

Traitements des Signaux Aléatoires

Chapitre 3

ESTIMATION des moments d'un signal aléatoire

Nicole Gache
Septembre 2016

Table des matières

1	Introduction.....	3
1.1	Objectifs et définitions.....	3
1.2	Performance des estimateurs.....	4
1.2.1	Biais	5
1.2.2	Variance d'estimation.....	5
2	Estimation de la valeur moyenne d'un signal aléatoire stationnaire.....	6
2.1	Exemple d'estimateur de la valeur moyenne d'un signal à temps continu.....	6
2.1.1	Biais de \hat{m}_X	6
2.1.2	Variance de \hat{m}_X	7
2.1.3	Application	8
2.2	Estimateur de la moyenne pour les signaux à temps discret stationnaires.....	9
2.2.1	Biais de \hat{m}_X	9
2.2.2	Variance de \hat{m}_X	9
2.2.3	Illustrations.....	11
3	Estimation de la fonction d'autocorrélation d'un signal stationnaire	14
3.1	Exemple d'estimateur de la fonction d'autocorrélation d'un signal à temps continu.....	15
3.1.1	Biais de $\hat{\gamma}_X(\tau_0)$	15
3.1.2	Variance de $\hat{\gamma}_X(\tau_0)$	15
3.1.3	Application à la détection d'un signal aléatoire dans un bruit.....	18
3.2	Estimateurs de la fonction d'autocorrélation des signaux à temps discret	22
3.2.1	Valeur moyenne des estimateurs de corrélation.....	23
3.2.2	Variance des estimateurs de corrélation	23
3.2.3	Comparaison des estimateurs de corrélation et choix	24
4	Estimation de la densité spectrale de puissance moyenne	26
4.1	Familles d'estimateurs spectraux.....	27
4.2	Estimateur spectral simple	28
4.2.1	Biais de l'estimateur simple	29
4.2.2	Variance de l'estimateur simple	29
4.2.3	Précision d'estimation.....	29
4.2.4	Résolution fréquentielle.....	30
4.3	Estimateur spectral moyenne	30
4.3.1	Biais de $\hat{\Gamma}_2(f)$	31
4.3.2	Variance	31
4.3.3	Précision d'estimation.....	31
4.3.4	Résolution fréquentielle	31
4.4	Estimateur spectral de Welch.....	31
4.4.1	Biais	32
4.4.2	Variance	33
4.4.3	Précision d'estimation.....	33
4.4.4	Résolution fréquentielle	33
4.5	Estimateur Lissé (Adouci) (Blackman-Tukey)	33
4.5.1	Valeur moyenne.....	34
4.5.2	Variance	34
4.5.3	Précision et résolution	34

1 Introduction

1.1 Objectifs et définitions

Pour élaborer les traitements optimaux adaptés à toutes les réalisations possibles $x_k(t)$ d'un signal aléatoire stationnaire $X(t)$, il faut disposer des grandeurs caractéristiques de $X(t)$:

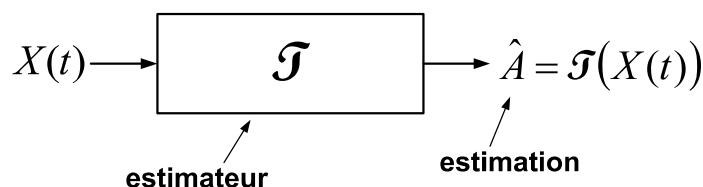
- sa valeur moyenne statistique $E\{X(t)\}$ notée parfois m_X lorsque est $X(t)$ stationnaire,
- sa puissance moyenne $\bar{P}_X = E\{|X(t)|^2\}$,
- sa fonction d'autocorrélation $\gamma_X(\tau) = E\{X(t)X^*(t-\tau)\}$,
- sa densité spectrale $\Gamma_X(v)$, transformée de Fourier de $\gamma_X(\tau)$.

Ces grandeurs font référence aux moments de premier et de second ordre de $X(t)$.

Si ces grandeurs ne sont pas connues, il faut en faire la mesure. On parle alors d'**estimation**.

Soit A la grandeur à estimer à partir de $X(t)$.

Un estimateur de A est une transformation \mathcal{T} portant sur les observations disponibles de $X(t)$ et fournissant une estimation de A que l'on notera \hat{A} .



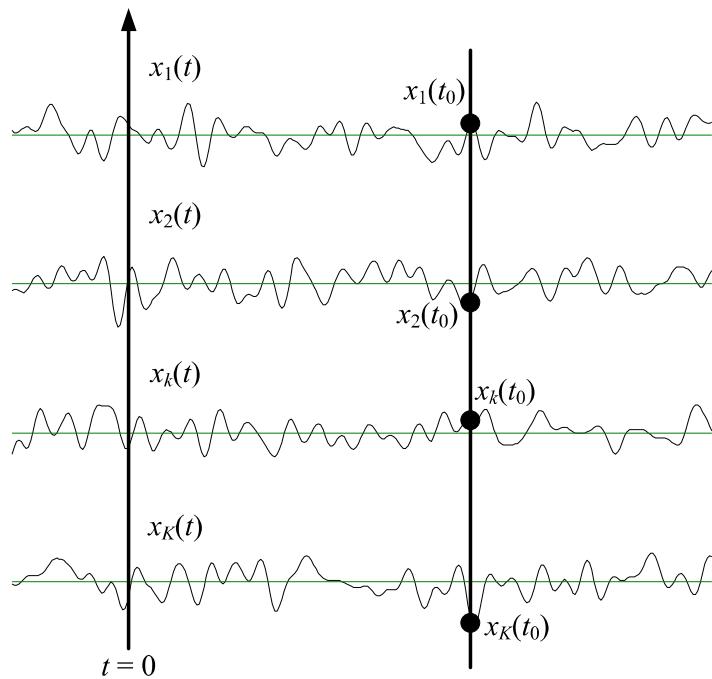
- S'il est possible de disposer de K réalisations d'un signal aléatoire, on pourra effectuer la mesure en utilisant une moyenne des mesures réalisées sur chaque réalisation.

Exemple : estimation de $E\{X(t_0)\}$

Si on observe $x_k(t_0)$ pour K réalisations de $X(t_0)$, on pourra approcher $A = E\{X(t_0)\}$ par

$$\hat{A} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(t_0),$$

ce qui est une moyenne des valeurs relevées sur les K réalisations à la date t_0 .



- En pratique, dans les problématiques concrètes de Traitement du Signal, on ne dispose souvent que d'une seule réalisation $x_i(t)$ de $X(t)$.

On suppose alors que la réalisation disponible $x_i(t)$ est de **durée T suffisamment longue** pour que l'on puisse faire l'hypothèse que cette réalisation est représentative d'un très grand nombre de réalisations $x_k(t)$ de $X(t)$ sur la durée T . Cela signifie que l'on suppose que $x_i(t)$ passe par toutes les valeurs possibles des réalisations $x_k(t)$. C'est l'hypothèse d'**ergodisme**. On suppose donc que $X(t)$ est stationnaire.

Exemple : estimation de $m_X = \text{E}\{X(t)\}$

Si on observe $x_i(t)$ unique réalisation disponible de $X(t)$, on pourra approcher $A = m_X$ par

$$\hat{A} = \hat{m}_X = \frac{1}{T} \int_{(T)} x_i(t) dt .$$

Suivant la réalisation prise en compte, on obtiendra des estimations (mesures) différentes. \hat{A} sera donc une variable aléatoire.

1.2 Performance des estimateurs

Quand on parle d'estimation, cela signifie que l'on va élaborer un dispositif de mesure appelé estimateur en sortie duquel on espère obtenir une grandeur \hat{A} aussi proche que possible de celle que l'on vise à atteindre, A .

On définit ici quelques propriétés que l'on est en droit d'attendre d'un estimateur.

Intuitivement, une estimation \hat{A} de A sera d'autant meilleure qu'elle sera proche de A . Mais $X(t)$ est aléatoire et \hat{A} l'est aussi. Les critères permettant de chiffrer la "qualité" de \hat{A} seront donc de nature statistique. Les deux grandeurs essentielles sont le biais et la variance.

1.2.1 Biais

C'est un critère de premier ordre. Il chiffre l'écart moyen entre la valeur moyenne statistique des valeurs fournies par l'estimateur et la valeur recherchée. On appelle **biais** la quantité :

$$b_{\hat{A}} = E\{\hat{A} - A\}$$

Si le biais est nul, l'estimateur est dit **non-biaisé**.

Pour un paramètre modélisé comme certain, le biais devient : $b_{\hat{A}} = E\{\hat{A}\} - A$.

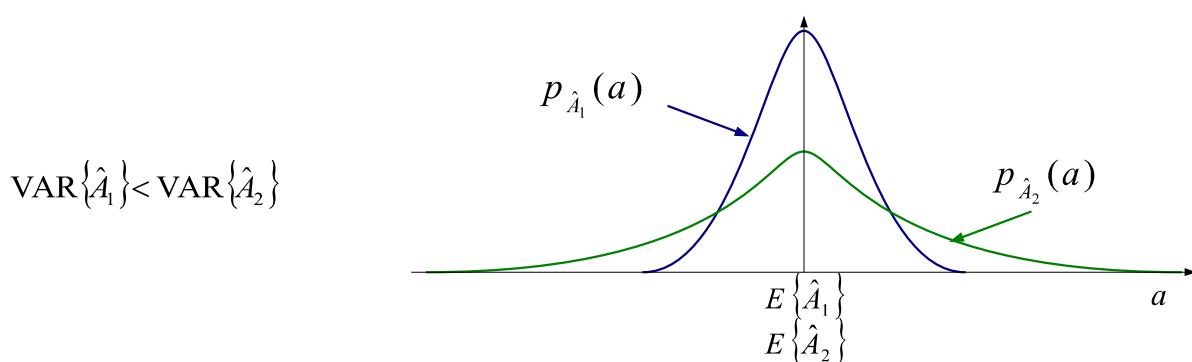
1.2.2 Variance d'estimation

C'est un critère de deuxième ordre. Cette **variance d'estimation** est la puissance moyenne de l'écart entre valeurs fournies par l'estimateur et valeur attendue. Elle est chiffrée par :

$$E\left\{\left|\hat{A} - A\right|^2\right\}.$$

La **variance de l'estimateur** est définie par $E\left\{\left|\hat{A} - E\{\hat{A}\}\right|^2\right\}$. Elle coïncide avec la variance de l'estimateur dans le cas non-biaisé. Elle chiffre alors la dispersion des valeurs fournies par l'estimateur autour de la valeur désirée. Elle permet donc, essentiellement dans le cas d'estimateurs non-biaisés, de comparer des estimateurs entre eux.

Dans une classe d'estimateurs donnée, un estimateur de cette classe est dit « à variance minimale » si la variance de l'erreur est au plus égale à celle de tout autre estimateur de la classe.



$$\text{On utilise aussi la précision d'estimation } \varepsilon = \frac{\sigma_{\text{estimation}}}{E\{\text{estimation}\}} = \frac{\sigma_{\hat{A}}}{E\{\hat{A}\}}$$

Attention : Plus ε est petit, plus la précision est grande.

2 Estimation de la valeur moyenne d'un signal aléatoire stationnaire

$E\{X(t)\}$ est la valeur moyenne statistique d'un signal aléatoire $X(t)$ à la date t . Elle est par définition la moyenne de toutes les réalisations possibles $x_k(t)$ à la date t .

2.1 Exemple d'estimateur de la valeur moyenne d'un signal à temps continu

On suppose $X(t)$ à valeurs réelles, et stationnaire. On s'appuie sur l'hypothèse d'ergodisme.

On peut calculer une valeur estimée \hat{m}_X de $m_X = E\{X(t)\}$ à partir d'une réalisation $x_i(t)$ de $X(t)$ comme suit :

$$\hat{m}_X = \frac{1}{T} \int_{(T)} x_i(t) dt$$

Il y a une infinité de réalisations possibles $x_k(t)$ de $X(t)$ et la durée T d'intégration est finie.

Pour chaque réalisation, on obtiendra alors une valeur de \hat{m}_X différente :

réalisation $x_1(t) \rightarrow \hat{m}_X = m_1$

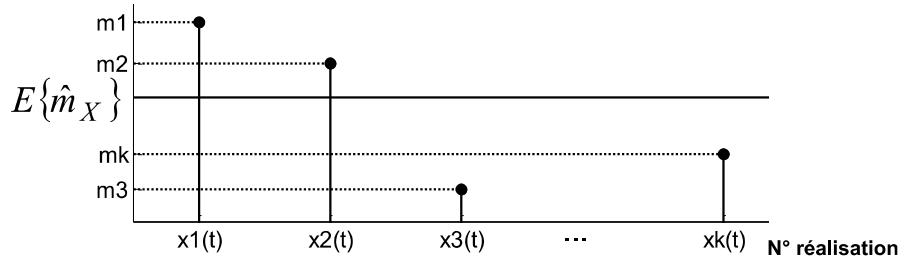
réalisation

$x_2(t) \rightarrow \hat{m}_X = m_2$

.....

réalisation

$x_k(t) \rightarrow \hat{m}_X = m_k$



Donc \hat{m}_X doit être considéré comme une variable aléatoire.

