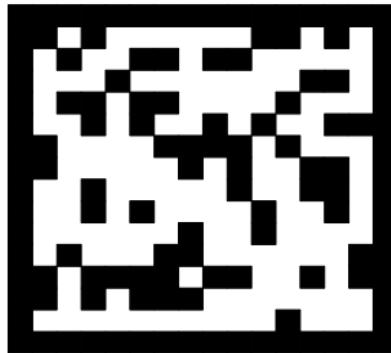
- ▶ softmax, Boltzmann = proportionnelle + contrôle de l'exploration

$$Pr[a_t = a | x_t] = \frac{e^{\frac{\hat{Q}(x_t, a)}{\tau}}}{\sum_b e^{\frac{\hat{Q}(x_t, b)}{\tau}}}$$

τ grand : exploration ; τ proche de 0 : exploitation (glouton).

Apprentissage par renforcement

Q-Learning dans un labyrinthe

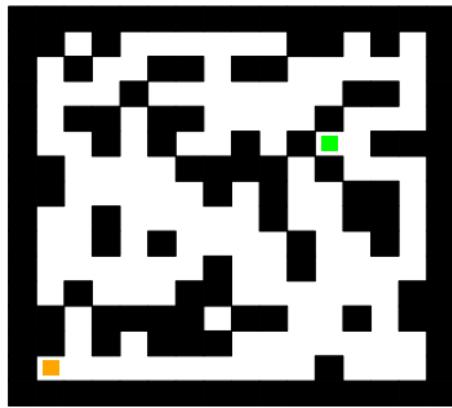


- ▶ les cases du labyrinthe sont numérotées
- ▶ x : le numéro de la case où se trouve l'agent
- ▶ \mathcal{X} : l'ensemble des numéros de case
- ▶ $\mathcal{A} = \{\leftarrow, \uparrow, \downarrow, \rightarrow\}$.
- ▶ On suppose que les actions ont un effet déterministe
- ▶ $\mathcal{R}(x, a, \text{sortie}) = 1, \mathcal{R}(x, a, \neq \text{sortie}) = 0$

Apprentissage par renforcement

Q-Learning en action

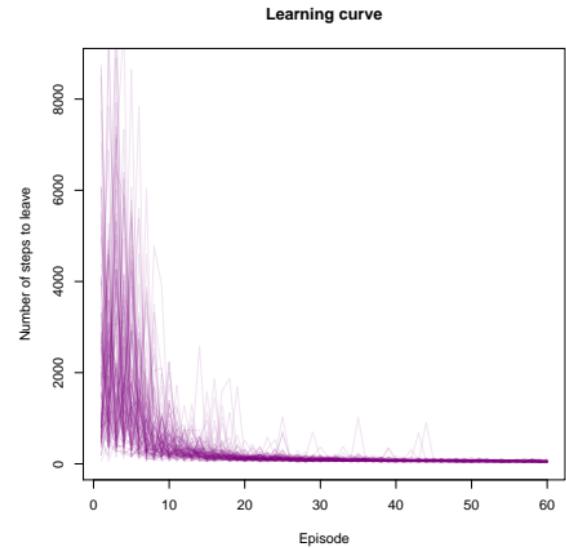
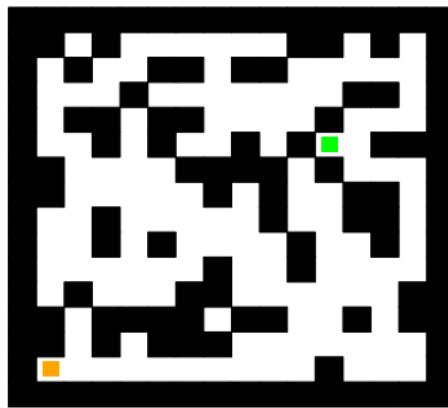
On utilise une implantation très élémentaire du Q-Learning.



Apprentissage par renforcement

Q-Learning en action

On utilise une implantation très élémentaire du Q-Learning.



Apprentissage par renforcement

Q-Learning en action

1ère atteinte



Apprentissage par renforcement

Q-Learning en action

1ère atteinte



10è atteinte



Apprentissage par renforcement

Q-Learning en action

1ère atteinte



10è atteinte



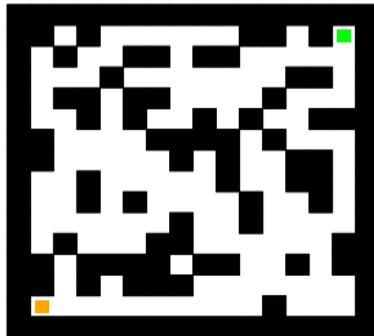
60è atteinte



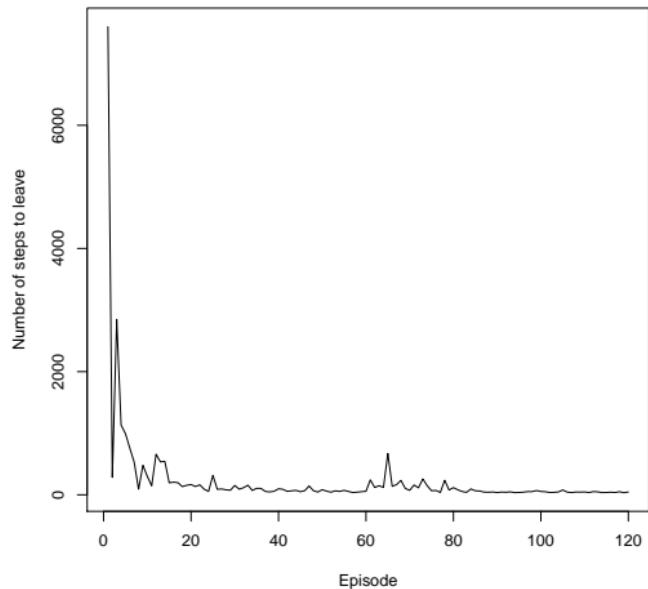
Apprentissage par renforcement

Le Q-Learning s'adapte continuellement à son environnement

La cellule cible bouge un peu :



