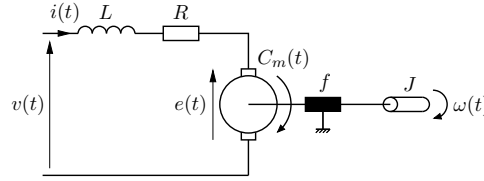


Commande d'un moteur à courant continu

Romain DELPOUX

1 Modélisation du moteur à Courant Continu (CC)

1.1 Description du moteur



Dynamique électrique :

- R : Résistance de l'induit (Ω).
- L : Inductance de l'induit (H).
- $i(t)$: Courant de l'induit (A).
- $v(t)$: Tension de l'induit (V).
- $e(t)$: f.é.m induite (V).

Dynamique mécanique :

- f : Coefficient de frottement visqueux (N.m.s.rad^{-1}).
- J : Moment d'inertie (kg.m^2).
- $C_m(t)$: Couple moteur (N.m).
- $\omega(t)$: Vitesse de rotation (rad.s^{-1}).

1.2 Modélisation du système

1.2.1 Equation électrique :

Loi des mailles :

$$L \frac{di(t)}{dt} = v(t) - Ri(t) - e(t) \quad (1)$$

Dans le domaine de Laplace¹, pour des conditions initiales nulles, on a :

$$I(p) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{L}{R}p + 1} (V(p) - E(p)) = \frac{K_e}{\tau_e p + 1} (V(p) - E(p)) \quad (2)$$

1.2.2 Equation mécanique :

Principe fondamental de la dynamique en rotation :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = \sum c(t) = c_m(t) - f\omega(t) \quad (3)$$

où $c(t)$ est le couple total appliqué au moteur. Dans le domaine de Laplace, pour des conditions initiales nulles, on a :

$$\Omega(p) = \frac{\frac{1}{f}}{\frac{J}{f}p + 1} C_m(p) = \frac{K_m}{\tau_m p + 1} C_m(p) \quad (4)$$

1. $F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$

1.2.3 Couplage électromécanique :

La FEM est proportionnelle à la la vitesse :

$$e(t) = K_e \omega(t) \quad \text{ou} \quad E(p) = K_e \Omega(p) \quad (5)$$

K_e : constante de force électromotrice (V.rad⁻¹.s)

Le couple moteur est proportionnel au courant :

$$c_m(t) = K_c i(t) \quad \text{ou} \quad C_m(p) = K_e \Omega(p) \quad (6)$$

K_c : Constante de couple (N.m.A⁻¹)

La puissance mécanique produite par le moteur CC est $c_m \omega = K_c i \omega$. La puissance électrique $P_e = vi$ délivrée par la source est répartie entre les pertes Joules dans la résistance R , l'énergie magnétique stocké dans l'inductance L et la quantité restante $i K_e \omega$ est convertie en énergie mécanique $c_m \omega$. on a donc $c_m \omega = K_c i \omega = K_e i \omega$ soit $K_c = K_e = K_\phi$ [1].

1.2.4 Schéma bloc :

Le schéma bloc du moteur CC est donné Figure 1.

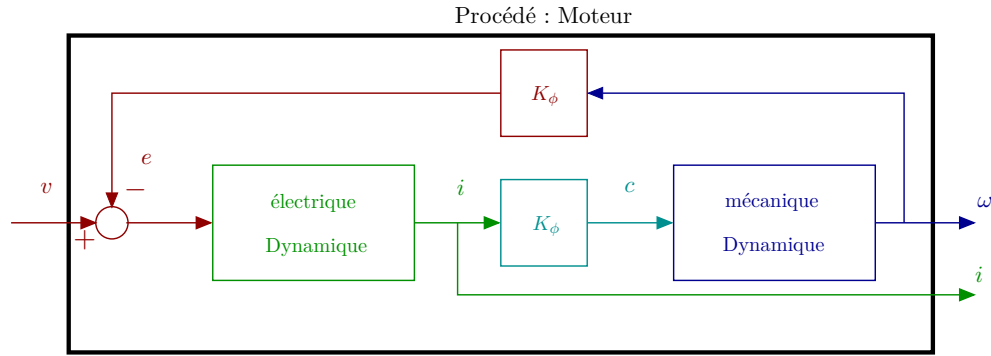


FIGURE 1 – Modèle général moteur CC

2 Asservissement en cascade

2.1 Asservissement de courant

Ici l'objectif est de commander le couple du moteur $c_m(t)$. En effet, $c_m(t) = K_\phi i(t)$ donc on impose le couple moteur en asservissant le courant.

