Chapitre 10.

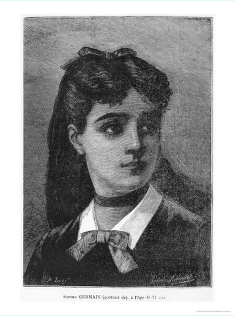
Fonctions de référence

Les savoir-faire du parcours

- Savoir étudier la parité d'une fonction.
- Savoir déterminer graphiquement la parité d'une fonction.
- Savoir étudier les variations de la fonction carré.
- Savoir comparer des images par la fonction carré.
- Savoir résoudre une équation, inéquation avec la fonction carré.
- Savoir étudier les variations de la fonction cube.
- Savoir comparer des images par la fonction cube.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction cube.
- Savoir étudier les variations de la fonction inverse.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction inverse.
- Savoir étudier les variations de la fonction racine carrée.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction racine carrée.
- Savoir reconnaitre une fonction de référence.

Les mathématiciennes et mathématiciens

Sophie Germain (1776-1831) était une mathématicienne française pionnière du XIXe siècle. Malgré les obstacles dus à sa condition de femme, elle a contribué de manière significative à la théorie des nombres et à la théorie des équations diophantiennes. Elle a utilisé un pseudonyme masculin pour correspondre avec d'autres mathématiciens, dont Carl Friedrich Gauss, et a été la première femme à recevoir la médaille de l'Académie des Sciences de Paris. Ses travaux ont jeté les bases de la théorie des nombres modernes.



Compétence.

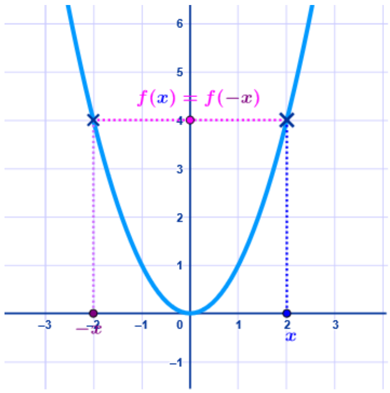
1

1 Fonctions paires, fonctions impaires

Définition 1: Fonction paire.

On dit qu'une fonction f est **paire** si :

- $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$



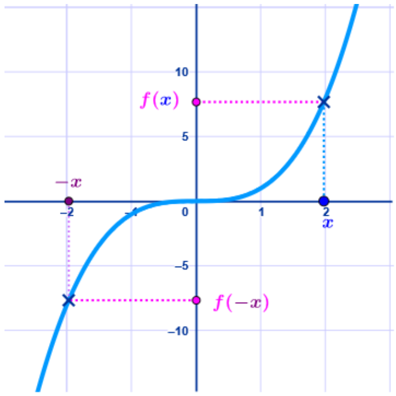
Remarque 2.

La **courbe représentative** d'une fonction pair est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.

Définition 3: Fonction impaire.

On dit qu'une fonction f est **impaire** si :

- $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$



Remarque 4.

La **courbe représentative** d'une fonction pair est **symétrique** par rapport à l'**origine du repère**.

2 La fonction Carré

Définition 5: Fonction Carré.

La **fonction Carré** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
La **représentation graphique** de la fonction Carré s'appelle une **parabole** et son équation est $y = x^2$.

Théorème 6.

La fonction Carré f est paire.
La parabole d'équation $y = x^2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorème 7: Variations de la fonction Carré.

Démonstration exigible

La fonction Carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Preuve : Etude des variations de $f : x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$:
Soient a et b deux nombres appartenant à $[0; +\infty[$ tels que $a < b$.
Comparons les images de a et b par la fonction f.
$f(a) = a^2$ et $f(b) = b^2$
Pour les comparer on étudie le signe de leur différence :
$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

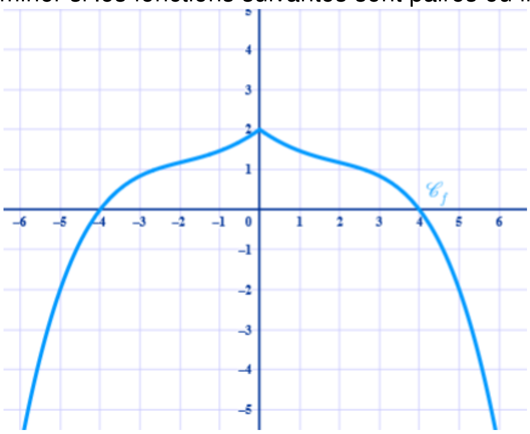
- a et b appartiennent à $[0; +\infty[$ donc $a + b > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$
- $(a+b)(a-b) < 0 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0 \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) < f(b)$

