

Rapport - Séries Temporelles

Philippe Real

12 janvier, 2020

Abstract

La première partie de ce rapport a permis de passer en revue les techniques d'analyse, de modélisation et de prédiction des séries temporelles (lissage exponentiel, modèles ARMA, ARIMA, SARIMA) sur un jeu de donnée classique et bien adapté. Dans la deuxième partie on essaie d'appliquer ces techniques pour modéliser des indices boursier de type action (Eurostoxx, DAX, SP500, CAC40...). On prendra pour exemple les données du CAC40 de 1998 à 2020 avec une fréquence journalière et mensuelle.

Contents

1	Partie I - Exemple de modélisation appliqué au trafic voyageur	3
1.1	Lecture des données et premières analyses de la série temporelle	3
1.1.1	Lecture des données	3
1.1.2	Chronogramme de la série temporelle - sncf	3
1.1.3	Représentations graphiques : month-plot et lag-plot	3
1.1.4	Tendance et saisonnalité	5
1.2	Prévision par lissage exponentiel	8
1.3	Modélisation	10
1.3.1	Identification du modèle	10
1.3.2	Validation des modèles SARIMA obtenus	13
1.4	Prévisions et comparaison des modèles obtenus	14
2	Partie II - Tentative de modélisation d'un indice boursier de type action à l'aide de processus ARIMA	16
2.1	Introduction	16
2.2	Lecture des données et premières analyses	16
2.2.1	Traitement des données	16
2.2.2	conversion des données en objet <i>time series</i>	17
2.3	Analyse des séries temporelles obtenues	17
2.3.1	Graphique des séries temporelles - valeur observée Prix à la fermeture (Close)	17
2.3.2	Représentations graphiques : month-plot et lag-plot	19
2.3.3	Etude de la stationnarité	20
2.3.4	Décomposition des séries temporelles :	20
2.4	Détermination des modèles ARIMA	21
2.4.1	"Stationnarisation" des processus par différentiation des séries	21

2.4.2	Détermination des paramètres p et q, études des corrélogrammes et autocorrélations partielles	24
2.4.3	Méthode automatique de calibration d'un modèles ARIMA sur les données 2014 mensuelles	25
2.5	Validation des modèles obtenus	26
2.5.1	Statistiques	26
2.5.2	Corrélations	26
2.5.3	Blancheur des résidus	27
2.5.4	Graphiques de résidus obtenus à partir des différents modèles	27
2.5.5	Normalité des résidus	28
2.5.6	ACF et PACF des résidus	28
2.5.7	Prévisions à partir des modèles obtenus	29
2.6	Alternative au modèle de type ARIMA, les modèles GARCH	30
2.6.1	Etude de la série des rendements journalier du CAC40 2014 à 2019	30
2.6.2	Modélisation GARCH(1,1) à partir de la fonction <i>garchFit</i>	32
2.6.3	Prévisions	34
2.7	Conclusion	35
3	Références	35
4	Annexes	36
4.1	Annexes - partie I	36
4.1.1	Statistiques - qualité d'estimation des coefficients.	36
4.1.2	Corrélations - entre processus AR et MA	36
4.1.3	Vraies valeurs année 1980 et prédictions	37
4.2	Annexes - Partie II	38
4.2.1	Etude de la stationnarité	38
4.2.2	Stationnarisation des processus par différentiation des séries	39
4.2.3	Prédiction à partir des modèles ARIMA issues des séries mensuelles 2014	40
4.2.4	Modélisation GARCH(1,1) à partir de la fonction <i>garch</i>	40
4.2.5	GARCH(1,1) Validation du modèle obtenu à partir de la fonction <i>garch</i>	42

1 Partie I - Exemple de modélisation appliqué au trafic voyageur

1.1 Lecture des données et premières analyses de la série temporelle

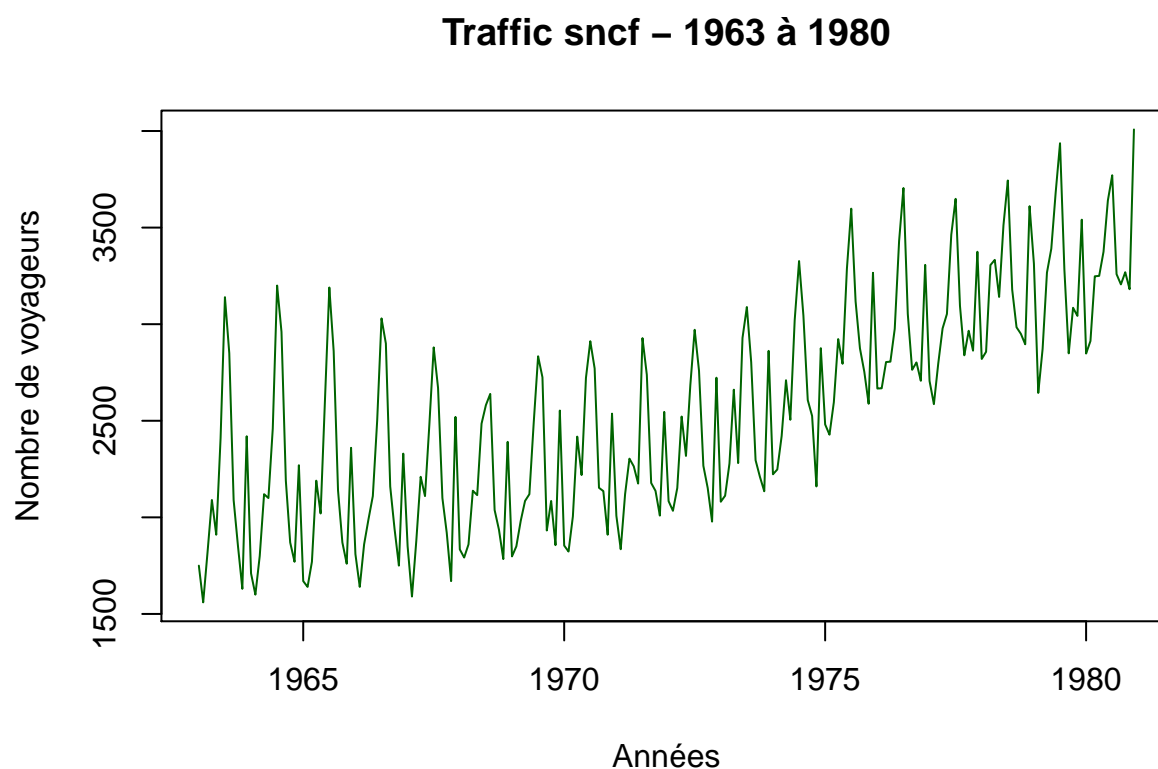
1.1.1 Lecture des données

La série chronologique étudiée est mensuelle et concerne le trafic voyageur sur les lignes sncf de 1963 à 1980. Comme on le verra cette série comporte de fortes saisonnalités.

##	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
## 1963	1750	1560	1820	2090	1910	2410	3140	2850	2090	1850	1630	2420
## 1964	1710	1600	1800	2120	2100	2460	3200	2960	2190	1870	1770	2270

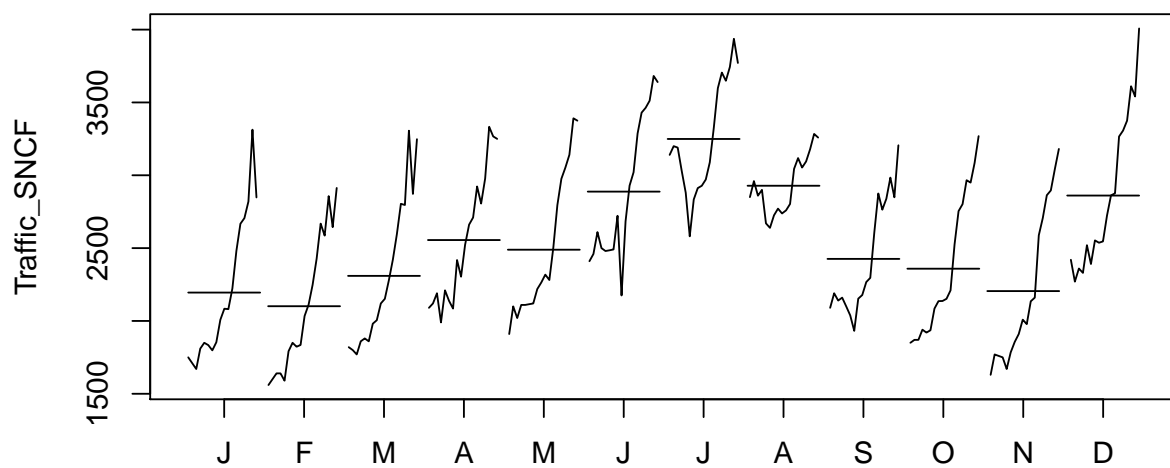
##	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
##	1560	2098	2531	2547	2934	4008

1.1.2 Chronogramme de la série temporelle - sncf

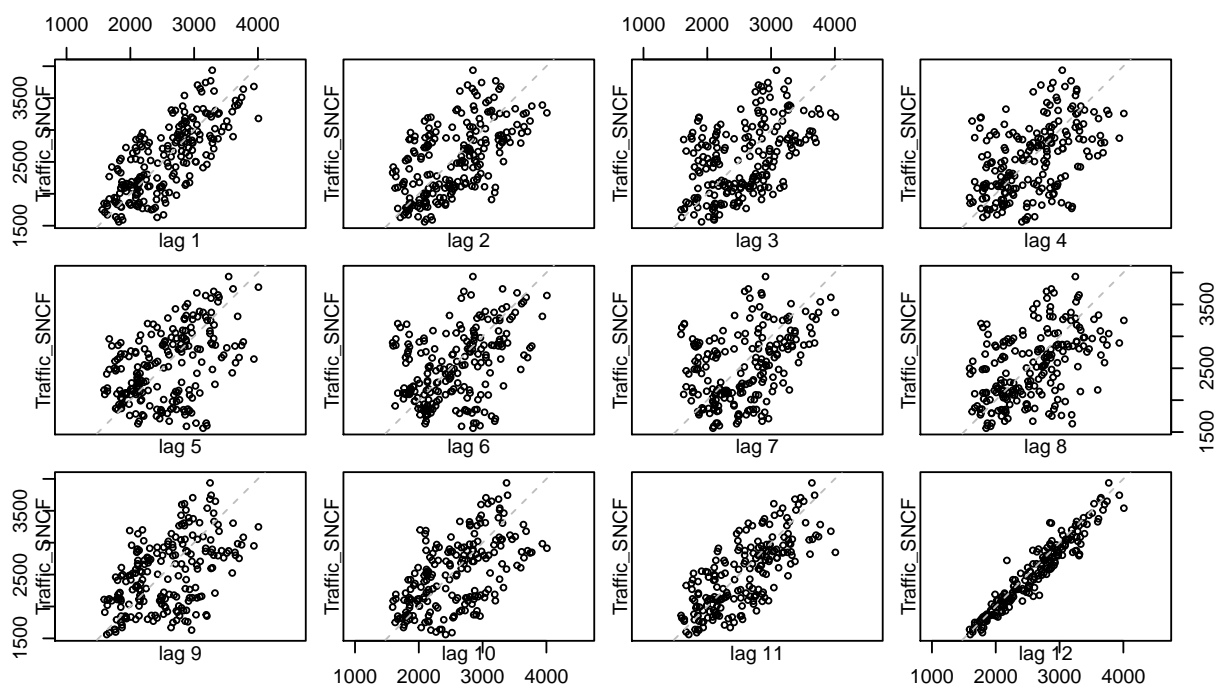


1.1.3 Représentations graphiques : month-plot et lag-plot

Si le diagramme retardé suggère une corrélation entre les deux séries, on dit que la série présente une autocorrélation d'ordre k . Ce diagramme permet de comprendre la dépendance de la série par rapport à son passé. Il donne une vision locale de la série, si y a une corrélation entre la série à un instant et la série 1, 2... instants avant.



Les tracés du chronogramme et du diagramme par mois montrent un motif saisonnier global avec une tendance à l'augmentation du nombre du trafic en juillet août ainsi qu'en décembre.



Le lag plot indique une saisonnalité de 1 an (période $T=12$ mois) marquée, fortes corrélations à $\text{lag}=12$.

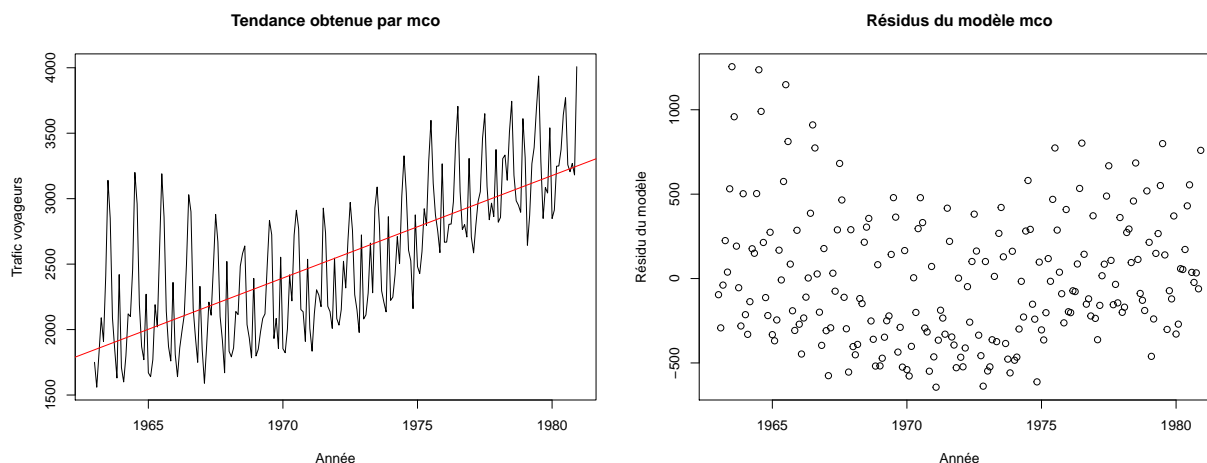
1.1.4 Tendance et saisonnalité

On cherche ici à analyser la série et à déterminer une tendance (allure moyenne) ainsi qu'un comportement périodique ou saisonnalité ainsi que des variations exceptionnelles, qu'il faut alors expliquer.

- Estimation de la tendance par moindres carrés ordinaires

On suppose que la série est de la forme $X_t = m_t + z_t$ avec $m_t = \beta_0^* + \beta_1^* t$ et z_t l'erreur ou résidu. On cherche à estimer par l'estimateur des moindres carrés, les paramètres β_0^* et β_1^* à partir de la série des observations.

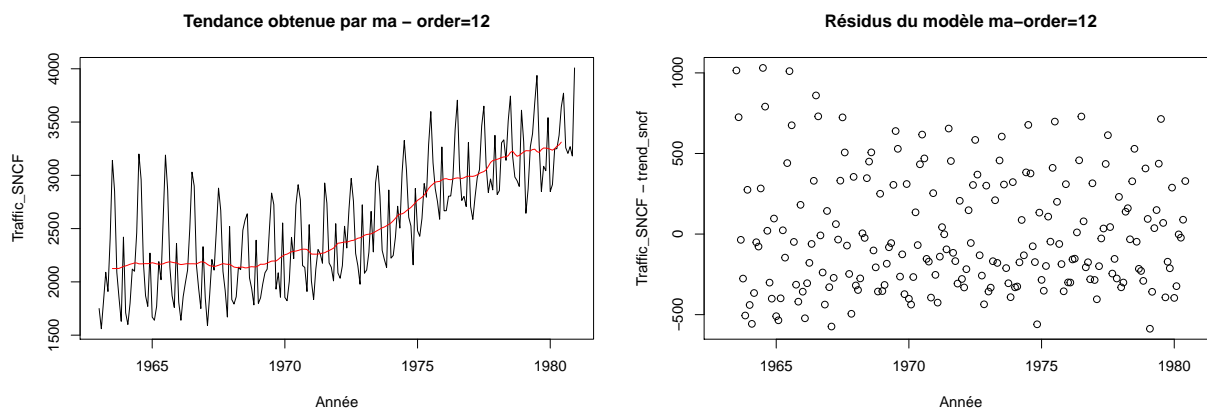
La tendance obtenue est une droite, la droite de régression par mco.



- Estimation de la tendance par moyennes mobiles

On cherche ici à ajuster un modèle à la courbe observée et parmi les nombreuses méthodes statistiques disponibles (ondelettes, noyaux, splines...) on va utiliser la méthode des moyennes mobiles qui est bien adaptée aux séries temporelles. Pour cela on utilise la fonction "ma" du package "forecast" de R.

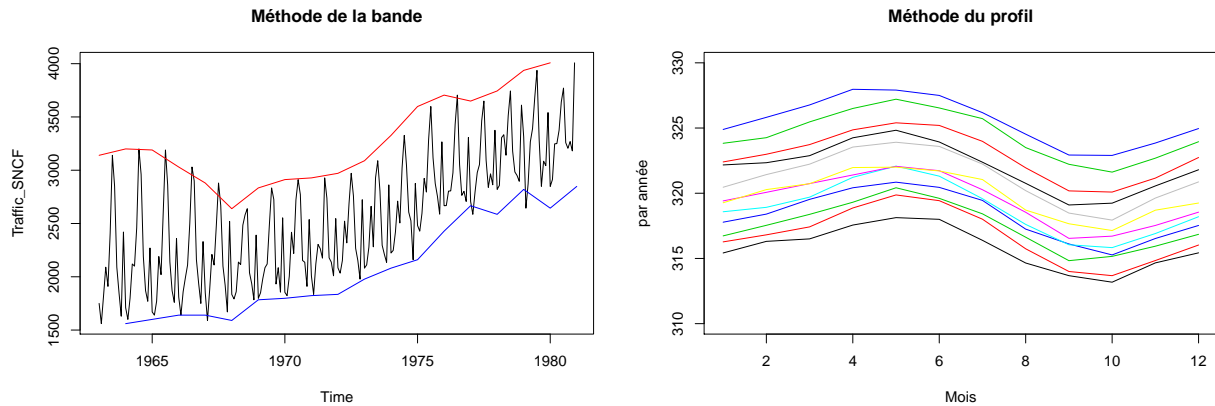
On a remarqué une saisonnalité de 12 mois (1 an) on effectue ici une moyenne mobile d'ordre 12 pour obtenir la tendance (ma avec le paramètre order=12).