On fait l'hypothèse que la dynamique de vitesse est plus lente que la dynamique électrique. En effet, dans le cas général,

$$\tau_{\text{elec}} = \frac{L}{R} \ll \tau_{\text{meca}} = \frac{J}{f} \quad (7)$$

La vitesse ω peut être considéré comme constante pour la dynamique électrique.

On considère le schéma de la Figure 3

On souhaite asservir le courant à une valeur désirée i_{ref} . On pourra se référer à [2] pour la synthèse du correcteur

Correcteur PI classique L'asservissement avec un correcteur PI classique $C_e(p)$ est représenté Figure 4, avec

$$C_e(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)} = K_{P,i} \left(1 + \frac{1}{T_{I,i} p} \right). \quad (8)$$

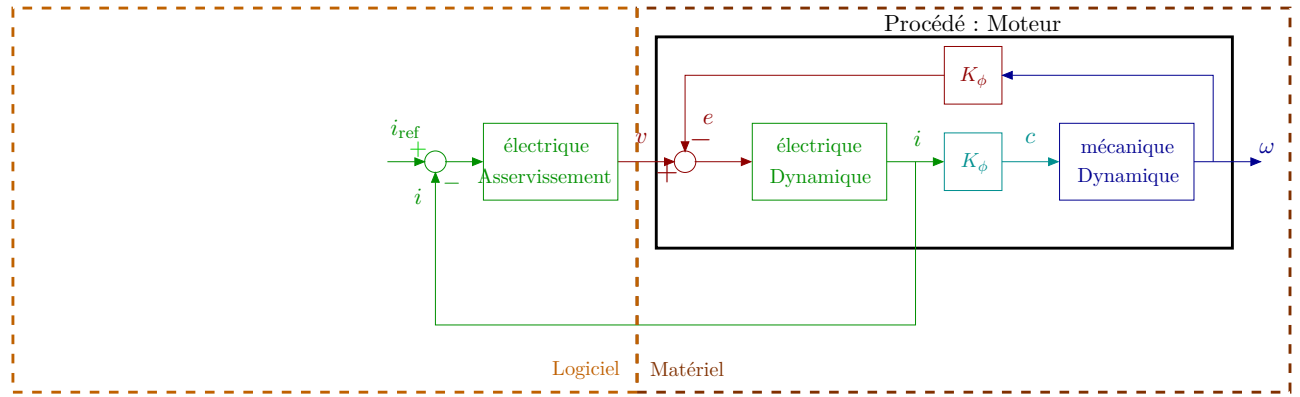


FIGURE 2 – Modèle électrique commandé

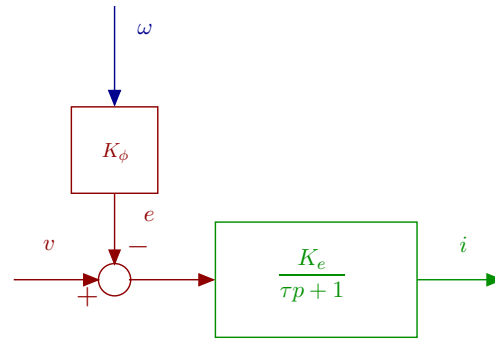


FIGURE 3 – Modèle électrique

La fonction de transfert en boucle fermée est

$$F_{e,BF}(p) = \frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{C_e(p)F_e(p)}{1 + C_e(p)F_e(p)} = \frac{(T_{I,i}p + 1)}{\frac{T_{I,i}\tau_e}{K_{P,i}K_e}p^2 + \frac{T_{I,i}}{K_{P,i}K_e}(1 + K_{P,i}K_e)p + 1} \quad (9)$$

qui présente un zéro au numérateur dont l'influence n'est pas évidente, souvent synonyme de dépassements importants.

