Chapitre 10.

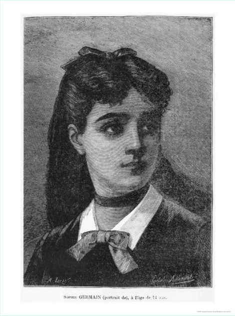
Fonctions de référence

Les savoir-faire du parcours

- Savoir étudier la parité d'une fonction.
- Savoir déterminer graphiquement la parité d'une fonction.
- Savoir étudier les variations de la fonction carré.
- Savoir comparer des images par la fonction carré.
- Savoir résoudre une équation, inéquation avec la fonction carré.
- Savoir étudier les variations de la fonction cube.
- Savoir comparer des images par la fonction cube.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction cube.
- Savoir étudier les variations de la fonction inverse.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction inverse.
- Savoir étudier les variations de la fonction racine carrée.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction racine carrée.
- Savoir reconnaitre une fonction de référence.

Les mathématiciennes et mathématiciens

Sophie Germain (1776-1831) était une mathématicienne française pionnière du XIXe siècle. Malgré les obstacles dus à sa condition de femme, elle a contribué de manière significative à la théorie des nombres et à la théorie des équations diophantiennes. Elle a utilisé un pseudonyme masculin pour correspondre avec d'autres mathématiciens, dont Carl Friedrich Gauss, et a été la première femme à recevoir la médaille de l'Académie des Sciences de Paris. Ses travaux ont jeté les bases de la théorie des nombres modernes.



1

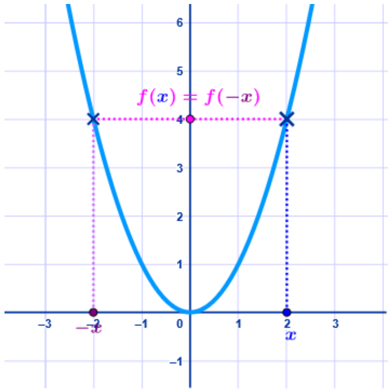
Compétence.

1 Fonctions paires, fonctions impaires

Définition 1: Fonction paire.

On dit qu'une fonction f est **paire** si :

- $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$



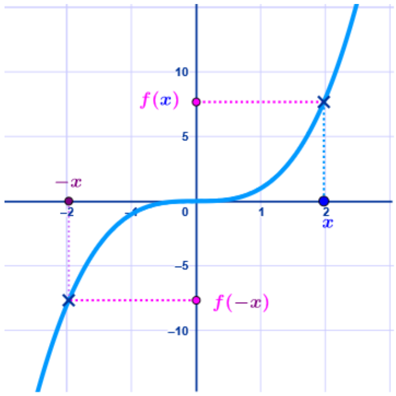
Remarque 2.

La **courbe représentative** d'une fonction pair est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.

Définition 3: Fonction impaire.

On dit qu'une fonction f est **impaire** si :

- $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$



Remarque 4.

La **courbe représentative** d'une fonction pair est **symétrique** par rapport à l'**origine du repère**.

2 La fonction Carré

Définition 5: Fonction Carré.

La **fonction Carré** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
La **représentation graphique** de la fonction Carré s'appelle une **parabole** et son équation est $y = x^2$.

Théorème 6.

La fonction Carré f est paire.
La parabole d'équation $y = x^2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorème 7: Variations de la fonction Carré.

Démonstration exigible

La fonction Carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Preuve : Etude des variations de $f : x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$:
Soient a et b deux nombres appartenant à $[0; +\infty[$ tels que $a < b$.
Comparons les images de a et b par la fonction f.
$f(a) = a^2$ et $f(b) = b^2$
Pour les comparer on étudie le signe de leur différence :
$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- a et b appartiennent à $[0; +\infty[$ donc $a + b > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$
- $(a+b)(a-b) < 0 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0 \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) < f(b)$

