Mathématiques 3^{e} : le livre sacado

L'équipe SACADO

16 août 2023

Chapitre I.

Arithmétique

Les savoir-faire du parcours

- Calculer une longueur dans un triangle

Les mathématiciennes et mathématiciens

Thalès est d'abord commerçant et ingénieur mais aussi homme politique.
Grâce à son séjour en Égypte, Thalès put mettre en œuvre ses connaissances en mathématiques, particulièrement en géométrie, domaines dans lesquels il fit quelques découvertes fondamentales, comme déterminer qu'un cercle est partagé en deux parties égales par tout diamètre ou que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.
Ses découvertes astronomiques permirent d'aider à la navigation en haute mer en repérant certaines étoiles ou en déterminant les éphémérides. Il est probable que Thalès ait consigné ses découvertes par écrit afin d'en diffuser l'utilité, même s'il ne demeure à ce jour aucun texte de sa main.
En Europe, le théorème de Thalès ne désigne pas la même chose. En Allemagne,le « théorème de Thalès » porte sur l'angle inscrit dans un demi-cercle : si un triangle est inscrit dans un cercle avec un côté du triangle pour diamètre du cercle, alors ce triangle est rectangle d'hypoténuse ce diamètre.

Thalès de Milet
né à Milet vers 625-620 av. J.-C. et mort vers 548-545 av. J.-C

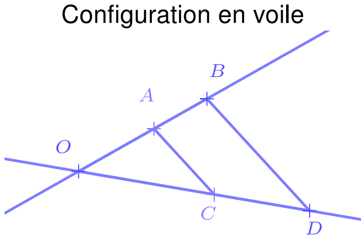
1 Le théorème de Thalès

Théorème 1: Le théorème de Thalès.

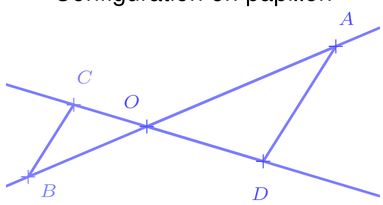
Soit (AB) et (CD) deux droites sécantes en O.

Si les droites (AC) et (BD) sont parallèles alors on a : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD} = \dfrac{AC}{BD}$.

Configuration en voile



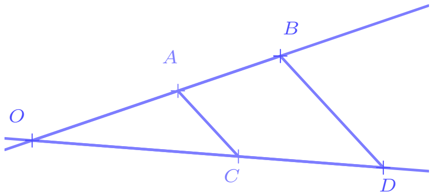
Configuration en papillon



Exercice commenté 2.

Sur la figure ci-contre, (AC) est parallèle à (BD).

- $OA = 6$ cm ;
- $OB = 10$ cm ;
- $OC = 8$ cm.



Calculer OD.

- Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O.
- La droite (AC) est parallèle à (BD) **[1. Contexte de la situation]**

Donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$ **[2. Écrire les égalités des trois quotients]**

Donc $\dfrac{6}{10} = \dfrac{8}{OD} = \dfrac{AC}{BD}$ **[3. Remplacer les valeurs connues]**

Comme $\dfrac{6}{10} = \dfrac{8}{OD}$ **[4. Conserver généralement une seule égalité]**

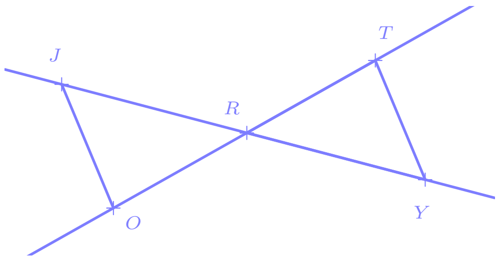
On déduit que $6 \times OD = 8 \times 10$ **[5. Écrire de l'égalité à partir du produit en croix]**

$OD = \dfrac{8 \times 10}{6} = \dfrac{8 \times 5}{3} = \dfrac{40}{3}$ (on « isole » la longueur cherchée) et donc $OD = \dfrac{40}{3}$ cm **[6. Conclure]**.

Exercice commenté 3.

Sur la figure ci-contre, (YT) est parallèle à (OJ).

- $RT = 3$ cm ;
- $RO = 5$ cm ;
- $RY = 4,5$ cm.



Calculer RJ.

