

# Fonctions de référence

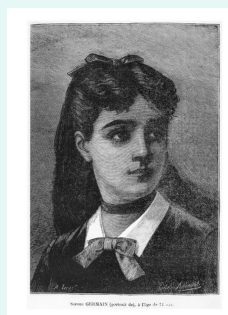


## Les savoir-faire du parcours

- Savoir étudier la parité d'une fonction.
- Savoir déterminer graphiquement la parité d'une fonction.
- Savoir étudier les variations de la fonction carré.
- Savoir comparer des images par la fonction carré.
- Savoir résoudre une équation, inéquation avec la fonction carré.
- Savoir étudier les variations de la fonction cube.
- Savoir comparer des images par la fonction cube.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction cube.
- Savoir étudier les variations de la fonction inverse.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction inverse.
- Savoir étudier les variations de la fonction racine carrée.
- Savoir résoudre une inéquation avec la fonction racine carrée.
- Savoir reconnaître une fonction de référence.

## Les mathématiciennes et mathématiciens

Sophie Germain (1776-1831) était une mathématicienne française pionnière du XIXe siècle. Malgré les obstacles dus à sa condition de femme, elle a contribué de manière significative à la théorie des nombres et à la théorie des équations diophantiennes. Elle a utilisé un pseudonyme masculin pour correspondre avec d'autres mathématiciens, dont Carl Friedrich Gauss, et a été la première femme à recevoir la médaille de l'Académie des Sciences de Paris. Ses travaux ont jeté les bases de la théorie des nombres modernes.



1



--





# 1 Fonctions paires, fonctions impaires

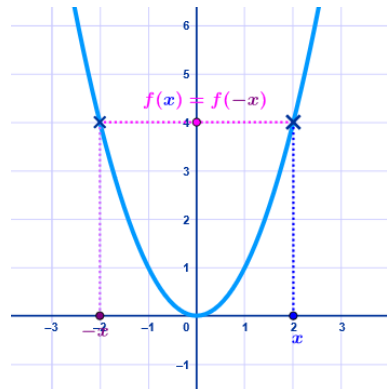
## Définition 1: Fonction paire.

On dit qu'une fonction  $f$  est **paire** si :

- $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$

## Remarque 2.

La **courbe représentative** d'une fonction pair est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.



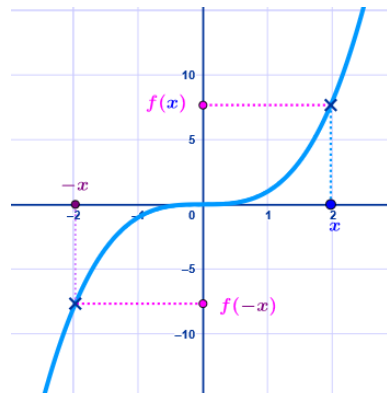
## Définition 3: Fonction impaire.

On dit qu'une fonction  $f$  est **impaire** si :

- $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

## Remarque 4.

La **courbe représentative** d'une fonction pair est **symétrique** par rapport à l'**origine du repère**.



# 2 La fonction Carré

## Définition 5: Fonction Carré.

La **fonction Carré**  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

La **représentation graphique** de la fonction Carré s'appelle une **parabole** et son équation est  $y = x^2$ .

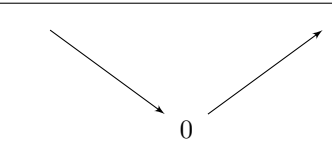
**Théorème 6.**

La fonction Carré  $f$  est paire.

La parabole d'équation  $y = x^2$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Théorème 7: Variations de la fonction Carré.****Démonstration exigible**

La fonction Carré est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^-$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$			

**Preuve :** Etude des variations de  $f : x \mapsto x^2$  sur  $[0; +\infty[$  :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres appartenant à  $[0; +\infty[$  tels que  $a < b$ .

