Les puissances de 10

2,5 heures

Utiliser le calcul littéral

☐ Écrire un nombre avec une puissance de base 10
☐ Calculer avec des nombres écrits en puissance de 10
☐ Écrire un nombre en écriture scientifique

1 **Situation de recherche**

Durant les inondations dans la région parisiennes de Juin 2016, la région Ile de France a fait un stock de bouteilles d'eau pour la population. Chaque habitant bénéficie de 2 litres d'eau par jour.
Quel est le nombre de litres d'eau stockés pour les 5 jours d'inondations ?

Définition 1. ***Puissance de base 10***

Le produit $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10 \times 10}_{n}$ se note 10^n et se lit "10 exposant n".

Exemple

$100 = 10^2$ donc 100 est une puissance de 10 et $10\,000 = 10^4$ donc 10000 est aussi une puissance de 10.

Remarque

Le nombre de zéros est égal à l'exposant. $10^n = 1\underbrace{0000\cdots000}_{n \text{zéros}}$

Définition 2.

Par convention, $10^0 = 1$

1 **Application directe**

Écrire sous la forme d'une puissance de 10 les nombres donnés.

1. $A = 100000$
2. $B = 1000$
3. $C = 1000000$
4. $D = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
5. $E = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
6. $F = 10 \times 1 \times 10 \times 10$

2 **Application directe**

Écrire sans exposant les nombres donnés.

1. $A = 10^3$
2. $B = 10^1$
3. $C = 100^2$
4. $D = 10^9$
5. $E = 1000^3$
6. $F = 10^{17}$
7. $G = 10 \times 4 \times 25$
8. $H = 100 \times 40 \times 5^2$
9. $I = 10 \times 2 \times 5$

3 **Application directe**

Le tardigrade mesure est 1 mm. La longueur d'un stage de rugby est 100 m environ. Combien de tardigrades peut on mettre bout à bout sur la longueur d'un stade de rugby ?

4 **Application directe**

Vrai ou faux

1. $10^3 = 10 + 10 + 10$
2. $10^5 = 50$
3. $10^0 = 1$
4. $10^{10} = 100$
5. $10^4 > 10^5$
6. $10^4 \times 10^2 = 10^6$

5 **Défi**

Encadre entre deux puissances de 10 le nombre de minutes dans une année.

6 **Question flash**

1. Le nombre 10^{-6} est égal à l'un des nombre suivant. Lequel ?

   -60 ; -10^6 ; $0{,}000\,000\,1$; un millionième

2. Ariane affirme que 2^{40} est le double de 2^{39}. A-t-elle raison ?

7 **Question flash**

1. Écrire en notation scientifique le nombre intervenant dans la phrase suivante : « La masse du Soleil est environ égale à 1 989 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg ».
2. Le proton et le neutron sont deux particules composant le noyau des atomes. Leur taille est environ égale à 10^{-15} m. Exprimer cette taille en millimètre (mm), puis en micromètre (μm).

8 **Exercice d'application**

1. En informatique, l'information est codée à partir de bits, qui ne prennent que deux valeurs : 0 et 1. Un octet est un regroupement de 8 bits. Combien d'informations différentes peuvent être codées sur un octet ?
2. Les capacités de stockage des mémoires informatiques (disques durs, clé USB, ...) utilisent un grand nombre d'octets. Cela conduit à utiliser des multiples de l'octet, dont voici les principaux ci-contre.

NOM	SYMBOLE	NOMBRE D'OCTETS
Kilooctet	Ko	10^3
Megaoctet	Mo	10^6
Gigaoctet	Go	10^9
Teraoctet	To	10^{12}
Petaoctet	Po	10^{15}
Exaoctet	Eo	10^{18}

À l'aide des unités précédentes, donner un ordre de grandeur de la taille d'un fichier relatif aux données suivantes :

- une photographie numérique ;
- l'ensemble des données circulant sur le web en 2015 ;
- un texte de dix lignes sur un traitement de textes ;
- l'ensemble des données générées chaque année à travers le monde ;
- la capacité d'un disque dur vendu en 2015 ;
- un DVD

Définition 3. ***Puissance de base 10 d'exposant négatif***

L'écriture 10^{-n} désigne l'inverse de 10^n, c'est à dire : $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$.

