

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les systèmes non-linéaires sans oser le demander

Philippe Preux*

Mai 1997

Révisé le 28 septembre 2004

Avertissement

Ce texte a pour objectif de rendre les systèmes dynamiques non linéaires intuitivement compréhensibles à toute personne désireuse de savoir ce qu'ils sont. Ces systèmes revêtent une importance capitale pour tout scientifique aujourd'hui. Un certain nombre de concepts fondamentaux leur sont attachés, concepts qu'il est fort utile de maîtriser.

1 Introduction

Les systèmes dynamiques constituent un outil mathématique. à ce titre, je les compare avec l'analyse que l'on étudie au lycée et durant les premières années de fac de maths. Cet outil s'intéresse à l'étude de fonctions définies par un système d'équations différentielles ordinaires. Ce système d'équations définit par là-même un champ de vecteurs. Cet outil permet de répondre, ou de proposer des pistes pour répondre à des questions du genre : si l'on place une particule dans le champ de vecteurs, quel va être le comportement de cette particule ? va-t-elle évoluer vers un point d'où elle ne bougera plus, ou un ensemble de points dans lequel elle va osciller, ... ? quelle est la topologie de cet ensemble de points ? Le flux de vecteurs est paramétré par des paramètres de contrôle. Aussi, on s'intéresse à savoir si le flux varie quand la valeur de ces paramètres varie, pour quelles valeurs interviennent des changements de régime et quantifier ces changements de régime qui influent sur la dynamique des particules lâchées dans le flux. à cet outil est associé un formalisme dans lequel on peut tenter de formuler le problème que l'on désire étudier pour pouvoir appliquer l'arsenal des méthodes des systèmes dynamiques. Ainsi, on peut s'attaquer à l'étude de systèmes couplés dont le comportement d'ensemble est décrit à l'aide de variables collectives. Il s'agit ensuite d'étudier l'évolution de ces variables collectives avec l'appareil des systèmes dynamiques.

Pour préciser un peu le domaine d'applicabilité de l'outil que je vais décrire, sachons que l'on traite du comportement asymptotique d'un système puisque l'on étudie la question : tel système

*Philippe.Preux@lil.univ-littoral.fr, Laboratoire d'Informatique du Littoral, BP 719, 62228 Calais Cedex, France. Tout commentaire est le bienvenu.

converge-t-il et, si oui, vers quoi ? Par ailleurs, on ne traitera ici que de systèmes déterministes. Ainsi, on connaît parfaitement les lois d'évolution du système ; il n'y a pas de bruit. Il est intéressant de noter que bien qu'en se restreignant à ce type de systèmes, des comportements extrêmement complexes peuvent apparaître (« chaos ») dès que le système est non-linéaire (ce qui est le cas de tous les systèmes réels) ; aussi, la possibilité d'un comportement chaotique n'est absolument pas due à un manque de connaissance sur les lois d'évolution du système. Autre caractéristique importante des systèmes dynamiques non-linéaires, leur comportement asymptotique ne dépend pas des conditions initiales (contrairement aux systèmes linéaires) ; au contraire, le comportement asymptotique ne dépend que de la structure du système.

Ce texte est organisé de la manière suivante : tout d'abord, on définit précisément ce que nous appelons un système dynamique et quelques termes connexes. Un système est caractérisé par sa dimension (nombre de variables qui interviennent dans sa définition). Nous nous intéressons donc tout d'abord aux systèmes les plus simples, ceux de dimension 1. Cet exposé est capital car nous mettons en évidence des phénomènes génériques que nous retrouverons dans les systèmes de dimension supérieure. On aborde ensuite les systèmes de dimension deux, lesquels sont particulièrement importants dans la pratique car nous pouvons décrire avec eux la dynamique de systèmes oscillants. Enfin, nous nous lançons dans les systèmes de dimension supérieure à 2 où des comportements dits « chaotiques » sont susceptibles d'apparaître. Ces comportements sont particulièrement fréquents dans les systèmes réels naturels. Aussi, il est important de bien comprendre cette notion. On a essayé de ponctuer l'exposé de remarques dont la lecture n'est pas indispensable et qui ont donc été imprimées en petits caractères. Par ailleurs, le but n'étant pas de proposer un cours formel sur les systèmes dynamiques, les mathématiques ont été évitées autant que possible dans le corps du texte.

2 Définitions préliminaires

Nous introduisons quelques termes fondamentaux dans cette section.

Définition 1 *Un système dynamique est un système d'équations stipulant l'évolution temporelle d'une quantité \mathbf{x} .*

Notons x_i les composantes de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. n est la dimension du système.

Il existe deux types de systèmes dynamiques :

- ceux où le temps s'écoule de manière continue et où l'évolution de \mathbf{x} est décrite par un système d'équations différentielles ordinaires (SEDO), *i.e.* :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

On notera F la fonction dont les composantes sont les f_i . Si F ne dépend pas du temps, on dit que le système est autonome. Ce système d'équations définit un champ de vecteurs. Dans la suite, on s'intéresse exclusivement aux systèmes autonomes.

- les applications (ou transformations¹) où le temps s'écoule de manière discrète et où l'évolution de \mathbf{x} est décrite par un système d'équations de récurrence donnant \mathbf{x}_{t+1} en fonction de \mathbf{x}_t .

On peut transformer un SEDO en une application en s'intéressant à la suite des valeurs prises par \mathbf{x} à des instants $t = nT$ où T est la période. On obtient alors une application de Poincaré (cf. section 4.7). À l'inverse, on peut transformer une application en un SEDO par une « suspension de l'application ».

Remarque

Si un système est décrit par une équation différentielle d'ordre supérieur à 1, on peut toujours le mettre sous la forme requise ci-dessus. Par exemple, considérons le pendule amorti d'équation $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$. On le ré-écrit aisément :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{-by - kx}{m} \end{cases}$$

Définition 2 Si la partie droite des équations du SEDO est une combinaison linéaire des composantes de \mathbf{x} , le système est qualifié de « linéaire ». Au contraire, si la partie droite comporte des produits de composantes, le système est qualifié de « non-linéaire ».

Exemple : le système

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + b \\ \dot{y} = cy + d \end{cases}$$

est linéaire.

Exemple : le système défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = bxy \end{cases}$$

est non-linéaire.

Remarque

Les non linéarités sont dues aux interactions entre les composants d'un système, donc entre ses différentes dimensions, c'est-à-dire entre les différentes variables décrivant le système. Aussi, elles sont fondamentalement importantes pour une description pertinente de la dynamique d'un système. Ces non linéarités sont à l'origine du « couplage » entre les variables et décrivent donc les rétro-actions entre elles.

Ayant compris que les non linéarités couplent les variables entre-elles, on comprend immédiatement que l'étude (expérimentale) d'une dimension (donc, la mesure d'une quantité représentative de la dynamique du système) contient de l'information (et même TOUTE l'information) concernant les variables auxquelles elle est couplée. Ceci est très important d'un point de vue expérimental car toutes les variables décrivant la dynamique d'un système ne sont pas forcément mesurables aisément. Donc, la mesure d'une variable peut fournir la mesure d'autres grandeurs auxquelles elle est couplée (par exemple, la mesure de la température peut fournir une mesure de la pression ou du degré d'hygrométrie).

¹map en anglais

Définition 3 *L'espace des phases du système dynamique associé à \mathbf{x} est un espace euclidien à n dimensions, chaque dimension correspondant à l'une des composantes de \mathbf{x} .*

Remarque

Un point de l'espace des phases correspond à un état du système. L'ensemble des points de l'espace des phases correspond donc à l'ensemble des états accessibles au système à un certain instant. La topologie et le volume de cet espace caractérisent l'ensemble des états accessibles au système à un certain instant.

Définition 4 *L'ensemble des points \mathbf{x} parcourus dans l'espace des phases durant un certain laps de temps est appelée une trajectoire.*

Définition 5 *Un point de phase est une particule imaginaire dont on veut suivre la trajectoire dans le flux.*

Définition 6 *Un point fixe est un point x^* tel que $F(x^*) = 0$, c'est-à-dire un point où la vitesse du flux est nulle.*

Un point fixe peut être de différentes natures géométriques :

- un point (dimension 0) ;
- un cycle limite, c'est-à-dire une courbe fermée, soit un objet géométrique de dimension entière ;
- un objet géométrique de dimension non entière.

Dans un espace de phases continu mono-dimensionnel, seuls des points peuvent être points fixes.

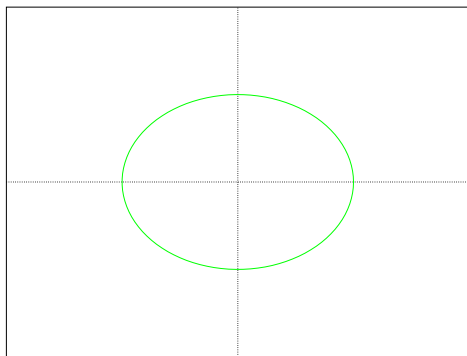
Dans un espace de phases continu bi-dimensionnel, les points fixes sont soit des points, soit des courbes de dimension entière.

Dans un espace des phases continu à plus de 2 dimensions, les points fixes peuvent également être des objets fractals.

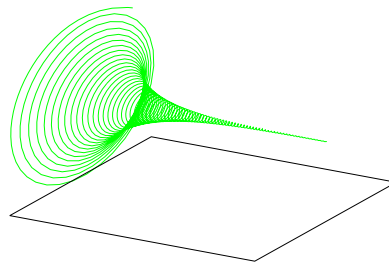
Un point fixe peut être :

- stable, on parle alors d'attracteur ou de puits : c'est un état vers lequel le système est attiré et dans lequel il demeure et tend à demeurer lorsque le système l'a atteint. Visuellement dans le champ de vecteurs, un attracteur est un point où la vitesse est nulle et vers lequel les trajectoires convergent ;
- instable, on parle alors de source : c'est un état dans lequel le système demeure s'il n'est pas perturbé. A la moindre perturbation, le système quitte cet état instable. Dans le champ de vecteurs, un point fixe instable est un point où la vitesse est nulle et que toutes les trajectoires fuient ;
- semi-stable : c'est un état qui attire certaines trajectoires et en repousse d'autres. Dans le champ de vecteurs, c'est un point où la vitesse est nulle et vers lequel certaines trajectoires convergent tandis que d'autres le fuient.

Mathématiquement, si un point x^* est un point fixe, on détermine sa stabilité en le perturbant et en étudiant sa trajectoire. Si elle revient vers x^* , c'est que l'on a affaire à un point fixe stable ; si elle diverge, c'est un point fixe instable ; si la trajectoire revient parfois vers x^* et diverge dans d'autres cas, le point fixe est semi-stable.



(a) L'espace des phases pour un système conservatif. L'amplitude des oscillations ne varie pas au cours du temps. L'exemple typique est le pendule non amorti. Si on représente l'évolution de cet espace au cours du temps comme en (b), on obtient un cylindre.



(b) Evolution de l'espace des phases pour un système dissipatif au cours du temps. L'amplitude des mouvements diminue au cours du temps donnant cette forme typique de trompette à l'espace des phases.

FIG. 1 – Espaces des phases pour un système conservatif et pour un système dissipatif.

Définition 7 *Un système dissipatif est un système dont le volume de l'espace des phases diminue au cours du temps.*

Du fait de cette diminution du volume de l'espace des phases, un système dissipatif est généralement caractérisé par l'existence d'un attracteur. Un système non dissipatif est qualifié de « conservatif » ou « hamiltonien ».

Remarque

Le terme « volume de l'espace des phases » recouvre une réalité très intuitive. Soit un système possédant n dimensions $x_{i, 1 \leq i \leq n}$. Supposons qu'à l'instant t , la composante x_i prenne ses valeurs dans l'intervalle $[\alpha_i, \beta_i]$ ce qui définit un segment sur l'axe de la i^{e} dimension de longueur δ_i . Faisons de la sorte pour les n dimensions. Le volume de l'espace des phases est le produit $\prod_{i=1}^{i=n} \delta_i$.

À la figure 1(a), on a représenté l'espace des phases d'un système conservatif dont le volume demeure constant au cours du temps. C'est un système oscillant dont l'amplitude ne varie pas au cours du temps (pendule non amorti). À la figure 1(b), on a représenté l'espace des phases d'un système dissipatif. On voit clairement que le temps passant, le volume occupé diminue.

Propriété 1 *Un système conservatif ne possède jamais d'attracteur.*

Dans les cours de physique au lycée ou durant les premières années de fac, on n'étudie jamais de systèmes dissipatifs. Quand on doit en étudier un, on l'approxime par un système conservatif.

Le caractère dissipatif est typique d'un système dont l'évolution n'est pas réversible au cours du temps (mathématiquement, un système est réversible s'il demeure invariant par une transformation $t \rightarrow -t$). Une explosion est typiquement un phénomène irréversible parce qu'on atteint un état infini au bout d'un temps fini. Plus généralement, un système dissipatif est un système non clos au

niveau énergétique, c'est-à-dire qu'il dissipe de l'énergie dans son environnement ou qu'il en capte. Typiquement, un organisme vivant est un système dissipatif. Le pendule que l'on a étudié au lycée et que l'on a alors déguisé en système conservatif est en réalité un système dissipatif à cause des frottements. En fait, tous les systèmes existants dans la nature sont dissipatifs².

Définition 8 *On appelle portrait de phase un graphe qui donne l'allure des trajectoires dans l'espace des phases.*

Lors de l'analyse d'un système dynamique, le but est de donner une bonne idée de ce qui se passe dans l'espace des phases. Il est donc important de ne pas oublier les points fixes de toute nature pour que le portrait soit ressemblant (voir la figure 2).

Définition 9 *Un paramètre de contrôle est un paramètre dont dépendent les équations du système.*

Typiquement, la dynamique du système peut changer profondément (qualitativement) en fonction de la valeur de ses paramètres de contrôle. Ainsi, les points fixes changent de position ; ils apparaissent, disparaissent ou s'agrègent ; leur nature géométrique change ; leur stabilité varie. Au moment où un tel changement qualitatif dans la dynamique du système intervient, on dit qu'il y a une bifurcation ou une transition de phase hors de l'équilibre.

L'étude des bifurcations qui peuvent être observées durant l'évolution d'un système constitue une part importante de l'étude d'un système dynamique. Impliquant un changement de régime du comportement du système, les valeurs critiques des paramètres de contrôle sont fondamentales pour une description correcte d'un système dynamique³.

