

Fonctions de référence

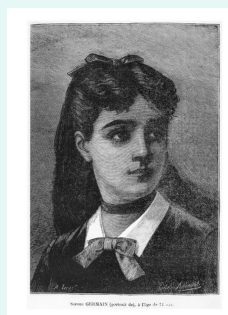


Les savoir-faire du parcours

- Savoir étudier la parité d'une fonction.
- Savoir déterminer graphiquement la parité d'une fonction.
- Savoir étudier les variations de la fonction carré.
- Savoir comparer des images par la fonction carré.
- Savoir résoudre une équation, inéquation avec la fonction carré.
- Savoir étudier les variations de la fonction cube.
- Savoir comparer des images par la fonction cube.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction cube.
- Savoir étudier les variations de la fonction inverse.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction inverse.
- Savoir étudier les variations de la fonction racine carrée.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction racine carrée.
- Savoir reconnaître une fonction de référence.

Les mathématiciennes et mathématiciens

Sophie Germain (1776-1831) était une mathématicienne française pionnière du XIXe siècle. Malgré les obstacles dus à sa condition de femme, elle a contribué de manière significative à la théorie des nombres et à la théorie des équations diophantiennes. Elle a utilisé un pseudonyme masculin pour correspondre avec d'autres mathématiciens, dont Carl Friedrich Gauss, et a été la première femme à recevoir la médaille de l'Académie des Sciences de Paris. Ses travaux ont jeté les bases de la théorie des nombres modernes.





--

1 Fonctions paires, fonctions impaires

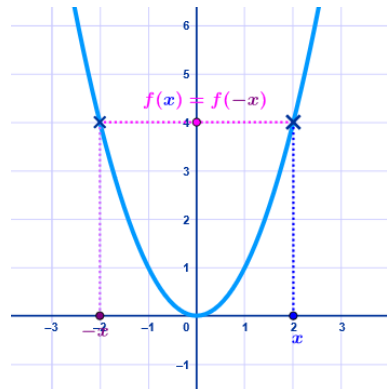
Définition 1: Fonction paire.

On dit qu'une fonction f est **paire** si :

- $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$

Remarque 2.

La **courbe représentative** d'une fonction pair est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.



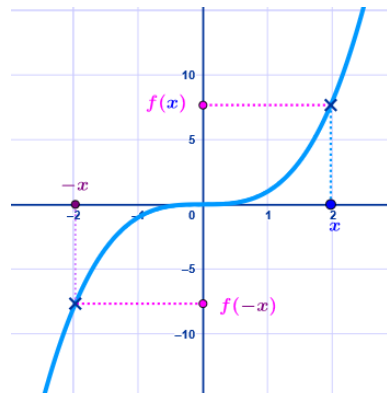
Définition 3: Fonction impaire.

On dit qu'une fonction f est **impaire** si :

- $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

Remarque 4.

La **courbe représentative** d'une fonction pair est **symétrique** par rapport à l'**origine du repère**.



2 La fonction Carré

Définition 5: Fonction Carré.

La **fonction Carré** f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

La **représentation graphique** de la fonction Carré s'appelle une **parabole** et son équation est $y = x^2$.

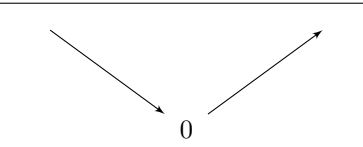
Théorème 6.

La fonction Carré f est paire.

La parabole d'équation $y = x^2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorème 7: Variations de la fonction Carré.**Démonstration exigible**

La fonction Carré est strictement décroissante sur \mathbb{R}^- et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			

Preuve : Etude des variations de $f : x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$:

Soient a et b deux nombres appartenant à $[0; +\infty[$ tels que $a < b$.