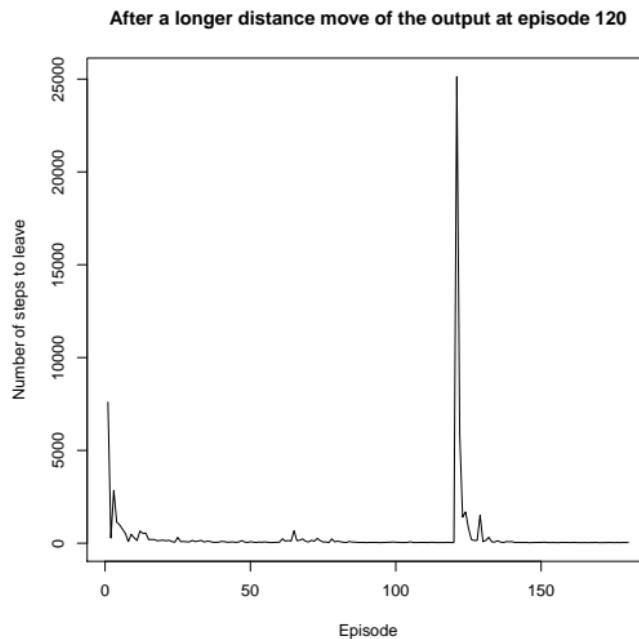
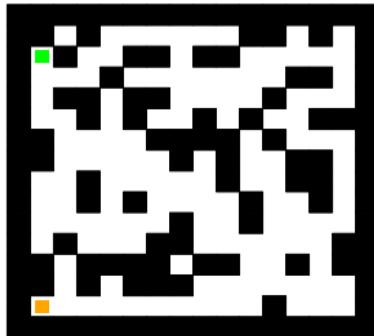
After a small distance move of the output at episode 60



Apprentissage par renforcement

Le Q-Learning s'adapte continuellement à son environnement

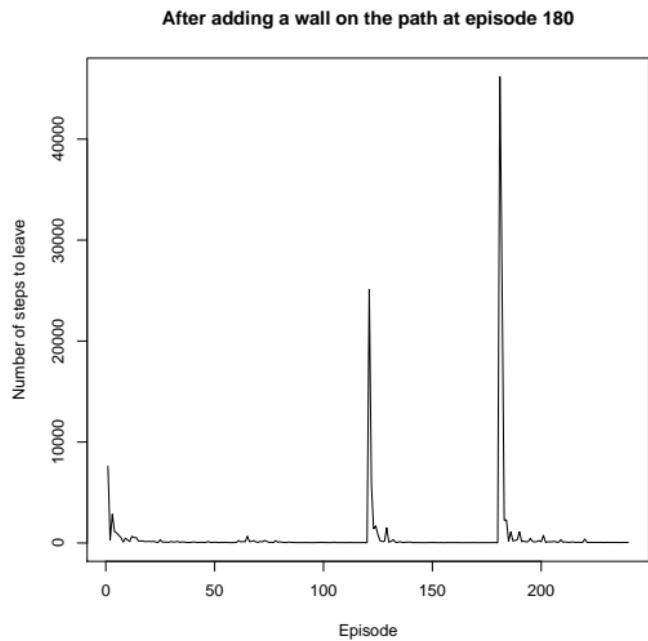
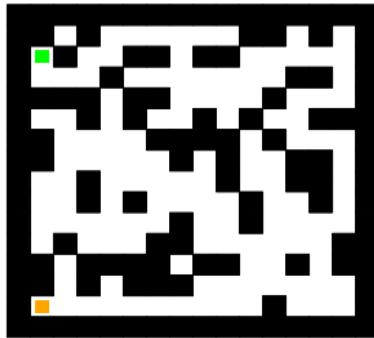
La cellule cible bouge plus loin :



Apprentissage par renforcement

Le Q-Learning s'adapte continuellement à son environnement

Blocage du chemin trouvé :



Apprentissage par renforcement

Au-delà de la version tabulaire

- ▶ Version « tabulaire » du Q-Learning : \hat{Q} est représenté dans une table.

Apprentissage par renforcement

Au-delà de la version tabulaire

- ▶ Version « tabulaire » du Q-Learning : \hat{Q} est représenté dans une table.
- ▶ \mathcal{X} grand ?

Apprentissage par renforcement

Au-delà de la version tabulaire

- ▶ Version « tabulaire » du Q-Learning : \hat{Q} est représenté dans une table.
- ▶ \mathcal{X} grand ?
- ▶ Impossible de stocker Q dans une table.

Apprentissage par renforcement

Au-delà de la version tabulaire

- ▶ Version « tabulaire » du Q-Learning : \hat{Q} est représenté dans une table.
- ▶ \mathcal{X} grand ?
- ▶ Impossible de stocker Q dans une table.
- ▶ Utilisation d'un approximateur de fonctions : remplacement de la table Q $[x, a]$ par une fonction $Q(x, a)$.

Apprentissage par renforcement

Au-delà de la version tabulaire

- ▶ Version « tabulaire » du Q-Learning : \hat{Q} est représenté dans une table.
- ▶ \mathcal{X} grand ?
- ▶ Impossible de stocker Q dans une table.
- ▶ Utilisation d'un approximateur de fonctions : remplacement de la table $Q[x, a]$ par une fonction $Q(x, a)$.
- ▶ $Q(x, a)$ retourne $\hat{Q}(x, a)$.