Remarque

L'exposant correspond au nombre de chiffres après la virgule. $10^{-n} = 0,\underbrace{0000\cdots001}_{n\text{chiffres}}$

9 **Application directe**

Écrire sous la forme d'une puissance de 10 les nombres donnés.

1. $A = 0,01 \times 100$
2. $B = 0,1 \times 10$
3. $C = 0,00001 \times 100$
4. $D = 0,001 \times 1$
5. $E = 0,001 \times 0,1$
6. $F = 0,01 \times 10 \times 0,001$

10 **Application directe**

1. Écrire en notation scientifique le nombre intervenant dans la phrase suivante : « La masse du Soleil est environ égale à 1 989 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg ».
2. Le proton et le neutron sont deux particules composant le noyau des atomes. Leur taille est environ égale à 10^{-15} m. Exprimer cette taille en millimètre (mm), puis en micromètre (μm).

11 **Application directe**

Écrire sans exposant les nombres suivants.

1. $A = 10^{-4}$
2. $B = 10^{-1}$
3. $C = 10^{-3}$
4. $D = 10^0$
5. $E = 10^{-10}$
6. $F = 10^{-6}$

12 **Application directe**

1. Écris 1 millième sous forme décimale
2. Écris sous forme de fraction 1 millième
3. Déduis en l'écriture de 1 millième sous forme d'une puissance de 10.

13 Compte rendu

En homéopathie, on dilue dans de l'eau une teinture mère contenant une substance active. Le degré de dilution s'exprime en CH, abréviation de centésimale hahnemannienne (du nom de Samuel Hahnemann, l'un des pères de l'homéopathie). On obtient la dilution 1 CH en mélangeant 1 volume de teinture mère, contenant la substance, avec 99 volumes d'eau.

Ainsi une solution à la dilution 1 CH contient 1% de la substance active. Autrement dit, dans un volume de solution à la dilution 1 CH, le nombre de molécules de substance active présentes est multiplié par 0,01, ou encore divisé par 100, par rapport au nombre de molécules présentes dans un volume égal de teinture mère. On recommence ce procédé pour

obtenir les dilutions suivantes : 2 CH (mélange d'un volume de solution 1 CH et de 99 volumes d'eau), 3 CH (1 volume de solution 2 CH et 99 volumes d'eau), etc.

Voici deux extraits adaptés de l'encyclopédie en ligne Wikipédia.

Extrait 1
Il existe des dilutions pouvant atteindre 30 CH, soit une dilution par 10^{-60} de la teinture mère. Il est impossible de se représenter concrètement la petitesse extrême d'un tel chiffre. À titre de comparaison, le Soleil contient environ 10^{57} atomes et on estime que la partie observable de notre univers contient $10^{8}0$ atomes. Un seul atome dilué dans la masse de mille soleils représente donc 30 CH et un seul atome dilué dans l'univers représente 40 CH. Pour un volume de teinture mère à l'état pur, et contenant 10^{+24} molécules de substance active (un peu plus d'une mole), les dilutions successives contiennent les nombres suivants de molécules de substance active :

CH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	>12
Nombre de molécules de substance active	10^{22}									10^{4}	100	1	0

À une dilution de 12 CH, et a fortiori de 15 CH et plus, la totalité des flacons ou des granules fabriqués ne comprend statistiquement plus une seule molécule de substance active.

Extrait 2
Divers travaux expérimentaux ont été menés pour tenter de mettre en évidence une influence des dilutions extrêmes sur des phénomènes physiques ou chimiques observables. Ces travaux constituent des pistes de recherche pour étudier un éventuel effet physique mesurable des solutions très diluées. L'hypothèse étant que l'oxygène dissous dans l'eau conserverait une « mémoire » statique de la substance ayant subi la méthode de préparation homéopathique et qu'elle transmettrait cette mémoire aux granules de sucre.

