Chapitre 10.

Fonctions de référence

Les savoir-faire du parcours

- SF1
- SF2

Les mathématiciennes et mathématiciens

Compétence.

1

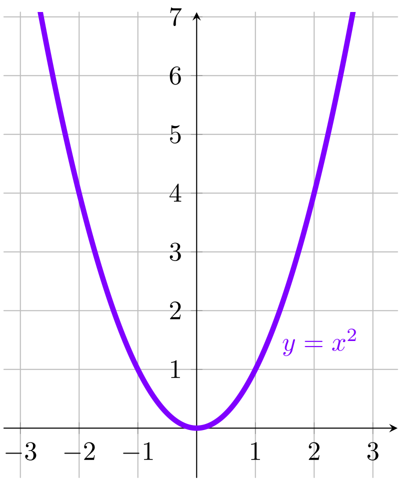
1 La fonction Carré

Définition 1: Fonction Carré.

La **fonction Carré** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
La **représentation graphique** de la fonction Carré s'appelle une **parabole** et son équation est $y = x^2$.

Théorème 2.

La fonction Carré f est paire.
La parabole d'équation $y = x^2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Théorème 3: Variations de la fonction Carré.

Démonstration exigible
La fonction Carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Preuve : Etude des variations de $f : x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$:
Soient a et b deux nombres appartenant à $[0; +\infty[$ tels que $a < b$.
Comparons les images de a et b par la fonction f.
$f(a) = a^2$ et $f(b) = b^2$
Pour les comparer on étudie le signe de leur différence :
$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- a et b appartiennent à $[0; +\infty[$ donc $a + b > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$
- $(a + b)(a - b) < 0 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0 \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) < f(b)$

Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans le même ordre que ces nombres. La fonction est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

2 La fonction Cube

Définition 4: Fonction Cube.

La **fonction Cube** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

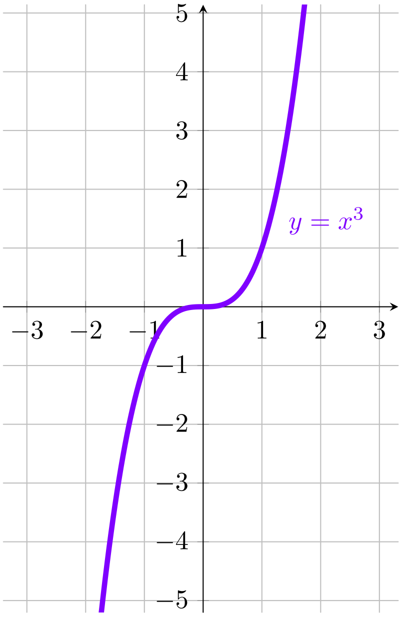
Théorème 5.

La fonction Cube f est impaire.
La courbe d'équation $y = x^3$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Théorème 6: Variations de la fonction Cube.

La fonction Cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗

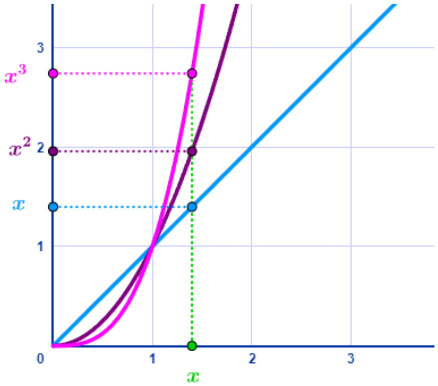


3 Positions relatives des courbes de x, x^2 et x^3

Propriété 7.

Démonstration exigible

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$.
- Si $x \geqslant 1$ alors $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$



Preuve : Comparaison de x et x^2 sur $[0; +\infty[$.
Pour les comparer, on étudie le signe de leur différence.
On définit la fonction f par $f(x) = x^2 - x$.
$f(x) = x^2 - x = x(x-1)$
On peut établir le tableau de signes de $f(x)$.
$(E) : f(x) = 0$ alors $S(E) = \{0; 1\}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

- $\forall x \in]0; 1[, f(x) < 0$ donc $x^2 - x < 0$ donc $x^2 < x$
- $\forall x \in]1; +\infty, f(x) > 0$ donc $x^2 - x > 0$ donc $x^2 > x$

Connaitre et utiliser la fonction Carré

2 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ et π^2

....

....

- $(-11)^2$ et $(-6)^2$

....

....

- -7^2 et -8^2

....

....

....

/b/ABCD

3 Raisonner. Calculer.

- Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[1;3]$.

....

....

- Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[-1;4]$.

....

....

....

/b/ABCD

Connaitre et utiliser la fonction Cube

4 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ et π^3

....

....

- $(-5)^3$ et $(-9)^3$

....

....

/b/ABCD

Position relatives des courbes

Raisonner. Communiquer.

5 Comparer la position relative des courbes de x^2 et x^3 sur $[0; +\infty]$.

....

....

....

....

....

/b/ABCD

4 La fonction Inverse

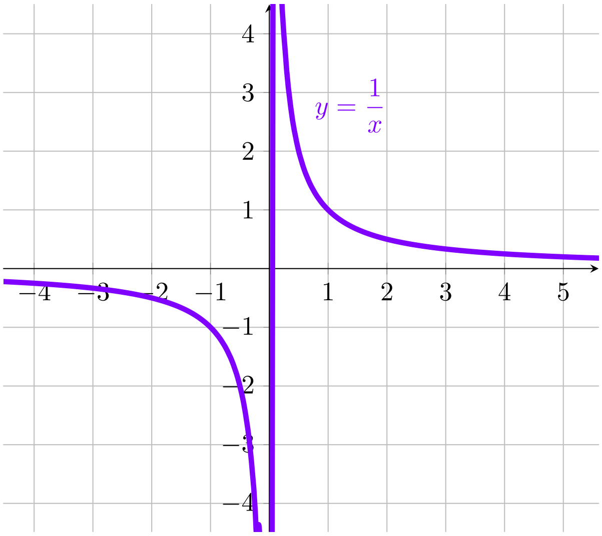
Définition 8: Fonction Inverse.

