Statistique bayésienne
Feuille 1 : introduction à l'inférence bayésienne

Robin Ryder

Automne 2019

1 Loi conditionnelle, loi marginale

Soient X et Y deux variables iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Z = X + Y$.

1. Donner la loi jointe de (X, Y) et en déduire la loi jointe de (X, Z).

2. Calculer la loi marginale de Z.

3. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Z = z$ et l'espérance conditionnelle $E[X|Z = z]$. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $Z = z$?

2 Modèle Bernoulli-Beta

On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ suivant la loi de Bernoulli de paramètre p à estimer. On prend comme loi a priori sur p la loi $U([0, 1])$.

1. On rappelle que la loi $Beta(a, b)$ est la loi sur $[0, 1]$ de densité

$$f(x) = \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

   L'espérance de cette loi est $\frac{a}{a+b}$ et sa variance est $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.
   Tracer la densité de la loi $Beta(a, b)$ pour quelques valeurs de a et b, à l'aide de la fonction R `dbeta()`.

2. Vérifier que la loi a posteriori de p sachant $(X_1, \dots, X_n)$ est une loi Beta, et donner ses paramètres.

3. Simuler trois échantillons de la loi de Bernoulli (avec le paramètre de votre choix), de tailles respectives $n = 20$, $n = 100$ et $n = 1000$. Tracer les lois a posteriori correspondantes. Qu'observez-vous ?

3 Modèle Poisson-Gamma

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, avec λ à estimer.

1. Vérifier que la famille des lois a priori $\Gamma(a, b)$ est conjuguée pour ce modèle.

2. Quelle est la loi a priori de Jeffreys associée à ce modèle ? Cette loi est-elle bien définie ? Quelle est la loi a posteriori associée ?

3. On considère les valeurs suivantes des hyperparamètres :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \quad b_1 = 0.5 \\ a_2 &= 1 \quad b_2 = 2 \\ a_3 &= 1 \quad b_3 = 10 \\ a_4 &= 2 \quad b_4 = 2. \end{aligned}$$

   Tracer sur le même graphique les distribution a priori correspondantes, ainsi que l'a priori de Jeffreys.

4. Simuler trois échantillons de la loi de Poisson (avec le paramètre $\lambda = 0.5$), de tailles respectives $n = 20$, $n = 100$ et $n = 1000$. Tracer sur le même graphique les lois a posteriori correspondant aux lois a priori de la question précédente. Qu'observez-vous ?

5. Dans chaque cas, donner les estimateurs bayésiens de λ : espérance a posteriori, maximum a posteriori.

6. Dans chaque cas, donner un intervalle de crédibilité à 95% pour λ.

7. Répéter l'expérience avec le jeu de données `ShipAccidents` :

```
> library(AER)
> data(ShipAccidents)
```