Chapitre 3.

Ensembles de nombres

Les savoir-faire du parcours

- Savoir placer un nombre dans un ensemble.
- Savoir déterminer si un nombre appartient à un ensemble donné.

Les mathématiciennes et mathématiciens

Compétence.

1

1 L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$

Définition 1.

Un nombre entier naturel est un nombre dont la partie décimale est nulle et qui est positif.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

Remarque 2.

L'ensemble des nombres entiers naturels a un plus petit élément, 0
mais n'a pas de plus grand élément.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ....\}$$

2 L'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Définition 3.

Un nombre entier relatif est un nombre entier positif ou négatif.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Remarques 4.

- L'ensemble des nombres entiers relatifs n'a ni plus petit, ni plus grand élément.
- Tout nombre entier naturel est aussi un nombre entier relatif, on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

3 L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Définition 5.

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec une partie décimale finie.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Propriété 6.

Un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{a}{10^p}$ avec a appartenant à $\mathbb{Z}$ et p appartenant à $\mathbb{N}$.

Remarque 7.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Propriété 8.

Démonstration exigible
$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Preuve : Par l'absurde :
On suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal, alors par propriété :

$$\exists a \in \mathbb{Z}\, et\, p \in \mathbb{N} \text{ tels que } \frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$$

Donc $10^p = a \times 3$ (produit en croix) donc 3 est une diviseur de 10^p or $10^p = 2^p \times 5^p$ (décomposition en facteurs premiers). Donc 3 ne peut pas diviser 10^p (l'hypothèse est donc absurde). Ainsi, on peut affirmer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Premier SF

2

Compétence.

/b/ABCD

Deuxième SF

3

Compétence.

/b/ABCD

Troisième SF

4

Compétence.

/b/ABCD

4 L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Définition 9.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p appartenant à $\mathbb{Z}$ et q appartenant à $\mathbb{N}^*$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque 10.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Propriété 11.

Démonstration exigible
$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Preuve : Par l'absurde :
On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, alors par définition :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \, et \, q \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

On suppose que $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.
$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc $\sqrt{2} \times q = p$ donc $(\sqrt{2} \times q)^2 = p^2$ donc $2 \times q^2 = p^2$ (p^2 est donc un nombre pair).
Si le carré d'un nombre est pair alors on peut affirmer que ce nombre est pair donc p est un nombre pair : $\exists p_1 \in \mathbb{N}$ tels que $p = 2 \times p_1$ donc $2 \times q^2 = p^2 = (2 \times p_1)^2 = 4 \times p_1^2$.
Donc $q^2 = 2p_1^2$ (q^2 est donc un nombre pair). Si le carré d'un nombre est pair alors on peut affirmer que ce nombre est pair donc q est un nombre pair.
Si p est un nombre pair et que q est un nombre pair alors la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, l'hypothèse est donc absurde.
Ainsi, on peut affirmer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

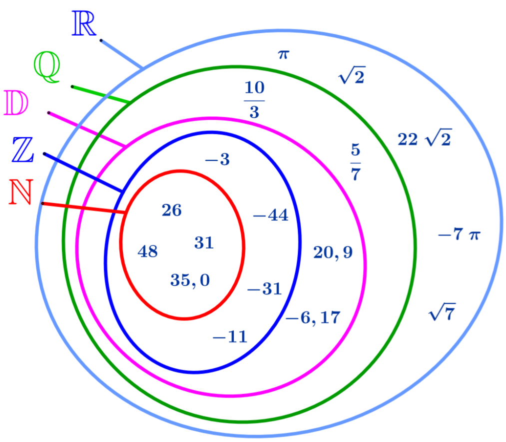
5 L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Définition 12.

L'ensemble des nombres réels est l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez en seconde.
L'ensemble des nombres entiers réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque 13.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Premier SF

5

Compétence.

/b/ABCD

Deuxième SF

6

Compétence.

/b/ABCD

Troisième SF

7

Compétence.

/b/ABCD

8

Compétence.

/b/ABCD

9

Compétence.

10

Compétence.

11

Compétence.

12

Compétence.

13

Compétence.

14

Compétence.

15

Compétence.

16

Compétence.

17

Compétence.

18

Compétence.

19

Compétence.

20

Compétence.

21

Compétence.

22

Compétence.

23

Compétence.

24

Compétence.

25

Compétence.

Compétence.

26

Compétence.

27

Compétence.

28

Compétence.

29

Compétence.

30

/b/ABCD