C'est pourquoi on l'écrira plus généralement $\hat{m}_X = \frac{1}{T} \int_{(T)} X(t) dt$

2.1.1 Biais de \hat{m}_X

On s'intéresse à l'espérance de la valeur mesurée et on s'interroge sur le fait qu'elle correspond à la valeur à estimer.

$$\mathbb{E}\{\hat{m}_X\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{T} \int_{(T)} X(t) dt\right\} = \frac{1}{T} \int_{(T)} \mathbb{E}\{X(t)\} dt$$

Or $X(t)$ étant stationnaire, $\mathbb{E}\{X(t)\} = m_X$.

Il vient donc : $\mathbb{E}\{\hat{m}_X\} = m_X$.

La valeur moyenne de \hat{m}_X est bien égale à la valeur recherchée m_X

$\hat{m}_X = \frac{1}{T} \int_{(T)} X(t) dt$ est un **estimateur non-biaisé** de m_X .

2.1.2 Variance de \hat{m}_X

La dispersion moyenne des valeurs de \hat{m}_X autour de sa valeur moyenne m_X est chiffrée par l'écart-type $\sigma_{\hat{m}_X}$.

La variance, carré de l'écart-type, pour un signal à valeurs réelles, s'exprime à l'aide de $\sigma_{\hat{m}_X}^2 = E\{\hat{m}_X - E\{\hat{m}_X\}\}^2$ qui peut aussi s'écrire : $\sigma_{\hat{m}_X}^2 = E\{\hat{m}_X^2\} - m_X^2$ puisque \hat{m}_X est un estimateur non-biaisé de m_X .

$$E\{\hat{m}_X^2\} = \frac{1}{T^2} \mathbb{E}\left\{\int_T X(t) dt \int_T X(u) du\right\} = \frac{1}{T^2} \mathbb{E}\left\{\int_T \int_T X(t) X(u) dt du\right\}$$

La limitation en durée de l'observation peut se matérialiser par $\int_T X(t) dt = \int_R \Pi_T(t) X(t) dt$.

$$\begin{aligned} E\{\hat{m}_X^2\} &= \frac{1}{T^2} \mathbb{E}\left\{\int_R \Pi_T(u) X(u) du \int_R \Pi_T(t) X(t) dt\right\} \\ &= \frac{1}{T^2} \mathbb{E}\left\{\int_R \int_R \Pi_T(u) X(u) \Pi_T(t) X(t) du dt\right\} \\ &= \frac{1}{T^2} \int_R \int_R \Pi_T(u) \Pi_T(t) \mathbb{E}\{X(u) X(t)\} du dt \end{aligned}$$

Or $X(t)$ est stationnaire. $\mathbb{E}\{X(u) X(t)\}$ peut s'interpréter comme l'autocorrélation de X au retard $t-u$, soit $\gamma_X(t-u)$.

$$E\{\hat{m}_X^2\} = \frac{1}{T^2} \int_R \int_R \Pi_T(u) \Pi_T(t) \gamma_X(t-u) du dt$$

γ_X est une fonction paire car X est à valeurs réelles, donc :

$$E\{\hat{m}_X^2\} = \frac{1}{T^2} \int_R \Pi_T(t) \int_R \Pi_T(u) \gamma_X(t-u) du dt = \frac{1}{T^2} \int_R \Pi_T(t) \left(\int_R \Pi_T(u) \gamma_X(u) du \right) dt.$$

En utilisant la relation entre temps et fréquence $\int_R f(t) g^*(t) dt = \int_R F(v) G^*(v) dv$, on peut écrire :

$$E\{\hat{m}_X^2\} = \frac{1}{T^2} \int_R \frac{\sin \pi v T}{\pi v} \left(\int_R \frac{\sin \pi v T}{\pi v} \cdot \Gamma_X(v) dv \right) dv$$

$$\text{Soit } E\{\hat{m}_X^2\} = \int_R \text{sinc}^2(\pi v T) \cdot \Gamma_X(v) dv$$

En posant $\tilde{X}(t) = X(t) - m_X$, c'est-à-dire en s'intéressant à la version centrée de X , notée $\tilde{X}(t)$, on peut montrer que $\gamma_X(\tau) = \gamma_{\tilde{X}}(\tau) + m_X^2$. Par conséquent, $\Gamma_X(v) = \Gamma_{\tilde{X}}(v) + m_X^2 \delta(v)$.

$$\text{D'où } E\{\hat{m}_X^2\} = \int_R \text{sinc}^2(\pi v T) \cdot \Gamma_{\tilde{X}}(v) dv + m_X^2$$

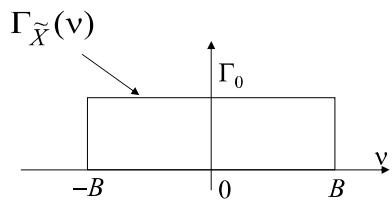
et

$$\sigma_{\hat{m}_X}^2 = \int_R \text{sinc}^2(\pi v T) \cdot \Gamma_{\tilde{X}}(v) dv$$

2.1.3 Application

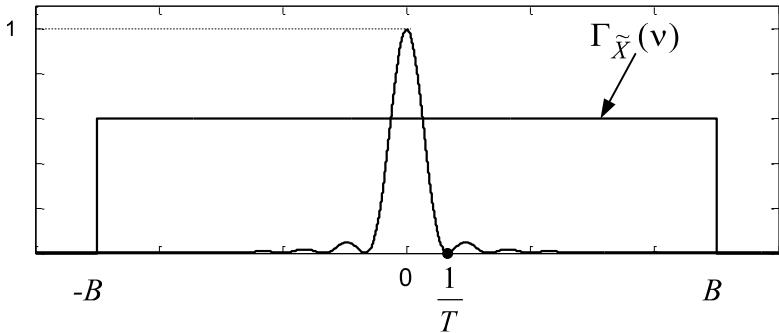
Soit un signal aléatoire X de moyenne m_X à mesurer.

On suppose que la densité spectrale de la version centrée de ce signal est constante de valeur Γ_0 sur une bande spectrale allant de $-B$ à B .



On peut disposer d'une réalisation de durée T de ce signal. Le problème consiste à choisir T pour que la précision de la mesure soit suffisante.

On supposera au moins que cette durée T est telle que $T > \frac{1}{B}$ ce qui est équivalent à $B > \frac{1}{T}$.



Fréquence en Hz

$$\begin{aligned}\bar{P}_{\tilde{X}} &= \int_R \Gamma_{\tilde{X}}(v) dv = \gamma_{\tilde{X}}(0) \\ &= E\{\tilde{X}^2(t)\} = \sigma_X^2 \\ &= 2B\Gamma_0\end{aligned}$$

$$\text{Il faut évaluer } \sigma_{\hat{m}_X}^2 = \int_R \text{sinc}^2(\pi v T) \cdot \Gamma_{\tilde{X}}(v) dv$$

Si $\frac{1}{T} \ll B$, $\text{sinc}^2(\pi v T) \cdot \Gamma_{\tilde{X}}(v) \approx \Gamma_0 \text{sinc}^2(\pi v T)$. Donc, $\sigma_{\hat{m}_X}^2 \approx \Gamma_0 \int_R \text{sinc}^2(\pi v T) dv$.

Comme $\int_R \text{sinc}^2(\pi v T) dv = \frac{1}{T^2} \int_R \Pi_T^2(t) dt$, il vient $\sigma_{\hat{m}_X}^2 \approx \frac{\Gamma_0}{T} = \frac{\bar{P}_{\tilde{X}}}{2BT} = \frac{\sigma_X^2}{2BT}$

L'écart-type de la mesure est donc de l'ordre de $\sigma_{\hat{m}_X} \approx \frac{\sigma_X}{\sqrt{2BT}}$

La précision d'estimation de la mesure est définie par $\varepsilon = \frac{\sigma_{\hat{m}_X}}{E\{\hat{m}_X\}}$. Comme l'estimateur est non biaisé, cette grandeur devient $\varepsilon \approx \frac{\sigma_X}{m_X \sqrt{2BT}}$.

Plus le produit durée observée × bande est important, plus la valeur de ε est faible, et meilleure sera l'estimation.

2.2 Estimateur de la moyenne pour les signaux à temps discret stationnaires

Un signal aléatoire à temps discret est représenté par la suite de ses échantillons :

$$\dots, X(0), X(1), X(2), X(3), \dots$$

Ils peuvent résulter de l'échantillonnage en temps $X(t)$ à la cadence $T_e = \frac{1}{v_e}$.

La fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire à temps discret stationnaire est définie par

$$\gamma_X(k) = E\{X(l) \cdot X^*(l-k)\} = E\{X^*(l) \cdot X(l+k)\}$$

Sa densité spectrale de puissance moyenne (DSPM) s'écrit comme la TFTD de l'autocorrélation :

$$\Gamma_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_X(k) e^{-2i\pi fk} \text{ avec } f = \frac{v}{v_e}.$$

Si on connaît N échantillons d'une réalisation du processus X de $X(0)$ à $X(N-1)$, on peut définir un estimateur de sa valeur moyenne :

$$\hat{m}_X = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

2.2.1 Biais de \hat{m}_X

$$E\{\hat{m}_X\} = E\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E\{X(k)\}$$

Or $X(t)$ étant stationnaire, $E\{X(k)\} = m_X$. Il vient donc : $E\{\hat{m}_X\} = m_X$.

La valeur moyenne de \hat{m}_X est égale à la valeur cherchée m_X

$$\hat{m}_X = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \text{ est un estimateur non-biaisé de } m_X.$$

2.2.2 Variance de \hat{m}_X

Comme à temps continu, on doit évaluer $\sigma_{\hat{m}_X}^2$. On commence donc par calculer $E\{\hat{m}_X^2\}$ auquel on retranchera m_X^2 .

$$\begin{aligned} E\{\hat{m}_X^2\} &= \frac{1}{N^2} E\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{N^2} E\left\{\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{l=0}^{N-1} X^*(l)\right\} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E\{X(k)X^*(l)\} \end{aligned}$$

Or $X(t)$ est stationnaire, $E\{X(k)X^*(l)\}$ représente $\gamma_X(k-l)$. D'où

$$E\{\hat{m}_X^2\} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \gamma_X(k-l)$$

$\gamma_X(k)$ peut s'exprimer en fonction de $\Gamma_X(f)$: $\gamma_X(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_X(f) e^{2i\pi f k} df$.

Il vient : $E\{\hat{m}_X^2\} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_X(f) e^{2i\pi f (k-l)} df$

soit en échangeant intégrale et sommes discrètes : $E\{\hat{m}_X^2\} = \frac{1}{N^2} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_X(f) \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{2i\pi f (k-l)} df$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi fk} = \begin{cases} N & f = 0 \\ \frac{1-e^{2i\pi fN}}{1-e^{2i\pi f}} & f \neq 0 \end{cases} \quad \text{et } \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{2i\pi f (k-l)} = \begin{cases} N^2 & f = 0 \\ \frac{1-e^{2i\pi fN}}{1-e^{2i\pi f}} \cdot \frac{1-e^{-2i\pi fN}}{1-e^{-2i\pi f}} & f \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1-e^{2i\pi fN}}{1-e^{2i\pi f}} \cdot \frac{1-e^{-2i\pi fN}}{1-e^{-2i\pi f}} = \frac{2-2\cos(2\pi fN)}{2-2\cos(2\pi f)} = \frac{\sin^2(\pi fN)}{\sin^2(\pi f)}.$$

$$\text{Si on pose } W(f) = \begin{cases} 1 & f = 0 \\ \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin \pi fN}{\sin \pi f} \right)^2 & f \neq 0 \end{cases} \quad \boxed{E\{\hat{m}_X^2\} = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_X(f) W(f) df}$$

On trouve une relation similaire à celle obtenue à temps continu $(E\{\hat{m}_X^2\} = \int_R \Gamma_X(v) \cdot \text{sinc}^2(\pi v T) dv)$.

En effet, la fonction $W(f)$ a une allure de sinus cardinal au carré et présente des zéros tous les

$\frac{1}{N}$ autour de la fréquence nulle.

