Arithmétique

Division euclidienne

1,5 heures

☐ Utiliser et écrire en ligne la division euclidienne de a par b, deux nombres entiers.

1 Représenter. Calculer.

On souhaite ranger 142 bonbons dans des boites de 12 bonbons. Les boites doivent être complétées entièrement avant d'utiliser d'une nouvelle boite.

1. Combien de bonbons ne sont-ils pas rangés dans une boite complète ?
2. Combien de boites sont-elles entièrement remplies ?
3. Quel est le nombre minimal de boites nécessaires pour ranger tous les 142 bonbons ? Combien de bonbons faudrait-il rajouter pour remplir la boite incomplète ?

Définition 1. ***Division euclidienne dans*** $\mathbb{N}$

Écrire la **division euclidienne** d´un nombre entier naturel a par un entier naturel b, tous deux non nuls, c'est déterminer les nombres entiers q et r tels que $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.
q est appelé le **quotient** de la division euclidienne de a par b.
r est appelé le **reste** de la division euclidienne de a par b.

Exemple

La division euclidienne de 254 par 7 s'écrit $254 = 7 \times 36 + 2$ (où 36 est le quotient et 2 le reste).

Attention

$22 = 3 \times 5 + 7$ mais cette égalité n'est pas l'écriture de la division euclidienne de 22 par 5 ou par 3. En effet, $7 > 3$ et $7 > 5$!
L'égalité de la division euclidienne de 22 par 3 s'écrit : $22 = 3 \times 7 + 1$
L'égalité de la division euclidienne de 22 par 5 s'écrit : $22 = 5 \times 4 + 2$.

2 Application directe

1. Effectue les divisions euclidiennes suivantes :

   (**a**) 279 par 9
   (**b**) 392 par 3
   (**c**) 357 par 5
   (**d**) 543 par 18
   (**e**) 1 683 par 99

2. Traduis chacune de ces divisions par une égalité.

3 Communiquer.

Dans la division de 85 par 6, le reste est égal à 1 et le quotient est égal à 14. Ecrire ce résultat par une égalité.

4 Chercher.

Cédric attend le bus qui peut contenir 53 personnes. Il passe un bus toutes les 17 minutes. Il y a 164 personnes devant Cédric. Dans combien de temps Cédric pourra monter dans un bus sachant qu'il vient d'en voir un partir ?

5. SACADO Code exercice : **3fee8c7e**

Arithmétique

Multiples et diviseurs

1,5 heures

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

- ☐ Utiliser la définition de multiple ou un diviseur
- ☐ Déterminer des multiples ou des diviseurs d'un nombre donné
- ☐ Déterminer si un entier est un multiple ou un diviseur d'un autre entier
- ☐ Utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10
- ☐ Modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité (engrenages, conjonction de phénomènes, etc.).

1 **Chercher.**

Déterminer les diviseurs des entiers 12, 25, 306 et 124.

2 **Situation de recherche**

Trois bateaux partent de Marseille, l'un tous les 7 jours, le second tous les 12 jours, le troisième tous les 14 jours. Ils partent tous les trois le 1er mars. À quelle prochaine date partiront-ils encore tous les trois de port de Marseille ?

Définition 2. ***Multiples et diviseurs***

Dire que l´entier naturel a est **multiple** de l'entier naturel b signifie qu'il existe un entier naturel k tel que $a = b \times k$.
Autrement dit : Le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.
Autrement dit : Le nombre b et dans la table de multiplication du nombre a.
On dit aussi dans ce cas que b est un **diviseur** de a ou que a est **divisible** par b

Exemple

$252 = 36 \times 7$
On peut donc dire que 252 est un multiple de 7 , et aussi de 36.
On peut aussi dire que 7 est un diviseur de 252.
Ou : 252 a pour diviseur 7 ou 252 est divisible par 7 , et aussi par 26.

3 **Chercher. Calculer.**

1. Déterminer la liste des diviseurs de 156 et 130.
2. Déterminer le plus grand diviseur commun de 156 et 130.

4 **Chercher. Représenter.**

Deux ampoules clignotent. L'une s'allume toutes les 153 secondes et l'autre toutes les 187 secondes. À minuit, elles s'allument ensemble. Détermine l'heure à laquelle elles s'allumeront de nouveau ensemble.

