Mathématiques 2 : le livre sacado

L'équipe SACADO

8 août 2023

Chapitre I.

Arithmétique

Les savoir-faire du parcours

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Résoudre une équation du type $f(x) = k$ en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.
- Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation du type $f(x) = k$.

Les mathématiciennes et mathématiciens

1 Chercher.

1 Généralités sur les fonctions

Définition 1: Notion de fonction.

Définir une fonction f d'un ensemble $\mathcal{D}$ de réels dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de $\mathcal{D}$ un unique réel noté $f(x)$.

- On dit que $\mathcal{D}$ est l'**ensemble de définition** de f.
- $f(x)$ est l'**image** de x par f.
- x est un **antécédent** de $f(x)$ par f.

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Ce qui se lit : la fonction f qui à x associe $f(x)$.

Remarques 2.

La fonction se nomme par une lettre, généralement f, et peut être générée de 4 façons différentes.

- une expression algébrique notée $f(x)$ avec laquelle on calcule des images.
- une courbe, généralement appelée $\mathcal{C}_f$
- un tableau de valeurs qui associe sur deux lignes, quelques valeurs et leurs images.
- un algorithme, qui décrit les étapes de calcul pour obtenir $f(x)$

1 Fonction générée par une expression algébrique

Définition 3: Expression algébrique d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition $\mathcal{D}$. L'expression algébrique de f est la forme algébrique de $f(x)$.

Méthode 4. Déterminer algébriquement une image par f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$.
Pour déterminer l'image d'un nombre a par f, il suffit de calculer $f(a)$.
L'image de 5 par f est $f(5) = 2 \times 5^2 - 6 \times 5 + 3 = 50 - 30 + 3 = 23$
L'image de $\sqrt{3}$ par f est $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}^2 - 6\sqrt{2} + 3 = 4 - 6\sqrt{2} + 3 = 7 - 6\sqrt{2}$

Méthode 5. Déterminer algébriquement un antécédent par f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$.
Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) d'un nombre a par f, il faut et il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 3$.
$2x^2 - 6x + 3 = 3$
$2x^2 - 6x = 0$
$2x(x - 3) = 0$
$2x = 0$ ou $x - 3 = 0$, $x = 0$ ou $x = 3$. $\mathscr{S} = \{0; 3\}$. Les antécédents de 3 par f sont 0 et 3.

Remarque 6.

Lorsque le domaine de définition n'est pas donné, l'expression algébrique $f(x)$ de la fonction f permet de le déterminer.

Modéliser par des fonctions

2 Modéliser.

Soit f la fonction qui à un coté c d'un triangle équilatéral associe son périmètre. Définir f. ....

/b/ABCD

3 Modéliser.

Pour une distance connue, la vitesse moyenne se définit en fonction du temps. La distance entre Toulon et Hyères est de 20km. Définir la fonction vitesse moyenne v. ....

/b/ABCD

Déterminer les images par une fonction f.

4 Modéliser.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 4x^2 + 3x$. Calculer

1. l'image de 2 par f, $f(2) =$ ....
2. l'image de $\frac{2}{3}$ par f, $f\left(\frac{2}{3}\right) =$ ....
3. l'image de $\sqrt{5}$ par f, $f\left(\sqrt{5}\right) =$ ....

/b/ABCD

5 Modéliser.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par $f(x) = \dfrac{5}{x-1}$.

1. Calculer l'image de -2 par f.

   ....

2. Calculer l'image de $\frac{3}{7}$ par f.

   ....

/b/ABCD

6 Modéliser.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 1$.

1. Déterminer un antécédent de 4 par g.

   ....

2. Déterminer un antécédent de $\frac{3}{4}$ par g.

   ....

/b/ABCD

7 Modéliser.

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x-8}$. ....

/b/ABCD

2 Fonction représentée par une courbe

Définition 7: Représentation graphique.

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). Soit f une fonction définie sur l'ensemble D.
La **représentation graphique** ou courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère (O ; I ; J) est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, où $x \in D$. Une équation de $\mathscr{C}_f$ est $y = f(x)$.

Propriété 8: Appartenance d'un point à une courbe.

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et $A(x_A, y_A)$ un point du plan.