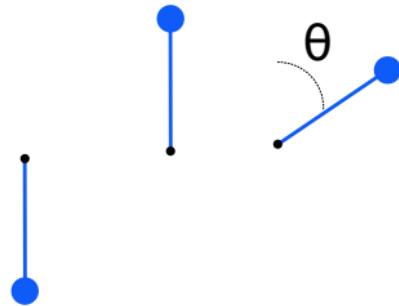
Apprentissage par renforcement

Au-delà de la version tabulaire

- ▶ Version « tabulaire » du Q-Learning : \hat{Q} est représenté dans une table.
- ▶ \mathcal{X} grand ?
- ▶ Impossible de stocker Q dans une table.
- ▶ Utilisation d'un approximateur de fonctions : remplacement de la table Q $[x, a]$ par une fonction $Q(x, a)$.
- ▶ $Q(x, a)$ retourne $\hat{Q}(x, a)$.
- ▶ Cette estimation est mise à jour/améliorée itérativement par apprentissage.
La fonction est paramétrée : mise à jour = modification de la valeur de ces paramètres θ .

Apprentissage par renforcement

Fonction valeur

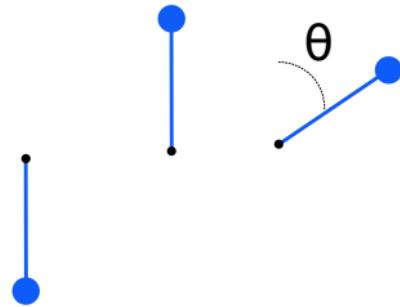


$$x = (\theta, \dot{\theta})$$
$$a = \ddot{\theta}$$

ζ : tenir l'équilibre le plus longtemps possible

Apprentissage par renforcement

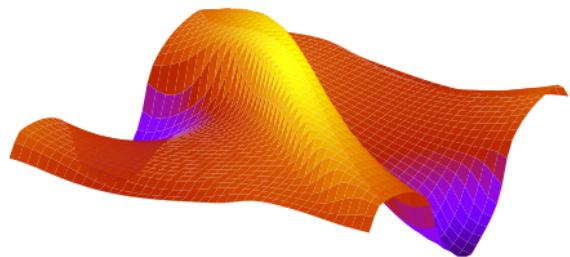
Fonction valeur



$$x = (\theta, \dot{\theta})$$

$$a = \ddot{\theta}$$

ζ : tenir l'équilibre le plus longtemps possible



plan $(\theta, \dot{\theta})$
 z est $V(x)$
 Maximiser la valeur \rightsquigarrow
 atteindre le sommet de V

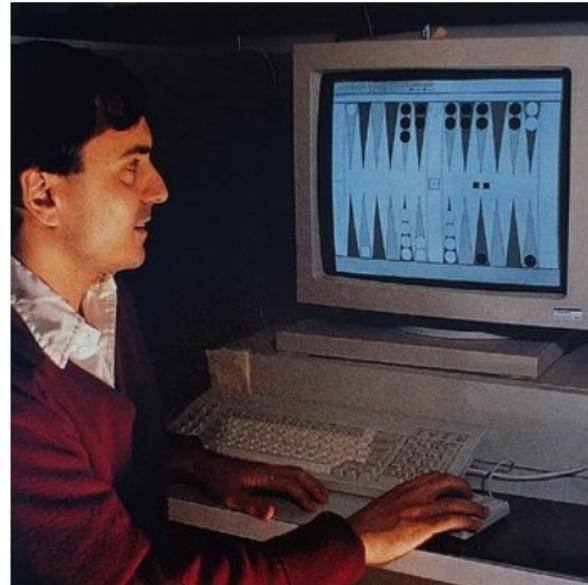
Apprentissage par renforcement

Grands espaces d'états : le zoo des approximatrices de fonctions

- ▶ table avec raffinement progressif.
- ▶ forêts aléatoires [Geurts et al., 2006],
- ▶ SVM et machines à noyau,
- ▶ réseaux de neurones [Lin, 1991 ; Tesauro, 1991, 1992, 1994, 1995 ; Riedmiller, 2005 ; ...],
- ▶ ...

Apprentissage par renforcement

Un premier résultat remarquable : TD-Gammon



Apprentissage par renforcement

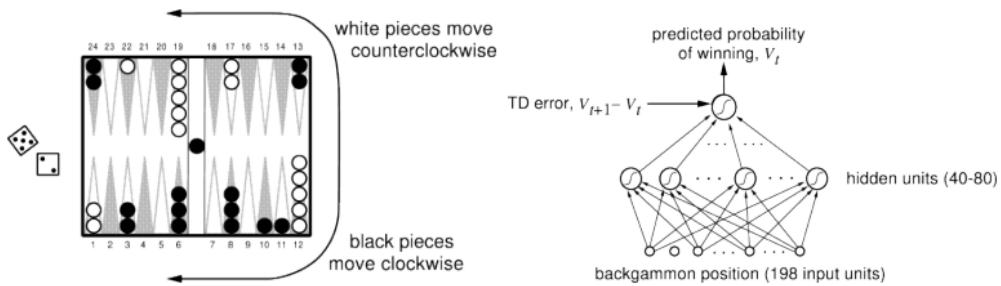
TD-Gammon

- ▶ Backgammon étudié depuis au moins 1974.
- ▶ Facteur de branchement : 800.
- ▶ TD-Gammon : « successeur de Neurogammon, entraîné par apprentissage supervisé.
- ▶ Représentation de la configuration du plateau de jeu.
- ▶ Entraîné par $\text{TD}(\lambda)$.
- ▶ Apprend en jouant contre lui-même.
- ▶ Attributs conçus à la main (pas d'autre connaissance experte).
- ▶ Examine trois coups en avant dans la v3.