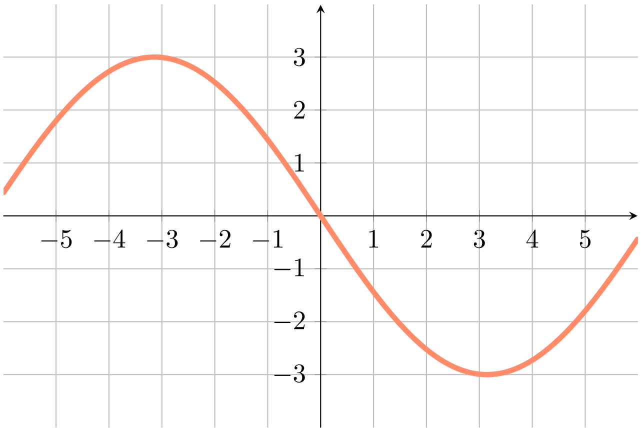
Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans le même ordre que ces nombres. La fonction est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

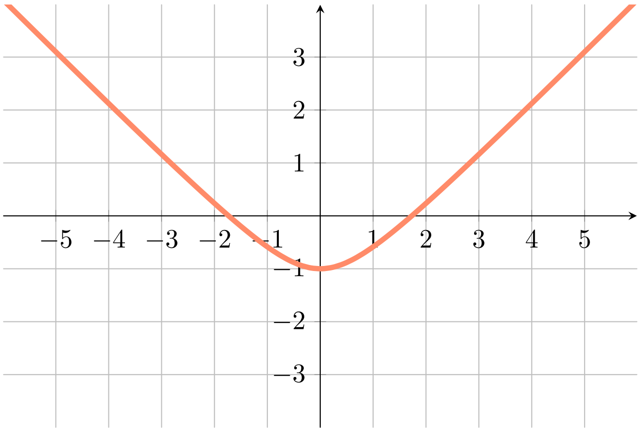
Parité d'une fonction

2 Représenter. Raisonner.

Déterminer si les fonctions suivantes sont paires ou impaires.

/b/ABCD





La fonction est .... La fonction est ....

3 Raisonner.

A partir de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est **paire**.

/b/ABCD

....

....

....

Connaitre et utiliser la fonction Carré

4 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

/b/ABCD

- $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ et π^2

....

....

- $(-11)^2$ et $(-6)^2$

....

....

- -7^2 et -8^2

....

....

....

Raisonner. Calculer.

5

- Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[1; 3]$.

....

....

/b/ABCD

- Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[-1; 4]$.

....

....

....

3 La fonction Cube

Définition 8: Fonction Cube.

La **fonction Cube** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

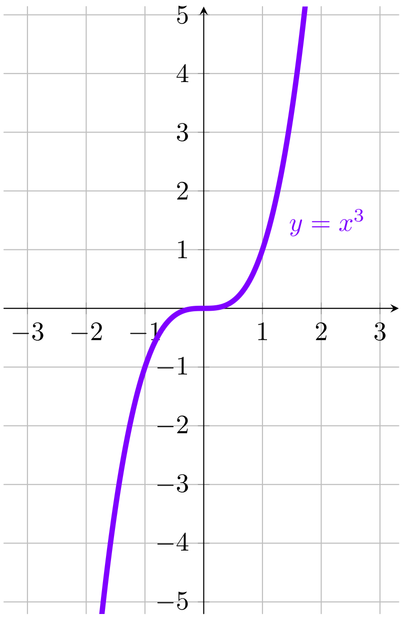
Théorème 9.

La fonction Cube f est impaire.
La courbe d'équation $y = x^3$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Théorème 10: Variations de la fonction Cube.

La fonction Cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	



4 Positions relatives des courbes de x, x^2 et x^3

Propriété 11.

Démonstration exigible

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$.
- Si $x \geqslant 1$ alors $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$

