Chapitre 13.

Géométrie analytique

Les savoir-faire du parcours

- Savoir représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Savoir calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Savoir calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Savoir caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

Les mathématiciennes et mathématiciens

1

Compétence.

1 Bases de vecteurs, repère du plan.

Propriété 1: Exprimer un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires..

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
Tout vecteur $\vec{w}$ peut s'exprimer en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Définition 2: Base de vecteurs.

On dit que deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment une base des vecteurs du plan.
On note cette base $(\vec{i};\vec{j})$

Définition 3: Repère du plan.

Soit O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.
On dit que le triplet $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan.
Le point O s'appelle l'origine du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition 4.

On dit que le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est :

- orthogonal si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- orthonormé s'il est orthogonal et si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont la même longueur.

2 Coordonnées d'un point, d'un vecteur dans un repère.

Définition 5: Coordonnées d'un point du plan..

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère et M un point.
On appelle coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ l'unique couple de nombres $(x_M;y_M)$ tel que $\vec{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$

Définition 6: Coordonnées d'un vecteur dans le plan..

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère et $\vec{u}$ un vecteur.
Soit M le point tel que $\vec{u} = \vec{OM}$.
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées de M.

Remarque 7.

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ dire que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ signifie que $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j}$.

Propriété 8: Coordonnées d'un vecteur défini par deux points..

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.
$A(x_A;y_A)$ et B$(x_B;y_B)$ deux points.
Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées :

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Premier SF

2

Compétence.

/b/ABCD

Deuxième SF

3

Compétence.

/b/ABCD

Troisième SF

4

Compétence.

/b/ABCD

3 Calculs des coordonnées d'un vecteur

Propriété 9.

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.
Soit $\vec{u}(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$ deux vecteurs et k un nombre réel.

- $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow x_{\vec{u}}=x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}}=y_{\vec{v}}$
- $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(k\times x_{\vec{u}};k\times y_{\vec{u}})$.
- $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}};y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}})$.

4 Condition analytique de colinéarité.

Définition 10: Déterminant de deux vecteurs.

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère, $\vec{u}(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$ deux vecteurs.
On appelle déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le nombre :

$$det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix}=x_{\vec{u}}\times y_{\vec{v}}-y_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}}$$

Propriété 11: Condition analytique de colinéarité.

Démonstration exigible
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\qquad det(\vec{u},\vec{v})=0$

Preuve :

Montrons que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $det(\vec{u},\vec{v})=0$.

Soit $\vec{u}(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$ deux vecteurs colinéaires.
Alors il existe un nombre k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$ donc $x_{\vec{v}}=k\times x_{\vec{u}}$ et $y_{\vec{v}}=k\times y_{\vec{u}}$.
$det(\vec{u},\vec{v})=x_{\vec{u}}\times y_{\vec{v}}-y_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}}$
donc $det(\vec{u},\vec{v})=x_{\vec{u}}\times k\times y_{\vec{u}}-y_{\vec{u}}\times k\times x_{\vec{u}}=0$

Montrons que si $det(\vec{u},\vec{v})=0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nuls alors ils sont colinéaires. On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas tous les deux nuls (par exemple $x_{\vec{u}}\neq 0$.

$$\begin{aligned} det(\vec{u},\vec{v})=0 &\Leftrightarrow x_{\vec{u}}\times y_{\vec{v}}-y_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}}=0 \\ &\Leftrightarrow x_{\vec{u}}\times y_{\vec{v}}=y_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}} \end{aligned}$$

Si $x_{\vec{u}}\neq 0$ alors $y_{\vec{v}}=\dfrac{y_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}}=\dfrac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}}\times y_{\vec{u}}$
On pose $\dfrac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}}=k$ alors $y_{\vec{v}}=k\times y_{\vec{u}}$ et comme $x_{\vec{v}}=k\times x_{\vec{u}}$ alors $\vec{v}=k\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Premier SF

Compétence.

5

/b/ABCD

Deuxième SF

Compétence.

6

/b/ABCD

Troisième SF

Compétence.

7

/b/ABCD

5 Applications

Propriété 12: Coordonnées du milieu d'un segment.

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan et $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points.
Soit M le milieu de $[AB]$ alors :

$$M(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2})$$

Propriété 13: Distance dans un repère orthonormé.

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points, alors :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Propriété 14: Norme d'un vecteur dans un repère orthonormé.

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé $\vec{u}(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ un vecteur, alors :

$$||\vec{u}||=\sqrt{x_{\vec{u}}^2+y_{\vec{u}}^2}$$

Premier SF

Compétence.

8

/b/ABCD

Deuxième SF

Compétence.

9

/b/ABCD

Troisième SF

Compétence.

10

/b/ABCD

Compétence.

11

/b/ABCD

Compétence.

12

Compétence.

13

Compétence.

14

Compétence.

15

Compétence.

16

17

Compétence.

18

Compétence.

19

Compétence.

20

Compétence.

21

Compétence.

22

Compétence.

Compétence.

23

Compétence.

24

Compétence.

25

Compétence.

26

Compétence.

27

Compétence.

28

Compétence.

29

Compétence.

30

Compétence.

31

32

Compétence.

33

Compétence.

/b/ABCD