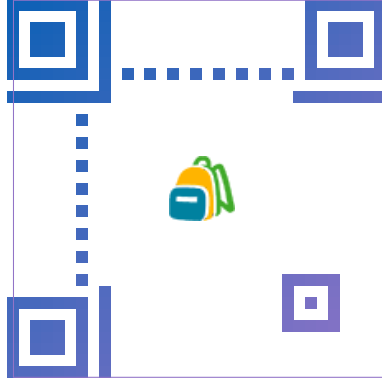


# Mathématiques 3<sup>e</sup> : le livre sacado

L'équipe SACADO

3 septembre 2023

# Arithmétique



## Les savoir-faire du parcours

- Utiliser des nombres pour calculer et résoudre des problèmes
- Connaître les bases de l'arithmétique
- Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

### Les mathématiciennes et mathématiciens

L'arithmétique est une branche des mathématiques qui correspond à la science des nombres. De nombreux nombres entiers ont des propriétés particulières. Ces propriétés font l'objet de la théorie des nombres. Parmi ces nombres particuliers, les nombres premiers sont sans doute les plus importants. On connaît aussi les nombres pairs et les nombres impairs.

Chercher.

1



Pour fêter les 25 ans de sa boutique, un chocolatier souhaite offrir aux premiers clients de la journée une boîte contenant des truffes au chocolat. Il a confectionné 300 truffes : 125 truffes parfumées au café et 175 truffes enrobées de noix de coco. Combien y aura-t-il de truffes de chaque sorte dans chaque boîte ?



# 1 Nombre premier

## Définition 1: Nombre premier.

Un **nombre premier** est un nombre entier supérieur à 2 avec exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.

# 2 Décomposition en produit de facteurs premiers.

## Définition 2: Décomposition.

Tout nombre se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.

## Exemple 3.

La décomposition du nombre 18 est  $2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$ . On écrit :  $18 = 2 \times 3^2$ .

# 3 Diviseurs communs

## Méthode 4. Recherche des diviseurs communs

Pour déterminer les diviseurs communs de deux nombres,

1. On écrit les **diviseurs** de chaque nombre.
2. On récupère les diviseurs **communs** aux 2 nombres.

## Méthode 5. Recherche du pgcd

Pour déterminer le plus grand diviseur commun de deux nombres,

1. Méthode 8
2. On garde le **plus grand** nombre parmi les diviseurs communs.

## Exemple 6.

On cherche les diviseurs communs de 12 et de 18.

$12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$ . Les diviseurs de 12 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12

$18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$ . Les diviseurs de 18 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18

Les diviseurs communs sont 1 ; 2 ; 3 ; 6

# 4 Fractions irréductibles

## Définition 7: Fraction irréductible.

Une fraction est dite **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

## Méthode 8. Rendre une fraction irréductible

Déterminer la fraction  $A = \frac{1575}{2550}$  irréductible.

1. On détermine les diviseurs du numérateur et du dénominateur

$$1575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$$

$$2550 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 17$$

2. On détermine le pgcd du numérateur et du dénominateur  
Le pgcd de 1575 et 2550 est  $3 \times 5^2 = 75$

3. On décompose la fraction

$$A = \frac{1575}{2550} = \frac{3 \times 75 \times 7}{2 \times 75 \times 17}$$

4. On simplifie la fraction  $A = \frac{3 \times 7}{2 \times 17} = \frac{21}{34}$



## Connaitre les nombres premiers

- 2 Donner trois nombres premiers plus petits que 40.

..... — ..... — .....

Communiquer.



/b/ABCD

- 3 51 est-il un nombre premier ? .....

.....  
.....

Calculer.



/b/ABCD

## Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.

- 4 Quel nombre se cache sous cette décomposition en facteurs premiers  $2^3 \times 5 \times 7^2 \times 11$  ?

.....

Calculer.



/b/ABCD

- 5 Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers.

1.  $6 =$  .....

2.  $90 =$  .....

3.  $720 =$  .....

Calculer.



/b/ABCD

## Déterminer les diviseurs communs

- 6 Déterminer les diviseurs communs de 50 et 70

.....  
.....  
.....

Calculer.



/b/ABCD

## Rendre une fraction irréductible

Simplifie la fraction  $\frac{735}{840}$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

Simplifie la fraction  $\frac{135}{315}$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

Calculer.



/b/ABCD



Représenter. Calculer.

8

Marcel a trouvé la décomposition de 180 et a donné le produit suivant :  $180 = 2^2 \times 5 \times 9$ . Qu'en penses-tu ? .....

.....



/b/ABCD

Représenter.

9

1. Décomposer 36 en produit de facteurs premiers. ....

.....

2. Décomposer 45 en produit de facteurs premiers. ....

.....

3. Décomposer 126 en produit de facteurs premiers. ....

.....

4. Décomposer 256 en produit de facteurs premiers. ....

.....

Représenter.

10

Déterminer le pgcd de 252 et 288. ....

.....

.....

.....

.....

.....

Raisonner.

11



1. Simplifier la fraction  $\frac{126}{168}$ . ....

.....

.....

2. Simplifier la fraction  $\frac{435}{135}$ . ....

.....

.....

3. Simplifier la fraction  $\frac{378}{540}$ . ....

.....

.....

.....



/b/ABCD



DNB 2023 - Représenter. Calculer.

12



Un professionnel et un amateur vont faire une séance de karting sur la piste. Ils partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours de circuit. Le professionnel effectue un tour en 60 s et l'amateur en 72 s.