Comparons les images de  $a$  et  $b$  par la fonction  $f$ .

$$f(a) = a^2 \text{ et } f(b) = b^2$$

Pour les comparer on étudie le signe de leur différence :

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- $a$  et  $b$  appartiennent à  $[0; +\infty[$  donc  $a + b > 0$
- $a < b$  donc  $a - b < 0$
- $(a + b)(a - b) < 0 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0 \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) < f(b)$

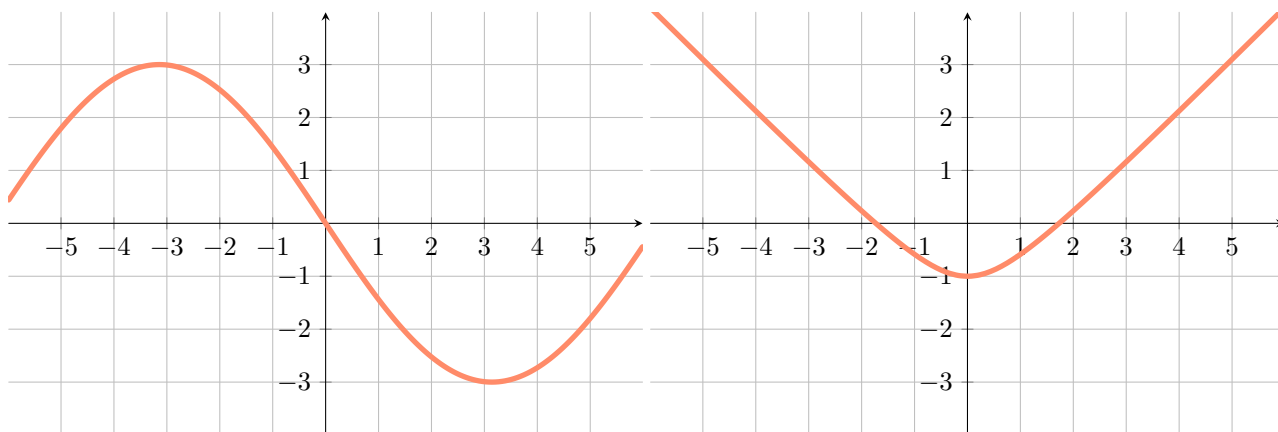
Les images de  $a$  et  $b$  par la fonction  $f$  sont rangés dans le même ordre que ces nombres. La fonction est donc croissante sur  $[0; +\infty[$ .

## Parité d'une fonction

Représenter. Raisonner.

2

Déterminer si les fonctions suivantes sont paires ou impaires.



/b/ABCD

La fonction est ..... La fonction est .....

Raisonner.

3

A partir de la définition, démontrer que la fonction  $f : x \mapsto x^2$  est **paire**.

.....  
 .....  
 .....



/b/ABCD

## Connaitre et utiliser la fonction Carré

Raisonner.

4

Comparer sans les calculer.

•  $\left(\frac{3}{2}\right)^2$  et  $\pi^2$

.....  
 .....

•  $(-11)^2$  et  $(-6)^2$

.....  
 .....

•  $-7^2$  et  $-8^2$

.....  
 .....  
 .....



/b/ABCD

5

- Déterminer algébriquement l'intervalle de  $x^2$  lorsque  $x$  appartient à  $[1; 3]$ .

.....

.....

- Déterminer algébriquement l'intervalle de  $x^2$  lorsque  $x$  appartient à  $[-1; 4]$ .

.....

.....

.....



/b/ABCD



### 3 La fonction Cube

#### Définition 8: Fonction Cube.

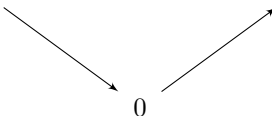
La **fonction Cube**  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ .

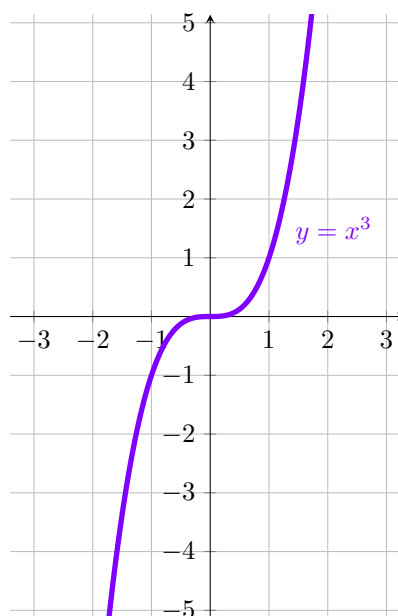
#### Théorème 9.