- Les droites (JY) et (OT) sont sécantes en R.
- La droite (YT) est parallèle à (OJ) **[1. Contexte de la situation]**

Donc, d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{RY}{RJ} = \dfrac{RT}{RO} = \dfrac{YT}{JO}$ **[2. Écrire les égalités des trois quotients]**

Donc $\dfrac{4,5}{RJ} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{YT}{JO}$ **[3. Remplacer les valeurs connues]**

Donc $\dfrac{4,5}{RJ} = \dfrac{3}{5}$ **[4. Conserver généralement une seule égalité]**

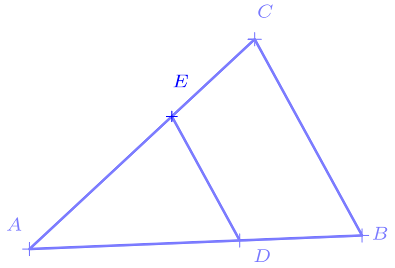
On déduit que $4,5 \times 5 = 3 \times RJ$ **[5. Écrire de l'égalité à partir du produit en croix]**

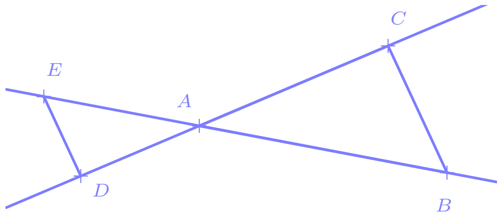
$RJ = \dfrac{4,5 \times 5}{3}$ (on « isole » la longueur cherchée) et donc $RJ = 7,5$ cm **[6. Conclure]**.

Reconnaitre une situation de Thalès.

1 Modéliser. Calculer.

Écrire le théorème de Thalès associé à chaque configuration.

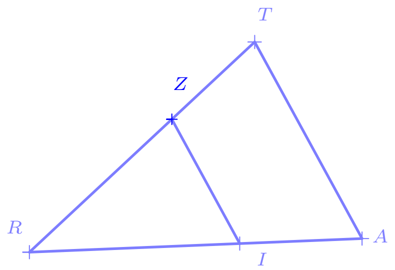




/b/ABCD

Calculer une longueur avec le théorème de Thalès.

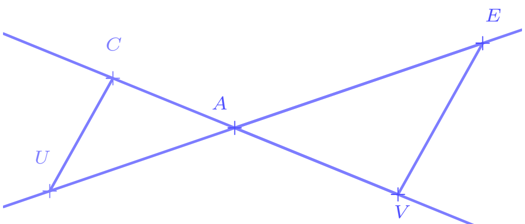
2 Calculer.



Les droites (AT) et (IZ) sont parallèles. $RA = 8$, $RI = 5$, $AT = 7$.
Calculer IZ.

/b/ABCD

3 Calculer.



Les droites (UC) et (EV) sont parallèles.
$CA = 5$cm, $CU = 6$cm, $AV = 7$cm.
Calculer EV.

/b/ABCD

2 Agrandissement et Réduction

Définition 4: Agrandissement et Réduction.

Si deux figures ont la même forme et des longueurs proportionnelles, alors on dit que l'une est un **agrandissement ou une réduction** de l'autre.

Remarque 5.

Le coefficient de proportionnalité k est le rapport d'agrandissement ou de réduction.

Remarque 6.

- Les dimensions du triangle OAC sont proportionnelles aux dimensions du triangle OBD.
- Le coefficient de proportionnalité est $\frac{OA}{OB}$ ou $\frac{OC}{OD}$ ou encore $\frac{AC}{BD}$. Lorsque ce rapport est supérieur à 1, on parle d'**agrandissement** sinon on parle de **réduction**.
- Dans ces configurations, on dit que les triangles sont **semblables**.

Exercice commenté 7.

Le triangle ABC a les dimensions suivantes.
$AB = 1,5$ cm
$BC = 2,5$ cm
$AC = 3,2$ cm
DEF est un agrandissement de ABC de rapport $1,6$.
Calculer le périmètre $\mathcal{P}$ du triangle DEF.

$DE = 1,6 \times AB = 1,6 \times 1,5 = 2,4$ cm
$DF = 1,6 \times AC = 1,6 \times 2,5 = 4$ cm
$EF = 1,6 \times BC = 1,6 \times 3,2 = 5,12$ cm
$\mathcal{P} = 2,4 + 4 + 5,12 = 11,52 (= 1,6 \times 7,2)$cm

Remarque 8.