1. Compléter le tableau figurant dans l'extrait 1.
2. Réaliser un petit texte qui explique le principe de la dilution et des unités CH et, en utilisant les deux extraits de Wikipédia, qui présente les arguments des adversaires de l'homéopathie et ceux de ses adeptes.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Écriture scientifique

2,5 heures

☐ Exprimer un nombre en écriture scientifique

1 Exercice de découverte

La mantisse est le nombre de chiffres utilisable par un calculateur (ordinateur, calculatrice) pour représenter un nombre. Par exemple, si la mantisse est 10 (comme sur certaines calculatrice de collège) 1289,565874899214 ne peut pas s'écrire ce nombre comporte 16 chiffres. La calculatrice écrit donc seulement 9 chiffres et la virgule. Lesquels ?

- En partant de la gauche ? Mais si la partie entière a plus que 9 chiffres on ne peut pas l'écrire.....
- En partant de la droite ? Mais si la partie décimale a plus que 9 chiffres on ne peut pas l'écrire.....

Le modèle trouvé est d'écrire un seul chiffre différent de 0 dans la partie décimale puis de compléter la mantisse avec les chiffres qui se lisent de gauche à droite et écrire une puissance de 10 qui approxime le nombre donné.
Ainsi, $1289,565874899214 = 1,28956587 \times 10^3$.
Complète les tableaux ci-dessous.

1. 12,5926378125 = $\square\,,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$
2. 1658,941256371 = $\square\,,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$
3. 2015486,9701244 = $\square\,,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$
4. 2012145896545486,9701244 = $\square\,,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$
5. 0,0124674125896211 = $\square\,,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$

Définition 4. ***Écriture scientifique***

L'écriture scientifique d'un nombre est le produit d'un nombre décimal dont la partie entière comporte un seul chiffre différent de zéro par une puissance de 10.
L'écriture scientifique d'un nombre est unique.

Exemple

427,15 a pour écriture scientifique $4,2715 \times 10^2$ et 0,256 a pour écriture scientifique $2,56 \times 10^{-1}$.

Méthode

Soit n un nombre entier.

- Lorsqu'on multiplie un nombre par 10^n, on décale sa virgule vers la droite de n chiffres.
- Lorsqu'on multiplie un nombre par 10^{-n}, on décale sa virgule vers la gauche de n chiffres.

Si le nombre de chiffres n'est pas suffisant, on complète avec des zéros.

Exemple

- $35 \times 10^3 = 35\,\overbrace{000}$, on remarque le décalage de 3 chiffres vers la droite.
- $3425 \times 10^{-2} = 34,\underbrace{25}$, on remarque le décalage de 2 chiffres vers la gauche.

2 **Application directe**

Donne l'écriture décimale des nombres suivants.

$A = 48,012 \times 10^2$	$E = 48,012 - 10^2$
$B = 48,012 \div 10$	$F = 48,012 \times 10\,000$
$C = 48,012 \times 1000$	$G = 48,25 \times 1000$
$D = 48,012 + 10^3$	$H = 48,25 \div 10000$

3 **Application directe**

Donne l'écriture scientifique des nombres suivants.

$A = 48$	$E = 126,4589$	$I = 31,42$
$B = 2\,869$	$F = 1438,53$	$J = 14353$
$C = 145\,893$	$G = 1,59$	$K = 159$
$D = 10,25$	$H = 0,569$	$L = 56,9$

Remarque

L'écriture permet de donner un ordre de grandeur du nombre donné en lisant l'exposant de la puissance de 10. $1\,529 = 1,529 \times 10^3$ donc ce nombre est de l'ordre des milliers (10^3).

Les puissances de base quelconque

3 heures

☐ Calculer avec des puissances de base quelconque et exposant entier

1 **Exercice de découverte**

1. **Puissance de 2**
   (**a**) Écris chaque nombre 2^3, 2^5 et 2^8 comme un produit.
   (**b**) Quelle égalité peux-tu conjecturer avec les puissances de 2 ?
2. Peux-tu la conjecturer pour toutes les puissances ?
3. Peux-tu conjecturer une formule avec le quotient de puissance ?

Définition 5. ***Puissance de base a***

Le produit $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n}$ se note a^n et se lit "a exposant n". La puissance du nombre a, a^n, est un produit de n fois le même nombre a.

