Mathématiques 2 : le livre sacado

L’équipe SACADO

13 juin 2023

Chapitre I.

Éléments de géométrie

Les savoir-faire du parcours

- **Utiliser des nombres pour calculer et résoudre des problèmes**

☐ Représenter un intervalle de la droite numérique.

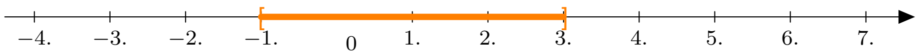
☐ Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.

Définition 1: Intervalle fermé. Intervalle ouvert.

Un **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$, c'est à dire un ensemble de nombres compris entre deux valeurs réelles.
Un **intervalle ouvert** de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dont les bornes ne sont pas incluses dans l'ensemble, c'est à dire un ensemble de nombres compris entre deux valeurs réelles non comprises.

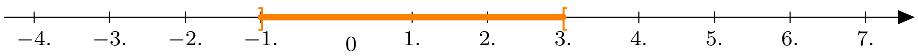
Exemple 2.

1. On a représenté sur la droite des nombres réels tous les nombres réels x tels que $-1 \leqslant x \leqslant 3$.



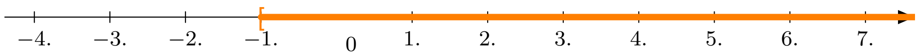
   Cet intervalle est noté $[-1;3]$. Il est fermé.

2. On a représenté sur la droite des nombres réels tous les nombres réels x tels que $-1 < x < 3$.



   Cet intervalle ouvert est noté $]-1;3[$. Il est ouvert.

3. On a représenté sur la droite des nombres réels tous les nombres réels x tels que $x \geqslant -1$.



   Cet ensemble est noté $[-1;+\infty[$, cet intervalle est semi-ouvert.

Remarques 3.

1. $+\infty$ se lit "plus l'infini". L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$.
2. Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ "sans trou", en "un seul morceau".
3. $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres. Ce ne sont que des notations (ce qui explique qu'ils soient toujours exclus).
4. Les intervalles correspondants aux quatre premières lignes du tableau sont dits bornés.
5. Plus généralement, les différents types d'intervalles sont donnés dans le tableau ci-dessous (où a et b représentent deux réels, avec $a < b$).

Définition 4: Intersection.

L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble $A \cap B$ qui contient tous les éléments communs aux deux ensembles.

Remarque 5.

Deux ensembles sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$. $\varnothing$ est l'ensemble vide.

Définition 6: Réunion.

La réunion de deux ensembles est l'ensemble $A \cup B$ qui contient tous les éléments des deux ensembles pris une seule fois.

Opérer avec les ensembles

1 Modéliser.

Recopier et compléter le tableau.

/b/ABCD

2 Modéliser.

Déterminer les intersections des ensembles suivants. On écrira : $A \cap B =$ où A et B sont les ensembles ci-dessous.

1. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$
2. $[-4;3[$ et $[-2;7]$
3. $[-2;1]$ et $[2;3]$
4. $\mathbb{N}$ et $]-\infty;5]$

/b/ABCD

3 Modéliser.

On propose dans chaque cas deux ensembles. Lequel est inclus dans l'autre ?

1. $[-1,1;3]$ et $]-2,9;6]$
2. $[0,7;0,8]$ et $[0,5;+\infty[$
3. $]1;2[$ et $[1;2]$
4. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$

/b/ABCD

4 Modéliser.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x dans chaque cas.

1. On jette un dé à 6 face et on regarde la face obtenue. Soit x le numéro de la face.
2. Le segment $[AB]$ mesure 8 cm. Soit I le milieu de $[AB]$ et M un point de $[AI]$. $AM = x$.
3. $x < -4$ et $x \geqslant 10$
4. $x \leqslant 6$ et $x \leqslant 3$
5. $x \leqslant 6$ ou $x \geqslant 3$

/b/ABCD

5 Modéliser.

Déterminer les réunions des ensembles suivants. On écrira : $A \cup B =$ où A et B sont les ensembles ci-dessous.

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$
2. $\{1;2;8;6\}$ et $\{0;2;4;8\}$
3. $[-2;1]$ et $[2;3]$
4. $[0;+\infty[$ et $]-\infty;5]$

/b/ABCD

6 Représenter.

Représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormal

1. l'ensemble des points $M(x;y)$ tes que $1 < x < 4$ et $-2 \leqslant y < 4$.
2. l'ensemble des points $M(x;y)$ tes que $1 \leqslant 2x+1 \leqslant 5$ et $-2 \leqslant 3y+4 \leqslant 13$.

/b/ABCD

7 Modéliser.

L'INSEE estime qu'un couple avec deux enfants appartient à la classe moyenne quand les revenus du foyer sont situés dans l'intervalle [3253 ;5609].
M.Twicks gagne 2731 euros et madame Twicks gagne 2952 euros et ils ont deux enfants. La famille appartient-elle à la classe moyenne ?

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

8

Soit x un réel.Écrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles le plus grand ensemble auquel appartient x.

1. $x \geqslant 1$ ou $x < 3$.
2. $x \geqslant 1$ et $x < 3$.

/b/ABCD

Représenter.