Dans la suite, on commence par décrire les systèmes dynamiques les plus simples, ceux dont l'espace des phases est continu et mono-dimensionnel. Ensuite, nous nous tournons vers des systèmes dynamiques continus possédant deux dimensions. Ces systèmes peuvent avoir un comportement oscillant (ce que ne peuvent pas avoir les systèmes mono-dimensionnels) ; ils peuvent modéliser de nombreux systèmes naturels simples. Les systèmes ayant un espace des phases continu comportant plus de deux dimensions sont ensuite attaqués. Le comportement de ces systèmes peut être très riche ; notamment, il peut être chaotique (les systèmes continus possédant moins de trois dimensions ne peuvent pas être chaotiques).

Remarque

D'un point de vue pratique, l'étude des systèmes dynamiques est rarement possible de manière analytique : on est rarement capable d'intégrer un système d'équations différentielles. Aussi, on effectue une intégration numérique pour s'en sortir et étudier expérimentalement le système avec un ordinateur. L'ordinateur est ici un outil irremplaçable sans lequel l'étude des systèmes dynamiques est quasiment impossible d'un point de vue quantitatif. La méthode de Runge-Kutta du cinquième ordre fournit un algorithme d'intégration numérique tout à fait satisfaisant pour notre étude.

²on peut se demander si l'univers lui-même est un système dissipatif ou conservatif. S'il est dissipatif, où va l'énergie dissipée, ou d'où vient l'énergie captée puisque l'univers est censé tout contenir...

³l'étude des bifurcations et des points de bifurcation d'un système dynamique possède le même caractère fondamental que la recherche des points où les dérivées s'annulent quand on fait une étude de fonction au lycée.

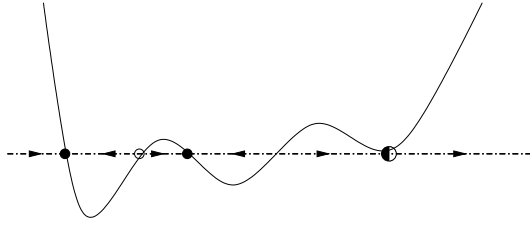


FIG. 2 – Portrait de phase pour un potentiel imaginaire sur lequel sont indiqués les points fixes : un disque noir est un attracteur vers lequel les trajectoires convergent ; un disque blanc est un point fixe instable et un disque à moitié blanc et l'autre moitié noire est un point fixe semi-stable.

3 Systèmes continus mono-dimensionnels

On parle tout d'abord des systèmes dont l'espace des phases est une droite réelle dont la dynamique est la plus simple. On parle ensuite de systèmes dont l'espace des phases est un cercle (de rayon constant au cours du temps : il s'agit bien d'un cercle, pas d'un disque qui rendrait le système bi-dimensionnel).

En 1 dimension, un système dynamique est régi par l'équation :

$$\dot{x} = f(x)$$

Dans les systèmes mono-dimensionnels continus, les points fixes sont forcément des objets géométriques de dimension nulle. Le champ de vecteurs est défini sur l'axe des x . Graphiquement, une vitesse positive correspond à un sens de déplacement vers $+\infty$ alors qu'une vitesse négative correspond à un sens de déplacement vers $-\infty$. Par convention, un point fixe stable est représenté par un disque noir, un point fixe instable par un disque blanc cerclé de noir, un point fixe semi-stable par un disque à moitié blanc et à moitié noir (voir figure 2).

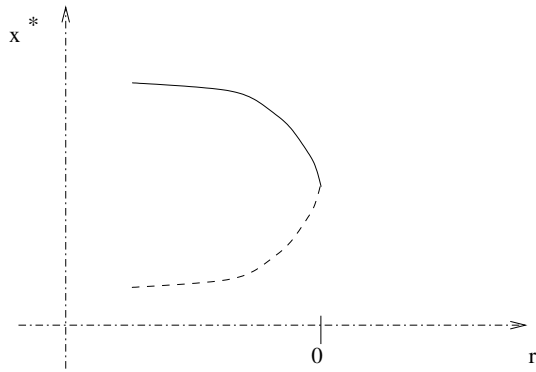
Définition 10 *On nomme potentiel la fonction V telle que :*

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

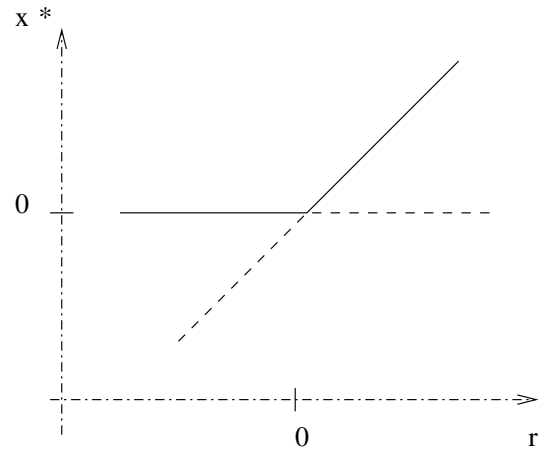
Les minima locaux de V sont les points fixes stables et semi-stables du système. Les maxima sont les points fixes instables du système. Ceux-ci sont situés aux bords des bassins d'attraction.

3.1 Bifurcations

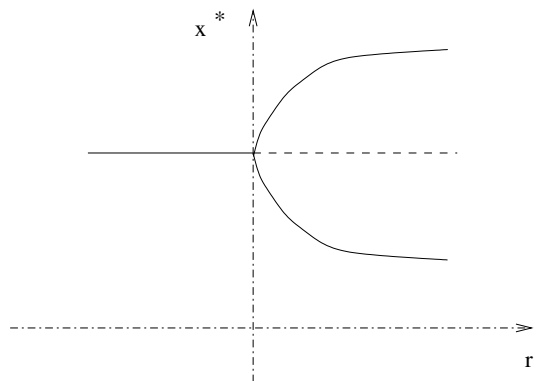
Une bifurcation caractérise un changement qualitatif dans la nature des points fixes du système. Il existe trois types de bifurcation dans les systèmes continus mono-dimensionnels que l'on retrouvera dans les systèmes de dimension supérieure : fourche, point de selle et trans-critique.



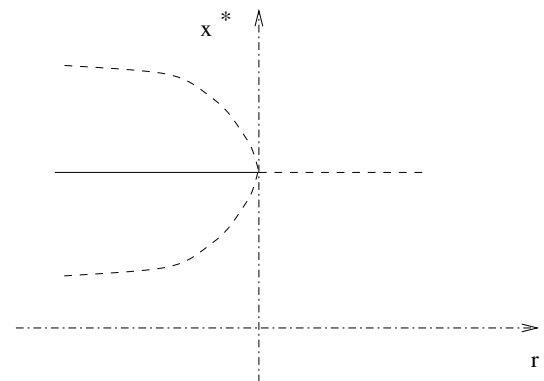
(a) Bifurcation en point de selle pour la forme normale $\dot{x} = r + x^2$. Ces points fixes n'existent que pour des valeurs de r négatives. L'attracteur est en $x = \sqrt{-r}$; le point fixe instable est en $x = -\sqrt{-r}$. Pour $r = 0$, les deux points fixes se fondent en un point fixe semi-stable situé en $x = 0$.



(b) Diagramme d'une bifurcation transcritique dans le cas de la forme normale $\dot{x} = rx - x^2$. Pour $r = 0$, les points fixes échangent leur stabilité; quand $r < 0$, $x = 0$ est stable, $x = r$ est instable; quand $r \geq 0$, $x = 0$ est instable, $x = r$ est stable.



(c) Diagramme de la bifurcation en fourche super-critique.



(d) Diagramme de la bifurcation en fourche sous-critique.

FIG. 3 – Diagrammes de bifurcation dans le cas mono-dimensionnel. Dans tous les cas, les lignes pleines représentent des points fixes stables (attracteurs) et les lignes pointillées des points fixes instables.

3.1.1 Bifurcation en point de selle

Cette bifurcation est le mécanisme de base pour l'apparition et la disparition de points fixes.

La forme prototypique (ou forme normale) d'une bifurcation en point de selle est $\dot{x} = r \pm x^2$. La valeur critique de r est $r = r_c = 0$. On a les cas suivants :

- $r < 0$: le système possède un attracteur en $x = \sqrt{r}$ et un point fixe instable en $x = -\sqrt{r}$;
- $r = 0$: le système possède un point fixe semi-stable en $x = 0$;
- $r > 0$: le système ne possède aucun point fixe.

En traçant la position des points fixes en fonction du paramètre de contrôle, on obtient le diagramme de bifurcation de la figure 3(a) qui est typique de ce type de bifurcation.

3.1.2 Bifurcation trans-critique

Il y a une bifurcation trans-critique lorsque deux points fixes échangent leur nature (stable/instable). Quelle que soit la valeur du paramètre, le point fixe existe. La forme normale est $\dot{x} = rx - x^2$. Elle possède un point fixe $x = 0$ pour toute valeur de r . On a :

- $r < 0$: un point fixe instable ($x = r$) et $x = 0$ est attracteur ;
- $r = 0$: $x = 0$ absorbe le point fixe instable et devient semi-stable ;
- $r > 0$: $x = 0$ est instable et il existe un attracteur en $x = r$.

Le diagramme de bifurcation typique est donné à la figure 3(b).

3.1.3 Bifurcation en fourche

Les bifurcations en fourche existent dans des systèmes possédant une symétrie. De fait, les points fixes sont créés et disparaissent par paire. Il en existe deux types, les super-critiques (ou « douces ») (voir la figure 3(c)) et les sous-critiques (ou « dures ») (voir la figure 3(d)).

La forme normale pour la bifurcation en fourche supercritique est $\dot{x} = rx - x^3$. Ce système est invariant dans une transformation $x \rightarrow -x$. Les champs de vecteurs sont représentés figure 4.

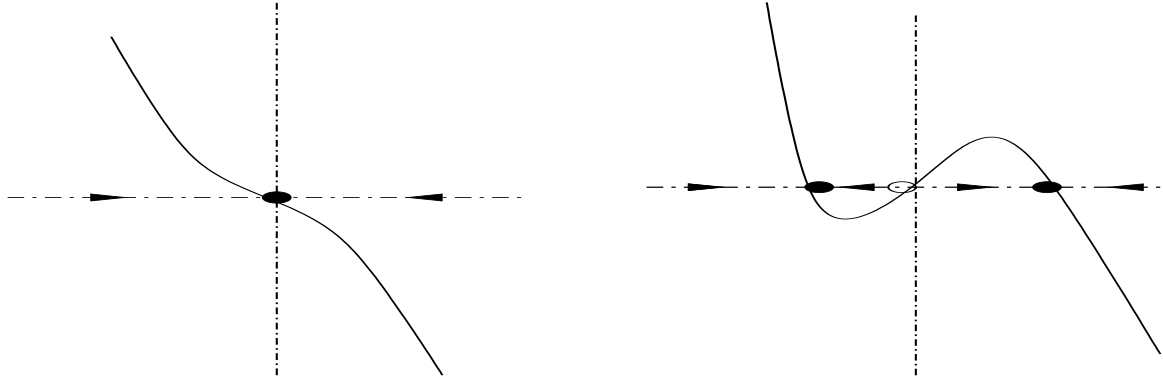
- pour $r > 0$, deux attracteurs existent pour $x = \pm\sqrt{\frac{r^3}{27}}$ et un point fixe instable existe pour $x = 0$;
- en $r = 0$, les trois points fixes se fondent en un seul attracteur situé en $x = 0$;
- pour $r < 0$, le système possède un seul point fixe attracteur en $x = 0$.

Remarque

Mais alors, me direz-vous, comment le système choisit-il l'attracteur vers lequel il va converger quand il en existe deux ? Ce « choix » est du au hasard, c'est-à-dire aux perturbations (bruit) auquel est soumis le système. S'il n'y en a pas, il va demeurer sur son point fixe instable qu'il quittera à la moindre perturbation.

La forme normale pour la bifurcation en fourche sous-critique est $\dot{x} = rx + x^3$. Ce système est invariant dans une transformation $x \rightarrow -x$. Les champs de vecteurs sont représentés figure 5.

- Pour $r < 0$, deux points fixes instables existent en $x = \pm\sqrt{r}$ et un attracteur existe en $x = 0$;
- en $r = 0$, les trois points fixes se fondent en un seul point fixe instable situé en $x = 0$;
- pour $r > 0$, le système possède un seul point fixe instable en $x = 0$.



(a) Champ de vecteurs quand $r \leq 0$.

(b) Champ de vecteurs quand $r > 0$.

FIG. 4 – Champs de vecteurs d’une bifurcation en fourche super-critique pour la forme normale $\dot{x} = rx - x^3$.

En définitive, dans sa forme super-critique, d’un attracteur naît deux attracteurs et un point fixe instable pour une valeur critique du paramètre de contrôle ; dans sa forme sous-critique, d’une instabilité naissent deux points fixes instables et un attracteur (voir les diagrammes de bifurcation aux figures 3(c) et 3(d)).

3.1.4 Bifurcation imparfaite

Considérons le système $\dot{x} = h + rx - x^3$ contrôlé par deux paramètres r et h . Si $h = 0$, on retrouve la forme normale de la bifurcation en fourche super-critique. Par contre, quand h n’est pas nul, pour des valeurs de r négatives, la position de l’attracteur varie. Plus intéressant, pour des valeurs de r positives, le nombre de points fixes varie. Au-delà d’une valeur critique $h_c = 2\sqrt{\frac{r^3}{27}}$, le système ne possède qu’un seul point fixe qui est attracteur. Pour $h = h_c$, le système possède un attracteur et un point fixe semi-stable. Pour $0 \leq h < h_c$, le système possède deux attracteurs et un point fixe instable. Pour des valeurs négatives de h , la situation est symétrique.

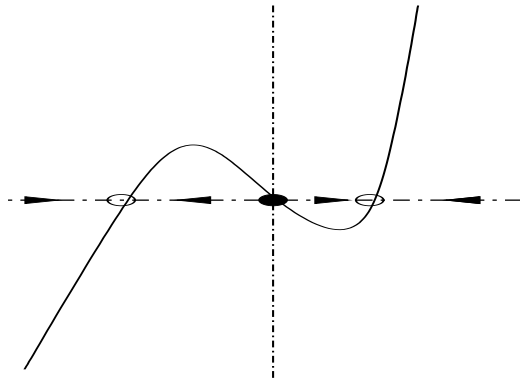
Donc, pour $h = h_c$, on a une bifurcation en fourche super-critique. Les champs de vecteurs pour différentes valeurs de h sont donnés à la figure 6.

On peut encore résumer la situation en traçant le diagramme de stabilité indiquant le nombre et la nature des points fixes en fonction de r et h (voir la figure 7).

