

Généralités sur les fonctions



Les savoir-faire du parcours

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Résoudre une équation du type $f(x) = k$ en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.
- Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation du type $f(x) = k$.

Les mathématiciennes et mathématiciens

Compétence.

1

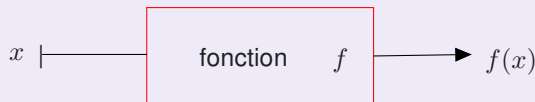


1 Généralités sur les fonctions

Définition 1 : Notion de fonction.

Définir une fonction f d'un ensemble \mathcal{D} de réels dans \mathbb{R} , c'est associer à chaque réel x de \mathcal{D} un unique réel noté $f(x)$.

- On dit que \mathcal{D} est l'**ensemble de définition** de f .
- $f(x)$ est l'**image** de x par f .
- x est un **antécédent** de $f(x)$ par f .



$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

Ce qui se lit : la fonction f qui à x associe $f(x)$.

Remarques 2.

La fonction se nomme par une lettre, généralement f , et peut être générée de 4 façons différentes.

- une expression algébrique notée $f(x)$ avec laquelle on calcule des images.
- une courbe, généralement appelée \mathcal{C}_f
- un tableau de valeurs qui associe sur deux lignes, quelques valeurs et leurs images.
- un algorithme, qui décrit les étapes de calcul pour obtenir $f(x)$

1 Fonction générée par une expression algébrique

Définition 3 : Expression algébrique d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition \mathcal{D} . L'expression algébrique de f est la forme algébrique de $f(x)$.

Méthode 4. Déterminer algébriquement une image par f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$.

Pour déterminer l'image d'un nombre a par f , il suffit de calculer $f(a)$.

L'image de 5 par f est $f(5) = 2 \times 5^2 - 6 \times 5 + 3 = 50 - 30 + 3 = 23$

L'image de $\sqrt{3}$ par f est $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}^2 - 6\sqrt{3} + 3 = 4 - 6\sqrt{3} + 3 = 7 - 6\sqrt{3}$

Méthode 5. Déterminer algébriquement un antécédent par f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$.

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) d'un nombre a par f , il faut et il suffit de résoudre l'équation $f(x) = a$.

$$2x^2 - 6x + 3 = 3$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x - 3) = 0$$

$2x = 0$ ou $x - 3 = 0$, $x = 0$ ou $x = 3$. $\mathcal{S} = \{0; 3\}$. Les antécédents de 3 par f sont 0 et 3.

Remarque 6.

Lorsque le domaine de définition n'est pas donné, l'expression algébrique $f(x)$ de la fonction f permet de le déterminer.

Modéliser par des fonctions

2

Modéliser.

Soit f la fonction qui à un côté c d'un triangle équilatéral associe son périmètre. Définir f .



/b/ABCD

3

Modéliser.

Pour une distance connue, la vitesse moyenne se définit en fonction du temps. La distance entre Toulon et Hyères est de 20km. Définir la fonction vitesse moyenne v .



/b/ABCD

Déterminer les images par une fonction f .

4

Calculer.

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 4x^2 + 3x$. Calculer

1. l'image de 2 par f , $f(2) =$

2. l'image de $\frac{2}{3}$ par f , $f\left(\frac{2}{3}\right) =$

3. l'image de $\sqrt{5}$ par f , $f(\sqrt{5}) =$



/b/ABCD

5

Modéliser.

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 1[$ par $f(x) = \frac{5}{x-1}$.

1. Calculer l'image de -2 par f .



/b/ABCD

2. Calculer l'image de $\frac{3}{7}$ par f .

6

Modéliser.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2x - 1$.

1. Déterminer un antécédent de 4 par g .



/b/ABCD

2. Déterminer un antécédent de $\frac{3}{4}$ par g .

Modéliser.

7

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x-8}$

.....



/b/ABCD

2 Fonction représentée par une courbe

Définition 7: Représentation graphique.

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$. Soit f une fonction définie sur l'ensemble D .

La **représentation graphique** ou courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, où $x \in D$. Une équation de \mathcal{C}_f est $y = f(x)$.

Propriété 8: Appartenance d'un point à une courbe.

Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D} et $A(x_A, y_A)$ un point du plan.

1. Si le point A appartient à la courbe \mathcal{C}_f alors $y_A = f(x_A)$.
2. Réciproquement, si $y_A = f(x_A)$ alors le point A appartient à la courbe \mathcal{C}_f .