1. Si le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ alors $y_A = f(x_A)$.
2. Réciproquement, si $y_A = f(x_A)$ alors le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exemple 9.

Soit f la fonction définie par $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$.
Soit $A(2; 25)$ un point du plan.
A appartient-il à la courbe de f ?
$f(2) = 5 \times 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 25 = y_A$
donc le point A appartient à la courbe de f.

Soit $B(-1; 2)$ un point du plan.
B appartient-il à la courbe de f ?
$f(-1) = 5 \times (-1^2 + 3 \times (-1 - 1 = 5 - 3 - 1 = 1$
$f(x_B) \neq y_B$ donc B n'appartient pas à la courbe de f.

Remarques 10.

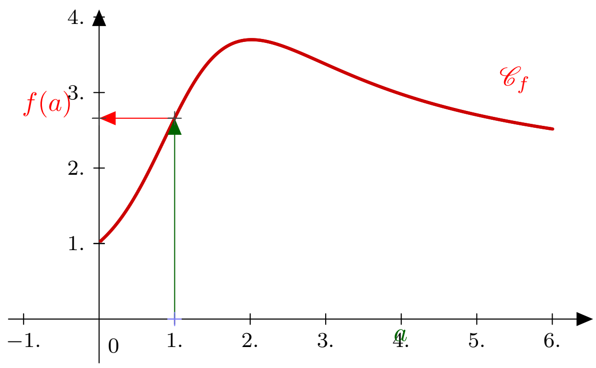
- Le tracé d'une courbe représentative est toujours approximatif : on construit un tableau de valeurs, on place les points correspondants dans un repère et on les relie par une courbe régulière.
- On peut utiliser la calculatrice pour remplir un tableau de valeurs et tracer des courbes représentatives.
- Certaines fonctions ne sont connues que par leur courbe représentative

Méthode 11. Déterminer graphiquement une image ou un antécédent par f

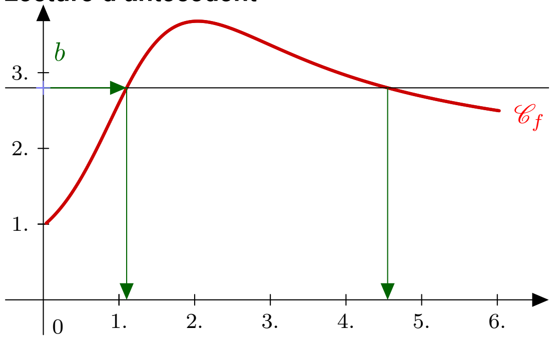
On se reportera à la figure ci dessous

- L'image de a est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a.
- Les antécédents de b sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est b.

Lecture d'image



Lecture d'antécédent



Remarque 12.

Soit f une fonction et k un nombre réel. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère et D_k la droite d'équation $y = k$ (parallèle à l'axe des abscisses). Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection entre C et D_k.
⊛ Résoudre graphiquement $f(x) = m$ revient à déterminer les antécédents de m par f.

Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe

8 Calculer.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+5}$. A le point d'abscisse 2 de la courbe représentative de f. Calculer l'ordonnée du point A.

....

....

....

....

/b/ABCD

9 Calculer.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ par $f(x) = \dfrac{4}{x+5}$.

Le point $B\left(3; \dfrac{1}{2}\right)$ appartient-il à la courbe représentative de f.

....

....

....

/b/ABCD

10 Calculer.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - 5x + 2$.
Démontrer que le point $A\left(\sqrt{3}; 5\left(1-\sqrt{3}\right)\right)$ appartient à la courbe représentative de h.

....

....

....

....

/b/ABCD

Exploiter la courbe d'une fonction f

11 Calculer.

On donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ci-contre.

1. Lire le domaine de définition de f. ....

   ....

2. Lire l'image de 1 par f. ....

   ....

3. Lire $f(-2)$. ....

   ....

