Les puissances de 10

Utiliser le calcul littéral

☐ Écrire un nombre avec une puissance de base 10

☐ Calculer avec des nombres écrits en puissance de 10

☐ Écrire un nombre en écriture scientifique

1 Situation de recherche

Durant les inondations dans la région parisienne de Juin 2016, la région Ile de France a fait un stock de bouteilles d'eau pour la population. Chaque habitant bénéficie de 2 litres d'eau par jour. La région Ile de France compte 10 000 000 habitants.
Quel est le nombre de litres d'eau stockés pour les 5 jours d'inondations ?

Définition 1. ***Puissance de base 10***

Le produit $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10 \times 10}_{n}$ se note 10^n et se lit "10 exposant n".

Exemple

$100 = 10^2$ donc 100 est une puissance de 10 et $10\,000 = 10^4$ donc 10000 est aussi une puissance de 10.

Remarque

Le nombre de zéros est égal à l'exposant. $10^n = 1\underbrace{0000\cdots000}_{n\text{zéros}}$

Définition 2.

Par convention, $10^0 = 1$

1 Application directe

Le tardigrade mesure est 1 mm. La longueur d'un stage de rugby est 100 m environ. Combien de tardigrades peut on mettre bout à bout sur la longueur d'un stade de rugby ?

2 Défi

Encadre entre deux puissances de 10 le nombre de minutes dans une année.

3 Question flash

1. Le nombre 10^{-6} est égal à l'un des nombre suivant. Lequel ?

   -60 ; -10^6 ; 0,000 000 1 ; un millionième

2. Ariane affirme que 2^{40} est le double de 2^{39}. A-t-elle raison ?

4 Question flash

1. Écrire en notation scientifique le nombre intervenant dans la phrase suivante : « La masse du Soleil est environ égale à 1 989 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg ».
2. Le proton et le neutron sont deux particules composant le noyau des atomes. Leur taille est environ égale à 10^{-15} m. Exprimer cette taille en millimètre (mm), puis en micromètre (μm).

5 Exercice d'application

1. En informatique, l'information est codée à partir de bits, qui ne prennent que deux valeurs : 0 et 1. Un octet est un regroupement de 8 bits. Combien d'informations différentes peuvent être codées sur un octet ?
2. Les capacités de stockage des mémoires informatiques (disques durs, clé USB, ...) utilisent un grand nombre d'octets. Cela conduit à utiliser des multiples de l'octet, dont voici les principaux ci-contre.

NOM	SYMBOLE	NOMBRE D'OCTETS
Kilooctet	Ko	10^3
Megaoctet	Mo	10^6
Gigaoctet	Go	10^9
Teraoctet	To	10^{12}
Petaoctet	Po	10^{15}
Exaoctet	Eo	10^{18}

À l'aide des unités précédentes, donner un ordre de grandeur de la taille d'un fichier relatif aux données suivantes :

- une photographie numérique ;
- l'ensemble des données circulant sur le web en 2015 ;
- un texte de dix lignes sur un traitement de textes ;
- l'ensemble des données générées chaque année à travers le monde ;
- la capacité d'un disque dur vendu en 2015 ;
- un DVD

Définition 3. ***Puissance de base 10 d'exposant négatif***

L'écriture 10^{-n} désigne l'inverse de 10^n, c'est à dire : $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$.

Remarque

L'exposant correspond au nombre de chiffres après la virgule. $10^{-n} = 0,\underbrace{0000\cdots001}_{n \text{chiffres}}$

6 Application directe

1. Écrire en notation scientifique le nombre intervenant dans la phrase suivante : « La masse du Soleil est environ égale à 1 989 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg ».
2. Le proton et le neutron sont deux particules composant le noyau des atomes. Leur taille est environ égale à 10^{-15} m. Exprimer cette taille en millimètre (mm), puis en micromètre (μm).

7 Application directe

1. Écris 1 millième sous forme décimale
2. Écris sous forme de fraction 1 millième
3. Déduis en l'écriture de 1 millième sous forme d'une puissance de 10.