Exemple 9.

Soit f la fonction définie par $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$.

Soit $A(2; 25)$ un point du plan.

A appartient-il à la courbe de f ?

$$f(2) = 5 \times 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 25 = y_A$$

donc le point A appartient à la courbe de f .

Soit $B(-1; 2)$ un point du plan.

B appartient-il à la courbe de f ?

$$f(-1) = 5 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) - 1 = 5 - 3 - 1 = 1$$

$f(x_B) \neq y_B$ donc B n'appartient pas à la courbe de f .

Remarques 10.

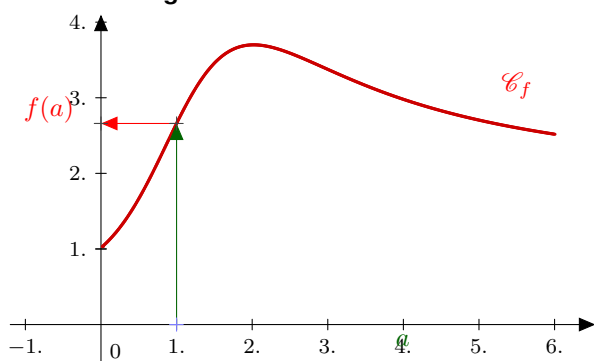
- Le tracé d'une courbe représentative est toujours approximatif : on construit un tableau de valeurs, on place les points correspondants dans un repère et on les relie par une courbe régulière.
- On peut utiliser la calculatrice pour remplir un tableau de valeurs et tracer des courbes représentatives.
- Certaines fonctions ne sont connues que par leur courbe représentative

Méthode 11. Déterminer graphiquement une image ou un antécédent par f

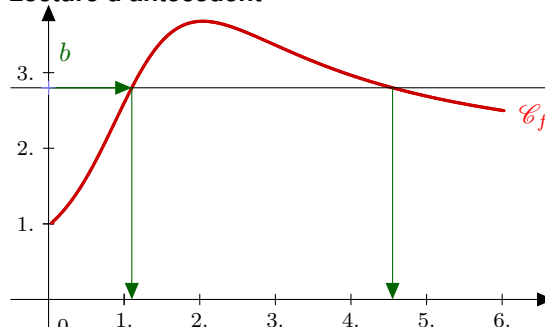
On se reportera à la figure ci dessous

- L'image de a est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a .
- Les antécédents de b sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est b .

Lecture d'image



Lecture d'antécédent



Remarque 12.

Soit f une fonction et k un nombre réel. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère et D_k la droite d'équation $y = k$ (parallèle à l'axe des abscisses). Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection entre \mathcal{C} et D_k .

⊗ Résoudre graphiquement $f(x) = m$ revient à déterminer les antécédents de m par f .

Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe

8

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x-3}{x^2+5}$. A le point d'abscisse 2 de la courbe représentative de f . Calculer l'ordonnée du point A .

Calculer.



/b/ABCD

9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ par $f(x) = \frac{4}{x+5}$.

Le point $B\left(3; \frac{1}{2}\right)$ appartient-il à la courbe représentative de f .

Calculer.



/b/ABCD

10

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 - 5x + 2$.

Démontrer que le point $A\left(\sqrt{3}; 5(1 - \sqrt{3})\right)$ appartient à la courbe représentative de h .

Calculer.



/b/ABCD

Exploiter la courbe d'une fonction f

Calculer.

On donne la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f ci-contre.

