Mathématiques 2 : le livre sacado

L'équipe SACADO

31 juillet 2023

Chapitre I.

Arithmétique

Les savoir-faire du parcours

- **Utiliser des nombres pour calculer et résoudre des problèmes**
- Connaitre les bases de l'arithmétique
- Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

Les mathématiciennes et mathématiciens

L'arithmétique est une branche des mathématiques qui correspond à la science des nombres. De nombreux nombres entiers ont des propriétés particulières. Ces propriétés font l'objet de la théorie des nombres. Parmi ces nombres particuliers, les nombres premiers sont sans doute les plus importants.
On connait aussi les nombres pairs et les nombres impairs.

Chercher.

1 Pour fêter les 25 ans de sa boutique, un chocolatier souhaite offrir aux premiers clients de la journée une boîte contenant des truffes au chocolat. Il a confectionné 300 truffes : 125 truffes parfumées au café et 175 truffes enrobées de noix de coco. Combien y aura-t-il de truffes de chaque sorte dans chaque boîte ?

1 Les entiers naturels et entiers relatifs

Définition 1: Ensemble de nombres.

1. On appelle **entiers naturels** les nombres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 . . . Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$.. Parfois, on dit abusivement que les nombres entiers sont des nombres sans partie décimale. On a donc : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3 \cdots\}$
2. On appelle **entiers relatifs** les nombres entiers naturels et leur symétrique par rapport à 0. Leur ensemble est noté $\mathbb{Z}$.. L'utilisation de la lettre $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand Zahlen (Chiffre). On a donc : $\mathbb{Z} = \{\cdots - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \cdots\}$

2 Multiples et diviseurs

Définition 2: Multiple.

Soit a un nombre entier. Le nombre m est dit **multiple** de a s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = ka$.

Exemple 3.

$5 \times 7 = 35$ où $7 \in \mathbb{Z}$ donc 35 est un multiple de 5 et aussi, 35 est un multiple de 7.

Définition 4: Diviseur.

Soit n un nombre entier. Le nombre q est dit **diviseur** de n s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = kq$.

Exemple 5.

$48 = 6 \times 8$ où $6 \in \mathbb{Z}$ donc 8 est un diviseur de 48 et aussi, 6 est diviseur de 48.

Définition 6: Nombre premier.

Un **nombre premier** est un nombre entier supérieur à 2 avec exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple 7.

19 est un nombre premier. Il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Définition 8: Nombre pair.

Un **nombre pair** est un nombre entier divisible par 2.
Soit n un nombre pair, $n = 2 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 9.

$46 = 2 \times 23$ et $23 \in \mathbb{Z}$ donc 46 est un nombre pair.
$15 = 2 \times 7,5$. Comme $7,5 \notin \mathbb{Z}$, 15 n'est pas pair.

Définition 10: Nombres premiers entre eux.

1. Tout nombre se décompose de façon unique comme produit de facteurs premiers.
2. Deux nombres entiers a et b sont premiers entre eux lorsque leurs seuls diviseurs communs sont 1 ou -1.

Notation 11.

$8 = 2^3$ et $15 = 3 \times 5$. Donc 8 et 15 n'ont pas de diviseurs communs. 8 **et** 15 **sont donc premiers entre eux**. Pourtant 8 et 15 ne sont pas premiers.

3 Logique

Définition 12: Proposition universelle.

Une proposition universelle est une proposition qui inclut tous les cas existants de l'univers.

Exemple 13.

Quelque soit trois nombres a, b, c, $a(b+c) = ab+ac$. La distributivité est une proposition universelle.

Définition 14: Contre-exemple.

Un **contre-exemple** est un cas particulier qui vient contredire une propriété universelle.

Exemple 15.

Considérons une proposition universelle : Tous les nombres sont pairs. Pour démontrer que cette proposition est fausse, il suffit de démontrer qu'un seul nombre n'est pas pair. La contradiction vient sur le mot **tous.**
$3 = 2 \times 1,5$ et $1,5 \notin \mathbb{Z}$ donc 3 n'est pas pair. **Donc tous les nombres ne sont pas pairs.**

Utiliser les multiples et les diviseurs

2 Calculer.

1. Déterminer les 10 premiers multiples de 4 : ....
2. Déterminer les 10 premiers multiples de 6 : ....
3. Déterminer les multiples communs de 4 et de 6 : ....

/b/ABCD

3 Calculer.

51 est-il un nombre premier ? Justifier.

....

....

/b/ABCD

4 Calculer.

Décomposer 24 en produit de facteurs premiers.

....

....

....

/b/ABCD

5 Calculer.

Simplifie la fraction $\frac{735}{840}$

....

....

....

/b/ABCD

6 Calculer.

Soit a un entier. La somme de deux multiples de a est un multiple de a. ....

....

....

/b/ABCD

7 Calculer.

Vrai ou faux : Quel que soit l'entier n, $2n - 1$ est un nombre premier. Justifier. ....

....

/b/ABCD

8 Raisonner.

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

1. La différence de deux nombres entiers naturels est un entier naturel. ....
2. Le quotient de deux nombres décimal est un nombre décimal. ....
3. Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un entier relatif. ....
4. Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un nombre décimal. ....