L'ajustement à l'évolution globale de la courbe est meilleur mais les résidus ont peu évolué et toujours aussi peu centrés en 0.

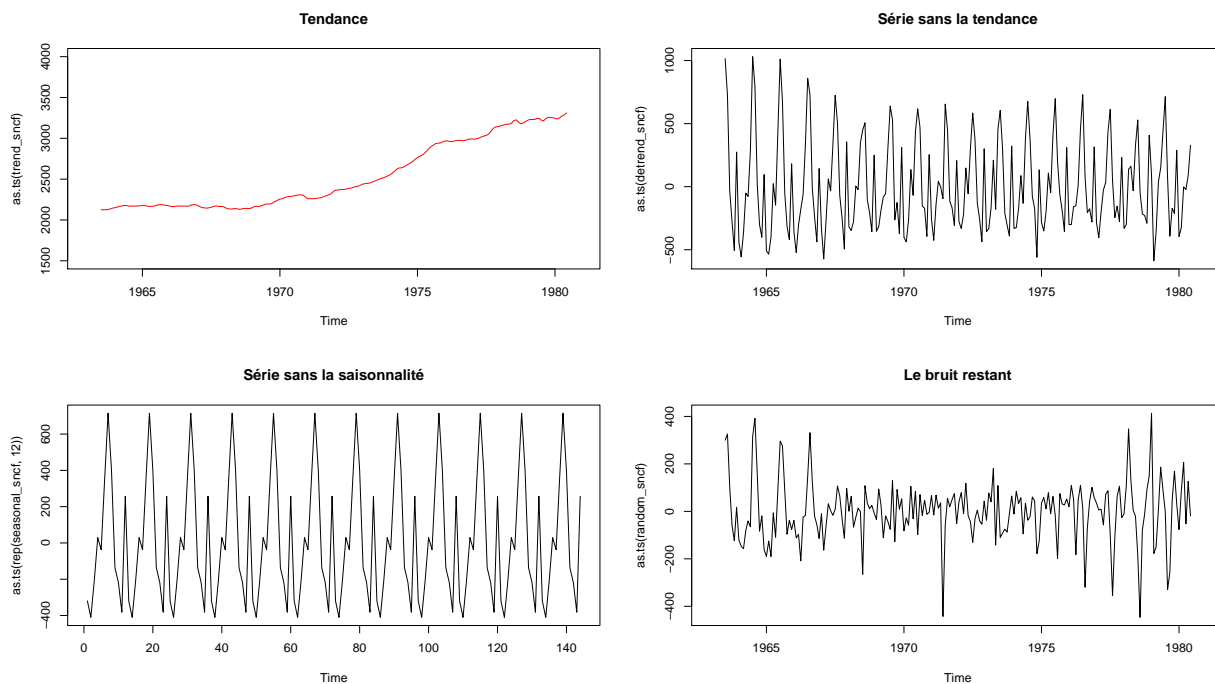
- Série décomposée - Tendance, Saisonnalité, Résidus

Avant d'établir les différentes composantes de la série, on va déterminer la catégorie du modèle : additif ou multiplicatif. Pour savoir quel modèle est le plus adapté entre additif et multiplicatif on peut utiliser la méthode de la bande ou du profil. Dans la méthode de la bande on regarde si les 2 droites sont à peu près parallèles et dans la méthode du profil si les c'est le cas pour les différentes courbes on conclut alors à un modèle est additif. Et multiplicatif dans le cas contraire.



Dans notre cas la méthode de la bande indiquerait un modèle additif à partir de l'année 1969/1970. La méthode du profil plaide aussi plutôt pour un modèle additif.

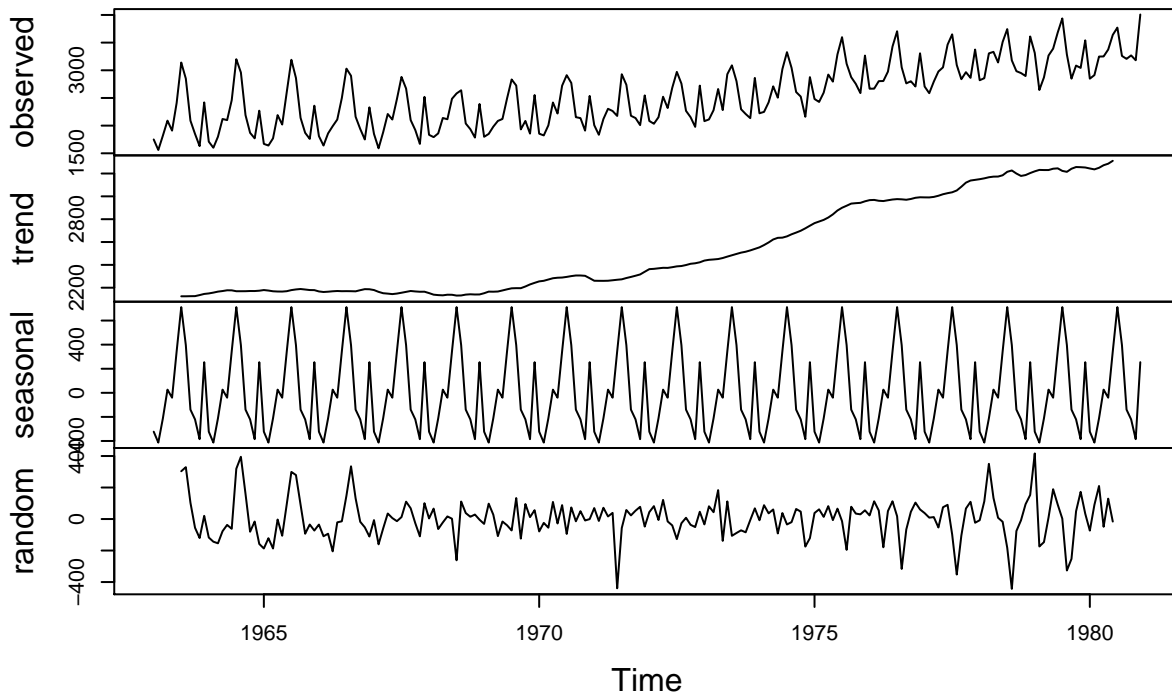
On va donc utiliser un modèle additif, c'est à dire que l'on va décomposer la série sous la forme $X_t = m_t + s_t + z_t$ avec m_t : La tendance (orientation à long terme), s_t : La saisonnalité (phénomène, composante périodique ou saisonnière) et z_t : L'erreur ou résidu, dont la variation doit être faible par rapport aux 2 autres.



- Décomposition des séries temporelles avec la fonction *decompose* de R

On va décomposer la série temporelles en utilisant la fonction *decompose* de R de façon à avoir une idée générale de la tendance (trend) saisonnalité et bruit. On remarque que les graphiques obtenus sont très similaire avec ceux obtenus précédemment.

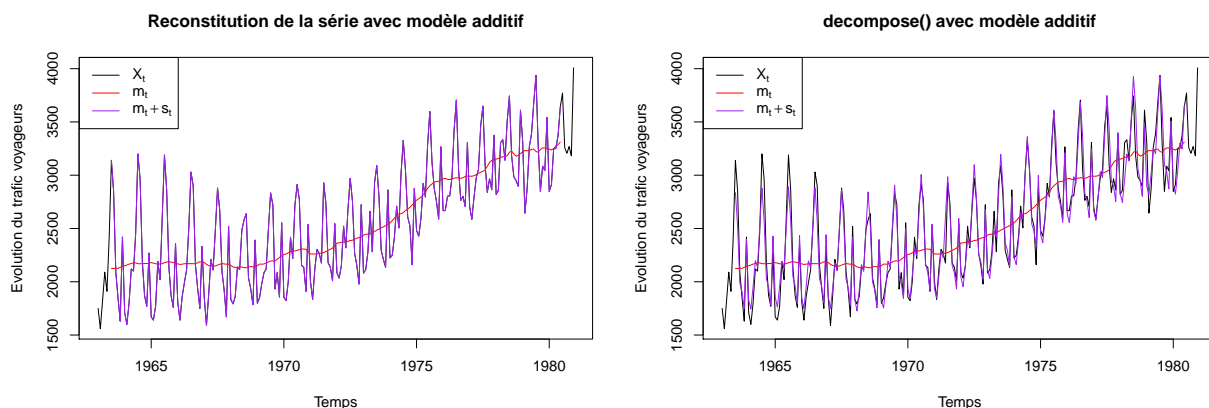
Decomposition of additive time series



La tendance est nette, on a aussi une saisonnalité qui semble marquée. Par contre le bruit présente une structure. La modélisation doit être améliorée. La fonction *decompose* en modèle multiplicatif n'apporte pas d'amélioration au niveau de la distribution des résidus, qui semble toujours dépendre du temps.

- Reconstitution de la série

A partir des différentes composantes calculées précédemment, on peut reconstruire la série.



Pour évaluer la performance de prédiction, nous allons estimer les paramètres du modèle sur la série allant de janvier 1962 jusqu'à décembre 1979 et garder les observations de l'année 1980 pour les comparer avec les prévisions.

1.2 Prédiction par lissage exponentiel

On obtient les différents lissages à partir de la fonction `ets` de R.

Le lissage exponentiel simple (ANN) est obtenu à partir du paramètre `model=ANN` où : La première lettre A de `model="ANN"` signifie que l'erreur est additive. La deuxième lettre concerne la tendance, N indique qu'il n'y en a pas. La troisième lettre concerne la saisonnalité, N indique qu'il n'y en a pas.

Dans le lissage exponentiel double `model=AAN` on considère une tendance additive. Et pour le lissage exponentiel triple ou de Holt-Winters on considère qu'il y a en plus une saisonnalité additive `model=AAA`

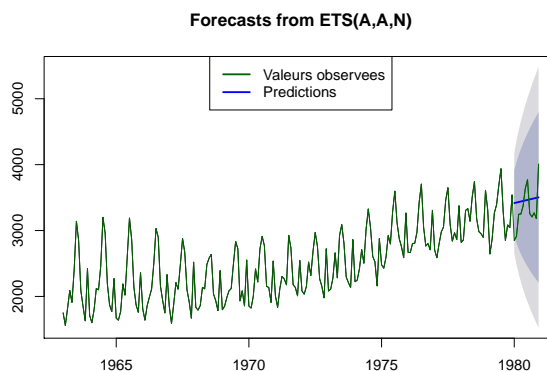
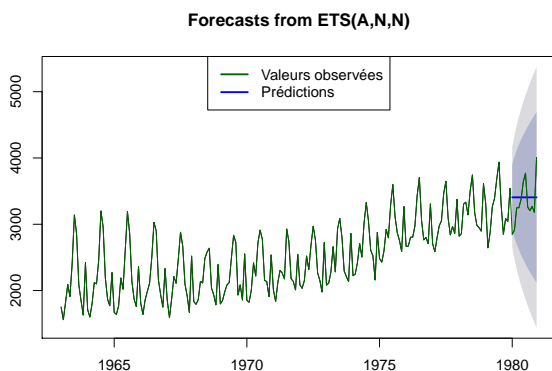
On peut comparer ces méthodes de lissage, en terme de critères AIC, AICc et BIC à partir du tableau suivant :

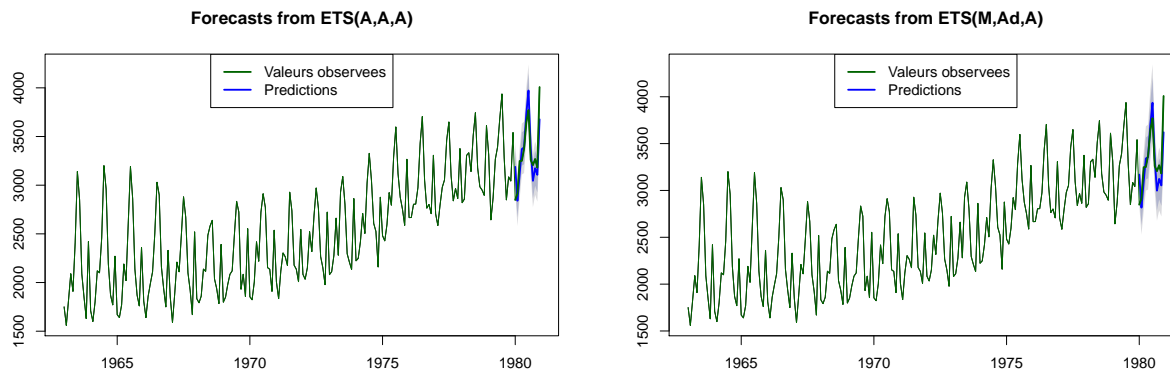
Type de lissage Exponentiel	AIC	AICc	BIC
Lissage Simple (A,N,N)	3517.8041845	3517.9241845	3527.7585445
Lissage Double (A,A,N)	3522.0129751	3522.3160054	3538.6035751
Holt-Winters (A,A,A)	3093.312925	3096.6032476	3149.7209649

On remarque que le lissage double n'apporte pas vraiment d'amélioration par rapport au simple. Les critères AIC et BIC sont plus élevés dans le cas du lissage double par rapport au lissage simple. Le lissage exponentiel triple ou de Holt-Winters apporte une amélioration.

On peut considérer d'autres méthodes de lissage en jouant sur le caractère Additif/Multiplicatif des composantes. On a vu précédemment, que la tendance était plutôt additive, on va donc fixer la tendance=A et faire varier les autres paramètres.

Modèle	AIC	AICc	BIC
(M,A,A)	3076.9495014	3080.6467987	3136.6756613
(M,A,M)	3059.8613864	3063.151709	3116.2694263



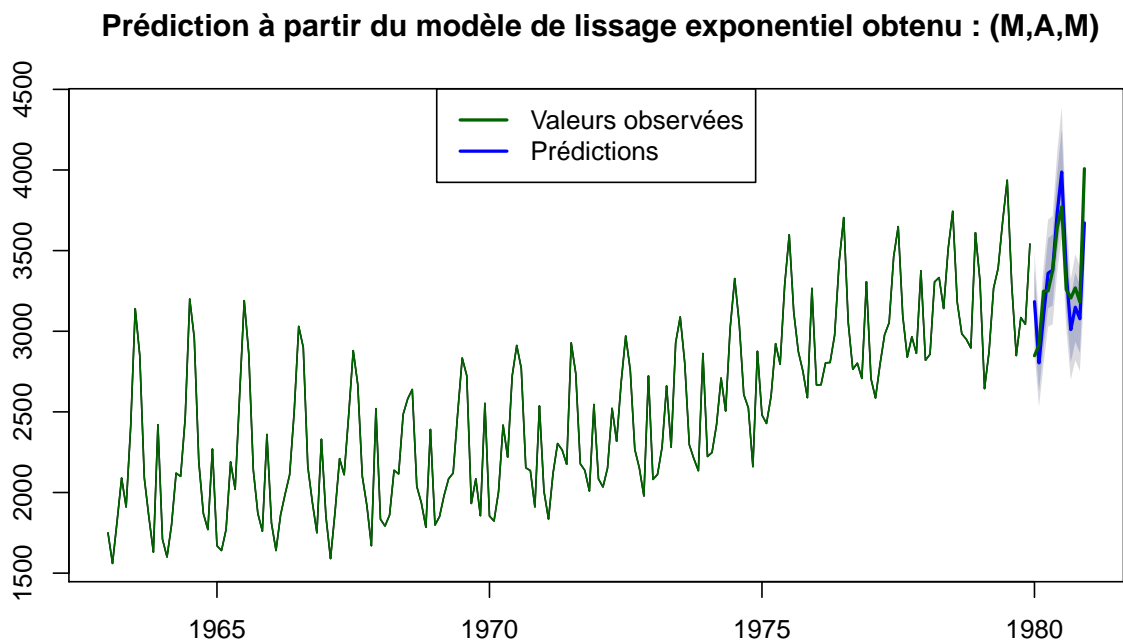


- Procédure automatique - modèles ajustés par ets.

La fonction ets permet aussi un ajustement automatique du modèle, lorsqu'aucun modèle n'est spécifié.

Le modèle sélectionné est le modèle avec tendance additive et avec erreur et saisonnalité multiplicatives (M,A,M). C'est aussi ce modèle qui minimise le critère AIC, AICc et BIC. En effet, en spécifiant le critère à minimiser: AIC, AICc et BIC avec le paramètre ic="aic"/"aicc" ou bic" de la fonction ets, on obtient toujours le même modèle.