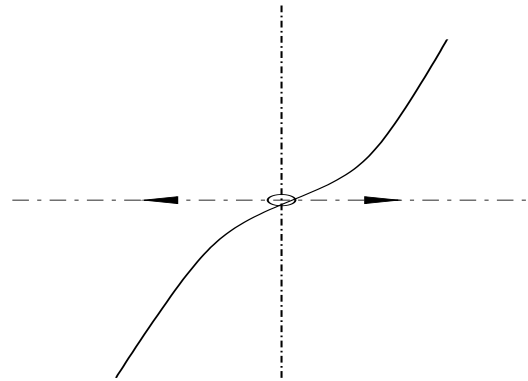
3.1.5 Hystérésie

Considérons le système $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$. Le diagramme de bifurcation est indiqué à la figure 8. Pour $r < 0$, l’origine est stable. Pour r compris entre une valeur seuil r_s (négative) et 0, deux points fixes stables et deux points fixes instables existent également. En $r = 0$, l’origine perd sa stabilité et il demeure deux points fixes stables.

Faisons varier r à partir d’une valeur inférieure à r_s . Le système est alors à l’équilibre à l’origine.

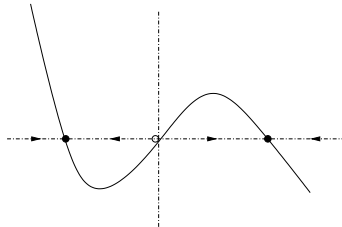


(a) Champ de vecteurs quand $r < 0$.

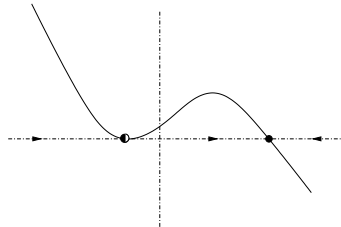


(b) Champ de vecteurs quand $r \geq 0$.

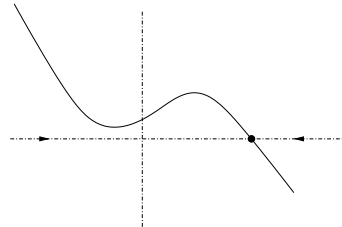
FIG. 5 – Champs de vecteurs pour une bifurcation en fourche sous-critique pour le système $\dot{x} = rx + x^3$.



(a) $0 < h < h_c$



(b) $h = h_c$: bifurcation en fourche super-critique



(c) $h > h_c$

FIG. 6 – Champs de vecteurs d'une bifurcation imparfaite (système $\dot{x} = h + rx - x^3$). Notons qu'il existe une symétrie entre les valeurs positives et les valeurs négatives de h .

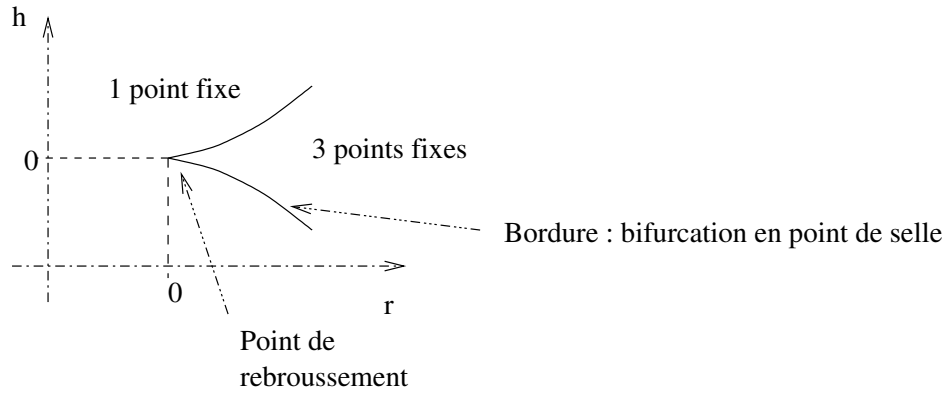


FIG. 7 – Diagramme de stabilité pour le système $\dot{x} = h + xr - x^3$. Le long de la ligne séparant les zones correspondant à 1 et 3 points fixes, il y a une bifurcation en point de selle excepté au point de rebroussement où nous avons une bifurcation de codimension 2, c'est-à-dire une bifurcation due à deux paramètres de contrôle et non un seul comme dans les cas précédents.

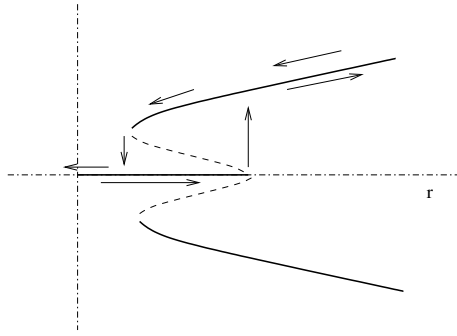


FIG. 8 – Illustration d'une hystérésis. Le diagramme de bifurcation est représenté pour le système $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$. Les flèches indiquent une évolution possible de l'état d'équilibre du système quand le paramètre de contrôle varie. Pour r compris entre r_s et 0, le système est dans deux états stables différents, selon que r croît ou décroît.

Quand r atteint puis dépasse la valeur 0, le système saute vers l'un des points fixes stables. Si r décroît ensuite, le système va demeurer dans cet état stable jusqu'à r_s où il retournera à son état stable d'origine. Ainsi, selon que r croît ou décroît, l'état stable dans lequel se trouve le système n'est pas le même pour certaines valeurs de r . C'est un effet d'hystérésis.

Plus généralement, quand plusieurs attracteurs existent pour les mêmes valeurs des paramètres de contrôle, il y a des effets d'hystérésis. Ces effets sont typiques de la non-linéarité du système. Ils signent le fait que la dynamique du système à un instant dépend de son histoire.

3.2 Flux sur un cercle

Au lieu de considérer l'axe des x comme espace des phases, on peut prendre le cercle unité. Cela permet d'avoir des comportements oscillants dans un espace à une dimension. Le système est régi

par une équation exprimée en coordonnées polaires : $\dot{\theta} = f(\theta)$. On doit avoir $f(\theta) = f(\theta + 2k\pi)$ pour tout k entier pour que $\dot{\theta}$ ait la même valeur pour toutes les valeurs identiques de θ . Les oscillations peuvent être uniformes ou non.

3.2.1 Oscillateur mono-dimensionnel uniforme

La vitesse de rotation est uniforme, donc $\dot{\theta} = \omega$, soit $\theta = \omega t + \theta_0$.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période d'oscillation.

Notons qu'il n'y a pas de notion d'amplitude d'oscillation ici ; celle-ci serait une 2^e variable or nous traitons ici des systèmes mono-dimensionnels. On peut considérer que l'amplitude est constante.

3.2.2 Oscillateur mono-dimensionnel non uniforme

Prenons le système d'équation $\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$. a introduit une non-uniformité dans la vitesse de rotation. Le flux est le plus rapide pour $\theta = -\pi/2$, le plus lent en $\theta = \pi/2$. Il y a un goulot d'étranglement en $\pi/2$.

Pour $a < \omega$, le système passe beaucoup de temps à franchir le point $\theta = \pi/2$. Plus a est proche (en restant inférieur) de ω , plus le temps de passage en $\pi/2$ s'allonge et tend vers l'infini ; pour $\theta = \pi/2$ et $a = \omega$, on a $\dot{\theta} = 0$: le temps de passage est infini. On peut calculer la période de révolution T comme suit :

$$\begin{aligned} T &= \int dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin \theta} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Quand $a \rightarrow \omega^-$, la période tend vers l'infini.

Pour $a = \omega$, on a un oscillateur uniforme avec un point fixe semi-stable en $\theta = \pi/2$.

Pour $a > \omega$, le point fixe semi-stable se scinde en un point fixe stable tel que $\sin(\theta_s) = \omega/a$ dans le premier quadrant et un point fixe instable ayant le même sinus dans le deuxième quadrant. Il y a donc une bifurcation en point de selle pour $a = \omega$. Les champs de vecteurs sont indiqués à la figure 9 pour les différents cas.

Après que les deux points fixes se sont rencontrés (quand ω décroît), il reste une réminiscence de cette rencontre qui entraîne le ralentissement de la trajectoire ; ce reste se nomme un « fantôme ». La présence de fantômes est typique aux alentours des bifurcations en point de selle.

4 Systèmes continus bi-dimensionnels

Avec les systèmes continus bi-dimensionnels, des comportements oscillatoires sont possibles dans l'espace des phases ce qui rend ces systèmes particulièrement importants dans la pratique : le nombre de systèmes réels qui oscillent est très important (en physique, chimie, biologie, voire même en économie et en sociologie) ; on peut se demander si tous les systèmes réels n'oscillent pas, ou, du moins, s'ils ne sont pas tous capables d'osciller... Les attracteurs peuvent être de dimension non nulle

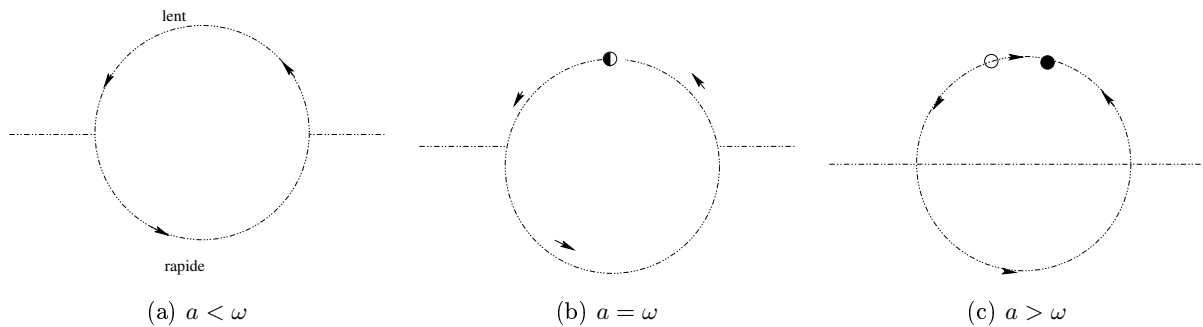


FIG. 9 – Champs de vecteur pour l'oscillateur mono-dimensionnel non uniforme

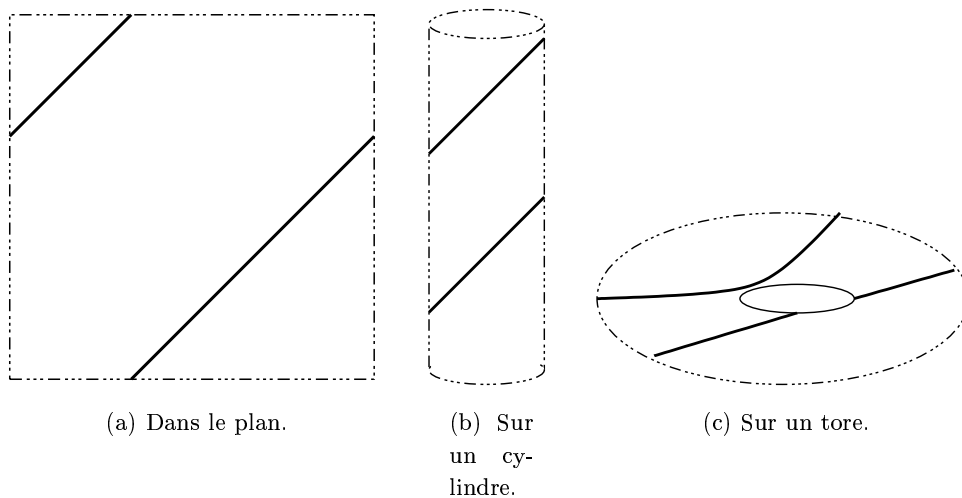


FIG. 10 – Différentes représentations d'une trajectoire oscillante en 2 dimensions.

(non ponctuels) dans un système possédant plus d'une dimension. Dans un système bi-dimensionnel, l'espace des phases possède deux dimensions. Il est donc représenté dans le plan. On parle alors de « plan de phase ».

La représentation graphique des trajectoires oscillantes peut donner des portraits de phase du type indiqué à la figure 10(a). Il est alors pratique de recoller les bords gauche et droit, ainsi que haut et bas pour que la trajectoire soit continue. On dessine alors le portrait sur un tore (*cf.* figure 10(c)). On peut aussi ne recoller que les bords gauche et droit, ce qui donne un cylindre (*cf.* figure 10(b)).

Lorsque le système oscille dans ses deux dimensions, la représentation torique est idéale. S'il n'oscille que dans une dimension, une représentation planaire suffit.

Il est courant de rencontrer des systèmes dont les oscillations ne sont pas parfaites : au bout d'une période, la trajectoire ne boucle pas, mais passe très près de la position occupée à la révolution précédente. Aussi, la trajectoire n'est pas fermée, mais connaissant la position d'une particule à un

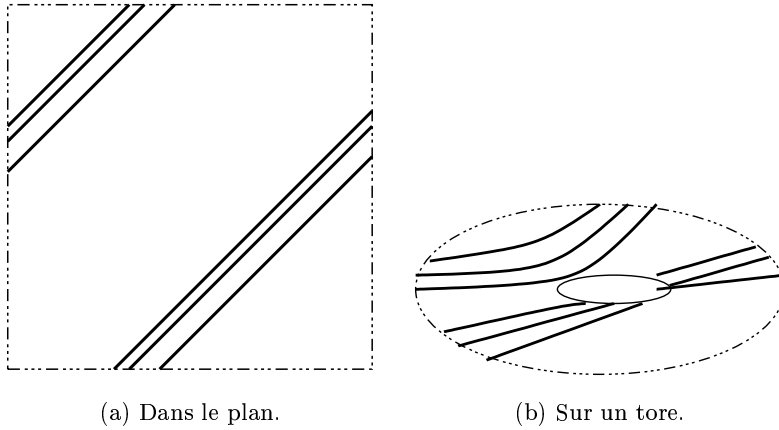


FIG. 11 – Trajectoire quasi-périodique.

instant donné, on sait que la particule sera à une position très proche au bout d'une période. Une telle trajectoire est qualifiée de quasi-périodique (*cf.* figure 11).

Dans ce qui suit, nous commençons avec un détour par les systèmes linéaires pour introduire quelques termes et notions et nous passons ensuite aux systèmes non-linéaires. Nous poursuivons par une description des bifurcations associées à des points fixes ponctuels. Nous abordons ensuite les points fixes bi-dimensionnels (cycles limites).

Les systèmes linéaires sont à connaître pour l'étude des systèmes non linéaires car dans certaines conditions, la dynamique d'un système linéaire peut être approximée par un système linéaire.

4.1 Systèmes linéaires

En 2D, un système linéaire possède deux types de point fixe : ceux qui sont ponctuels où la vitesse est nulle ; les orbites closes qui correspondent à des oscillations stables.

En deux dimensions, un système linéaire est régi par un système d'équations du genre :

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{cases}$$

soit $\dot{x} = Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le système dynamique est alors complètement spécifié par la matrice A .

