Mathématiques 2 : le livre sacado

L’équipe SACADO

28 août 2023

Chapitre I.

Arithmétique

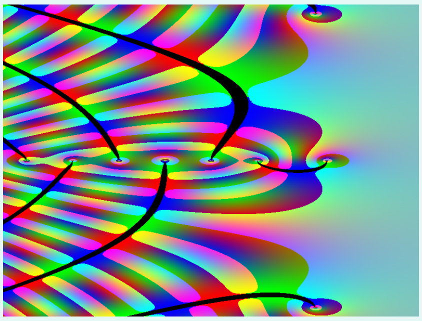
Les savoir-faire du chapitre

- Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
- Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.

Les mathématiciennes et mathématiciens

Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'Homme
Leopold Kronecker

L'arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les nombres entiers et les opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$,... Comme le relève la citation en exergue, les concepts de l'arithmétique sont élémentaires et fondamentaux.
Mais cela ne signifie pas que les problèmes de l'arithmétique sont simples. Par exemple, les nombres premiers sont source de nombreux problèmes non résolus à ce jour, en particulier l'*hypothèse de Riemann* qui porte sur la *fonction zêta* et qui est reliée à la répartition des nombres premiers.
L'importance de l'arithmétique dépasse les mathématiques : la plupart des cryptosystèmes (algorithmes qui permettent la sécurité des communications sur internet) sont fondés sur l'arithmétique.



Une représentation de la fonction zêta de Riemann

Chercher. Calculer.

Pour fêter les 25 ans de sa boutique, un chocolatier souhaite offrir aux premiers clients de la journée une boîte contenant des truffes au chocolat. Il a confectionné 300 truffes : 125 truffes parfumées au café et 175 truffes enrobées de noix de coco, et toutes les boîtes devront être identiques : elles devront contenir le même nombre de truffes café, et le même nombre de truffes noix de coco. Toutes les truffes devront être utilisées.
Combien, au minimum, y aura-t-il de truffes de chaque sorte dans chaque boîte ?

1 Les entiers naturels et entiers relatifs

Définition 1 : Entiers naturels et relatifs.

1. On appelle **entiers naturels** les nombres : $0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots$ Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$., on a donc : $\mathbb{N}=\{0;1;2;3\ldots\}$
2. On appelle **entiers relatifs** ou simplement **entiers** les nombres entiers naturels et leurs opposés. Leur ensemble est noté $\mathbb{Z}$ (d'après le mot allemand Zahl qui signifie chiffre, nombre). On a donc : $\mathbb{Z}=\{\ldots-3;-2;-1;0;1;2;3\cdots\}$
Parfois, on dit abusivement que les nombres entiers sont les nombres sans partie décimale.

2 Multiples et diviseurs

Définition 2 : Multiple et diviseur.

?? Soit d un nombre entier. Le nombre m est dit **multiple** de d s'il existe un entier $q\in\mathbb{Z}$ tel que $m=qd$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un **diviseur** de m. Le nombre q est donc aussi un diviseur de m.

Exemple 3.

?? $35=5\times 7$ où $7\in\mathbb{Z}$ donc 35 est un multiple de 5 et 5 est un diviseur de 35. Comme $5\in\mathbb{Z}$, on peut aussi dire que 35 est un multiple de 7 et que 7 est un diviseur de 35.
1 est un diviseur de tous les entiers, et tous les entiers divisent 0.

Définition 4 : Nombres pairs et impairs.

?? Un **nombre pair** est un nombre entier divisible par 2, autrement dit un nombre entier a est pair lorsqu'il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $a=2n$.
Un entier a est un **nombre impair** lorsqu'il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $a=2n+1$.

Exemples 5.

$46=2\times 23$ et $23\in\mathbb{Z}$ donc 46 est un nombre pair.
$15=2\times 7,5$. Comme $7,5\notin\mathbb{Z}$, 15 n'est pas pair. Par contre, $15=2\times 7+1$ avec $7\in\mathbb{Z}$, donc 15 est impair.

3 Nombres premiers

Définition 6 : Nombre premier.

?? Un **nombre premier** est un nombre entier naturel qui a exactement deux diviseurs positifs (qui sont alors 1 et lui-même)

Exemple 7.

19 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et lui-même.
18 n'est pas premier : il est divisible par 1 et 18, mais aussi par 2 par exemple.
1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur.

Théorème 8 : Décomposition en facteurs premiers.

?? Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en facteurs premiers. Cette décomposition est unique (à l'ordre des facteurs près).

Exemples 9.

Les décompositions en facteurs premiers de 8, 15 et 19 sont respectivement $8=2^3\,;15=3\times 5\,;19=19$.

4 Nombres premiers entre eux

Définition 10 : Nombres premiers entre eux.

Deux nombres entiers a et b sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur positif commun est 1.