5 **Chercher. Représenter.**

Un phare émet trois signaux différents, le premier toutes les 16 secondes, le second toutes les 45 secondes, le troisième toutes les 2 minutes 30 secondes. Ces trois signaux sont émis simultanément à minuit.

1. À quels intervalles de temps sont émis simultanément deux de ces signaux (premier et deuxième, ou premier et troisième, ou deuxième et troisième) ?
2. À quels intervalles de temps les trois signaux sont-ils émis simultanément ?

6 **Chercher. Représenter.**

Dire qu'un entier naturel est *parfait* signifie qu'il est égal à la somme de ses diviseurs propres, c'est-à-dire ses diviseurs différents de lui-même.
Ainsi, le chiffre 6 est parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6 et la somme de ses diviseurs propres est donc :

$$1+2+3=6$$

1. Vérifie que les nombres 28 et 496 sont parfaits.

2. Recherche d'autres nombres parfaits *(on pourra effectuer une recherche sur internet)*

7 **Communiquer. Représenter.**

Le système des temps est basée sur 60 et non sur 100!

1. Déterminer le nombre de diviseurs de 100, puis de 60.

2. Est-ce que cela facilite les calculs? Préparer un argumentaire.

Ressources : https ://www.futura-sciences.com/sciences/questions-reponses/physique-heure-dure-60-minutes-minute-60-secondes-7338/

Règle 1. Critères de divisibilités

Un nombre est divisible :

- Par 2 lorsque son chiffre des unités est 0 , 2, 4, 6 ou 8;
- Par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 3;
- Par 4 lorsque son chiffre des dizaines et celui des unités forment un nombre multiple de 4.
- Par 5 lorsque don chiffre des unités est 0 ou 5.
- Par 9 Lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- Par 10 lorsque son chiffre des unités est 0.

8 **Raisonner.**

Damien affirme que : "Si un nombre est divisible par 3 alors il est divisible par 9". Qu'en pensez-vous?

9 **Chercher.**

Je suis un nombre entier pair, compris entre 100 et 400, divisible par 3, par 5 et par 11. Qui suis-je?

10 **Raisonner.**

1. Donner trois multiples de 6.

2. Donner une écriture littérale de tous les multiples de 6.

3. En déduire que tous les multiples de 6 sont des multiples de 2 et de 3.

11 **Chercher.**

Le professeur d'EPS organise un tournoi de Softball avec toutes les classes de Troisième du collège. Il souhaite qu'il y ait dans chaque équipe le même nombre de garçons, le même nombre de filles, qu'il n'y ait aucun remplaçant et qu'une équipe soit composée entre 8 et 15 joueurs.
Sachant qu'il y a 72 filles et 108 garçons, donner toutes les compositions possibles d'équipes.

12 **Chercher.**

Louison veut réaliser un collier de perle. Elle empile les perles de la façon suivante : une perle rouge puis 4 perles bleues puis trois perles blanches et ainsi de suite. Quelle est la couleur de la 109$^{\text{ème}}$ perle?

13. SACADO Code exercice : **50b20772**

14. SACADO Code exercice : **d4b51e3a**

15. SACADO Code exercice : **28eb3b51**

Arithmétique

Nombres premiers

2 heures

- ☐ Savoir tester si un nombre est premier ou ne l'est pas en utilisant la calculatrice ou un logiciel
- ☐ Donner la liste des nombres premiers inférieurs à un entier donné (crible d'Eratosthène)
- ☐ Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers (à la main ou à l'aide d'un logiciel)

Définition 3. ***Nombre premier***

Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Remarque

1 n'est pas premier.

Exemple

Les premiers nombres premiers sont 2 (qui est le seul nombre premier pair), 3,5,7,11,13,17,19,23,29, ...

1 **Chercher. Calculer.**

Décomposer en produit de facteurs premiers (à la main, à l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de programmation) les entiers naturels suivants : 306; 124; 2 220

2. SACADO Code exercice : **1ed97ed7**

Théorème 2.