La fonction Cube  $f$  est impaire.  
La courbe d'équation  $y = x^3$  est symétrique par rapport à l'origine du repère.

#### Théorème 10: Variations de la fonction Cube.

La fonction Cube est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^-$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$			



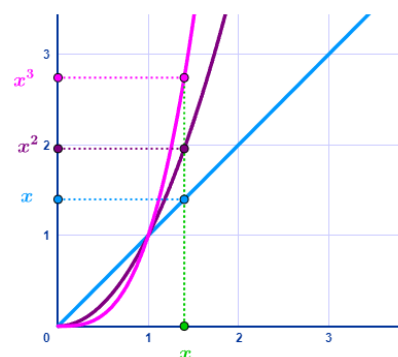
## Positions relatives des courbes de $x$ , $x^2$ et $x^3$

### Propriété 11.

#### Démonstration exigible

- Si  $0 \leq x \leq 1$  alors  $x \geq x^2 \geq x^3$ .
- Si  $x \geq 1$  alors  $x \leq x^2 \leq x^3$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x$	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	+



**Preuve :** Comparaison de  $x$  et  $x^2$  sur  $[0; +\infty[$ .

Pour les comparer, on étudie le signe de leur différence.

On définit la fonction  $f$  par  $f(x) = x^2 - x$ .

$$f(x) = x^2 - x = x(x - 1)$$

On peut établir le tableau de signes de  $f(x)$ .

(E) :  $f(x) = 0$  alors  $S(E) = \{0; 1\}$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x$	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	+

Ainsi :

- $\forall x \in ]0; 1[, f(x) < 0$  donc  $x^2 - x < 0$  donc  $x^2 < x$
- $\forall x \in ]1; +\infty[, f(x) > 0$  donc  $x^2 - x > 0$  donc  $x^2 > x$

## Connaitre et utiliser la fonction Cube

6

Raisonner.

A partir de la définition, démontrer que la fonction  $f : x \mapsto x^3$  est **impaire**.

.....

.....

.....



/b/ABCD

7

Raisonner.

Comparer sans les calculer.

•  $(\frac{1}{5})^3$  et  $\pi^3$

.....

.....

•  $(-5)^3$  et  $(-9)^3$

.....

.....



/b/ABCD

## Position relatives des courbes

8

Raisonner. Communiquer.

Comparer la position relative des courbes de  $x^2$  et  $x^3$  sur  $[0; +\infty]$ .

.....

.....

.....

.....

.....



/b/ABCD

9

Raisonner.

Comparer sans les calculer.

•  $(\frac{1}{3})^3$  et  $(\frac{1}{3})^2$

.....

.....

•  $\frac{10}{9}$  et  $(\frac{10}{9})^2$

.....

.....



/b/ABCD





## 5

## La fonction Inverse

## Définition 12: Fonction Inverse.

La **fonction Inverse**  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

La **représentation graphique** de la fonction Inverse s'appelle une **hyperbole** et son équation est  $y = \frac{1}{x}$ .

## Théorème 13.

La fonction Inverse  $f$  est impaire.

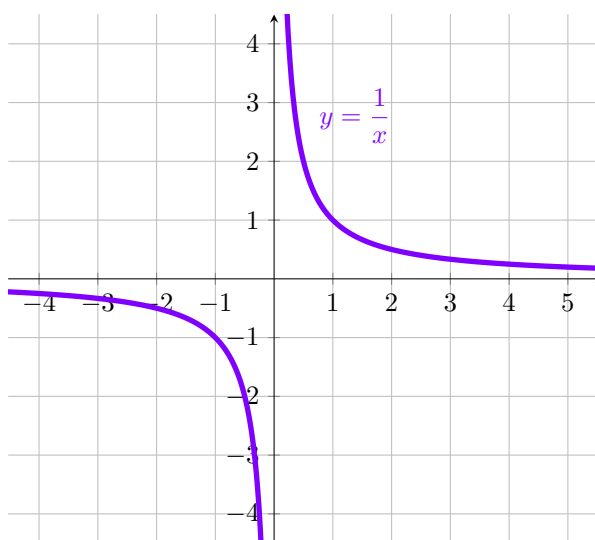
La hyperbole d'équation  $y = \frac{1}{x}$  est symétrique par rapport à l'origine du repère.

