Chapitre 5.

Calculs numériques

Les savoir-faire du parcours

- Effectuer des calculs numériques mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Calculs avec les relatifs, avec les rationnels.
- Calculs avec les puissances.
- Calculs avec les racines carrées.
- Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées. $\sqrt{a^2} = |a|$

Les mathématiciennes et mathématiciens

François Viète (1540-1603) est un mathématicien français. En 1591, il publie *In artem analyticem isagoge* qui représente une avancée considérable pour l'algèbre.
Le calcul littéral trouve ses bases dans le but de résoudre tout problème.
Les grandeurs cherchées sont désignées par des voyelles et les grandeurs connues par des consonnes.
Les symboles d'opérations sont officialisés.

1

Compétence.

–

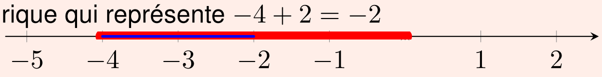
1 Calculs avec les relatifs

Théorème 1: Addition de relatifs.

Pour additionner deux nombres relatifs **de même signe**, on additionne leur partie numérique et on conserve le signe, on soustrait leur partie numérique et on conserve le signe de la plus grande partie numérique.
Pour additionner deux nombres relatifs **de signes différents**, on soustrait leur partie numérique et on conserve le signe de la plus grande partie numérique.

Remarque 3.

On peut aussi imaginer la droite graduée numérique qui représente $-4+2=-2$



Théorème 2: Soustraction de relatifs.

Pour soustraire deux nombres relatifs, on soustrait leur partie numérique et on conserve le signe de la plus grande partie numérique.

Théorème 4: Produit de plusieurs nombres relatifs.

Le produit de plusieurs nombres relatifs est positif s'il comporte un nombre pair de facteurs négatifs.
Le produit de plusieurs nombres relatifs est négatifs s'il comporte un nombre impair de facteurs négatifs.

2 Calculs avec les rationnels

Définition 5: Addition ou soustraction de deux nombres rationnels.

Pour additionner ou soustraire deux nombres rationnels, il faut les réduire au même dénominateur puis ajouter ou soustraire leur numérateur.
Soit a, b, c et d 4 nombres tels que b et d sont non nuls, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

Exemple 6.

$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\times7}{5\times7}+\frac{2\times5}{5\times7}=\frac{3\times7+2\times5}{5\times7}=\frac{31}{35}$

Définition 7: Multiplication de deux nombres rationnels.

Pour multiplier deux nombres rationnels, on multiplie les dénominateurs entre eux et les numérateurs entre eux. Mais dans tous les cas, il faut penser à la simplification avant de conclure le résultat.
Soit a, b, c et d 4 nombres tels que b et d sont non nuls, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

Exemple 8.

$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times3}{5\times4}=\frac{2\times3}{5\times2\times2}=\frac{3}{5\times2}=\frac{3}{10}$

Définition 9: Division de deux nombres rationnels.

Pour diviser deux nombres rationnels, on multiplie le premier nombres rationnel par l'inverse du second nombre rationnel.
Soit a, b, c et d 4 nombres tels que b et d sont non nuls, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Exemple 10.

$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$

Effectuer des calculs numériques avec les relatifs

2 Calculer.

Calculer les nombres suivants : $A = 11 - (-6) =$ ....

$B = 20 - (-4) + (-2) =$ ....

$C = -11,9 + 19,7 =$ ....

$D = -7 + 9 + 2 + (-7) =$ ....

/b/ABCD

3 Raisonner.

1. Parmi ces 4 résultats lesquels sont égaux à 26 ?
   13×2 $\quad$ 13×-2 $\quad$ $(-13) \times (-2)$ $\quad$ -13×2
2. Parmi ces 4 résultats lesquels sont égaux à -49 ?
   $(-7) \times (+7)$ $\quad$ $(+7) \times (+7)$ $\quad$ $(+7) \times (-7)$ $\quad$ $(-7) \times (-7)$
3. Parmi ces 4 résultats lesquels sont égaux à -18 ?
   $(-9) \times (+2)$ $\quad$ $-(+9) \times (-2)$ $\quad$ $-(-9) \times (-2)$ $\quad$ $-(-9) \times (+2)$

/b/ABCD

4 Compétence.

Détermine le signe des calculs suivants :

/b/ABCD

3 Calculs avec les puissances

Définition 11: Puissance du nombre.