En posant $\tilde{X}(k) = X(k) - m_X$, c'est-à-dire en s'intéressant à la version centrée de X , notée $\tilde{X}(k)$,

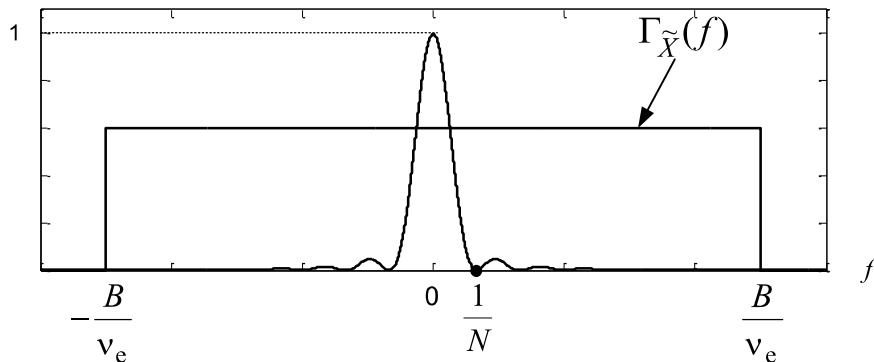
on peut montrer que $\gamma_X(k) = \gamma_{\tilde{X}}(k) + m_X^2$. Par conséquent, $\Gamma_X(f) = \Gamma_{\tilde{X}}(f) + m_X^2 \delta(f)$.

$$\text{D'où } E\{\hat{m}_X^2\} = \int_{-1/2}^{1/2} W(f) \cdot \Gamma_{\tilde{X}}(f) df + m_X^2$$

$$\text{et } \sigma_{\hat{m}_X}^2 = \int_{-1/2}^{1/2} W(f) \cdot \Gamma_{\tilde{X}}(f) df$$

$$\text{Il faut évaluer } \sigma_{\hat{m}_X}^2 = \int_R W(f) \cdot \Gamma_{\tilde{X}}(f) df$$

Si on reprend le même type d'exemple que celui proposé à temps continu, les deux grandeurs en jeu sont représentées ci-dessous :



Dans ce contexte à temps discret

$$\begin{aligned}\bar{P}_{\tilde{X}} &= \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{\tilde{X}}(f) df = \gamma_{\tilde{X}}(0) \\ &= E\{\tilde{X}^2(k)\} = \sigma_X^2 \\ &= \frac{2B\Gamma_0}{v_e}\end{aligned}$$

Si $\frac{1}{N} \ll \frac{B}{v_e}$, $W(f) \cdot \Gamma_{\tilde{X}}(v) \approx \Gamma_0 W(f)$. Donc, $\sigma_{\hat{m}_x}^2 \approx \Gamma_0 \int_{-1/2}^{1/2} W(f) df$.

Comme $\int_{-1/2}^{1/2} W(f) df = \frac{1}{N}$, il vient $\sigma_{\hat{m}_x}^2 \approx \frac{\Gamma_0}{N} = \frac{v_e \bar{P}_{\tilde{X}}}{2BN}$

Or les N échantillons représentent une durée $T = NT_e$

L'écart-type de la mesure est donc aussi de l'ordre de $\boxed{\sigma_{\hat{m}_x} \approx \frac{\sigma_X}{\sqrt{2BT}}}$

2.2.3 Illustrations

Pour un bruit gaussien, blanc dans la bande B , d'écart-type σ_X , on peut calculer la durée de la réalisation à utiliser pour obtenir une précision donnée sur la mesure de m_X . On peut remarquer que cette durée dépendra de la valeur à mesurer.

$$B = 400 \text{ Hz}, \sigma_X = 2 \text{ V}, m_X = 1 \text{ V}$$

Figure	ϵ désiré	$\sigma_{\hat{m}_x} = \epsilon \cdot m_X$	$\sqrt{2BT} \approx \frac{\sigma_X}{\sigma_{\hat{m}_x}}$	T nécessaire	Moyenne de \hat{m}_X sur 10 réalisations	Ecart-type de \hat{m}_X sur 10 réalisations
1	5 %	0,05 V	40	2 s	1,028 V	0,065 V
2	10 %	0,1 V	20	0,5 s	0,971 V	0,125 V
3	20 %	0,2 V	10	0,125 s	1,060 V	0,229 V

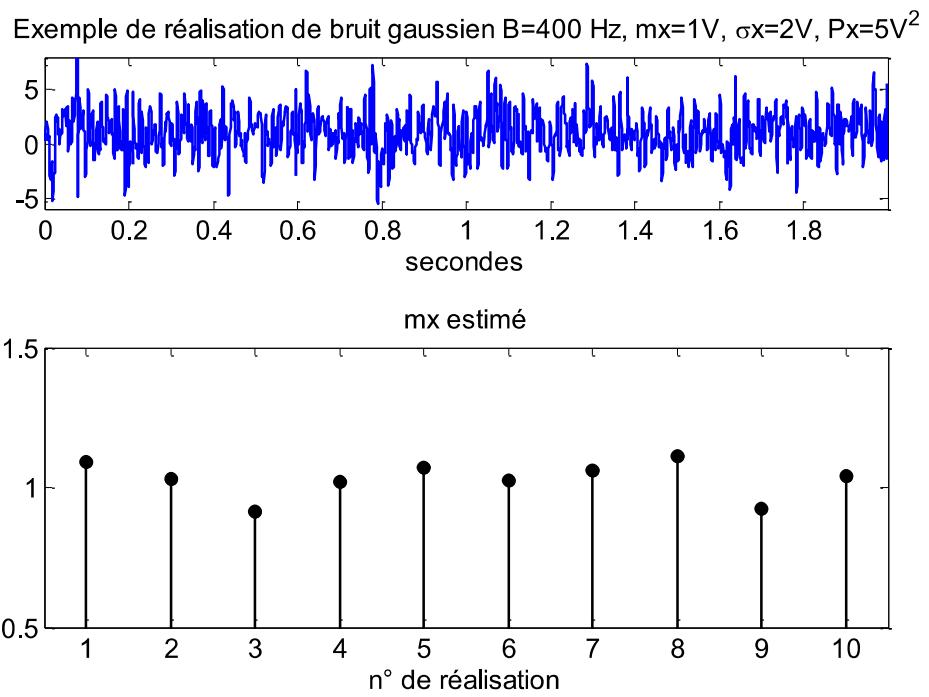


Figure 1

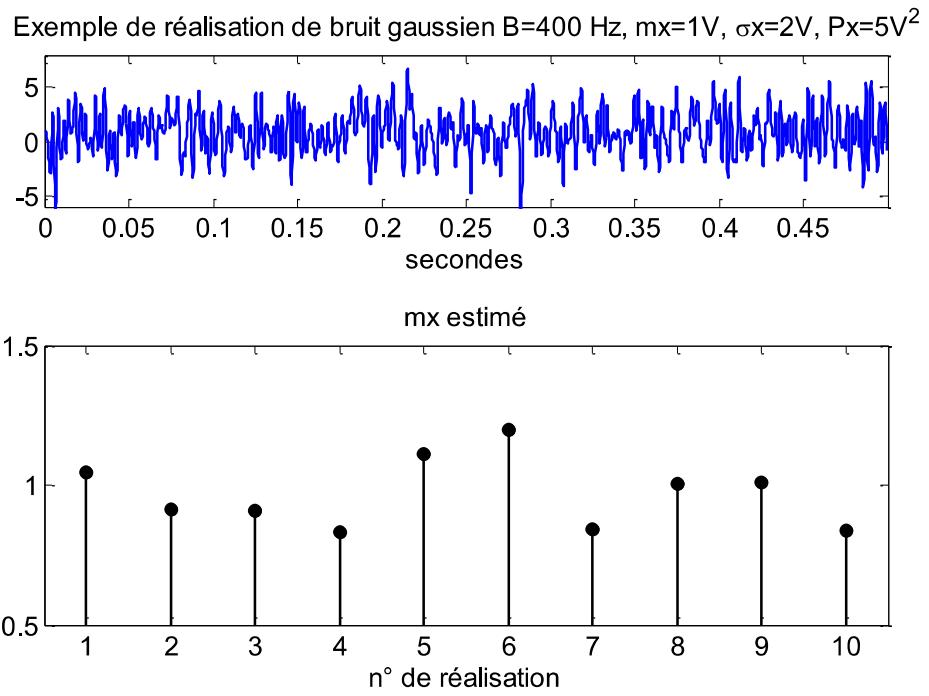


Figure 2

Exemple de réalisation de bruit gaussien $B=400$ Hz, $m_X=1$ V, $\sigma_X=2$ V, $P_X=5$ V 2

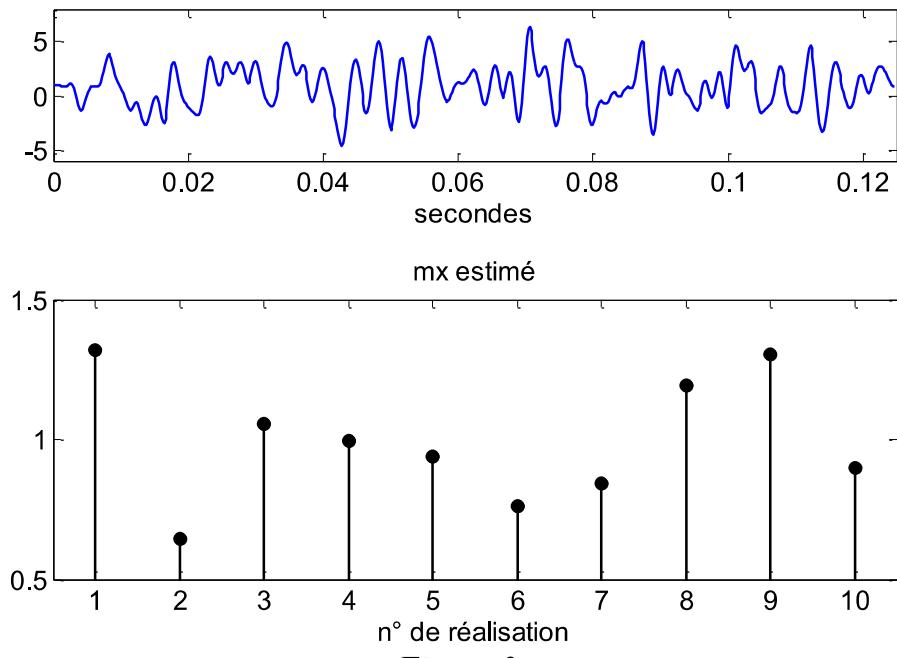


Figure 3

$$B = 400 \text{ Hz}, \sigma_X = 4 \text{ V}, m_X = 1 \text{ V}$$

Figure	ε désiré	$\sigma_{\hat{m}_X} = \varepsilon \cdot m_X$	$\sqrt{2BT} \approx \frac{\sigma_X}{\sigma_{\hat{m}_X}}$	T nécessaire	Moyenne de \hat{m}_X sur 10 réalisations	Ecart-type de \hat{m}_X sur 10 réalisations
4	5 %	0,05 V	80	8 s	1,001 V	0,044 V
5	10 %	0,1 V	40	2 s	0,959 V	0,117 V
6	20 %	0,2 V	20	0,5 s	1,121 V	0,184 V

Exemple de réalisation de bruit gaussien $B=400$ Hz, $m_X=1$ V, $\sigma_X=4$ V, $P_X=17$ V 2