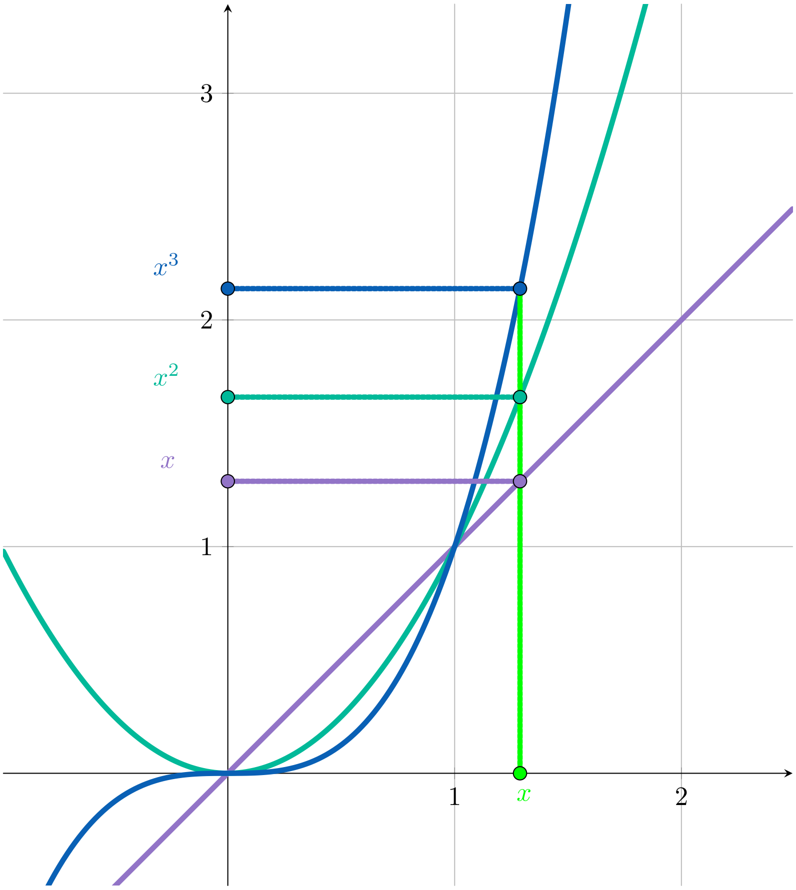
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Preuve : Comparaison de x et x^2 sur $[0;+\infty[$.
Pour les comparer, on étudie le signe de leur différence.
On définit la fonction f par $f(x) = x^2 - x$.
$f(x) = x^2 - x = x(x-1)$
On peut établir le tableau de signes de $f(x)$.
$(E) : f(x) = 0$ alors $S(E) = \{0;1\}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

- $\forall x \in]0;1[, f(x) < 0$ donc $x^2 - x < 0$ donc $x^2 < x$
- $\forall x \in]1;+\infty, f(x) > 0$ donc $x^2 - x > 0$ donc $x^2 > x$



Connaitre et utiliser la fonction Cube

Raisonner.

6 A partir de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^3$ est **impaire**.

/b/ABCD

Raisonner.

7 Comparer sans les calculer.

- $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ et π^3
- $(-5)^3$ et $(-9)^3$

/b/ABCD

Position relatives des courbes

Raisonner. Communiquer.

8 Comparer la position relative des courbes de x^2 et x^3 sur $[0; +\infty]$.

/b/ABCD

Raisonner.

9 Comparer sans les calculer.

- $(\frac{1}{3})^3$ et $(\frac{1}{3})^2$
- $\frac{10}{9}$ et $(\frac{10}{9})^2$

/b/ABCD

5 La fonction Inverse

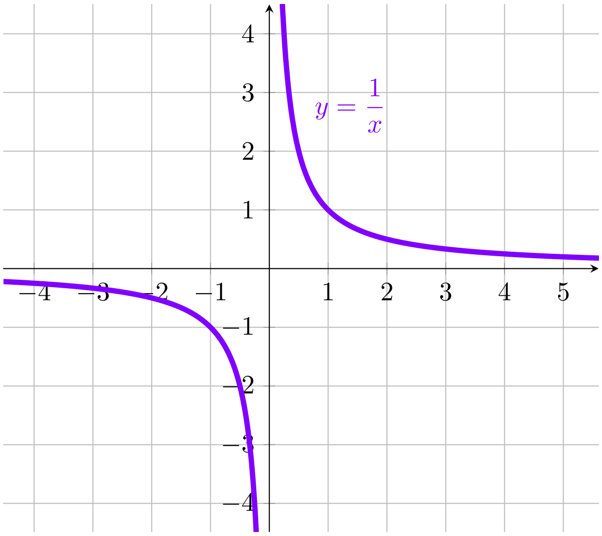
Définition 12: Fonction Inverse.

La **fonction Inverse** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

La **représentation graphique** de la fonction Inverse s'appelle une **hyperbole** et son équation est $y = \dfrac{1}{x}$.

Théorème 13.

La fonction Inverse f est impaire.
La hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Théorème 14: Variations de la fonction Inverse.

