Chapitre 4.

Intervalle de $\mathbb{R}$

Les savoir-faire du parcours

- Représenter les ensembles de nombres sur la droite graduée
- Identifier les intervalles de $\mathbb{R}$
- Lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;

Les mathématiciennes et mathématiciens

Georg Cantor est un mathématicien allemand, né le 3 mars 1845 à Saint-Pétersbourg et mort le 6 janvier 1918 à Halle.
Il est connu pour être le créateur de la théorie des ensembles.
Il prouva que les nombres réels sont "plus nombreux" que les entiers naturels. En fait, le théorème de Cantor implique l'existence d'une "infinité d'infinis". Il définit les nombres cardinaux, les nombres ordinaux et leur arithmétique.
Une partie du travail de Cantor consista à dire que l'infini a plusieurs taille. Et qu'il y a des infini plus grand que d'autres.
Cantor rejoint ainsi le monde de la philosophie, comme **Pascal** 3 siècle plus tôt.

Chercher.

1 L'INSEE estime qu'un couple avec deux enfants appartient à la classe moyenne quand les revenus du foyer sont situés dans l'intervalle $[3253; 5609]$. Monsieur Twicks gagne 2731 euros et madame Twicks gagne 2952 euros et ont deux enfants Mary et Paul.
La famille appartient-elle à la classe moyenne ?

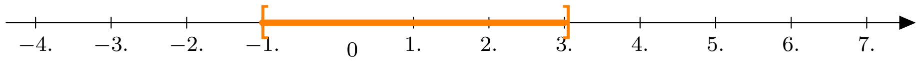
1 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1: Intervalle fermé. Intervalle ouvert.

Un **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$, c'est à dire un ensemble de nombres compris entre deux valeurs réelles.
Un **intervalle ouvert** de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dont les bornes ne sont pas incluses dans l'ensemble, c'est à dire un ensemble de nombres compris entre deux valeurs réelles non comprises.

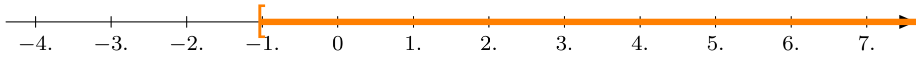
Représentation 2.

1. On a représenté sur la droite des nombres réels tous les nombres réels x tels que $-1 \leqslant x \leqslant 3$.



   Cet intervalle est noté $[-1;3]$ et on écrit alors $x \in [-1;3]$. Cet intervalle est dit **fermé**.
2. On a représenté sur la droite des nombres réels tous les nombres réels x tels que $-1 < x < 3$.

   Cet intervalle ouvert est noté $]-1;3[$ et on écrit alors $x \in]-1;3[$. Cet intervalle est dit **ouvert**.
3. On a représenté sur la droite des nombres réels tous les nombres réels x tels que $x \geqslant -1$.



   Cet ensemble est noté $[-1;+\infty[$ et on écrit alors $x \in [-1;+\infty[$. Cet intervalle est semi-ouvert à droite.
4. On a représenté sur la droite des nombres réels tous les nombres réels x tels que $x \geqslant -1$.

   Cet ensemble est noté $]-\infty;2]$ et on écrit alors $x \in]-\infty;2]$. Cet intervalle est semi-ouvert à gauche.

Remarques 3.

1. $+\infty$ se lit "plus l'infini". L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$.
2. Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ "sans trou", en "un seul morceau".
3. $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres. Ce ne sont que des notations (ce qui explique qu'ils soient toujours exclus).
4. Les intervalles correspondants aux quatre premières lignes du tableau sont dits bornés.
5. Plus généralement, les différents types d'intervalles sont donnés dans le tableau ci-dessous (où a et b représentent deux réels, avec $a < b$).

Connaitre et représenter les intervalles

2 Représenter.

Soit x un nombre. Écrire sous forme d'intervalle les inégalités suivantes :

1. $-2 \leqslant x \leqslant 3$ ....
2. $-\pi \leqslant x < \pi$ ....
3. Soient a et b deux réels, $a \leqslant x \leqslant b$ ....
4. $x \leqslant -2$ ....
5. $0 \geqslant x$ ....
6. Soient a un réel, $x < a$ ....