Tesauro, Temporal Difference Learning and TD-Gammon, *Communications of the ACM*, 1995

Apprentissage par renforcement

TD-Gammon



Apprentissage par renforcement

DQN : Q-learning avec réseau de neurones

Apprentissage par renforcement

DQN : Q-learning avec réseau de neurones

- ▶ Dans le Q-learning, on remplace la table Q par un réseau de neurones.
- ▶ Ce réseau prend en entrée un état x et une action a et produit en sortie $\hat{Q}(x, a)$

Apprentissage par renforcement

DQN

initialiser les paramètres θ de la fonction $Q(x, a)$, $k \leftarrow 0$

répéter

$t \leftarrow 0$, $n(x, a) \leftarrow 0$, $\forall (x, a)$

Initialiser l'état de l'agent x_t

tant-que épisode non terminé **faire**

pour $k \in \{1, \dots, K\}$ **faire**

sélectionner a_t

effectuer cette action et observer r_t et x_{t+1}

transition $[k] \leftarrow (x_t, a_t, r_t, x_{t+1})$

$t++$

fin pour

mettre à jour les θ **pour minimiser l'erreur TD sur les** K **transitions**

fin tant-que

$k++$

jusque ...

Permet d'entraîner le réseau sur un lôt de données.

Apprentissage par renforcement

DQN : avec *replay buffer*

initialiser les paramètres θ de la fonction $Q(x, a)$, $k \leftarrow 0$

répéter

$t \leftarrow 0$, $n(x, a) \leftarrow 0$, $\forall(x, a)$

Initialiser l'état de l'agent x_t

tant-que épisode non terminé **faire**

pour $k \in \{1, \dots, K\}$ **faire**

sélectionner a_t

effectuer cette action et observer r_t et x_{t+1}

ajouter (x_t, a_t, r_t, x_{t+1}) aux transitions

$t++$

fin pour

mettre à jour les θ pour minimiser l'erreur TD mesurée sur **un échantillon** des transitions

fin tant-que

$k++$

jusque ...

Rend les données d'entraînement du réseau plus i.i.d.

Apprentissage par renforcement

DQN : avec *target network*

```

initialiser deux jeux de paramètres  $\theta'$  et  $\theta''$  pour la fonction  $Q(x, a, \theta)$ ,  $k \leftarrow 0$ 
répéter
     $t \leftarrow 0$ ,  $n(x, a) \leftarrow 0, \forall (x, a)$ 
    Initialiser l'état de l'agent  $x_t$ 
    tant-que épisode non terminé faire
        pour  $k \in \{1, \dots, K\}$  faire
            sélectionner  $a_t$  en utilisant  $\theta'$ 
            effectuer cette action et observer  $r_t$  et  $x_{t+1}$ 
            ajouter  $(x_t, a_t, r_t, x_{t+1})$  aux transitions
             $t++$ 
        fin pour
        mettre à jour les  $\theta''$  pour minimiser l'erreur TD mesurée sur un échantillon des transitions
    fin tant-que
     $k++$ 
    de temps en temps, échanger  $\theta'$  et  $\theta''$ 
jusque ...

```

Rend l'apprentissage plus stable.

Apprentissage par renforcement

DQN : avec *target network*

```

initialiser deux jeux de paramètres  $\theta'$  et  $\theta''$  pour la fonction  $Q(x, a, \theta)$ ,  $k \leftarrow 0$ 
répéter
     $t \leftarrow 0$ ,  $n(x, a) \leftarrow 0, \forall (x, a)$ 
    Initialiser l'état de l'agent  $x_t$ 
    tant-que épisode non terminé faire
        pour  $k \in \{1, \dots, K\}$  faire
            sélectionner  $a_t$  en utilisant  $\theta'$ 
            effectuer cette action et observer  $r_t$  et  $x_{t+1}$ 
            ajouter  $(x_t, a_t, r_t, x_{t+1})$  aux transitions
             $t++$ 
        fin pour
        mettre à jour les  $\theta''$  pour minimiser l'erreur TD mesurée sur un échantillon des transitions
    fin tant-que
     $k++$ 
    de temps en temps, échanger  $\theta'$  et  $\theta''$ 
jusque ...

```

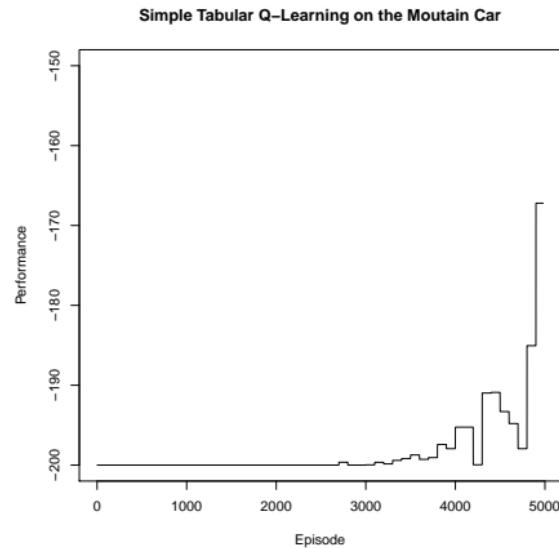
Rend l'apprentissage plus stable.

DQN : + beaucoup d'autres trucs.