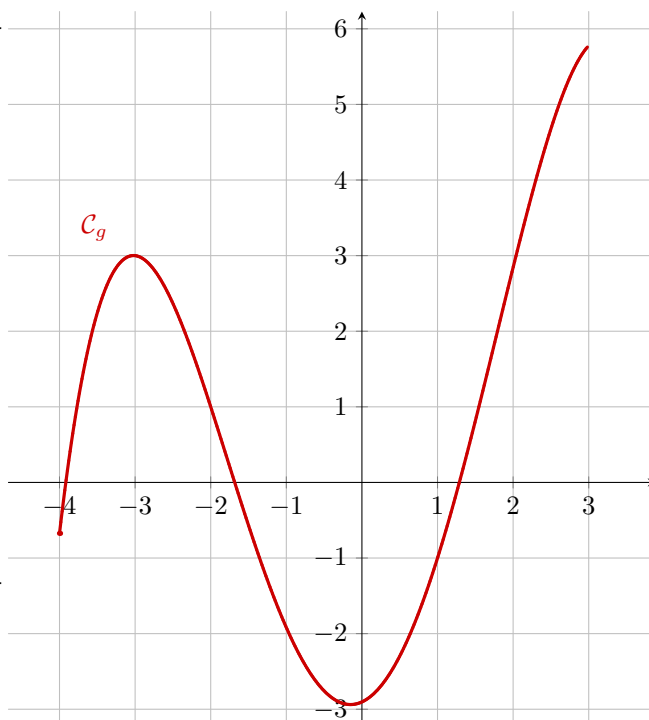
1. Lire le domaine de définition de f

2. Lire l'image de 1 par f

3. Lire $f(-2)$

4. Déterminer les antécédents de 3 par f

5. Est-il vrai que $f(x) = -1$ admet 2 solutions négatives?



/b/ABCD

3 Fonction générée par un tableau de valeurs

Définition 13: Tableau de valeurs.

Un tableau de valeurs d'une fonction f regroupe sur la première ligne des nombres du domaine de définition de f et sur la deuxième ligne, les images de chaque nombre par f .

Exemple 14.

La fonction f est exprimée par le tableau suivant :

x	-5	-3	-1	0	2	4
$f(x)$	4	2	1	2	0	-3

- L'image de -3 est 2 ou encore que $f(-3) = 2$.
- L'image de 2 est 0 ou encore que $f(2) = 0$.
- 2 a deux antécédents : -3 et 2 . c'est à dire $f(-3) = 0$ et $f(2) = 0$

Remarque 15.

- Le tableau de valeurs ne regroupe que quelques valeurs du domaine de définition. Il permet de tracer la courbe de la fonction f en utilisant les valeurs et leurs images comme coordonnées des points de la courbe.
- Pour compléter un tableau de valeurs, on utilise la calculatrice ou un algorithme.

4 Fonction définie par un algorithme

Définition 16: Algorithme.

Un **algorithme** est une suite finie d'opérations qui aboutit à un résultat. Une fonction peut se définir par un algorithme.

Exemple 17.

- | | | |
|--|--------------------|--|
| • Choisir un nombre (réel). | • x . | $x \in \mathbb{R}$ |
| • Ajouter 5. | • $x + 5$. | $x \mapsto x + 5 \mapsto (x + 5)(x + 5)$ |
| • Multiplier le résultat par lui-même. | • $(x + 5)(x + 5)$ | $x \mapsto f(x) = (x + 5)(x + 5)$ |

2 Parité d'une fonction

Définition 18: Parité d'une fonction.

Une fonction f définie sur un intervalle centré I est dite **paire** lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Algébriquement, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$.

Méthode 19.

Pour démontrer qu'une fonction est **paire**, on démontre que

1. \mathcal{D}_f est centré en 0.
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = f(-x)$.

Définition 20: Fonction impaire.

Une fonction f définie sur un intervalle centré I est dite **impair** lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Algébriquement, pour tout $x \in I$, $f(x) = -f(-x)$.

Méthode 21.

Pour démontrer qu'une fonction est **impair**, on démontre que

1. \mathcal{D}_f est centré en 0.
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = -f(-x)$.

Modéliser.



/b/ABCD

12 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 9$ sur $[-6; 4]$.

1. Compléter le tableau suivant.

x	-6	-4	-2	0	2	4
$f(x)$						

2. Déterminer $f(-2)$.

.....

3. Déterminer un antécédent de 9 par f .

.....

Modéliser.



/b/ABCD

13 Soit la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 - 5$ sur \mathbb{R} .

1. Écrire un programme de calcul en Python qui définit la fonction f .

.....

2. Compléter le tableau suivant en utilisant la fonction Python de la question 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						

Modéliser.



/b/ABCD

14 On donne l'algorithme suivant pour définir la fonction f .

- Choisir un nombre x compris entre -10 et 10 .
- Ajouter 5.
- Prendre le carré du résultat obtenu.
- Soustraire 3

1. Déterminer l'image de 4 par f

.....

2. Déterminer la fonction f en fonction de x

.....

Étudier la parité d'une fonction

15

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 6$ sur \mathbb{R} .
Démontrer que la fonction f est paire.

Modéliser.

16

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 5x + 6$ sur \mathbb{R} .