Démonstration exigible
La fonction Carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Preuve : Étude des variations $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$.
Soient a et b deux nombres appartenant à $]-\infty; 0[$ tels que $a < b$.
Comparons les images de a et b par la fonction f.
$f(a) = \frac{1}{a}$ et $f(b) = \frac{1}{b}$
Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.
$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$

- a et b appartiennent à $]-\infty; 0[$ donc $ab > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$ donc $b - a > 0$
- $\frac{b-a}{ab} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow f(a) - f(b) > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans l'ordre contraire de celui de ces nombres. La fonction inverse est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$.

6 La fonction Racine carrée

Définition 15: Fonction Racine carrée.

La **fonction Racine carrée** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

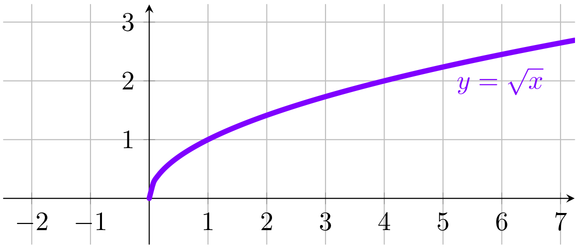
Remarque 16.

L'ensemble de définition de la fonction Racine Carrée n'est pas centré. Donc la fonction Racine carrée n'est ni paire, ni impaire.

Théorème 17: Variations de la fonction Racine Carrée.

Démonstration exigible
La fonction Racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$



Preuve : Etude des variations de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.
Soient a et b deux nombres appartenant à $[0; +\infty[$ tels que $a < b$.
Comparons les images de a et b par la fonction f.
$f(a) = \sqrt{a}$ et $f(b) = \sqrt{b}$
Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.
$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$
- $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < 0 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \Rightarrow f(a) - f(b) < 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans le même ordre que celui de ces nombres. La fonction racine carrée est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

Connaitre et utiliser les fonctions Inverse et Racine Carrée

10 Raisonner.

A partir de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est **impaire.**

/b/ABCD

11 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$
- $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{6}$
- $\sqrt{10}$ et $\sqrt{100}$

/b/ABCD

12 Raisonner.

Expliquer pourquoi la fonction Inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

13 Représenter. Raisonner.

Résoudre graphiquement les équations, puis retrouver les résultats algébriquement.

1. $\frac{1}{x} = 4$
2. $\sqrt{x} = 2$

/b/ABCD

Valider ces résultats par le calcul.

Raisonner. Calculer.

14

/b/ABCD

1. Déterminer algébriquement l'intervalle de $\frac{1}{x}$ lorsque x appartient à $[1;3]$.

   ....

....

....

2. Déterminer algébriquement l'intervalle de $\sqrt{x}$ lorsque x appartient à $[1;2]$.

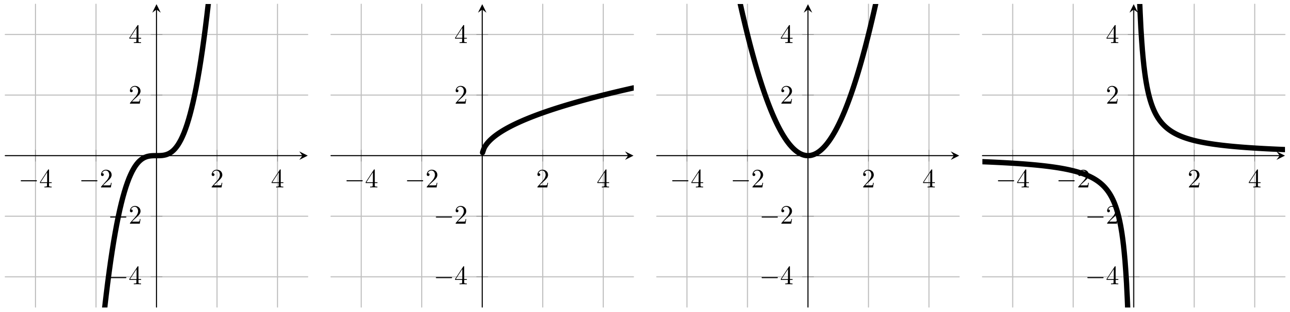
   ....

....

....

Représenter. Raisonner.

15 Associer à chaque représentation la fonction de référence qui lui correspond.



....

Compétence.