4.1.1 Un exemple et quelques définitions

Tout d'abord, introduisons les notions de directions stable et instable (*stable and unstable manifolds* en anglais) :

Définition 11 La direction stable d'un point fixe instable x^* est l'ensemble des points qui convergent vers x^* quand $t \rightarrow +\infty$; la direction instable est l'ensemble des points qui tendent vers x^* quand $t \rightarrow -\infty$ (quand on remonte le temps, en somme).

Mathématiquement, ces directions se nomment également « variétés ». On parle également d' α -limite pour la direction instable, et d' ω -limite pour la direction stable.

Etudions le système défini par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Celui-ci s'intègre aisément et donne :

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{at} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \end{cases}$$

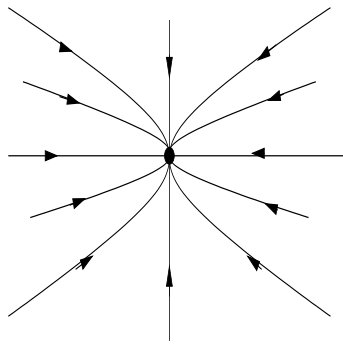
Selon la valeur du paramètre de contrôle a , le point fixe $x^* = 0$ a différentes natures et propriétés (voir figure 12) :

- (a) point fixe stable qui attire toutes les trajectoires ;
- (b) étoile qui attire toutes les trajectoires de manière symétrique, c'est-à-dire que la vitesse de convergence vers l'origine est la même dans toutes les directions ;
- (c) point fixe stable ;
- (d) ligne de points fixes stables : tous les points d'une droite sont des points fixes stables et toutes les trajectoires sont perpendiculaires à cet axe ;
- (e) point fixe instable qualifié de point de selle, ou point hyperbolique : la direction stable est l'axe des y , la direction instable l'axe des x ;
- (f) centre : il y a un point fixe stable entouré de courbes concentriques. Il s'agit d'une stabilité neutre, ni attirante, ni repoussante. Les courbes concentriques sont des orbites closes ;
- (g) spirale stable : son centre est un point fixe stable et les trajectoires convergent vers ce point en spiralant ;
- (h) spirale instable : son centre est un point fixe instable et les trajectoires s'échappent de ce point en spiralant.

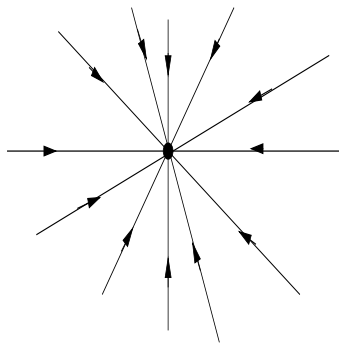
Dans les cas (a), (b) et (c), il y a « stabilité globale ».

Définition 12 On dit d'un point x^* qu'il est Lyapunov stable si toute trajectoire qui démarre près de x^* demeure indéfiniment près de x^* .

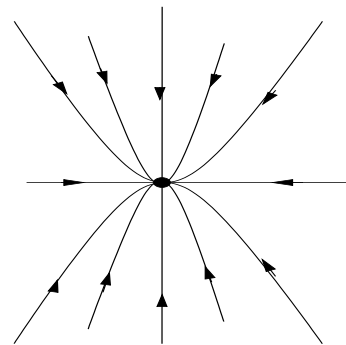
Remarque : un point peut être Lyapunov stable sans être attracteur pour autant (cas de stabilité neutre).



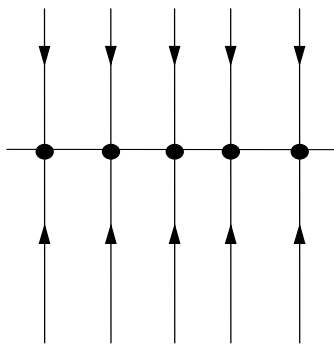
(a) $a < -1$: $x^* = 0$ est un point fixe stable



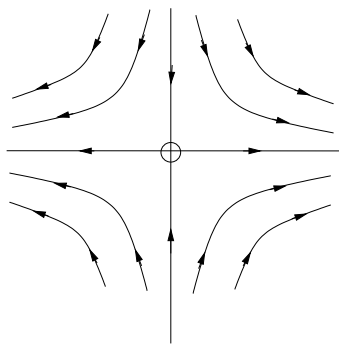
(b) $a = -1$: $x^* = 0$ est une étoile



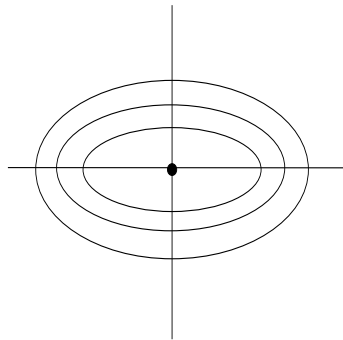
(c) $-1 < a < 0$ est un point fixe stable



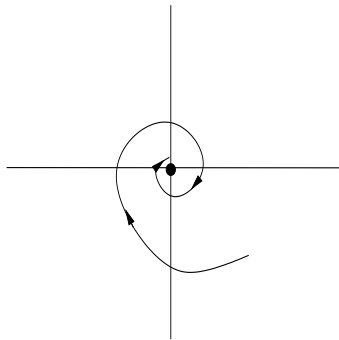
(d) $a = 0$: le système possède une ligne de points fixes



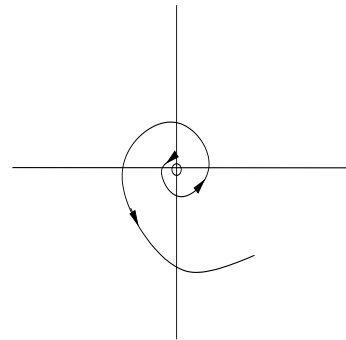
(e) $a > 0$: $x^* = 0$ est un point fixe instable



(f) centre



(g) spirale stable



(h) spirale instable

FIG. 12 – Les différents types de point fixe apparaissant dans un système linéaire. Pour les cinq premiers cas de (a) à (e), le type de point fixe est donné pour le système donné dans le texte en fonction de la valeur du paramètre de contrôle. Pour les trois derniers cas (f) à (h), on fait un simple schéma du portrait de phase pour en donner une idée.

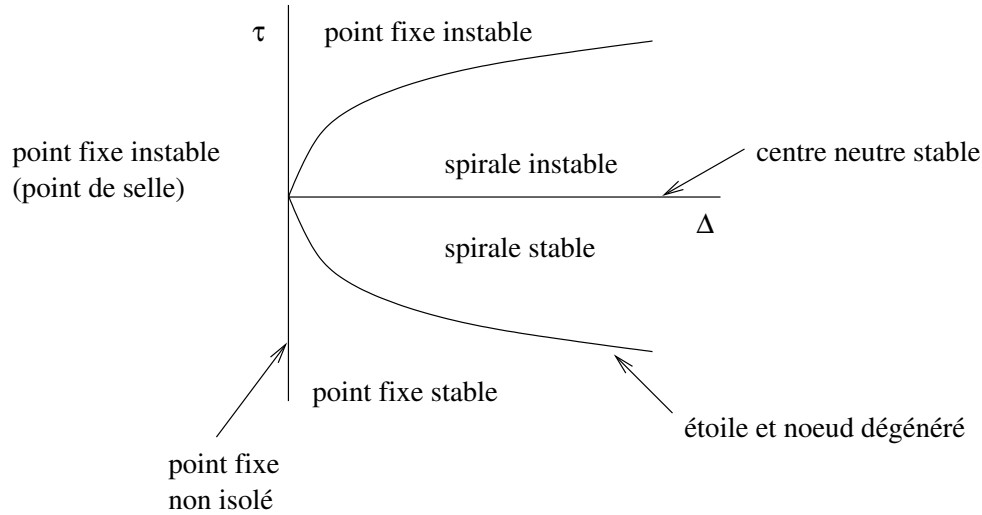


FIG. 13 – Classification des types de points fixes pour un système linéaire bi-dimensionnel en fonction de la matrice du système. τ est la trace de la matrice du système, Δ son déterminant. Les spirales correspondent à des valeurs propres complexes, les autres types à des valeurs propres réelles. La limite entre les deux zones suit l'équation $\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} = 0$. On nomme « cas marginaux » les cas correspondants à $\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} = 0$, $\tau = 0$ et $\Delta = 0$.

4.1.2 Nature des points fixes des systèmes linéaires

L'étude des valeurs propres de la matrice A permet de préciser la nature des points fixes. Posons τ la trace de A et Δ son déterminant :

$$\begin{aligned}\tau &= a + d \\ \Delta &= ad - bc\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont alors :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Notons que l'on a aussi les relations :

$$\begin{aligned}\Delta &= \lambda_1 \times \lambda_2 \\ \tau &= \lambda_1 + \lambda_2\end{aligned}$$

En fonction des valeurs propres, on détermine le type de points fixes que possèdent le système en suivant la figure 13.

4.2 Plan de phases d'un système non linéaire

Nous énonçons tout d'abord une propriété fondamentale des systèmes dynamiques :

Propriété 2 *Une trajectoire ne se recoupe jamais.*

Remarque

Si une trajectoire se coupait, l'évolution serait non déterministe : en un point, le système pourrait poursuivre sa trajectoire de deux manières différentes. Si le système est déterministe, c'est bien évidemment impossible.

Le théorème de Poincaré-Bendixson (qui permet de démontrer l'existence d'un cycle limite pour un système bi-dimensionnel) implique qu'un système bi-dimensionnel ne peut pas avoir un comportement chaotique. Aussi, il ne peut pas exister d'attracteur de dimension non entière en $2D^4$.

4.2.1 Linéarisation d'un système non linéaire

Pour connaître la nature d'un point fixe dans un système non linéaire, on peut le linéariser localement. Supposons que notre système soit décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

Si en première approximation on laisse de côté les termes quadratiques, on obtient un système linéaire dont la matrice se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

les dérivées étant calculées au point fixe (x^*, y^*) . Cette matrice porte le nom de « jacobien » du système au point considéré. D'une manière générale, le jacobien d'un système est un objet fondamental pour l'étude de la stabilité d'un cycle limite. Appliquons l'analyse indiquée à la section 4.1.2 à ce jacobien. Si l'on se trouve dans un cas qui n'est pas un cas marginal ($\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} = 0$, $\tau = 0$ ou $\Delta = 0$), l'étude des propriétés du jacobien permet de conclure ; sinon, cela signifie qu'il est nécessaire d'étudier les termes non linéaires que l'on avait négligé dans un premier temps pour pouvoir éventuellement conclure.

4.3 Cycles limites

Dans un système possédant plus d'une dimension, les attracteurs ne sont plus forcément ponctuels. Un attracteur peut être un ensemble de points parcourus cycliquement. On parle alors de cycle limite.

Définition 13 *Un cycle limite est une trajectoire close isolée. Par « isolée », on entend que toutes les trajectoires voisines ne sont pas closes ; soit elles spiralent vers le cycle limite, soit elles s'en éloignent.*

Un cycle limite peut être stable ou instable.

⁴intuitivement, si l'on met de côté le théorème de Poincaré-Bendixson, on peut se demander pourquoi il ne peut exister d'attracteur étrange pour un système à deux dimensions puisque des objets fractals de dimension inférieure à deux existent. Des éléments de réponses seront donnés à la section 7.

Notons que l'existence de cycle limite dans les systèmes linéaires est impossible. Les oscillations d'un système linéaire sont entièrement contraintes par les conditions initiales du système. Les cycles limites sont par contre entièrement déterminés par la structure du système lui-même.

Remarque

Dans un système linéaire, on peut avoir des trajectoires closes bien qu'elles ne soient pas des cycles limites. En effet, ces trajectoires ne sont pas isolées. De ce fait, l'amplitude des oscillations est déterminée par les conditions initiales. (Un système linéaire, c'est par exemple un pendule non amorti ; n'étant pas amorti, une fois le battant mis dans une certaine position initiale, le pendule va osciller éternellement avec cette amplitude, puisqu'il n'y a pas de frottements.)

Les points fixes sont faciles à trouver : il suffit de résoudre l'équation $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Par contre, déterminer l'existence d'un cycle limite n'est pas du tout un problème facile. Quelques théorèmes existent permettant de décider dans certains cas. Cependant, pour la plupart des cas réels, les prémisses de ces théorèmes ne sont pas remplies, donc les théorèmes sont inapplicables (c'est pourquoi on n'énonce pas ces théorèmes). L'intégration numérique du système et l'intuition sont alors de rigueur.

L'existence de cycle limite est importante : leur existence est typique des systèmes ayant des oscillations auto-entretenues, autrement dit, des systèmes qui oscillent d'eux-mêmes (par exemple, le pendule amorti — réel — entretenu).

4.4 Bifurcations concernant des points fixes ponctuels

Comme dans le cas mono-dimensionnel, il existe toujours les bifurcations en fourche, en point de selle et trans-critique au cours desquelles des points fixes apparaissent, disparaissent ou changent de nature. La forme normale de ces bifurcations est donnée. Elles ne sont pas développées longuement, leur analyse étant similaire au cas mono-dimensionnel. Les diagrammes de bifurcation sont les mêmes qu'en 1 D (voir figure 3). On verra ensuite d'autres bifurcations concernant des points fixes non ponctuels dont les « bifurcations de Hopf » sont les plus connues.

- la forme normale de la bifurcation en point de selle est :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

Pour $\mu < 0$, il n'existe pas de point fixe. En $\mu = 0$ émerge un point fixe alors semi-stable en $(x, y) = (0, 0)$. Pour $\mu > 0$, un attracteur est situé en $(x, y) = (-\sqrt{\mu}, 0)$ et un point fixe instable en $(x, y) = (\sqrt{\mu}, 0)$. Pour une valeur critique du paramètre de contrôle ont émergé un couple de points fixes symétriques, l'un étant stable, l'autre instable.

- la forme normale de la bifurcation trans-critique est :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

Pour $\mu < 0$, $(0, 0)$ est attracteur et $(\mu, 0)$ est un point fixe instable. Pour $\mu = 0$, $(0, 0)$ est semi-stable. Pour $\mu > 0$, $(0, 0)$ est instable et $(\mu, 0)$ est attracteur : les deux points fixes ont échangé leur stabilité ce qui est bien la définition d'une bifurcation trans-critique.

- la forme normale de la bifurcation en fourche super-critique est :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

Pour $\mu \leq 0$, $(0,0)$ est attracteur. Pour $\mu > 0$, $(0,0)$ devient instable et un couple de points fixes $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ sont attracteurs.

- la forme normale de la bifurcation en fourche sous-critique est :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x + x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

Pour $\mu < 0$, $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ sont instables et $(0,0)$ est attracteur. En $\mu = 0$, ces trois points fixes collisionnent pour laisser $(0,0)$ comme seul point fixe du système qui est instable.