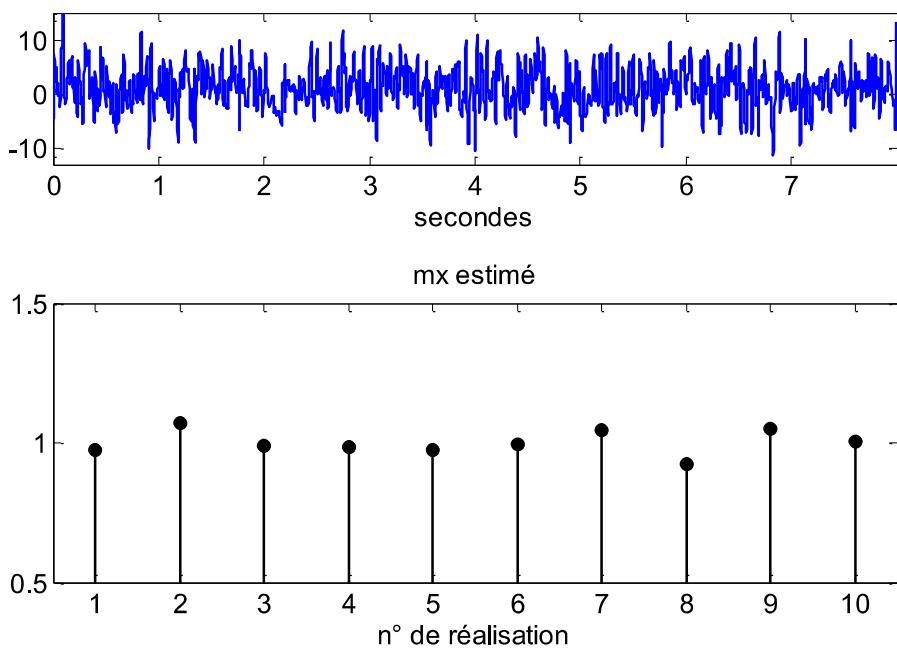


Figure 4

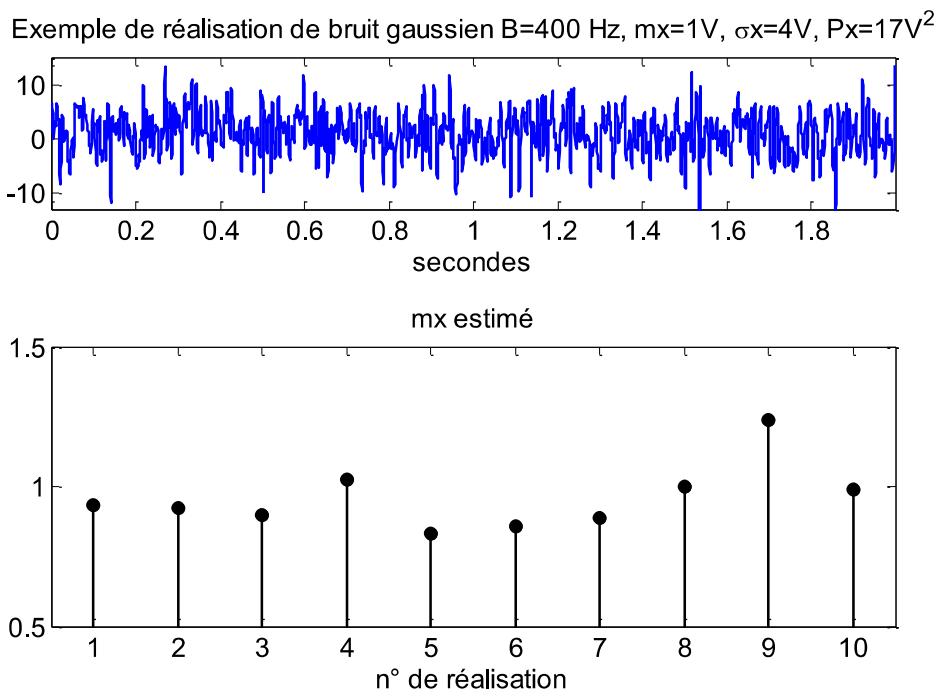


Figure 5

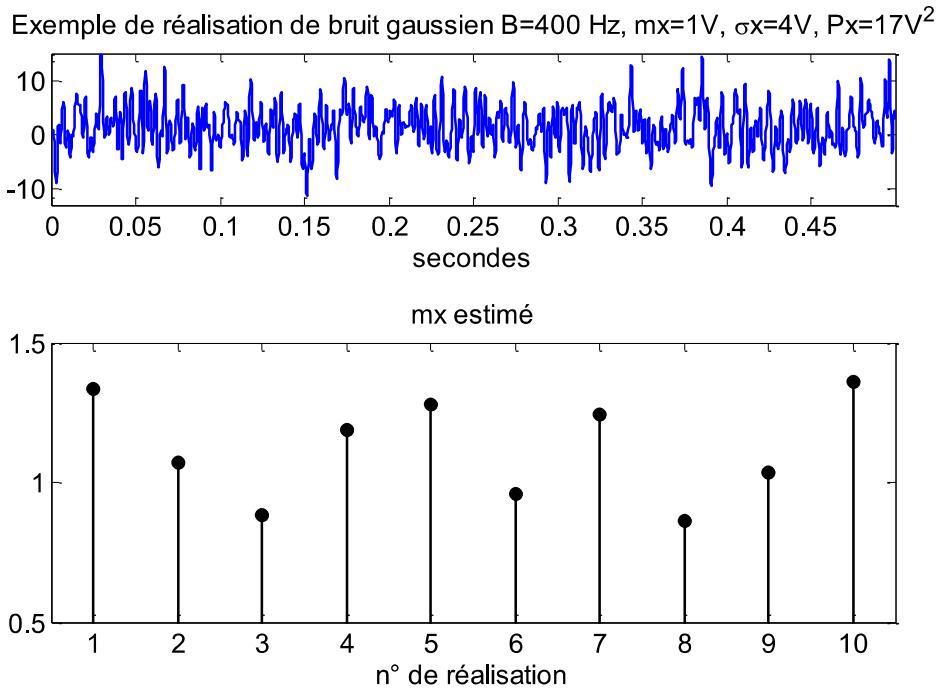


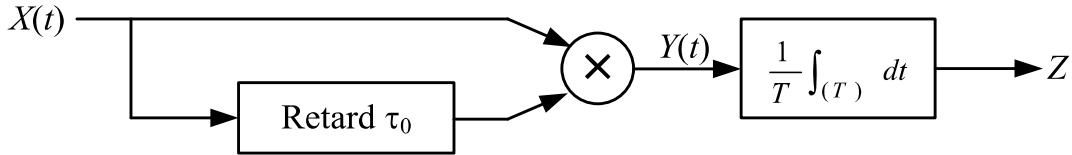
Figure 6

3 Estimation de la fonction d'autocorrélation d'un signal stationnaire

La fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire $X(t)$ est définie par : $\gamma_X(\tau) = E\{X(t)X^*(t-\tau)\}$

3.1 Exemple d'estimateur de la fonction d'autocorrélation d'un signal à temps continu

Pour mesurer la fonction d'autocorrélation γ_X , à un retard τ_0 fixé, pour un signal $X(t)$ à valeurs réelles, on peut envisager d'utiliser la chaîne de mesure suivante :



En effet, elle élabore le produit $X(t)X(t-\tau_0)$, puis réalise une intégration sur une durée T en s'appuyant sur l'hypothèse d'ergodisme.

Pour chaque réalisation de $X(t)$, cette chaîne de mesure fournira en sortie une valeur différente de la variable Z . On doit donc étudier les performances de cette chaîne de mesure pour mesurer $\gamma_X(\tau_0)$.

3.1.1 Biais de $\hat{\gamma}_X(\tau_0)$

$$Y(t) = X(t)X(t-\tau_0) \Rightarrow Z = \frac{1}{T} \int_{(T)} X(t)X(t-\tau_0)dt$$

$$\mathbb{E}\{Z\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{T} \int_{(T)} X(t)X(t-\tau_0)dt\right\} = \frac{1}{T} \int_{(T)} \mathbb{E}\{X(t)X(t-\tau_0)\}dt$$

$$\mathbb{E}\{Z\} = \frac{1}{T} \int_{(T)} \gamma_X(\tau_0)dt = \gamma_X(\tau_0)$$

$$\mathbb{E}\{Z\} = \gamma_X(\tau_0)$$

Cette chaîne de mesure fournit une valeur Z qui est une estimation **non biaisée** de la fonction d'autocorrélation γ_X au retard τ_0 .

En d'autres termes, la sortie de cette chaîne de traitement fournit une grandeur qui correspond bien, en moyenne statistique, à ce que l'on souhaitait mesurer.

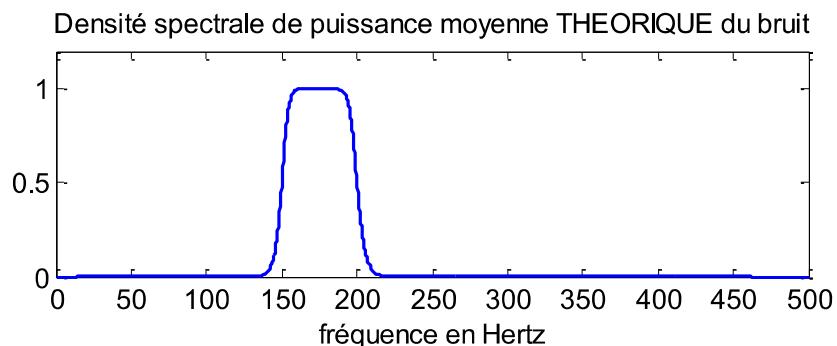
3.1.2 Variance de $\hat{\gamma}_X(\tau_0)$

Pour évaluer la dispersion possible des mesures autour de leur valeur moyenne, il faut chiffrer l'écart-type de Z . Plus généralement, on calculera sa valeur au carré c'est-à-dire sa variance.¹

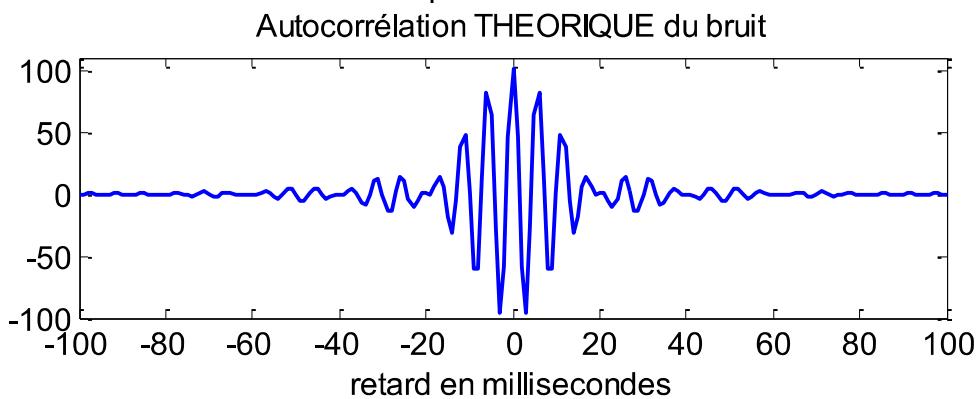
Ici, il faudrait donc chiffrer σ_Z^2 .

¹ Un calcul de ce type sera réalisé lors d'un travail tuteuré à rendre après le TD du cours.

On peut donner une illustration pour un bruit blanc dans une bande donnée dont la densité spectrale de puissance moyenne $\Gamma_X(v)$ théorique est donnée ci-dessous :

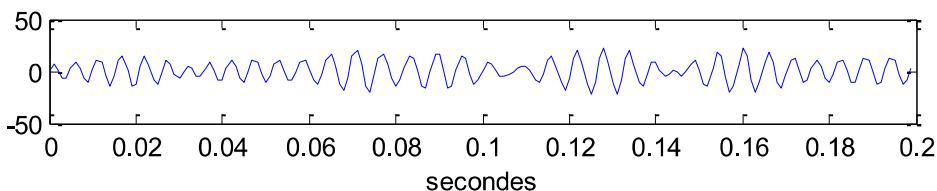


L'autocorrélation qui lui correspond est, théoriquement aussi, de la forme suivante :

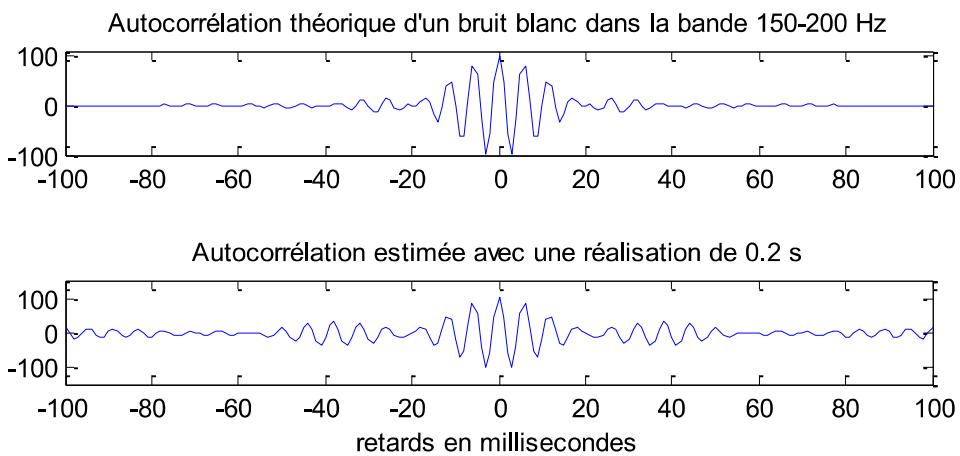


Si on dispose d'une réalisation d'un bruit de ce type, on peut, à partir de cette réalisation, estimer la fonction d'autocorrélation de ce bruit.