Proposition 0. Produit de puissances

Soit n et m deux nombres entiers et a un nombre.
$a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Exemple

- $10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$
- $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

Proposition 0. Quotient de puissances

Soit n et m deux nombres entiers et a un nombre.
$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Exemple

$\dfrac{10^8}{10^2} = 10^6$ et $\dfrac{5^9}{5^3} = 5^6$

2 **Exercice d'application**

Utiliser la calculatrice ou un tableur pour vérifier ou compléter chacune des égalités suivantes.

a. $9^3 + 5^3 + 2^3 + 9 \times 5 \times 2 = \ldots\ldots$

b. $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = \ldots\ldots$

c. $4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4 = (\ldots\ldots)^4$

d. $4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = (\ldots\ldots)^5$

3 **Exercice d'application**

Écrire par une expression numérique :

1. Le carré de 5×10
2. Le produit de $5^2 \times 10^2$
3. Peux-tu conjecturer une proposition ?
4. Teste la avec plusieurs valeurs.

4 **Exercice d'application**

Calcule avec une seule puissance les expressions suivantes.

1. $A = 10^4 \times 10^6$
2. $B = 3^1 2 \times 3^{-2}$
3. $C = 5^{-5} \times 5^{-2}$

1. $D = 4^3 \times 2^8$
2. $E = 5^1 2 \times 25^2$
3. $F = 9^{-2} \times 3^{-5}$

1. $G = 2^5 \times 16$
2. $H = 7^2 \times 7^2$
3. $I = 8^3 \times 2^3$

5 Exercice d'application

Calcule avec une seule puissance les expressions suivantes.

1. $A = \dfrac{10^4}{10^6}$
2. $B = \dfrac{3^12}{3^10}$
3. $C = \dfrac{5^5}{5^{-3}}$

1. $D = \dfrac{4^3}{2^8}$
2. $E = \dfrac{5^12 \times 25^2}{5^8}$
3. $F = \dfrac{9^{-2} \times 3^{-5}}{3^4}$

1. $G = \dfrac{2^5 \times 16}{2^3}$
2. $H = \dfrac{7^4 \times 7^3}{49}$
3. $I = \dfrac{8^3 \times 2^3}{2^4 \times 2^{-2}}$

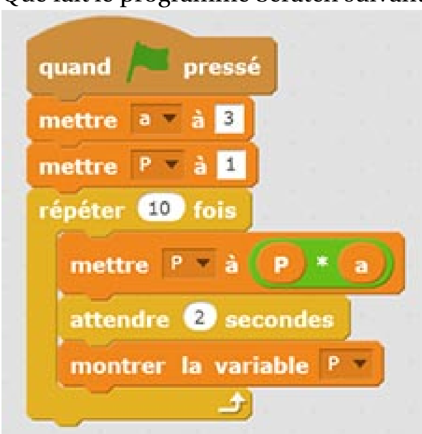
6 Exercice d'application

Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible.

1. $A = \dfrac{4 \times 15 \times 14}{21 \times 10 \times 22}$
2. $B = \dfrac{2^3 \times 5^2}{5 \times 2^2}$
3. $C = \dfrac{2^4 \times 3^2 \times 5^2}{5^3 \times 3^2 \times 2^2}$

7 Question flash

Que fait le programme Scratch suivant ?



8 Défi

Écris le nombre 1 000 000 000,011 comme somme de puissances de 10.

9 Approfondissement

En 1938, un mathématicien décide d'appeler le nombre 10^{100}, le **googol**. Ce mot a inspiré le moteur de recherche Google.
Écris avec une puissance de 10, les nombres :

A= googol^3

B= $\dfrac{\text{googol}^4}{\text{googol}^2}$

C= googol × googol

D= $\text{googol}^{\text{googol}}$

10 Approfondissement

Marin Mersenne (1588-1648) était un religieux français érudit, philosophe, mathématicien et physicien. Il s'est intéressé à de nombreux domaines (acoustique, chute des corps, arithmétique, ...). Il a fourni une liste de nombres de la forme $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^5 - 1$, ..., jusqu'à $2^{257} - 1$, où chacun des exposants (2, 3, 5, ..., 257) est un nombre premier. Pour lui rendre hommage, on appelle aujourd'hui nombres de Mersenne les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$, où n est un entier naturel non nul.