Tout entier n avec $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.

Proposition 2.

Si n n'est pas premier et $n \geq 2$ alors il admet un diviseur premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$

Preuve :
Si n est premier, il admet bien un diviseur premier : lui-même.
Si n n'est pas premier alors il admet un plus petit diviseur positif $p \neq 1$. p est premier sinon p aurait lui-même un diviseur positif différent de 1 qui serait un diviseur de n, mais plus petit que p.
De plus, n peut s'écrire $n = p \times r$ avec $p \leq r$ donc $p^2 \leq p \times r$ soit $p^2 \leq n$ et $p \leq \sqrt{n}$

Remarque

On utilise ce théorème de la manière suivante :
Si un naturel $n \geq 2$ n'admet pas de diviseur premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$ alors n est premier.

Exemple

Pour savoir si 631 est premier, il suffit de tester tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{631} \approx 25,12$

Méthode Crible d'Eratosthène

1. Écrire dans un carré de 10×10 les 100 premiers nombres entiers
2. Barrer le 1, puis entourer le 2 car c'est un nombre premier, puis barrer tous les multiples de 2 qui, par définition, ne sont pas des nombres premiers.
3. Le nombre suivant dans la liste (3) est un nombre premier. L'entourer et barrer tous les multiples de 3 dans la liste.
4. En procédant de même, donner la liste de tous les nombres premiers, inférieurs ou égaux à 100

Théorème 3. Théorème fondamental de l'algèbre

Tout entier naturel strictement supérieur à 1 admet une décomposition, unique à l'ordre des facteurs près, en produit de nombres premiers.

3 **Calculer.**

1. 217 est-il premier ?
2. 289 est-il premier ?

4 **Représenter.**

Retrouver chaque nombre décomposé en produit de facteur premier :

1. $A = 2^2 \times 3^2 \times 5$
2. $B = 2^3 \times 2^3 \times 7$

5 **Représenter.**

Décomposer les nombres entiers suivants en produits de facteurs premiers :

$$630 \quad ; \quad 75 \quad ; \quad 164 \quad ; \quad 3192$$

6 **Représenter.**

1. Décomposer 150 en produits de facteurs premiers :
2. A l'aide de la question 1 et en construisant un arbre, déterminer tous les diviseurs de 150.

7 **Chercher. La conjecture de Goldbach**

Le 7 juin 1742, le mathématicien prussien Christian Goldbach propose la conjecture suivante :

Tout nombre pair supérieur à 3 est la somme de deux nombres premiers.

Vérifier cette conjecture pour 10, 26 et 138.

8. SACADO Code exercice : **24612830**

9. SACADO Code exercice : **089e514d**

10. SACADO Code exercice : **e305e112**

Arithmétique

Applications à la simplification de fractions

2 heures

Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

☐ Savoir déterminer une fraction irréductible

Définition 5. ***écriture irréductible d'une fraction***

1. **Rappels** Une fraction est un quotient de deux nombres entiers (un numérateur est divisé par un dénominateur non nul)
2. Une fraction peut être simplifiée (on dit qu'elle est **réductible**) si son numérateur et son dénominateur sont divisibles par le même entier différent de 1
3. Une fraction est **irréductible** lorsqu´on ne peut pas la simplifier.
   Autrement dit : Son numérateur et son dénominateur n´ont pas de diviseurs communs autre que 1.
   Autrement dit : Son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple

La fraction $\frac{105}{60}$ n'est pas irréductible car $105 = 15 \times 7$ et $60 = 15 \times 4$.

On peut donc simplifier la fraction par 15 et on obtient : $\frac{105}{60} = \frac{15 \times 7}{15 \times 4} = \frac{7}{4}$

Ainsi, la fraction $\frac{7}{4}$ est irréductible.

1 Application directe

Simplifier les fractions suivantes en utilisant les critères de divisibilités :

$$A = \frac{25}{30} \quad B = \frac{12}{18} \quad C = \frac{26}{39} \quad D = \frac{42}{39}$$

2 Application directe

Dans chacun des cas suivants, indique si les nombres entiers x et y sont premiers entre eux.

