Chapitre 13.

Géométrie analytique



Les savoir-faire du parcours

- · Savoir représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Savoir calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Savoir calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Savoir caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

Les mathématiciennes et mathématiciens

Compétence.

1

1

Bases de vecteurs, repère du plan.

Propriété 1: Exprimer un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires...

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires.

Tout vecteur \vec{w} peut s'exprimer en fonction de \vec{u} et de \vec{v} .

Définition 2: Base de vecteurs.

On dit que deux vecteurs non colinéaires \vec{i} et \vec{j} forment une base des vecteurs du plan. On note cette base $(\vec{i};\vec{j})$

Définition 3: Repère du plan.

Soit O est un point et \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs non colinéaires.

On dit que le triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

Le point O s'appelle l'origine du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 4.

On dit que le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est :

- orthogonal si les vecteurs \vec{i} et \vec{j} ont des directions perpendiculaires.
- orthonormé s'il est orthogonal et si les vecteurs \vec{i} et \vec{j} ont la même longueur.

2

Coordonnées d'un point, d'un vecteur dans un repère.

Définition 5: Coordonnées d'un point du plan..

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère et M un point.

On appelle coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'unique couple de nombres $(x_M; y_M)$ tel que $OM = x_M \vec{i} + y_M \vec{j}$

Définition 6: Coordonnées d'un vecteur dans le plan..

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère et \vec{u} un vecteur.

Soit M le point tel que $\vec{u} = \vec{OM}$.

Les coordonnées du vecteur \vec{u} sont les coordonnées de $M. \label{eq:decoordon}$

Remarque 7.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dire que \vec{u} a pour coordonnées $(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ signifie que $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j}$.

Propriété 8: Coordonnées d'un vecteur défini par deux points..

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

 $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.

Le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées :

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Premier SF Compétence. 2 **Deuxième SF** Compétence. 3 **Troisième SF** Compétence.

3

Calculs des coordonnées d'un vecteur

Propriété 9.

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Soit $\vec{u}(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$ deux vecteurs et k un nombre réel.

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}}$
- $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(k \times x_{\vec{u}}; k \times y_{\vec{u}})$.
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}; y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}})$.

4

Condition analytique de colinéarité.

Définition 10: Déterminant de deux vecteurs.

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère, $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}}; y_{\vec{v}})$ deux vecteurs.

On appelle déterminant de \vec{u} et de \vec{v} le nombre :

$$det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} = x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}$$

Propriété 11: Condition analytique de colinéarité.

Démonstration exigible

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

$$\vec{u}$$
 et \vec{v} sont colinéaires

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Preuve:

Montrons que si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Soit $\vec{u}(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$ deux vecteurs colinéaires.

Alors il existe un nombre k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$ donc $x_{\vec{v}}=k\times x_{\vec{u}}$ et $y_{\vec{v}}=k\times y_{\vec{u}}.$

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}$$

donc
$$det(\vec{u}, \vec{v}) = x_{\vec{u}} \times k \times y_{\vec{u}} - y_{\vec{u}} \times k \times x_{\vec{u}} = 0$$

Montrons que si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Si \vec{u} et \vec{v} sont nuls alors ils sont colinéaires. On suppose que \vec{u} et \vec{v} ne sont pas tous les deux nuls (par exemple $x_{\vec{u}} \neq 0$.

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} = 0$$
$$\Leftrightarrow x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}$$

Si
$$x_{\vec{u}} \neq 0$$
 alors $y_{\vec{v}} = \frac{y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} \times y_{\vec{u}}$

On pose $\dfrac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}}=k$ alors $y_{\vec{v}}=k\times y_{\vec{u}}$ et comme $x_{\vec{v}}=k\times x_{\vec{u}}$ alors $\vec{v}=k\vec{u}$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Premier SF Compétence. 5 **Deuxième SF** Compétence. 6 **Troisième SF** Compétence.

Applications

Propriété 12: Coordonnées du milieu d'un segment.

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan et $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points. Soit M le milieu de [AB] alors :

$$M(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$$

Propriété 13: Distance dans un repère orthonormé.