Comparons les images de a et b par la fonction f .

$$f(a) = a^2 \text{ et } f(b) = b^2$$

Pour les comparer on étudie le signe de leur différence :

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- a et b appartiennent à $[0; +\infty[$ donc $a + b > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$
- $(a + b)(a - b) < 0 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0 \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) < f(b)$

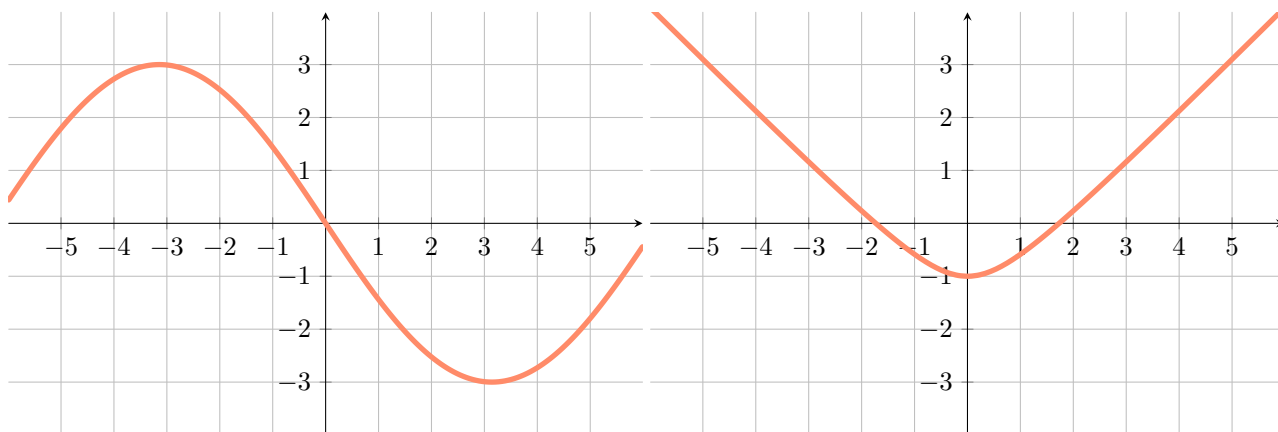
Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans le même ordre que ces nombres. La fonction est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

Parité d'une fonction

Représenter. Raisonner.

2

Déterminer si les fonctions suivantes sont paires ou impaires.



/b/ABCD

La fonction est La fonction est

Raisonner.

3

A partir de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est **paire**.

.....



/b/ABCD

Connaitre et utiliser la fonction Carré

Raisonner.

4

Comparer sans les calculer.

• $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ et π^2

.....

• $(-11)^2$ et $(-6)^2$

.....

• -7^2 et -8^2

.....



/b/ABCD

5

- Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[1; 3]$.

- Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[-1; 4]$.



/b/ABCD

3

La fonction Cube

Définition 8: Fonction Cube.

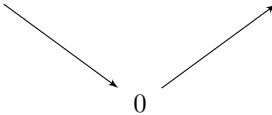
La **fonction Cube** f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

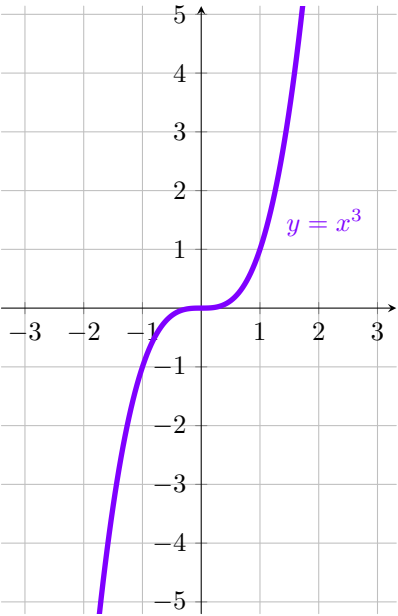
Théorème 9.

La fonction Cube f est impaire.
La courbe d'équation $y = x^3$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Théorème 10: Variations de la fonction Cube.

