Division euclidienne ① ❷ ❸

- ☐ Utiliser et écrire en ligne la division euclidienne de a par b, deux nombres entiers.
- ☐ Utiliser la définition de multiple ou un diviseur
- ☐ Déterminer des multiples ou des diviseurs d'un nombre donné

Définition 1. ***Division euclidienne dans $\mathbb{N}$***

Écrire la **division euclidienne** d´un nombre entier naturel a par un entier naturel b, tous deux non nuls, c'est déterminer les nombres entiers q et r tels que $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.
q est appelé le **quotient** de la division euclidienne de a par b.
r est appelé le **reste** de la division euclidienne de a par b.

Exemple

La division euclidienne de 254 par 7 s'écrit $254 = 7 \times 36 + 2$ (où 36 est le quotient et 2 le reste).

Attention.

$22 = 3 \times 5 + 7$ mais cette égalité n'est pas l'écriture de la division euclidienne de 22 par 5 ou par 3. En effet, $7 > 3$ et $7 > 5$!
L'égalité de la division euclidienne de 22 par 3 s'écrit : $22 = 3 \times 7 + 1$
L'égalité de la division euclidienne de 22 par 5 s'écrit : $22 = 5 \times 4 + 2$.

Définition 2. ***Multiples et diviseurs***

Dire que l´entier naturel a est **multiple** de l'entier naturel b signifie qu'il existe un entier naturel k tel que $a = b \times k$.
Autrement dit : Le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.
Autrement dit : Le nombre b et dans la table de multiplication du nombre a.
On dit aussi dans ce cas que b est un **diviseur** de a ou que a est **divisible** par b

Exemple

$252 = 36 \times 7$
On peut donc dire que 252 est un multiple de 7 , et aussi de 36.
On peut aussi dire que 7 est un diviseur de 252.
Ou : 252 a pour diviseur 7 ou 252 est divisible par 7 , et aussi par 26.

Multiples et diviseurs

❶ ② ③

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

☐ Déterminer si un entier est un multiple ou un diviseur d'un autre entier.

☐ Connaître les carrés parfaits de 1 à 144

Règle 1. Critères de divisibilités

Un nombre est divisible :

- Par 2 lorsque son chiffre des unités est 0 , 2, 4, 6 ou 8 ;
- Par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- Par 4 lorsque son chiffre des dizaines et celui des unités forment un nombre multiple de 4.
- Par 5 lorsque don chiffre des unités est 0 ou 5.
- Par 9 Lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- Par 10 lorsque son chiffre des unités est 0.

Applications à la simplification de fractions

① ❷ ❸

Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

☐ Savoir déterminer une fraction irréductible

Définition 3. ***écriture irréductible d'une fraction***

1. **Rappels** Une fraction est un quotient de deux nombres entiers (un numérateur est divisé par un dénominateur non nul)
2. Une fraction peut être simplifiée (on dit qu'elle est **réductible**) si son numérateur et son dénominateur sont divisibles par le même entier différent de 1
3. Une fraction est **irréductible** lorsqu´on ne peut pas la simplifier.
   Autrement dit : Son numérateur et son dénominateur n´ont pas de diviseurs communs autre que 1.
   Autrement dit : Son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple

La fraction $\frac{105}{60}$ n'est pas irréductible car $105 = 15 \times 7$ et $60 = 15 \times 4$.

On peut donc simplifier la fraction par 15 et on obtient : $\frac{105}{60} = \frac{15 \times 7}{15 \times 4} = \frac{7}{4}$

Ainsi, la fraction $\frac{7}{4}$ est irréductible.

Arithmetique

Nombres premiers

① ② ❸

- ☐ Savoir tester si un nombre est premier ou ne l'est pas en utilisant la calculatrice ou un logiciel
- ☐ Donner la liste des nombres premiers inférieurs à un entier donné (crible d'Eratosthène)
- ☐ Utiliser un algorithme pour savoir si un nombre est premier ou pas

Définition 4. ***Nombre premier***

Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Remarque

1 n'est pas premier.

Exemple

Les premiers nombres premiers sont 2 (qui est le seul nombre premier pair), 3,5,7,11,13,17,19,23,29, ...

Théorème 2.

Tout entier n avec $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.

Proposition 3.

Si n n'est pas premier et $n \geq 2$ alors il admet un diviseur premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$

Preuve :
Si n est premier, il admet bien un diviseur premier : lui-même.
Si n n'est pas premier alors il admet un plus petit diviseur positif $p \neq 1$. p est premier sinon p aurait lui-même un diviseur positif différent de 1 qui serait un diviseur de n, mais plus petit que p.
De plus, n peut s'écrire $n = p \times r$ avec $p \leq r$ donc $p^2 \leq p \times r$ soit $p^2 \leq n$ et $p \leq \sqrt{n}$

Remarque

On utilise ce théorème de la manière suivante :
Si un naturel $n \geq 2$ n'admet pas de diviseur premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$ alors n est premier.

Exemple

Pour savoir si 631 est premier, il suffit de tester tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{631} \approx 25,12$

Méthode Crible d'Eratosthène

1. Écrire dans un carré de 10×10 les 100 premiers nombres entiers
2. Barrer le 1, puis entourer le 2 car c'est un nombre premier, puis barrer tous les multiples de 2 qui, par définition, ne sont pas des nombres premiers.
3. Le nombre suivant dans la liste (3) est un nombre premier. L'entourer et barrer tous les multiples de 3 dans la liste.
4. En procédant de même, donner la liste de tous les nombres premiers, inférieurs ou égaux à 100

Théorème 4. Théorème fondamental de l'algèbre

Tout entier naturel strictement supérieur à 1 admet une décomposition, unique à l'ordre des facteurs près, en produit de nombres premiers.