Statistique bayésienne
Feuille 3: Metropolis-Hastings.

Robin Ryder

Automne 2019

Reprenons les données `shuttle.txt` sur la navette Challenger : nous cherchons à expliquer la défaillance du joint torique (variable binaire Y_i) par la température T_i (en degrés Fahrenheit).

Nous allons utiliser un modèle probit :

$$Y_i \sim Bernoulli(p_i) \qquad p_i = \Phi(\beta_0 + \beta_1 T_i)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour β_0 et β_1. On note $\hat{\Sigma}$ la variance asymptotique de cet estimateur
2. Proposer une loi a priori pour les paramètres $\beta = (\beta_0, \beta_1)$.
3. Écrire la forme de la loi a posteriori. Est-elle aisée à manipuler ?
4. Écrire un algorithme de Metropolis-Hastings pour simuler selon la loi a posteriori

   - Initialisation : $\beta^{(0)} = \hat{\beta}$
   - Itération k :
     - Simuler $\beta' \sim \mathcal{N}_2(\beta^{(k-1)}, \tau^2\hat{\Sigma})$
     - Calculer la probabilité d'acceptation

       $$\alpha(\beta^{(k-1)}, \beta') = \min\left(1, \frac{\pi(\beta'|\boldsymbol{y})}{\pi(\beta^{(k-1)}|\boldsymbol{y})}\right)$$

     - Simuler $U \sim U(0,1)$.
       * Si $U < \alpha(\beta^{(k-1)}, \beta')$, alors $\beta^{(k)} = \beta$.
       * Sinon, $\beta^{(k)} = \beta^{(k-1)}$.

5. Essayer plusieurs valeurs de τ, par exemple $(0.1, 1, 10)$. Pour chacune de ces valeurs, calculer l'autocorrélation de la chaîne à l'aide de la fonction `acf()`.
6. Calculer la taille d'échantillon effective dans chaque cas.
7. Donner une estimation par Monte-Carlo de l'espérance et de la variance a posteriori de β.
8. Quelle est l'influence de la valeur initiale $\beta^{(0)}$?
9. Comparer le résultat obtenu à l'estimateur par maximum de vraisemblance.

10. Faire une prédiction ponctuelle pour la valeur $T = 31^o\,F$. Donner un intervalle de prédiction.

11. *(Optionnel, à faire après avoir vu l'algorithme de Gibbs)* Formulation alternative.
    On peut reformuler ce modèle avec des variables latentes :

$$Y_i = \mathbb{I}_{Z_i>0} \qquad Z_i \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 T_i, 1)$$

    On se place dans le cadre d'une loi a priori impropre $\pi(\beta) \propto 1$.

    a) Vérifier qu'on retrouve bien le modèle initial.
    b) Montrer que la loi conditionnelle $(Z_i|Y_i, \beta)$ est une normale tronquée dont on précisera les paramètres.
    c) Écrire une fonction simulant des réalisation de la loi normale tronquée.
    d) Vérifier que la loi conditionnelle de $(\beta|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ est $\mathcal{N}_2((X^TX)^{-1}X\boldsymbol{z}, (X^TX)^{-1})$.
    e) En déduire un échantillonneur de Gibbs pour simuler selon la loi a posteriori.
    f) Comparer l'efficacité de cet algorithme à celle de l'algorithme de Metropolis-Hastings.