La fonction Cube est strictement croissante sur \mathbb{R}^- et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			



4

Positions relatives des courbes de x , x^2 et x^3

Propriété 11.

Démonstration exigible

- Si $0 \leq x \leq 1$ alors $x \geq x^2 \geq x^3$.
- Si $x \geq 1$ alors $x \leq x^2 \leq x^3$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$		0	$+$
$f(x)$	$+$	0	0	$+$

Preuve : Comparaison de x et x^2 sur $[0; +\infty[$.

Pour les comparer, on étudie le signe de leur différence.

On définit la fonction f par $f(x) = x^2 - x$.

$$f(x) = x^2 - x = x(x - 1)$$

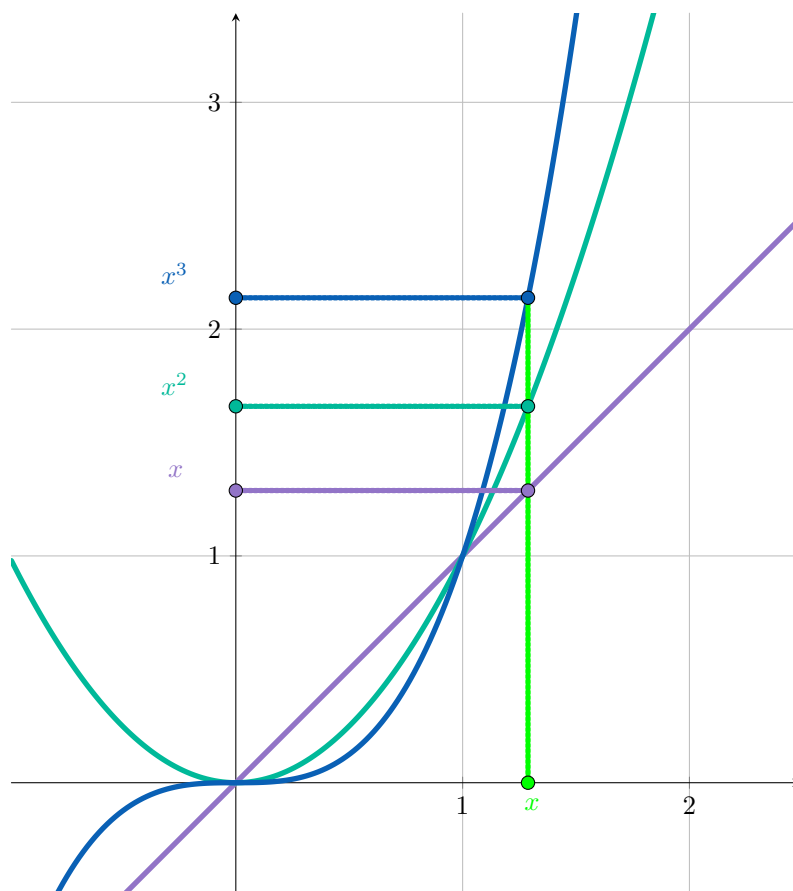
On peut établir le tableau de signes de $f(x)$.

$(E) : f(x) = 0$ alors $S(E) = \{0; 1\}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
x	$-$	0	$+$	$+$	
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi :

- $\forall x \in]0; 1[, f(x) < 0$ donc $x^2 - x < 0$ donc $x^2 < x$
- $\forall x \in]1; +\infty[, f(x) > 0$ donc $x^2 - x > 0$ donc $x^2 > x$



Connaitre et utiliser la fonction Cube

6

Raisonner.

A partir de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^3$ est **impaire**.

.....

.....

.....



/b/ABCD

7

Raisonner.

Comparer sans les calculer.

• $(\frac{1}{5})^3$ et π^3

.....

.....

• $(-5)^3$ et $(-9)^3$

.....

.....



/b/ABCD

Position relatives des courbes

8

Raisonner. Communiquer.