16

1. La fonction g est paire et telle que $g(3) = 6$. Quelle est la valeur de $g(-3)$?

   ....

2. La fonction i est impaire et telle que $i(2) = -5$. Quelle est la valeur de $i(-2)$?

   ....

Raisonner. Calculer.

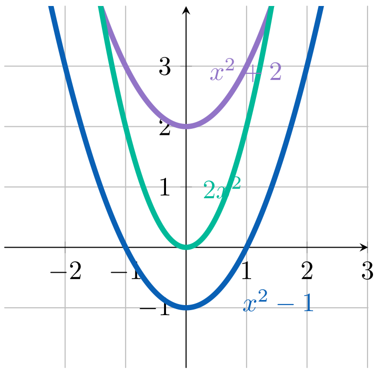
17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 = 6$
2. $x^2 = \frac{5}{3}$
3. $x^2 \leqslant 3$
4. $\frac{1}{x} \geqslant 1$

Compétence.

18 Associer à chaque courbe la fonction qui correspond :

$$f : x \mapsto 2x^2 \quad g : x \mapsto x^2 + 2 \quad h : x \mapsto x^2 - 1$$



Raisonner.

19

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

1. Un nombre et son carré ont toujours le même signe.
2. L'équation $x^2 = k$ a toujours une solution.
3. La fonction $x \mapsto x^2$ sera toujours supérieure à $x \mapsto x^2 - 1$.
4. Si $x \in [0, 1]$ alors $x^2 \in [0, 1]$.

Compétence.

20

Raisonner. Communiquer.

21 Démontrer que $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $[-\infty ; 0[$.

....

....

....

....

....

Raisonner. Communiquer.

22 En utilisant la propriété de parité de la fonction $x \mapsto x^2$, montrer que $2x^2 + 3$ est paire.

....

....

....

Raisonner. Calculer.

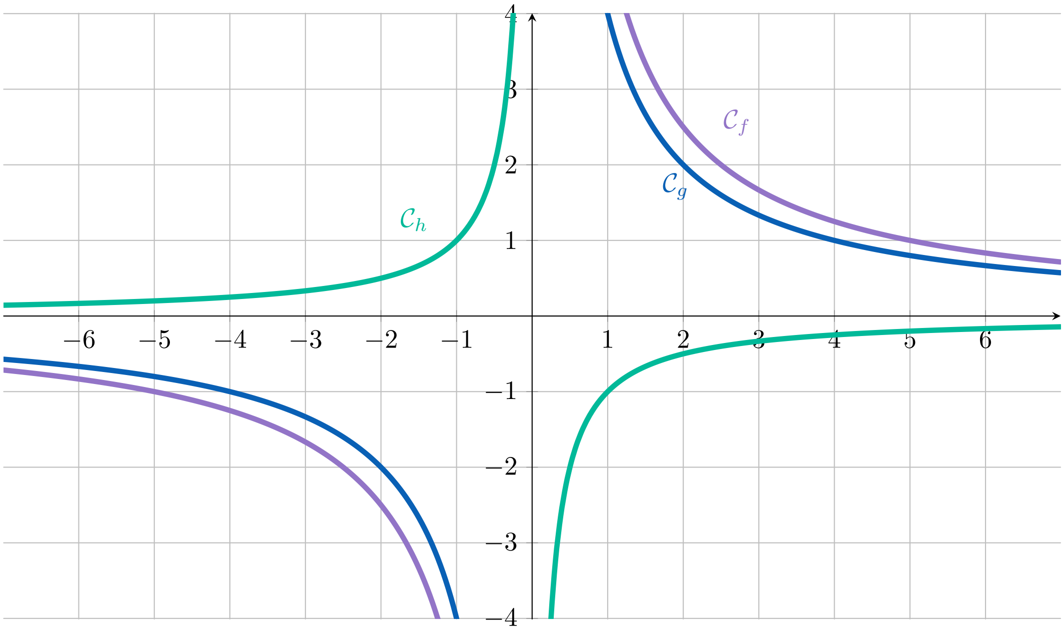
23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 + 3 = 4$
2. $\sqrt{x} = 25$
3. $x^3 \geqslant \frac{8}{27}$
4. $\frac{1}{x} \leqslant 1$

Raisonner.