Apprentissage par renforcement

DQN et la voiture sur la colline

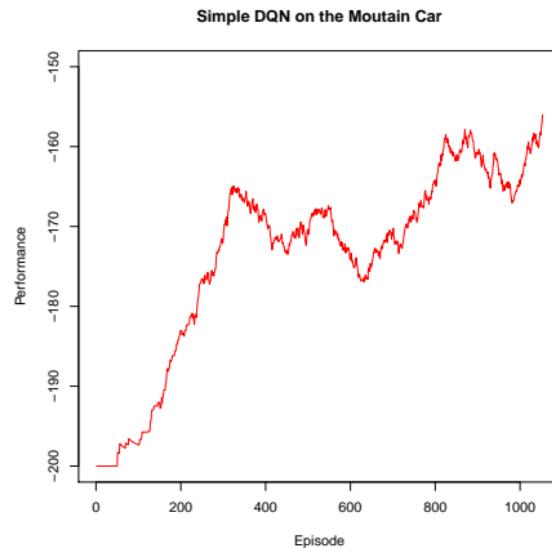
DQN avec un réseau ayant une couche cachée (ReLU).



Apprentissage par renforcement

DQN et la voiture sur la colline

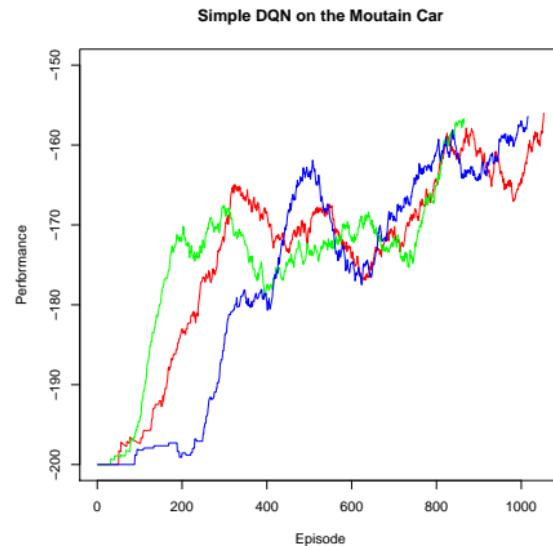
DQN avec un réseau ayant une couche cachée (ReLU).



Apprentissage par renforcement

DQN et la voiture sur la colline

DQN avec un réseau ayant une couche cachée (ReLU).

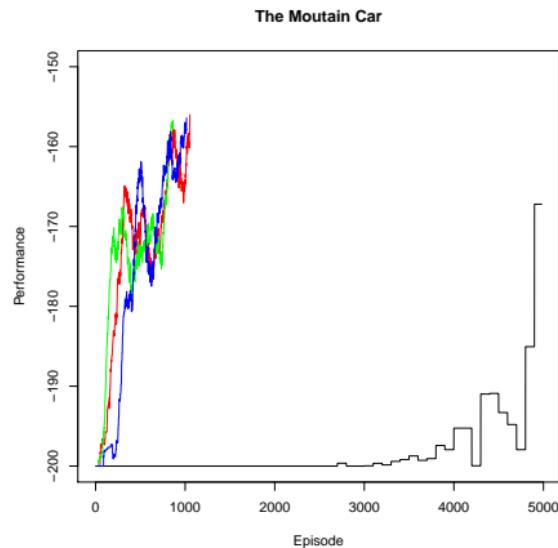


bleu : 32 neurones cachés ; vert : 64 ; rouge : 128

Apprentissage par renforcement

DQN et la voiture sur la colline

DQN avec un réseau ayant une couche cachée (ReLU).

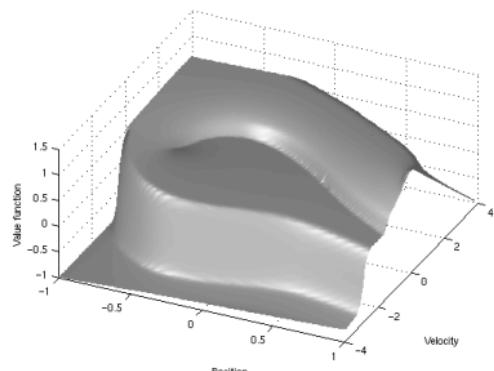


Q-Learning

- ▶ la convergence du Q-Learning tabulaire n'est pas facile à montrer
- ▶ la convergence du Q-Learning avec approximateur de fonctions n'est pas garantie.
- ▶ les fondements théoriques du Q-Learning sont encore à l'étude ; on peut espérer que la théorie apportera un algorithme plus efficace.

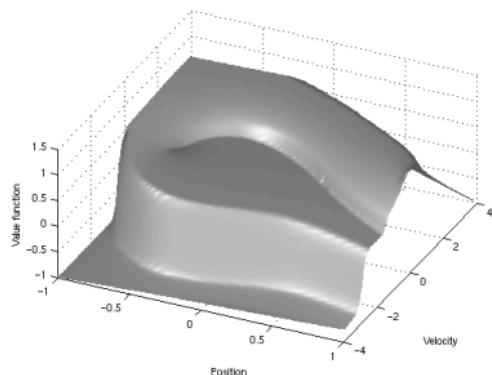
Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique

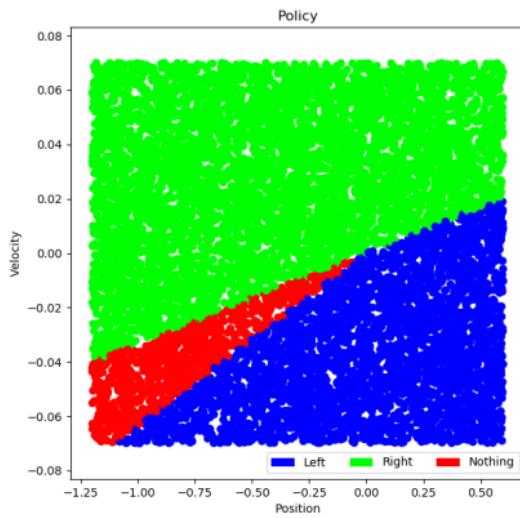
 V^* π^*

Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique



$$V^*$$



$$\pi^*$$

Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique

- ▶ Un réseau représente une politique $\pi(x, a) : \theta \rightsquigarrow \pi_\theta$.
 - ▶ Entrée du réseau = état x .
 - ▶ $|\mathcal{A}|$ sorties du réseau = probabilités d'émettre chacune des actions a dans x
- ▶ comment mettre à jour θ avec des informations de transitions ?

Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique

- ▶
- ▶ minimiser $\mathcal{L} = - \sum_{e,t} Q_{e,t} \log (\pi_\theta(x_{e,t}, a_{e,t}))$
- ▶ idée : augmenter la probabilité d'émission une bonne action dans un état donné, et réduire celle d'émettre une mauvaise action.

Apprentissage par renforcement

REINFORCE [Williams, 1991 ; Sutton et al. 2000]

Apprentissage direct de politique pour une tâche épisodique

initialiser les poids θ du réseau π_θ

répéter

effectuer E épisodes et collecter les $(x_{e,t}, a_{e,t}, r_{e,t}, x_{e,t+1})$

$\forall (e, t)$, calculer $Q_{e,t} = \sum_k \gamma^k r_{t+k}$

// $Q_{e,t}$ est une estimation (Monte Carlo) de $Q(x_{e,t}, a_{e,t})$

Calculer $\mathcal{L} = -\sum_{e,t} Q_{e,t} \log (\pi_\theta(x_{e,t}, a_{e,t}))$.

Mettre à jour les θ pour minimiser \mathcal{L}

jusque convergence

Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique vs. DQN

- ▶ REINFORCE optimise directement la politique

Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique vs. DQN

- ▶ REINFORCE optimise directement la politique
- ▶ REINFORCE nécessite de nouvelles trajectoires (interactions avec l'environnement) pour chaque mise à jour des θ .

Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique vs. DQN

- ▶ REINFORCE optimise directement la politique
- ▶ REINFORCE nécessite de nouvelles trajectoires (interactions avec l'environnement) pour chaque mise à jour des θ .
- ▶ pas vraiment de raison théorique pour dire que REINFORCE ou DQN est meilleur d'un point de vue pratique : il faut essayer.

Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique vs. DQN

- ▶ REINFORCE optimise directement la politique
- ▶ REINFORCE nécessite de nouvelles trajectoires (interactions avec l'environnement) pour chaque mise à jour des θ .
- ▶ pas vraiment de raison théorique pour dire que REINFORCE ou DQN est meilleur d'un point de vue pratique : il faut essayer.
- ▶ dans REINFORCE, le gradient est proportionnel à $Q_{e,t}$ qui peut varier beaucoup d'un épisode à un autre.
Cela rend l'apprentissage instable.
Solution classique consiste à soustraire une valeur constante aux termes $Q_{e,t} \rightsquigarrow (Q_{e,t} - b)$

Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique vs. DQN

- ▶ REINFORCE optimise directement la politique
- ▶ REINFORCE nécessite de nouvelles trajectoires (interactions avec l'environnement) pour chaque mise à jour des θ .
- ▶ pas vraiment de raison théorique pour dire que REINFORCE ou DQN est meilleur d'un point de vue pratique : il faut essayer.
- ▶ dans REINFORCE, le gradient est proportionnel à $Q_{e,t}$ qui peut varier beaucoup d'un épisode à un autre.
Cela rend l'apprentissage instable.
Solution classique consiste à soustraire une valeur constante aux termes $Q_{e,t} \rightsquigarrow (Q_{e,t} - b)$
- ▶ REINFORCE a tendance à peu explorer.
On corrige cela en ajoutant un terme à \mathcal{L} qui force l'exploration en empêchant l'agent d'être trop sûr de lui (maximiser l'entropie de $\pi(x, .)$).

Apprentissage par renforcement

Apprentissage direct de politique



Apprentissage par renforcement

Acteur-critique



Apprentissage par renforcement

Acteur-critique : A2C

initialiser les poids θ du réseau

répéter

effectuer E épisodes et collecter les $(x_{e,t}, a_{e,t}, r_{e,t}, x_{e,t+1})$

$\forall (e, t)$, calculer $Q_{e,t} = \sum_k \gamma^k r_{t+k}$

// $Q_{e,t}$ est une estimation (Monte Carlo) de $Q(x_{e,t}, a_{e,t})$

Calculer $\mathcal{L} = -\sum_{e,t} Q_{e,t} \log (\pi_\theta(x_{e,t}, a_{e,t}))$.

Mettre à jour les θ pour minimiser \mathcal{L}

jusque convergence

Apprentissage par renforcement

Acteur-critique



Apprentissage par renforcement

Avec modèle

- ▶ utilisation d'un modèle (imparfait) de l'environnement
- ▶ apprentissage d'un modèle (imparfait) de l'environnement