Comparer la position relative des courbes de x^2 et x^3 sur $[0; +\infty[$.

.....

.....

.....

.....

.....



/b/ABCD

9

Raisonner.

Comparer sans les calculer.

• $(\frac{1}{3})^3$ et $(\frac{1}{3})^2$

.....

.....

• $\frac{10}{9}$ et $(\frac{10}{9})^2$

.....

.....



/b/ABCD

5

La fonction Inverse

Définition 12: Fonction Inverse.

La **fonction Inverse** f est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$.

La **représentation graphique** de la fonction Inverse s'appelle une **hyperbole** et son équation est $y = \frac{1}{x}$.

Théorème 13.

La fonction Inverse f est impaire.

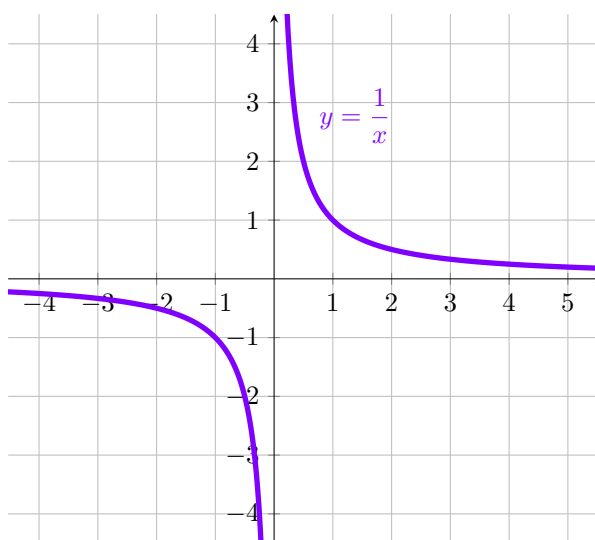
La hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Théorème 14: Variations de la fonction Inverse.

Démonstration exigible

La fonction Carré est strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0		0



Preuve : Étude des variations $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $] -\infty; 0[$.

Soient a et b deux nombres appartenant à $] -\infty; 0[$ tels que $a < b$.

Comparons les images de a et b par la fonction f .

$$f(a) = \frac{1}{a} \text{ et } f(b) = \frac{1}{b}$$

Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$$

- a et b appartiennent à $] -\infty; 0[$ donc $ab > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$ donc $b - a > 0$
- $\frac{b-a}{ab} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow f(a) - f(b) > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans l'ordre contraire de celui de ces nombres. La fonction inverse est donc décroissante sur $] -\infty; 0[$.

6

La fonction Racine carrée

Définition 15: Fonction Racine carrée.

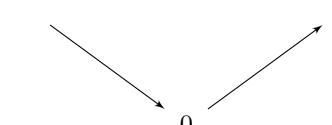
La **fonction Racine carrée** f est la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \sqrt{x}$.

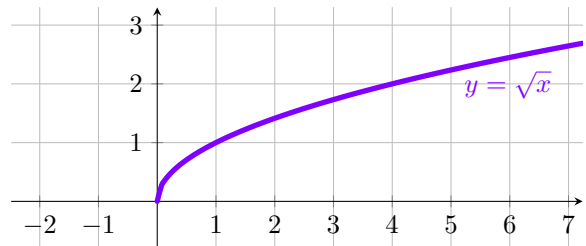
Remarque 16.

L'ensemble de définition de la fonction Racine Carrée n'est pas centré. Donc la fonction Racine carrée n'est ni paire, ni impaire.

Théorème 17: Variations de la fonction Racine Carrée.**Démonstration exigible**

La fonction Racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			



Preuve : Etude des variations de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

Soient a et b deux nombres appartenant à $[0; +\infty[$ tels que $a < b$.

Comparons les images de a et b par la fonction f .

$$f(a) = \sqrt{a} \text{ et } f(b) = \sqrt{b}$$

Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$
- $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < 0 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \Rightarrow f(a) - f(b) < 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans le même ordre que celui de ces nombres. La fonction racine carrée est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

Connaitre et utiliser les fonctions Inverse et Racine Carrée

Raisonner.