## Théorème 14: Variations de la fonction Inverse.

## Démonstration exigible

La fonction Carré est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-^*$  et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$	$0$		$0$



**Preuve :** Étude des variations  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $] -\infty; 0[$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres appartenant à  $] -\infty; 0[$  tels que  $a < b$ .

Comparons les images de  $a$  et  $b$  par la fonction  $f$ .

$$f(a) = \frac{1}{a} \text{ et } f(b) = \frac{1}{b}$$

Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$$

- $a$  et  $b$  appartiennent à  $] -\infty; 0[$  donc  $ab > 0$
- $a < b$  donc  $a - b < 0$  donc  $b - a > 0$
- $\frac{b-a}{ab} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow f(a) - f(b) > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

Les images de  $a$  et  $b$  par la fonction  $f$  sont rangés dans l'ordre contraire de celui de ces nombres. La fonction inverse est donc décroissante sur  $] -\infty; 0[$ .

## 6

## La fonction Racine carrée

## Définition 15: Fonction Racine carrée.

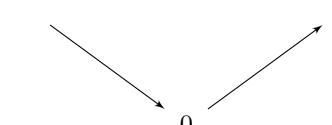
La **fonction Racine carrée**  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

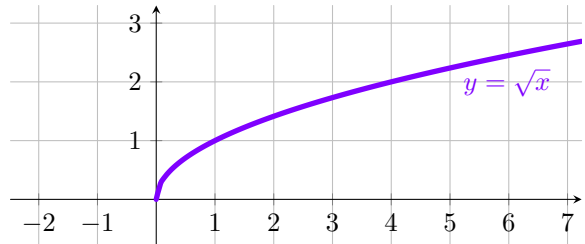
**Remarque 16.**

L'ensemble de définition de la fonction Racine Carrée n'est pas centré. Donc la fonction Racine carrée n'est ni paire, ni impaire.

**Théorème 17: Variations de la fonction Racine Carrée.****Démonstration exigible**

La fonction Racine carrée est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$			



**Preuve :** Etude des variations de  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $[0; +\infty[$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres appartenant à  $[0; +\infty[$  tels que  $a < b$ .

Comparons les images de  $a$  et  $b$  par la fonction  $f$ .

$$f(a) = \sqrt{a} \text{ et } f(b) = \sqrt{b}$$

Pour les comparer on étudie le signe de leur différence.

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$
- $a < b$  donc  $a - b < 0$
- $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < 0 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \Rightarrow f(a) - f(b) < 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

Les images de  $a$  et  $b$  par la fonction  $f$  sont rangés dans le même ordre que celui de ces nombres. La fonction racine carrée est donc croissante sur  $[0; +\infty[$ .

## Connaitre et utiliser les fonctions Inverse et Racine Carrée

Raisonner.

10

A partir de la définition, démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  est **impaire**.



/b/ABCD

Raisonner.

11

Comparer sans les calculer.

•  $\frac{1}{5}$  et  $\frac{1}{4}$



/b/ABCD

•  $-\frac{1}{4}$  et  $-\frac{1}{6}$

•  $\sqrt{10}$  et  $\sqrt{100}$

Raisonner.

12

Expliquer pourquoi la fonction Inverse n'est pas décroissante sur  $\mathbb{R}^*$ .

Représenter. Raisonner.

13

Résoudre graphiquement les équations, puis retrouver les résultats algébriquement.

1.  $\frac{1}{x} = 4$



/b/ABCD

2.  $\sqrt{x} = 2$

Valider ces résultats par le calcul.





/b/ABCD

14

1. Déterminer algébriquement l'intervalle de  $\frac{1}{x}$  lorsque  $x$  appartient à  $[1; 3]$ .

.....

.....

.....

2. Déterminer algébriquement l'intervalle de  $\sqrt{x}$  lorsque  $x$  appartient à  $[1; 2]$ .

.....