Modèle	AIC	AICc	BIC
(M,A,M)	3059.8613864	3063.151709	3116.2694263



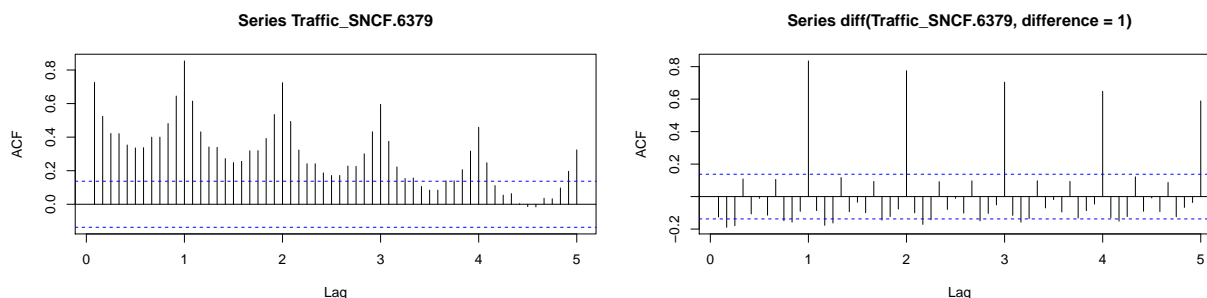
1.3 Modélisation

On cherche ici à modéliser la série par un processus stationnaire ARMA(p,q) ou bien SARMA(p,q). Si besoin on cherchera à rendre stationnaire la série en utilisant l'opérateur de différentiation. On obtiendra alors une modélisation à partir de processus ARIMA (p,d,q) ou SARIMA(p,d,q)

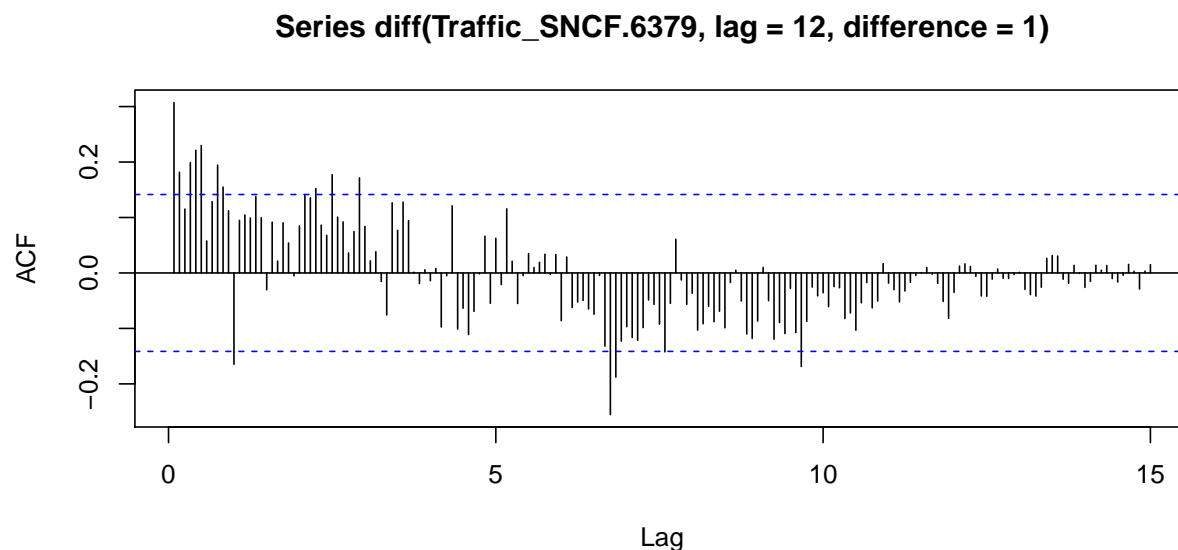
1.3.1 Identification du modèle

La première étape est l'étude de la stationnarité du processus régissant la série. Pour identifier le modèle on commence par une étude de la stationnarité en traçant le corrélogramme de la série, la valeur de $\rho_X(h)$ en fonction de h. On va voir que l'on observe une périodicité annuelle, lorsque $h = 12$ dans le cas ici de données mensuelles. Pour mettre en évidence ce phénomène, on trace le corrélogramme de la série et de la série différenciée.

- Corrélogramme de X_t et de $(1 - B)X_t$



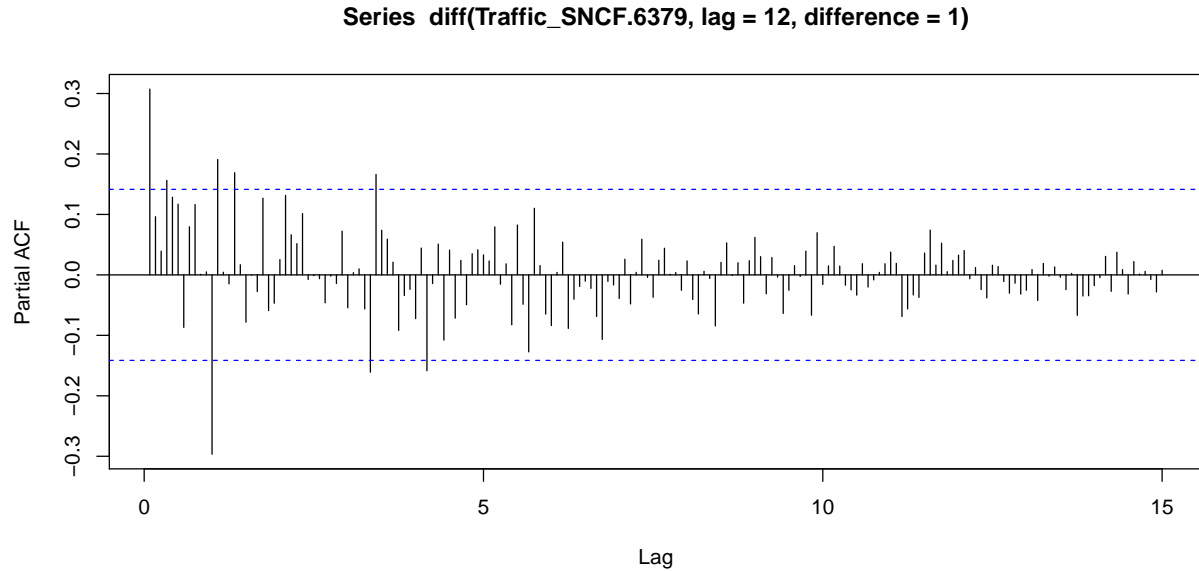
La fonction d'autocorrélation estimée est positive. On remarque une périodicité de 1 (12 mois) (graphique de gauche). On peut essayer de différencier la série au moins une fois (graphique de droite). On remarque des autocorrélations importantes pour les valeurs de h de 1 période (année), tous les 12 mois. C'est aussi ce que l'on avait remarqué précédemment avec le lag plot. On va donc appliquer l'opérateur $(1 - B^{12})$ à la série précédente, transformée par différenciation : $(1 - B)X_t$. Et lon trace le corrélogramme associé.



Le corrélogramme de la série obtenue par différenciation: $(1 - B)(1 - B^{12})X_t$ ne présente plus de fortes

amplitudes pour les petites valeurs de h . Ni pour h multiple de 12 comme c'était le cas pour la série brute. On peut considérer que la série ainsi transformée est issue d'un processus stationnaire. Il y a encore cependant encore d'assez fortes valeurs pour $\hat{\rho}(1)$ ce qui indique d'ajouter un terme dans la partie MA du modèle.

On peut regarder l'autocorrélation partielle pour avoir une idée du terme de degré q du terme moyenne mobile $MA(q)$ du modèle.

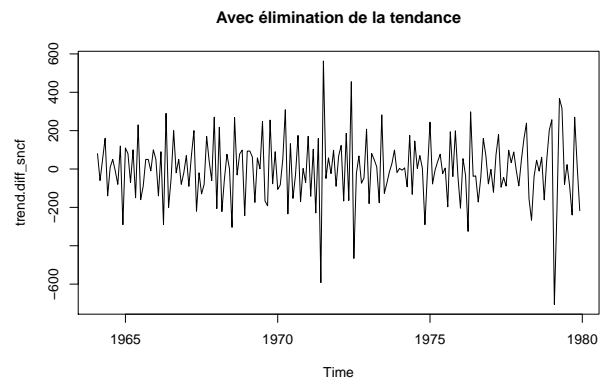
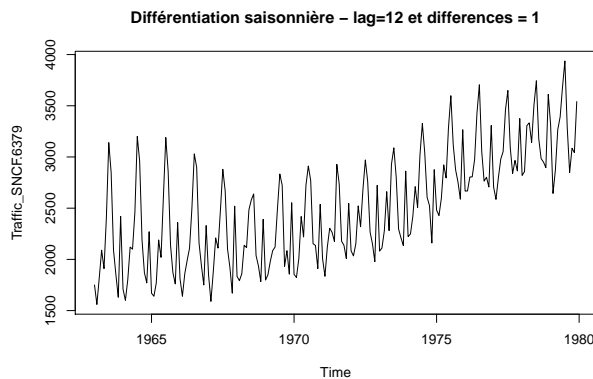


L'autocorrélation partielle suggère un terme d'ordre $q=1$ (12ème mois) soit un terme moyenne mobile du type : $(1 - \theta_1 B)(1 - \theta_2 B^{12})\epsilon_t$

On obtient ainsi un modèle du type $SARIMA(0,1,1)(0,1,1)$

$(1 - B)(1 - B^{12})X_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_2 B^{12})\epsilon_t$ où $E\epsilon_t = 0$ et $V\epsilon_t = \sigma^2$

- Elimination de la tendance



- Validation du modèle obtenu par différentiation saisonnière

On confirme cette hypothèse à l'aide d'un test de *Dickey – Fuller* on obtient une $p_value=0.0198766$ On a donc réussi à améliorer la stationnarité de la série avec une différentiation saisonnière. Par contre le modèle différentié et sans tendance obtenu à une $p_value=0.01$ et n'est donc pas stationnaire.

Et le test du Portemanteau ou test de blancheur sur R n'est pas concluant et donne une $p_value=5.7890803 \times 10^{-11}$ pour le modèle différentié (différence=1, lag=12) et une $p_value=1.1473045 \times 10^{-12}$ pour le modèle auquel on a enlevé en plus la tendance.

On va maintenant estimer plusieurs modèles SARIMA(p,1,q)(r,1,s) en faisant varier les paramètres p et q et la saisonnalité (r,1,s). On fera ensuite un choix de modèles en se basant sur les critères AIC, AICc, et BIC. Pour cela on estime ici le modèle de manière automatique en utilisant la fonction *auto.arima* de R. On regarde la trace et on sélectionne les meilleurs modèles.

```
autoarima63<-auto.arima(Traffic_SNCF.6379,trace=TRUE,allowdrift=FALSE)
```

```
##
## Fitting models using approximations to speed things up...
##
## ARIMA(2,1,2)(1,1,1)[12] : 2260.634
## ARIMA(0,1,0)(0,1,0)[12] : 2369.937
## ARIMA(1,1,0)(1,1,0)[12] : 2306.258
## ARIMA(0,1,1)(0,1,1)[12] : 2254.534
## ARIMA(0,1,1)(0,1,0)[12] : 2291.471
## ARIMA(0,1,1)(1,1,1)[12] : 2261.867
## ARIMA(0,1,1)(0,1,2)[12] : 2255.756
## ARIMA(0,1,1)(1,1,0)[12] : 2265.126
## ARIMA(0,1,1)(1,1,2)[12] : 2263.955
## ARIMA(0,1,0)(0,1,1)[12] : 2321.209
## ARIMA(1,1,1)(0,1,1)[12] : 2250.587
## ARIMA(1,1,1)(0,1,0)[12] : 2288.057
## ARIMA(1,1,1)(1,1,1)[12] : 2259.635
## ARIMA(1,1,1)(0,1,2)[12] : 2252.119
## ARIMA(1,1,1)(1,1,0)[12] : 2262.136
## ARIMA(1,1,1)(1,1,2)[12] : 2259.435
## ARIMA(1,1,0)(0,1,1)[12] : 2294.803
## ARIMA(2,1,1)(0,1,1)[12] : 2254.112
## ARIMA(1,1,2)(0,1,1)[12] : 2252.357
## ARIMA(0,1,2)(0,1,1)[12] : 2250.829
## ARIMA(2,1,0)(0,1,1)[12] : 2287.066
## ARIMA(2,1,2)(0,1,1)[12] : 2254.18
##
## Now re-fitting the best model(s) without approximations...
##
## ARIMA(1,1,1)(0,1,1)[12] : 2386.211
##
## Best model: ARIMA(1,1,1)(0,1,1)[12]
```

SARIMA	AIC	AICc	BIC	sigma2	Log-Likelihood
010_010	2503.2666857	2503.2878498	2506.5189592	2.8503211×10^4	-1250.6333429
111_011	2385.9962789	2386.2113327	2399.0053726	1.4801476×10^4	-1188.9981395
012_011	2386.2057925	2386.4208463	2399.2148862	1.4821928×10^4	-1189.1028962
111_012	2387.4692901	2387.7936144	2403.7306572	1.4835149×10^4	-1188.734645
112_011	2387.9550467	2388.2793711	2404.2164139	1.4877499×10^4	-1188.9775234
212_011	2388.5219013	2388.9784231	2408.0355419	1.4839547×10^4	-1188.2609507
211_011	2387.913895	2388.2382193	2404.1752622	1.487462×10^4	-1188.9569475

En termes de minimisation des critères AIC, AICc et BIC les 6 meilleurs modèles sont les modèles : SARIMA(1,1,1)(0,1,1), SARIMA(0,1,2)(0,1,1), SARIMA(1,1,1)(0,1,2), SARIMA(1,1,2)(0,1,1), SARIMA(2,1,2)(0,1,1), SARIMA(2,1,1)(0,1,1) et le modèle initial SARIMA(0,1,1)(0,1,1) que l'on conserve pour l'analyser. On retrouve pour chacun des modèles la différentiation saisonnière d=1.

1.3.2 Validation des modèles SARIMA obtenus

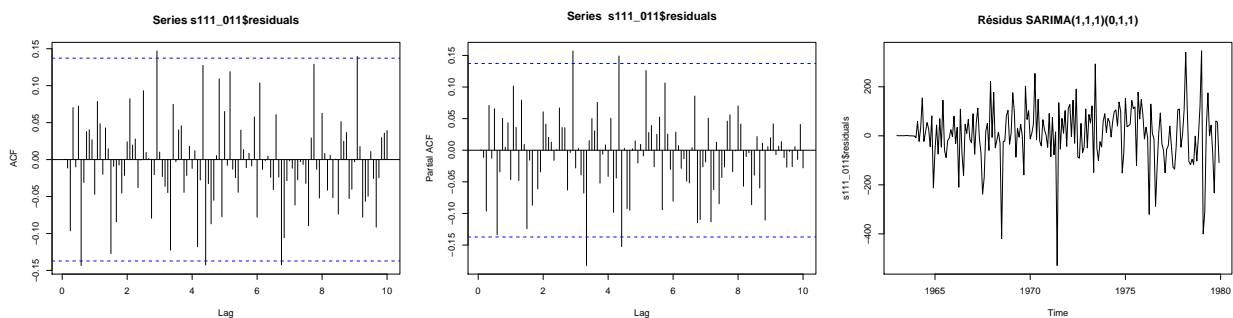
Avant de passer à la prédiction, on va maintenant valider ou invalider les modèles obtenus.

- Test de Box-Pierce

Le test de blancheur des résidus rejette nettement le modèle SARIMA(0,1,1)(0,1,1) avec une p-value < 2.2e-16. Pour les autres modèles on accepte la blancheur des résidus comme le montre le tableau ci-dessous.