9

On donne le programme en Python ci dessous.

```
def is_in(x,a,b):
    if x > a and x < b :
        test = "{} is in  ]{};{}[".format(x,a,b)
    else :
        test = "{} is not in ]{};{}[".format(x,a,b)
    return test
x=int(input("Entrer un nombre  :"))
a=int(input("Entrer la borne inf :"))
b=int(input("Entrer la borne sup :"))
print(is_in(x,a,b))
```

1. Ouvrir le logiciel PyScripter et taper ce code. Que fait ce programme ? Vous pouvez aussi ouvrir en ligne l'éditeur Python : https://www.tutorialspoint.com/execute_python_online.php
2. Modifier ce programme pour qu'il teste si un nombre x appartient à l'intervalle $[a;b]$.

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

10

Soit x un réel.Écrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles le plus grand ensemble auquel appartient x.

1. $x \geqslant 1$ ou $x < 3$.
2. $x \geqslant 1$ et $x < 3$.

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

11

Soit x un réel. Écrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles le plus grand ensemble auquel appartient x.

1. $7x - 4 \geqslant 3$ ou $1 - x > 0 \iff 7x \geqslant 7$ ou $1 > x \iff x \geqslant 1$ ou $1 > x \iff [1;+\infty[$.
2. $x \leqslant 2$ ou $-4x \leqslant 20$.
3. $x < 3$ et $x > -6$.
4. $2x + 1 \leqslant 3$ et $3x - 1 \geqslant 0$.
5. $3(2 - a) < 3$ et $a - 1 \geqslant 2$.

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

12

Déterminer l'ensemble des valeurs de x dans chaque cas.

1. On jette un dé à 6 face et on regarde la face obtenue. Soit x le numéro de la face.
2. $[-1,1;3]$ et $[2,9;6]$
3. $x > -4$ et $x \leqslant 10$
4. $x \leqslant -3$ et $x \leqslant 5$
5. $x \leqslant 5$ ou $x \geqslant 2$

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

13

On propose dans chaque cas deux ensembles. Lequel est inclus dans l'autre ? Écrire ensuite une phrase :" x appartient à .... donc x appartient à ....."

1. $\left[-\frac{11}{10};\frac{29}{10}\right]$ et $\left[-\frac{3}{2};3\right]$
2. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $[0,7;0,8]$.
3. $[1;2]$ et $]1;2[$.

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

14 Déterminer les intersections des ensembles suivants. On écrira : $A \cap B =$ où A et B sont les ensembles ci-dessous.

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$
2. $[-5;2[$ et $[0;7]$
3. $[-1;4]$ et $[-3;-1]$
4. $\mathbb{N}$ et $]-\infty;5]$
5. $[-5;0[$ et $[0;3]$

On pourra représenter chaque intervalle sur une droite graduée tracée à main levée.

/b/ABCD

Représenter. Raisonner. Communiquer.

15 Déterminer, dans chaque cas, la réunion des ensembles suivants. On écrira : $A \cup B =$ où A et B sont les ensembles ci-dessous.

1. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
2. $\{1;3;5;7\}$ et $\{0;2;4;8\}$
3. $[-3;4]$ et $[2;6]$
4. $[0;+\infty[$ et $]-\infty;5]$

On pourra représenter chaque intervalle sur une droite graduée tracée à main levée.

/b/ABCD

Représenter. Communiquer..

16

1. On considère le nombre $\frac{19}{11}$.
   (a) Donner le développement décimal de $\frac{19}{11}$ avec 8 chiffres significatifs. $\frac{19}{11}$ semble-t-il décimal ?
   (b) On dit que $\frac{19}{11}$ a une écriture périodique. Préciser sa période (série de chiffres qui se répète à l'infini dans le développement décimal).
2. On considère le nombre $x = 0,13131313....$ dont le développement décimal a pour période 13.
   (a) Démontrer que $100x = 13 + x$.
   (b) En déduire une écriture fractionnaire de x. Quelle est la nature du nombre x ?
3. Démontrer que $x = 3,412412412...$ est un nombre rationnel.
4. Estimer le résultat avec la calculatrice.

/b/ABCD

17 Représenter.

Démontrer que $0,\underline{1}$ est un nombre rationnel à préciser.

18 Représenter.

Je suis un nombre à trois chiffres non nuls. Je suis divisible par 94. Changez l'ordre de mes chiffres et je deviens divisible par 49. Qui suis-je ?

19 Chercher.communiquer.

Dans chaque cas, trouver, lorsque cela est possible, le nombre x qui remplit les critères suivants :

1. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Z}$
2. $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{N}$.

20 Représenter. Raisonner.

Démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel ou encore que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

21 Représenter.

1. Démontrer que $0,\underline{12}$ est un nombre rationnel à préciser.
2. Démontrer que $0,\underline{485}$ est un nombre rationnel à préciser.

22 Raisonner.

1. Démontrer que tout entier n multiple de 9 est aussi un multiple de 3.
2. Démontrer que si m est un multiple de 6 alors m est aussi un multiple de 3.

23 Représenter.

Dans un pays où le système monétaire n'est constitué que de pièces de 3 et de 5, il s'agit d'aider les habitants en créant un programme qui donne le nombre de pièces nécessaires à tout achat d'un montant entier supérieur ou égal à 8.

Source : d'après PISA, items libérés

24

Raisonner.

/b/ABCD

25

Raisonner.

/b/ABCD

26

Raisonner.

/b/ABCD

27

Raisonner.

/b/ABCD