1. À l'aide d'un tableur, calculer les nombres M_n pour tous les entiers n allant de 2 à 20.
2. Pour chacun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, vérifier que les nombres de Mersenne M_2, M_3, M_5, M_7 sont des nombres premiers.
3. La conjecture « Les nombres de Mersenne M_n où n est un nombre premier sont des nombres premiers » est-elle plausible ? Vérifier que M_{11} admet un diviseur autre que 1 et lui-même. La conjecture précédente est-elle vraie ? Justifier.

4. Le nombre M_{13} est-il premier ?
5. Un nombre parfait est un entier qui est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs autres que lui-même. Ainsi 6 est un nombre parfait puisque les diviseurs de 6 autres que 6 sont 1, 2, et 3, et puisque $6 = 1 + 2 + 3$.

   Euclide a prouvé que l'on obtient des nombres parfaits à partir des nombres de Mersenne qui sont premiers, de la façon suivante : on multiplie le nombre de Mersenne par la puissance de 2 dont l'exposant est inférieur d'une unité à celui intervenant dans l'écriture du nombre. Ainsi, à partir du nombre de Mersenne premier $2^2 - 1$, on obtient le nombre parfait $6 = 2^{2-1} \times (2^2 - 1)$. Vérifier le résultat d'Euclide pour les nombres de Mersenne M_3 et M_5.

11 **Approfondissement**

Un laboratoire effectue des recherches sur le développement d'une population de bactéries dans un milieu clos. Les chercheurs observent que le nombre de bactéries triple toutes les heures. À 0 heure, il y a 4 bactéries.

1. Déterminer le nombre de bactéries ; à 1 heure ; à 2 heures ; à 5 heures.
2. Exprimer le nombre de bactéries à 24 heures.
3. Afin d'afficher le nombre de bactéries à chaque heure, l'un des chercheurs utilise un tableur (voir ci-contre). Quelle formule a-t-il entré dans la cellule B3 afin d'afficher dans la colonne B, par recopie vers le bas, les résultats voulus ?
4. Calculer les valeurs donnant le nombre de bactéries sur une calculatrice ou un tableur, de 0 heure à 24 heures.

	Heure	Nombre de bactéries
1	0	4
2	1	12
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	

12 **Défi**

Clara essaie d'évaluer le nombre de ses ancêtres, jusqu'à l'époque de Charlemagne. Elle part du principe que 25 ans séparent chaque génération de la suivante, que chaque individu a deux parents, qui ont à leur tour deux parents chacun, etc. Elle suppose également que tous les ascendants d'une génération donnée sont des personnes distinctes. Après quelques calculs, Clara va consulter l'encyclopédie en ligne Wikipédia, et déclare : « En fait, en 2015, nous sommes tous cousins ! »

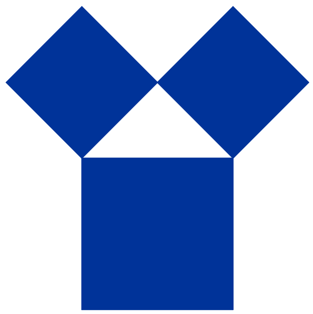
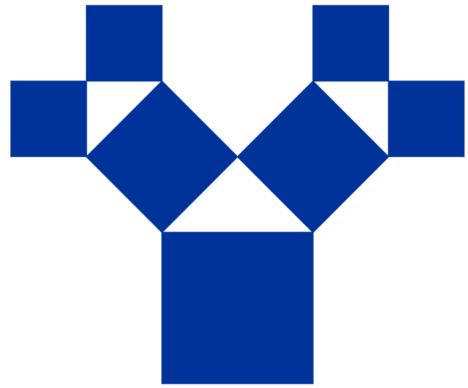
Évolution de la population mondiale (Source Wikipédia)