4.5 Bifurcations de Hopf

En 2 dimensions, des cycles limites peuvent exister. Ces cycles limites apparaissent et disparaissent au cours de bifurcations. Ces cycles sont soit stables (attracteurs) soit instables. Un point fixe ponctuel peut également se transformer en cycle limite au cours d'une bifurcation de Hopf.

Il existe deux types de bifurcation de Hopf : l'une est qualifiée de supercritique (ou excitation douce), l'autre de sous-critique (ou excitation forte).

Bifurcation de Hopf super-critique Prenons le système défini par ses coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{cases}$$

Pour $\mu \leq 0$, il existe un attracteur à l'origine ($r = 0$). Quand μ atteint 0, cet attracteur se décompose en un cycle limite circulaire de rayon $r = \sqrt{\mu}$ et un point fixe instable à l'origine. Le portrait de phase est donné à la figure 14(a). Le diagramme de bifurcation est donné à la figure 15(a).

Bifurcation de Hopf sous-critique Prenons le système défini par ses coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{cases}$$

La bifurcation de Hopf sous-critique a lieu en $\mu = 0$. Pour $\mu < 0$, le système possède deux attracteurs, l'origine et un cycle limite de rayon r_s , et un cycle limite instable de rayon r_i . En $\mu = 0$, le cycle limite instable absorbe l'origine qui devient instable. Le cycle de rayon r_s demeure stable.

Remarque

Le lecteur attentif aura peut-être frémi à la lecture de ce dernier paragraphe sur les bifurcations de Hopf sous-critique : un système qui subit une bifurcation de ce type qui s'était tranquillement stabilisé sur l'attracteur situé à l'origine doit, à la faveur du passage de la valeur du paramètre de contrôle par une valeur critique, « sauter » brutalement vers un autre attracteur. On s' imagine aisément qu'une telle transition peut causer des catastrophes s'il s'agit d'un système mécanique.

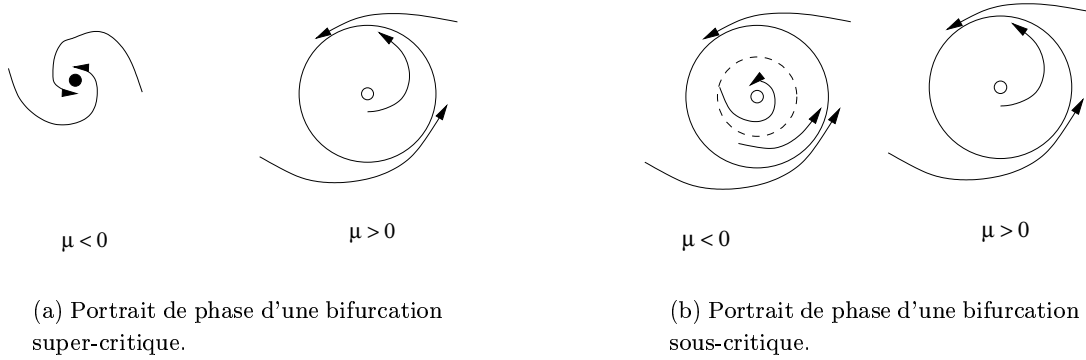


FIG. 14 – Portraits de phase de bifurcations de Hopf super-critique et sous-critique.

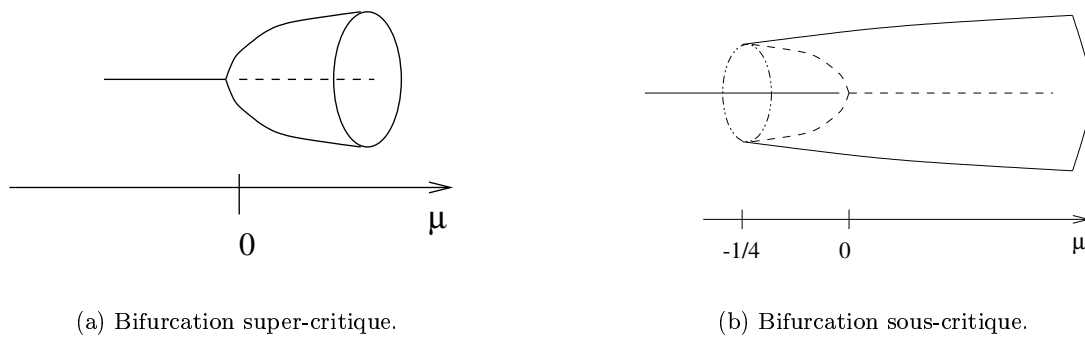


FIG. 15 – Diagrammes de bifurcations de Hopf super-critique et sous-critique.

En définitive, lors d'une bifurcation de Hopf, il existe un cycle limite au moins d'un côté de la bifurcation. Par ailleurs, au cours d'une bifurcation de Hopf super-critique, un point fixe stable devient instable pendant que de l'attracteur émerge un cycle limite stable.

Au cours d'une bifurcation de Hopf sous-critique, un point fixe attracteur et un cycle limite instable se fondent pour donner naissance à un point fixe instable. Un cycle limite attracteur englobant ces point fixe et cycle limite existe tout le temps.

Dans les deux cas, un système au repos devient oscillant quand le paramètre de contrôle franchit une valeur critique.

L'amplitude du cycle limite qui apparaît est proportionnelle à $\sqrt{\mu - \mu_c}$. Ces deux bifurcations sont représentées graphiquement figure 15.

Etant donnée une bifurcation de Hopf, il n'est généralement pas aisé de déterminer si elle est super- ou sous-critique. La linéarisation du système n'apporte pas d'aide.

Notons qu'il existe également une bifurcation de Hopf dite « dégénérée ». Considérons le pendule amorti dont l'équation est $\ddot{x} + \mu\dot{x} + \sin x = 0$ où μ est le coefficient d'amortissement. Pour $\mu < 0$, le point fixe à l'origine est au cœur d'une spirale instable. Pour $\mu > 0$, c'est une spirale stable. Cependant, pour $\mu = 0$, il n'y a pas réellement de bifurcation de Hopf puisque d'aucun côté de la

bifurcation n'existe de cycle limite. Pour $\mu = 0$, on a des orbites closes exclusivement (c'est normal, on retrouve alors le pendule non amorti). Ce cas dégénéré est typique des systèmes non conservatifs qui deviennent soudainement conservatif pour une valeur critique du paramètre de contrôle.

Les bifurcations de Hopf sont très importantes pour les systèmes biologiques. Elles montrent qu'un système peut passer spontanément d'un état de repos à un état oscillant du fait de la variation d'un seul paramètre de contrôle.

4.6 Cycles limites en deux dimensions

Les bifurcations de Hopf ne sont pas les seules bifurcations au cours desquelles apparaissent des cycles limites : un cycle limite peut se transformer ou changer de nature au cours d'un autre type de bifurcations :

- (a) bifurcation de cycle en point de selle ;
- (b) bifurcation de période infinie ;
- (c) bifurcation homocline.

Ces trois types de bifurcations sont qualifiées de « globales » car elles impliquent une région importante de l'espace des phases.

4.6.1 Bifurcation de cycle en point de selle

C'est une bifurcation au cours de laquelle deux cycles limites se rencontrent et s'annihilent. Reprenons le système défini par les équations que l'on a déjà rencontrées pour les bifurcations de Hopf sous-critique :

$$\begin{cases} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{cases}$$

où on s'intéresse à la bifurcation se produisant pour $\mu = -1/4$ (voir la figure 16).

Pour toutes les valeurs de μ l'origine est un attracteur ponctuel.

Pour $-1/4 < \mu < 0$, le système possède deux attracteurs, l'origine et un cycle limite de rayon r_s , et un cycle limite instable de rayon r_i (voir la section 4.5).

Quand μ atteint la valeur critique $\mu_c = -1/4$, un cycle limite semi-stable émerge de la rencontre des deux cycles limites existant précédemment.

Quand $\mu < -1/4$, seule l'origine est stable.

Notons que contrairement à une bifurcation de Hopf, l'amplitude des cycles apparaissant ici ne dépend pas de μ_c .

4.6.2 Bifurcation de période infinie

Considérons le système défini par :

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= \mu - \sin \theta \end{cases}$$

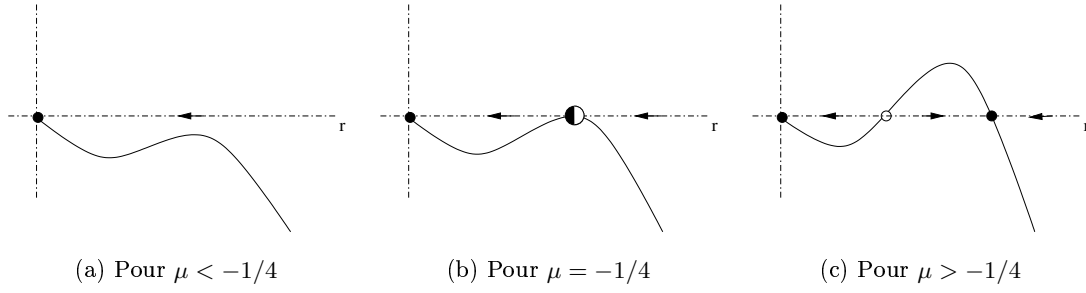


FIG. 16 – Bifurcation de cycle en point de selle. Voir le texte pour les équations du système. Dans les figures (b) et (c), les points fixes sont en réalité des cycles limites.



FIG. 17 – Bifurcation de cycle de période infinie. Voir le texte pour les équations du système.

pour $\mu \geq 0$.

Pour $r < 1$, les particules s'échappent de l'origine (point fixe instable) et convergent vers le cercle de rayon unité. Pour $r > 1$, les particules convergent vers le cercle de rayon unité.

Pour $\mu > 1$, le mouvement de toutes les particules est dans le sens trigonométrique. Pour $\mu < 1$, il y a deux rayons dont l'écart est $\sin \theta = \mu$. Un point fixe instable et un point fixe stable se situent à l'intersection de ces rayons avec le cercle unité (voir figure 17).

4.6.3 Bifurcation homocline

Au cours de cette bifurcation, un cycle limite s'approche d'un point de selle. Quand ils entrent en contact, le point de selle devient une orbite homocline. Il n'y pas d'exemple simple exhibant une bifurcation de ce type, aussi nous en remettons-nous au système suivant et à l'intégration numérique pour en faire l'analyse :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu y + x - x^2 + xy \end{cases}$$

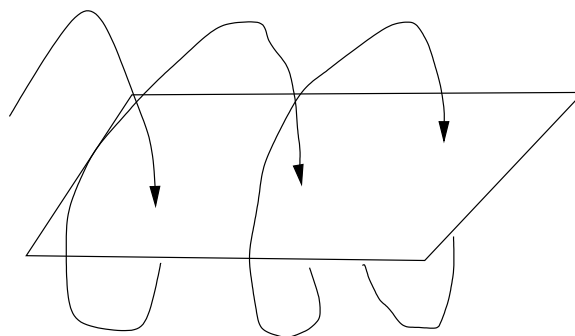


FIG. 18 – Illustration d'une section de Poincaré.

Définissons ce qu'est une orbite homocline :

Définition 14 *Une orbite homocline est une trajectoire qui démarre et se termine au même point fixe.*

Typiquement, une orbite homocline part donc d'un point fixe instable, effectue une boucle et y revient.

Pour $\mu < \mu_c \approx -0.8645$, le système possède un cycle limite qui passe près d'un point de selle situé à l'origine. Quand μ atteint la valeur critique μ_c , le cycle limite rencontre l'origine ce qui crée une orbite homocline. Quand $\mu > \mu_c$, tout cycle disparaît, seul demeurant le point de selle à l'origine.

4.7 Section et application de Poincaré

Considérons le portrait de phase d'un système dynamique et effectuons une coupe transversale des trajectoires. Cette coupe s'appelle une « section de Poincaré » (voir la figure 18). En ne prenant en compte qu'une seule trajectoire, celle-ci peut couper la section régulièrement. On définit x_i comme étant la position de la i^{e} intersection entre la trajectoire et le plan de coupe. La fonction f définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ se nomme l'application de Poincaré. Si la trajectoire est périodique, cette application est très intéressante et permet de réduire l'étude d'un système dynamique continu à n dimensions à l'étude d'une application à $n - 1$ dimensions.

5 Systèmes à plus de deux dimensions

Avec les systèmes à plus de deux dimensions, on aborde des systèmes dont la dynamique peut être extrêmement riche ; ce sont les systèmes les plus généraux connus aujourd'hui. Ils peuvent avoir un comportement dit « chaotique ». Ce sont des systèmes d'une importance fondamentale pour l'étude de systèmes réels. Ils sont, bien entendu, généralement très difficiles et même souvent impossible à étudier analytiquement.

5.1 Le système de Lorenz

Le système de Lorenz se définit par le système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases}$$

avec σ , b et r qui sont les paramètres de contrôle du système et prennent des valeurs positives⁵. σ se nomme le nombre de Prandtl, r le nombre de Rayleigh, tous deux bien connus en physique des écoulements.

Le système de Lorenz est dissipatif. Le volume à l'instant t de son espace des phases est donné par l'équation :

$$V_t = V_0 e^{-(\sigma+1+b)t}$$

Il ne possède ni point fixe instable, ni cycle limite instable. Il ne possède que des points fixes stables ou instables et des orbites closes stables ou instables.

5.1.1 Quelques éléments de la dynamique du système de Lorenz

Quelles que soient les valeurs des paramètres de contrôle, l'origine est un point fixe. Pour $r > 1$, il existe une paire de points fixes symétriques stables situés en $(x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}, z^* = r-1)$ que Lorenz a nommé C^- et C^+ . Quand $r \rightarrow 1^+$, C^- et C^+ se fondent avec l'origine au cours d'une bifurcation en fourche.

Pour $r < 1$, l'origine est un point globalement stable : quand $t \rightarrow \infty$, toutes les trajectoires convergent vers l'origine.

Pour $1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$ les points fixes C^- et C^+ sont stables linéairement. Pour $r = r_H$, ils perdent leur stabilité par une bifurcation de Hopf sous-critique. (C^- et C^+ sont chacun situés à l'intérieur d'un cycle limite instable tant que $r < r_H$. Pour $r = r_H$, ces cycles limites absorbent C^- et C^+ et laissent des points fixes instables.) Aussi, pour $r > r_H$, il n'y a plus de point fixe stable. Etant donné ce que l'on a dit jusqu'alors, la conséquence de tout cela devrait être que toutes les trajectoires s'enfuient à l'infini. Hors, on montre qu'elles peuvent pénétrer un ellipsoïde et ne plus en sortir, signature de l'existence d'un attracteur. Par ailleurs, n'oublions pas que le volume de l'espace des phases diminue à un rythme exponentiel et tend donc vers 0. Tout cela nous mène en des contrées bien étranges...

