CALCULS NUMÉRIQUES

I. Les savoir-faire du parcours

— Savoir traduire une phrase par un calcul
— Savoir déterminer l'opposé d'un nombre.
— Savoir déterminer l'inverse d'un nombre non nul.
— Savoir utiliser le vocabulaire des opérations.
— Savoir ajouter ou soustraire, multiplier ou diviser des nombres relatifs.
— Savoir effectuer un enchainement d'opérations avec des nombres relatifs.
— Savoir produire des fractions égales.
— Savoir déterminer si des fractions sont égales.
— Savoir ajouter ou soustraire, multiplier ou diviser des fractions.
— Savoir effectuer un enchainement d'opérations avec des fractions.
— Savoir résoudre un problème avec des fractions.

II. Vocabulaire

Définition 1. *Vocabulaire des opérations*

— La somme de deux nombres est le résultat de l'addition de ces nombres.
— La différence de deux nombres est le résultat de la soustraction de ces nombres.
— Le produit de deux nombres est le résultat de la multiplication de ces nombres.
— Le quotient de deux nombres est le résultat de la division de ces nombres.

Exemple
La phrase :

A est le produit de 20 par la différence de 7 par 2.

se traduit par la ligne de calcul :

$$A = 20 \times (7 - 2)$$

Définition 2. *Nombres opposés*

Deux nombres relatifs sont dit **opposés** lorsque leur **somme est égale à 0**.

Exemple
L'opposé du nombre -41 est $+41$. On a

$$-41 + 41 = 0$$

Propriété 1.

— Deux nombres **opposés** sont de **signes contraires**.
— L'opposé d'un nombre a se note $-a$ et il vérifie : $a + (-a) = 0$ et $-a = (-1) \times a$

Définition 3. *Nombres inverses*

Deux nombres non nuls sont dits **inverses** lorsque leur **produit est égal à 1**.

Exemple

L'inverse du nombres $-0,1$ est -10. On a :

$$-0,1 \times -10 = 1$$

Propriété 2.

- Deux nombres **inverses** sont de **même signes**.
- L'inverse d'un nombre a non nul se note $\frac{1}{a}$ et il vérifie : $a \times \frac{1}{a} = 1$ et $1 \div a = \frac{1}{a}$

III. Opérations avec des nombres relatifs

Propriété 3. Addition de deux nombres relatifs

- Pour additionner des nombres relatifs de même signe, on garde leur signe commun et on ajoute leur partie numérique.
- Pour additionner des nombres relatifs de signes contraires, on garde le signe de celui qui a la plus grande partie numérique et on calcule la différence entre la plus grande partie numérique et la plus petite.

Exemple

Calcul de la somme : $A = (-3) + (+15)$
$(+15)$ et (-3) ne sont pas de même signe, on soustrait $15 - 3 = 12$ et on conserve le signe de $(+15)$

$$A = (+15) + (-3) = 12$$

Propriété 4. Soustraction de deux nombres relatifs

Soustraire un nombre revient à **ajouter son opposé**.

Exemple

Calcul de la différence : $A = (-144) - (+1)$

$$A = (-144) + (-1) = -145$$

Propriété 5. Multiplication de deux nombres relatifs

- Le **produit** de deux nombres de **même signe** est **positif**.
- Le **produit** de deux nombres de **signes contraires** est **négatif**.

Exemple

Calcul du produit : $A = (+12) \times (-4)$
Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif, donc A est négatif. On a :

$$A = -48$$

Propriété 6. Division de deux nombres relatifs

- Le **quotient** de deux nombres de **même signe** est **positif**.
- Le **quotient** de deux nombres de **signes contraires** est **négatif**.

Exemple

Calcul du quotient : $A = (-135) \div (-15)$
Le quotient de deux nombres de même signe est positif, donc A est positif. On a :

$$A = +9$$

On vérifie que : $(+9) \times (-15) = -135$

IV. Signe d'un produit ou d'un quotient

Propriété 7. Signe d'un produit de plusieurs facteurs

Si dans un **produit** de **plusieurs facteurs** :

- Il y a un **nombre pair** de facteurs **négatifs**, alors le produit est **positif**.
- Il y a un **nombre impair** de facteurs **négatifs**, alors le produit est **négatif**.