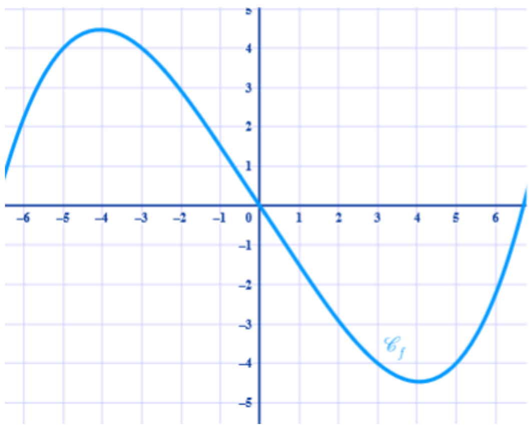
Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans le même ordre que ces nombres. La fonction est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

Parité d'une fonction

2 Représenter. Raisonner.

Déterminer si les fonctions suivantes sont paires ou impaires.





La fonction est .... La fonction est ....

/b/ABCD

3 Raisonner.

A partir de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est **paire**.
La fonction f est définie sur l'ensemble des réels, ainsi : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$.
Montrons que l'image de $-x$ par la fonction f est égale à l'image de x.
$f(-x) = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2 = f(x)$.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est paire.

/b/ABCD

Connaitre et utiliser la fonction Carré

4 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ et π^2

....

....

- $(-11)^2$ et $(-6)^2$

....

....

- -7^2 et -8^2

....

....

....

/b/ABCD

Raisonner. Calculer.

5

- Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[1;3]$.

....

....

/b/ABCD

- Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[-1;4]$.

....

....

....

3 La fonction Cube

Définition 8: Fonction Cube.

La **fonction Cube** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

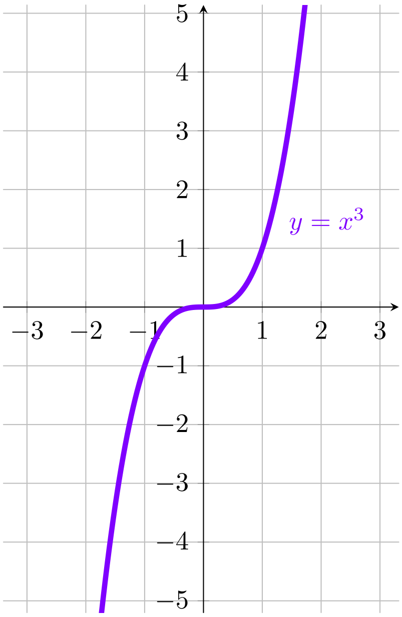
Théorème 9.

La fonction Cube f est impaire.
La courbe d'équation $y = x^3$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Théorème 10: Variations de la fonction Cube.

La fonction Cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	



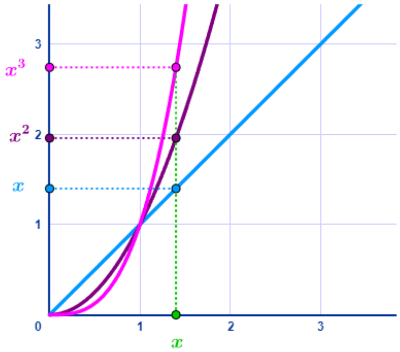
4 Positions relatives des courbes de x, x^2 et x^3

Propriété 11.

Démonstration exigible

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$.
- Si $x \geqslant 1$ alors $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Preuve : Comparaison de x et x^2 sur $[0;+\infty[$.
Pour les comparer, on étudie le signe de leur différence.
On définit la fonction f par $f(x)=x^2-x$.
$f(x)=x^2-x=x(x-1)$
On peut établir le tableau de signes de $f(x)$.
$(E) : f(x)=0$ alors $S(E)=\{0;1\}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

- $\forall x \in]0;1[$, $f(x)<0$ donc $x^2-x<0$ donc $x^2<x$
- $\forall x \in]1;+\infty$, $f(x)>0$ donc $x^2-x>0$ donc $x^2>x$

Connaitre et utiliser la fonction Cube

6 Raisonner.

A partir de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^3$ est **impaire**.
La fonction f est définie sur l'ensemble des réels, ainsi : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$.
Montrons que l'image de $-x$ par la fonction f est égale à l'inverse de l'image de x.
$f(-x) = (-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x) = x^2 \times (-x) = -x^3 = -f(x)$.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto x^3$ est impaire.