/b/ABCD

3 Représenter.

Soit x un nombre. Écrire sous forme d'inégalités les intervalles suivants :

1. $x \in [-3; 2]$ ....
2. $x \in]-\infty; 3]$ ....
3. $x \in]0; 1]$ ....
4. $x \in]1; +\infty[$ ....
5. $x \in]-5; 8[$ ....
6. $x \in [a; b]$ ....

/b/ABCD

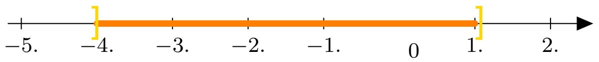
4 Représenter.

1. Écrire l'ensemble des réels strictement supérieurs à -2 et inférieurs à 4 ....
2. Écrire l'ensemble des réels supérieurs à 2 et inférieurs à 6 ....
3. Écrire l'ensemble des réels inférieurs à -1 ....

/b/ABCD

5 Représenter.

Recopier et compléter le tableau.

Intervalle	Inégalité	Représentation sur la droite graduée
$x \in \left[-6; \dfrac{2}{7}\right]$	$-6 \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{7}$	
	$-3 \leqslant x < 5$	
$x \in [5; 8[$		
		

/b/ABCD

6 Représenter.

Représenter sur une droite graduée les intervalles donnés. Soit x un réel,

1. $-10 < x < 3$ ....
2. $x \in [0; \pi]$ ....
3. $x \geqslant \dfrac{1}{3}$ ....
4. l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1 et inférieurs à 3 ....

/b/ABCD

Raisonner. Communiquer.

7 Complète par $\in$ ou $\notin$.

1. $4 \ldots\ldots [4;5]$
2. $1,5 \ldots\ldots [1;3]$
3. $-5,9 \ldots\ldots]-\infty;-6]$
4. $3 \ldots\ldots [0;3[$
5. $\dfrac{2}{3} \ldots\ldots [2;3]$
6. $\dfrac{1}{2} \ldots\ldots]-1;1[$
7. $\dfrac{5}{3} \ldots\ldots \left[\dfrac{5}{6};\dfrac{11}{6}\right]$
8. $\sqrt{5} \ldots\ldots [1;3]$
9. $\sqrt{24} \ldots\ldots [0;4]$

/b/ABCD

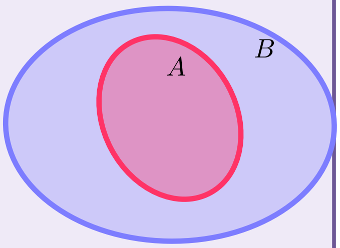
2 Opérations d'ensembles de nombres et logique mathématique

Définition 4: Inclusion.

Un ensemble A **est inclus dans** un ensemble B lorsque **tous** les éléments de A sont contenus dans B. On note $A \subset B$. .

....

....



Remarque 5.

- Un ensemble **est inclus dans** un ensemble. A et B deux ensembles : $A \subset B$.
- Un élément **appartient à** un ensemble. x un élément et A un ensemble : $x \in B$.

Logique mathématique 6. Le contre exemple

$\mathbb{Z}$ est-il inclus dans $\mathbb{N}$? Autrement dit, tous les éléments de $\mathbb{Z}$ sont -ils contenus dans $\mathbb{N}$?
On cherche un seul élément de $\mathbb{Z}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{N}$: $-2 \in \mathbb{Z}$ mais $-2 \notin \mathbb{N}$ donc $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.
-2 est appelé un **contre exemple**.

Logique mathématique 7. La contraposée

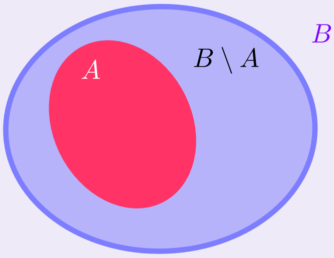
Soit A et B deux ensembles tels que $A \subset B$.
Ces deux propositions disent la même idée :
Si $x \in A$ alors $x \in B \iff$ Si $x \notin B$ alors $x \notin A$.
$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

Définition 8: Complémentaire.

Soit Ω un ensemble contenant un ensemble A. On appelle **complémentaire** de A dans Ω, **tous** les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.
....

....

Si $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $A = \{3; 4; 6\}$ alors $\Omega \setminus A = \{0; 1; 2; 5\}$

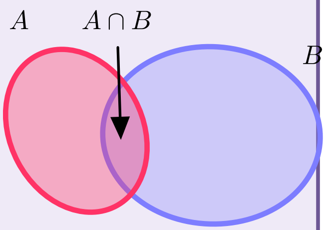


Définition 9: Intersection.