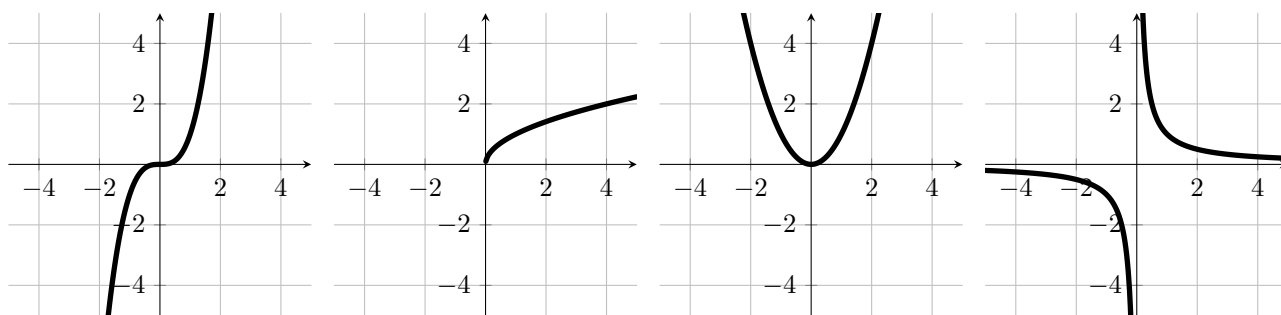
.....

.....

Représenter. Raisonner.

15

Associer à chaque représentation la fonction de référence qui lui correspond.



Compétence.

16

1. La fonction  $g$  est paire et telle que  $g(3) = 6$ . Quelle est la valeur de  $g(-3)$  ?

.....

2. La fonction  $i$  est impaire et telle que  $i(2) = -5$ . Quelle est la valeur de  $i(-2)$  ?

.....

Raisonner. Calculer.

17

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1.  $x^2 = 6$

2.  $x^2 = \frac{5}{3}$

3.  $x^2 \leq 3$

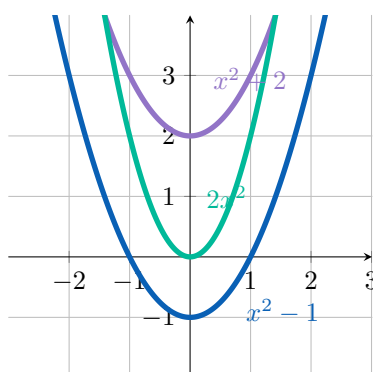
4.  $\frac{1}{x} \geq 1$

Compétence.

18

Associer à chaque courbe la fonction qui correspond :

$f : x \mapsto 2x^2$     $g : x \mapsto x^2 + 2$     $h : x \mapsto x^2 - 1$



Raisonner.

19



Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

1. Un nombre et son carré ont toujours le même signe.
2. L'équation  $x^2 = k$  a toujours une solution.
3. La fonction  $x \mapsto x^2$  sera toujours supérieure à  $x \mapsto x^2 - 1$ .
4. Si  $x \in [0, 1]$  alors  $x^2 \in [0, 1]$ .

Compétence.

20



Raisonner. Communiquer.

21

Démontrer que  $f : x \mapsto x^2$  est décroissante sur  $[-\infty; 0[$ .

.....

.....

.....

.....

.....

Raisonner. Communiquer.

22

En utilisant la propriété de parité de la fonction  $x \mapsto x^2$ , montrer que  $2x^2 + 3$  est paire.

.....

.....

.....

Raisonner. Calculer.