10

A partir de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est **impaire**.



/b/ABCD

Raisonner.

11

Comparer sans les calculer.

• $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$



/b/ABCD

• $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{6}$

• $\sqrt{10}$ et $\sqrt{100}$

Raisonner.

12

Expliquer pourquoi la fonction Inverse n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* .

Représenter. Raisonner.

13

Résoudre graphiquement les équations, puis retrouver les résultats algébriquement.

1. $\frac{1}{x} = 4$



/b/ABCD

2. $\sqrt{x} = 2$

Valider ces résultats par le calcul.



/b/ABCD

14

1. Déterminer algébriquement l'intervalle de $\frac{1}{x}$ lorsque x appartient à $[1; 3]$.

.....

.....

.....

2. Déterminer algébriquement l'intervalle de \sqrt{x} lorsque x appartient à $[1; 2]$.

.....

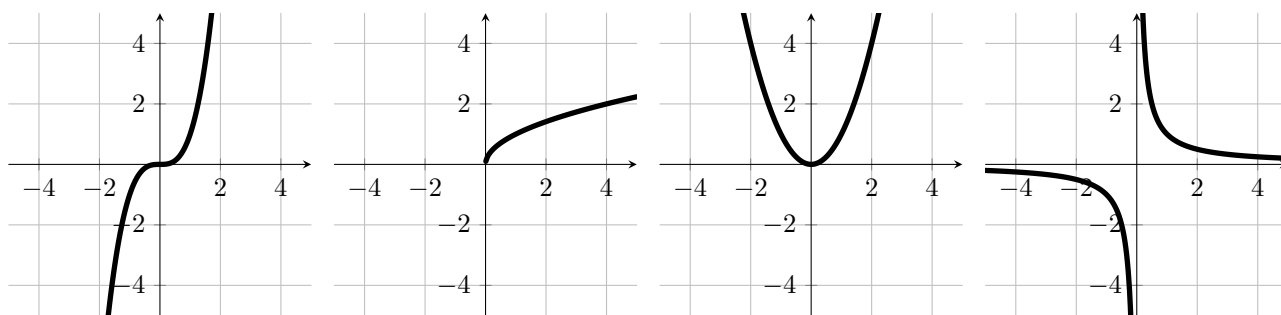
.....

.....

Représenter. Raisonner.

15

Associer à chaque représentation la fonction de référence qui lui correspond.



Compétence.

16

1. La fonction g est paire et telle que $g(3) = 6$. Quelle est la valeur de $g(-3)$?

.....

2. La fonction i est impaire et telle que $i(2) = -5$. Quelle est la valeur de $i(-2)$?

.....

Raisonner. Calculer.

17

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 = 6$

2. $x^2 = \frac{5}{3}$

3. $x^2 \leq 3$

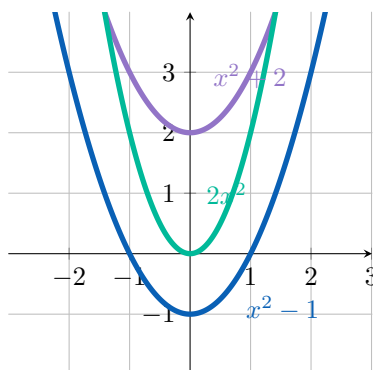
4. $\frac{1}{x} \geq 1$

Compétence.

18

Associer à chaque courbe la fonction qui correspond :

$f : x \mapsto 2x^2$ $g : x \mapsto x^2 + 2$ $h : x \mapsto x^2 - 1$



Raisonner.

19



Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

1. Un nombre et son carré ont toujours le même signe.
2. L'équation $x^2 = k$ a toujours une solution.
3. La fonction $x \mapsto x^2$ sera toujours supérieure à $x \mapsto x^2 - 1$.
4. Si $x \in [0, 1]$ alors $x^2 \in [0, 1]$.

