Puissance d'un nombre relatif

Algèbre

1. Cours

1. Puissances de 10

Définition 1.

n désigne un nombre entier positif supérieur ou égal à 2. L'écriture 10^n désigne le produit de n facteurs TOUS ÉGAUX à 10.

Exemple

— $10^2 = 10 \times 10 = 100$

— $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$

Remarque

— l'écriture décimale de 10^n est un 1 suivi de 10 « zéros » à droite.

— 10^n se lit 10 « exposant » n ou encore 10 « puissance » n

— Par convention : $10^0 = 1$ et $10^1 = 10$

Définition 2.

L'écriture 10^{-n} désigne l'inverse de 10^n.

Exemple

— $10^{-1} = \dfrac{1}{10^1} = 0,1$

— $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0,01$

— $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = 0,00001$

Remarque

— l'écriture décimale de 10^{-n} est un 1 précédé de 10 « zéros » à gauche (et de la virgule).

— 10^{-n} se lit 10 « exposant moins » n ou encore 10 « puissance moins » n

Propriétés 1.

n et m désignent des nombres entiers relatifs.

1. **(Produit)** $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$
2. **(Quotient)** $\dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$
3. **(Puissance de puissance)** $\left(10^n\right)^m = 10^{n \times m}$

Exemple

- $10^3 \times 10^8 = 10^{3+8} = 10^{11}$
- $\dfrac{10^7}{10^4} = 10^{7-4} = 10^3$
- $\left(10^3\right)^2 = 10^{3\times 2} = 10^6$
- $10^{-3} \times 10^8 = 10^{-3+8} = 10^5$
- $\dfrac{10^{-7}}{10^4} = 10^{-7-4} = 10^{-11}$
- $\left(10^{-3}\right)^2 = 10^{-3\times 2} = 10^{-6}$
- $10-3 \times 10^{-8} = 10^{-3+(-8)} = 10^{-11}$
- $\dfrac{10^{-7}}{10^{-4}} = 10^{-7-(-4)} = 10^{-3}$
- $\left(10^{-3}\right)^{-2} = 10^{-3} \times (-2) = 10^6$

Remarque

- Pour multiplier les puissances de 10, on additionne les exposants.
- Pour divise les puissances de 10, on soustrait les exposants.
- Pour calculer une puissance d'une puissance, on multiplie les exposants.
- **ATTENTION**, il n'existe pas de propriété pour la somme et la différence de deux puissances de dix. Il est alors indispensable d'écrire les nombres sous forme décimale.

Exemple

- $10^3 - 10^2 = 1000 - 100 = 900$
- $10^{-2} + 10^{-1} = 0,01 + 0,1 = 0,11$

Exemple

Calculer l'expression $A = \dfrac{2 \times \left(10^3\right)^5 \times 45 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-7} \times 6 \times 10^{-2}}$.

$A = \dfrac{2 \times 45 \times \left(10^3\right)^5 \times 10^{-3}}{3 \times 6 \times 10^{-7} \times 10^{-2}}$ (les multiplications permettent de « rapprocher » les puissances de dix au numérateur et au dénominateur.

$A = \dfrac{2 \times 45}{3 \times 6} \times \dfrac{\left(10^3\right)^5 \times 10^{-3}}{10^{-7} \times 10^{-2}}$ (on applique la propriété du calcul fractionnaire : $\dfrac{ab}{cd} = \dfrac{a}{c} \times \dfrac{b}{d}$)

$A = \dfrac{90}{18} \times \dfrac{10^{12}}{10^{-9}}$ (on effectue les multiplications par paires en appliquant les 1ère et 3ème propriétés des puissances de dix.

$A = 5 \times 10^{21}$ (on effectue les divisions en appliquant la 2ème propriété des puissances de dix)

2. Multiplier et diviser par une puissance de 10

2. Quelques exercices

1 **Exercice d'application**

alculer les puissances de nombres suivantes.

Exemple

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = +81$

$10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10\,000} = 0,000\,1$

$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0,125$

$(-3)^{-3} = \dfrac{1}{(-3)^3} = \dfrac{-1}{27}$

$(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$

$10^5 =$

$10^2 =$

$2^4 =$

$(-2)^2 =$

$10^{-5} =$

$10^{-2} =$

$2^{-4} =$

$(-2)^{-2} =$

2 Exercice d'application

crire les nombres suivants en notation scientifique.

Exemple

$18\,421,2 = 1,84212 \times 10^4$
$0,000\,023\,5 = 2,35 \times 10^{-5}$

$1\,235,5 =$

$0,002\,5 =$

3 Exercice d'application

alculer les produits de puissances de 10 suivants.

Exemple

$10^5 \times 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$
$10^{-6} \times 10^2 = 10^{-6+2} = 10^{-4}$

$10^4 \times 10^5 =$

$10^4 \times 10^{-1} =$

$10^{-4} \times 10^4 =$

$10^{-2} \times 10^3 =$

4 Exercice d'application

Calculer les quotients de puissances de 10 suivants.