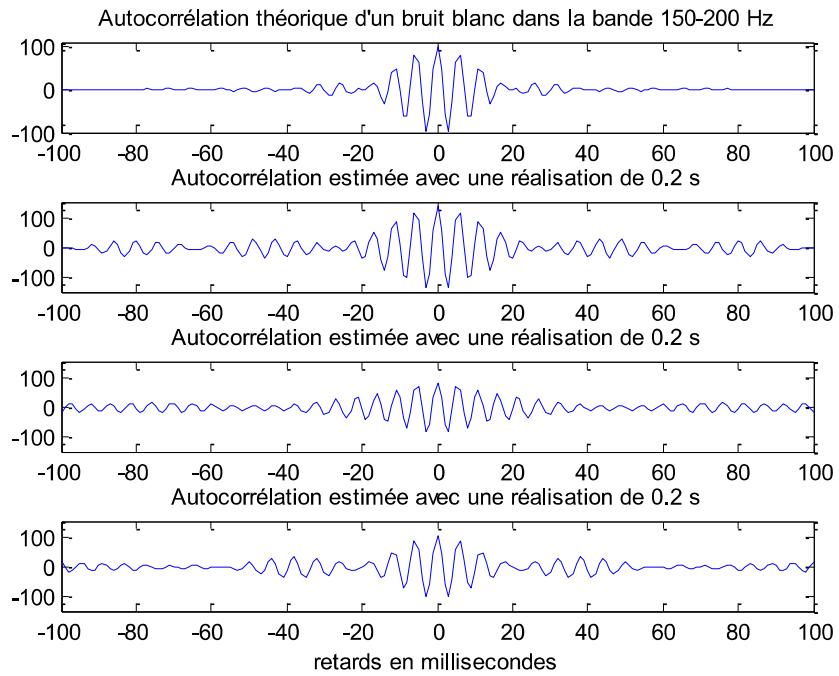
Pour une réalisation du bruit de durée 0,2 s présentée ci-dessous



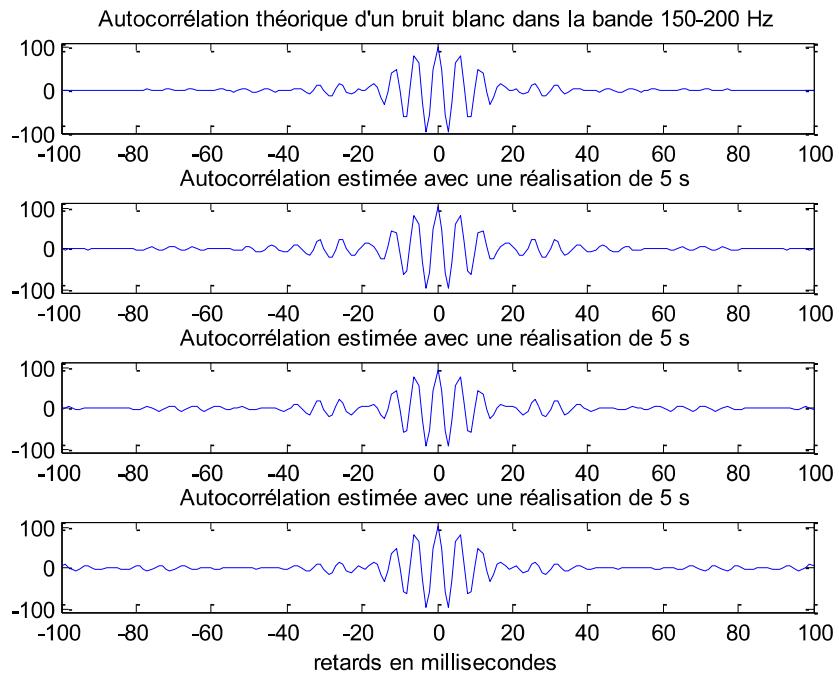
On peut mesurer la fonction d'autocorrélation de cette réalisation et la comparer à la théorique.



Si on dispose de plusieurs réalisations de 0,2 s, on constate sur la figure ci-dessous la disparité des résultats obtenus.



En revanche, si la durée de la réalisation disponible est plus importante (5 s par exemple), on peut obtenir le résultat ci-dessous pour 3 réalisations distinctes :



On constate une variabilité moins importante d'une réalisation à l'autre.

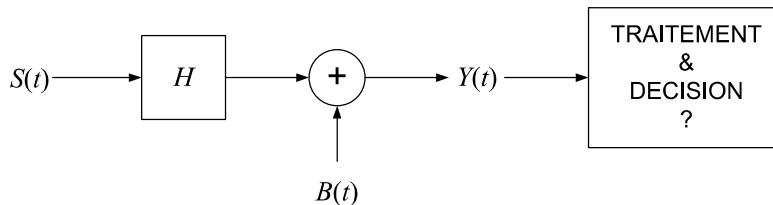
Un « bon » estimateur est un estimateur non biaisé dont la variance est faible.

Dans ce cas, la précision d'estimation, chiffrée par $\varepsilon = \frac{\sigma_Z}{E\{Z\}}$, est très faible devant 1 sous réserve que la durée d'intégration T soit très importante.

3.1.3 Application à la détection d'un signal aléatoire dans un bruit

En détection, on cherche à savoir si un signal est présent ou absent.

Un schéma simplifié du problème de la **détection** peut être le suivant :



où :

- $S(t)$ est le signal à détecter,
- $B(t)$ représente un bruit additif de nature aléatoire
- H représente les modifications qu'a pu subir $S(t)$: atténuation, retard, filtrage, effet Doppler, ...
- $Y(t)$ est le seul signal observable à partir duquel on doit prendre la décision.

On sait que l'on peut avoir deux situations : $Y(t) = S(t) + B(t)$ ou $Y(t) = B(t)$, avec $B(t)$ bruit additif. $S(t)$ et $B(t)$ sont stationnaires d'ordre 2, à valeurs réelles, centrés.

Le signal $S(t)$ que l'on veut détecter est un signal aléatoire de type sinusoïdal à phase aléatoire :

$$S(t) = A_0 \sin(2\pi\nu_0 t + \Phi) \text{ avec } \Phi \text{ phase aléatoire équitable entre } 0 \text{ et } 2\pi.$$

$$E\{S(t)\} = 0$$

Le signal $S(t)$ est « pseudo aléatoire » : pour une réalisation φ_i de Φ , la forme de $s_i(t)$ est parfaitement prévisible : $s_i(t) = \sin(2\pi\nu_0 t + \varphi_i)$

$B(t)$ et Φ sont indépendants $\Rightarrow B(t)$ et $S(t)$ sont indépendants.

On envisage ici deux procédés de détection de la présence du signal :

- par calcul de l'auto corrélation du signal observé $Y(t)$,
- par calcul de l'inter corrélation de $Y(t)$ avec un signal de référence $s_{\text{ref}}(t) = \sin(2\pi\nu_0 t)$, certain, de même fréquence que $S(t)$.

3.1.3.1 Auto corrélation de l'observation

a) Théoriquement : $\gamma_Y(\tau) = \gamma_S(\tau) + \gamma_B(\tau)$ car $S(t)$ et $B(t)$ sont indépendants et centrés
avec $\gamma_S(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cos(2\pi\nu_0\tau)$

b) En pratique :

On dispose d'une seule réalisation $y_i(t)$ de $Y(t)$, de durée T : $y_i(t) = s_i(t) + b_i(t)$

La fonction d'auto corrélation peut être estimée à partir de cette réalisation par :

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{y_i}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{(T)} y_i(t) y_i(t-\tau) dt \\ \hat{\gamma}_{y_i}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{(T)} s_i(t) s_i(t-\tau) dt + \frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t) s_i(t-\tau) dt + \frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t-\tau) s_i(t) dt + \dots \\ &\quad \dots \frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t) b_i(t-\tau) dt\end{aligned}$$

Considérons chacun des quatre termes de la somme constituant $\hat{\gamma}_{y_i}(\tau)$ en supposant que **T est suffisamment grand, et que l'hypothèse d'ergodisme est valide.**

- Premier terme : $\frac{1}{T} \int_{(T)} s_i(t) s_i(t-\tau) dt$

$$\frac{1}{T} \int_{(T)} s_i(t) s_i(t-\tau) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \gamma_S(\tau)$$

- Deuxième terme $\frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t) s_i(t-\tau) dt$

$$b_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k(t - kT_r) \quad \text{sur la durée } T = NT_r, \text{ avec } b_k(t) \text{ réalisations de } B(t).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t) s_i(t-\tau) dt = \frac{1}{NT_r} \int_{(T)} \sum_{k=0}^{N-1} b_k(t - kT_r) s_i(t-\tau) dt$$

Si le nombre N de réalisations est grand sur la durée T $\Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b_k(t - kT_r) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} m_B$ car $B(t)$ est stationnaire.

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t) s_i(t-\tau) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} m_B \frac{1}{T_r} \int_{(T)} s_i(t-\tau) dt \rightarrow 0 \text{ car } B(t) \text{ est centré.}$$

- Troisième terme : $\frac{1}{T} \int_{(T)} s_i(t) b_i(t-\tau) dt$

Pour les mêmes raisons que le terme croisé précédent,

$$\frac{1}{T} \int_{(T)} s_i(t) b_i(t-\tau) dt \rightarrow 0$$

- Quatrième terme : $\frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t) b_i(t-\tau) dt$

$$\frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t) b_i(t-\tau) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \gamma_B(\tau)$$

$\Rightarrow \hat{\gamma}_{y_i}(\tau) \longrightarrow \gamma_S(\tau) + \gamma_B(\tau)$ si T est suffisamment grand (grand nombre de réalisations non corrélées dans la durée T)

3.1.3.2 Inter corrélation entre l'observation et un signal de référence

$$s_{\text{ref}}(t) = \sin(2\pi\nu_0 t)$$

a) Théoriquement :

$$\begin{aligned} E\{Y(t)s_{\text{ref}}(t-\tau)\} &= E\{(S(t) + B(t))\sin(2\pi\nu_0(t-\tau))\} = E\{(S(t) + B(t))\}\sin(2\pi\nu_0(t-\tau)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $S(t)$ et $B(t)$ sont centrés

b) En pratique

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{y_i s_{\text{ref}}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{(T)} y_i(t) s_{\text{ref}}(t-\tau) dt = \frac{1}{T} \int_{(T)} (b_i(t) + s_i(t)) s_{\text{ref}}(t-\tau) dt \\ \hat{\gamma}_{y_i s_{\text{ref}}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t) s_{\text{ref}}(t-\tau) dt + \frac{1}{T} \int_{(T)} s_i(t) s_{\text{ref}}(t-\tau) dt \end{aligned}$$

Si T est suffisamment grand, et sous l'hypothèse d'ergodisme, on peut écrire :

- Premier terme :

$$\frac{1}{T} \int_{(T)} b_i(t) s_{\text{ref}}(t-\tau) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} m_B \frac{1}{T_r} \int_{(T)} s_{\text{ref}}(t-\tau) dt \rightarrow 0 \text{ car } B(t) \text{ est centré.}$$

- Deuxième terme :

$$s_i(t) = \sin(2\pi\nu_0 t + \phi_i)$$

$$\hat{\gamma}_{s_i s_{\text{ref}}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{(T)} s_i(t) s_{\text{ref}}(t-\tau) dt = \frac{A_0}{T} \int_{(T)} \sin(2\pi\nu_0 t + \phi_i) \sin(2\pi\nu_0(t-\tau)) dt$$

$$\hat{\gamma}_{s_i s_{\text{ref}}}(\tau) = \frac{A_0}{2T} \int_{(T)} [\cos(\phi_i + 2\pi\nu_0\tau) - \cos(2\pi\nu_0(2t-\tau) + \phi_i)] dt$$

$$\hat{\gamma}_{s_i s_{\text{ref}}}(\tau) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \frac{A_0}{2} \cos(\phi_i + 2\pi\nu_0\tau)$$

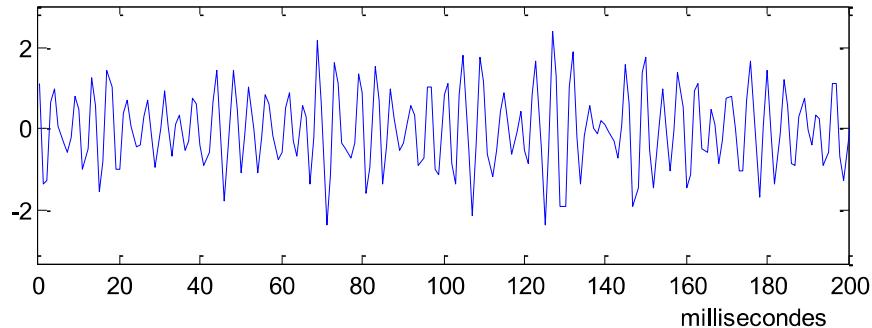
que l'on peut réécrire $\frac{A_0}{2} \cos(2\pi\nu_0(\tau - \tau_i))$ avec $-2\pi\nu_0\tau_i = \phi_i$

Comme $\gamma_S(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cos(2\pi\nu_0\tau)$, on pourra observer : $\hat{\gamma}_{y_i s_{\text{ref}}}(\tau) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{A_0} \gamma_s(\tau - \tau_i)$

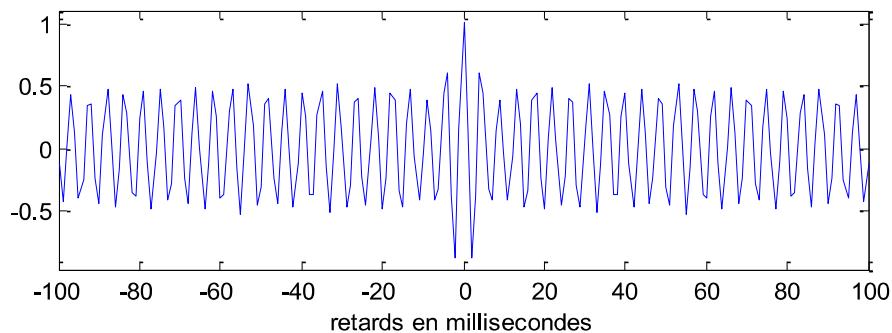
Les exemples qui suivent sont donnés pour :

$$A_0 = 1 \text{ V}, \quad v_0 = 227 \text{ Hz} \quad \bar{P}_S = \frac{A_0^2}{2} \quad \bar{P}_B = \sigma_B^2 \quad \text{Bruit centré filtré entre } 150 \text{ Hz et } 300 \text{ Hz}$$