Écriture scientifique

☐ Exprimer un nombre en écriture scientifique

1 **Exercice de découverte**

La mantisse est le nombre de chiffres utilisable par un calculateur (ordinateur, calculatrice) pour représenter un nombre. Par exemple, si la mantisse est 10 (comme sur certaines calculatrice de collège) 1289,565874899214 ne peut pas s'écrire ce nombre comporte 16 chiffres. La calculatrice écrit donc seulement 9 chiffres et la virgule. Lesquels ?

- En partant de la gauche ? Mais si la partie entière a plus que 9 chiffres on ne peut pas l'écrire.....
- En partant de la droite ? Mais si la partie décimale a plus que 9 chiffres on ne peut pas l'écrire.....

Le modèle trouvé est d'écrire un seul chiffre différent de 0 dans la partie décimale puis de compléter la mantisse avec les chiffres qui se lisent de gauche à droite et écrire une puissance de 10 qui approxime le nombre donné.
Ainsi, $1289{,}565874899214 = 1{,}28956587 \times 10^3$.
Complète les tableaux ci-dessous.

1. $12{,}5926378125 = \square,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$
2. $1658{,}941256371 = \square,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$
3. $2015486{,}9701244 = \square,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$
4. $20121458965454 86{,}9701244 = \square,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$
5. $0{,}0124674125896211 = \square,\square\square\square\square\square\square\square\square\square \times 10^{\cdots}$

Définition 4. ***Écriture scientifique***

L'écriture scientifique d'un nombre est le produit d'un nombre décimal dont la partie entière comporte un seul chiffre différent de zéro par une puissance de 10.
L'écriture scientifique d'un nombre est unique.

Exemple

$427{,}15$ a pour écriture scientifique $4{,}2715 \times 10^2$ et $0{,}256$ a pour écriture scientifique $2{,}56 \times 10^{-1}$.

Remarque

L'écriture permet de donner un ordre de grandeur du nombre donné en lisant l'exposant de la puissance de 10.
$1\,529 = 1{,}529 \times 10^3$ donc ce nombre est de l'ordre des milliers (10^3).

Les puissances de base quelconque

☐ Calculer avec des puissances de base quelconque et exposant entier

1 **Exercice de découverte**

1. **Puissance de 2**
   (a) Écris chaque nombre 2^3, 2^5 et 2^8 comme un produit.
   (b) Quelle égalité peux-tu conjecturer avec les puissances de 2 ?
2. Peux-tu la conjecturer pour toutes les puissances ?
3. Peux-tu conjecturer une formule avec le quotient de puissance ?

Définition 5. ***Puissance de base a***

Le produit $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n}$ se note a^n et se lit "a exposant n". La puissance du nombre a, a^n, est un produit de n fois le même nombre a.

Proposition 0. Produit de puissances

Soit n et m deux nombres entiers et a un nombre.
$a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Proposition 0. Quotient de puissances

Soit n et m deux nombres entiers et a un nombre.
$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Exemple

- $10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$
- $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

Exemple

$\dfrac{10^8}{10^2} = 10^6$ et $\dfrac{5^9}{5^3} = 5^6$

2 **Exercice d'application**

Utiliser la calculatrice ou un tableur pour vérifier ou compléter chacune des égalités suivantes.

a. $9^3 + 5^3 + 2^3 + 9 \times 5 \times 2 = \ldots\ldots$

b. $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = \ldots\ldots$

c. $4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4 = (\ldots\ldots)^4$

d. $4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = (\ldots\ldots)^5$

3 **Exercice d'application**

Écrire par une expression numérique :

1. Le carré de 5×10
2. Le produit de $5^2 \times 10^2$
3. Peux-tu conjecturer une proposition ?
4. Teste la avec plusieurs valeurs.

4 **Exercice d'application**

Calcule avec une seule puissance les expressions suivantes.