Exemple

$10^3 \div 10^5 = 10^{3-5} = 10^{-2}$
$10^5 \div 10^{-2} = 10^{5-(-2)} = 10^{5+(+2)} = 10^7$

$10^4 \div 10^9 =$

$10^9 \div 10^4 =$

$10^8 \div 10^3 =$

$10^4 \div 10^4 =$

5 Exercice d'application

$12\left(10^1\right)^2 =$ Calculer les puissances de puissances de 10 suivantes.

Exemple

$\left(10^5\right)^3 = 10^{5\times 3} = 10^{15}$
$\left(10^{-3}\right)^2 = 10^{-3\times 2} = 10^{-6}$

24

-52

-4-3

6 Exercice d'application

Loi de NewtonLa force exercée par un corps de masse M (en kg) sur un autre corps de masse m (en kg) dont les centres sont situés à une distance d (en mètre) l'un de l'autre est donnée par la formule suivante (formule de Newton) :

$$P = \frac{M}{d^2} \times G \times m$$

Avec $G = 6,67 \times 10^{-11}$. Cette force s'appelle le poids.
Pour un corps donné $\frac{M}{d^2} \times G$ est appelé le coefficient de gravité.

1. La terre a un rayon d'environ 6 378 km et une masse d'environ $5,98 \times 10^{24}$ kg.

   Exprimer en notation scientifique la distance entre le centre de la terre et une personne se trouvant à la surface de la terre (en m).

   (ba) Trouver le coefficient de gravité à la surface de la terre.

   (c) Même question au sommet du mont Everest (8 848 m).

   (d) Quel est le poids d'une personne de 70 kg à la surface de la terre ?

2. Reprendre les questions précédentes pour la lune sachant que le rayon de la lune est d'environ 1 740 km et sa masse d'environ $7,34 \times 10^{22}$ kg

7 Exercice d'application

enumerate

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$D = 768\ 000\ 000$ $E = 0,000\ 201\ 4$ $F = 3141,59$

Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$G = 10^{-3} \times 10^{7} \times 500$

$$H = \frac{16\,000 \times 10^{3} \times 10^{-7}}{4 \times 10^{5}}$$

8 Exercice d'application

Alpha du centaure	: 40,7 trillions de km
	(1 trillion= 10^{12})
Sirius	: 8,26 années-lumière
Neptune	: 4,5 milliards de km
Mars	: 228 millions de km
Proxima du Centaure	: $404 \times 10^{1}1$ km
Jupiter	: $7\,776 \times 10^{5}$ km
Uranus	: 2,87 milliards de km
Procyon	: 106,1 trillions de km
Nébuleuse d'Andromède	: 2 millions d'années-lumière
Saturne	: 1 428 000 000 km
Vénus	: $10\,810 \times 10^{4}$ km
Pluton	: $5,92 \times 10^{-4}$ années-lumière
Mercure	: 57 850 000 km
La Terre	: 149,5 millions de km

Voici, ci-dessus, les distances du Soleil à quelques planètes, étoiles ou nébuleuses. Écris en écriture scientifique les nombres qui mesurent ces distances en kilomètres, et range ces astres depuis le plus proche jusqu'au plus éloigné du Soleil (1 année-lumière vaut environ 10^{13} km).

9 Exercice d'application

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance.

$A = 7^{2} \times 7^{3}$

$B = \dfrac{3^{4}}{3^{2}}$

$C = 8^{2} + 6^{2}$

$D = \dfrac{4^{3} \times 4}{4^{5}}$

$E = \left((-3)^{2}\right)^{3} \times (-3)^{4}$

$F = 5^{8} \times 2^{5} \times 5^{-3}$

10 Exercice d'application

our chaque question, entoure la (ou les) bonne(s) réponses.

		réponse a	réponse b	réponse c	réponse d
①	$5^3 =$	$3\times3\times3\times3\times3$	5×3	$5\times5\times5$	$5+5+5$
②	$3^2 =$	6	32	$\frac{1}{9}$	9
③	$4^0 =$	1	0	4	$\frac{1}{4}$
④	$10^{-3} =$	$0,001$	$-1\,000$	$\frac{-1}{3}$	$1\,000$
⑤	$(-2)^2 =$	-2	4	2	-4
⑥	$10^5 =$	$0,000\,01$	50	-50	$100\,000$
⑦	$-4^2 =$	-16	16	-8	8
⑧	$6^{-3} =$	216	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{6^3}$
⑨	$16 =$	4^2	8^2	8^{-2}	4^{-2}
⑩	$5-2^2 =$	9	1	3	-3

11 **Exercice d'application**

ne population de bactéries double toutes les heures.
Par quel nombre la population de bactéries est-elle multipliée au bout de 3 h ? de 5 h ? de 9 h ? de n h ?

12 **Exercice d'application**

e mécanisme d'un cadenas est formé de quatre rouleaux qui portent chacun les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
Combien de combinaisons peut-on obtenir ?
Il faut une seconde pour former une combinaison. Combien de temps faut-il pour les former toutes ?

13 **Exercice d'application**

e nombre 8 833 possède une propriété particulière. Si on élève chacune des deux tranches de deux chiffres de ce nombre au carré, la somme des deux carrés obtenue n'est autre que le nombre 8 833 lui-même.
On a bien en effet :

$$88^2 + 33^2 = 7\,744 + 1\,089 = 8\,833$$

Montre qu'il en est de même du nombre 1 233.