- ABC est une réduction de DEF de rapport $\frac{1,5}{2,4} = \frac{2,5}{4} = \frac{3,2}{5,12} = 0,625$.
- Dans un agrandissement ou une réduction, les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.

Théorème 9: Rapport d'agrandissement et/ou de réduction.

Si k est le rapport de proportion de longueur alors :

- les aires sont multipliées par k^2.
- les volumes sont multipliés par k^3.

Calculer un coefficient d'agrandissement ou de réduction.

4

Calculer.

/b/ABCD

Communiquer.

5

Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que $EF = 4$ cm ; $FH = 5$ cm et $EH = 6$ cm.
Soit K le point du segment $[EH]$ tel que $HK = 1,2$ cm.
La parallèle à la droite (EF) passant par K coupe le segment $[FH]$ en J.
Calculer les longueurs HJ et JK.

/b/ABCD

Communiquer.

6

On donne les deux triangles ABC et EFG ci-contre. Les droites (BC) et (EF) sont parallèles. Expliquer pourquoi le théorème de Thalès ne s'applique pas.

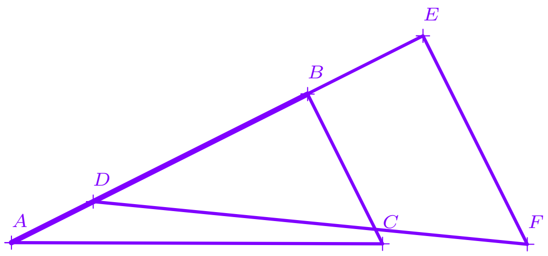
....

....

....

....

....



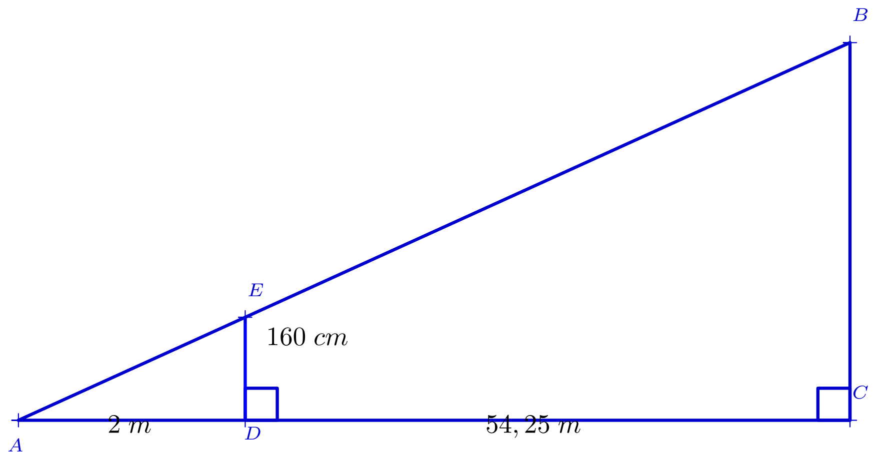
/b/ABCD

DNB 2023 - Modéliser. Calculer.

7

Marie se place comme indiquée sur la figure ci-dessous, de telle sorte que son ombre coïncide avec celle de la tour.
Après avoir effectué plusieurs mesures, Adrien effectue le schéma ci- dessous (le schéma n'est pas à l'échelle), sur lequel les points A, E et B ainsi que les points A, D et C sont alignés.
Calculer la hauteur BC de la Gyrotour.

/b/ABCD



8

Calculer.

Construis un triangle RST tel que $RS = 8,8$ cm ; $RT = 5,6$ cm et $ST = 4,8$ cm. Soit M le point du segment $[RS]$ tel que $RM = 6,6$ cm.
La parallèle à la droite (ST) passant par M coupe le segment $[RT]$ en N.