23

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

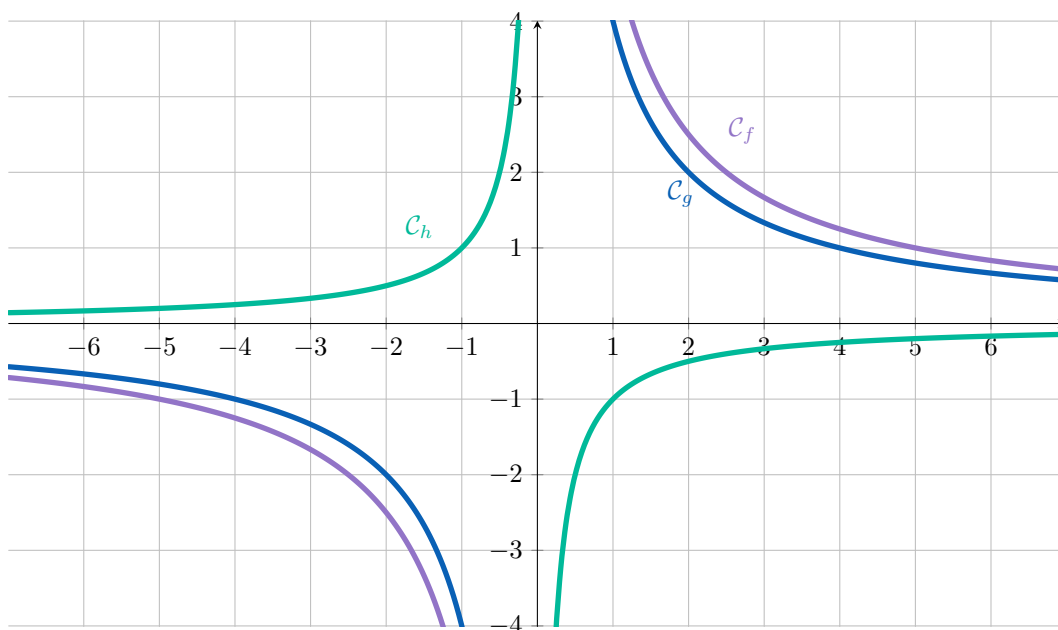
1.  $x^2 + 3 = 4$
2.  $\sqrt{x} = 25$
3.  $x^3 \geq \frac{8}{27}$
4.  $\frac{1}{x} \leq 1$

Raisonner.

24

Les hyperboles suivantes correspondent toutes à une fonction ayant la forme  $x \mapsto \frac{k}{x}$ . Analyser les courbes et identifier les fonctions :

$$f(x) = \frac{\dots}{x} \quad g(x) = \frac{\dots}{x} \quad h(x) = \frac{\dots}{x}$$



Raisonner.

25

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

1. Un nombre et son cube ont toujours le même signe.
2. L'équation  $\sqrt{x} = k$  admet toujours une solution.
3. La fonction  $x \mapsto x^2$  n'admet pas de maximum.
4. La fonction inverse est décroissante sur  $[-1, 1]$ .

Compétence.

26



Raisonner.

27



Déterminer la parité de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ .

La fonction  $f$  n'admet pas de valeur interdite car  $x^2 + 1 > 0$ . Ainsi, elle est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$  calculons  $f(-x)$  :

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x).$$

La fonction est paire.

Raisonner. Calculer.

28



Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1.  $4x^2 + 3 = 8$

2.  $2\sqrt{x} = 72$

3.  $x^3 + 2 \leq 10$

4.  $\frac{1}{x} - 1 \leq -2$

Raisonner. Communiquer.

29



Sachant que  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , montrer que  $f : x \mapsto x^3$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

.....

.....

.....

.....

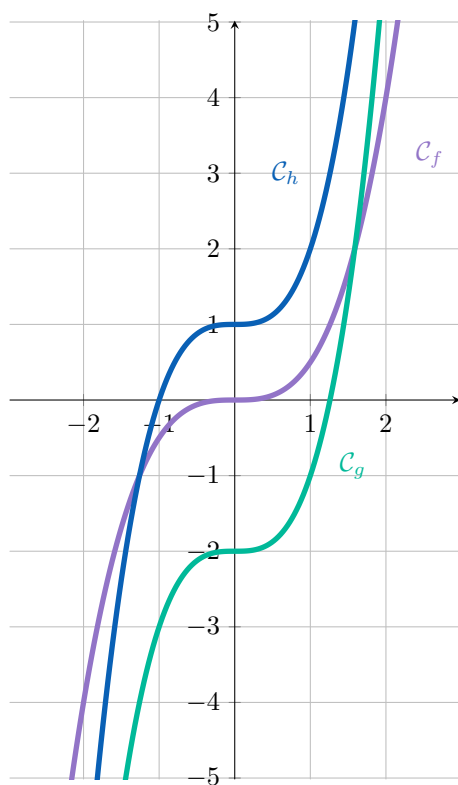
.....