/b/ABCD

7 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ et π^3

....

....

- $(-5)^3$ et $(-9)^3$

....

....

/b/ABCD

Position relatives des courbes

8 Raisonner. Communiquer.

Comparer la position relative des courbes de x^2 et x^3 sur $[0; +\infty]$.
Pour comparer la position relative des courbes de x^2 et x^3 on étudie le signe de leur différence.
On définit la fonction f par $f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$
On peut établir le tableau de signe de $f(x)$.
$(E) : f(x) = 0$ alors $S(E) = \{0; 1\}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

- $\forall x \in]0; 1[, f(x) < 0$ donc $x^3 - x^2 < 0$ donc $x^3 < x^2$
- $\forall x \in]1; +\infty, f(x) > 0$ donc $x^3 - x^2 > 0$ donc $x^3 > x^2$

/b/ABCD

9 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

....

....

- $\frac{10}{9}$ et $\left(\frac{10}{9}\right)^2$

....

....

/b/ABCD

5 La fonction Inverse

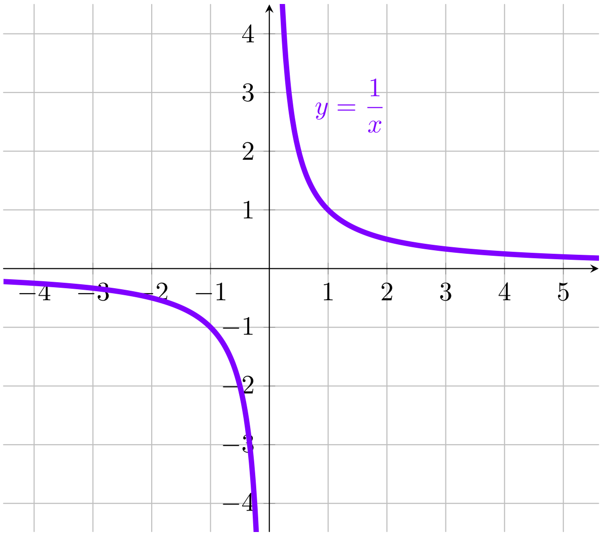
Définition 12: Fonction Inverse.

La **fonction Inverse** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

La **représentation graphique** de la fonction Inverse s'appelle une **hyperbole** et son équation est $y = \dfrac{1}{x}$.

Théorème 13.

La fonction Inverse f est impaire.
La hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Théorème 14: Variations de la fonction Inverse.

Démonstration exigible
La fonction Carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Preuve : Étude des variations $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$.
Soient a et b deux nombres appartenant à $]-\infty; 0[$ tels que $a < b$.
Comparons les images de a et b par la fonction f.
$f(a) = \frac{1}{a}$ et $f(b) = \frac{1}{b}$
Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.
$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$

- a et b appartiennent à $]-\infty; 0[$ donc $ab > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$ donc $b - a > 0$
- $\frac{b-a}{ab} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow f(a) - f(b) > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans l'ordre contraire de celui de ces nombres. La fonction inverse est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$.

6 La fonction Racine carrée

Définition 15: Fonction Racine carrée.

La **fonction Racine carrée** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Remarque 16.

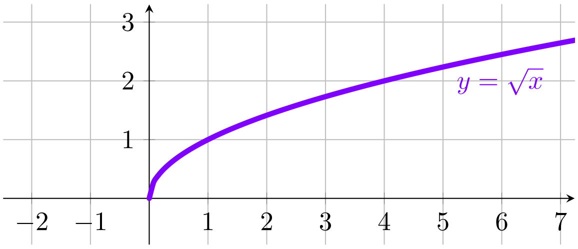
L'ensemble de définition de la fonction Racine Carrée n'est pas centré. Donc la fonction Racine carrée n'est ni paire, ni impaire.

Théorème 17: Variations de la fonction Racine Carrée.