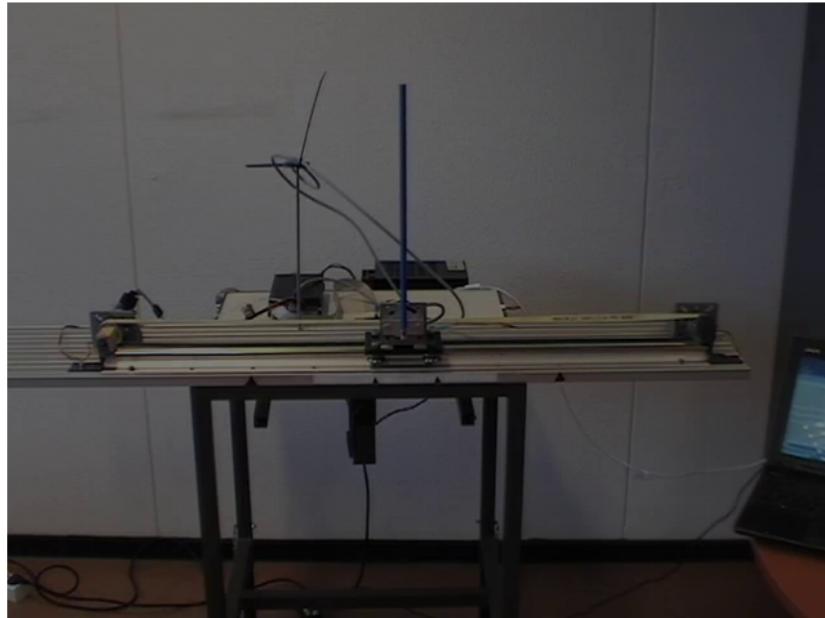
Apprentissage par renforcement

Applications



Apprentissage par renforcement

Application en robotique



Riedmiller, Neural reinforcement learning to swing-up and balance a real pole, *Proc. 2005 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*

Apprentissage par renforcement

Application en robotique



Lauer et al., Cognitive Concepts in Autonomous Soccer Playing Robots, *Cognitive Systems Research*, 11(3), 287 :309, September, 2010
(No Deep Learning! only shallow multi-layer perceptron)

Apprentissage par renforcement

Application : Guesswhat ? !

- ▶ Learning to dialog in natural language by RL.
- ▶ Usually, spoken dialog systems are rule based, or trained by supervised learning.

Apprentissage par renforcement

Application : Guesswhat ? !

- ▶ 2 player game : oracle and guesser
- ▶ oracle : assigned an object in a picture
- ▶ guesser : has to locate the object by asking yes-no questions to the oracle, which has to answer correctly the questions.
- ▶ formulated as an RL problem



Is it a person? **No**
 Is it an item being worn or held? **Yes**
 Is it a snowboard? **Yes**
 Is it the red one? **No**
 Is it the one being held by the person in blue? **Yes**



Is it a cow? **Yes**
 Is it the big cow in the middle? **No**
 Is the cow on the left? **No**
 On the right? **Yes**
 First cow near us? **Yes**

- ▶ Trained on 70k images, 134 k unique objects, 800k Q&A pairs

Apprentissage par renforcement

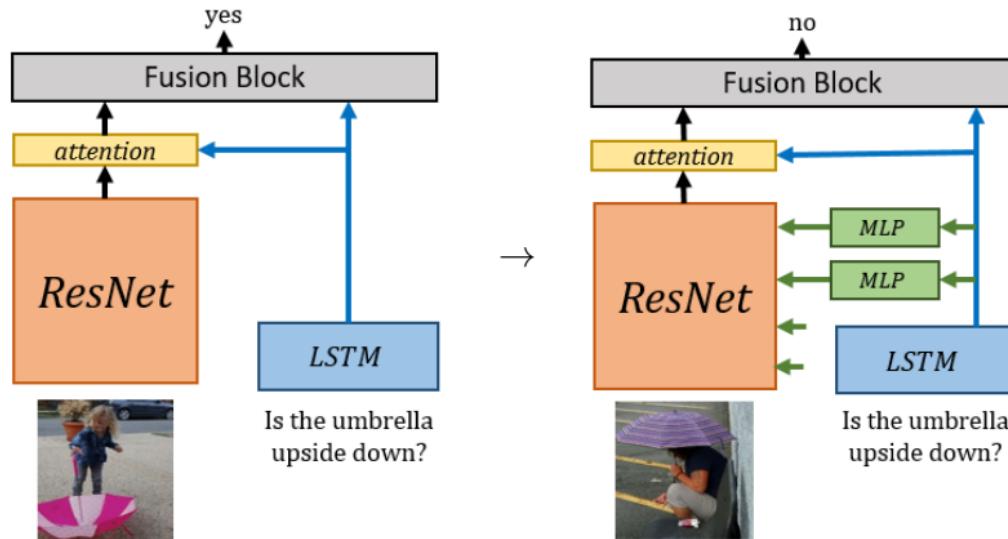
Application : Guesswhat ? !

- ▶ End-to-end : from raw pngs to dialogs
- ▶ RL performs better than supervised learning
- ▶ Learning to dialog through a picture
- ▶ Deep reinforcement learning
- ▶ Combines vision + language : Resnet + LSTM

Apprentissage par renforcement

Application : Guesswhat ?! : Modulating vision by language, ...

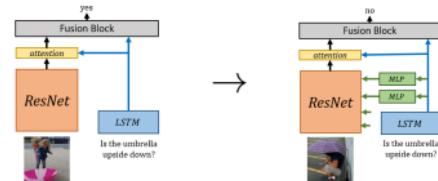
- ▶ Vision is modulated by language :



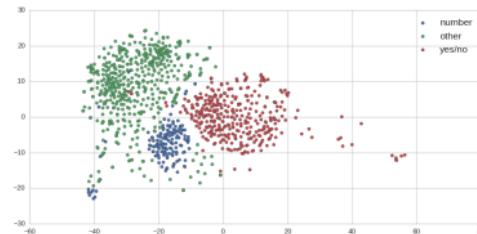
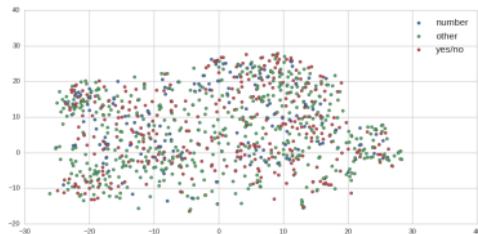
Apprentissage par renforcement

Application : Guesswhat ?! : Modulating vision by language, ...