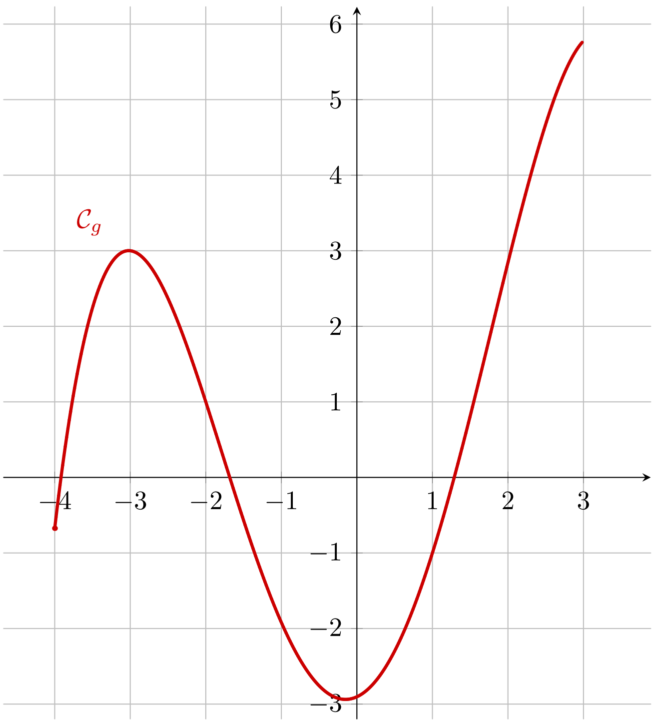
4. Déterminer les antécédents de 3 par f. ....

   ....

5. Est-il vrai que $f(x) = -1$ admet 2 solutions négatives ? ....

   ....

   ....



/b/ABCD

3 Fonction générée par un tableau de valeurs

Définition 13: Tableau de valeurs.

Un tableau de valeurs d'une fonction f regroupe sur la première ligne des nombres du domaine de définition de f et sur la deuxième ligne, les images de chaque nombre par f.

Exemple 14.

La fonction f est exprimée par le tableau suivant :

x	-5	-3	-1	0	2	4
$f(x)$	4	2	1	2	0	-3

- L'image de -3 est 2 ou encore que $f(-3) = 2$.
- L'image de 2 est 0 ou encore que $f(2) = 0$.
- 2 a deux antécédents : -3 et 2. c'est à dire $f(-3) = 0$ et $f(2) = 0$

Remarque 15.

- Le tableau de valeurs ne regroupe que quelques valeurs du domaine de définition. Il permet de tracer la courbe de la fonction f en utilisant les valeurs et leurs images comme coordonnées des points de la courbe.
- Pour compléter un tableau de valeurs, on utilise la calculatrice ou un algorithme.

4 Fonction définie par un algorithme

Définition 16: Algorithme.

Un **algorithme** est une suite finie d'opérations qui aboutit à un résultat. Une fonction peut se définir par un algorithme.

Exemple 17.

- Choisir un nombre (réel).
- Ajouter 5.
- Multiplier le résultat par lui-même.

- x.
- $x+5$.
- $(x+5)(x+5)$

$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x+5 \mapsto (x+5)(x+5)$
$x \mapsto f(x) = (x+5)(x+5)$

2 Parité d'une fonction

Définition 18: Parité d'une fonction.

Une fonction f définie sur un intervalle centré I est dite **paire** lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Algébriquement, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$.

Méthode 19.

Pour démontrer qu'une fonction est **paire**, on démontre que

1. $\mathcal{D}_f$ est centré en 0.
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = f(-x)$.

Définition 20: Fonction impaire.

Une fonction f définie sur un intervalle centré I est dite **impaire** lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
Algébriquement, pour tout $x \in I$, $f(x) = -f(-x)$.

Méthode 21.

Pour démontrer qu'une fonction est **impaire**, on démontre que

1. $\mathcal{D}_f$ est centré en 0.
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = -f(-x)$.

Modéliser.

12 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 9$ sur $[-6; 4]$.

1. Compléter le tableau suivant.

x	-6	-4	-2	0	2	4
$f(x)$						

2. Déterminer $f(-2)$.

....

3. Déterminer un antécédent de 9 pat f.

....

/b/ABCD

Modéliser.

13 Soit la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 - 5$ sur $\mathbb{R}$.

1. Écrire un programme de calcul en Python qui définit la fonction f.

....
....
....
....
....

2. Compléter le tableau suivant en utilisant la fonction Python de la question 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						

/b/ABCD

Modéliser.