SARIMA	p-value
111_011	0.6762469
012_011	0.6436838
111_012	0.667892
112_011	0.6724191
212_011	0.7596604
211_011	0.6669889

- ACF et PACF des résidus



- Statistiques - qualité d'estimation des coefficients pour le modèle SARIMA(1,1,1)(0,1,1) et corrélations

```
##          ar1          ma1          sma1
## t.stat 2.441972 -23.74509 -7.446865
## p.val  0.014607  0.00000  0.000000
```

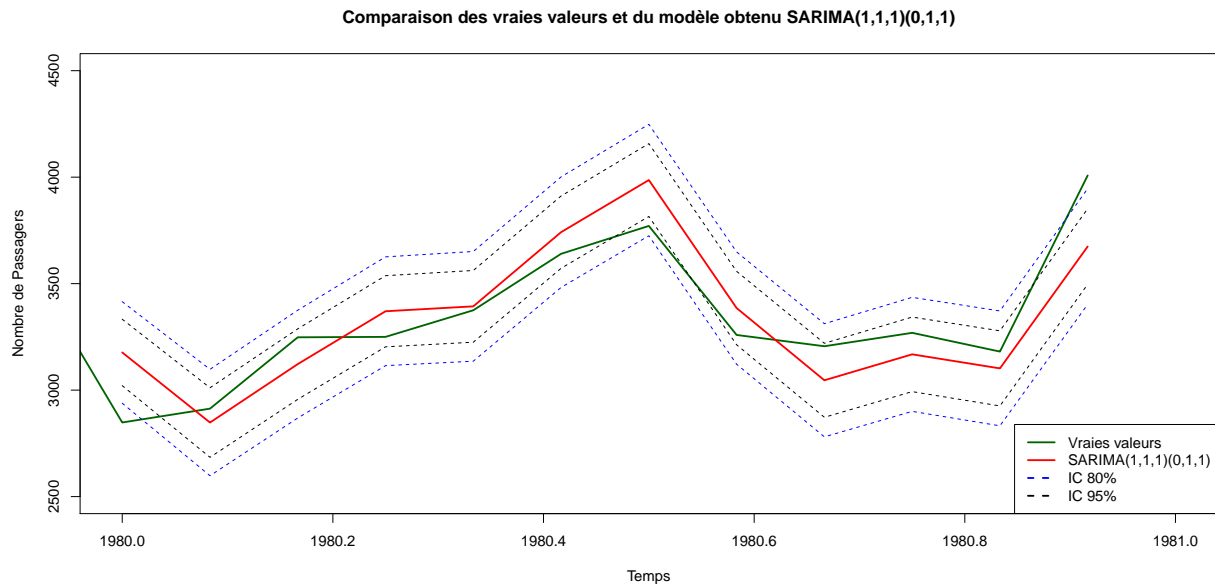
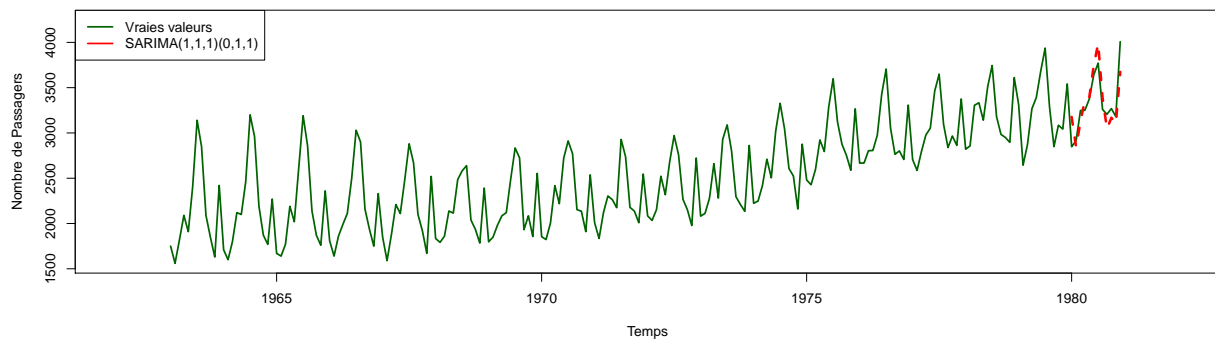
```
##          ar1          ma1          sma1
## ar1    1.0000000 -0.4852660 -0.1182038
## ma1   -0.4852660  1.0000000 -0.0928834
## sma1  -0.1182038 -0.0928834  1.0000000
```

Les résultats pour les autres modèles sont en annexe-partie I en fin de document.

1.4 Prévisions et comparaison des modèles obtenus

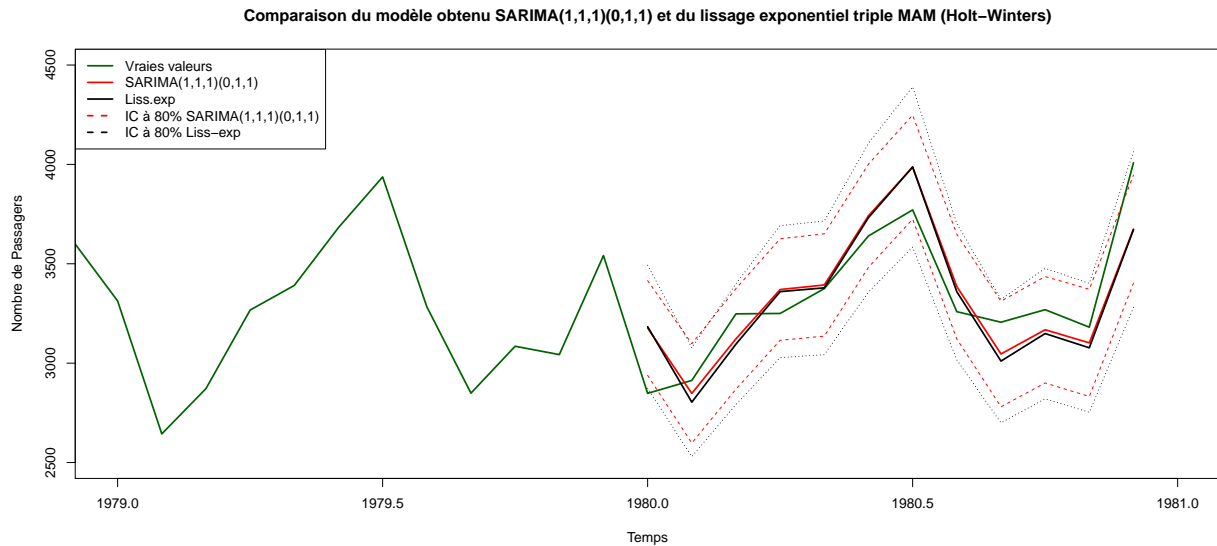
Pour les prédictions on ne va s'intéresser qu'au modèle obtenu SARIMA(1,1,1)(0,1,1). Les prédictions obtenus avec les autres modèles se révèlent être très proche de ce modèle.

- Comparaison du modèle SARIMA(1,1,1)(0,1,1) aux vraies valeurs



Le modèle suit plutôt bien la courbe des données des vraies valeurs, avec cependant un décalage ou retard. On remarque aussi une amplitude du modèle qui semble plus importante.

- Comparaison entre SARIMA et lissage exponentiel



Le modèle SARIMA et le lissage exponentiel triple de type (MAM) ont des courbes très semblables. Avec un léger mieux pour le modèle SARIMA. L'intervalle de confiance pour le modèle SARIMA est aussi plus resserré sur les vraies valeurs. Le comportement est plutôt bon, avec cependant un décalage, retard par rapport aux vraies valeurs. Peut-être due au changement (de régime) qui semble intervenir au début de l'année 1980. Sinon la forme de la courbe étant quant à elle très bien rendu. A noté aussi que la stabilisation de la variance en utilisant la fonction log n'apporte pas l'atténuation souhaité, et semble avoir peu d'effet ici.

2 Partie II - Tentative de modélisation d'un indice boursier de type action à l'aide de processus ARIMA

2.1 Introduction

On cherche dans cette partie à modéliser par des processus de type ARIMA ou assimilé (SARIMA) l'évolution du prix d'indice boursier de type action. En fait un portefeuille d'actions, ou indice type CAC40, DAX, Eurostoxx, SP500. . . Pour cette première étude on va se baser sur l'indice CAC40. A partir de la modélisation (présupposée possible) obtenu on va chercher à prévoir l'évolution de l'indice en question, à horizon 3 mois, 6 mois voire 1 an.

Notre but est double :

- La définition de stress test de type action : A partir de la modélisation obtenue, et de l'intervalle de confiance sous jacent, on va chercher à déterminer une valeur de choc absolue à la hausse et à la baisse. Cette méthodologie de définition d'un choc absolue associé à un niveau de confiance devrait nous aider à définir un scénario économique plausible (avec un certain seuil de confiance) à horizon 3 mois, 6 mois et 1 an. Ainsi cette modélisation devrait pouvoir nous guider dans la détermination de stress test de type action. Pour être complet quant à la définition de stress test de type financier, il faudrait parvenir à définir une méthodologie équivalente pour les produits de types taux ou courbes de taux d'intérêt. Ce dernier cas est plus complexe dans la mesure où on cherche à modéliser une surface et les séries temporelles ne sont peut être pas appropriées. Plus précisément on cherche à modéliser un faisceau de courbes aléatoires qui dépendent les unes des autres. Le mécanisme de dépendance étant en parti connu, ou plutôt des modèles existent.
- Elaboration d'un portefeuille simplifié : Une fois les principaux indices modélisés, on va chercher à décomposer nos portefeuilles sur ces indices et ainsi constituer un portefeuille simplifié. Ce portefeuille simplifié serait la base d'un indice benchmark du portefeuille étudié.

Dans un premier temps on va étudier la série temporelle associée à l'évolution du prix de l'indice étudié le CAC40 : représentation graphique, saisonnalité, tendance, stationnarité. . . Pour entrer dans le cadre d'un modèle ARMA(p,q), on va dans un premier temps, étudier la stationnarité de notre série. Et la rendre stationnaire le cas échéant. A partir de là on cherchera à déterminer les paramètres p et q du processus auto régressif AR(p) et moyenne mobile MA(q) sous jacent à partir des graphiques ACF et PACF. Enfin on ajustera les coefficients pour obtenir notre modèle. On terminera l'étude en validant le modèle: blancheur des résidus, indépendance, normalité. On pourra alors après validation l'utiliser pour nos prédictions.

2.2 Lecture des données et premières analyses

Les données ont été récupérées sur le site Yahoo Finance. Ticker “^FCHI” pour les données de l'indice CAC40. On considère un jeu de données quotidiennes et un autre mensuel. Avec dans les 2 cas un historique de Janvier 1998 à Janvier 2020. A partir de cet historique de 22 ans on va construire différentes séries de profondeur d'historique différente. Après avoir analysé ces séries on essaiera de construire un modèle de type ARIMA pour chacune d'elles.

2.2.1 Traitement des données

Dans le cas des données journalières, il y a des données manquantes. On va les supprimer. La variable Date est aussi convertit en structure date.

##	Date	Open	High	Low
##	1997-11-12: 1	Min. :2453	Min. :2518	Min. :2401


```
## 1997-11-13: 1 1st Qu.:3695 1st Qu.:3724 1st Qu.:3667
## 1997-11-14: 1 Median :4341 Median :4374 Median :4309
## 1997-11-17: 1 Mean :4392 Mean :4424 Mean :4358
## 1997-11-18: 1 3rd Qu.:5106 3rd Qu.:5135 3rd Qu.:5074
## 1997-11-19: 1 Max. :6929 Max. :6945 Max. :6839
## (Other) :5660 NA's :54 NA's :54 NA's :54
## Close Adj.Close Volume
## Min. :2403 Min. :2403 Min. : 0
## 1st Qu.:3697 1st Qu.:3697 1st Qu.: 0
## Median :4341 Median :4341 Median : 90349500
## Mean :4392 Mean :4392 Mean : 83842758
## 3rd Qu.:5106 3rd Qu.:5106 3rd Qu.:129391650
## Max. :6922 Max. :6922 Max. :531247600
## NA's :54 NA's :54 NA's :54
```

```
## Date Open High Low Close Adj.Close Volume
## 1 1997-11-12 2688.8 2701.0 2649.5 2694.5 2694.5 0
## 2 1997-11-13 2691.6 2712.2 2681.8 2700.7 2700.7 0
## 3 1997-11-14 2735.9 2751.4 2691.9 2698.9 2698.9 0
## 4 1997-11-17 2772.1 2779.6 2760.1 2773.0 2773.0 0
## 5 1997-11-18 2787.2 2793.6 2762.6 2782.6 2782.6 0
## 6 1997-11-19 2753.0 2792.3 2753.0 2790.6 2790.6 0
```

Dans le cas des données mensuelles on n'a pas de problème de données manquantes.

2.2.2 conversion des données en objet *time series*

Ici on convertit les données en objet R *ts* (time series) Dans le cas des données journalières on utilise pour le paramètre de fréquence (nb jours dans l'année) la valeur 256 Ce qui correspond au nombre de jours par an (jours ouvrés sans les jours de fermeture) que l'on obtient une fois les NA supprimés.(On remarque que cette valeur de fréquence influe la vitesse de traitement lors de l'appel de la fonction `auto.arima`)

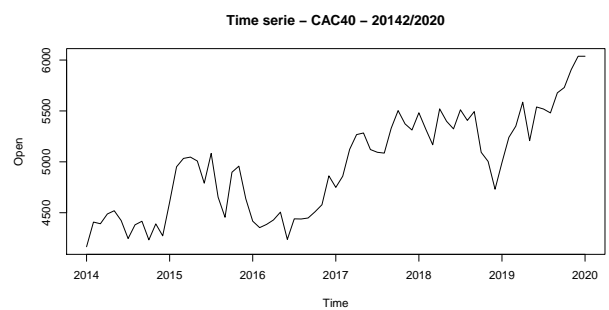
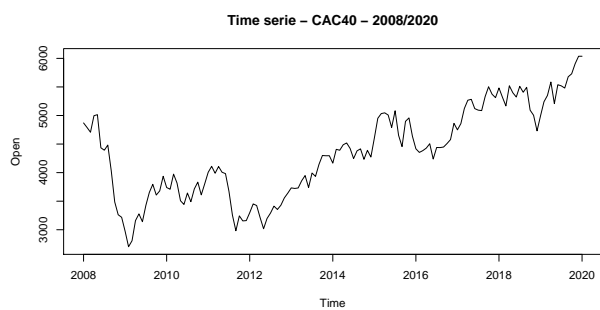
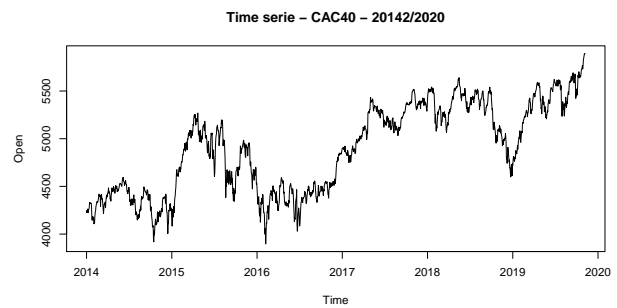
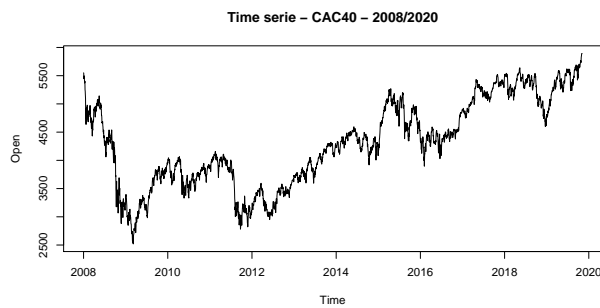
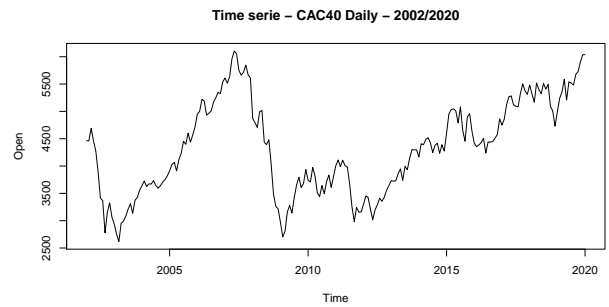
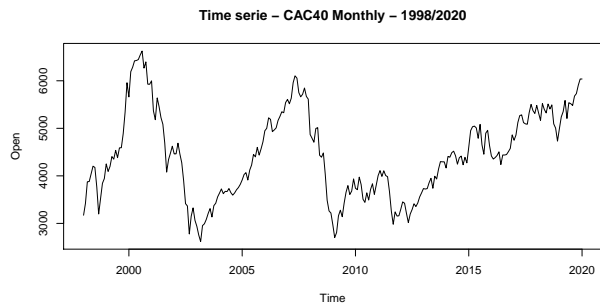
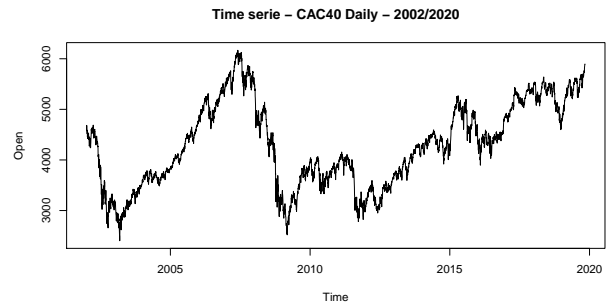
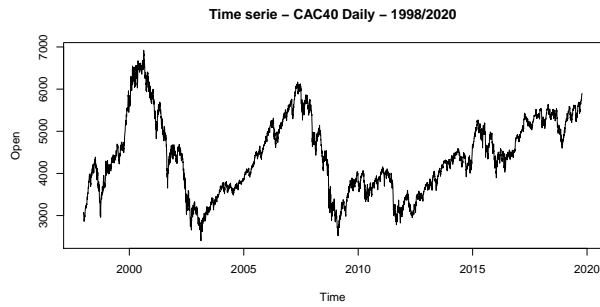
2.3 Analyse des séries temporelles obtenues

Comme déjà énoncé on va étudier plusieurs profondeurs d'historique.

- Toute la série de janvier 1998 à janvier 2020 soit 22 années de profondeur d'historique.
- A partir de Janvier 2002 jusqu'à janvier 2020 soit 18 années de profondeur d'historique.
- A partir de Janvier 2008 jusqu'à janvier 2020 soit 12 années de profondeur d'historique.
- A partir de Janvier 2014 jusqu'à janvier 2020 soit 5 années de profondeur d'historique. Et on considère 2 jeux de données, avec une fréquence quotidienne et mensuelle.