Démonstration exigible

La fonction Racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	



Preuve : Etude des variations de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$.
Soient a et b deux nombres appartenant à $[0;+\infty[$ tels que $a < b$.
Comparons les images de a et b par la fonction f.
$f(a) = \sqrt{a}$ et $f(b) = \sqrt{b}$
Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.
$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$
- $a < b$ donc $a - b < 0$
- $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < 0 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \Rightarrow f(a) - f(b) < 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

Les images de a et b par la fonction f sont rangés dans le même ordre que celui de ces nombres. La fonction racine carrée est donc croissante sur $[0;+\infty[$.

Connaitre et utiliser les fonctions Inverse et Racine Carrée

Raisonner.

10 A partir de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est **impaire**.
La fonction f est définie sur l'ensemble des réels privé de 0, ainsi : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$.
Montrons que l'image de $-x$ par la fonction f est égale à l'inverse de l'image de x.
$f(-x) = \frac{1}{-x} = -(\frac{1}{x}) = -f(x)$.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire.

/b/ABCD

Raisonner.

11 Comparer sans les calculer.

- $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$

....

....

- $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{6}$

....

....

....

- $\sqrt{10}$ et $\sqrt{100}$

....

....

/b/ABCD

Raisonner.

12 Expliquer pourquoi la fonction Inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

....

....

....

Représenter. Raisonner.

13 Résoudre graphiquement les équations, puis retrouver les résultats algébriquement.

1. $\frac{1}{x} = 4$ ....

....

2. $\sqrt{x} = 2$ ....

....

/b/ABCD

Valider ces résultats par le calcul.

....

....

....

Raisonner. Calculer.

14

/b/ABCD

1. Déterminer algébriquement l'intervalle de $\frac{1}{x}$ lorsque x appartient à $[1;3]$.

....

....

....

2. Déterminer algébriquement l'intervalle de $\sqrt{x}$ lorsque x appartient à $[1;2]$.

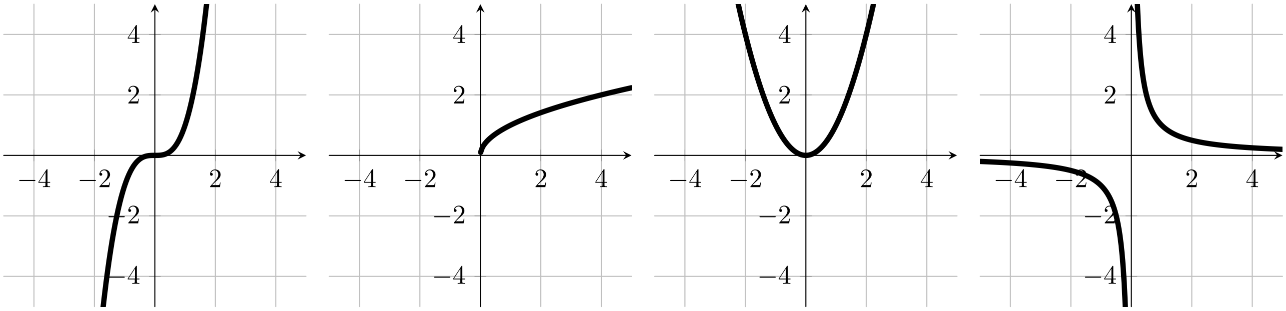
....

....

....

15 Représenter. Raisonner.

Associer à chaque représentation la fonction de référence qui lui correspond.



16 Compétence.

17 Compétence.

18 Compétence.

19 Compétence.

20 Compétence.

Raisonner. Communiquer.

21 Démontrer que $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $[-\infty ; 0[$.

....

....

....

....

....

Raisonner. Communiquer.

22 En utilisant la propriété de parité de la fonction $x \mapsto x^2$, montrer que $2x^2 + 3$ est paire.

....

....

....

Compétence.

23

Compétence.

24

Compétence.

25

Compétence.

26

Compétence.

27

Raisonner. Communiquer.

28

Sachant que $a^3 - a^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, montrer que $f : x \mapsto x^3$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

....

....

....

....

....

Compétence.

29

Compétence.

30

Compétence.

31

Compétence.

32

33

Compétence.

34

Compétence.

35

Compétence.

36

Compétence.

37

Compétence.

/b/ABCD