Modéliser.

1. La fonction f est-elle paire ?

.....

.....

.....

2. La fonction f est-elle impaire ?

.....

.....

.....

3 Variations et extremums

Théorème 22: Variations d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que

- f est **croissante** sur I pour exprimer que les nombres et leurs images augmentent conjointement. On formalise cette idée par : Soit x et x' deux réels de I tels que $x \leq x'$ et f croissante sur I , alors $f(x) \leq f(x')$
- f est **décroissante** sur I pour exprimer que lorsque les nombres augmentent, leurs images diminuent. On formalise cette idée par : Soit x et x' deux réels de I tels que $x \leq x'$ et f décroissante sur I , alors $f(x) \geq f(x')$.

Définition 23: Extremum d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- f admet un **maximum** M sur I signifie qu'il existe un réel a de I tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. $M = f(a)$. Graphiquement, $f(a)$ est l'ordonnée la plus grande de tous les points de la courbe de f .
- f admet un **minimum** m sur I signifie qu'il existe un réel b de I tel que pour tout $x \in I$, $f(b) \leq f(x)$. $m = f(b)$. Graphiquement, $f(b)$ est l'ordonnée la plus petite de tous les points de la courbe de f .
- f est bornée sur I lorsque f admet un minimum et un maximum sur I .

Définition 24: Tableau de variation.

Le **tableau de variation** d'une fonction f est un tableau qui synthétise les variations de la fonction f sur son domaine de définition.

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;">0</div> <div style="margin: 0 5px;"> </div> <div style="text-align: center;">2</div> </div>	$+\infty$

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;">0</div> <div style="margin: 0 5px;"> </div> <div style="text-align: center;">2</div> </div>	$+\infty$

Relier représentation graphique et tableau de variations.

Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.

Raisonner.

17



/b/ABCD

Calculer, raisonner.