2.3.1 Graphique des séries temporelles - valeur observée Prix à la fermeture (Close)

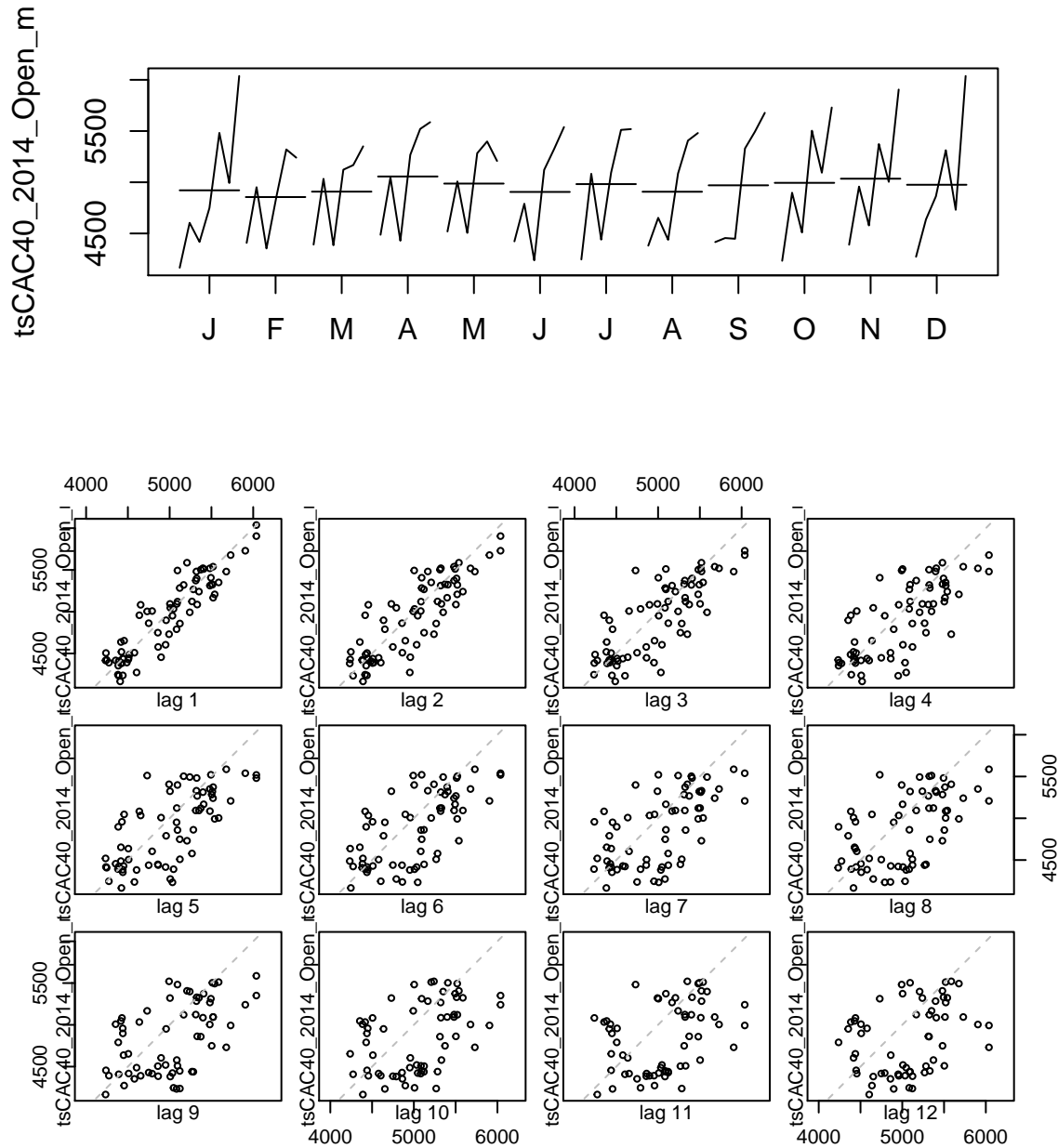
On a 4 séries temporelles possibles en fonction du choix de la quantité observée (High, Low, Open, Close, Volume). On va s'intéresser à la valeur à la fermeture pour la cotation de l'indice CAC40 (Close).



Dans le cas des données mensuelles On retrouve bien sûr la forme globale de la série mais moins bruitée.

2.3.2 Représentations graphiques : month-plot et lag-plot

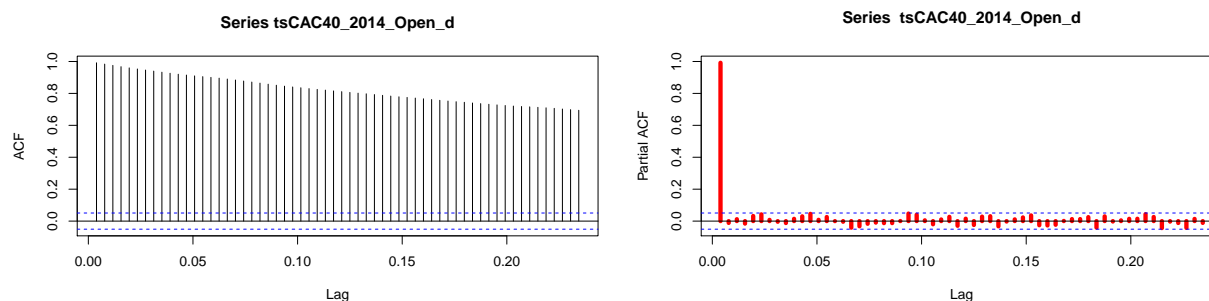
Ce diagramme permet de comprendre la dépendance de la série par rapport à son passée. Il donne une vision locale de la série, si y a une corrélation entre la série a un instant et la série 1, 2... instants avant. Ici on ne remarque pas de tendance saisonnière marquée.



2.3.3 Etude de la stationnarité

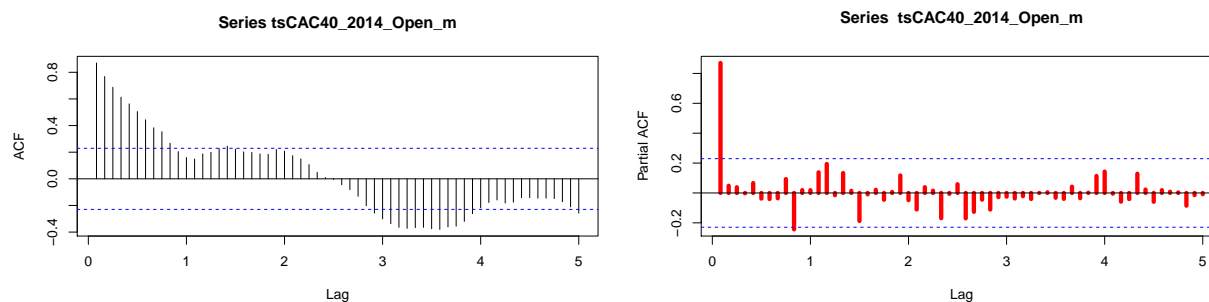
La stationnarité est la stationnarité du processus au sens faible. Un tel processus doit avoir les propriétés suivantes : La moyenne et la variance ne varient pas au cours du temps et le processus n'a pas de tendance. Pour vérifier ces hypothèses, on s'appuiera sur une analyse des graphique d'autocorrélation ACF et d'autocorrélation partielle PACF ainsi que sur le test de *Dickey – Fuller*.

- Fonction d'autocorrélation ACF et PACF pour la série journalière 2014



On constate que la série ne semblent pas être stationnaires.

On confirme cette hypothèse à l'aide d'un test de *Dickey – Fuller* on $p_value=0.2639764$.



Là aussi on constate que les variables sont liées entre elles, i.e. les données ne semblent pas être stationnaires. On confirme cette hypothèse à l'aide d'un test de *Dickey – Fuller*.

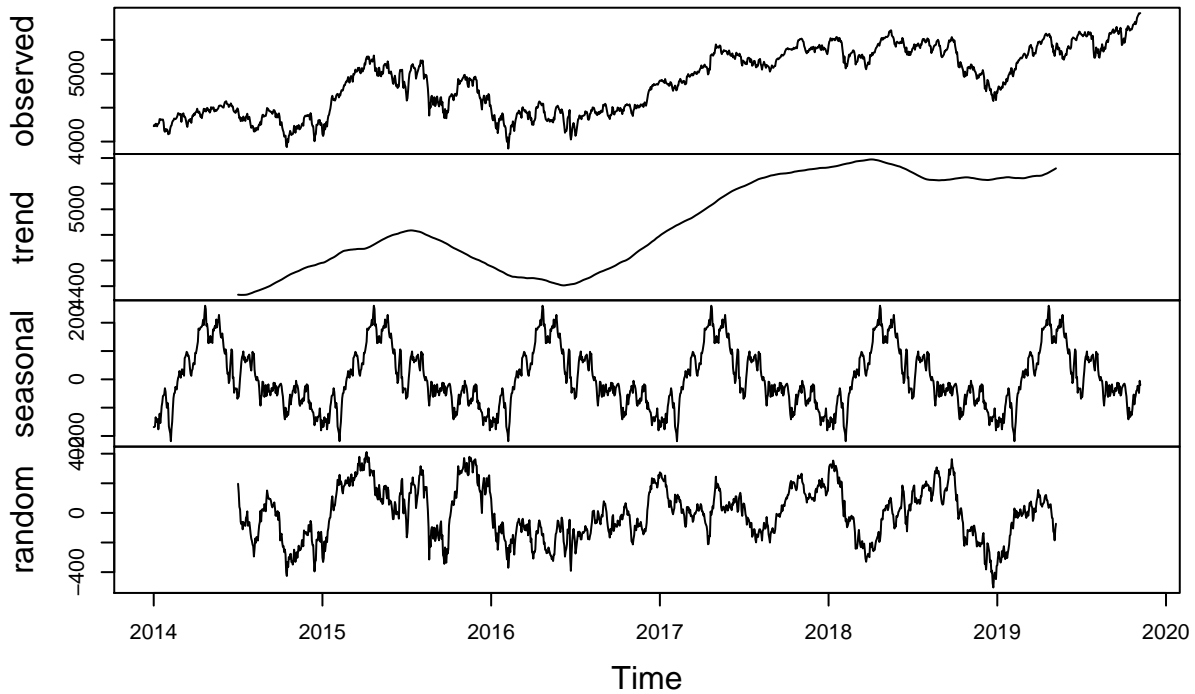
série	Dickey-Fuller	Lag order	p-value
1998	-2.3092612	6	0.4456761
2002	-2.1857017	5	0.4980833
2014	-2.1515395	4	0.5136323

La p-valeur de ce test est importante et confirme donc que les données ne sont pas stationnaires.

2.3.4 Décomposition des séries temporelles :

Ici on va décomposer la série temporelles en utilisant la fonction *décompose* de R de façon à avoir une idée générale de la tendance (trend) saisonnalité et bruit.

Decomposition of additive time series



On retrouve les formes générales mais moins bruitées. La saisonnalité ne semble pas très nette.

On va essayer de rendre stationnaire nos séries. C'est un prérequis pour pouvoir effectuer une modélisation de type ARMA. En utilisant la différenciation on va essayer de se ramener à un processus ARMA. Ainsi on va essayer de modéliser l'évolution du prix de l'indice CAC40 par un processus ARIMA.

2.4 Détermination des modèles ARIMA

Les processus ARIMA sont des processus non stationnaires.

Un processus X_t , $t \in \mathbb{Z}$ est un processus ARIMA(p,d,q) si $\Delta^d X$ est un processus ARMA(p,q).

Les processus ARMA(p,q) font parti d'une famille très large de processus stationnaires. Ces processus sont composés des processus autorégressifs AR(p) et de moyennes mobiles ("moving average") MA(q). Un processus ARMA est la combinaison des processus autorégressifs et moyennes mobiles.

On cherche dans un premier temps à se ramener à un processus stationnaire en utilisant la différenciation. Si l'on est bien dans le cadre d'un modèle ARIMA, après l'opération de différenciation on se ramènera à l'étude d'un processus ARMA(p,q).

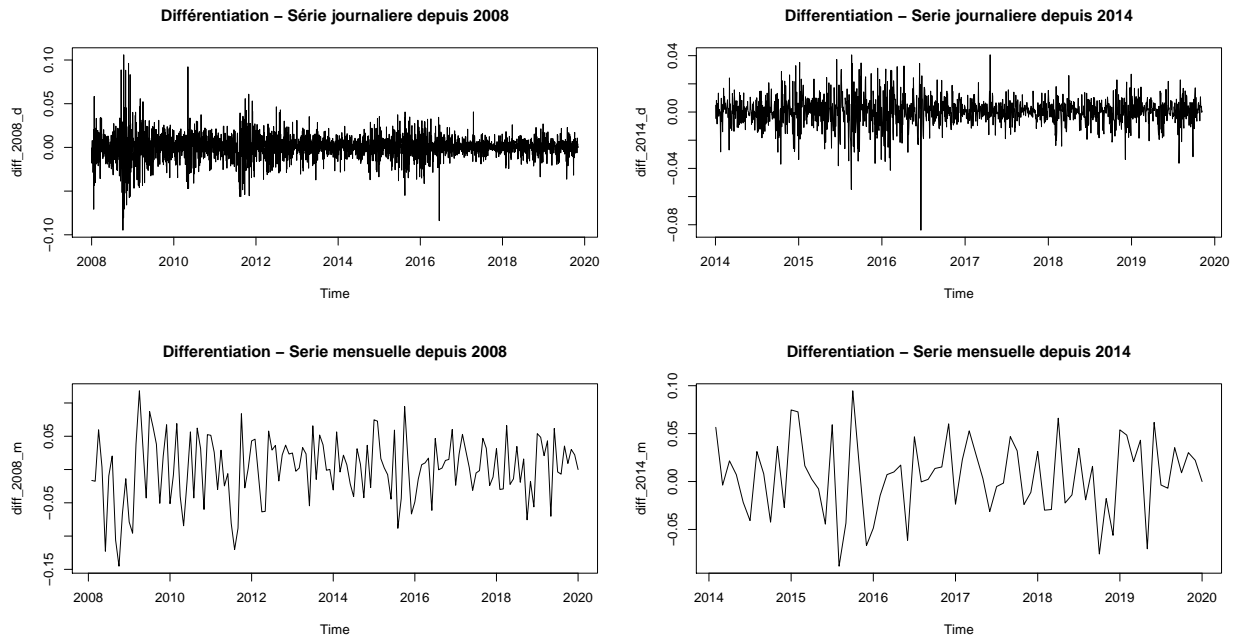
2.4.1 "Stationnarisation" des processus par différenciation des séries

Pour tenter de rendre la série stationnaire, on applique la méthode de différenciation. On utilise la fonction R diff. En paramètre on passe un facteur de 1 pour la différence et de 0 pour la saisonnalité. On retrouve l'idée de la transformation Log-return R_t des prix X_t où $R_t = \text{Log}(X_t/X_{t-1})$ qui est classique en finance.

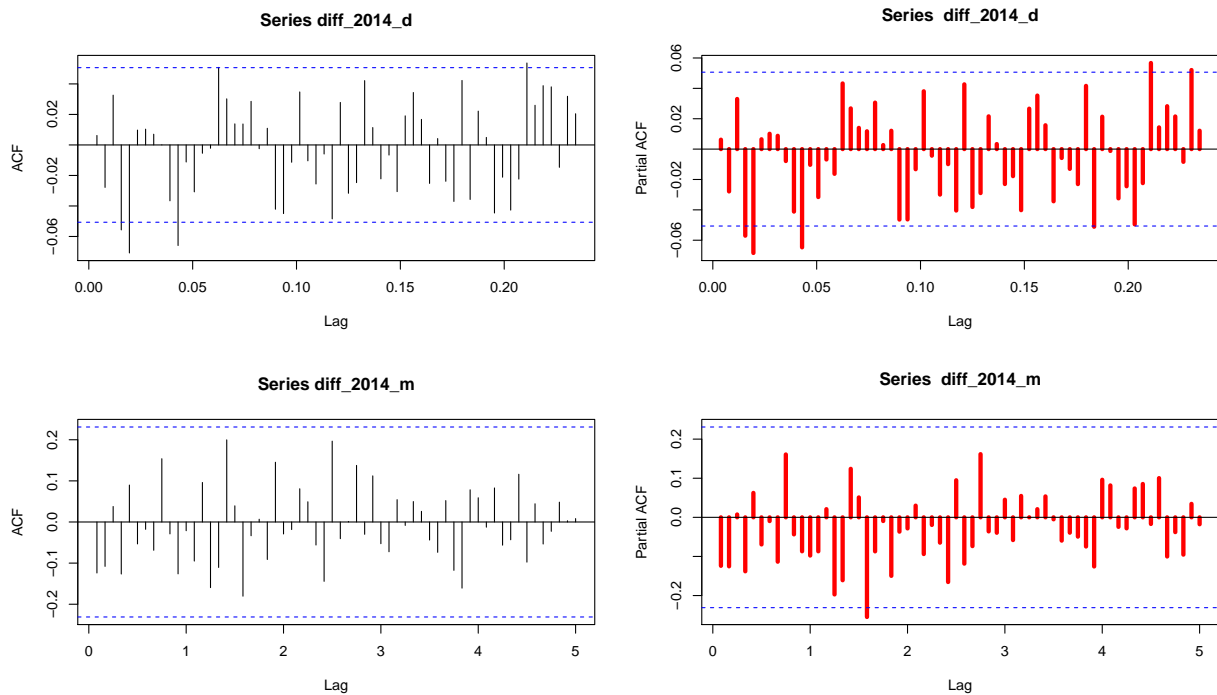
Au sens de la stationnarité faible, les séries semblent bien stationnaires. On retrouve bien une moyenne nulle et constante dans le temps. Ainsi qu'aussi une variance constante bien que cet aspect soit moins évident en

particulier pour les données journalières.

- Séries obtenues par différentiation pour les 2 jeux de données quotidien et mensuel à partir de 2008 et 2014



Les corrélogrammes des séries différenciés n'ont pas de fortes valeurs.



L'hypothèse de stationnarité du processus ainsi transformé étant acceptable, on peut envisager une modélisation ARIMA. Compte tenu de l'allure des autocorrélogrammes de la série (différence=1), nous pouvons penser modéliser la série originelle par un processus ARMA (p, q).

On confirme cette impression avec différents tests de stationnarité.