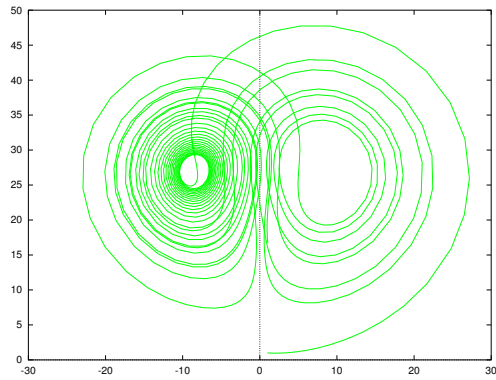
5.1.2 Apparition des attracteurs étranges

Prenons $\sigma = 10$, $b = 8/3$ et une valeur de r supérieure à r_H , $r = 28$. L'intégration numérique nous permet alors d'explorer le comportement du système de Lorenz.

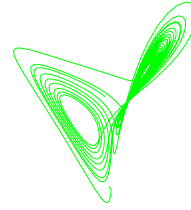
La trajectoire d'une particule quelconque possède une forme apériodique : elle ne se répète jamais⁶ (voir figure 19(a)). Si l'on trace la trajectoire d'un point de phase quelconque, on obtient une

⁵notons que ce système d'équations décrit également *exactement* la dynamique d'une certaine roue à eau.

⁶et, comme pour tous les systèmes dynamiques, ne se recoupe jamais.

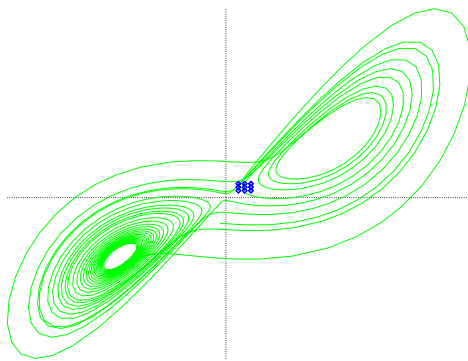


(a) Graphe de z (ordonnées) en fonction de y (abscisse) : le mouvement est apériodique.

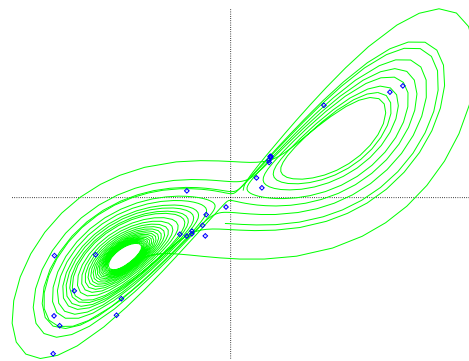


(b) Graphe 3D.

FIG. 19 – Système de Lorenz : une trajectoire projetée dans le plan yz et en trois dimensions.



(a) Points initiaux à $t = 0$.



(b) Au bout de $t = 1000$.

FIG. 20 – Système de Lorenz : divergence d'un ensemble de points initialement proches. En (a), tous les points sont proches, près du centre du graphique. En (b), tous ces points ont évolué et se sont dispersés dans l'espace. La courbe en fond est la trajectoire représentée à la figure 19 issue de l'un des points initiaux.

figure d'une très grande complexité (voir la figure 19). La trajectoire spirale comme pour converger vers un point fixe stable puis diverge et se met à spiraler dans une autre zone de l'espace des phases, quitte à nouveau cette zone pour retourner vers la première, et ainsi de suite indéfiniment. Notons bien que la trajectoire ne se recoupe jamais et qu'aucun motif périodique n'existe dans le mouvement de la particule. L'attracteur vers lequel les points de phase sont attirés est un ensemble de points de volume nul; il mérite bien son qualificatif d'« étrange » (un ensemble de points non vide dont le volume est vide). En fait, on montre numériquement qu'il s'agit d'un objet fractal de dimension proche de 2.05.

5.1.3 Divergence de trajectoires initialement proches

Notons δ_0 l'écart entre deux points de phase choisis initialement. Notons $\delta(t)$ leur écart au bout d'un temps t . Par intégration numérique, on trouve :

$$|\delta(t)| \approx |\delta_0| e^{\lambda t}$$

où $\lambda \approx 0.9$.

Autrement dit, prenons deux points de phase initialement arbitrairement proches l'un de l'autre. Si nous attendons suffisamment longtemps, ils pourront se trouver arbitrairement loin l'un de l'autre au bout d'un temps fini.

λ est un paramètre fondamental pour un système dynamique et se nomme le « coefficient de Lyapunov ». Ce coefficient caractérise la nature chaotique du système. Ainsi,

Propriété 3 – si $\lambda < 0$, le système possède un attracteur périodique (ponctuel ou cycle limite);
– si $\lambda = 0$, le système est quasi-périodique, c'est-à-dire qu'il oscille avec une période T . Cependant, au bout d'un temps T , la position dans l'espace des phases n'est pas exactement la même qu'à la période précédente, entraînant un décalage des trajectoires au cours du temps;
– si $\lambda > 0$, le système est chaotique; il ne possède pas d'attracteur de dimension entière.

Deux remarques à propos du coefficient de Lyapunov :

- dans un système à n dimensions, il y a en fait n coefficients de Lyapunov, un pour chaque dimension. Soit $\lambda_{k, 1 \leq k \leq n}$ le coefficient correspondant à la k^{e} dimension du système. Le coefficient de valeur la plus grande contrôle la taille de l'ellipsoïde contenant l'attracteur;
- λ dépend du point de départ de la trajectoire. Aussi, il faut faire une analyse en moyenne pour obtenir une bonne valeur du coefficient.

Quand un système possède un coefficient de Lyapunov positif, il existe un « horizon temporel » au-delà duquel toute prédiction dans la position d'une particule devient impossible connaissant sa position initiale. Si nous désirons une prédiction avec une précision p , le temps limite auquel on peut effectivement faire une prédiction avec cette précision est :

$$t_h \approx O\left(\frac{1}{\lambda} \log \frac{p}{|\delta_0|}\right)$$

Comme on le voit, le problème est que cet horizon temporel augmente en fonction du logarithme de la précision sur la mesure initiale. Aussi, cette précision doit augmenter beaucoup plus vite que

ne peut augmenter la précision sur la prédiction. Dans la pratique, la précision forcément finie des mesures de quantités réelles entraîne l'imprédictibilité au bout d'un certain temps.

Pour illustrer graphiquement cette sensibilité aux conditions initiales, la figure 20 montre pour un ensemble de conditions initiales proches leur évolution au bout d'un certain temps dans le cas du système de Lorenz. On constate que les points obtenus sont éparpillés dans l'espace.

5.1.4 Définitions de « chaos » et « attracteur »

On donne ici des définitions précises pour les termes « chaos », « attracteur » et « attracteur étrange ».

Définition 15 *Un comportement chaotique est un comportement à long-terme apériodique dans un système déterministe qui exhibe une sensibilité aux conditions initiales du système.*

Cette définition peut être précisée de la manière suivante :

- (a) un « comportement apériodique à long-terme » signifie qu'il existe des trajectoires qui ne se stabilisent jamais sur un point fixe, une orbite périodique ou quasi-périodique quand $t \rightarrow \infty$.
- (b) « déterministe » signifie que le hasard n'intervient pas dans l'évolution du système. Le chaos n'apparaît pas à cause d'une connaissance imparfaite du comportement du système. Il est uniquement dû à la non-linéarité du système.
- (c) la « sensibilité aux conditions initiales » signifie que des trajectoires initialement arbitrairement proches s'éloignent à un rythme exponentiel, c'est-à-dire que le système possède un coefficient de Lyapunov positif.

Définition 16 *\mathcal{A} est un attracteur si :*

- (a) *une trajectoire qui démarre sur \mathcal{A} demeure tout le temps sur \mathcal{A} ;*
- (b) *\mathcal{A} attire un ensemble de positions initiales ;*
- (c) *\mathcal{A} est minimal : aucun sous-ensemble de \mathcal{A} ne satisfait les conditions (a) et (b).*

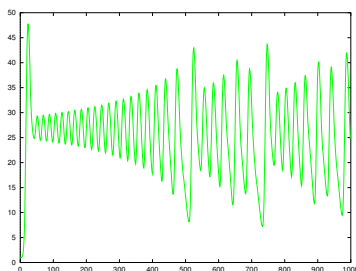
L'ensemble des positions initiales qui sont attirées par \mathcal{A} constitue son bassin d'attraction.

Définition 17 *Un attracteur est étrange s'il est sensible aux conditions initiales.*

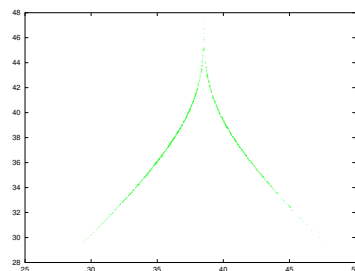
Remarque

En fait, c'est un peu plus compliqué que cela. En effet, un système peut avoir un comportement chaotique bien qu'il ne soit pas sensible aux conditions initiales. Autrement dit, il peut y avoir un attracteur étrange bien que la condition de sensibilité aux conditions initiales ne soit pas remplie.

Notons qu'une propriété qui accompagne un comportement chaotique est que dans ce cas, la transformée de Fourier donne un spectre continu. Si le comportement n'est pas chaotique (point fixe, cycle limite), le spectre est discret, avec des pics correspondant aux états stables. Un spectre continu est un indice d'un comportement chaotique. Attention cependant, un bruit possède également un spectre continu.



(a) Evolution de z au cours du temps dans le système de Lorenz. (L'évolution de x et y donne le même type de graphique.)



(b) z_{n+1} en fonction de z_n pour le système de Lorenz. (x et y ne donne pas ce genre de « jolie » fonction.) z_n est la valeur du n^{e} maximum de z .

FIG. 21 – Le système de Lorenz

5.1.5 Compléments concernant l'analyse du système de Lorenz

Il est intéressant d'étudier l'évolution de z au cours du temps (figure 21(a)). z oscille de manière apériodique. Notons z_n le n^{e} maximum de z et traçons le graphe de z_{n+1} en fonction de z_n (figure 21(b)). On constate que l'on obtient un nuage de points qui ne possède presque pas d'épaisseur, c'est-à-dire que l'on a presque une bijection. C'est-à-dire, qu'il existe presque une fonction $f : z_{n+1} = f(z_n)$. f est l'« application de Lorenz ». On dit bien que f existe « presque » ; strictement parlant, $f(z)$ n'est pas très bien définie : ce n'est pas une bijection, donc pas une application au sens strict du terme. Cependant, pour un z_n donné, l'épaisseur de la courbe est vraiment très faible.

L'application de Lorenz permet de montrer qu'il ne peut exister ni cycle limite stable, ni orbite close stable pour le système de Lorenz.

Pour des valeurs $13.926 < r < 24.06$, le système exhibe un comportement chaotique transitoire. C'est-à-dire qu'il se comporte pendant un temps de manière apériodique puis finit par se stabiliser. Ainsi, pour ces valeurs de r , les attracteurs C^- et C^+ existent et le système finit par se stabiliser sur l'un d'eux. Du fait de la sensibilité aux conditions initiales du système, on ne peut pas prédire si le système va se stabiliser en C^- ou C^+ étant donné son état de départ dans le cas général.

Le chaos transitoire montre qu'un système qui possède des attracteurs, donc un ensemble d'états finaux connus, peut être imprévisible.

Remarque

Le chaos transitoire apparaît dans de très nombreux jeux de chance : la face sur laquelle va s'arrêter un dé non pipé est imprévisible bien que l'on sache parfaitement qu'il s'arrêtera sur l'une de ses six faces.

Des synonymes de chaos transitoire sont « chaos métastable » et « pré-turbulence ».

Pour $24.06 < r < r_H = 24.74$, le système possède des points stables C^- et C^+ ainsi qu'un attracteur étrange. Des effets d'hystérésie sont donc observables.

Pour $r > 313$, le système de Lorenz possède un cycle limite attracteur. Pour $28 < r < 313$,

le système est généralement chaotique avec cependant des fenêtres de r dans lesquelles le système possède un attracteur.

6 Les applications mono-dimensionnelles

Les applications mono-dimensionnelles sont définies par une équation de récurrence ; on peut donc espérer pouvoir réaliser une analyse formelle, au moins dans des cas simples. Bien que très simples, des comportements chaotiques peuvent exister dans ces systèmes dynamiques.

Une application mono-dimensionnelle se définit par une équation $x_{n+1} = f(x_n)$. La suite x_0, x_1, x_2, \dots est appelée orbite d'origine x_0 .

Si x^* satisfait $x^* = f(x^*)$, x^* est un point fixe de l'application f .

Propriété 4 On a :

- Si $|f'(x^*)| < 1$, x^* est linéairement stable ;
- Si $|f'(x^*)| > 1$, x^* est linéairement instable ;
- Si $|f'(x^*)| = 1$, on ne peut rien dire aussi simplement.

Définition 18 Si $|f'(x^*)| = 0$, x^* est linéairement superstable.

Propriété 5 Si $-1 < f'(x^*) < 0$, le système converge en oscillant autour de x^* . Si $0 < f'(x^*) < 1$, la convergence est monotone vers x^* .

6.1 L'application logistique

Considérons l'application dite « logistique » décrivant la dynamique d'une population possédant un taux de croissance r ⁷ :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

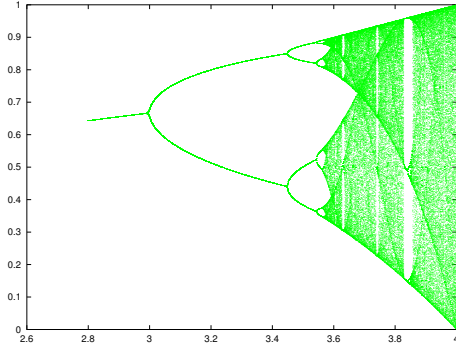
où r est un paramètre de contrôle dont on prend la valeur entre 0 et 4 parce que les autres ne sont pas intéressantes et parce que dans ce cas, si $0 \leq x_n \leq 1$, on a $0 \leq x_{n+1} \leq 1$.

Pour $r < 1$, $x = 0$ est le seul point fixe.