L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble $A \cap B$ qui contient **tous** les éléments communs aux deux ensembles.
On lit A "inter" B.
L'ensemble $A \cap B$ est l'ensemble qui réunit les éléments de A **et** de B pris une seule fois. ....

....

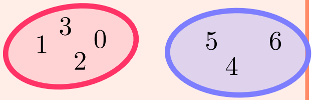
Si $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $B = \{3; 4; 7; 8\}$ alors $A \cap B = \{3; 4\}$



Remarque 10.

Deux ensembles sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \oslash$. $\oslash$ est l'ensemble vide.

Si $C = \{0; 1; 2; 3\}$
et $D = \{4; 5; 6\}$
alors $A \cap B = \oslash$

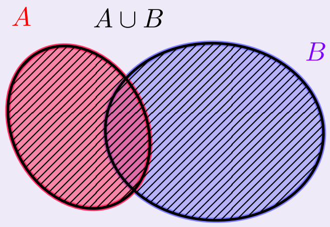


Définition 11: Réunion.

La **réunion** de deux ensembles est l'ensemble $A \cup B$ qui contient **tous** les éléments de A **ou** de B pris une seule fois.
On lit A "union" B. ....

....

Si $A = \{0;1;2;3;4;5;6\}$ et $B = \{3;4;7;8\}$ alors $A \cup B = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$



Opérer avec les ensembles

8 Communiquer.

Compléter par $\subset$ ou $\not\subset$. Justifier l'utilisation de $\not\subset$.

1. $\mathbb{Z} \ldots\ldots \mathbb{R}$ ....
2. $\mathbb{Q} \ldots\ldots \mathbb{Z}$ ....
3. $\mathbb{Z} \ldots\ldots \mathbb{N}$ ....
4. $\mathbb{Z} \ldots\ldots \mathbb{D}$ ....
5. $\mathbb{D} \ldots\ldots \mathbb{Q}$ ....
6. $\mathbb{Q} \ldots\ldots \mathbb{N}$ ....

/b/ABCD

9 Représenter.

On propose dans chaque cas deux ensembles A et B. Lequel est-il inclus dans l'autre ?

1. $A = [-1,1;3]$ et $B =]-2,9;6]$ ....
2. $A = [0,7;0,8]$ et $B = [0,5;+\infty[$ ....
3. $A =]1;2[$ et $B = [1;2]$ ....
4. $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Z}$ ....

/b/ABCD

10 Raisonner.

Déterminer les complémentaires de l'ensemble A par rapport Ω.

1. $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ et $A = \{1;2\}$. $\Omega \setminus A =$ ....
2. $\Omega = \{-4;-2;-1;0;1;2;\}$ et $A = \{-2;1;2\}$. $\Omega \setminus A =$ ....
3. $\Omega = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Q}$. $\Omega \setminus A =$ ....
4. $\Omega = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}^-$. $\Omega \setminus A =$ ....

/b/ABCD

11 Représenter.

Déterminer les intersections des ensembles A et B suivants. $A \cap B =$ se lit A inter B.

1. $A = \{1;2;3;4;5;6\}$ et $B = \{1;2\}$. $A \cap B =$ ....
2. $A = \{-4;-2;-1;0;1;2;\}$ et $B = \{-2;1;2\}$. $A \cap B =$ ....
3. $A = \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{R}$. $A \cap B =$ ....
4. $A = [-4;3[$ et $B = [-2;7]$. $A \cap B =$ ....
5. $A = [-2;1]$ et $B = [2;3]$. $A \cap B =$ ....
6. $A = \mathbb{N}$ et $B =]-\infty;5]$. $A \cap B =$ ....

/b/ABCD

Représenter.

12 Déterminer les réunions des ensembles A et B suivants.

/b/ABCD

1. $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{1; 2\}$. $A \cup B =$ ....

2. $A = \{-4; -2; -1; 0; 1; 2; \}$,$B = \{-2; 1; 2\}$. $A \cup B =$ ....

3. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$. $A \cup B =$ ....

4. $A = \{1; 2; 8; 6\}$, $B = \{0; 2; 4; 8\}$. $A \cup B =$ ....

5. $A = [-2; 1]$, $B = [2; 3]$. $A \cup B =$ ....