- Test ADF - Augmented Dickey-Fuller Test (Robuste à l'autocorrélation)

série	Dickey-Fuller t	Lag order	p-value
1998 j	-17.6300806	17	0.01
2002 j	-16.1984318	16	0.01
2008 j	-16.1037353	14	0.01
2014 j	-12.6670123	11	0.01
1998 m	-5.5541872	6	0.01
2002 m	-5.607552	5	0.01
2008 m	-5.1084101	5	0.01
2014 m	-3.8500507	4	0.0214233

- Test PP - Phillips-Perron Unit Root Test (Robuste à l'hétéroscédasticité)

série	Dickey-Fuller $Z(\alpha)$	Truncation Lag order	p-value
1998 j	-5150.43149	10	0.01
2002 j	-4243.9501495	10	0.01
2008 j	-2877.2657544	9	0.01
2014 j	-1411.017738	7	0.01
1998 m	-240.4025467	5	0.01
2002 m	-201.4496515	4	0.01
2008 m	-130.1214991	4	0.01
2014 m	-74.412947	3	0.01

- Test de KPSS

série	KPSS Level	Truncation Lag order	p-value
1998 j	0.0768448	10	0.1
2002 j	0.1132662	10	0.1
2008 j	0.2473177	9	0.1
2014 j	0.0301087	7	0.1
1998 m	0.0747491	5	0.1
2002 m	0.1190819	4	0.1
2008 m	0.2058661	4	0.1
2014 m	0.0524481	3	0.1

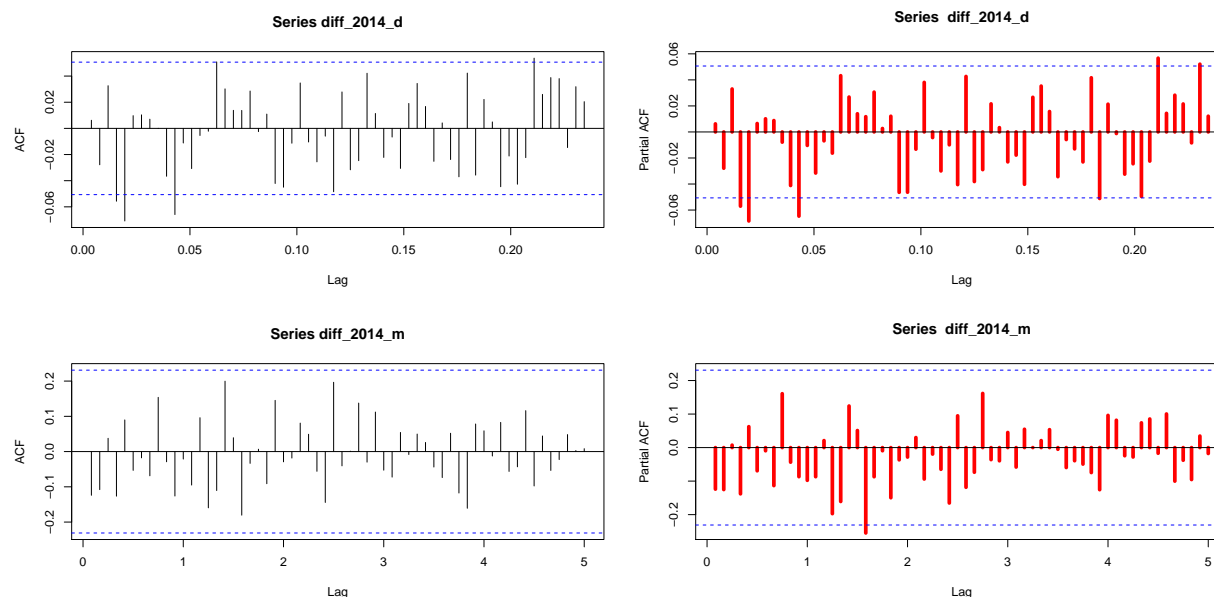
Ces tests confirment la stationnarité de la série différenciée (difference=1). A titre comparatif, la série obtenue en différenciant 2 fois donne des résultats ne semblant pas significativement différents. Aussi, différencier 1 fois suffit pour obtenir un modèle stationnaire.

L'hypothèse de stationnarité du processus ainsi transformé, étant vérifié on peut envisager une modélisation ARIMA(p,1,q). On passe maintenant à la détermination des paramètres p et q du modèle.

2.4.2 Détermination des paramètres p et q, études des corrélogrammes et autocorrélations partielles

L'estimation de p et de q se fait simplement en lisant le graphe des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle. Le graphe de la fonction d'autocorrélation nous fournit la valeur de q (ACF). Le graphe de la fonction d'autocorrélation partielle nous donne la valeur de p (PACF).

- Etudes des corrélogrammes et autocorrélations partielles (acf et pacf) - séries journalières et mensuelles 2014



La PACF d'un processus qui a une composante moyenne mobile a une décroissance exponentielle. Ainsi la PACF d'un $ARMA(p,q)$, $q > 0$ présente une décroissance exponentielle. Ici la PACF ne décroît pas exponentiellement, et rien de très net ne ressort des différents graphiques. De manière similaire, la fonction d'autocorrélation (ACF) d'un $AR(p)$ montre une décroissance exponentielle avec ou sans oscillations vers 0 et La fonction d'autocorrélation partielle (PACF) d'un $AR(p)$ est nulle à partir de l'ordre $p+1$. Ici aucunes des valeurs n'est importante. Le modèle qui ressort de l'étude de ces corrélogrammes serait un modèle $ARIMA(0,1,0)$ soit une marche aléatoire.

D'autres méthodes et fonctions existent sous R, comme la méthode des coins, l'utilisation de la fonction `eacf` - d'autocorrélation étendue (Tsay, & Ciao) Cf Référence D3, Modèles de prévision Séries temporelles (A. Charpentier). Fonction R : `armaselect` et `armasubsets`.

On va plutôt utiliser la méthode automatique : `auto.arima` basé sur les critères AIC, AICc et BIC.

Une première étude a montré que les différents modèles résultants ne sont pas validés pour les données quotidiennes, quelque soit la profondeur d'historique le tests de blancheur des résidus échoue. Mais il y a cependant une amélioration ($p\text{-value} = 0.09348$) pour la profondeur d'historique la plus faible (données à partir de 2014). La profondeur de l'historique et la forme de la courbe associée semble jouer un rôle assez important.

En ce qui concerne les données mensuelles tous les modèles obtenus: $ARIMA(0,1,0)$ pour 2008 et 2014, $SARIMA(0,1,0)(1,0,0)$ pour 2002 et $SARIMA(1,1,0)(2,0,2)$ pour 1998 valident le test de blancheur des résidus avec des $p\text{-values}$ importantes (> 0.7). Par contre les tests de normalités des résidus ne sont validés que par le modèle obtenu avec la plus faible profondeur d'historique (données à partir de 2014).

Dorénavant on ne considère plus que les données mensuelles à partir de 2014. Dans le dernier § on essaiera d'autres types de modèles sur les données quotidienne (toujours à partir de 2014) : les modèles à volatilités

stochastique. Ces modèles semblent en effet bien mieux adaptés aux données financières, en particulier pour les données journalières. Dans le cas des données quotidiennes on a une variance non constante.

2.4.3 Méthode automatique de calibration d'un modèles ARIMA sur les données 2014 mensuelles

La fonction `auto.arima` renvoie les meilleurs modèles ARIMA en considérant les critères AIC, AICc ou BIC value. Ici on va sélectionner

```
##
## ARIMA(2,1,2)(1,0,1)[12] : Inf
## ARIMA(0,1,0) : 874.9688
## ARIMA(1,1,0)(1,0,0)[12] : 878.1471
## ARIMA(0,1,1)(0,0,1)[12] : 877.8189
## ARIMA(0,1,0)(1,0,0)[12] : 877.0904
## ARIMA(0,1,0)(0,0,1)[12] : 877.0901
## ARIMA(0,1,0)(1,0,1)[12] : 879.2919
## ARIMA(1,1,0) : 875.9791
## ARIMA(0,1,1) : 875.673
## ARIMA(1,1,1) : 876.9957
##
## Best model: ARIMA(0,1,0)

## Series: cac40.1418
## ARIMA(0,1,0)
##
## sigma^2 estimated as 39793: log likelihood=-436.45
## AIC=874.91 AICc=874.97 BIC=877.08
```

On peut utiliser une approche empirique et regarder le critère AIC AICc et BIC des différents modèle obtenues on prendra celui qui minimise ces critères.

- Voici le résultat obtenu pour la série 2014 quotidienne :

ARIMA	AIC	AICc	BIC	sigma2	log-likelihood
010	874.9052585	874.9687506	877.0796458	3.9792802×10^4	-436.4526293
110	875.7855632	875.9791115	880.1343377	3.9713265×10^4	-435.8927816
011	875.4794941	875.6730425	879.8282687	3.9520002×10^4	-435.7397471
111	876.6022466	876.9956892	883.1254084	3.9556106×10^4	-435.3011233
012	876.7147223	877.1081649	883.2378841	3.9658478×10^4	-435.3573611
112	877.3045697	877.9712364	886.0021188	3.9357096×10^4	-434.6522849
210	876.9189347	877.3123773	883.4420965	3.9792401×10^4	-435.4594673
211	878.5100484	879.176715	887.2075975	4.0131698×10^4	-435.2550242

SARIMA	AIC	AICc	BIC	sigma2	log-likelihood
010_101	876.8968377	877.0903861	881.2456123	4.0408082×10^4	-436.4484189
010_001	876.8965669	877.0901153	881.2453415	4.0407834×10^4	-436.4482835
010_101	878.8984363	879.2918789	885.4215981	4.105066×10^4	-436.4492182
011_001	877.425435	877.8188776	883.9485968	4.0103861×10^4	-435.7127175
110_100	877.7536494	878.1470921	884.2768113	4.0317808×10^4	-435.8768247
212_101	882.6977577	884.66267	897.9184686	3.9770954×10^4	-434.3488789

On remarque que selon ce critère plusieurs modèles sont très proches. On va sélectionner les modèles suivants ARIMA(0,1,0), ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,1)

2.5 Validation des modèles obtenus

2.5.1 Statistiques

Qualité d'évaluation des coefficients du modèle.

ARIMA(0,1,0)

Marche aléatoire, pas de coefficients autoregressif ou Moyenne mobile

ARIMA(0,1,1)

```
##                ma1
## t.stat -1.218144
## p.val   0.223169
```

ARIMA(1,1,0)

```
##                ar1
## t.stat -1.062969
## p.val   0.287796
```

ARIMA(1,1,1)

```
##                ar1                ma1
## t.stat 1.657491 -2.468702
## p.val  0.097420  0.013560
```

2.5.2 Corrélations

ARIMA(1,1,1)

```
##                ar1                ma1
## ar1  1.0000000 -0.9745172
## ma1 -0.9745172  1.0000000
```

2.5.3 Blancheur des résidus

Test de Box-Pierce

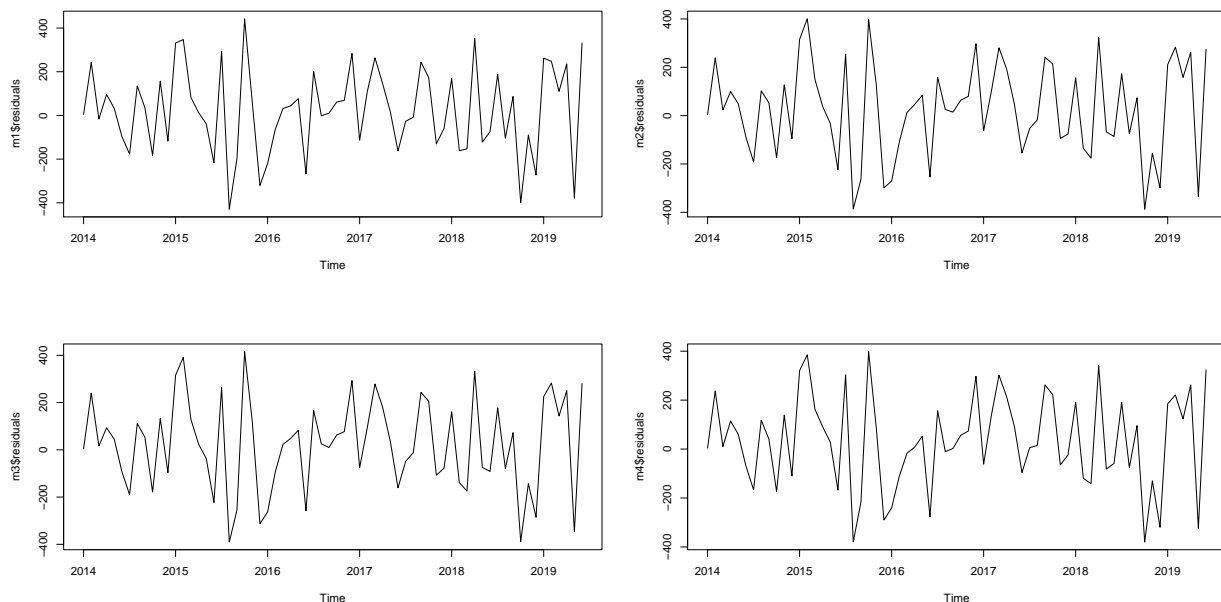
série	X-squared	df	p-value
010	14.0908242	20	0.8258612
011	12.3646978	20	0.9029516
110	12.8963073	20	0.8817886
111	12.2646538	20	0.9066656

Test de Ljung-Box

série	X-squared	df	p-value
010	17.9379723	20	0.5914944
011	16.1756863	20	0.7056669
110	16.8036489	20	0.6656843
111	16.0374931	20	0.7142955

Dans le cas des modèles sur données mensuelles le test de blancher des résidus accepte le modèle, et ce dans tous les cas. Dans le cas des données quotidienne au contraire le modèle n'est pas validé la p-value la plus importante est obtenu pour les données 2014.

2.5.4 Graphiques de résidus obtenus à partir des différents modèles



L'allure des courbes correspondant aux différents modèles est très similaire.

2.5.5 Normalité des résidus

On regarde les tests classiques de normalités dans le cadre des données mensuelles.

Test de Shapiro-Wilk normality test

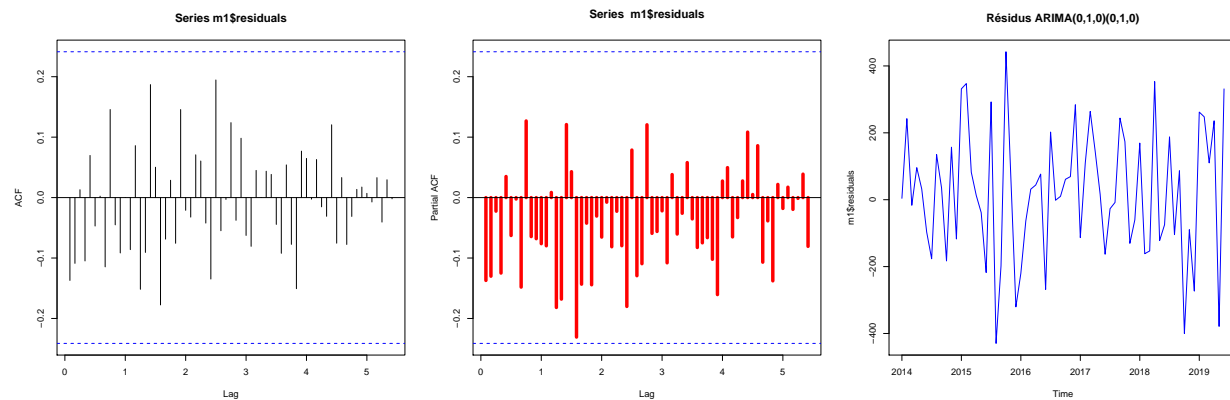
série	p-value
010	0.834067
011	0.4754316
110	0.5873255
111	0.5176835

Test de Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

série	p-value
010	0.845679
011	0.918646
110	0.9011202
111	0.9957237

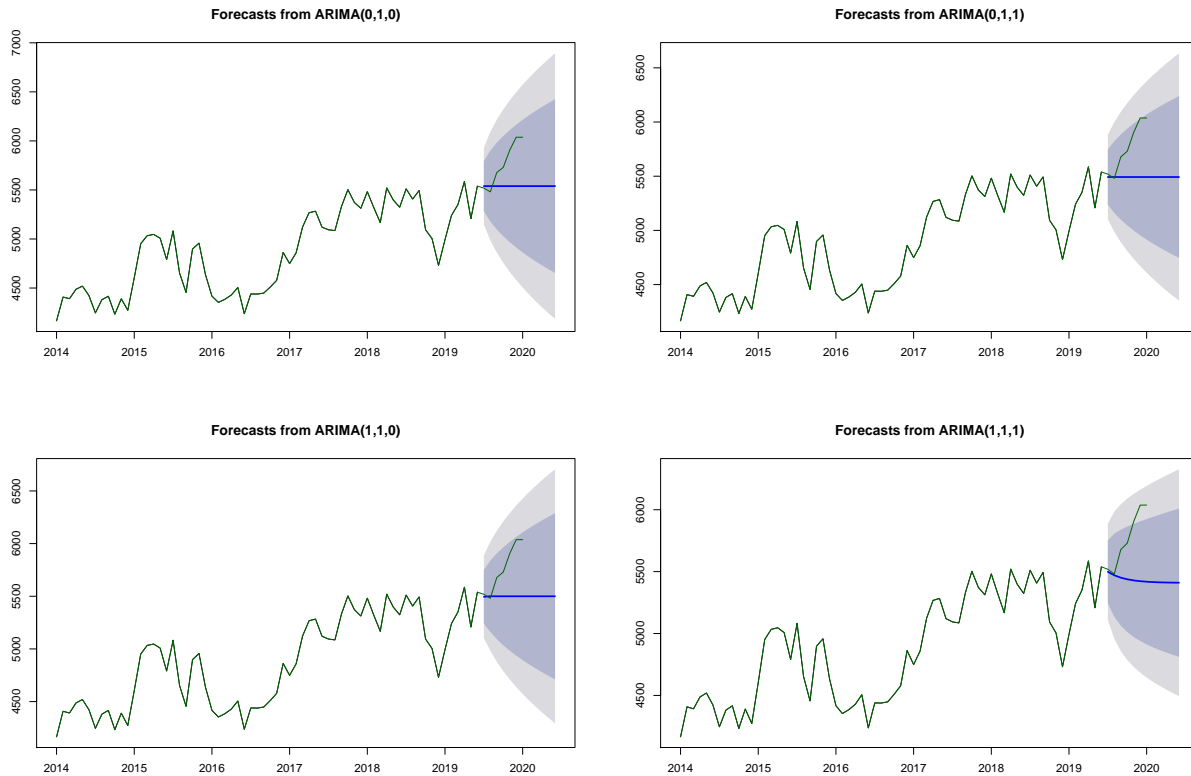
Les modèles suivent bien une loi de Gauss.