Soit a un nombre réel et n un entier, on appelle **puissance du nombre** a, le nombre a^n où a est la base et n est l'exposant. La puissance est donc un résultat. On lit "a *exposant* n" ou abusivement "a *puissance* n".

Définition 12: Inverse d'un nombre.

Soit a un nombre réel non nul, on appelle **inverse du nombre** a, le nombre b tel que $ab = 1$. On l'écrit $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$

Théorème 13: Règles opératoires.

Soit a et b deux nombres réels, n et m deux entiers relatifs.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $a \neq 0$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^0 = 1$
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $b \neq 0$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Exemple 14.

- $3^2 \times 3^5 = 3^7 = 2187$
- $\left(4^2\right)^3 = 4^6 = 4096$
- $\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1}$
- $a^0 = 1$
- $5^3 \times 2^3 = 10^3 = 1000$
- $\frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$

4 Calculs avec les racines carrées

Définition 15: Racine carrée du nombre.

Soit a un nombre réel positif, on appelle **la racine du nombre** a, le nombre $\sqrt{a}$ tel que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Théorème 16: Règles opératoires.

Soit a et b deux nombres réels positifs.

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- $\sqrt{a}^2 = a$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{0} = 0$
- $b \neq 0$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Exemple 17.

- $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$
- $\sqrt{7}^2 = 7$
- $\sqrt{(-2)^2} = |2| = 2$
- $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

Savoir calculer avec des puissances

5 Calculer.

/b/ABCD

6 Calculer. Raisonner.

/b/ABCD

Savoir calculer avec des racines carrées

7 Calculer.

Effectuer les calculs suivants :

$A = \frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{1-\sqrt{5}} =$ ....

$B = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2} =$ ....

/b/ABCD

8 Calculer.

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$ les nombres suivants :

$A = \sqrt{8} =$	$E = \sqrt{12} =$ ....
$C = \sqrt{20} =$	$F = \sqrt{72} =$ ....

/b/ABCD

9 Raisonner. Calculer.

Simplifier les écritures :

$A = \frac{\sqrt{20}}{4} =$ ....

....

$B = \frac{2-\sqrt{8}}{4} =$ ....

....

$C = \left(3-\sqrt{5}\right)^2 =$ ....

....

$D = \sqrt{18}\sqrt{2} =$ ....

....

$E = \sqrt{12} + \sqrt{45} =$ ....

....

$F = \sqrt{18} - \sqrt{72} + \sqrt{32} =$ ....

....

/b/ABCD

10 Calculer.

0 Effectuer les calculs suivants :

$A = -\frac{20}{16} \times \frac{4}{17} =$ ....

$B = \frac{35}{24} \times \frac{18}{15} =$ ....

11 Calculer.

0 Effectuer les calculs suivants :

$C = -\frac{-4}{10} \div \frac{20}{16} =$ ....

$D = \frac{12}{11} \div \frac{10}{9} =$ ....

12 Calculer.

0

Écrire sous forme irréductible la fraction

$A = \frac{-6\times(-5)\times(-12)}{9\times(-4)\times3\times(-10)} =$ ....

....

....

13 Calculer.

Effectuer les calculs suivants. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles :

$A = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} =$ ....

....

$B = \frac{12}{5} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) =$ ....

....

$C = \frac{-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}} =$ ....

....

/b/ABCD

14 Représenter. Chercher.

On pose $a = 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \frac{20}{3}$. Démontrer que $\sqrt{a}$ est un nombre décimal. ....

....

....

....

/b/ABCD

15 Représenter. Chercher.

Compléter

$a = (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) =$ ....

$b = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$ ....

$c = \frac{1}{(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)} =$ ....

$d = 5^2 \times 5^6 =$ ....

/b/ABCD

16 Représenter. Chercher.

Effectuer le calcul suivant : $A = \frac{(-4)^2\times3^2\times4^3}{5^2\times3^2\times4^3}$ ....

....

....

....

/b/ABCD

Représenter. Calculer.