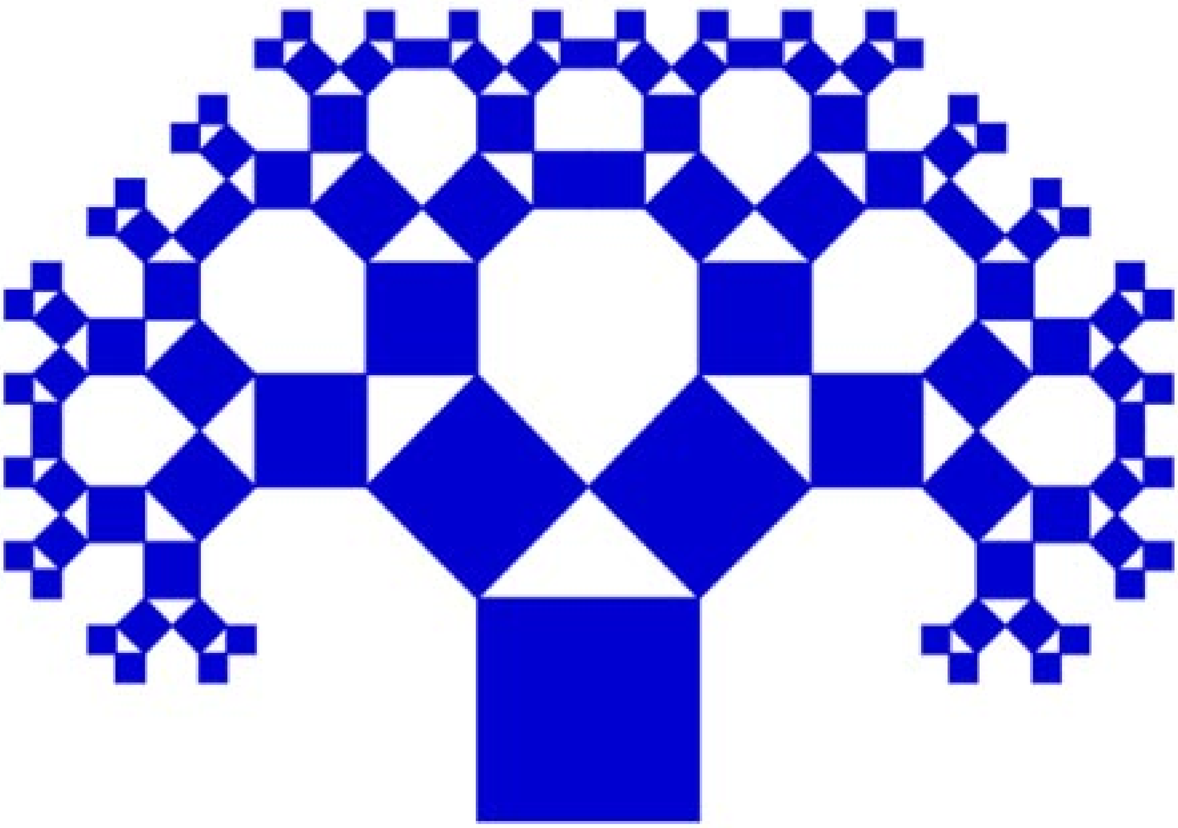
ANNEE	−5000	400	1000	1500	1900	2000
Population mondiale	Entre 5 et 20 millions	Entre 190 et 206 millions	Entre 254 et 345 millions	Entre 425 et 540 millions	Entre 1,55 et 1,762 milliards	6,127 miliards

Comment Clara est-elle parvenue à cette conclusion ?

13 **Défi**

On veut décorer le mur d'une salle de classe en y peignant un arbre stylisé, construit à partir de carrés de la façon suivante :

Étape 1	Étape 2	Étape 3
On part d'un carré de côté 80 cm, peint à partir du sol.	On construit deux autres carrés analogues, en laissant un vide en forme de triangle rectangle isocèle.	Sur chaque carré construit à l'étape 1, on construit deux autres carrés à l'extérieur, comme à l'étape 1.
		



On continue jusqu'à l'étape 4, en rajoutant chaque fois deux carrés sur ceux construits à l'étape d'avant. À partir de l'étape 5, on ne construit les nouveaux carrés que s'ils ne chevauchent pas les précédents. La figure ci-dessus représente l'arbre à l'étape 6.

1. Déterminer le côté des carrés construits à l'étape 2, à l'étape 3, à l'étape 7.
2. On réalise l'arbre, jusqu'à ce qu'il atteigne le plafond de la salle, haut de 3 mètres, et on le peint en bleu. Chaque pot de peinture contient 0,5 L, et chaque litre de peinture permet de recouvrir 3 mètres carrés. Marie affirme que quatre pots de peinture suffiront. A-t-elle raison ?