Correcteur PI modifié La structure du correcteur PI classique peut être modifiée tel que :

$$V(p) = K_{P,i}(I(p) + \frac{1}{T_{I,i}p}\varepsilon(p)) \quad (10)$$

Cette stratégie est représentée Figure 5

L'action proportionnelle agit sur la sortie $I(p)$ et non sur l'écart. Cette structure de commande donne une fonction de transfert en boucle fermée de la forme :

$$F_{e,BFmod}(p) = \frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{1}{\frac{T_{I,i}\tau_e}{K_{P,i}K_e}p^2 + \frac{T_{I,i}}{K_{P,i}K_e}(1 + K_{P,i}K_e)p + 1} \quad (11)$$

On obtient ainsi en boucle fermée un système du second ordre classique de la forme

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}p + 1}$$

— ω_n est appelée la pulsation naturelle du système et est homogène à une fréquence.

— ζ est le coefficient d'amortissement.

— K est le gain statique (unitaire ici en raison de l'action intégrale).

Cette structure rappelle la commande par retour d'état avec ajout d'une action intégrale.

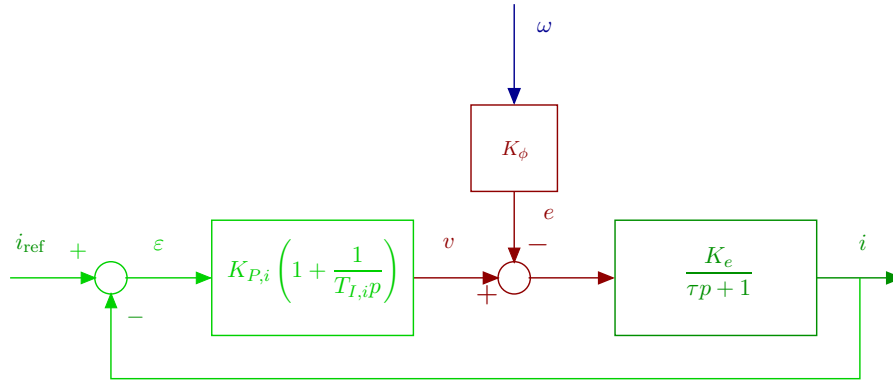


FIGURE 4 – Modèle électrique commandé

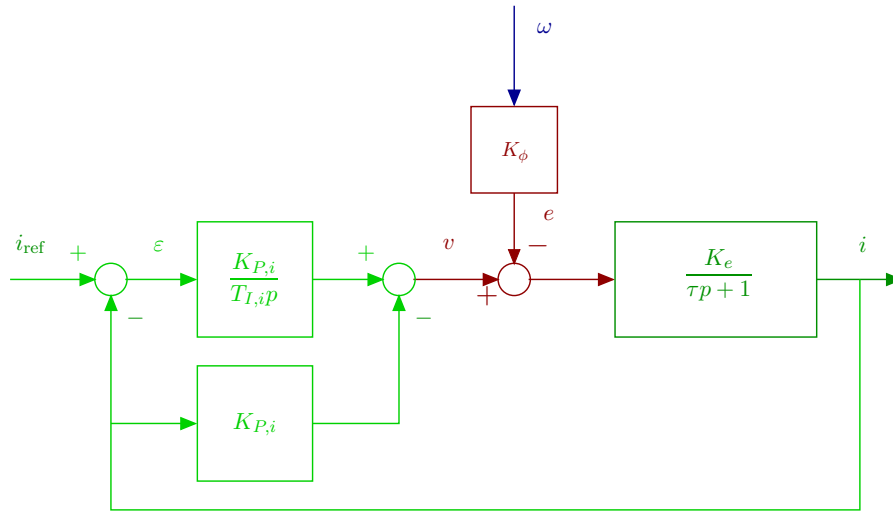


FIGURE 5 – Modèle électrique commandé

Correcteur par retour d'état avec ajout d'une action intégrale La dynamique électrique est donnée par