17 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$ les nombres suivants :

$A = \sqrt{18} =$	$C = \sqrt{45} =$ ....
$B = \sqrt{50} =$	$D = \sqrt{48} =$ ....

Calculer.

18 Calculer les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$ ou sans racine carré au dénominateur.

$A = 2\sqrt{12}$

$B = 6\sqrt{8} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{50}$ ....

....

$C = \frac{2}{\sqrt{2}}$ ....

....

$D = \frac{5}{4-\sqrt{3}}$ ....

....

$E = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ ....

....

Calculer.

19 Effectuer les calculs suivants :

$A = \frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{1-\sqrt{5}} =$ ....

....

$B = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2} =$ ....

Calculer. Raisonner.

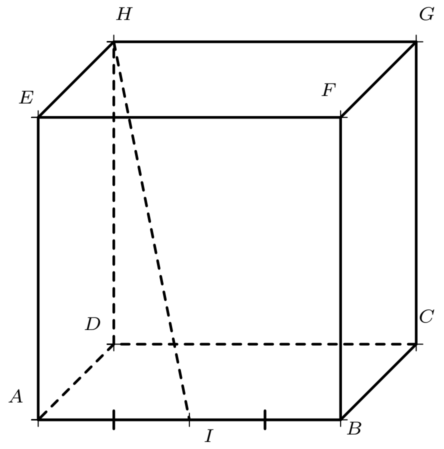
20 Donner la nature de chacun des nombres suivants :

$A = \left(\sqrt{3}+2\right)^2$ ....

$B = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$ ....

Calculer.

21 On donne le cube $ABCDEFGH$ suivant de coté de longueur a. I est le milieu de $[AB]$. Calculer la longueur IH en fonction de a.



Le triangle ADI est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$DI^2 = AD^2 + AI^2$

$DI = \sqrt{AD^2 + AI^2}$

$DI = \sqrt{a^2 + \frac{a}{2}^2}$

$DI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Le triangle HDI est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore :

$HI^2 = HD^2 + DI^2$

$HI = \sqrt{HD^2 + DI^2}$

$HI = \sqrt{a^2 + \frac{5a^2}{4}}$

$HI = \frac{3}{2}a$

Chercher.

22

On pose $x = \sqrt{3}$ et $y = \sqrt{2}$. Calculer

1. $a = x^4 - y$
2. $b = 2x^2 + 2x + 3$
3. $c = (x+2)(x-4)$
4. $d = x^3 \times y^3$

Raisonner. Représenter. Calculer

23

On donne la pyramide à base carrée $ABCD$ de coté de longueur a et de sommet S dont la hauteur est 10 cm. Pour quelles valeurs de a, on a $15 < SA < 20$?
Appelons H la base de la hauteur de la pyramide.
Exprimons tout d'abord la longueur du segment $[AH]$ en fonction de a.
La base de la pyramide étant un carré le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de pythagore :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = 2a^2$
$AC = a\sqrt{2}$
Hors $AH = \frac{AC}{2}$ nous avons $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Le triangle AHS est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore :
$SA^2 = AH^2 + HS^2$
$SA^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 100 = 100 + \frac{a^2}{2}$
Nous cherchons les valeurs de a pour $15 < SA < 20$ ce qui est équivalent à $225 < SA^2 < 400$.
Tout d'abord, résolvons : $225 < SA^2$.
$225 < 100 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 125 < \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 250 < a^2 \Leftrightarrow 5\sqrt{10} < a$.
Ensuite, résolvons $SA^2 < 400$.
$100 + \frac{a^2}{2} < 400 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} < 300 \Leftrightarrow a^2 < 600 \Leftrightarrow a < 10\sqrt{3}$.
Ainsi, nous avons $15 < SA < 20$ pour $5\sqrt{10} < a < 10\sqrt{3}$.

Calculer.

24

On donne $E = \frac{2}{3} + \frac{17}{2} \times \frac{4}{3}$ et $F = \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{16}}{\sqrt{2}}$
Démontrer que les nombres E et F sont égaux

25

Compétence.

26

Compétence.

27

Compétence.

28

Compétence.

29

Compétence.

/b/ABCD