I. Les savoir-faire du parcours

Les savoir-faire du parcours

- Savoir effectuer une division euclidienne.
- Savoir déterminer si des nombres sont des multiples ou diviseurs.
- Savoir utiliser les critères de divisibilités.
- Savoir déterminer le nombre de diviseurs d'un nombre donné.
- Savoir déterminer si un nombres est premier ou non.
- Savoir décomposer un nombre en produit de facteurs premiers
- Savoir simplifier une fraction par décomposition en produit de facteurs premiers.
- Savoir résoudre un problème de multiples ou de diviseurs.
- Savoir résoudre un problème d'arithmétique.

II. Multiples et diviseurs

1. La division euclidienne

Définition 1.

Soit a et b deux nombres entiers positifs.
Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est déterminer deux nombres entiers q et r tels que $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.
On dit que q est le **quotient** et r le **reste** dans la division euclidienne de a par b.

Exemple

On considère les nombres 83 et 12.

$$83 = 6 \times 12 + 11$$

Dividende = 83
Diviseur = 12
Quotient = 6
Reste = 11

Méthode

Déterminer si une égalité est une division euclidienne

2. Multiples et diviseurs

Définition 2.

Soit a et b deux nombres entiers positifs.
Lorsque le **reste** dans la **division euclidienne** de a par b est égal à 0, il existe alors un entier q tel que $a = b \times q$.
On dit que a **divise** b, que b est **un diviseur** de a ou que a est **un multiple** de b.

Exemple

$42 \div 6 = 7$, autrement dit la division euclidienne de 42 par 6 a pour reste 0 : $42 = 6 \times 7 + 0$.

- 42 est **divisible** par 6 et par 7.
- 42 est un **multiple** de 6 et 7
- 6 est un **diviseur** de 42.
- 7 est un **diviseur** de 42.

Propriété 1. Critères de divisibilités

Un nombre entier est divisible :
- par 2, si son chiffre des unités est pair,
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5,
- par 10, si son chiffre des unités est 0,
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

III. Nombres premiers

1. Nombres premiers

Définition 3.

On dit qu'un nombre entier naturel p est **premier** s'il n'a que **deux diviseurs distincts** : 1 et p.

Exemple

- On considère le nombre $n = 48$.
  48 a 10 diviseurs qui dont : $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$
  donc 48 n'est pas un nombre premier.
- On considère le nombre $n = 11$.
  11 a 2 diviseurs qui sont : $1, 11$
  donc 11 est un nombre premier.

Remarques

- Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.
- La liste des nombres premiers est infinie.

2. Crible d'Érathostène

Histoire des mathématiques

Erathostène (IIIe siècle av JC) parcourt la liste des nombres entiers. En supprimant les multiples des nombres rencontrés, les nombres restants sont les nombres premiers.

Méthode

On considère la liste de tous les nombres entiers compris entre 2 et 100. On parcourt cette liste à partir du premier nombre : 2. On barre tous les multiples de ce nombre. Lorsque cela est fait, on prend le prochain nombre qui n'est pas barré puis on barre tous ses multiples à lui et ainsi de suite.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Grâce au crible nous pouvons déduire la liste des nombres premiers compris entre 1 et 101 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97 ; 101

3. Décomposition d'un nombre en facteurs premiers

Propriété 2.

Tout nombre se **décompose** de **façon unique** comme **produit** de **facteurs premiers**.

Méthode

1. On construit un tableau à deux colonnes. La première colonne correspond au nombre à décomposer (p) et ses divisions, la seconde colonne aux diviseurs (n) du nombre à décomposer. L'algorithme consiste a trouver un premier diviseur (n_1) du nombre p puis a le noter dans la seconde colonne en face de p. En dessous de p on écrit le résultat de la division p/n_1 puis on recommence avec un nouveau diviseur n_2 de p/n_1 et ainsi de suite jusqu'à ce que le résultat de la division p/n_n soit 1. Le résultat de la décomposition sera le produit de tous les nombres de la deuxième colonne.

En schéma : $\begin{array}{c|c} p & n_1 \\ p/n_1 & n_2 \\ p/n_2 & n_3 \\ ... & ... \\ p/n_n & p/n_n \\ 1 & \end{array}$ et p/n_n est donc un nombre premier.

Exemple

Décomposition du nombre 153 :

$$\begin{array}{c|cl} 153 & 3 & \text{car 153 est divisible par 3 et } 153 = 3 \times 51 \\ 51 & 3 & \text{car 51 est divisible par 3 et } 51 = 3 \times 17 \\ 17 & 17 & \text{car 17 n'est divisible que par 17 et } 17 = 17 \times 1 \\ 1 & & \end{array}$$

Ainsi $153 = 3 \times 3 \times 17 = 3^2 \times 17$

2. On écrit d'abord un produit quelconque qui est égale au nombre p. Puis on décompose les facteurs de ce produit.

Exemple

Décomposition du nombre 84 :

$$84 = 4 \times 21 = 2 \times 2 \times 7 \times 3 = 2^2 \times 3 \times 7$$

Méthode

Déterminer les diviseurs communs à deux nombres

Déterminer le plus grand diviseur commun de deux nombres décomposés

4. Application : fractions irréductibles

Définition 4.

On dit qu'une fraction est **irréductible**, lorsque son **numérateur** et son **dénominateur** ont pour **seul diviseur commun 1**.

Méthode

Déterminer une fraction irréductible avec des nombres décomposés

Déterminer l'écriture d'une fraction sous forme irréductible