24 Les hyperboles suivantes correspondent toutes à une fonction ayant la forme $x \mapsto \frac{k}{x}$. Analyser les courbes et identifier les fonctions :

$$f(x) = \frac{\cdots}{x} \qquad g(x) = \frac{\cdots}{x} \qquad h(x) = \frac{\cdots}{x}$$



Raisonner.

25 Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

1. Un nombre et son cube ont toujours le même signe.
2. L'équation $\sqrt{x} = k$ admet toujours une solution.
3. La fonction $x \mapsto x^2$ n'admet pas de maximum.
4. La fonction inverse est décroissante sur $[-1, 1]$.

Compétence.

26

Raisonner.

27

Déterminer la parité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.
La fonction f n'admet pas de valeur interdite car $x^2 + 1 > 0$. Ainsi, elle est définit sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ calculons $f(-x)$:
$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$.
La fonction est paire.

Raisonner. Calculer

28

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $4x^2 + 3 = 8$
2. $2\sqrt{x} = 72$
3. $x^3 + 2 \leqslant 10$
4. $\frac{1}{x} - 1 \leqslant -2$

Raisonner. Communiquer.

29

Sachant que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, montrer que $f : x \mapsto x^3$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

....

....

....

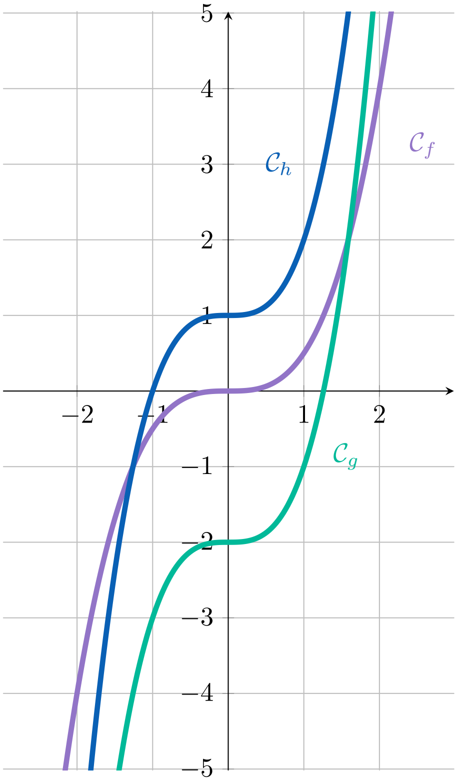
....

....

Raisonner.

30 Les courbes suivantes correspondent toutes à une fonction cubique, retrouver leur expressions.

$f(x) = \dots\dots\dots$ $g(x) = \dots\dots\dots$ $h(x) = \dots\dots\dots$

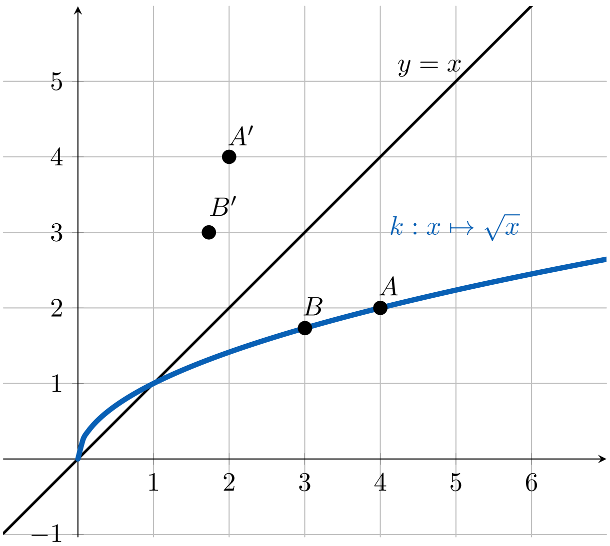


Compétence.