Compétence.

20



Raisonner. Communiquer.

21

Démontrer que $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $[-\infty; 0[$.

.....

.....

.....

.....

.....

Raisonner. Communiquer.

22

En utilisant la propriété de parité de la fonction $x \mapsto x^2$, montrer que $2x^2 + 3$ est paire.

.....

.....

.....

Raisonner. Calculer.

23

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

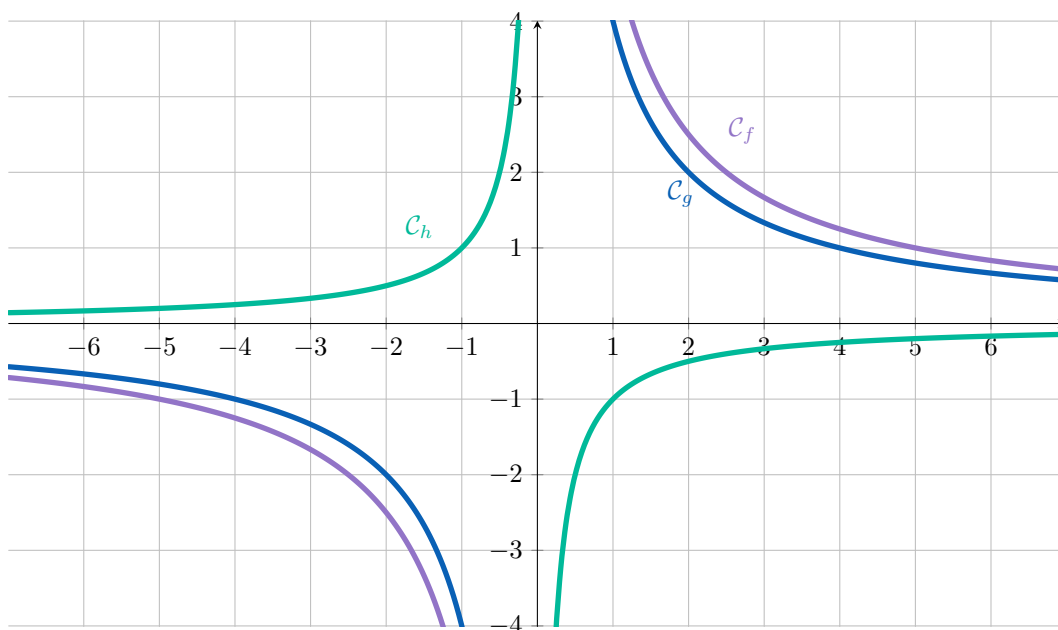
1. $x^2 + 3 = 4$
2. $\sqrt{x} = 25$
3. $x^3 \geq \frac{8}{27}$
4. $\frac{1}{x} \leq 1$

Raisonner.

24

Les hyperboles suivantes correspondent toutes à une fonction ayant la forme $x \mapsto \frac{k}{x}$. Analyser les courbes et identifier les fonctions :

$$f(x) = \frac{\dots}{x} \quad g(x) = \frac{\dots}{x} \quad h(x) = \frac{\dots}{x}$$



Raisonner.

25

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

1. Un nombre et son cube ont toujours le même signe.
2. L'équation $\sqrt{x} = k$ admet toujours une solution.
3. La fonction $x \mapsto x^2$ n'admet pas de maximum.
4. La fonction inverse est décroissante sur $[-1, 1]$.

Compétence.

26



Raisonner.

27



Déterminer la parité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

La fonction f n'admet pas de valeur interdite car $x^2 + 1 > 0$. Ainsi, elle est définie sur \mathbb{R} .

Pour $x \in \mathbb{R}$ calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x).$$

La fonction est paire.

Raisonner. Calculer.