Exemple

Pour déterminer le signe de :

$$A = -(-4) \times (-6) \times (-8) = (-1) \times (-4) \times (-6) \times (-8)$$

Il y a un nombre pair de facteurs négatifs, donc A est un nombre positif.

Remarque

Les mêmes règles s'appliquent dans le cas d'un **quotient**.

Exemple

Pour déterminer le signe de :

$$A = -\frac{(+1) \times (-9)}{(+9)} = \frac{(-1) \times (+1) \times (-9)}{(+9)}$$

Il y a un nombre pair de facteurs négatifs, donc A est un nombre positif.

V. Fractions égales

Propriété 8.

Un **quotient ne change pas** si on divise ou on multiplie son numérateur et son dénominateur par un **même nombre** non nul.
Traduction en langage mathématique : Pour tous nombres a, b et k ($b \neq 0$ et $k \neq 0$),

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

Exemple

$$\frac{72}{45} = \frac{72 \div 9}{45 \div 9} = \frac{8}{5}$$

Reconnaitre des fractions égales

Propriété 9. Fractions égales et produit en croix

Pour tous nombres a, b, c et d (b et d non nuls) :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = c \times b$$

Exemple

Pour déterminer si $\frac{168}{105}$ et $\frac{160}{100}$ sont égales, on effectue le produit en croix :

$168 \times 100 = 168\,000$ $\qquad$ $105 \times 160 = 168\,000$

donc $168 \times 100 = 105 \times 160$ donc $\frac{168}{105} = \frac{160}{100}$

Compléter une égalité de fractions

VI. Fractions et nombres relatifs

Définition 4. *Opposé d'une fraction*

L'opposé d'une fraction $\frac{a}{b}$ se note $-\frac{a}{b}$ ou $\frac{-a}{b}$

Exemple

L'opposé de la fraction $\frac{2}{19}$ est noté $-\frac{2}{19}$. En effet :

$$\frac{2}{19}+(-\frac{2}{19})=\frac{2-2}{19}=\frac{0}{19}=0$$

Propriété 10.

Pour tous nombres a et b (b non nul), on a :

$$\frac{-a}{-b} \qquad -\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$$

Déterminer le signe d'une fraction

Simplifier une fraction avec des nombres relatifs

VII. Opérations avec des fractions

Propriété 11. Ajouter ou soustraire des fraction

Pour **ajouter** (ou **soustraire**) deux fractions de **même dénominateur**, il suffit d'**ajouter** (ou de **soustraire**) les **numérateurs** et de conserver le dénominateur commun.
Traduction en langage mathématiques :
Pour tous nombres a, b et c ($c \neq 0$)

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{b}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Exemple

Calcul de : $A=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$

$$A=\frac{3\times 2}{2\times 2}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}-\frac{1}{4}=\frac{6-1}{4}=\frac{5}{4}$$

Remarque

Si les fractions ont des dénominateurs différents, il faut les réduire au même dénominateur pour pouvoir les ajouter ou les soustraire.

Propriété 12. Multiplier des fractions

Pour **multiplier** deux fractions, il suffit de **multiplier les numérateurs** entre eux et **les dénominateurs** entre eux.

Exemple

Calcul de : $A = \frac{4}{6} \times \frac{3}{9}$

$$A = \frac{4 \times 3}{6 \times 9} = \frac{12}{54}$$

On peut simplifier :

$$A = \frac{12}{54} = \frac{2 \times 6}{9 \times 6} = \frac{2}{9}$$

Propriété 13. Diviser des fractions

Pour tous nombres a, b, c et d (b, c et d non nuls). On a :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple

Calcul de : $A = \frac{12}{5} \div \frac{9}{10}$

$$A = \frac{12}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{2 \times 2 \times 3}{5} \times \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{8}{3}$$