/b/ABCD

Représenter.

9

1. Décomposer 186 et 155 en produit de facteurs premiers. ....

....

....

2. Déterminer le PGCD de 186 et 155. ....

....

3. Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats. Les colis sont constitués ainsi :
   - Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
   - Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
   - Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

   (a) Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ? ....

....

....

   (b) Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis. ....

....

....

/b/ABCD

Raisonner.

10

Simplifier la fraction $\dfrac{2310}{2730}$ pour la rendre irréductible. ....

....

Raisonner.

11

Choisir 2 nombres entiers consécutifs. Vérifier que leur produit est pair. ....

....

Chercher.

12

Proposer 2 nombres premiers entre eux. ....

....

Chercher. Raisonner.

13

Les produits de deux nombres premiers est-il un nombre premier ? Justifier. ....

....

Chercher.

14

Je suis un nombre à trois chiffres non nuls. Je suis divisible par 94. Changez l'ordre de mes chiffres et je deviens divisible par 49. Qui suis-je ? ....

....

....

....

....

Représenter.

15 On veut démontrer que la proposition $\mathcal{P}$ suivante : "La somme de deux nombres impairs est un nombre pair".

1. Calculer $a = 5 + 7$. La proposition $\mathcal{P}$ semble-t-elle vraie ? ....

....

2. Soit k et q deux nombres relatifs. Le nombre impair n s'écrit $n = 2k + 1$. Exprimer un autre nombre impair m en fonction de q. ....

....

....

3. Calculer $n + m$ en fonction de k et q. ....

....

....

4. En déduire que la somme $n + m$ est un nombre pair. ....

....

....

Représenter.

16 Démontrer que si p est impair alors p^2 est impair.

....

....

....

....

....

....

Raisonner.

17 Démontrer que tout nombre entier n multiple de 9 est un multiple de 3. ....

....

....

....

....

....

Raisonner.

18 Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. ....

....

....

....

....

....

Raisonner.

19

Démontrer que si p est pair alors p^2 est pair.

....

....

....

....

....

Raisonner.

20

On donne le programme en Python ci dessous.

```
def is_divisible(x,y):
    if x%y == 0 :
        test = "{} est divisible par {}".format(x,y)
    else :
        test = "{} n'est pas divisible par {}".format(x,y)
    return test

n=int(input("Entrer un nombre n :"))

print(is_divisible(n,4))
```

1. Que fait ce programme ? on tester le programme écrit en Python avec l'éditeur : https://sacado.xyz/tool/show/18 ....

....

....

2. Modifier directement le programme pour qu'il teste si un nombre a divise n.

Raisonner.

21

Dans un pays où le système monétaire n'est constitué que de pièces de 3 et de 5, il s'agit d'aider les habitants en créant un algorithme qui donne le nombre de pièces nécessaires à tout achat d'un montant entier supérieur ou égal à 8.
Pour tester l'algorithme, on peut utiliser l'éditeur Python : https://sacado.xyz/tool/show/18

Source : d'après PISA, items libérés

Raisonner.

22

Le crible d'Eratosthène

L'algorithme procède par élimination : il s'agit de supprimer d'une table d'entiers tous les multiples d'un entier n (autres que lui-même).
En supprimant tous ces multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier à part 1 et eux-mêmes, et qui sont donc les nombres premiers.
On commence par rayer les multiples de 2, puis les multiples de 3 restants, puis les multiples de 5 restants, et ainsi de suite en rayant à chaque fois tous les multiples du plus petit entier restant.

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

1. Faire fonctionner le crible sur la table ci-contre.
2. Quel est le résultat de ce crible ? ....

....

....

3. Écrire un code en Python du crible d'Eratosthène : https://sacado.xyz/tool/show/18

23 Raisonner.

Simplifier le nombre $a = \dfrac{60}{126}$ pour la rendre irréductible. ....

....

....

....

24 Raisonner.

Simplifier le nombre $b = \dfrac{12a+4}{8}$. ....

....

25 Raisonner.

Le produit de deux nombres impairs est-il impair ? ....

....

....

....

26 Raisonner.

Soit n un entier.
Démontrer que la différence de deux multiples de n est un multiple de n. ....

....

....

....

....

....

27 Raisonner.

Pour déterminer le PGCD de deux nombres a et b, $a > b$, on effectue la division euclidienne de a par b. On appelle r_0 le reste.
Puis on divise b par r_0 et on appelle r_1 le reste.
On divise alors r_0 par r_1 et on appelle r_2 le reste.
On divise alors r_1 par r_2 et on appelle r_3 le reste. Et ainsi de suite.
Le PGCD de a et de b est alors le dernier reste non nul.
On appelle ce procédé, la méthode par divisions successives.

1. Déterminer à l'aide de ce procédé le PGCD de 2622 et de 2530. ....

   ....

   ....

2. (a) Un tapissier achète 2622 clous tête plate et 2530 clous tête ronde pour la fabrication de fauteuils identiques. Après la fabrication, il ne lui reste plus aucun clous. Quel est le plus grand nombre de fauteuil que le tapissier peut réaliser ? ....

   ....

   ....

   (b) Dans ce cas, quelle sera le nombre de chaque type de clou par fauteuil ? ....

   ....