$$\dot{i} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v - \frac{K_\phi}{L}w \quad (12a)$$

$$= -\frac{1}{\tau_e}i + \frac{K_e}{\tau_e}v - \frac{K_\phi}{L}w \quad (12b)$$

On souhaite asservir le courant à une valeur désirée i_{ref} . Il est donc nécessaire d'ajouter un intégrateur. Le principe de base est d'insérer un intégrateur dans la boucle de pré-compensation (feedforward) entre le comparateur d'erreur et le procédé [4].

$$v(t) = K_{P,i} \left(i(t) + \frac{1}{T_{I,i}} \varepsilon(t) \right) \quad (13a)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = i_{\text{ref}}(t) - i(t) \quad (13b)$$

La dynamique du système peut être décrite par une combinaison des équations (12a) et (13b)

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \frac{K_\phi}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i_{\text{ref}} \quad (14)$$

Avec la commande

$$v = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (15)$$

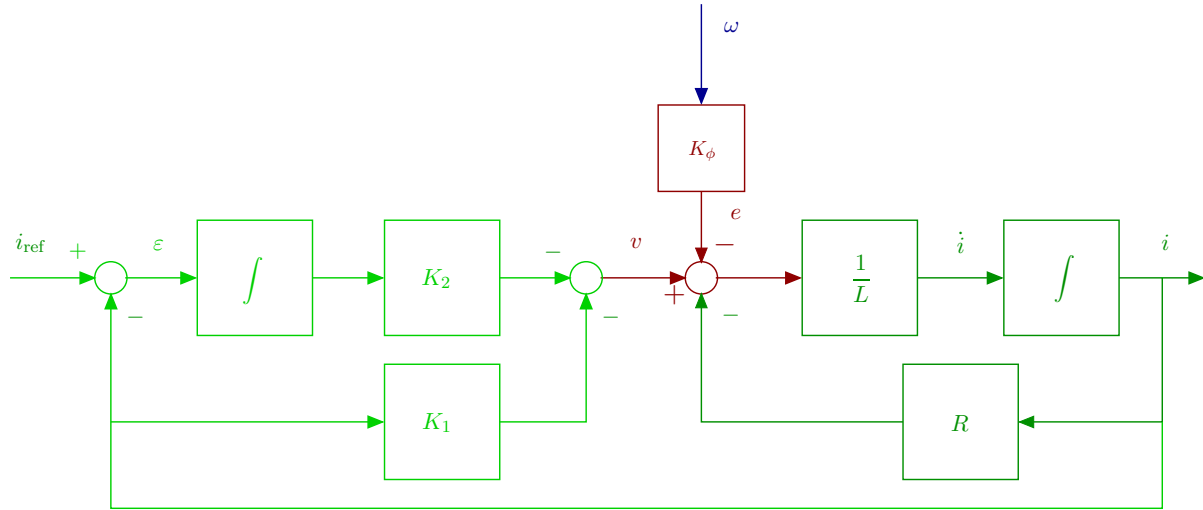


FIGURE 6 – Modèle électrique commandé par retour d'état

De telle sorte que le système en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_\phi}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i_{\text{ref}} \quad (16)$$

La dynamique du système dépend des valeurs propres de la matrice

$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{R+K_1}{L} & \frac{K_2}{L} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a :

$$\text{eig} \left(\begin{bmatrix} -\frac{R+K_1}{L} & -\frac{K_2}{L} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left(pI - \begin{bmatrix} -\frac{R+K_1}{L} & -\frac{K_2}{L} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (17)$$

Remarque 1 (Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert). Soit la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (18)$$

L'application de la transformée de Laplace à la représentation (28) pour des conditions initiales nulles est

$$\begin{aligned} pX(p) &= AX(p) + B_u U(p) \\ Y(p) &= CX(p) \end{aligned} \quad (19)$$