- ▶ Vision is modulated by language :



- ▶ Modulation improve embedding :



<https://guesswhat.ai/>

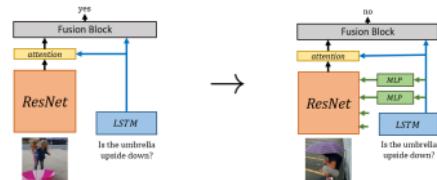
Partially funded by  Interactive Grounded Language Understanding

in collaboration with  MILA, and researchers from Deepmind, and Google Brain.

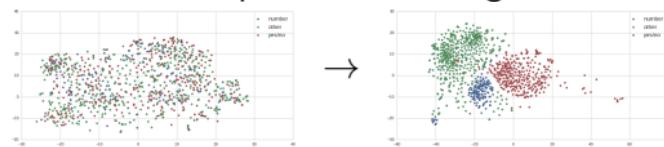
Apprentissage par renforcement

Application : Guesswhat ?! : Modulating vision by language, ...

- ▶ Vision is modulated by language :



- ▶ Modulation improve embedding :



- ▶ Modulation may be used beyond vision : any “signal” might be modulated.

<https://guesswhat.ai/>

Partially funded by  Interactive Grounded Language Understanding

in collaboration with  MILA, and researchers from Deepmind, and Google Brain.

Apprentissage par renforcement

Application : board games

- ▶ Learning to play board games using only the rules of the game
- ▶ Alpha Go learned to play Go by using games played by humans
- ▶ Alpha Zero learned to play even better by itself by RL.
- ▶ then other board games (chess, draughts, reversi, ...)
- ▶ then Starcraft II

Apprentissage par renforcement

Alpha Zero type of algorithms

- ▶ RL
- ▶ + various tricks to stabilize learning and make it more efficient
- ▶ MCTS as a key component
- ▶ moderately deep network as function approximator

Apprentissage par renforcement

Applications au développement durable

- ▶
- ▶ contrôle de *smartgrids*
- ▶ apprentissage de pratiques en agriculture
- ▶

Queqlues sujets chauds en RL

- ▶ apprentissage hiérarchique ; apprentissage d'options
- ▶ apprentissage de représentation
- ▶ généralisation
- ▶ environnements variant au fil du temps (non stationnaire)
- ▶ transfert de compétences
- ▶ apprentissage continu
- ▶ explicabilité/transparence d'un comportement appris
- ▶ la théorie est en retard par rapport à la pratique mais quand elle s'applique, la théorie a un impact significatif sur la conception et l'implantation d'algorithmes

Take home message

- ▶ De nombreux problèmes peuvent bénéficier d'un point de vue « prise de décision séquentielle dans l'incertain ».



Pas seulement les jeux.

Take home message

- ▶ De nombreux problèmes peuvent bénéficier d'un point de vue « prise de décision séquentielle dans l'incertain ».



Pas seulement les jeux.

- ▶ L'apprentissage par renforcement est plus performant que l'apprentissage supervisé.

Bibliographie

- ▶ Bertsekas, *Neurodynamic Programming*, Athena Scientific, 1996
- ▶ Bertsekas, *Dynamic programming and optimal control*, Athena Scientific
- ▶ Goodfellow et al., *The Deep Learning Book*, MIT Press, 2016, the-deep-learning-book.org
- ▶ François-Lavet et al., *An Introduction to Deep Reinforcement Learning*, Foundations and Trends in Machine Learning : Vol. 11, No. 3-4.,
<https://arxiv.org/pdf/1811.12560.pdf>
- ▶ Powell, , ...
- ▶ Puterman, *Markov decision processes*, Wiley, 1994
- ▶ Sutton, Barto, *Reinforcement Learning*, 2nd ed, MIT Press, 2018,
<http://incompleteideas.net/book/the-book-2nd.html>
- ▶ Tesauro, Temporal Difference Learning and TD-Gammon, *Communications of the ACM*, 1995

Bibliographie

- ▶ [Bellman, 1957] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, 1957.
- ▶ [Howard, 1960] R.A. Howard, *Dynamic Programming and Markov Processes*, The M.I.T. Press, 1960.
- ▶ [Le Cun, 1987] Y. Le Cun, *Modèles connexionnistes de l'apprentissage*, thèse de doctorat, U. Paris 6
- ▶ [Munos, Moore, 2002] R. Munos, A. Moore, Variable Resolution Discretization in Optimal Control, *Machine Learning Journal*, **49**, 291 :323.
- ▶ [Rumelhart *et al.* 1986] D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, R.J. Williams, Learning Internal Representations by Error Propagation, In *Parallel Distributed Processing : Explorations in the Microstructure of Cognition. Volume 1 : Foundations*, chapitre 8. Cambridge : MIT Press.
- ▶ [Sutton, 1984] R.S. Sutton, *Temporal credit assignment in reinforcement learning*, Ph.D. dissertation, Department of Computer Science, University of Massachusetts.
- ▶ [Sutton *et al.* 2000] R.S. Sutton, D. McAllester, S. Singh, Y. Mansour, Policy Gradient Methods for Reinforcement Learning with Function Approximation. *Advances in Neural Information Processing Systems 1999*, pp. 1057-1063.
- ▶ [Werbos, 1974] P. Werbos, *Beyond regression : new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences*, PhD dissertation, Harvard University
- ▶ [Williams, 1991] R.J. Williams, Simple statistical gradient-following algorithms for connectionist reinforcement learning, *Machine Learning*, **8**(3-4) :229–256.