1. Calcule la longueur MN.
2. Calcule la longueur RN. Déduis-en la longueur NT.

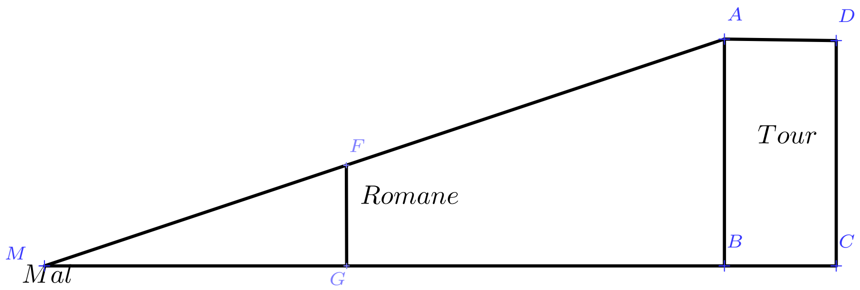
/b/ABCD

9

Calculer.

La tour de la Vade est un monument de Carcassonne.
Afin de déterminer la hauteur de cette tour, Romane et Maël se sont positionnés comme indiqué sur la figure ci-dessous, et ont effectué plusieurs mesures.
L'oeil de Maël est au point M ; le segment [FG] représente Romane.
La figure n'est pas à l'échelle.

/b/ABCD



Les points M, F et A ainsi que les points M, G et B sont alignés.
Romane et Maël ont mesuré : MG $= 3$ m
FG $= 1,4$ m
GB $= 51$ m

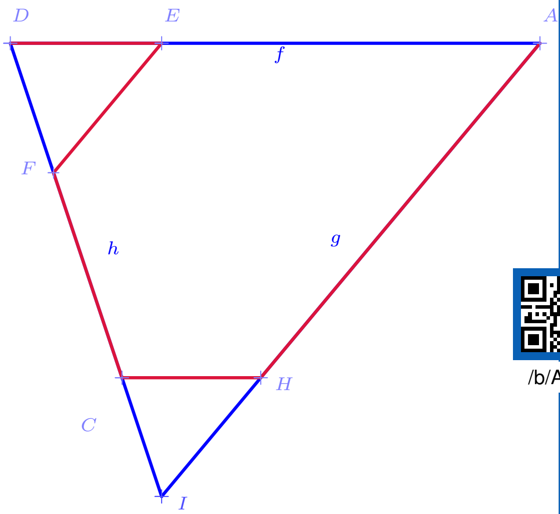
1. Montrer que les droites (FG) et (AB) sont parallèles.
2. Vérifier que la hauteur AB de la tour est de $25,2$ m.

10

DNB 2022 - Représenter.

Pour une épreuve d'orientation, Aurore reçoit le plan ci-contre. Sachant que les droites (EF) et (IA) sont parallèles ainsi que les droites (GH) et (DA), quelle est la longueur du parcours $DEFGHA$?

D : Départ A : arrivée.
$DA = 600$ m ; $DE = 200$ m ; $IG = 90$ m ; $DI = 315$ m ; $IA = 390$ m.



/b/ABCD

Représenter.

11

On considère un triangle ABC et un point M de la droite (AB) distinct de A et de B.
Par B, on trace la parallèle à la droite (MC) qui coupe la droite (AC) en N. Par N, on trace la parallèle à la droite (BC) qui coupe la droite (AB) en P.

/b/ABCD

1. Donne deux rapports égaux à $\dfrac{AN}{AC}$. Justifie. ....

....

....

....

....

2. Déduis-en que $AB^2 = AM \times AP$. ....

....

....

....

....

Modéliser. Calculer.

12

$ACDF$ est un rectangle et $BCDE$ est un carré.

/b/ABCD

M est un point du segment $[AF]$ et les droites (MK) et (CD) sont perpendiculaires.

Démontre que la longueur IJ ne dépend pas de la position du point M sur le côté $[AF]$.

....

....

....

....

....

Chercher.

/b/ABCD

13

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de diamètre $[AM]$ tel que $AM = 12$ cm. N est un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $AN = 8$ cm. La droite (d_1) est la perpendiculaire à la droite (AN) passant par O : elle coupe la droite (AN) en C.

1. Démontre que les droites (OC) et (MN) sont parallèles. ....

....

....

....

....

2. Déduis-en la position du point C sur le segment $[AN]$. ....

....

....

....

....

3. D est le point du segment $[AO]$ tel que $AD = 2$ cm. La parallèle à la droite (MN) passant par D coupe la droite (AN) en E.
   Calcule la longueur AE puis donne une valeur approchée au dixième par excès de cette longueur AE. ....

....

....

....

....