1. Décomposer 60 et 72 en produit de facteurs premiers. ....

.....

.....

2. Au bout de combien de temps se retrouveront-ils pour la première fois sur la ligne de départ ensemble ? .....

.....

.....

3. Combien auront-ils alors effectué de tours chacun ? .....

.....

.....



/b/ABCD

13



Pour constituer des lots d'une tombolas, on dispose de 195 figurines et 234 autocollants. Chaque lot sera composé de figurines ainsi que d'autocollants. Tous les lots sont identiques. Toutes les figurines et tous les autocollants doivent être utilisés.

1. Peut-on faire 3 lots ? .....

.....

2. Décomposer 195 en produit de facteurs premiers. ....

.....

3. Sachant que la décomposition en produit de facteurs premiers de 234 est  $2 \times 3^2 \times 13$  :

(a) Combien de lots peut-on constituer au maximum ? .....

.....

.....

(b) De combien de figurines et d'autocollants sera alors composé chaque lot ? .....

.....

.....



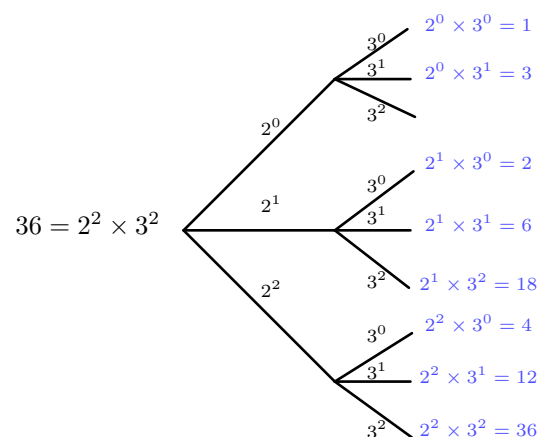
/b/ABCD

Représenter. Calculer.

Pour déterminer tous les diviseurs d'un nombre, on utilise un arbre de diviseurs. C'est une représentation qui propose tous les calculs possibles avec les facteurs premiers du nombre.

On donne en exemple l'arbre de diviseurs de 36.

Construire l'arbre des diviseurs de 20.



/b/ABCD

14





Chercher. Raisonner.

15



Pour déterminer le PGCD de deux nombres  $a$  et  $b$ ,  $a > b$ , on effectue la division euclidienne de  $a$  par  $b$ . On appelle  $r_0$  le reste.

Puis on divise  $b$  par  $r_0$  et on appelle  $r_1$  le reste.

On divise alors  $r_0$  par  $r_1$  et on appelle  $r_2$  le reste.

On divise alors  $r_1$  par  $r_2$  et on appelle  $r_3$  le reste. Et ainsi de suite.

Le PGCD de  $a$  et de  $b$  est alors le dernier reste non nul. On appelle ce procédé, la méthode par divisions successives.

1. Déterminer à l'aide de ce procédé le PGCD de 2622 et de 2530.

2. Imaginer un algorithme qui détermine le pgcd selon la méthode des divisions successives. ....

.....

.....

.....

.....

.....

16



Je suis un nombre à trois chiffres non nuls. Je suis divisible par 94. Changez l'ordre de mes chiffres et je deviens divisible par 49. Qui suis-je ? .....

.....

.....

.....

.....

Chercher.



/b/ABCD

17



### Le crible d'Eratosthène

L'algorithme procède par élimination : il s'agit de supprimer d'une table d'entiers tous les multiples d'un entier  $n$  (autres que lui-même).

En supprimant tous ces multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier à part 1 et eux-mêmes, et qui sont donc les nombres premiers.

On commence par rayer les multiples de 2, puis les multiples de 3 restants, puis les multiples de 5 restants, et ainsi de suite en rayant à chaque fois tous les multiples du plus petit entier restant.

1. Faire fonctionner le crible sur la table ci-contre.

2. Écrire un algorithme de ce crible. ....

.....

.....

.....

.....

|    |    | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 |
| 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 |
| 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 |
| 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 |
| 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 |

Raisonner.



/b/ABCD



Raisonner.

18



/b/ABCD

1. Décomposer 186 et 155 en produit de facteurs premiers. ....  
.....  
.....
2. Déterminer le PGCD de 186 et 155. ....  
.....  
.....
3. Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats. Les colis sont constitués ainsi :
  - Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
  - Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
  - Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.
  - (a) Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ? .....  
.....  
.....
  - (b) Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis. ....  
.....  
.....

19



DNB Métropole 2022 - Raisonner.



/b/ABCD

Une collectionneuse compte ses cartes Pokémon afin de les revendre. Elle possède 252 cartes de type « feu » et 156 cartes de type « terre ».

1. (a) Parmi les trois propositions suivantes, laquelle correspond à la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 252 :

| Proposition 1           | Proposition 2                   | Proposition 3             |
|-------------------------|---------------------------------|---------------------------|
| $2^2 \times 9 \times 7$ | $2 \times 2 \times 3 \times 21$ | $2^2 \times 3^2 \times 7$ |

- (b) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 156. ....  
.....  
.....

2. Elle veut réaliser des paquets identiques, c'est-à-dire contenant chacun le même nombre de cartes « terre » et le même nombre de cartes « feu » en utilisant toutes ses cartes.

- (a) Peut-elle faire 36 paquets ? .....  
.....  
.....

- (b) Quel est le nombre maximum de paquets qu'elle peut réaliser ? .....  
.....  
.....

- (c) Combien de cartes de chaque type contient alors chaque paquet ? .....  
.....  
.....