31

Les courbes de la fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et de la fonction linéaire $y = x$ sont représentées sur le graphique suivant. Les points A et A' sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite $y = x$

1. Donner les coordonnées des points A et A' : $A(4;2) \quad A'(2;4)$.
2. Le point B a pour coordonnées $B(3;1,73)$ sachant que l'ordonnée est approximative, quelle est son ordonnée exacte ? Expliquer.
   B est un point de $\mathcal{C}_k$ son ordonnée est donc $f(3) = \sqrt{3} \approx 1,73$.
3. Déterminer les coordonnées exactes du point B' symétrique du point B par rapport à la droite $y = x$: $B'(\sqrt{3};3)$. Placer ce point sur le graphique.
4. Quelle relation existe-t-il entre les coordonnées de A et A', B et B' ?
   L'abscisse de A est l'ordonnée de A' et vice versa, de même que pour B et B'.
5. Conjecturer de quelle fonction est la courbe symétrique de $\mathcal{C}_k$ par rapport à la droite $y = x$. On l'appellera m.
   La fonction dont la courbe est symétrique à $\mathcal{C}_k$ par rapport à $y = x$ semble être la fonction $x \mapsto x^2$. En effet, $A'(2;2^2)$ et $B'(\sqrt{3};\sqrt{3}^2)$.
6. On dit que ces fonctions sont réciproques. Pour démontrer que deux fonctions f et g sont réciproques on montre que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Démontrer la conjecture.
   1. Montrons que $m(k(x)) = x$:
   - $m(x) = x^2$ signifie que vous prenez un nombre x, le multipliez par lui-même, ce qui revient à élever x au carré.
   - $k(x) = \sqrt{x}$ signifie que vous prenez la racine carrée de x, c'est-à-dire trouver un nombre qui, lorsqu'il est multiplié par lui-même, donne x.
   Maintenant, si nous prenons x, trouvons d'abord sa racine carrée en utilisant $g(x)$, puis élevons cette racine carrée au carré en utilisant $f(x)$, nous obtenons le même x de départ.
   Donc, $m(k(x)) = x$ pour tous les x réels.
   2. Montrons que $k(m(x)) = x$:
   - Avec $k(m(x))$, vous prenez d'abord x, l'élevez au carré en utilisant $m(x)$ pour obtenir x^2.
   - Ensuite, vous prenez la racine carrée de x^2 en utilisant $k(x)$, ce qui vous donne x.
   Donc, pour tous les x réels, $m(x) = x^2$ est bien la fonction réciproque de $k(x) = \sqrt{x}$.



Compétence.

32

Enoncé	A	B	C
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$, sachant que $f(a) = -7,54$ que vaut $f(-a)$?	$f(-a) = -7,54$	$f(-a) = 7,54$	On ne peut pas savoir
La fonction g est telle que $g(5) = g(-5)$	La fonction est paire.	La fonction est impaire.	On ne peut pas conclure quand à sa parité.
Soit la fonction est $f(x) = 4x^2 + 5$ qu'elle est la parité de la fonction ?	La fonction est paire.	La fonction est impaire.	On ne peut pas savoir.
Soient la fonction $f : x \mapsto x^2$ et deux nombres a et b appartenant à $]-\infty; 0]$ tel que $a < b$. Que peut-on dire de $f(a)$ et $f(b)$?	$f(a) < f(b)$	$f(a) = f(b)$	$f(a) > f(b)$
Soient la fonction $g : x \mapsto x^3$ et deux nombres a et b appartenant à $]-\infty; 0]$ tel que $a < b$. Que peut-on dire de $g(a)$ et $g(b)$?	$g(a) < g(b)$	$g(a) = g(b)$	$g(a) > g(b)$
Soient deux nombres a et b tel que $a < b < 1$. Quelle inégalité est vraie ?	$a^2 < b^3$	$a^2 > b^3$	$a < b^2$
Soient deux nombres a et b tel que $1 < a < b$. Quelle inégalité est vraie ?	$a^2 < b^3$	$a^2 > b^3$	$a > b^2$
La solution de l'équation $(E) : x^2 + 6 = -3$.	$x = 3$	$x = -3$	Il n'y a pas de solution.
La solution de l'équation $(E) : 7\sqrt{x} + 4 = 256$.	$x = 6$	$x = -6$	Il n'y a pas de solution.
La solution de l'inéquation $(I) : x^2 < 5$.	$x \in]-\infty; +\infty[$	$x \in]-\sqrt{5}; +\sqrt{5}[$	$x \in [-\sqrt{5}; +\sqrt{5}]$
La solution de l'inéquation $(I) : \frac{-2}{x} - 3 \geqslant \frac{-17}{5}$.	$x \in]-\infty; 0[\cup[5; +\infty[$	$x \in]-5; 0[$	$x \in]0; 5]$

Compétence.

33

Compétence.

34

/b/ABCD