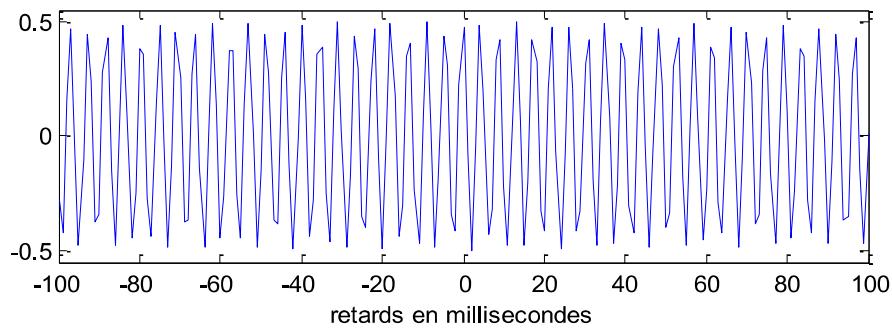
200 ms de mélange signal + bruit avec **(S/B) = 0 dB** extraits de $T = 2$ secondes



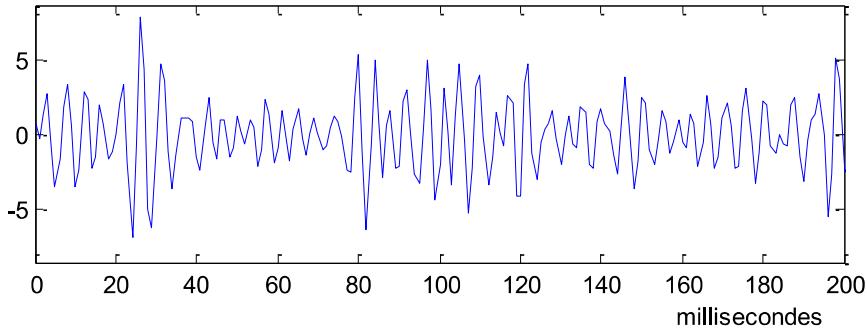
Autocorrélation du mélange signal + bruit avec $(S/B) = 0 \text{ dB}$ et $T = 2$ secondes



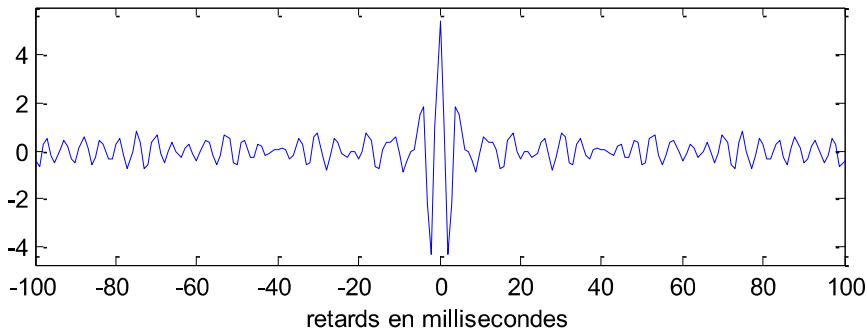
Intercorrélation entre mélange signal + bruit et signal de référence avec $(S/B) = 0 \text{ dB}$ et $T = 2 \text{ s}$



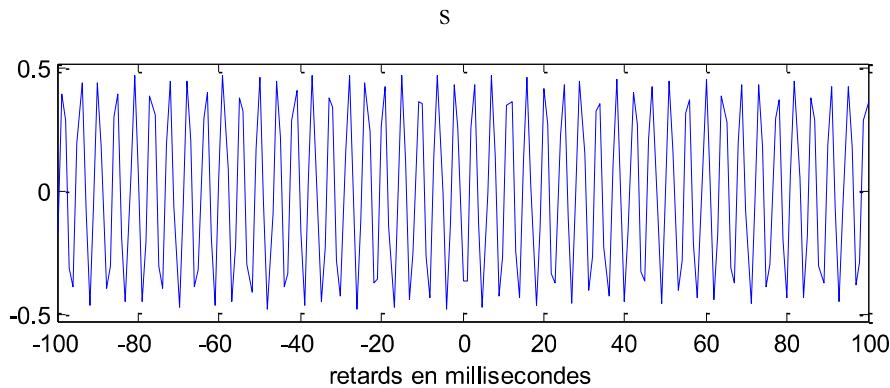
200 ms de Mélange signal + bruit avec **(S/B) = -10 dB** extraits de $T = 2$ secondes



Autocorrélation du mélange signal + bruit avec **(S/B) = -10 dB** et $T = 2$ secondes



Intercorrélation entre mélange signal + bruit et signal de référence avec **(S/B) = -10 dB** et $T = 2$



3.2 Estimateurs de la fonction d'autocorrélation des signaux à temps discret

La fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire à temps discret est définie par

$$\gamma_X(k) = E\{X(l) \cdot X^*(l-k)\} = E\{X^*(l) \cdot X(l+k)\}$$

Si on connaît N échantillons d'une réalisation du processus X de $X(0)$ à $X(N-1)$, on peut former les produits croisés $X^*(i) \cdot X(j)$ et les moyenner.

Pour $k \geq 0$, $X^*(l)$ est connu pour $0 \leq l \leq N-1$, mais $X(l+k)$ n'existe que pour $0 \leq l+k \leq N-1$. On ne peut donc envisager le produit $X^*(l) \cdot X(l+k)$ que pour $0 \leq l \leq N-k-1$.

On définira les estimateurs à partir du noyau $\sum_{l=0}^{N-k-1} X^*(l) \cdot X(l+k)$ pour $k \geq 0$.

Pour $k < 0$, il faut que l'on ait $\gamma_X(k) = \gamma_X^*(-k)$. On définit alors ce noyau pour k négatif de la

même manière suivante : $\sum_{l=0}^{N-|k|-1} X(l) \cdot X^*(l+|k|)$.

On peut définir deux estimateurs qui, pour les signaux réels, s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_1(k) = \frac{1}{N-|k|} \cdot \sum_{l=0}^{N-|k|-1} X(l) \cdot X(l+|k|) = \frac{1}{N-|k|} \cdot c(k) \\ \hat{\gamma}_2(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{l=0}^{N-|k|-1} X(l) \cdot X^*(l+|k|) = \frac{1}{N} \cdot c(k) \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq |k| < N-1.$$

3.2.1 Valeur moyenne des estimateurs de corrélation

$$\begin{cases} E\{\hat{\gamma}_1(k)\} = \frac{1}{N-|k|} \cdot E\{c(k)\} \quad (1) \\ E\{\hat{\gamma}_2(k)\} = \frac{1}{N} \cdot E\{c(k)\} \quad (2) \end{cases}$$

L'espérance mathématique du terme commun $c(k)$ s'exprime par

$$E\{c(k)\} = \sum_{l=0}^{N-|k|-1} E\{X(l) \cdot X(l+|k|)\} = (N-|k|) \cdot \gamma_X(k)$$

ce qui donne pour chacun des deux estimateurs :

$$(1) \Rightarrow E\{\hat{\gamma}_1(k)\} = \gamma_X(k) \quad \hat{\gamma}_1(k) \text{ non biaisé}$$

$$(2) \Rightarrow E\{\hat{\gamma}_2(k)\} = (1 - \frac{|k|}{N}) \cdot \gamma_X(k) \neq \gamma_X(k) \quad \hat{\gamma}_2(k) \text{ biaisé}$$

Si N tend vers l'infini, le biais du deuxième estimateur tend vers 0, on dit que l'estimateur est "*asymptotiquement non biaisé*".

3.2.2 Variance des estimateurs de corrélation

Pour chacun des deux cas, on a: $(1) \Rightarrow VAR \hat{\gamma}_1(k) = \frac{1}{(N-|k|)^2} \cdot VAR c(k)$

$$(2) \Rightarrow VAR \hat{\gamma}_2(k) = \frac{1}{N^2} \cdot VAR c(k).$$

Il faut donc évaluer la variance du noyau $c(k)$: $VAR c(k) = E\{c^2(k)\} - E^2\{c(k)\}$

On sait montrer, sous l'hypothèse que X est gaussien centré que :

$$VAR \ c(k) = \sum_{m=-(N-|k|-1)}^{N-|k|-1} (N-|k|-|m|) [\gamma_X^2(m) + \gamma_X(m-|k|) \cdot \gamma_X(m+|k|)]$$

soit $VAR \hat{\gamma}_1(k) = \frac{1}{N-|k|} \sum_{m=-(N-|k|-1)}^{N-|k|-1} \left(1 - \frac{|m|}{N-|k|} \right) [\gamma_X^2(m) + \gamma_X(m-|k|) \cdot \gamma_X(m+|k|)]$

et $VAR \hat{\gamma}_2(k) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=-(N-|k|-1)}^{N-|k|-1} (N-|k|-|m|) [\gamma_X^2(m) + \gamma_X(m-|k|) \cdot \gamma_X(m+|k|)]$

3.2.3 Comparaison des estimateurs de corrélation et choix

3.2.3.1 en $k = 0$

$$E\{\hat{\gamma}_1(0)\} = \gamma_X(0) \quad \text{Non biaisé}$$

$$VAR \ \hat{\gamma}_1(0) = \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} 2 \cdot \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \cdot \gamma_X^2(m)$$

$$E\{\hat{\gamma}_2(0)\} = \gamma_X(0) \quad \text{Non biaisé en 0}$$

$$VAR \ \hat{\gamma}_2(0) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} 2 \cdot (N-|m|) \cdot \gamma_X^2(m)$$

\Rightarrow en 0: valeurs moyennes et variances identiques

3.2.3.2 en $k = N-1$

$$E\{\hat{\gamma}_1(N-1)\} = \gamma_X(N-1) \quad \text{Non biaisé}$$

$$VAR \ \hat{\gamma}_1(N-1) = \gamma_X^2(0) + \gamma_X^2(N-1)$$

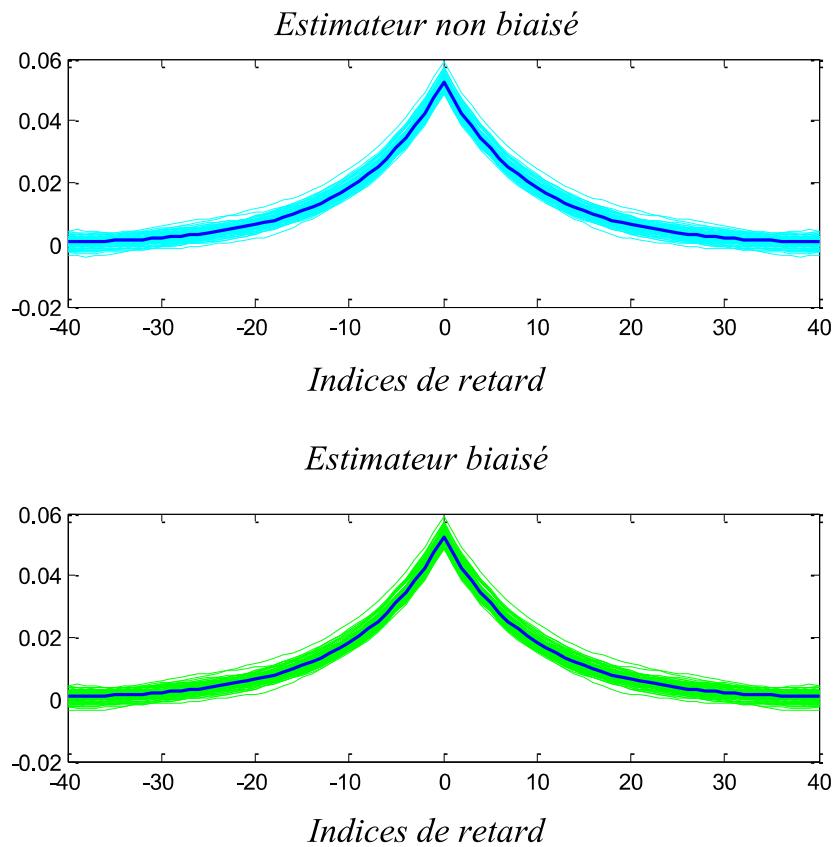
$$E\{\hat{\gamma}_2(N-1)\} = \frac{1}{N} \gamma_X(N-1) \quad \text{Biaisé}$$

$$VAR \ \hat{\gamma}_2(N-1) = \frac{1}{N^2} \cdot [\gamma_X^2(0) + \gamma_X^2(N-1)]$$