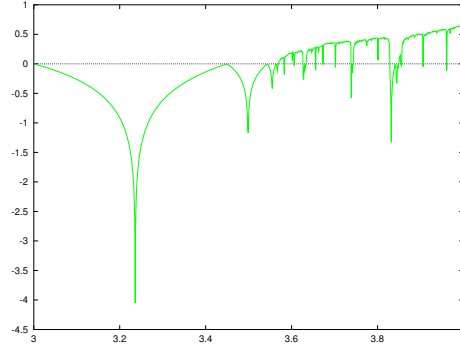
Pour $1 < r < 3$, le système possède un et un seul attracteur (convergence non monotone vers $x^* = 1 - 1/r$). $x = 0$ demeure un point fixe mais devient instable pour $r = 1$. En $r = 1$, il y a donc une bifurcation trans-critique.

Quand r continue à croître, le comportement devient beaucoup plus complexe : pour $r = 3.3$, le système oscille entre deux valeurs : x_p et x_q telles que $x_p = f(x_q)$ et $x_q = f(x_p)$. On a un cycle de période 2. Pour $r = 3.5$, le système oscille sur un cycle de période 4. Pour $r = 3.55$, le système possède un cycle de période 8. Ce doublement de période se poursuit jusqu'à une valeur limite

⁷L'équation est normalisée pour qu'elle prenne ses valeurs entre 0 et 1. A l'origine, c'est l'équation dite de Verhulst $x_{t+1} = rx_t(1 - \frac{x_t}{K})$ où K est la capacité d'accueil de l'environnement (le nombre d'individus que l'environnement peut nourrir), x_t le nombre d'individus dans la population à la génération t .



(a) Diagramme d'orbites pour l'application logistique. Pour des valeurs de r (en abscisse) variant entre 2.6 et 4.0, on note les points x faisant parti d'une orbite. On voit une alternance de zones chaotiques avec des fenêtres périodiques terminées par des cascades de doublements de période menant à des orbites apériodique et à un comportement chaotique du système.



(b) Exposant de Lyapunov en fonction de la valeur du paramètre de contrôle pour l'application logistique. Voir le texte pour plus de précision.

FIG. 22 – Application logistique

$r_\infty = 3.569946\dots$ où le système possède un cycle de période infinie. Les valeurs limites successives r_n pour lesquelles le système bifurque sont séparées par une distance qui décroît géométriquement par un facteur

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \approx 4.669\dots$$

Pour des valeurs de r supérieures à cette valeur critique, le comportement du système est parfois chaotique, parfois non chaotique avec des orbites de période finie. En fait, il y a des zones de r pour lesquelles il y a à nouveau des séquences de doublement de période allant jusqu'à l'infini. Si l'on représente graphiquement pour une valeur de r donnée l'orbite qui est associé (un point par élément d'une orbite), on obtient une figure extraordinairement complexe qui révèle malgré tout une certaine structure (voir figure 22(a)).

Remarque

Le lecteur attentif est fort probablement songeur arrivé à ce point et s'il n'a pas lu le reste (s'il n'est pas songeur, il n'est probablement pas assez attentif...). En effet, nous avons dit plus haut qu'un système doit posséder au moins 3 dimensions pour qu'un comportement chaotique puisse y être observé. Intuitivement, on comprend bien qu'un système possédant n dimensions continues soit équivalent à une application discrète à $n - 1$ dimensions, ce qui porterait à 2 le nombre minimal de dimensions pour qu'une application exhibe un comportement chaotique. Or, nous venons de rencontrer une application mono-dimensionnelle où le chaos apparaît...

On montre également que la largeur des fourches décroît de manière régulière. Notons x_m la valeur de x pour laquelle $f(x) = rx(1 - x)$ est maximale entre 0.0 et 4.0 (domaine auquel nous nous

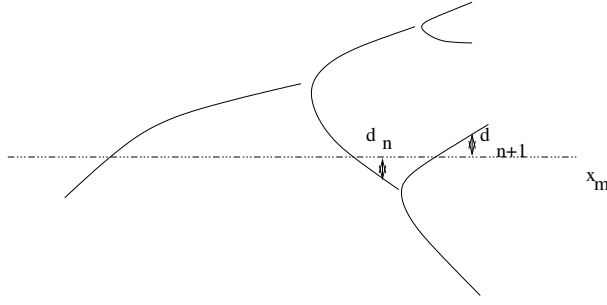


FIG. 23 –

intéressons). Notons d_n la distance entre x_m et le point le plus proche du 2-cycle considéré (voir la figure 23). On montre que le rapport $\frac{d_n}{d_{n+1}}$ tend vers une valeur limite $\alpha = 2.5029\dots$

6.1.1 Existence de comportement apériodique

La question de savoir s'il peut exister un comportement chaotique pour une valeur du paramètre de contrôle a été étudiée formellement. On a ainsi le théorème de Sarkovskii valable pour les transformations mono-dimensionnelles :

Théorème 1 *S'il existe une solution de période entière impaire pour une valeur r_c du paramètre de contrôle, alors il y a des solutions apériodiques (chaotiques) pour des valeurs $r > r_c$.*

De ce résultat, on a montré que s'il existe une solution de période 3 pour une certaine valeur du paramètre de contrôle, alors il existe des solutions de toute période entière, y compris infinie, donc apériodique.

On a aussi montré que s'il existe n impair tel que $f^n(x_t) < x_t < f(x_t)$, alors il existe des solutions apériodiques.

6.1.2 Routes vers le chaos

Pour $0 \leq r < 1$, l'origine est un attracteur.

Pour $r = 1$, il y a bifurcation trans-critique de l'origine qui devient instable. $x = 1 - 1/r$ est attracteur.

Pour $r = 3$, la pente au point fixe devient inférieure à -1 . Donc, suivant la propriété 4, le point fixe devient linéairement instable pour cette valeur du paramètre de contrôle. On parle de « bifurcation flip ». Ce type de bifurcation est souvent associée à un doublement de période. C'est ce qui se passe ici : en $r = 3$, un 2-cycle apparaît et les deux points de l'orbite sont $p, q = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$.

Pour une valeur de $r = 1 + \sqrt{8}$, le système quitte soudainement son régime chaotique et un 3-cycle apparaît. C'est le début d'une nouvelle fenêtre périodique. Ce changement radical de régime a lieu au cours d'une bifurcation tangente.

Pour une valeur de r légèrement inférieure à $1 + \sqrt{8}$, il y a une orbite de période 3 qui est stable pendant un certain nombre d'itérations puis le système sombre dans un comportement chaotique. Il

s'agit là du fantôme du 3-cycle. Les fantômes apparaissent toujours au voisinage des bifurcations en point de selle et une bifurcation tangente est une bifurcation en point de selle. Pour ces valeurs de r , le système oscille entre des périodes où il possède un 3-cycle et des périodes chaotiques. Aussi, ce comportement est qualifié d'« intermittent ». D'une manière générale, l'intermittence est caractéristique d'un comportement qui oscille entre l'ordre et le chaos. Les phases d'ordre sont de longueur distribuée statistiquement, un peu comme une variable aléatoire. Quand le paramètre se rapproche en décroissant de la zone de chaos complet, les périodes d'ordre deviennent statistiquement plus rares. Ce comportement est qualifié de « route intermittente vers le chaos ». D'une manière générale, une « route vers le chaos » est une séquence de bifurcations menant vers le chaos. Par exemple, dans le cas de l'application logistique, cette route est composée de bifurcations flip, c'est-à-dire de dédoublements de périodes quand r augmente. Dans le cas du système de Lorenz, cette route est différente⁸.

6.1.3 Exposant de Lyapunov

Pour une application mono-dimensionnelle, l'exposant de Lyapunov est :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)|$$

La figure 22(b) montre la valeur de λ en fonction de r pour l'application logistique. Pour les valeurs de r pour lesquelles l'exposant est négatif, le comportement suit une orbite périodique. Pour les valeurs positives, le comportement est chaotique. On constate que des plages de valeurs positives sont mélangées avec des plages de valeurs négatives correspondant aux « fenêtres périodiques ».

6.2 Universalité du comportement

Des résultats très généraux ont été montrés sur toutes les applications mono-modales de la forme $x_{n+1} = rf(x_n)$ où $f(x)$ satisfait aux conditions sur les bornes $f(0) = f(1) = 0$. Quand r varie, il a été montré que les solutions périodiques apparaissent dans un ordre indépendant de f et dans une séquence dont l'ordre est universel. Cette séquence est dénommée la « séquence-U ». Pour les périodes inférieures à 6, la séquence-U commence de la manière suivante : 1, 2, 2×2 , 6, 5, 3, 2×3 , 5, 6, 4, 6, 5, 6, ... Par contre, il n'y a pas de propriété universelle concernant les valeurs de r auxquelles se produisent les doublements de période. Les constantes δ et α introduites plus haut sont également indépendantes de f : ce sont des constantes universelles au même titre que π (δ porte le nom de « constante de Feigenbaum »). Ainsi, on obtient des diagrammes de bifurcation très identiques pour l'application sinus $f(x) = \sin \pi x$ ou l'application tente

$$f(x) = \begin{cases} rx & \text{pour } 0 \leq x \leq 1/2 \\ r - rx & \text{pour } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Autrement dit, la dynamique de ces différents systèmes est qualitativement la même. On retrouve ces caractéristiques (séquence-U, α et δ) dans divers systèmes non linéaires étudiés expérimentalement (systèmes mécaniques, chimiques, biologiques, ...).

⁸exercice : quelle est cette route dans le cas du système de Lorenz ?

7 Attracteurs étranges

Le but de cette section est de donner un peu d'intuition sur les raisons d'apparition du chaos dans un système. Clairement, on ne sait pas aujourd'hui décider *a priori*, étant données ses équations, si un système peut avoir un comportement chaotique pour certaines valeurs de ses paramètres de contrôle. Par ailleurs, parmi les systèmes pour lesquels on a constaté expérimentalement qu'ils ont un comportement chaotique, on ne l'a prouvé formellement que pour certains d'entre-eux. Ainsi, la première démonstration concerne, en 1980, l'application dite de Lozi⁹. En 1991, on l'a montré pour le système de Hénon¹⁰. Pour le système de Lorenz, c'est toujours une conjecture. On ne connaît pas non plus de méthode générale analytique qui donne la structure de l'attracteur quand on sait qu'il en existe un (voir cependant la méthode de « reconstruction d'attracteur » à la section 7.3 qui permet de connaître la dimension d'un attracteur étrange à partir de données expérimentales).

7.1 Origine des attracteurs étranges

Il est utile de faire un détour par des applications très simples pour comprendre d'où peut provenir la structure fractale d'un attracteur et la sensibilité aux conditions initiales.

Considérons la transformation du pâtissier (à ne pas confondre avec la transformation du boulanger). Elle consiste à prendre un morceau de pâte de forme carrée (voir figure 24(a)), l'aplatir — donc l'étirer — (voir figure 24(b)), la replier (voir figure 24(c)) et itérer (figure 24(d) et 24(e)). Après repliement, la pâte est inscrite dans le carré initial.

Si on itère un grand nombre de fois (en tendant vers l'infini) et que l'on effectue une section (de Poincaré) de la pâte, on obtient un ensemble de Cantor qui est bien un objet fractal. Cet ensemble de Cantor est l'attracteur du système qui est donc étrange. La structure fractale est due à la combinaison étirement/pliage.

Prenons maintenant la transformation du boulanger. Elle consiste à prendre un morceau de pâte, à l'étirer et, non pas à la replier, mais à la couper en « empilant » les deux morceaux obtenus. On itère ensuite le processus (voir figure 25). Les équations sont :

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n, ay_n) & 0 \leq x_n < 1/2 \\ (2x_n - 1, ay_n + 1/2) & 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

Au fur et à mesure des itérations, des points initialement proches l'un de l'autre s'éloignent. Au bout d'un certain temps, quelle que soit la précision (finie) avec laquelle on connaît l'écart entre

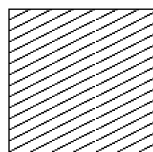
⁹l'application de Lozi est définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a |x_n| \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

¹⁰l'application de Hénon est défini par

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

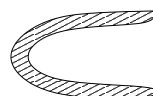
qui a un comportement chaotique pour les valeurs $a = 1.4$ et $b = 0.3$.



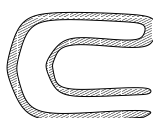
(a) La pâte à l'origine.



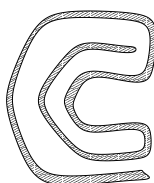
(b) La pâte après étirement.



(c) La pâte après un premier pliage.



(d) La pâte après un deuxième pliage.



(e) La pâte après un troisième pliage.

FIG. 24 – La transformation du pâtissier. Les zones hachurées ont toutes la même surface. Dans les schémas (c), (d) et (e), la zone hachurée est inscrite dans le carré du (a).

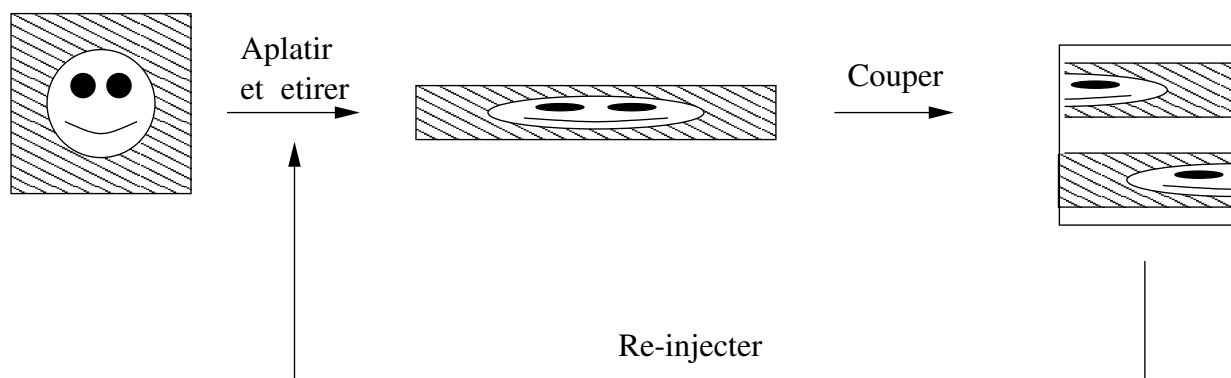


FIG. 25 – La transformation du boulanger.

les points initiaux, la distance entre leurs transformées n'est plus prévisible. Cette sensibilité aux conditions initiales est liée à l'opération d'étirement.

On notera également que le volume de l'espace des phases diminue si $a \neq 1/2$. Pour $a = 1/2$, le volume est conservé. L'application n'a pas d'attracteur dans ce cas-là (rappel : un système conservatif n'a pas d'attracteur). L'opération de pliage donne son caractère dissipatif au système.