2.5.6 ACF et PACF des résidus



2.5.7 Prévisions à partir des modèles obtenus

Ces prévisions seront utilisées pour nous permettre de déterminer les valeurs possibles prise par l'indice CAC40 à horizon 1 mois, 2 mois, 6 mois. On souhaite utiliser l'intervalle de confiance obtenu pour nous aider à déterminer un scénario économique possible sur les actions. Vu que l'on est dans le cadre de stress tests on cherche à déterminer un choc absolu plausible et non pas obtenir la valeur du CAC à horizon.



Dans le cas du modèle ARIMA(0,1,0) à horizon 6 mois dans un contexte économique normale, sans grosse crise ou perturbation soudaine l'intervalle de confiance à 95% n'est pas transpercé. Les autres modèles transperce ou atteignent la borne supérieure de l'intervalle à 95%. Cependant le CAC40 durant les derniers mois a fait une forte progression de 800 points depuis le mois d'août (de 5200 à 6000). Et la borne supérieure (réciproquement inférieure) donne une bonne indication quant à la valeur d'un choc plausible dans un contexte haussier (récip. baissier). On regarde cependant ces résultats avec prudence et on va chercher à améliorer le modèle pour pouvoir l'utiliser dans un contexte de production, et c'est l'objet du chapitre suivant.

2.6 Alternative au modèle de type ARIMA, les modèles GARCH

Ces modèles prennent en compte l'hétéroscédasticité, ce sont des modèles à hétéroscédasticité conditionnelle. Ils sont mieux adaptés aux séries financières et notamment à la modélisation des rendements de telles séries. Plus précisément, soit une série que l'on écrit sous la forme : $y_t = c + \epsilon_t$ avec $E(\epsilon_t) = 0$. Cette série se comporte comme la quantité ϵ_t , le rendement. En notant σ_t^2 la variance conditionnelle au passé (non constante) $\sigma_t^2 = \text{var}(\epsilon_t|F_t)$ Avec F_t qui désigne le passé (Filtration). Alors les modèles ARCH et GARCH sont construits en prenant en compte cette dépendance.

- Un processus ARCH(p) est défini de la manière suivante :

$\epsilon_t = \sigma_t z_t$ avec z_t échantillon gaussien $N(0,1)$ indépendant de F_{t-1} $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \epsilon_{t-p}^2$ Avec $\omega > 0$ et qqs $\alpha_i < 0$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_p < 1$ cette dernière condition assurant la stationnarité de ϵ_t .

Les processus GARCH font intervenir en plus une composante, qui est une combinaison linéaire de q variances conditionnelles (retardées) : $\sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$. σ_t^2 est fonction de ϵ_{t-1}^2, \dots passés et également de variances conditionnelles passées : σ_{t-1}^2, \dots

Les séries financières comme on a pu le voir, ne sont pas stationnaires. Et on observe une tendance locale (cf référence B1 p227). Comme on l'a fait dans le cas de la modélisation ARIMA on transforme la série originelle par différenciation (au sens de différence et non pas différentiel) pour obtenir une série stationnaire. Ici on va considérer comme c'est souvent le cas en finance le log-return. C'est à dire la quantité déduite du prix X_t de la manière suivante : Log-return R_t des prix X_t où $R_t = \text{Log}(X_t/X_{t-1})$. Cette approche est bien adaptée au cadre de la théorie de Black-Scholes. On pourra se reporter au Document D4 pour plus de détail sur la justification.

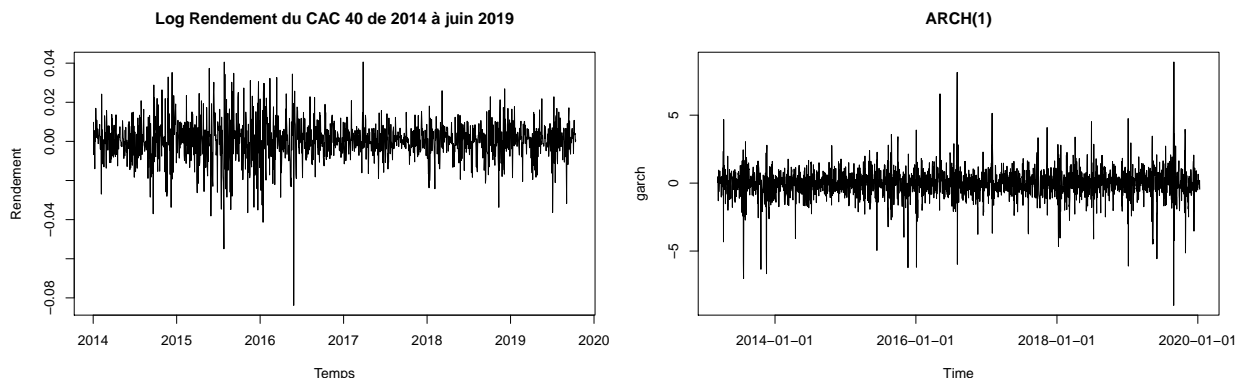
2.6.1 Etude de la série des rendements journalier du CAC40 2014 à 2019

- Obtention de la série des log return

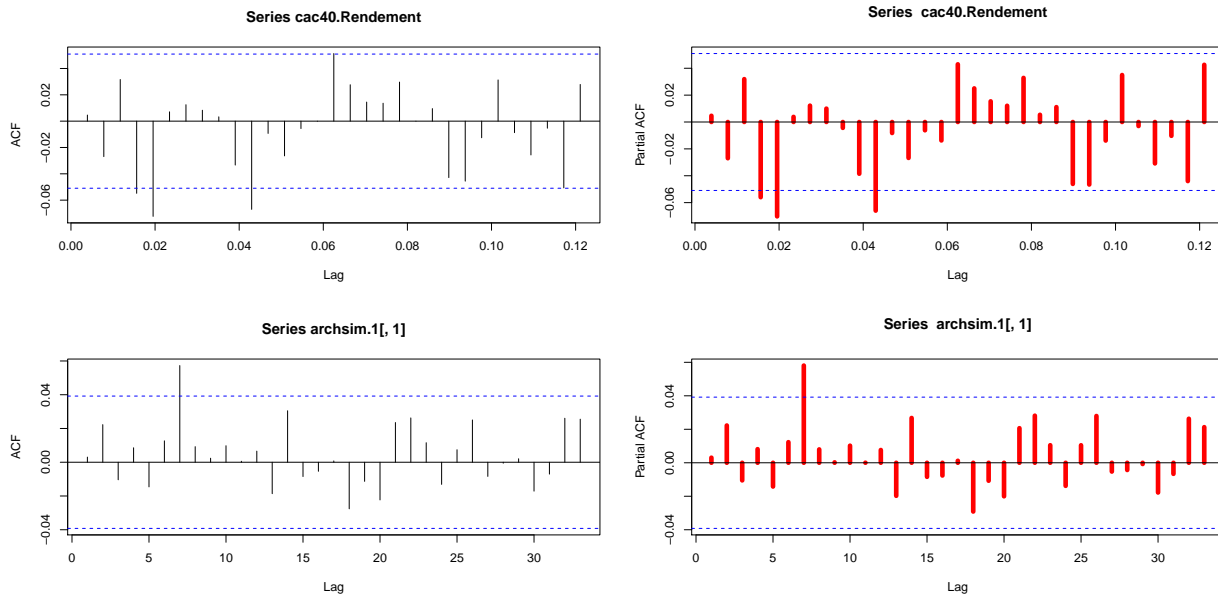
```
cac40.1418d <- window(tsCAC40_1998_Open_d,start=c(2014,1),end=c(2019))
cac40.Test19d <- window(tsCAC40_1998_Open_d,start=c(2019),end=c(2020))
cac40.1419d <- window(tsCAC40_1998_Open_d,start=c(2014,1),end=c(2020))
```

```
cac40.Rendement <- diff(log(cac40.1419d))
cac40.Rendement.Train <- diff(log(cac40.1418d))
cac40.Rendement.Test <- diff(log(cac40.Test19d))
```

- Graphique de la série obtenue et comparaison à un ARCH(1)



- ACF et PACF des rendements du CAC40 et du processus ARCH(1)

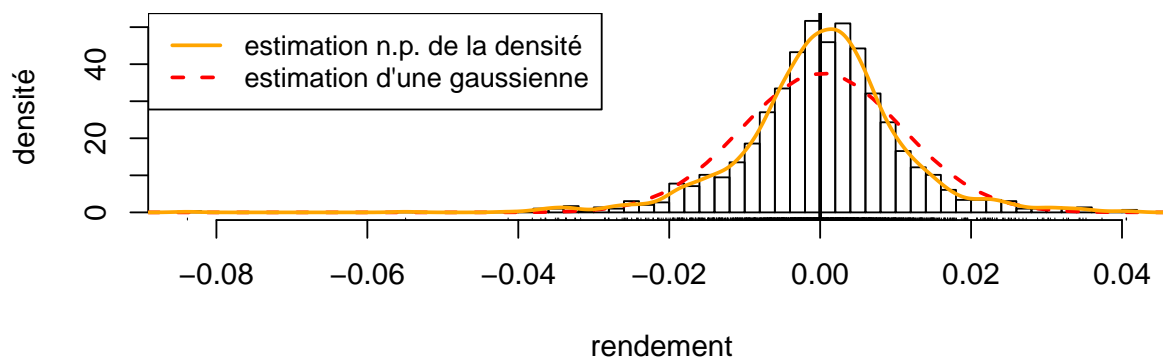


- Test de normalité des rendements

	Stat. de test	p-value
Chi2	Omnibus	211.6943101
Z3	Skewness	-7.6274426
Z4	Kurtosis	12.3901747

Les alternatives sont : pour la ligne Omnibus, « la distribution n'est pas normale par son aplatissement ou par son asymétrie », pour la ligne Skewness, « la distribution n'est pas normale par son asymétrie » et pour la ligne Kurtosis, « la distribution n'est pas normale par son aplatissement ». Pour les trois alternatives, la p-value est très faible ; on rejette donc l'hypothèse de normalité du rendement.[Repris de (B2) - cf référence]

Histogram of x



La distribution est plus concentré autour de la moyenne que la distribution d'une gaussienne.

2.6.2 Modélisation GARCH(1,1) à partir de la fonction *garchFit*

D'après D4 page 96 : « Au regard de l'autocorrélogramme partiel du log return, une modélisation à l'aide d'un modèle GARCH(1, 1) semblerait possible. En effet, l'autocorrélogramme et l'autocorrélogramme partiel sont significativement nuls à partir des premiers retards (i.e. $p = q = 1$) » Dans notre cas vu que l'indice et la période diffère. On peut se reporter aussi à B1 pour une justification d'un GARCH(1,1) dans le cas de la modélisation du DAX. La suite de l'analyse est reprise du livre de Y. Aragon (cf Référence B2).

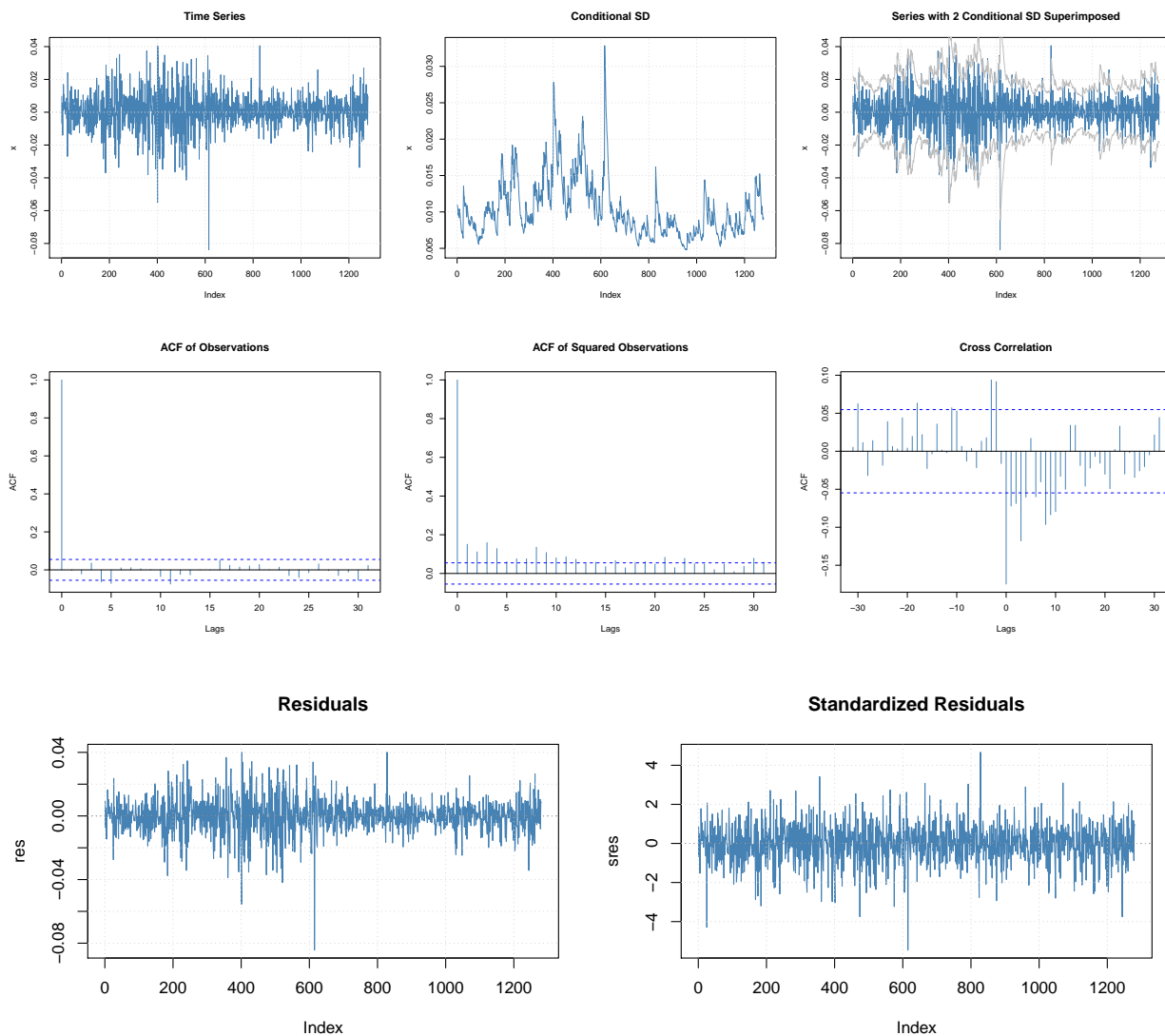
```
##
## Title:
##   GARCH Modelling
##
## Call:
##   garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = cac40.Rendement.Train,
##     include.mean = TRUE, trace = FALSE)
##
## Mean and Variance Equation:
##   data ~ garch(1, 1)
## <environment: 0x0000000023b3ffd8>
##   [data = cac40.Rendement.Train]
##
## Conditional Distribution:
##   norm
##
## Coefficient(s):
##           mu      omega      alpha1      beta1
## 5.2564e-04  2.5301e-06  1.2229e-01  8.6288e-01
##
## Std. Errors:
##   based on Hessian
##
## Error Analysis:
##           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## mu      5.256e-04  2.391e-04   2.199  0.02789 *
## omega   2.530e-06  8.468e-07   2.988  0.00281 **
## alpha1  1.223e-01  2.077e-02   5.887  3.94e-09 ***
## beta1   8.629e-01  2.185e-02  39.484 < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Log Likelihood:
##   4100.858      normalized:  3.203795
##
## Description:
##   Sun Jan 12 23:41:32 2020 by user: SONIA
##
##
## Standardised Residuals Tests:
##
##           Statistic p-Value
## Jarque-Bera Test  R      Chi^2 175.9425 0
## Shapiro-Wilk Test  R      W      0.9846005 2.072152e-10
## Ljung-Box Test     R      Q(10) 7.204489 0.7060092
## Ljung-Box Test     R      Q(15) 13.43493 0.5687425
## Ljung-Box Test     R      Q(20) 21.69335 0.3573795
```



```
## Ljung-Box Test      R^2 Q(10) 4.950671 0.8944488
## Ljung-Box Test      R^2 Q(15) 5.842275 0.982277
## Ljung-Box Test      R^2 Q(20) 8.832075 0.9847719
## LM Arch Test        R   TR^2  5.175734 0.9518501
##
## Information Criterion Statistics:
##      AIC      BIC      SIC      HQIC
## -6.401341 -6.385233 -6.401360 -6.395292
```