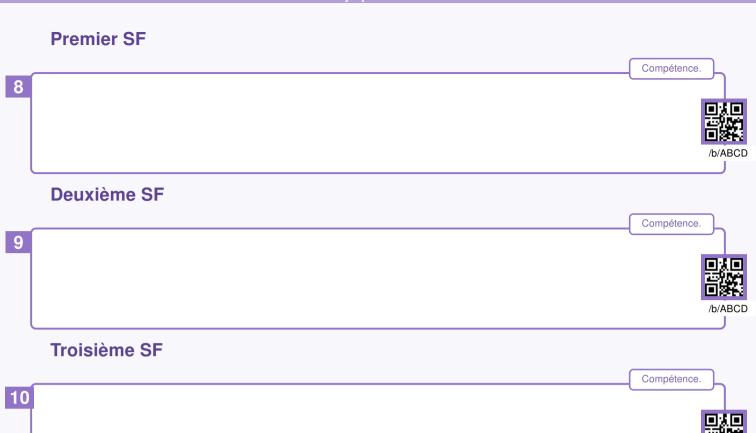
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points, alors :

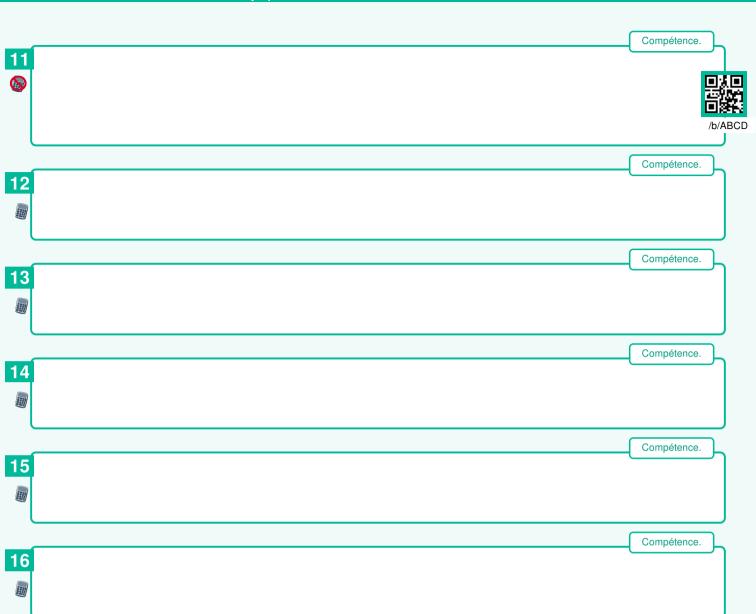
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Propriété 14: Norme d'un vecteur dans un repère orthonormé.

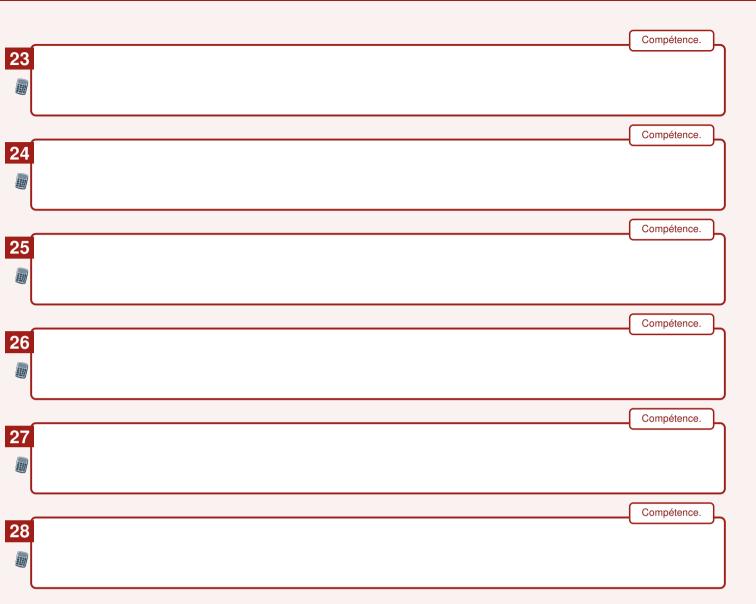
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ un vecteur, alors :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}$$









31