7.2 Résumé

Si l'on résume ce qui vient d'être dit, un comportement chaotique est lié à la combinaison itérée d'une opération d'étirement et d'une opération de repliement. Le système de Lorenz contient une combinaison de ce type, de même que tous les systèmes chaotiques connus. Pour pouvoir avoir ces opérations d'étirement et pliage, il faut nécessairement se placer dans le cas d'une application ayant au moins 2 dimensions dans le cas général. Dans le cas où l'application n'est pas une bijection, une application définie en une seule dimension peut cependant avoir un comportement chaotique (voir l'application logistique à la section 6.1). Quand on transforme une application en un système d'équations différentielles, on ajoute une dimension. Aussi, pour qu'un SEDO puisse avoir un comportement chaotique, il faut qu'il possède au moins 3 dimensions. Notons que dans le cas des systèmes non autonomes (dont les équations dépendent du temps), le temps est une dimension ; aussi, si le système est défini à l'aide de deux autres variables, il peut déjà avoir un comportement chaotique. Aussi, presque tous les systèmes non autonomes ont un comportement chaotique.

Propriété 6 *Un comportement chaotique est possible dans les cas suivants :*

- *système d'équations différentielles autonomes de dimension supérieure ou égale à 3 ;*
- *système d'équations différentielles non autonomes de dimension supérieure ou égale à 2 ;*
- *application bijective de dimension supérieure ou égale à 2 ;*
- *application non bijective de dimension supérieure ou égale à 1.*

D'une manière générale, ces conclusions s'appuient sur la démonstration que le comportement typique d'un système décrit par un SEDO en deux dimensions ne peut pas être chaotique. En trois dimensions, ce résultat n'est plus vrai et on vérifie qu'effectivement, les comportements chaotiques sont loin d'être atypiques en trois dimensions.

Remarque

La résolution numérique sur ordinateur d'équations est en fait l'équivalent d'une application. Aussi, un comportement chaotique étant possible pour des applications de dimension 1, on comprend que les erreurs numériques inhérentes à la réalisation de calculs sur ordinateur peuvent produire des résultats qui n'ont rien à voir avec la valeur réelle (théorique) du fait d'un éventuel comportement chaotique, c'est-à-dire du fait de la sensibilité aux conditions initiales.

Le comportement chaotique est intrinsèquement lié à une limite dans la prédiction de l'état du système dans l'avenir. Il est par ailleurs lié à une limite à la post-diction, c'est-à-dire à la connaissance du passé du système étant donné son état actuel. Un comportement chaotique entraîne donc une limite sur la connaissance possible de l'avenir et du passé d'un système.

Remarque

On a montré que la dynamique du système solaire est chaotique pour certaines planètes, dont la terre. Aussi, on ne peut prédire la position de la terre dans 100 millions d'années ; de la même manière, on ne peut pas connaître sa position dans le passé et donc connaître sa position lorsque les dinosaures existaient par exemple.

7.3 Reconstruction d'un attracteur

Plaçons-nous maintenant dans la situation de l'expérimentateur (biologiste, chimiste, ...) qui observe un phénomène, en fait une mesure et veut analyser la dynamique observée et donc décrite dans cette série de mesures. Tout d'abord, il faut bien savoir que quelle que soit cette série de valeur, on ne peut pas savoir si elle est complètement aléatoire ou si elle correspond à un comportement chaotique. En effet, on peut modéliser toute série de mesures par un système dynamique déterministe.

La première étape raisonnable consiste à en faire un spectre de puissance. Comme on l'a dit plus haut, si le spectre est continu, on peut être en présence d'un attracteur étrange. S'il est discret, l'attracteur est de dimension entière et le spectre va nous donner les informations suffisantes dans ce cas. Ainsi, si le système oscille quasi-périodiquement à deux fréquences fondamentales f_1 et f_2 , le spectre aura des pics à toutes les fréquences $m_1 f_1 + m_2 f_2$ où m_1 et m_2 sont des entiers. Si le nombre de fréquences fondamentales est supérieur à deux, le spectre devient de plus en plus continu.

Si le spectre est continu, tout n'est pas perdu car on a une méthode qui permet d'analyser la série de mesures et de déterminer la dimension d'un attracteur qui y correspond.

On parle de « reconstruction de l'attracteur » et la méthode qui va être décrite est nommée la méthode des retards de Takens.

Notons x_1, x_2, \dots, x_N une suite de valeurs mesurées avec un intervalle de temps constant entre-elles Δt .

Prenons n (petit : 2 ou 3 par exemple), un entier qui se nomme la « dimension de plongement ».

Formons les vecteurs $X_1 = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, $X_2 = \langle x_2, x_3, \dots, x_{n+1} \rangle$, ...

Nous pouvons étudier cette suite de vecteurs X comme la position au cours du temps d'un système dynamique à n dimensions dans son espace des phases particulier. Un résultat mathématique remarquable est que l'étude de ce système donne des informations sur le système original.

L'algorithme de Grassberger-Procaccia est alors :

- (a) Pour un rayon r , on note $c(n, r)$ le nombre de paires de vecteurs X_i, X_j dont la distance est inférieure à r divisé par le carré du nombre de vecteurs X (soit $(N - n)^2$).
- (b) On fait ensuite tendre r vers 0 et on calcule la limite α_n :

$$\alpha_n = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log c(n, r)}{\log r}$$

- (c) On fait ensuite croître la dimension de plongement, ce qui nous donne une série de limites α_i . Si cette série tend vers une limite α (on dit qu'il y a saturation), cette limite est la dimension de l'attracteur.

On a le théorème suivant :

Théorème 2 *Si la dimension de l'attracteur est inférieure à d , alors α_n doit atteindre une limite α dès que $n > 2d + 1$.*

Il y a deux remarques importantes à faire à propos de cette méthode. Tout d'abord, il faut beaucoup de points x_i pour que la méthode donne un résultat fiable. Si d est la dimension de l'attracteur, il faut au moins 10^d points. Ensuite, la valeur α trouvée n'a rien à voir avec la dimension du système dynamique lui-même, mais uniquement avec la dimension de l'attracteur.

Remarque

A la suite de ce qui vient d'être dit, une propriété fondamentale découle directement. Une mesure expérimentale produisant une certaine suite de valeurs (une série temporelle), il est toujours possible de construire un système dynamique rendant compte de cette suite de valeurs. Aussi, il est impossible de distinguer une suite de valeurs aléatoires de celle produite par un système dynamique déterministe au cours de son évolution.

Ce fait a de très profondes conséquences : depuis la Grèce ancienne, on fait l'hypothèse que le monde est compréhensible, c'est-à-dire qu'il existe des lois qui régissent notre univers. Hors, 25 siècles plus tard, les mathématiques viennent de montrer que l'on ne peut pas distinguer une évolution aléatoire d'une évolution déterministe. Notons cependant que cette conclusion est établie dans le cadre des mathématiques. Si l'on propose un autre cadre pour comprendre notre univers, peut-être cet aléatoire disparaîtra-t-il...

7.4 Le système chaotique le plus simple : le décalage de Bernoulli

On présente dans cette section le système le plus simple dans lequel apparaît le chaos. Bien que très simple et apparemment très abstrait, ce système n'est pas dénué d'intérêt pratique. Par ailleurs, sa simplicité permet son étude intuitive.

On définit donc le décalage de Bernoulli :

$$x_{n+1} = (x_n \ll 1) \bmod 10$$

x_0 est compris entre 0 et 1. \ll dénote l'opérateur « décalage à gauche ». $\ll 1$ décale d'un chiffre le nombre auquel il est appliqué. On s'intéresse alors à la série y_i composée des chiffres des unités des x_n . Par exemple, prenons le nombre $x_0 = 0.81972$. On aura :

- $x_0 = 0.81972$, $y_0 = 0$,
- $x_1 = 0.1972$, $y_1 = 8$,
- $x_2 = 0.972$, $y_2 = 1$,
- $x_3 = 0.72$, $y_3 = 9$,
- $x_4 = 0.2$, $y_4 = 7$,
- $x_5 = 0.0$, $y_5 = 2$,
- $x_{i>5} = 0.0$, $y_{i>5} = 0$.

On a alors :

- si $x_0 \in \mathbb{D}$, $y = 0$ est attracteur ;
- si $x_0 \in \mathbb{Q} - \mathbb{D}$, l'attracteur est un cycle limite ;
- si $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, la trajectoire est apériodique.

Dans ce dernier cas, l'exposant de Lyapunov est $\ln 10$. En effet, prenons deux points initiaux, donc des nombres irrationnels, qui ne diffèrent que d'une décimale, la k^{e} . Donc, la différence initiale moyenne est $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-k}$. à l'itération suivante, on a $\delta_1 = 5 \cdot 10^{-k+1}$; à la i^{e} itération ($i < k$), on a $\delta_i = 5 \cdot 10^{-k+i}$. On a donc $\frac{\delta_1}{\delta_0} = \frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} = 10$.

7.5 Conséquences de la non linéarité

Il n'est pas inutile d'appuyer sur quelques conséquences liées à la présence de non linéarités dans l'EDO décrivant la dynamique d'un système.

Tout d'abord, la linéarité d'un système entraîne la proportionnalité entre une perturbation et ses effets : petite perturbation entraîne petits effets et une grande modification dans l'état du système est forcément la conséquence d'une perturbation de grande ampleur du système.

Au contraire, dans un système non linéaire, nous n'avons pas ce genre de règle de proportionnalité. Tout dépend du fait que le système a une dynamique chaotique, ou sinon, s'il est proche ou non d'une transition de phase, c'est-à-dire d'une bifurcation. Dans le cas d'une dynamique non chaotique, si le système est loin d'une bifurcation, une petite perturbation n'aura qu'un effet relativement faible. Par contre, s'il est proche d'une bifurcation, la perturbation peut changer complètement la dynamique du système.

Ainsi, dans un système non linéaire, une perturbation d'une amplitude faible donnée aura des conséquences négligeables ou énormes selon le cas.

Remarque

C'est là un mode de pensée auquel l'enseignement habituel, jusqu'aux premières années de fac ne nous prépare pas du tout. C'est aussi un mode de pensée totalement absent des discussions de tous les jours ; il n'y a qu'à écouter ce que nous disent certaines personnes dans les médias, journalistes scientifiques ou autres décideurs et technocrates.

Remarque bibliographique

Je cite quelques références. Je recommande particulièrement le livre de S. Strogatz [Str96] qui déborde d'exemples et d'exercices et qui est limpide. Le recueil d'articles [DCC92] est un excellent complément où sont décrites des techniques, mais aussi discutées les idées liées au chaos déterministe. Par ailleurs, une fois [Str96] ingurgité, ce livre est facile à lire. Pour aller plus avant dans les détails techniques, l'ouvrage [BPV95] est excellent. Le dossier « Pour La Science » [pls95] permet de se cultiver un peu à propos des systèmes non linéaires et du chaos dans les processus naturels. Pour ceux qui veulent connaître la grande aventure occidentale (et même surtout américaine) de la découverte du chaos, le livre de J. Gleick [Gle99] est un classique incontournable. Cependant, les chercheurs soviétiques méritent une très large reconnaissance de leur travail fondamental depuis la fin du 19^e siècle avec Lyapunov, occulté par la période stalinienne et la guerre froide. Il est grand temps de leur laisser la place qui leur revient, immense. Un excellent exposé de ces travaux est disponible dans [Din92]. N'oublions pas, la « littérature » américaine nous y pousserait facilement, l'œuvre fondamentale de H. Poincaré à l'orée de ce siècle qui a été l'un des piliers du travail des écoles russe et française (voir [DCC92]) dans le domaine du chaos déterministe.

Le calcul numérique d'orbites apériodiques pose des problèmes fondamentaux. En effet, une orbite chaotique est sensible aux conditions initiales, un faible écart entre deux conditions initiales entraînant des écarts énormes au bout d'un certain temps. Les calculs numériques étant réalisés avec une précision finie, on perd forcément quelques décimales qui entraîne une divergence entre l'orbite calculée et l'orbite réelle au bout d'un certain temps. Ces problèmes sont étudiés dans [McC93].

Références

- [BPV95] P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'ordre dans le chaos — Vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, 1995.
- [DCC92] A. Dahan Dalmedico, J-L. Chabert, and K. Chemla, editors. *Chaos et déterminisme*. Points sciences. Seuil, 1992.
- [Din92] Simon Diner. Les voies du déterminisme dans l'école russe. In [DCC92], Points sciences, pages 331–370. Seuil, 1992.
- [Gle99] J. Gleick. *La théorie du chaos*. Champs Flammarion, 1999 ?
- [McC93] J.L. McCauley. *Chaos, Dynamics and Fractals — An algorithmic approach to deterministic chaos*. Cambridge University Press, 1993.
- [pls95] Le chaos, January 1995.
- [Str96] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, 1996.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Définitions préliminaires	2
3	Systèmes continus mono-dimensionnels	7
3.1	Bifurcations	7
3.1.1	Bifurcation en point de selle	9
3.1.2	Bifurcation trans-critique	9
3.1.3	Bifurcation en fourche	9
3.1.4	Bifurcation imparfaite	10
3.1.5	Hystérésie	10
3.2	Flux sur un cercle	12
3.2.1	Oscillateur mono-dimensionnel uniforme	13
3.2.2	Oscillateur mono-dimensionnel non uniforme	13
4	Systèmes continus bi-dimensionnels	13
4.1	Systèmes linéaires	15
4.1.1	Un exemple et quelques définitions	15
4.1.2	Nature des points fixes des systèmes linéaires	18
4.2	Plan de phases d'un système non linéaire	18
4.2.1	Linéarisation d'un système non linéaire	19
4.3	Cycles limites	19
4.4	Bifurcations concernant des points fixes ponctuels	20
4.5	Bifurcations de Hopf	21
4.6	Cycles limites en deux dimensions	23
4.6.1	Bifurcation de cycle en point de selle	23
4.6.2	Bifurcation de période infinie	23
4.6.3	Bifurcation homocline	24
4.7	Section et application de Poincaré	25
5	Systèmes à plus de deux dimensions	25
5.1	Le système de Lorenz	26
5.1.1	Quelques éléments de la dynamique du système de Lorenz	26
5.1.2	Apparition des attracteurs étranges	26
5.1.3	Divergence de trajectoires initialement proches	28
5.1.4	Définitions de « chaos » et « attracteur »	29
5.1.5	Compléments concernant l'analyse du système de Lorenz	30

6	Les applications mono-dimensionnelles	31
6.1	L'application logistique	31
6.1.1	Existence de comportement apériodique	33
6.1.2	Routes vers le chaos	33
6.1.3	Exposant de Lyapunov	34
6.2	Universalité du comportement	34
7	Attracteurs étranges	35
7.1	Origine des attracteurs étranges	35
7.2	Résumé	37
7.3	Reconstruction d'un attracteur	38
7.4	Le système chaotique le plus simple : le décalage de Bernoulli	39
7.5	Conséquences de la non linéarité	40