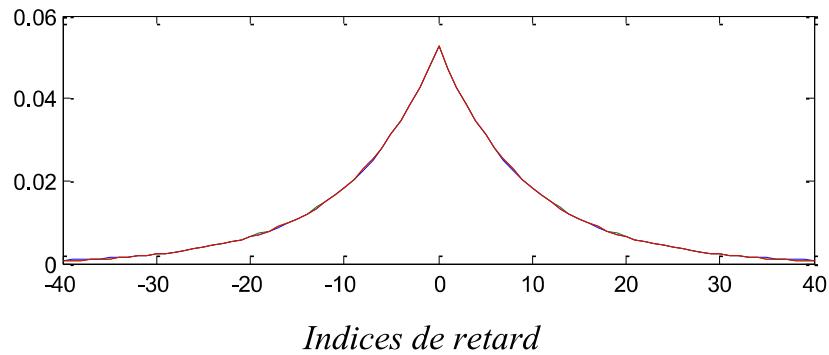
$$VAR \ \hat{\gamma}_2(N-1) = \frac{1}{N^2} \cdot VAR \ \hat{\gamma}_1(N-1)$$

Exemple : X processus dit AR(1), tel que, théoriquement, $\gamma_X(k) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|k|}$, avec $a=-0.9$ et $\sigma=1$

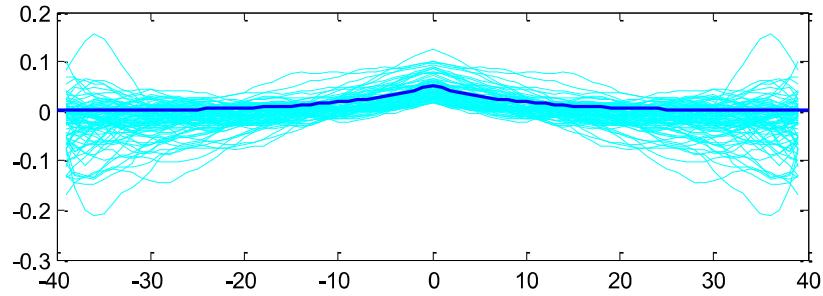
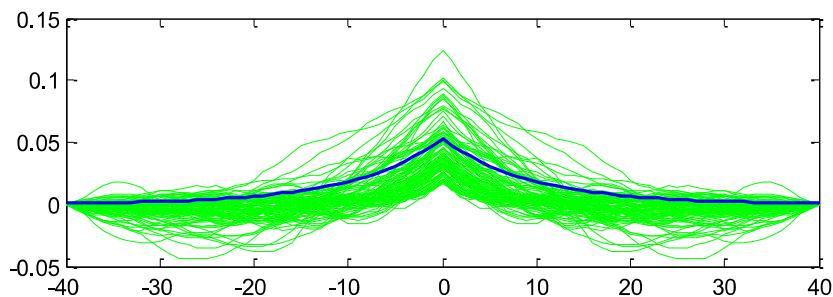
- 100 réalisations de bruit comportant chacune 10000 valeurs



Superposition Théorie + Moyenne des 100 résultats pour les estimateurs biaisé et non biaisé



- 100 réalisations de bruit comportant chacune 40 valeurs

Estimateur non biaisé*Indices de retard**Estimateur biaisé**Indices de retard*

On choisit normalement l'estimateur non biaisé. Mais lorsque k se rapproche de N , sa variance est plus élevée que celle de l'estimateur biaisé dont le biais croît avec k .

4 Estimation de la densité spectrale de puissance moyenne

L'analyse spectrale de signaux aléatoires stationnaires est un outil fondamental en Traitement du Signal car elle permet de déterminer les caractéristiques d'un signal qualifié de bruit :

- bande occupée,
- caractéristiques du spectre (bande large ou étroite, présence de raies ou non, etc...),
- estimation de la puissance de certaines composantes ou de leur position en fréquence,
- spectre complet en vue d'injection dans une autre méthode.

Dans les cours de Traitement du Signal précédents, les méthodes d'obtention de la densité spectrale d'énergie de signaux certains d'énergie finie ont été largement développées. On rappelle ici que dans ce cas, la densité spectrale d'énergie d'un signal certain d'énergie finie peut se définir comme la transformée de Fourier de l'autocorrélation de ce signal. Mais elle est aussi égale au

module carré de la transformée de Fourier du signal lui-même. Et c'est plutôt sous cette forme qu'est envisagé le calcul de cette grandeur.

Dans un contexte aléatoire, on ne dispose que d'une seule réalisation de la grandeur à caractériser $X(t)$, alors que l'on aurait besoin d'accéder à des moyennes statistiques. En effet, la densité spectrale de puissance moyenne $\Gamma_X(v)$ est la transformée de Fourier de l'autocorrélation de X , $\gamma_X(\tau)$, qui est une grandeur statistique :

$$\Gamma_X(v) = \text{TF}(\gamma_X(\tau)) = \text{TF}(\mathbb{E}\{X(t)X(t - \tau)\})$$

Même si l'observation est opérée sur une longue durée, et que l'on remplace moyenne statistique par moyenne temporelle, on ne pourra réaliser qu'une ESTIMATION de la densité spectrale de puissance moyenne (DSPM).

Pour chaque estimateur, on s'intéressera à son biais, sa variance, la précision d'estimation.

On peut aussi s'intéresser à l'aptitude de l'analyse à séparer des composantes proches. On parle alors de **RÉSOLUTION FRÉQUENTIELLE**.

4.1 Familles d'estimateurs spectraux

On distingue deux familles d'estimateurs.

Les estimateurs dits **classiques** reposent sur des mesures utilisant la définition de la densité spectrale de puissance moyenne (DSPM) et faisant appel à la transformée de Fourier.

Les estimateurs dits **modernes** font appel à une modélisation du signal et associent au signal la densité spectrale du modèle ajusté. On parle aussi d'estimation **paramétrique**.

Seule la première famille d'estimateurs sera abordée dans ce paragraphe.

Ces estimateurs reposent sur l'outil essentiel qu'est la « Transformée de Fourier ».

Il existe quatre estimateurs pour chacun desquels on déclinera le mode de calcul et les performances que l'on peut en attendre en termes de biais, de variance, de précision d'estimation et de résolution fréquentielle.

4.2 Estimateur spectral simple

En s'appuyant sur la définition de la densité spectrale de puissance moyenne $\Gamma_X(v) = \text{TF}(\gamma_X(\tau))$, on peut imaginer estimer la fonction d'autocorrélation de X , puis en calculer la Transformée de Fourier.

On définit alors l'estimateur spectral simple $\hat{\Gamma}_1(f)$ où f représente la fréquence réduite comme la transformée de Fourier de $\hat{\gamma}_X(k)$:

$$\hat{\Gamma}_1(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{\gamma}_X(k) \cdot e^{-i2\pi f k} \quad \text{pour } |f| \leq \frac{1}{2}$$

Cependant, l'opération qui consiste à mesurer la fonction d'autocorrélation, puis à en calculer la transformée de Fourier nécessite un volume de calculs important.

Si on considère l'estimateur asymptotiquement non biaisé de la fonction de corrélation

$$\hat{\gamma}_X(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{l=0}^{N-1-|k|} X(l) \cdot X(l+|k|)$$

on peut montrer que $\hat{\Gamma}_1(f)$ peut s'écrire également :

$$\hat{\Gamma}_1(f) = \frac{1}{N} \cdot \left| \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cdot e^{-i2\pi f n} \right|^2$$

ce qui est nettement plus simple et rapide à mettre en œuvre. Le procédé est illustré Figure 7.

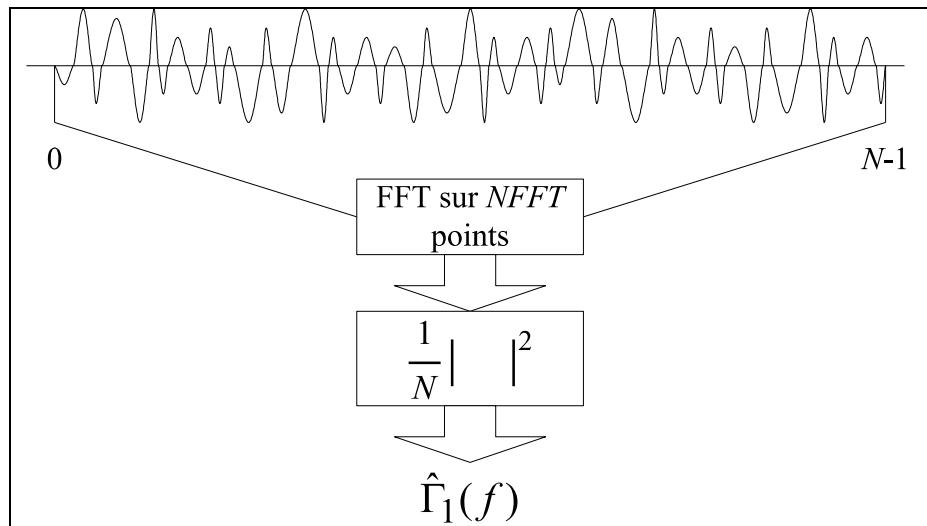


Figure 7

4.2.1 Biais de l'estimateur simple

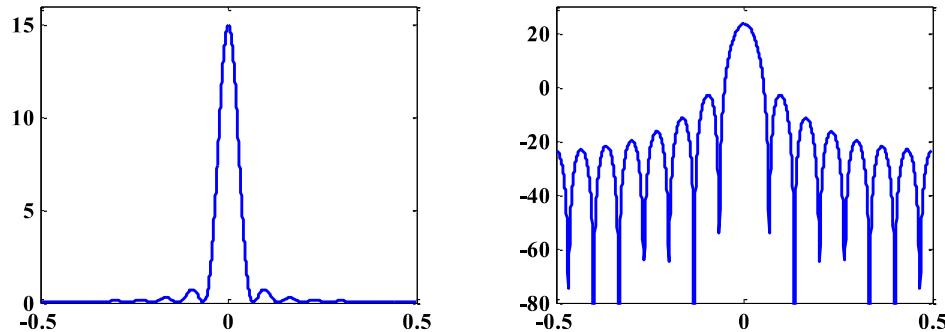
$$E\{\hat{\Gamma}_1(f)\} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} E\{\hat{\gamma}_X(k)\} \cdot e^{-i2\pi f k} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \cdot \gamma_X(k) \cdot e^{-i2\pi f k},$$

En posant $\begin{cases} w_B^N(k) = 1 - \frac{|k|}{N} & |k| \leq N-1 \\ w_B^N(k) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$, fonction triangle (dite de Bartlett), il vient :

$$E\{\hat{\Gamma}_1(f)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_B^N(k) \cdot \gamma_X(k) \cdot e^{-i2\pi f k} = (W_B^N * \Gamma_X)(f)$$

Cette moyenne est biaisée par une convolution avec une fonction qui dépend de la taille de l'échantillon.

On a $W_B^N(f) = \begin{cases} \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f}\right)^2 & f \neq 0 \\ N & f = 0 \end{cases}$ qui est légèrement différent de la TF d'un triangle à temps continu.



Cet estimateur fournit donc des résultats biaisés puisque toutes les composantes du spectre seront convoluées par $W_B^N(f)$.

4.2.2 Variance de l'estimateur simple

Sous réserve que X soit réel, gaussien, centré et que sa DSPM soit à large bande devant $W_B^N(f)$,

$$\text{on peut montrer que } \text{VAR} \hat{\Gamma}_1 \cong \Gamma_X^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f} \right)^2 \right].$$

Lorsque N tend vers l'infini, $\text{VAR} \hat{\Gamma}_1(f)$ ne tend pas vers 0 mais vers $\Gamma_X^2(f)$.

4.2.3 Précision d'estimation

Lorsque N est grand, $W_B^N(f)$ est très étroit, alors $E\{\hat{\Gamma}_1(f)\} \rightarrow \Gamma_X(f)$.

La précision ε^2 tend alors vers 1. Cette estimation est de très mauvaise qualité.

4.2.4 Résolution fréquentielle

La résolution fréquentielle représente l'aptitude à séparer deux raies qui sont proches. Elle peut être exprimée à l'aide de la largeur à -3dB du lobe principal de la transformée de Fourier de la fenêtre engendrant le biais.

Pour la fenêtre de Bartlett, on a $\Delta f = \frac{1.28}{2N}$.

4.3 Estimateur spectral moyenisé

Pour diminuer la variance de l'estimation précédente, on peut moyenner plusieurs estimations supposées indépendantes. On calcule plusieurs mesures du type $\hat{\Gamma}_1(f)$ en divisant les N points disponibles sur le signal en L tranches de M points.