18

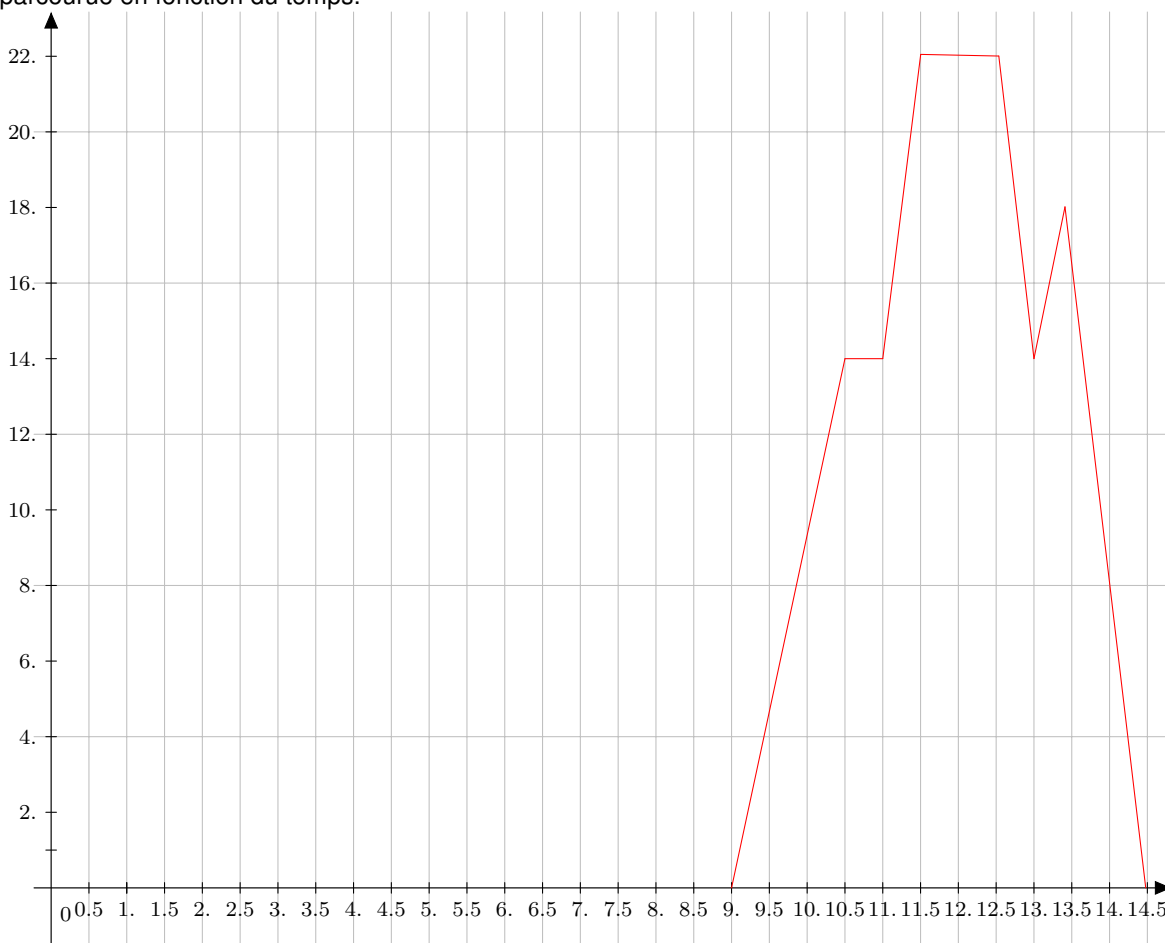


/b/ABCD



19

Au cours de ses vacances, Vincent effectue une promenade en vélo. Le graphique ci-dessous indique la distance parcourue en fonction du temps.



1. Sur quelles périodes de temps Vincent s'éloigne-il de sa maison ?

.....

2. A 10h30, à quelle distance de sa maison se trouve-t-il ?

.....

3. Que se passe-t-il entre 9h30 et 10h00 ?

.....

4. Quelle est sa vitesse moyenne entre 10h et 11h ?

.....

5. Quelle est sa vitesse moyenne entre 12h et 12h30 ? Et entre 14h et 14h30 ?

.....

Compétence.

20



Compétence.

21



Compétence.

22



Compétence.

23



Compétence.

24



Compétence.

25



26



On se propose de résoudre l'équation (E) : $\sqrt{x^2 + x + 1} = x$

1. Expliquer pourquoi cette équation ne peut pas admettre de solution négative.

.....

2. On cherche donc des solutions positives.

(a) Expliquer pourquoi si $x \geq 0$, alors $x^2 + x + 1 \geq 0$

.....

(b) Expliquer pourquoi alors, résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation (E') $x^2 + x + 1 = x^2$, avec $x \geq 0$

.....

(c) Résoudre l'équation (E').

.....

(d) Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

.....



/b/ABCD

27

Soit M un point de l'hyperbole \mathcal{H} d'équation $y = \frac{1}{x}$. On construit le point N tel que M soit le milieu de $[ON]$. Quel est le lieu des points N lorsque M décrit \mathcal{H} ?

.....

.....

28

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(\frac{1}{x+2} - 3\right)^2$ se décompose de la façon suivante :

$$f : x \mapsto x + 2 \mapsto \frac{1}{x+2} \mapsto \frac{1}{x+2} - 3 \mapsto \left(\frac{1}{x+2} - 3\right)^2$$

Décomposer, comme montré dans l'exemple, les fonctions suivantes à l'aide des fonctions affine, Carré et Inverse.

1. $g(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2$

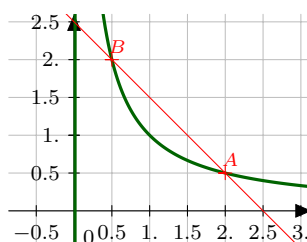
.....

2. $h(x) = \frac{1}{x^2+5} + 3$

.....

29

Sur la représentation graphique de g telle que $g(x) = \frac{1}{x}$, on a placé les points A et B d'abscisses respectives 2 et $\frac{1}{2}$.



1. Déterminer la fonction f affine représentée par la droite (AB)

.....

2. La droite (AB) coupe les axes en M et N . Montrer que les segments $[AB]$ et $[MN]$ ont même milieu.

.....

3. Soit P et Q deux points quelconques non confondus de l'hyperbole. La droite (AB) coupe les axes en M et N . Démontrer que les segments $[PQ]$ et $[MN]$ ont même milieu.

.....

30

1. $x > 5$, majorer $\frac{-6}{3-4x}$

.....

.....

.....

.....

2. $x \leq -1$, majorer $\frac{2}{x-7}$

.....

.....

.....

.....



/b/ABCD

Compétence.

31



Compétence.

32



Compétence.

33



Compétence.

34



Compétence.

35



/b/ABCD