1. $A = 10^4 \times 10^6$
2. $B = 3^{12} \times 3^{-2}$
3. $C = 5^{-5} \times 5^{-2}$

1. $D = 4^3 \times 2^8$
2. $E = 5^{12} \times 25^2$
3. $F = 9^{-2} \times 3^{-5}$

1. $G = 2^5 \times 16$
2. $H = 7^2 \times 7^2$
3. $I = 8^3 \times 2^3$

5 Exercice d'application

Calcule avec une seule puissance les expressions suivantes.

1. $A = \dfrac{10^4}{10^6}$
2. $B = \dfrac{3^{12}}{3^{10}}$
3. $C = \dfrac{5^5}{5^{-3}}$

1. $D = \dfrac{4^3}{2^8}$
2. $E = \dfrac{5^{12} \times 25^2}{5^8}$
3. $F = \dfrac{9^{-2} \times 3^{-5}}{3^4}$

1. $G = \dfrac{2^5 \times 16}{2^3}$
2. $H = \dfrac{7^4 \times 7^3}{49}$
3. $I = \dfrac{8^3 \times 2^3}{2^4 \times 2^{-2}}$

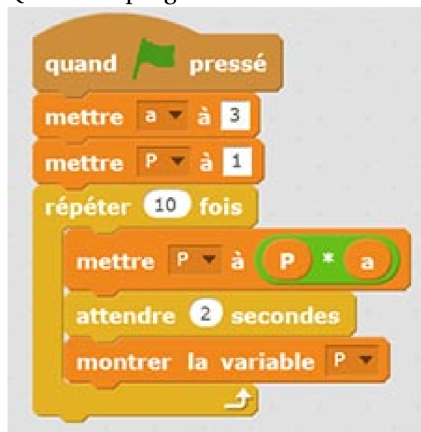
6 Exercice d'application

Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible.

1. $A = \dfrac{4 \times 15 \times 14}{21 \times 10 \times 22}$
2. $B = \dfrac{2^3 \times 5^2}{5 \times 2^2}$
3. $C = \dfrac{2^4 \times 3^2 \times 5^2}{5^3 \times 3^2 \times 2^2}$

7 Question flash

Que fait le programme Scratch suivant ?



8 Approfondissement

Marin Mersenne (1588-1648) était un religieux français érudit, philosophe, mathématicien et physicien. Il s'est intéressé à de nombreux domaines (acoustique, chute des corps, arithmétique, ...). Il a fourni une liste de nombres de la forme $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^5 - 1$, ..., jusqu'à $2^{257} - 1$, où chacun des exposants (2, 3, 5, ..., 257) est un nombre premier. Pour lui rendre hommage, on appelle aujourd'hui nombres de Mersenne les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$, où n est un entier naturel non nul.

1. Pour chacun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, vérifier que les nombres de Mersenne M_2, M_3, M_5, M_7 sont des nombres premiers.
2. La conjecture « Les nombres de Mersenne M_n où n est un nombre premier sont des nombres premiers » est-elle plausible ? Vérifier que M_{11} admet un diviseur autre que 1 et lui-même. La conjecture précédente est-elle vraie ? Justifier.
3. Le nombre M_{13} est-il premier ?

9 Approfondissement

Un laboratoire effectue des recherches sur le développement d'une population de bactéries dans un milieu clos. Les chercheurs observent que le nombre de bactéries triple toutes les heures. À 0 heure, il y a 4 bactéries.

1. Déterminer le nombre de bactéries ; à 1 heure ; à 2 heures ; à 5 heures.
2. Exprimer le nombre de bactéries à 24 heures.
3. Afin d'afficher le nombre de bactéries à chaque heure, l'un des chercheurs utilise un tableur (voir ci-contre). Quelle formule a-t-il entré dans la cellule B3 afin d'afficher dans la colonne B, par recopie vers le bas, les résultats voulus ?
4. Calculer les valeurs donnant le nombre de bactéries sur une calculatrice ou un tableur, de 0 heure à 24 heures.

	Heure	Nombre de bactéries
1	0	4
2	1	12
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	