28



Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $4x^2 + 3 = 8$

2. $2\sqrt{x} = 72$

3. $x^3 + 2 \leq 10$

4. $\frac{1}{x} - 1 \leq -2$

Raisonner. Communiquer.

29



Sachant que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, montrer que $f : x \mapsto x^3$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

.....

.....

.....

.....

.....

30

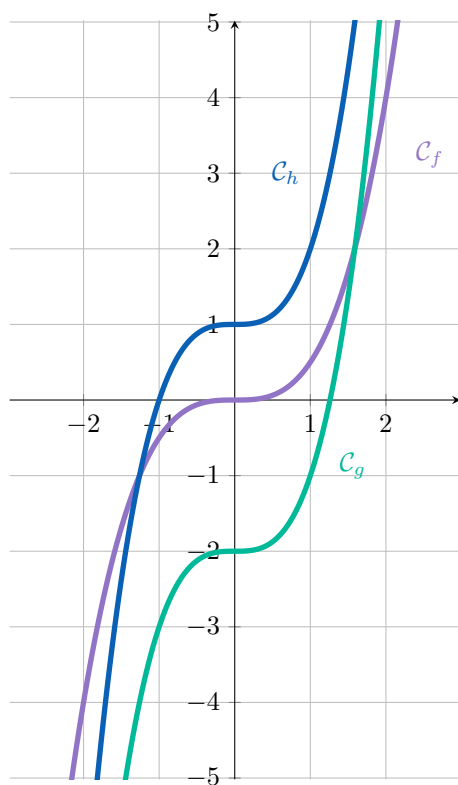
Les courbes suivantes correspondent toutes à une fonction cubique, retrouver leur expressions.



$f(x) = \dots\dots\dots$

$g(x) = \dots\dots\dots$

$h(x) = \dots\dots\dots$



31



Les courbes de la fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et de la fonction linéaire $y = x$ sont représentées sur le graphique suivant. Les points A et A' sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite $y = x$

1. Donner les coordonnées des points A et $A' : A(4; 2) \quad A'(2; 4)$.
2. Le point B a pour coordonnées $B(3; 1,73)$ sachant que l'ordonnée est approximative, quelle est son ordonnée exacte ? Expliquer.
 B est un point de \mathcal{C}_k son ordonnée est donc $f(3) = \sqrt{3} \approx 1,73$.
3. Déterminer les coordonnées exactes du point B' symétrique du point B par rapport à la droite $y = x : B'(\sqrt{3}; 3)$. Placer ce point sur le graphique.
4. Quelle relation existe-t-il entre les coordonnées de A et A' , B et B' ?
 L'abscisse de A est l'ordonnée de A' et vice versa, de même que pour B et B' .
5. Conjecturer de quelle fonction est la courbe symétrique de \mathcal{C}_k par rapport à la droite $y = x$. On l'appellera m .
 La fonction dont la courbe est symétrique à \mathcal{C}_k par rapport à $y = x$ semble être la fonction $x \mapsto x^2$. En effet, $A'(2; 2^2)$ et $B'(\sqrt{3}; \sqrt{3}^2)$.
6. On dit que ces fonctions sont réciproques. Pour démontrer que deux fonctions f et g sont réciproques on montre que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Démontrer la conjecture.

1. Montrons que $m(k(x)) = x$:

- $m(x) = x^2$ signifie que vous prenez un nombre x , le multipliez par lui-même, ce qui revient à élever x au carré.
- $k(x) = \sqrt{x}$ signifie que vous prenez la racine carrée de x , c'est-à-dire trouver un nombre qui, lorsqu'il est multiplié par lui-même, donne x .