La tranche n° l fournit une séquence $X_l(m)$ telle que

$$X_l(m) = \begin{cases} X(m + (l-1)M) & m = 0, \dots, M-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et } l \text{ varie de 1 à } L.$$

On estime la DSPM de chaque tranche en utilisant l'estimateur $\hat{\Gamma}_1(f)$. On calcule

$$\hat{\Gamma}_l(f) = \frac{1}{M} \cdot \left| \sum_{m=0}^{M-1} X_l(m) \cdot e^{-i2\pi fm} \right|^2 \quad \text{et on réalise la moyenne de tous les } \hat{\Gamma}_l(f), \text{ soit :}$$

$$\hat{\Gamma}_2(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \hat{\Gamma}_l(f)$$

Le procédé est décrit Figure 8.

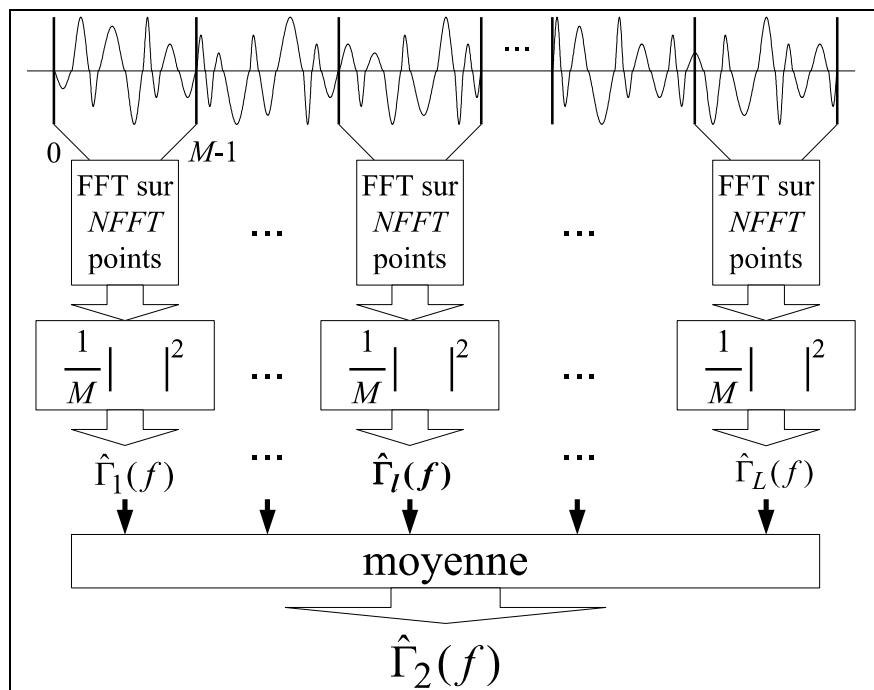


Figure 8

4.3.1 Biais de $\hat{\Gamma}_2(f)$

$$E\{\hat{\Gamma}_2(f)\} = \frac{1}{L} \cdot \sum_{l=1}^L E\{\hat{\Gamma}_l(f)\} = \frac{1}{L} \cdot \sum_{l=1}^L (W_B^M * \Gamma_X)(f) = (W_B^M * \Gamma_X)(f), \text{ fait apparaître un biais.}$$

Si M est très inférieur à N , alors le support spectral de W_B^M est très supérieur au support de W_B^N .

A N donné, le biais de $\hat{\Gamma}_2$ est donc plus important que le biais de $\hat{\Gamma}_1$.

4.3.2 Variance

Si on suppose les L tranches "non-corrélatées" entre elles, $VAR \hat{\Gamma}_2(f) = \frac{1}{L^2} \cdot \sum_{l=1}^L VAR \hat{\Gamma}_l(f)$

Sous réserve que X soit réel, gaussien, centré, que sa DSPM soit à large bande devant $W_B^M(f)$, il vient :

$$VAR \hat{\Gamma}_2 \cong \frac{1}{L} \Gamma_X^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f M}{M \sin 2\pi f} \right)^2 \right].$$

4.3.3 Précision d'estimation

A N fixé, il faut trouver un COMPROMIS entre le biais et la variance. En effet, pour diminuer la variance de $\hat{\Gamma}_2(f)$, on augmente le nombre de tranches L . Mais alors M diminue et le biais augmente.

Si on augmente le nombre de points N , à L fixé, on augmente M . A la limite $E\{\hat{\Gamma}_2(f)\} \rightarrow \Gamma_X(f)$ et $VAR \hat{\Gamma}_2 \rightarrow \frac{\hat{\Gamma}_X^2(f)}{L}$. La précision d'estimation tend vers $\frac{1}{\sqrt{L}}$.

4.3.4 Résolution fréquentielle

La résolution fréquentielle est liée à la largeur de la fenêtre de Bartlett, ici régie par le paramètre M .

On a $\Delta f = \frac{1.28}{2M}$ et la résolution se dégrade par rapport au premier estimateur.

4.4 Estimateur spectral de Welch

Welch a proposé deux modifications à la méthode précédente :

- chaque tranche de signal est pondérée par une fenêtre h ,
- les tranches peuvent se recouvrir.

Les N données sont divisées en K tranches de M points. La tranche n° k fournit une séquence

$$X_k(m) \text{ telle que } X_k(m) = \begin{cases} X(m + (k-1)D) & m = 0, \dots, M-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \text{ et } k \text{ varie de 1 à } K.$$

Si $D = M$, le nombre de tranches K est égal au nombre de tranches L de la méthode précédente.

Si $D = M/2$, il y a recouvrement de 50% et $K = 2L$.

La DSMPM de chaque tranche est estimée par $\hat{\Gamma}_k(f) = \frac{1}{MU} \cdot \left| \sum_{m=0}^{M-1} X_k(n) h(m) \cdot e^{-i2\pi fm} \right|^2$ où U est

un facteur de normalisation tel que $U = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} h^2(m)$. Enfin, on réalise la moyenne de tous les

$\hat{\Gamma}_k(f)$, soit

$$\hat{\Gamma}_3(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\Gamma}_k(f)$$

Le procédé est décrit Figure 9.

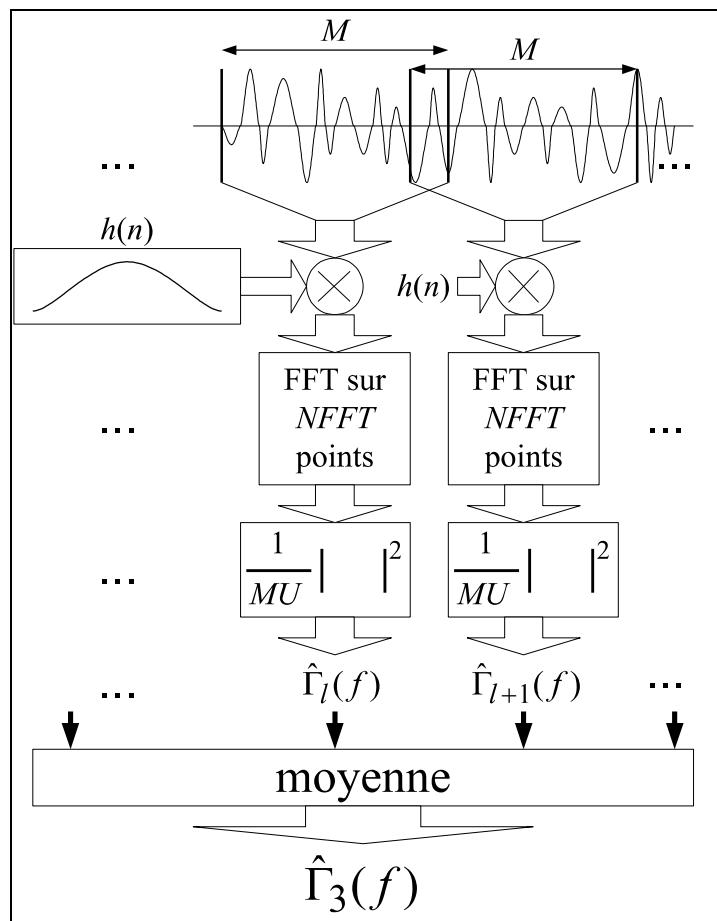


Figure 9

4.4.1 Biais

$E\{\hat{\Gamma}_3(f)\} = (\Gamma_X(f') * P(f'))(f)$ avec $P(f) = \frac{|H(f)|^2}{MU}$. Cette estimation est donc biaisée puisque toutes les composantes du spectre seront convolées par $P(f)$.

$$P(f) = \frac{1}{M \cdot U} \cdot \left| \sum_{m=0}^{M-1} h(m) \cdot e^{-i2\pi f m} \right|^2 = \frac{1}{M \cdot U} \cdot |H(f)|^2 = \frac{\left| \sum_{m=0}^{M-1} h(m) \cdot e^{-i2\pi f m} \right|^2}{\sum_{m=0}^{M-1} h^2(m)}$$

Cependant la forme de la transformée de Fourier de la fenêtre utilisée peut limiter grandement ce biais.

4.4.2 Variance

Si X est réel, gaussien, centré, blanc et si l'on n'a pas de recouvrements, Welch a montré que $\text{VAR}\hat{\Gamma}_3 \cong \frac{1}{L} \Gamma_X^2(f)$ soit une variance L fois plus faible que celle de $\hat{\Gamma}_1(f)$.

4.4.3 Précision d'estimation

A N fixé, il faut trouver un COMPROMIS entre le biais et la variance. En effet, pour diminuer la variance de $\hat{\Gamma}_3(f)$, on augmente le nombre de tranches K . Mais alors M diminue et le biais augmente. On peut cependant jouer sur le recouvrement des tranches pour en augmenter le nombre.

Si $\Gamma_X(f)$ est plat dans la bande de P , la précision d'estimation tend vers $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

4.4.4 Résolution fréquentielle

La résolution fréquentielle est liée à la largeur de $P(f)$, elle-même liée à la fenêtre de pondération des tranches h , ici régie par le paramètre M .

Pour une fenêtre de pondération rectangulaire de largeur M , $|H(f)|^2$ s'identifie à $W_B^M(f)$, On a alors $\Delta f = \frac{1.28}{2M}$.

4.5 Estimateur Lissé (Adouci) (Blackman-Tukey)

Il consiste à effectuer une moyenne des fluctuations de $\hat{\Gamma}_1$. Si on considère que ces fluctuations sont liées entre autres à la piètre qualité de la prise en compte de l'autocorrélation, on filtre $\hat{\Gamma}_1$ pour atténuer ces fluctuations. Ceci revient à pondérer $\hat{\gamma}_X(k)$ par une fenêtre $g(k)$ paire de longueur $2M-1$ pour limiter l'influence des valeurs de corrélation estimées avec peu de précision.

On a $\hat{\Gamma}_4(f) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} g(k) \cdot \hat{\gamma}_X(k) \cdot e^{-i2\pi f k}$.

4.5.1 Valeur moyenne

$$E\{\hat{\Gamma}_4(f)\} = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} g(k) \cdot E\{\hat{\gamma}_X(k)\} \cdot e^{-i2\pi fk} = (G * W_B^N * \Gamma_X)(f) = (E\{\hat{\Gamma}_1\} * G)(f)$$

Si $M \ll N$, $\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)g(k) \cong g(k)$ et $E\{\hat{\Gamma}_4(f)\} \cong (G * \Gamma_X)(f)$.

L'estimateur est biaisé, et le biais dépend de G (transformée de Fourier de la fenêtre de pondération).

4.5.2 Variance

Si $N \gg M$, G est à large bande devant W_B^N .

Si X est gaussien et à large bande devant W_B^N , on peut montrer que

$$VAR \hat{\Gamma}_4 \cong \frac{1}{N} \cdot \left[\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_X^2(\alpha) \cdot G^2(f-\alpha) d\alpha + \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_X^2(\alpha) \cdot G(f-\alpha) \cdot G(f+\alpha) d\alpha \right].$$

Enfin, pour f supérieur à quelques fois le support de G

$$VAR \hat{\Gamma}_4 \cong \frac{1}{N} \cdot (\Gamma_X^2 * G^2)(f).$$

Si Γ_X est à large bande devant G alors on peut dire que $\Gamma_X^2(u) \cong \text{constante} = \Gamma_X^2(f)$, soit

$$VAR \hat{\Gamma}_4(f) \cong \frac{1}{N} \cdot \Gamma_X^2(f) \cdot \int_{-1/2}^{1/2} G^2(u) du = \frac{1}{N} \cdot \Gamma_X^2(f) \cdot \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} g^2(k).$$

4.5.3 Précision et résolution

Elles dépendent de la fenêtre choisie. En effet, si Γ_X est à large bande devant G et pour des fréquences supérieures à quelques largeurs de G ,

$$\varepsilon_{\hat{\Gamma}_4}^2(f) \cong \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} g^2(k).$$

Pour une fenêtre rectangulaire, $\varepsilon^2 \cong \frac{2M}{N}$ et $\Delta f = \frac{0,89}{2M}$.

Pour une fenêtre triangulaire, $\varepsilon^2 \cong \frac{2M}{3N}$ et $\Delta f = \frac{1,28}{2M}$.