Soit

$$X(p) = (pI - A)^{-1} B_u U(p) \quad (20)$$

Dans la relation entre la sortie $Y(p)$ et $U(p)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(p) &= CX(p) \\ &= C(pI - A)^{-1} B_u U(p) \end{aligned} \quad (21)$$

La fonction de transfert du système en est donnée par =

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1} B_u U(p) \quad (22)$$

L'objectif est de montrer l'équivalence entre les relations (16) et (11). On cherche donc la relation entre l'entre i_{ref} et la sortie i

$$F(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(pI - \begin{bmatrix} -\frac{R+K_1}{L} & -\frac{K_2}{L} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-\frac{K_2}{L}}{p^2 + \frac{R+K_1}{L}p - \frac{K_2}{L}} \quad (23)$$

$$= \frac{1}{-\frac{L}{K_2}p^2 - \frac{R+K_1}{K_2}p + 1}$$

En posant

$$\begin{aligned} K_1 &= K_{P,i} \\ K_2 &= -\frac{K_{P,i}}{T_{I,i}} \end{aligned} \quad (24)$$

Et en rappelant que

$$\begin{aligned} \tau_e &= \frac{L}{R} \\ K_e &= \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (25)$$

L'équation (23) est équivalente à l'équation (11). Les schémas de commande représentés Figure 5 et 6 sont donc exactement équivalents.

2.2 Asservissement de vitesse

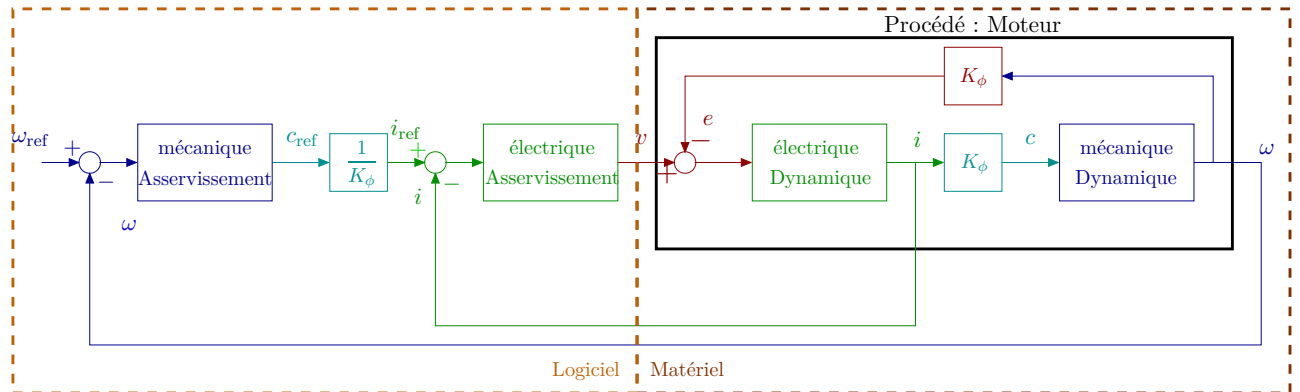


FIGURE 7 – Modèle avec commande en cascade

En supposant que l'asservissement de courant est réalisé correctement et que la séparation fréquentielle est respectée, c'est à dire que la dynamique électrique en boucle fermée est plus rapide que la dynamique mécanique désirée en boucle fermée, alors la synthèse de l'asservissement de vitesse peut être réalisée sans prendre en compte le système électrique en boucle fermée. Le schéma Figure 7 peut-être simplifié par le schéma Figure 8 :

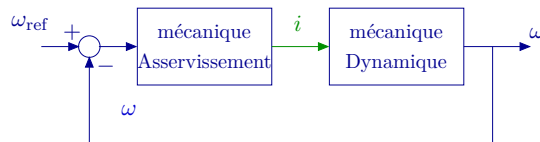


FIGURE 8 – Modèle mécanique commandé

Considérant ceci, le problème de l'asservissement de la vitesse du moteur se ramène à la synthèse d'un correcteur pour un système du premier ordre :

$$F_m(p) \frac{K_m}{\tau_m p + 1} \quad (26)$$

Les trois synthèses de correcteur proposées pour la dynamique électrique s'appliquent directement.