6. $A = [0; +\infty[$, $B =]-\infty; 5]$. $A \cup B =$ ....

Communiquer.

13

Johan visite Vienne, la capitale de l'Autriche. L' Autriche est un pays Européen.

1. Arrivé en Autriche, Johan est-il à Vienne ? ....
2. A Vienne, Johan est-il en Autriche ? ....
3. Peut-on dire que Johan est en Europe ? ....
4. Lettres A, E et V sont les initiales respectives de Autriche, Europe et Vienne. Compléter avec les lettres A, E et V : $\ldots\ldots \subset \ldots\ldots \subset \ldots\ldots$

/b/ABCD

Communiquer.

14

Recopie et complète par $\subset$, $\in$, $\not\subset$ ou $\notin$.

1. $\mathbb{N} \ldots\ldots \mathbb{R}$
2. $-5 \ldots\ldots \mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z} \ldots\ldots \mathbb{N}$
4. $\{0;1;2\} \ldots\ldots \mathbb{N}$
5. $]-\infty;1] \ldots\ldots \mathbb{R}$
6. $]0;+\infty[\ldots\ldots \mathbb{Z}$
7. $\sqrt{3} \ldots\ldots \mathbb{N}$
8. $-1,5 \ldots\ldots \mathbb{Z}$
9. $\mathbb{Q} \ldots\ldots \mathbb{Z}$

/b/ABCD

Communiquer.

15

Déterminer les intersections des ensembles suivants.

1. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Q}$. $A \cap B =$ ....
2. $A =]-2;3[$ et $B = [-1;5]$. $A \cap B =$ ....
3. $A = [-4;3]$ et $B = [2;6]$. $A \cap B =$ ....
4. $A =]-6;1[$ et $B = [0;5]$. $A \cap B =$ ....

/b/ABCD

Chercher.communiquer.

16

Dans chaque cas, trouver, lorsque cela est possible, un nombre x qui remplit les critères suivants :

1. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Z}$ ....
2. $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{N}$ ....

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

17

Déterminer, dans chaque cas, la réunion des ensembles suivants. On écrira : $A \cup B =$ où A et B sont les ensembles ci-dessous.

1. $A = \{1;3;5;7\}$ et $B = \{0;2;4;5;7;8\}$ ....
2. $A = [-3;4]$ et $B = [2;6]$ ....
3. $A = [0;+\infty[$ et $B =]-\infty;5]$ ....

On pourra représenter les intervalles sur une droite graduée tracée à main levée.

/b/ABCD

18 Modéliser.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x dans chaque cas.

1. $x < -4$ et $x \geqslant 10$ ....

2. $x \leqslant 6$ et $x \leqslant 3$ ....

3. $x \leqslant 6$ ou $x \geqslant 3$ ....

/b/ABCD

Représenter. Raisonner.

19

Déterminer l'intervalle des valeurs de x dans chaque cas.

1. $[-1,1;3]$ et $[2,9;6]$
2. $x > -4$ et $x \leqslant 10$
3. $x \leqslant -3$ et $x \leqslant 5$
4. $x \geqslant 1$ ou $x < 3$.
5. $x \geqslant 1$ et $x < 3$.
6. $x \leqslant 5$ ou $x \geqslant 2$

/b/ABCD

Représenter.

20

Dans chaque cas, trouver, lorsque cela est possible, un nombre x qui remplit les conditions suivantes :

1. $x \notin D$ et $x \in \mathbb{R}$ ....
2. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Z}$ ....
3. $x \notin \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$ ....
4. $x \in \mathbb{D}$ ou $x \in \mathbb{Q}$ ....
5. $x \notin \mathbb{N}$ ou $x \in \mathbb{Z}$ ....

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

21

On propose dans chaque cas deux ensembles A et B. Lequel est inclus dans l'autre ?

On pourra représenter chaque intervalle sur une droite graduée.

1. $A = \left[-\frac{11}{10}; \frac{29}{10}\right]$ et $B = \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$
2. $A = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $B = [0,7;0,8]$.
3. $A = [1;2]$ et $B =]1;2[$.

1.

2.

3.

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

22

Déterminer les intersections des ensembles suivants. On écrira : $A \cap B =$ où A et B sont les ensembles ci-dessous.

On pourra représenter chaque intervalle sur une droite graduée.