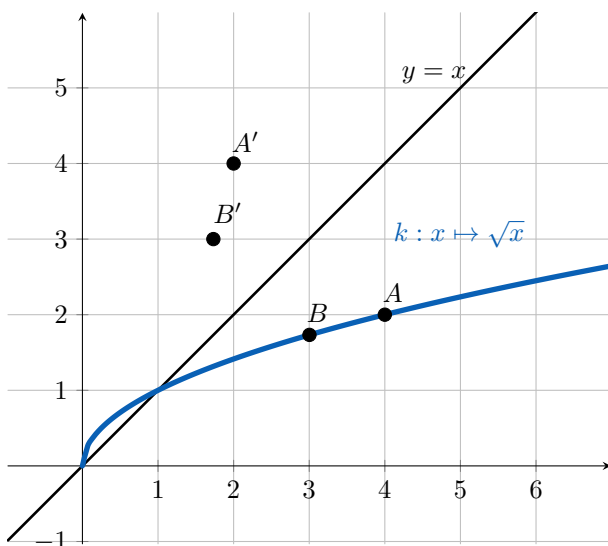
Maintenant, si nous prenons x , trouvons d'abord sa racine carrée en utilisant $g(x)$, puis élevons cette racine carrée au carré en utilisant $f(x)$, nous obtenons le même x de départ.

Donc, $m(k(x)) = x$ pour tous les x réels.

2. Montrons que $k(m(x)) = x$:

- Avec $k(m(x))$, vous prenez d'abord x , l'élevez au carré en utilisant $m(x)$ pour obtenir x^2 .
- Ensuite, vous prenez la racine carrée de x^2 en utilisant $k(x)$, ce qui vous donne x .

Donc, pour tous les x réels, $m(x) = x^2$ est bien la fonction réciproque de $k(x) = \sqrt{x}$.





Enoncé	A	B	C
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$, sachant que $f(a) = -7,54$ que vaut $f(-a)$?	$f(-a) = -7,54$	$f(-a) = 7,54$	On ne peut pas savoir
La fonction g est telle que $g(5) = g(-5)$	La fonction est paire.	La fonction est impaire.	On ne peut pas conclure quand à sa parité.
Soit la fonction est $f(x) = 4x^2 + 5$ qu'elle est la parité de la fonction ?	La fonction est paire.	La fonction est impaire.	On ne peut pas savoir.
Soient la fonction $f : x \mapsto x^2$ et deux nombres a et b appartenant à $] -\infty; 0]$ tel que $a < b$. Que peut-on dire de $f(a)$ et $f(b)$?	$f(a) < f(b)$	$f(a) = f(b)$	$f(a) > f(b)$
Soient la fonction $g : x \mapsto x^3$ et deux nombres a et b appartenant à $] -\infty; 0]$ tel que $a < b$. Que peut-on dire de $g(a)$ et $g(b)$?	$g(a) < g(b)$	$g(a) = g(b)$	$g(a) > g(b)$
Soient deux nombres a et b tel que $a < b < 1$. Quelle inégalité est vraie ?	$a^2 < b^3$	$a^2 > b^3$	$a < b^2$
Soient deux nombres a et b tel que $1 < a < b$. Quelle inégalité est vraie ?	$a^2 < b^3$	$a^2 > b^3$	$a > b^2$
La ou Les solution(s) de l'équation (E) : $x^2 + 6 = -3$.	$x = 3$	$x = -3$	Il n'y a pas de solution.
La ou Les solution(s) de l'équation (E) : $7\sqrt{x} + 4 = 256$.	$x = 6$	$x = -6$	Il n'y a pas de solution.
La ou Les solution(s) de l'inéquation (I) : $x^2 < 5$.	$x \in] -\infty; +\infty[$	$x \in] -\sqrt{5}; +\sqrt{5}[$	$x \in [-\sqrt{5}; +\sqrt{5}]$
La ou Les solution(s) de l'inéquation (I) : $\frac{-2}{x} - 3 \geq \frac{-17}{5}$.	$x \in] -\infty; 0[\cup [5; +\infty[$	$x \in] -5; 0[$	$x \in]0; 5]$

Compétence.

33



Compétence.

34



/b/ABCD