3 Retour d'état global

Ici les différentes hypothèses faites sur la séparation fréquentielle de la section ?? ne sont plus nécessaire. Le modèle complet du moteur à courant continu s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{i} &= -\frac{R}{L}i - \frac{K_\phi}{L}\omega + \frac{1}{L}v \\ \dot{\omega} &= \frac{K_\phi}{J}i - \frac{f}{J}\omega \end{aligned} \quad (27)$$

qui peut être réécrit sous la forme matricielle

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (28)$$

avec $x = \begin{bmatrix} i & \omega \end{bmatrix}^T$, $u = v$ et

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_\phi}{L} \\ \frac{K_\phi}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'objectif de cette loi de commande est de modifier la dynamique du système à l'aide de la commande par retour d'état (rouge sur la figure) et d'assurer une erreur statique nulle à l'aide de l'action intégrale (vert sur la figure)

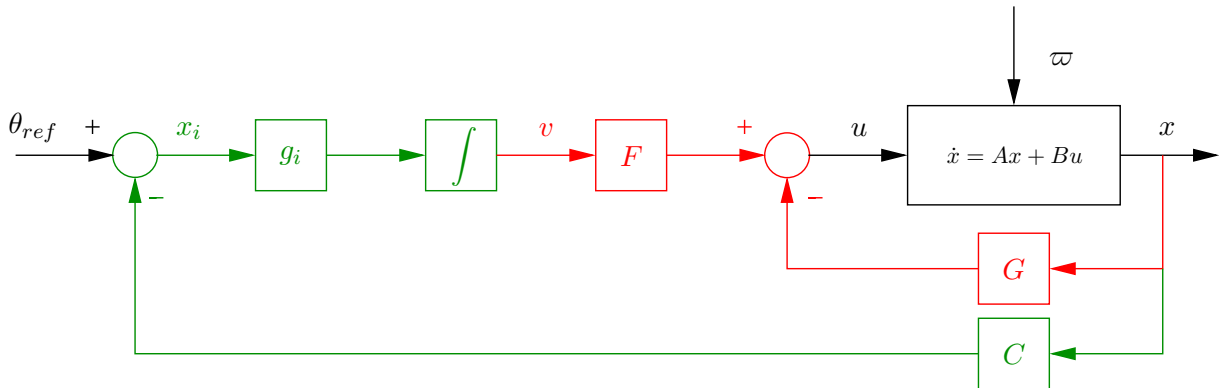


FIGURE 9 – Moteur

3.1 Commande par retour d'état sans perturbation

La commande par retour d'état est donnée par l'équation :

$$u = -Gx + Fv, G \in \mathbb{R}^2, F \in \mathbb{R} \quad (29)$$

La commande en boucle fermée est donnée par

$$\dot{x} = (A - BG)x + BFv \quad (30)$$

La synthèse de commande se ramène au choix du gain K de façon imposer la dynamique des pôles. On désire une dynamique du seconde ordre ayant pour équation caractéristique

$$p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2$$

soit deux pôles,

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \zeta > 1$$

ou ω_n est la pulsation naturelle désirée du système en boucle fermée et ζ le coefficient d'amortissement. On déduit :

$$G = \left[\frac{2J\zeta\omega_n - f}{K} \quad \frac{J\omega_n^2}{K} \right] \quad (31)$$

Afin d'assurer un asservissement sans dépassement, on fixe le coefficient d'amortissement $\zeta = 1.2$. Ceci permet de lier la pulsation naturelle au temps de réponse² T_r du système en boucle fermée. Soit :

$$\omega_n = \frac{6}{T_r}$$

La matrice de gain (31) s'exprime alors en fonction des paramètres du moteur et du temps de réponse désiré sous la forme

$$G = \left[\frac{14.4J - fT_r}{KT_r} \quad \frac{36J}{KT_r^2} \right]. \quad (32)$$