Exemple 11.

Les diviseurs positifs de 8 sont $1\,;2\,;4$ et 8. Ceux de 15 sont $1\,;3\,;5$ et 15. Le seul diviseur commun est 1 ; donc **8 et 15 sont premiers entre eux** (Pourtant, ils ne sont pas premiers)

Définition 12 : Fraction irréductible.

??

Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple 13.

Les fractions $\frac{8}{15}$ et $\frac{15}{8}$ sont irréductibles, puisque 8 et 15 sont premiers entre eux.
La fraction $\frac{10}{12}$ n'est pas irréductible : 10 et 12 ne sont pas premiers entre eux : ils admettent un facteur commun différent de 1, comme 2 par exemple.

Méthode 14.

Pour rendre irréductible une fraction, on peut décomposer en facteurs premiers son numérateur et son dénominateur, puis simplifier tous les facteurs communs.

5 Logique

Définition 15 : Proposition universelle.

Une **proposition universelle** est une proposition qui porte sur tous les éléments d'un ensemble.

Exemple 16.

Le théorème 8 de décomposition en facteurs premiers est une proposition universelle (et elle est vraie).

Définition 17 : Contre-exemple.

Un **contre-exemple** est un cas particulier qui vient contredire une proposition universelle.

Méthode 18.

Pour démontrer qu'une proposition universelle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple. Par contre, démontrer qu'une proposition universelle est vraie nécessite une démonstration générale qui traite tous les cas.

Exemple 19.

La proposition universelle « tout entier naturel dont le dernier chiffre est 7 est premier » est fausse, et pour le justifier, il suffit de dire que 27 est un contre-exemple.
La proposition universelle « tout nombre premier supérieur à 3 est impair » est vraie, en voici une démonstration : soit p un nombre premier supérieur à 3, alors les seuls diviseurs de p sont 1 et p qui est différent de 2, donc p n'a pas 2 comme diviseur, il est donc impair.

Multiples et les diviseurs ; nombres premiers

1 ?? Calculer.

1. Déterminer les multiples de 4, compris entre 0 et 40 :
2. Déterminer les multiples de 6, compris entre 0 et 40 :
3. Déterminer tous les multiples communs 4 et de 6, compris entre 0 et 40 :

2 ?? Calculer.

1. Donner tous les nombres premiers inférieurs à 20 ....
2. 51 est-il un nombre premier ? Justifier. ....

....

3 ?? Calculer.

Décomposer 24 en produit de facteurs premiers.

....

....

....

4 ?? Calculer.

Écrire la fraction $\dfrac{735}{840}$ sous forme irréductible :

....

....

....

Propriétés universelles, contre-exemples

5 ?? Calculer, raisonner.

Soit a un entier. Démontrer que la somme de deux multiples de a est un multiple de a. ....

....

....

6 ?? Raisonner.

Vrai ou faux : quel que soit l'entier naturel n, $2n+3$ est un nombre premier. Justifier. ....

....

7 ?? Raisonner.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La différence de deux nombres entiers naturels est un entier naturel. ....
2. Le quotient de deux nombres décimaux non nuls est un nombre décimal. ....
3. Il existe deux nombres premiers distincts dont le quotient est un entier relatif. ....
4. Il existe deux nombres premiers distincts dont le quotient est un nombre décimal. ....

Représenter. Raisonner.

8

??

1. Décomposer 186 et 155 en produit de facteurs premiers. ....

....

....

2. Déterminer le PGCD (plus grand diviseur commun) de 186 et 155. ....

....

3. Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats qu'il répartit dans des colis. Les colis sont constitués ainsi :
   - Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
   - Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
   - Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

   (a) Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ? ....

....

....

   (b) Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ? ....

....

....

Raisonner.

9

?? Simplifier la fraction $\dfrac{2310}{2730}$ pour la rendre irréductible. ....

....

Raisonner.

10

?? Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair. ....

....

Chercher.

11

??

1. Proposer deux entiers non premiers entre eux. ....
2. Proposer deux entiers non premiers, premiers entre eux. ....

Chercher. Raisonner.

12

?? La somme de deux nombres premiers est-il un nombre premier ? Justifier. ....

....

Représenter.

13 ?? On veut démontrer que la proposition universelle $\mathcal{P}$ suivante : « La somme de deux nombres impairs est un nombre pair » est vraie.

1. Calculer $a = 5 + 7$. Peut-on en déduire que la proposition P est vraie ? ....

....

2. Soient n et m deux nombres impairs. Il existe donc deux entiers relatifs k et q tels que $n = 2k + 1$ et $m = 2q + 1$. Calculer $n + m$ en fonction de k et q. ....

3. En déduire que la somme $n + m$ est un nombre pair. ....

Représenter.

14 ??

1. En utilisant les décompositions en facteurs premiers, démontrer que les entiers qui sont divisibles par 2 et 3 sont divisibles par 6. ....