14 On donne l'algorithme suivant pour définir la fonction f.

- Choisir un nombre x compris entre -10 et 10.
- Ajouter 5.
- Prendre le carré du résultat obtenu.
- Soustraire 3

1. Déterminer l'image de 4 par f. ....

....
....
....

2. Déterminer la fonction f en fonction de x. ....

....

/b/ABCD

Étudier la parité d'une fonction

Modéliser.

15 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 6$ sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction f est paire.

....
....
....
....
....

Modéliser.

16 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 5x + 6$ sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est-elle paire ?

....
....
....

2. La fonction f est-elle impaire ?

....
....
....

3 Variations et extremum

Théorème 22: Variations d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que

- f est **croissante** sur I pour exprimer que les nombres et leurs images augmentent conjointement. On formalise cette idée par : Soit x et x' deux réels de I tels que $x \leqslant x'$ et f croissante sur I, alors $f(x) \leqslant f(x')$
- f est **décroissante** sur I pour exprimer que lorsque les nombres augmentent , leurs images diminuent. On formalise cette idée par : Soit x et x' deux réels de I tels que $x \leqslant x'$ et f décroissante sur I, alors $f(x) \geqslant f(x')$.

Définition 23: Extremum d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f admet un **maximum** M sur I signifie qu'il existe un réel a de I tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$. $M = f(a)$. Graphiquement, $f(a)$ est l'ordonnée la plus grande de tous les points de la courbe de f.
- f admet un **minimum** m sur I signifie qu'il existe un réel b de I tel que pour tout $x \in I$, $f(b) \leqslant f(x)$. $m = f(b)$. Graphiquement, $f(b)$ est l'ordonnée la plus petite de tous les points de la courbe de f.
- f est bornée sur I lorsque f admet un minimum et un maximum sur I.

Définition 24: Tableau de variation.

Le **tableau de variation** d'une fonction f est un tableau qui synthétise les variations de la fonction f sur son domaine de définition.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 || 2	$\nearrow$	$+\infty$

4 Fonctions de référence

1 Les fonctions affines

Définition 25: Fonction affine.

Soit a et b deux réels données avec a non nul. La **fonction affine** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
La **représentation graphique** de la fonction affine f est la droite d'équation $y = ax + b$

Remarque 26.

Lorsque $b = 0$, la fonction affine se nomme fonction linéaire.

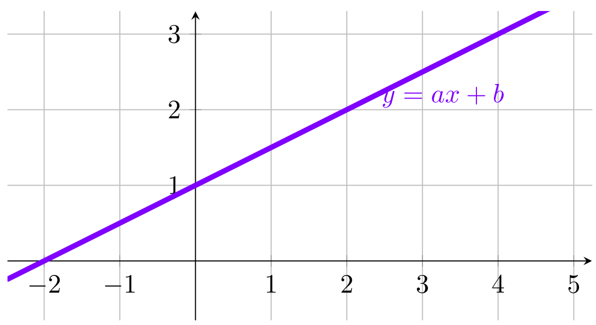
Logique mathématique 27.

Toute fonction linéaire est une fonction affine.
Une fonction affine n'est pas une fonction linéaire.

Théorème 28: Variations de la fonction affine.

La fonction affine est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
Lorsque a est positif, la fonction affine f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Lorsque a est négatif, la fonction affine f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Illustration 29.



Relier représentation graphique et tableau de variations.
Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.

17 Raisonner.

/b/ABCD

18 Calculer, raisonner.

....

....

....

....

/b/ABCD

2 La fonction Carré

Définition 30: Fonction Carré.

La **fonction Carré** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
La **représentation graphique** de la fonction Carré s'appelle une **parabole** et son équation est $y = x^2$.

Théorème 31.

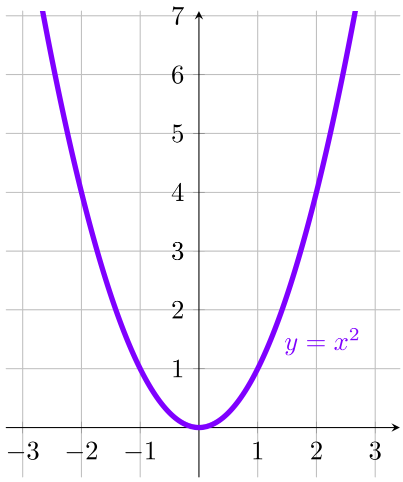
La fonction Carré f est paire.
La parabole d'équation $y = x^2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorème 32: Variations de la fonction Carré.