Le gain F sert à assurer un gain statique nul sans perturbation :

$$F = -(C(A - BG)^{-1}B)^{-1}$$

3.2 Action intégrale (en présence de perturbations)

Afin d'assurer le rejet de perturbations (externe et erreurs de modélisation) on ajoute une action intégrale. Ce correcteur s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} v &= x_i \\ \dot{x}_i &= g_i (\theta_{\text{ref}} - \theta) \end{aligned} \quad (33)$$

Le retour d'état en boucle fermée (30) avec l'action intégrale (33) donne :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BG & BF \\ Cg_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_i \end{bmatrix} \theta_{\text{ref}} \quad (34)$$

A Annexes

A.1 Mesure de courants

On souhaite que la mesure de courants soit déclenché en fonction de la PWM. L'objectif est de ne pas avoir une mesure de courant lors d'un changement de front de la PWM. La PWM étant choisie centrée, on peut fixer l'instant de mesure par défaut au début du comptage de la PWM (voir Figure 10). On peut ajouter en option une variable permettant de faire varier l'instant de mesure, cette variable prendra des valeurs entre 0 et T_{PWM} .

Sur la carte MCLV2 [3], la mesure de courants est réalisée comme représenté sur la Figure 11.

Pour ce schéma, on a donc :

$$v_{\text{amplified}} = \frac{R20}{R22 + R23} v_{\text{shunt}} - v_{\text{ref}}$$

2. Le temps de réponse d'un système est le temps mis par la sortie du système pour entrer dans la bande entre $\pm 5\%$ de sa valeur finale.

