Chapitre 12.
Géométrie vectorielle

Les savoir-faire du parcours

- Savoir représenter géométriquement des vecteurs.
- Savoir construire géométriquement la somme et la différence de deux vecteurs.
- Savoir appliquer la relation de M. Chasles avec des vecteurs.
- Savoir construire géométriquement le produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Savoir caractériser alignement de parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

Les mathématiciennes et mathématiciens

Michel Chasles était un mathématicien français du XIXe siècle qui a apporté d'importantes contributions dans le domaine de la géométrie vectorielle. Il est célèbre pour avoir formulé le "théorème de Chasles", qui établit que tout mouvement d'un solide rigide dans l'espace est équivalent à une combinaison de translations et de rotations. Cette découverte a été essentielle pour le développement de la géométrie vectorielle et a permis de comprendre les transformations géométriques en termes de vecteurs. Le travail de Michel Chasles a ouvert la voie à de nouvelles avancées dans la géométrie analytique et a eu un impact significatif sur le développement ultérieur des mathématiques.

Représenter. Raisonner.

1 Vous vous promenez dans une ville inconnue avec un plan peu détaillé. Vous partez de votre position actuelle A et effectuez les déplacements suivants :

1. Marchez 200 mètres vers le nord.
2. Tournez à gauche et marchez 150 mètres vers l'ouest.
3. Prenez un raccourci en marchant 100 mètres vers le nord-est.

Comment déterminer votre position finale B par rapport à votre point de départ A ? Quelle distance totale avez-vous parcourue pour atteindre votre destination ?

1 Vecteur du plan

Définition 1: Translation dans le plan.

Soit B et C deux points distincts du plan.
L'image d'un point A par la **translation** qui transforme B en C est le point A' tel que $ABCA'$ soit un **parallélogramme**.

Définition 2: Vecteur.

On appelle **vecteur d'origine** A et d'**extrémité** B, l'idée du déplacement de A vers B.
On le note $\vec{AB}$.
Le vecteur $\vec{AB}$ est défini par :

- Une **direction**.
- Un **sens**.
- Une **longueur**, appelée **norme** du vecteur.

La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\vec{AB}$.

Définition 3: Vecteurs égaux.

On dit que deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux s'ils ont :

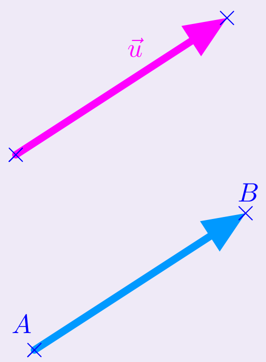
- La même direction.
- Le même sens.
- La même norme.

Propriété 4.

$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme.

Définition 5: Représentants d'un vecteur.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ ont la **même direction**, le **même sens** et la **même longueur**, ils sont **égaux**.
On dit que le vecteur $\vec{AB}$ est un **représentant** du vecteur $\vec{u}$.



Propriété 6.

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur, alors il existe un **unique point** B tel que $\vec{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$.

Savoir représenter géométriquement des vecteurs.

2

Compétence.

/b/ABCD

Deuxième SF

3

Compétence.

/b/ABCD

Troisième SF

4

Compétence.

/b/ABCD

2 Opérations avec les vecteurs

1 Addition de vecteurs

Définition 7.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Si on enchaine le translation de vecteur $\vec{u}$ puis la translation de vecteur $\vec{v}$, on obtient une translation.
On appelle somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}+\vec{v}$, le vecteur qui lui est associé.

Définition 8: Relation de M. Chasles.

Soit A, B et C trois points, alors $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

Propriété 9: Propriétés de l'addition de vecteurs.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, l'addition est commutative.
- $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$, l'addition est associative.

Propriété 10: Propriété du parallélogramme.

Soit $ABCD$ un parallélogramme, alors $\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{AC}$.

2 Soustraction de vecteurs

Définition 11: Le vecteur nul : $\vec{0}$.

Soit A un point du plan, on appelle vecteur $\vec{AA}$ le **vecteur nul** et on le note $\vec{0}$.

Propriété 12.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

Définition 13: Vecteurs opposés.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **opposés** lorsque :

- Ils ont la **même direction**.
- Ils ont la **même norme**.
- Ils sont de **sens contraires**.

On le note : $\vec{u}=-\vec{v}$.

Définition 14: Soustraction de vecteurs.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On définit la **différence** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

3 Multiplication d'un vecteur par un nombre

Définition 15.

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel non nul. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k, noté $k\vec{u}$ est le vecteur $\vec{v}$ tel que :

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont : Le même sens si $k>0$. Des sens contraires si $k<0$.
- La norme de $\vec{v}$ est égale à $|k|$ fois la norme de $\vec{u}$.

Propriété 16.

Si M est le milieu du segment $[AB]$ alors :

- $\vec{AB}=2\vec{AM}$
- $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}$
- $\vec{AM}=\vec{MB}$
- $\vec{AM}+\vec{BM}=\vec{0}$

Premier SF

5

Compétence.

/b/ABCD

Deuxième SF

6

Compétence.

/b/ABCD

Troisième SF

7

Compétence.

/b/ABCD

3 Vecteurs colinéaires

Définition 17.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la **même direction**.

Propriété 18.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. $\Leftrightarrow$ Il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Premier SF

8

Compétence.

/b/ABCD

Deuxième SF

9

Compétence.

/b/ABCD

Troisième SF

10

Compétence.

/b/ABCD

11

Compétence.

/b/ABCD

12

Compétence.

13

Compétence.

14

Compétence.

15

Compétence.

16

Compétence.

Compétence.

17

Compétence.

18

Compétence.

19

Compétence.

20

Compétence.

21

Compétence.

22

Compétence.

23

Compétence.

24

Compétence.

25

Compétence.

26

Compétence.

27

Compétence.

28

Compétence.

29

Compétence.

30

Compétence.

31

Compétence.

32

Compétence.

33

/b/ABCD