La fonction Carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Illustration 33.

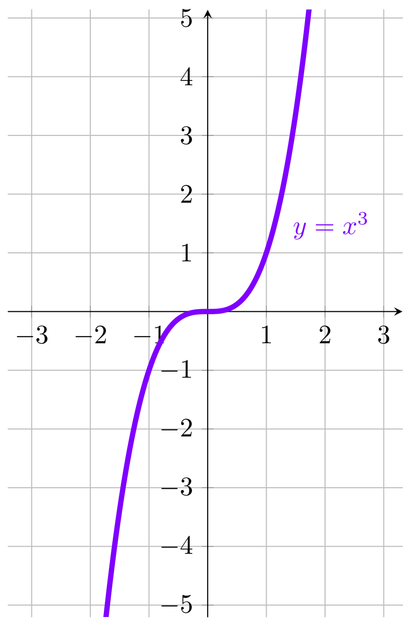


3 La fonction Cube

Définition 34: Fonction Cube.

La **fonction Cube** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Illustration 37.



Théorème 35.

La fonction Cube f est impaire.
La courbe d'équation $y = x^3$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Théorème 36: Variations de la fonction Cube.

La fonction Cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Connaitre et utiliser la fonction Carré

19 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ et π^2

....

....

- $(-11)^2$ et $(-6)^2$

....

....

- -7^2 et -8^2

....

....

....

/b/ABCD

20 Raisonner. Calculer.

1. Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[1;3]$.

....

....

2. Déterminer algébriquement l'intervalle de x^2 lorsque x appartient à $[-1;4]$.

....

....

....

/b/ABCD

Connaitre et utiliser la fonction Cube

21 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ et π^3

....

....

- $(-5)^3$ et $(-9)^3$

....

....

/b/ABCD

4 La fonction Inverse

Définition 38: Fonction Inverse.

La **fonction Inverse** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

La **représentation graphique** de la fonction Inverse s'appelle une **hyperbole** et son équation est $y = \dfrac{1}{x}$.

Théorème 39.

La fonction Inverse f est impaire.

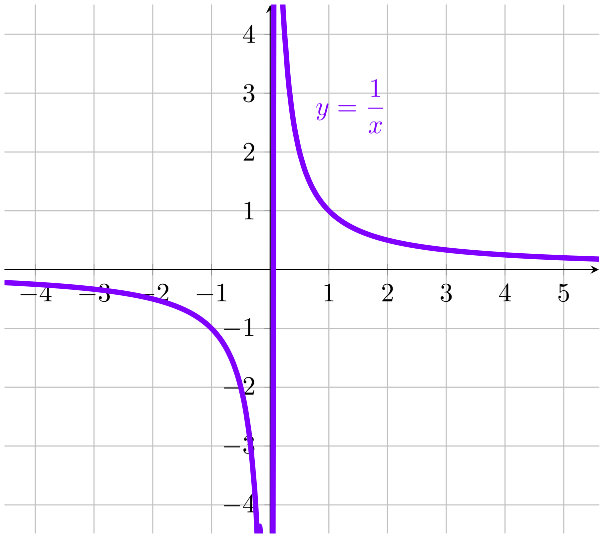
La hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Théorème 40: Variations de la fonction Inverse.

La fonction Carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$0 \searrow$	$\Vert$	$\searrow 0$

Illustration 41.



5 La fonction Racine carrée

Définition 42: Fonction Racine carrée.

La **fonction Racine carrée** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Remarque 43.

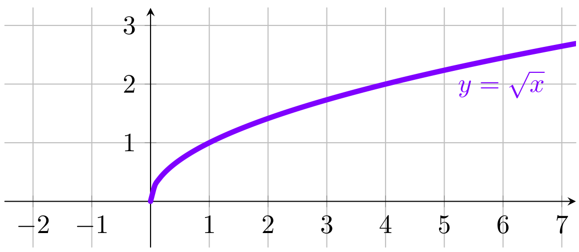
L'ensemble de définition de la fonction Racine Carrée n'est pas centré. Donc la fonction Racine carrée n'est ni paire, ni impaire.