La **fonction Inverse** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

La **représentation graphique** de la fonction Inverse s'appelle une **hyperbole** et son équation est $y = \dfrac{1}{x}$.

Théorème 9.

La fonction Inverse f est impaire.
La hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Théorème 10: Variations de la fonction Inverse.

Démonstration exigible
La fonction Carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0 ↘	‖	↘ 0

Preuve : Étude des variations $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$.
Soient a et b deux nombres appartenant à $]-\infty; 0[$ tels que $a < b$.
Comparons les images de a et b par la fonction f.
$f(a) = \frac{1}{a}$ et $f(b) = \frac{1}{b}$
Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.
$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$

- a et b appartiennent à $]-\infty; 0[$ donc $ab > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$ donc $b - a > 0$
- $\frac{b-a}{ab} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow f(a) - f(b) > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans l'ordre contraire de celui de ces nombres. La fonction inverse est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$.

5 La fonction Racine carrée

Définition 11: Fonction Racine carrée.

La **fonction Racine carrée** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Remarque 12.

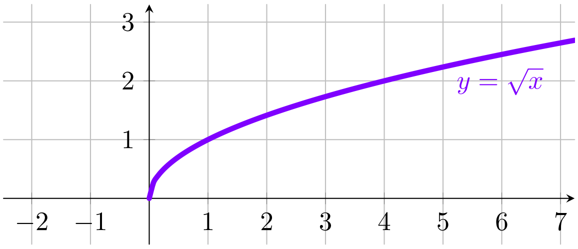
L'ensemble de définition de la fonction Racine Carrée n'est pas centré. Donc la fonction Racine carrée n'est ni paire, ni impaire.

Théorème 13: Variations de la fonction Racine Carrée.

Démonstration exigible

La fonction Racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	



Preuve : Etude des variations de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.
Soient a et b deux nombres appartenant à $[0; +\infty[$ tels que $a < b$.
Comparons les images de a et b par la fonction f.
$f(a) = \sqrt{a}$ et $f(b) = \sqrt{b}$
Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.
$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$
- $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < 0 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \Rightarrow f(a) - f(b) < 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans le même ordre que celui de ces nombres. La fonction racine carrée est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

Connaitre et utiliser les fonctions Inverse et Racine Carrée

6 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{1}{4}$
- $-\dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{1}{6}$
- $\sqrt{10}$ et $\sqrt{100}$

/b/ABCD

7 Raisonner.

Expliquer pourquoi la fonction Inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

8 Représenter. Raisonner.

Résoudre graphiquement les équations, puis retrouver les résultats algébriquement.

1. $\frac{1}{x} = 4$
2. $\sqrt{x} = 2$

/b/ABCD

Valider ces résultats par le calcul.

Raisonner. Calculer.

9

/b/ABCD

1. Déterminer algébriquement l'intervalle de $\frac{1}{x}$ lorsque x appartient à $[1;3]$.

....

....

....

2. Déterminer algébriquement l'intervalle de $\sqrt{x}$ lorsque x appartient à $[1;2]$.

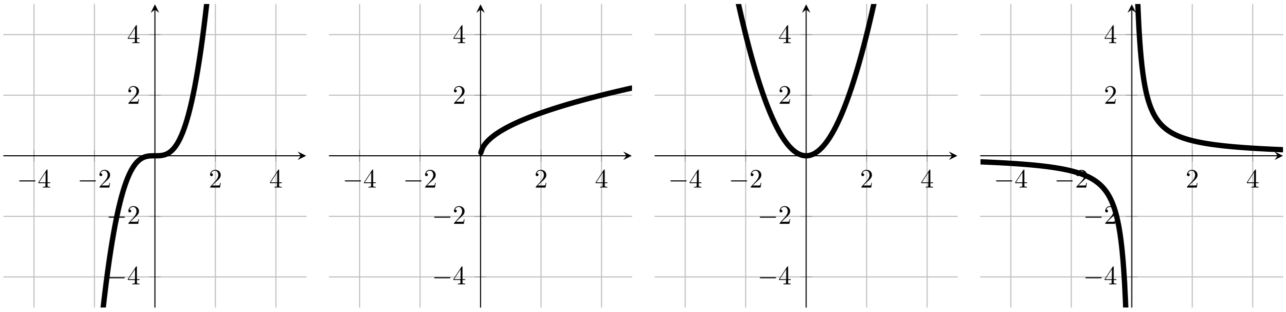
....

....

....

10 Représenter. Raisonner.

Associer à chaque représentation la fonction de référence qui lui correspond.



....

11 Raisonner. Communiquer.

Rappel : Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **paire** lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$.

Démontrer que $f : x \mapsto x^2$ est paire.

....

....

....

12 Compétence.

13 Compétence.

14 Compétence.

15 Compétence.

Raisonner. Communiquer.

16 Démontrer que $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $[-\infty; 0[$.

Raisonner. Communiquer.

17 En utilisant la propriété de parité de la fonction $x \mapsto x^2$, montrer que $2x^2 + 3$ est paire.

Compétence.

18

Compétence.

19

Compétence.

20

Compétence.

21

Compétence.

22

Raisonner. Communiquer.

23

Sachant que $a^3 - a^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, montrer que $f : x \mapsto x^3$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

Compétence.

24

Compétence.

25

Compétence.

26

Compétence.

27

28

Compétence.

29

Compétence.

30

Compétence.

31

Compétence.

32

Compétence.

/b/ABCD