....

....

....

....

2. Est-il vrai que tout entier divisible par 4 et 6 est divisible par 24 ? ....

Raisonner.

15 ?? Démontrer que tout nombre entier n multiple de 9 est un multiple de 3. ....

....

....

....

....

....

Raisonner.

16 ?? Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. ....

....

....

....

....

....

Chercher.

17 **??** Je suis un nombre à trois chiffres non nuls. Je suis divisible par 94. Changez l'ordre de mes chiffres d'une certaine manière, et je deviens divisible par 49. Qui suis-je ? ....

....

....

....

....

Raisonner.

18 **??** Dans un pays où le système fiduciaire (les pièces et les billets) n'est constitué que de pièces de 3 et de 5, il s'agit d'aider les habitants en créant un algorithme qui donne le nombre minimal de pièces nécessaires à tout achat d'un montant entier supérieur ou égal à 8.
Pour tester l'algorithme, on peut utiliser l'éditeur Python : https://sacado.xyz/tool/show/18

Source : d'après PISA, items libérés

Raisonner.

19 **??** Simplifier le nombre $a = \dfrac{60}{126}$ pour la rendre irréductible.

Raisonner.

20 **??** Simplifier le nombre $b = \dfrac{12a+4}{8}$.

Raisonner.

21 **??** Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?

Raisonner.

22 **??** Soit n un entier.
Démontrer que la différence de deux multiples de n est un multiple de n.

Raisonner.

23 **??** Pour déterminer le PGCD de deux entiers naturel a et b (avec $b \neq 0$), on effectue la division euclidienne de a par b. On appelle r_0 le reste.
Puis on divise b par r_0 et on appelle r_1 le reste.
On divise alors r_0 par r_1 et on appelle r_2 le reste.
On divise alors r_1 par r_2 et on appelle r_3 le reste. Et ainsi de suite, jusqu'à obtenir un reste nul. Le PGCD de a et de b est alors le dernier reste non nul (ou b si le premier reste est déjà nul). On appelle ce procédé « la méthode par divisions successives » ou « l'algorithme d'Euclide ».

1. Déterminer à l'aide de ce procédé le PGCD de 912 et de $1\,104$.

2. Un carreleur doit carreler une pièce rectangulaire de 912cm par $1\,104$cm en utilisant des carreaux carrés. Le travail sera grandement facilité si :
   - il n'a pas de découpe à faire : il disposera un nombre entier de carreaux sur la longueur et sur la largeur de la pièce ;
   - il utilise le moins possible de carreaux, donc les carreaux sont les plus grands possibles.

   (a) Quel est le côté c des carreaux qui répond à ces deux contraintes ?

   (b) Combien de carreaux seront disposés en longueur ? en largeur ? Combien de carreaux seront utilisés au total ?

Raisonner.

24 ??

1. On pose $a = 87$ et $b = 12$. Soustraire b à a autant de fois que possible, tant que le résultat reste positif. Combien de soustractions ont été faites ? Quelle est la dernière valeur obtenue ? ....

....

2. Effectuer la division euclidienne de 87 par 12 ; comparer le quotient et le reste avec les deux valeurs obtenues à la question précédente. ....

....

....

3. Écrire un programme python qui lit deux entiers naturels a et b (avec $b \neq 0$), qui soustrait b à a tant que le résultat est positif, et affiche le nombre de soustractions effectuées (que l'on note q) et la dernière valeur obtenue (que l'on note r). ....

....

....

....

....

....

....

4. En python le quotient et le reste de la division euclidienne de `a` par `b` sont donnés par les expressions `a // b` et `a % b` respectivement. Compléter le programme précédent pour qu'il affiche aussi le quotient et le reste de `a` par `b`. Constater sur quelques exemples que q et r sont bien le quotient et le reste de `a` par `b`. ....

....

Raisonner.

25 ??

Le crible d'Eratosthène

L'algorithme procède par élimination : il s'agit de rayer d'une table d'entiers tous les multiples d'un entier n (autres que lui-même), et d'entourer tous les autres. En supprimant tous ces multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier à part 1 et eux-mêmes, et qui sont donc les nombres premiers.

On commence par entourer deux, puis on raye tous les multiples de 2 à partir de 4. On entoure alors le premier nombre non rayé ni entouré, qui est 3, et on raye puis les multiples de 3 sauf 3. Puis on entoure le premier nombre non rayé ni entouré, qui est 5, et on raye tous les multiples de 5 sauf 5... On répète l'opération jusqu'à ce que tous les entiers soient rayés ou entourés.

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

1. Exécuter le crible sur la table ci-contre.
2. Quel est le résultat de ce crible ? ....

....

....

3. Écrire un code en Python du crible d'Eratosthène : https://sacado.xyz/tool/show/18