Théorème 44: Variations de la fonction Racine Carrée.

La fonction Cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Illustration 45.



Connaitre et utiliser les fonctions Inverse et Racine Carrée

22 Raisonner.

Comparer sans les calculer.

- $\frac{1}{5}$ et $\dfrac{1}{4}$

....

....

- $-\dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{1}{6}$

....

....

....

- $\sqrt{10}$ et $\sqrt{100}$

....

....

/b/ABCD

23 Raisonner.

Expliquer pourquoi la fonction Inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

....

....

....

24 Représenter. Raisonner.

Résoudre graphiquement les équations, puis retrouver les résultats algébriquement.

1. $\frac{1}{x} = 4$ ....

....

2. $\sqrt{x} = 2$ ....

....

Valider ces résultats par le calcul.

....

....

....

/b/ABCD

25 Raisonner. Calculer.

1. Déterminer algébriquement l'intervalle de $\dfrac{1}{x}$ lorsque x appartient à $[1;3]$.

....

....

....

2. Déterminer algébriquement l'intervalle de $\sqrt{x}$ lorsque x appartient à $[1;2]$.

....

....

....

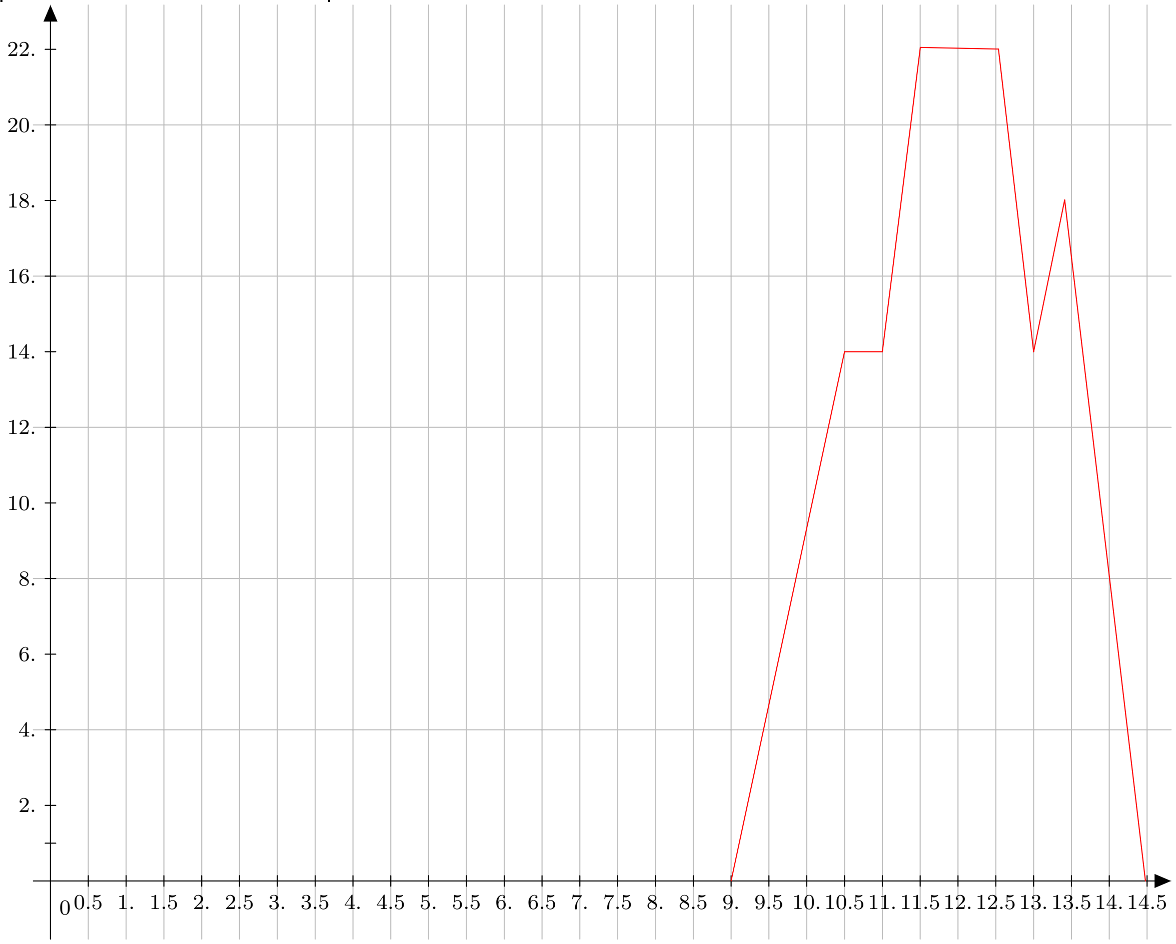
/b/ABCD

Représenter.

26

Au cours de ses vacances, Vincent effectue une promenade en vélo. Le graphique ci-dessous indique la distance parcourue en fonction du temps.

/b/ABCD



1. Sur quelles périodes de temps Vincent s'éloigne-il de sa maison ? ....

....

....

2. A 10h30, à quelle distance de sa maison se trouve-t-il ? ....

....

....

3. Que se passe-t-il entre 9h30 et 10h00 ? ....

....

....

4. Quelle est sa vitesse moyenne entre 10h et 11h ? ....

....

....

5. Quelle est sa vitesse moyenne entre 12h et 12h30 ? Et entre 14h et 14h30 ? ....

....

....

Représenter. Raisonner. Calculer.

27

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Calculer.

28

/b/ABCD

Raisonner. Calculer.

29 On se propose de résoudre l'équation (E) : $\sqrt{x^2+x+1} = x$

1. Expliquer pourquoi cette équation ne peut pas admettre de solution négative. ....