1. $x = 56$ et $y = 81$;
2. $x = 39$ et $y = 91$;
3. $x = 143$ et $y = 85$;
4. $x = 295$ et $y = 177$;
5. $x = 471$ et $y = 7542$;
6. $x = 5148$ et $y = 1386$.

3 Vu au brevet

1. Décompose en produit de facteurs premiers les nombres 648 et 256.
2. Simplifie la fraction suivante : $C = \frac{648}{256}$

4 Vu au brevet

1. Calcule le $PGCD(32\,760, 61\,425)$.
2. Rends irréductible la fraction $\frac{32\,760}{61\,425}$.

5 Défi

n est un nombre entier supérieur à 6 et on pose $F = \frac{n+9}{n-6}$

1. Donne la forme irréductible de F pour $n = 9$, $n = 25$, $n = 46$.
2. Démontre que $F = 1 + \dfrac{15}{n-6}$
3. Déduis-en toutes les valeurs de n pour lesquelles F est un nombre entier.

6 **Approfondissement**

1. Écris les fractions suivantes sous leur forme irréductible $a = \dfrac{4\,865}{2\,145}$ $\quad b = \dfrac{3\,588}{759}$
2. Le quotient du produit de deux nombres x et y par leur $PGCD$ s'appelle le *Plus Petit Commun Multiple* noté $PPCM(x; y)$.
   (**a**) Exprime $PPCM(x; y)$ en fonction de x, y et $PGCD(x; y)$.
   (**b**) Calcule le $PPCM(429; 15)$.
   (**c**) Déduis-en la somme de a et b.

7. SACADO Code exercice : **c430c32e**

8. SACADO Code exercice : **1436eee6**

9. SACADO Code exercice : **ecedb7bc**

10. SACADO Code exercice : **f4490baa**

Arithmétique

Le jeu de Nim

1 heure

Utiliser les nombres

Partie A

On dispose au départ de 13 allumettes; chaque joueur, à tour de rôle, en enlève 1, 2 ou 3. Celui qui prend la dernière allumette a gagné.

Exemple de partie : le joueur A commence.

A prend ... allumettes	B prend ... allumettes	allumettes restantes
1		12
	1	11
2		9
	1	8
3		5
	2	3
2		1

Dans cette partie, B a perdu.

1. Jouez!
2. Expliquer pourquoi, s'il reste 1, 2 ou 3 allumettes, le joueur dont c'est le tour peut gagner. Comment doit-il procéder?
   On dira que 1, 2 et 3 sont des « positions gagnantes »

3. Montrer que s'il reste 4 allumettes, le joueur dont c'est le tour est sûr de perdre, si l'autre joueur joue correctement.
   On dira que 4 est une « position perdante »
4. Déterminer toutes les positions gagnantes et perdantes.

Partie B. Vers le codage

L'objectif est d'écrire un programme pour jouer contre l'ordinateur à ce jeu. On suppose que le joueur humain commence. Convenons des variables suivantes :

— `joueur` : un entier qui vaut 0 si c'est à l'humain de jouer, 1 si c'est à l'ordinateur.

— `position` : le nombre d'allumettes restantes.

1. Écrire un algorithme qui demande au joueur le nombre d'allumettes qu'il veut prendre. On fera attention au fait que, par exemple, s'il reste deux allumettes, le joueur ne peut pas en prendre trois !
2. Écrire un algorithme qui, étant donné le nombre d'allumettes restantes, donne le nombre d'allumettes qu'il faut prendre pour mettre l'adversaire sur une position perdante (si c'est possible).
3. Traduire avec Scratch les algorithmes précédents. Coder le jeu.

Partie C. Compléments

Modifier le programme précédent pour que :

1. l'ordinateur commence à jouer ;
2. l'utilisateur décide qui commence à jouer ;
3. le nombre d'allumettes au départ soit choisi au hasard, entre 13 et 50 ;
4. le gagnant soit le joueur qui prend la dernière allumette.