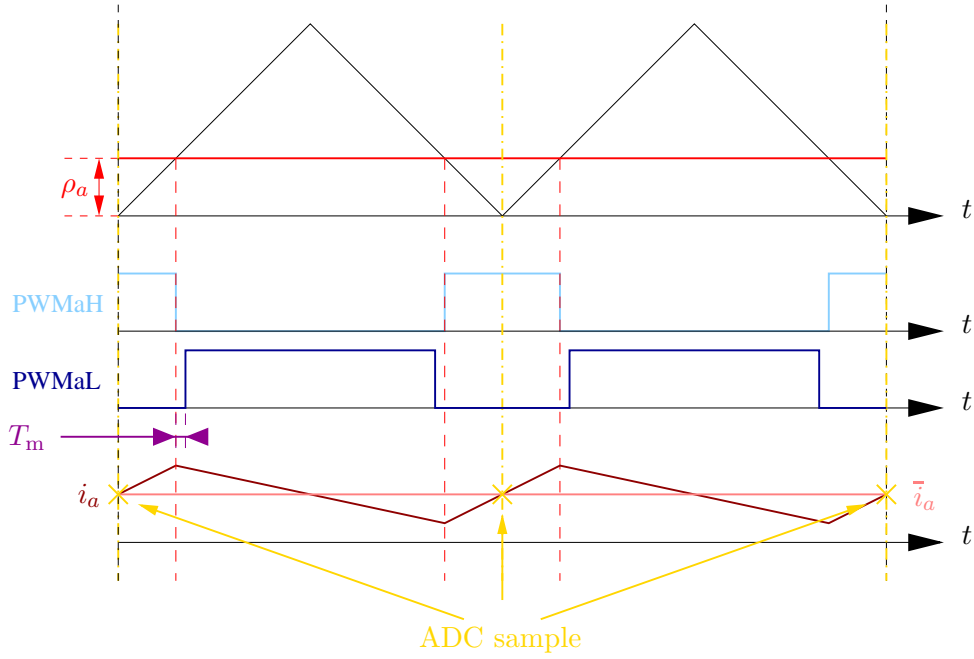


FIGURE 10 – Synchronisation de la mesure de courant sur la PWM

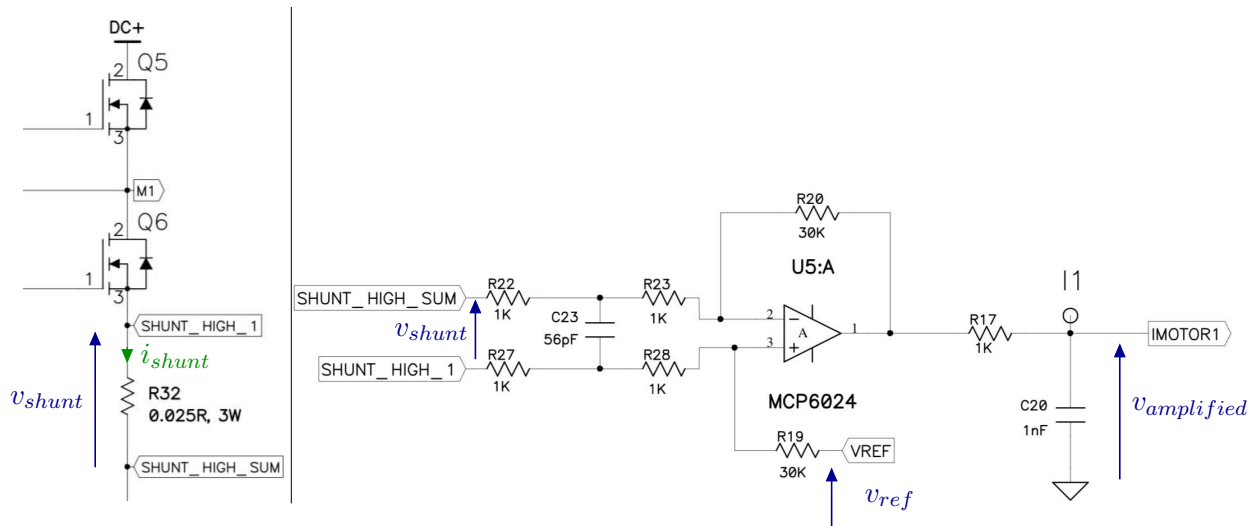


FIGURE 11 – Schéma électrique de mesure de courant, Bras A de l'onduleur (gauche), Amplificateur différentiel (droite)

De plus on a

$$i_{shunt} = \frac{v_{shunt}}{R32}$$

soit

$$v_{amplified} = \frac{R20R32}{R22 + R23} i_{shunt} + v_{ref}$$

Le gain de l'AOP : $\frac{R20}{R22 + R23} = 15V$

Soit un gain en courant : $\frac{R20R32}{R22 + R23} = 0.375V/A$

Le micro-contrôleur dsPIC33EP256MC506 utilise des ADC 10bits. C'est à dire que la tension sur une plage de 0 à 3.3V est lue sur le micro-contrôleur sur une plage entre 0 et 1024.

Calcul du courant max :

$$i_{shunt,max} = \frac{R_{22} + R_{23}}{R_{20}R_{32}}(v_{CC} - v_{ref})$$

Pour $v_{CC} = 3.3V$ et $v_{ref} = v_{CC}/2$, on a

$$i_{shunt,max} = 4.4A$$

De la même façon on a

$$i_{shunt,min} = -4.4A$$

Le courant mesuré i_m dans une plage de $[-4.4, 4.4](A)$ serait donné par le micro-contrôleur (i_{ADC}) sur une plage de $[0, 1024]$ soit

$$i_m = \frac{8.8}{1024}i_{ADC} - 4.4$$

Références

- [1] J.-N. Chiasson. *Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*. Ieee press edition, 2005.
- [2] P. de Larminat and Y. Thomas. *Automatique des systèmes linéaires*. Number vol.~3 in Automatique des systèmes linéaires. Flammarion, 1975.
- [3] Microchip Technology Inc. dsPICDEM MCLV-2 Development Board User's Guide, <http://ww1.microchip.com/downloads/en/DeviceDoc/DS-52080a.pdf>.
- [4] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Instrumentation and controls series. Prentice Hall, 2010.