....

....

2. On cherche donc des solutions positives.
   (a) Expliquer pourquoi si $x \geqslant 0$, alors $x^2+x+1 \geqslant 0$. ....

   ....

   ....

   (b) Expliquer pourquoi alors, résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation (E') $x^2+x+1 = x^2$, avec $x \geqslant 0$. ....

   ....

   ....

   (c) Résoudre l'équation (E'). ....

   ....

   ....

   (d) Conclure sur l'ensemble des solutions de (E). ....

   ....

   ....

/b/ABCD

Représenter. Raisonner.

30 Soit M un point de l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. On construit le point N tel que M soit le milieu de $[ON]$. Quel est le lieu des points N lorsque M décrit $\mathcal{H}$? ....

....

....

....

....

Représenter. Raisonner.

31 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{1}{x+2} - 3\right)^2$ se décompose de la façon suivante :

$$f : x \longmapsto x+2 \mapsto \frac{1}{x+2} \longmapsto \frac{1}{x+2} - 3 \longmapsto \left(\frac{1}{x+2} - 3\right)^2$$

Décomposer, comme montré dans l'exemple, les fonctions suivantes à l'aide des fonctions affine, Carré et Inverse.

1. $g(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2$

   ....

....

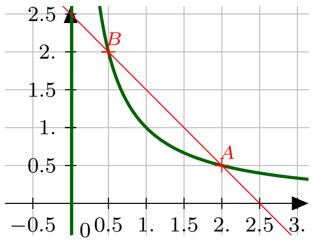
2. $h(x) = \frac{1}{x^2+5} + 3$

   ....

....

Représenter.

32 Sur la représentation graphique de g telle que $g(x) = \dfrac{1}{x}$, on a placé les points A et B d'abscisses respectives 2 et $\dfrac{1}{2}$.



1. Déterminer la fonction f affine représentée par la droite (AB).

2. La droite (AB) coupent les axes en M et N. Montrer que les segments $[AB]$ et $[MN]$ ont même milieu.

3. Soit P et Q deux points quelconques non confondus de l'hyperbole. La droite (AB) coupent les axes en M et N. Démontrer que les segments $[PQ]$ et $[MN]$ ont même milieu.

Représenter. Raisonner. Calculer.

33

1. $x > 5$, majorer $\dfrac{-6}{3-4x}$

2. $x \leqslant -1$, majorer $\dfrac{2}{x-7}$

/b/ABCD

Raisonner.

34