30



Les courbes suivantes correspondent toutes à une fonction cubique, retrouver leur expressions.

$$f(x) = \dots\dots\dots \quad g(x) = \dots\dots\dots \quad h(x) = \dots\dots\dots$$



31



Les courbes de la fonction racine carrée  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  et de la fonction linéaire  $y = x$  sont représentées sur le graphique suivant. Les points  $A$  et  $A'$  sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite  $y = x$

1. Donner les coordonnées des points  $A$  et  $A' : A(4; 2) \quad A'(2; 4)$ .
2. Le point  $B$  a pour coordonnées  $B(3; 1,73)$  sachant que l'ordonnée est approximative, quelle est son ordonnée exacte ? Expliquer.  
 $B$  est un point de  $\mathcal{C}_k$  son ordonnée est donc  $f(3) = \sqrt{3} \approx 1,73$ .
3. Déterminer les coordonnées exactes du point  $B'$  symétrique du point  $B$  par rapport à la droite  $y = x : B'(\sqrt{3}; 3)$ . Placer ce point sur le graphique.
4. Quelle relation existe-t-il entre les coordonnées de  $A$  et  $A'$ ,  $B$  et  $B'$  ?  
 L'abscisse de  $A$  est l'ordonnée de  $A'$  et vice versa, de même que pour  $B$  et  $B'$ .
5. Conjecturer de quelle fonction est la courbe symétrique de  $\mathcal{C}_k$  par rapport à la droite  $y = x$ . On l'appellera  $m$ .  
 La fonction dont la courbe est symétrique à  $\mathcal{C}_k$  par rapport à  $y = x$  semble être la fonction  $x \mapsto x^2$ . En effet,  $A'(2; 2^2)$  et  $B'(\sqrt{3}; \sqrt{3}^2)$ .
6. On dit que ces fonctions sont réciproques. Pour démontrer que deux fonctions  $f$  et  $g$  sont réciproques on montre que  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ . Démontrer la conjecture.

1. Montrons que  $m(k(x)) = x$  :

- $m(x) = x^2$  signifie que vous prenez un nombre  $x$ , le multipliez par lui-même, ce qui revient à élever  $x$  au carré.
- $k(x) = \sqrt{x}$  signifie que vous prenez la racine carrée de  $x$ , c'est-à-dire trouver un nombre qui, lorsqu'il est multiplié par lui-même, donne  $x$ .

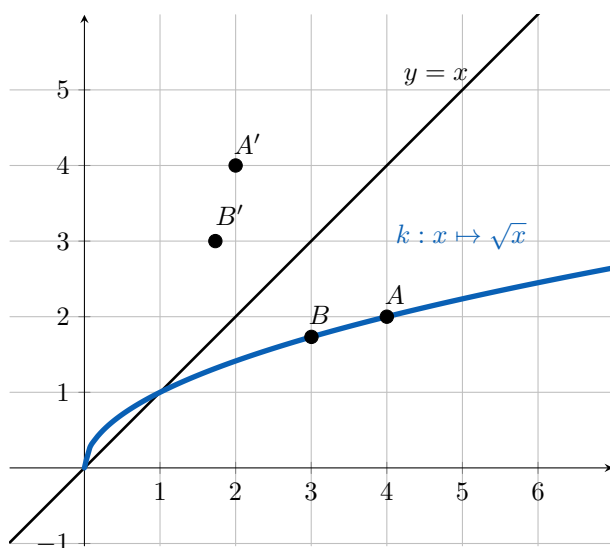
Maintenant, si nous prenons  $x$ , trouvons d'abord sa racine carrée en utilisant  $g(x)$ , puis élevons cette racine carrée au carré en utilisant  $f(x)$ , nous obtenons le même  $x$  de départ.

Donc,  $m(k(x)) = x$  pour tous les  $x$  réels.

2. Montrons que  $k(m(x)) = x$  :

- Avec  $k(m(x))$ , vous prenez d'abord  $x$ , l'élevez au carré en utilisant  $m(x)$  pour obtenir  $x^2$ .
- Ensuite, vous prenez la racine carrée de  $x^2$  en utilisant  $k(x)$ , ce qui vous donne  $x$ .

Donc, pour tous les  $x$  réels,  $m(x) = x^2$  est bien la fonction réciproque de  $k(x) = \sqrt{x}$ .





32



Enoncé	A	B	C
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ , sachant que $f(a) = -7,54$ que vaut $f(-a)$ ?	$f(-a) = -7,54$	$f(-a) = 7,54$	On ne peut pas savoir
La fonction $g$ est telle que $g(5) = g(-5)$	La fonction est paire.	La fonction est impaire.	On ne peut pas conclure quand à sa parité.

Compétence.

33



Compétence.

34



/b/ABCD