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$
2. $[-5;2[$ et $[0;7]$
3. $[-1;4]$ et $[-3;-1]$
4. $\mathbb{N}$ et $]-\infty;5]$
5. $[-5;0[$ et $[0;3]$

1.

2.

3.

4.

5.

/b/ABCD

Chercher.

23

On donne le programme en Python ci dessous.

```python
def is_in(x,a,b):
    if x > a and x < b :
        test = "{} is in  ]{};{}[".format(x,a,b)
    else :
        test = "{} is not in ]{};{}[".format(x,a,b)
    return test
x=int(input("Entrer un nombre  :"))
a=int(input("Entrer la borne inf :"))
b=int(input("Entrer la borne sup :"))
print(is_in(x,a,b))
```

1. Que fait ce programme ? Vous pouvez aussi ouvrir l'éditeur Python : https://sacado.xyz/tool/show/18
2. Modifier ce programme pour qu'il teste si un nombre x appartient à l'intervalle $[a;b]$.

/b/ABCD

Représenter.

24

Démontrer que si p^2 est impair alors p est impair.

Définition 12: Nombre décimal périodique.

Le nombre $a_0, \underline{a_1 a_2 a_3}$ est un nombre décimal périodique de période $a_1a_2a_3$. Les chiffres a_1, a_2, a_3 se répètent indéfiniment.

Représenter. Calculer.

25

Démontrer que $0,\underline{9} = 1$.

Représenter. Calculer.

26

1. On considère le nombre $\frac{19}{11}$.
   (a) Donner le développement décimal de $\frac{19}{11}$ avec 8 chiffres significatifs. $\frac{19}{11}$ semble-t-il décimal ?
   (b) On dit que $\frac{19}{11}$ a une écriture périodique. Préciser sa période (série de chiffres qui se répète à l'infini dans le développement décimal).
2. On considère le nombre $x = 0,13131313....$ dont le développement décimal a pour période 13.
   (a) Démontrer que $100x = 13 + x$.
   (b) En déduire une écriture fractionnaire de x. Quelle est la nature du nombre x ?

Représenter. Calculer.

27

1. Démontrer que $0,\underline{12}$ est un nombre rationnel à préciser.
2. Démontrer que $x = 3,\underline{412}$ est un nombre rationnel.

Raisonner.

28

Représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormal

1. l'ensemble des points $M(x;y)$ tes que
$$1 < x < 3 \text{ et} 0 \leqslant y < 4$$
2. l'ensemble des points $M(x;y)$ tes que
$$1 \leqslant x \leqslant 5 \text{ et } -2 \leqslant y \leqslant 1$$

/b/ABCD

Représenter.

29 Représenter graphiquement, dans le plan muni d'un repère orthonormal, l'ensemble des points $M(x ; y)$ tes que

$$1 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5 \text{ et } -2 \leqslant 3y + 4 \leqslant 13$$

/b/ABCD

30 Raisonner.

Compléter avec $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

$\frac{2}{10}$..........$\mathbb{Z}$ $\quad -\sqrt{25}$..........$\mathbb{Z}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{4}$..........$\mathbb{Q}$

π..........$\mathbb{R}$ $\quad -\frac{5}{3}$..........$\mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{11}$..........$\mathbb{R}$

31 Raisonner.

Déterminer, dans chaque cas, l'intersection puis la réunion des ensembles suivants.

1. $A = \{1; 3; 5; 7\}$ et $B = \{0; 2; 4; 5; 7; 8\}$ ....

....

2. $A = [-3; 4]$ et $B = [2; 6]$ ....

....

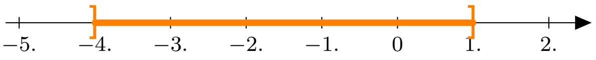
3. $A = [0; +\infty[$ et $B =]-\infty; 5]$ ....

....

On pourra représenter les intervalles sur une droite graduée tracée à main levée.

32 Représenter. Raisonner.

Recopier et compléter le tableau.

Intervalle	Inégalité	Représentation
$x \in [-2; 6]$	$-2 \leqslant x \leqslant 6$	
	$1 \leqslant x < 3$	
$x \in [-6; 6[$		
		

33 Raisonner.

Démontrer que $0,\underline{485}$ est un nombre rationnel à préciser.

Compétence.

34

Compétence.

35

/b/ABCD