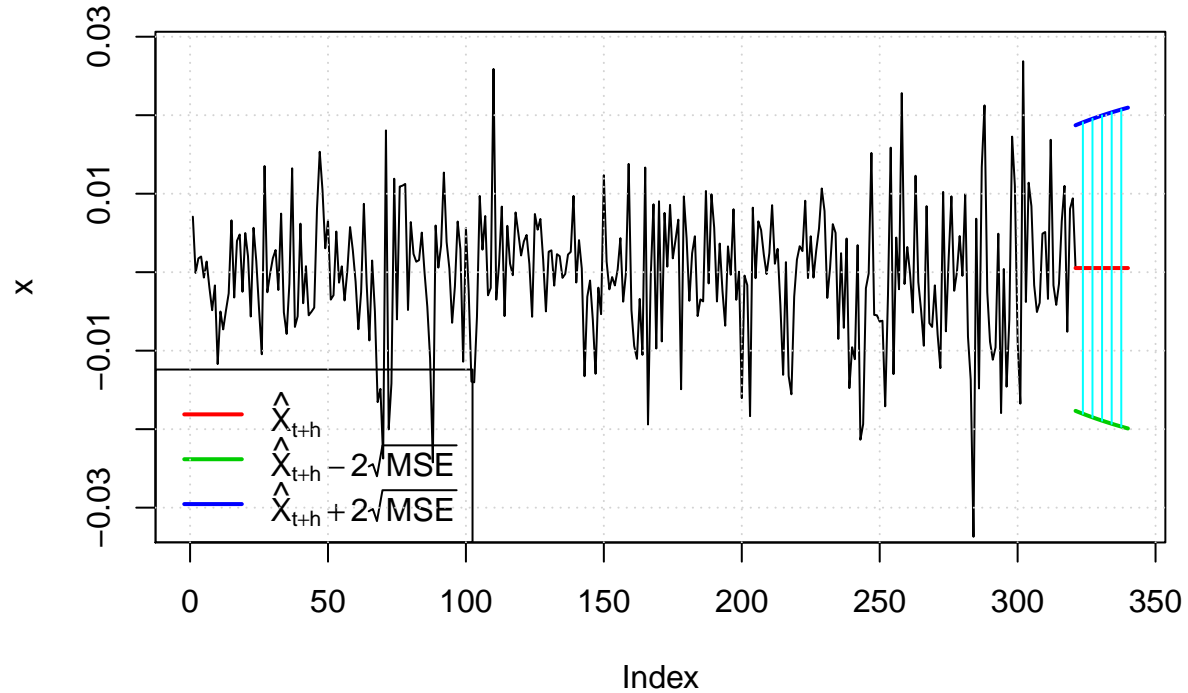
Les résultats des tests sont satisfaisant. Mais on note la non normalité établie par les tests Jarque-Bera et Shapiro-Wilk qui ont tout deux une p-value très faible. L'estimation de la variance marginale est positive et est très faible.

```
## variance marginale : 0.0001705287
```



2.6.3 Prévisions

Prediction with confidence intervals



##	meanForecast	meanError	standardDeviation	lowerInterval	upperInterval
## 1	0.0005256391	0.009095481	0.009095481	-0.01766532	0.01871660
## 2	0.0005256391	0.009166812	0.009166812	-0.01780799	0.01885926
## 3	0.0005256391	0.009236547	0.009236547	-0.01794745	0.01899873
## 4	0.0005256391	0.009304735	0.009304735	-0.01808383	0.01913511
## 5	0.0005256391	0.009371427	0.009371427	-0.01821721	0.01926849
## 6	0.0005256391	0.009436668	0.009436668	-0.01834770	0.01939898
## 7	0.0005256391	0.009500503	0.009500503	-0.01847537	0.01952665
## 8	0.0005256391	0.009562975	0.009562975	-0.01860031	0.01965159
## 9	0.0005256391	0.009624123	0.009624123	-0.01872261	0.01977389
## 10	0.0005256391	0.009683986	0.009683986	-0.01884233	0.01989361
## 11	0.0005256391	0.009742602	0.009742602	-0.01895956	0.02001084
## 12	0.0005256391	0.009800005	0.009800005	-0.01907437	0.02012565
## 13	0.0005256391	0.009856229	0.009856229	-0.01918682	0.02023810
## 14	0.0005256391	0.009911308	0.009911308	-0.01929698	0.02034825
## 15	0.0005256391	0.009965271	0.009965271	-0.01940490	0.02045618
## 16	0.0005256391	0.010018150	0.010018150	-0.01951066	0.02056194
## 17	0.0005256391	0.010069973	0.010069973	-0.01961431	0.02066558
## 18	0.0005256391	0.010120767	0.010120767	-0.01971589	0.02076717
## 19	0.0005256391	0.010170559	0.010170559	-0.01981548	0.02086676
## 20	0.0005256391	0.010219376	0.010219376	-0.01991311	0.02096439

2.7 Conclusion

Dans la première phase de l'étude, on a pu valider des modèles de type ARIMA ou SARIMA sur les données mensuelles. La modélisation obtenue, s'est avérée être un outil intéressant dans l'élaboration d'un stress test, pour aider à la définition de chocs à la hausse et à la baisse. On a pu aussi constater que ces modèles ne sont pas adaptés aux séries financières type CAC40, DAX, SP500... à fréquence journalières. Une étude qui pourrait être intéressante, serait de reprendre la démarche avec des séries à fréquence hebdomadaire. Il ressort aussi de cette étude, et c'est une constatation qui revient fréquemment dans les différents ouvrages sur le sujet, que les modèles de type ARIMA ne paraissent pas bien adaptés à ce type de données journalières, en particulier pour capter l'hétéroscédasticité inhérente aux séries financières.

La deuxième phase de l'étude a permis de vérifier que d'autres types de modèles, les modèles de type GARCH sont plus appropriés. Le package R utilisé fGarch s'est avéré bien adapté et mérite un approfondissement, tout comme les ouvrages principaux cités en référence. Par ailleurs les modèles GARCH peuvent être combinés à des modèles ARMA, et semblent former une classe de modèles bien adaptés au sujet. Il s'avère aussi que ces modèles sont aussi utilisés pour modéliser les produits (courbes) de taux d'intérêts. Ils formeraient donc un cadre idéal pour notre sujet d'élaboration de méthodes d'aide à la décision pour la mise en place de stress-tests ainsi que pour la constitution de proxy pour modéliser les classes d'actifs constituant un portefeuille financier.

Un autre aspect intéressant et complémentaire est l'étude des événements extrêmes sur les données financières. Cet aspect est abordé dans le document D4. Cette autre approche permettrait d'aborder d'autres types de scénarios (stress-tests) économiques, de type crise financière. A noter que dans le livre B2 il est présenté une étude très intéressante du contexte de la crise des subprime de 2008 et de son effet sur le CAC40, cette fois ci dans le cadre des modèles GARCH.

3 Références

Books :

- (B1) Statistics of financial Markets (J. Franke, W.K. Härdle, C. M. Hafner)
- (B2) Series-Temporelles-avec-R-methodes et cas (Y. Aragon)

Documents:

- (D1) Cours de séries temporelles théorie et applications - (A. Charpentier)
- (D2) Modèles de prévision Séries temporelles - (A. Charpentier)
- (D3) Modèles GARCH et à volatilité stochastique (Christian. Francq)
- (D4) Séries Temporelles et test d'adéquation d'un modèle GARCH(1,1) (Y. Djabrane)
- (D5) Time Series Analysis with ARIMA – ARCH/GARCH model in R (L-Stern Group - Ly Pham)

4 Annexes

4.1 Annexes - partie I

4.1.1 Statistiques - qualité d'estimation des coefficients.

SARIMA(1,1,1)(0,1,1) :

```
##          ar1          ma1          sma1
## t.stat  2.441972 -23.74509 -7.446865
## p.val   0.014607  0.00000  0.000000
```

SARIMA(0,1,2)(0,1,1) :

```
##          ma1          ma2          sma1
## t.stat -10.12399 -2.447916 -7.466775
## p.val   0.00000  0.014369  0.000000
```

SARIMA(1,1,1)(0,1,2) :

```
##          ar1          ma1          sma1          sma2
## t.stat  2.380009 -23.14191 -6.638139  0.729410
## p.val   0.017312  0.00000  0.000000  0.465751
```

SARIMA(1,1,2)(0,1,1) :

```
##          ar1          ma1          ma2          sar1          sma1
## t.stat  0.521659 -2.890177 -0.167427 -0.723238 -2.870492
## p.val   0.601908  0.003850  0.867034  0.469534  0.004098
```

SARIMA(2,1,2)(0,1,1) :

```
##          ar1          ar2          ma1          ma2          sma1
## t.stat -3.435100  2.674158 -0.528898 -5.095158 -7.523646
## p.val   0.000592  0.007492  0.596876  0.000000  0.000000
```

SARIMA(2,1,2)(0,1,1) :

```
##          ar1          ar2          ma1          sma1
## t.stat  2.411968 -0.287502 -20.62754 -7.458516
## p.val   0.015867  0.773728  0.00000  0.000000
```

4.1.2 Corrélations - entre processus AR et MA

SARIMA(1,1,1)(0,1,1) :

```
##          ar1          ma1          sma1
## ar1   1.0000000 -0.4852660 -0.1182038
## ma1  -0.4852660  1.0000000 -0.0928834
## sma1 -0.1182038 -0.0928834  1.0000000
```

SARIMA(0,1,2)(0,1,1) :

```
##          ma1          ma2          sma1
## ma1  1.0000000 -0.80388631 -0.17532237
## ma2 -0.8038863  1.00000000  0.09559027
## sma1 -0.1753224  0.09559027  1.00000000
```

SARIMA(1,1,1)(0,1,2) :

```
##          ar1          ma1          sma1          sma2
## ar1  1.00000000 -0.49600612 -0.06105877 -0.06824537
## ma1 -0.49600612  1.00000000 -0.11872741  0.07391491
## sma1 -0.06105877 -0.11872741  1.00000000 -0.48889947
## sma2 -0.06824537  0.07391491 -0.48889947  1.00000000
```

SARIMA(1,1,2)(0,1,1) :

```
##          ar1          ma1          ma2          sar1          sma1
## ar1  1.00000000 -0.96848841  0.95785668 -0.03323734  0.01523959
## ma1 -0.96848841  1.00000000 -0.99025973  0.04521456 -0.04737931
## ma2  0.95785668 -0.99025973  1.00000000 -0.05279417  0.04692459
## sar1 -0.03323734  0.04521456 -0.05279417  1.00000000 -0.86340116
## sma1  0.01523959 -0.04737931  0.04692459 -0.86340116  1.00000000
```

SARIMA(2,1,2)(0,1,1) :

```
##          ar1          ar2          ma1          ma2          sma1
## ar1  1.00000000  0.25137615 -0.91158356  0.82084098  0.04735981
## ar2  0.25137615  1.00000000  0.04539109 -0.23962854 -0.16985606
## ma1 -0.91158356  0.04539109  1.00000000 -0.91073926 -0.13365536
## ma2  0.82084098 -0.23962854 -0.91073926  1.00000000  0.09669396
## sma1  0.04735981 -0.16985606 -0.13365536  0.09669396  1.00000000
```

SARIMA(2,1,2)(0,1,1) :

```
##          ar1          ar2          ma1          sma1
## ar1  1.00000000  0.04573990 -0.46680107 -0.12264148
## ar2  0.0457399  1.00000000 -0.41921113  0.02816471
## ma1 -0.4668011 -0.41921113  1.00000000 -0.08582669
## sma1 -0.1226415  0.02816471 -0.08582669  1.00000000
```

4.1.3 Vraies valeurs année 1980 et prédictions

- Vraies valeurs Année 1980

```
##          Jan  Feb  Mar  Apr  May  Jun  Jul  Aug  Sep  Oct  Nov  Dec
## 1980 2848 2913 3248 3250 3375 3640 3771 3259 3206 3269 3181 4008
```

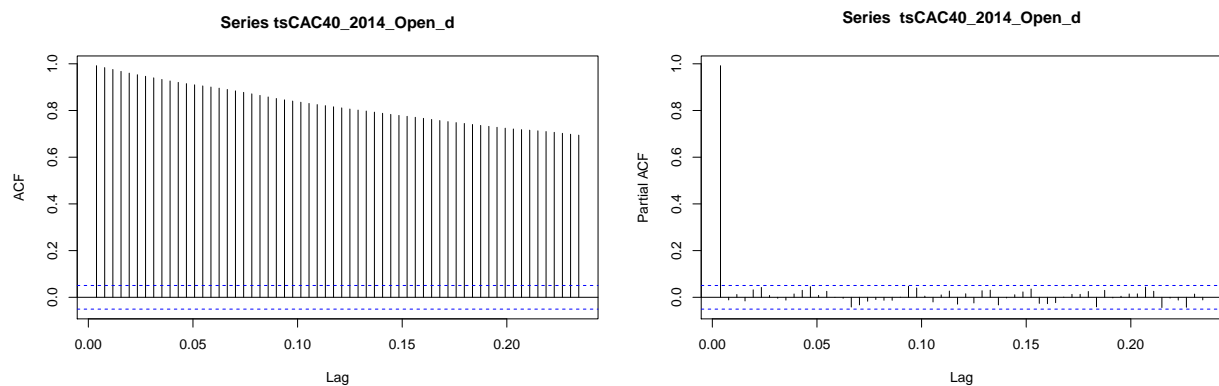
- Prédictions SARIMA(1,1,1)(0,1,1)

##	Point Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
## Jan 1980	3176.918	3021.002	3332.833	2938.466	3415.369
## Feb 1980	2847.791	2684.491	3011.092	2598.045	3097.538
## Mar 1980	3122.217	2956.723	3287.710	2869.116	3375.317
## Apr 1980	3370.292	3203.281	3537.303	3114.871	3625.713
## May 1980	3393.392	3224.993	3561.791	3135.848	3650.936
## Jun 1980	3741.669	3571.916	3911.422	3482.054	4001.283
## Jul 1980	3986.431	3815.340	4157.523	3724.769	4248.093
## Aug 1980	3385.328	3212.908	3557.747	3121.635	3649.020
## Sep 1980	3046.176	2872.439	3219.912	2780.469	3311.882
## Oct 1980	3167.998	2992.955	3343.042	2900.293	3435.704
## Nov 1980	3102.021	2925.680	3278.361	2832.330	3371.711
## Dec 1980	3674.376	3496.747	3852.005	3402.716	3946.036

4.2 Annexes - Partie II

4.2.1 Etude de la stationnarité

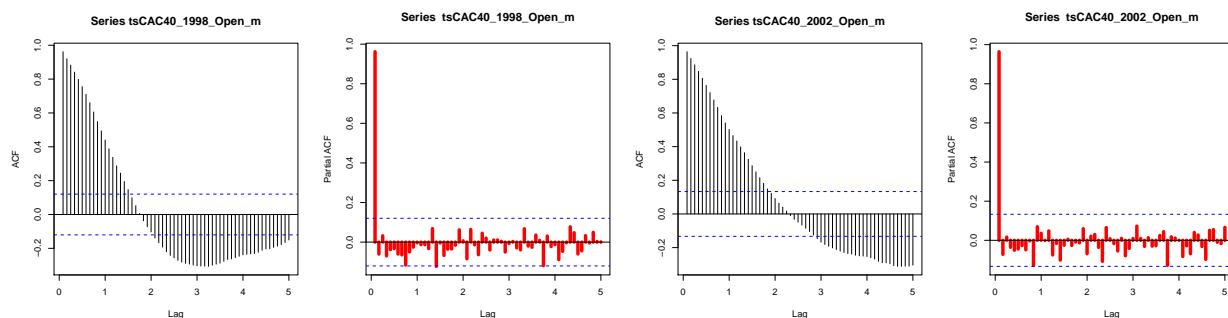
- Fonction d'autocorrélation ACF et PACF pour les séries journalières 2014

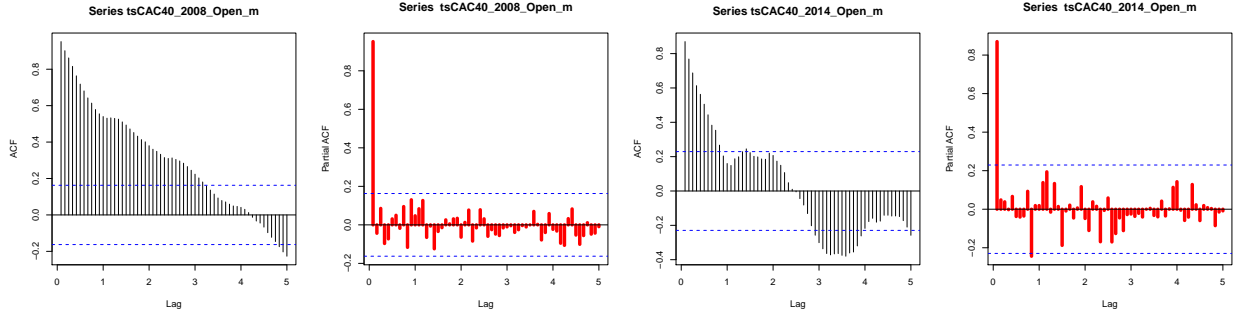


On constate que la série ne semble pas être stationnaire.

On confirme cette hypothèse à l'aide d'un test de *Dickey – Fuller* on $p_value=0.2639764$.

- Fonction d'autocorrélation ACF et PACF pour les séries mensuelles





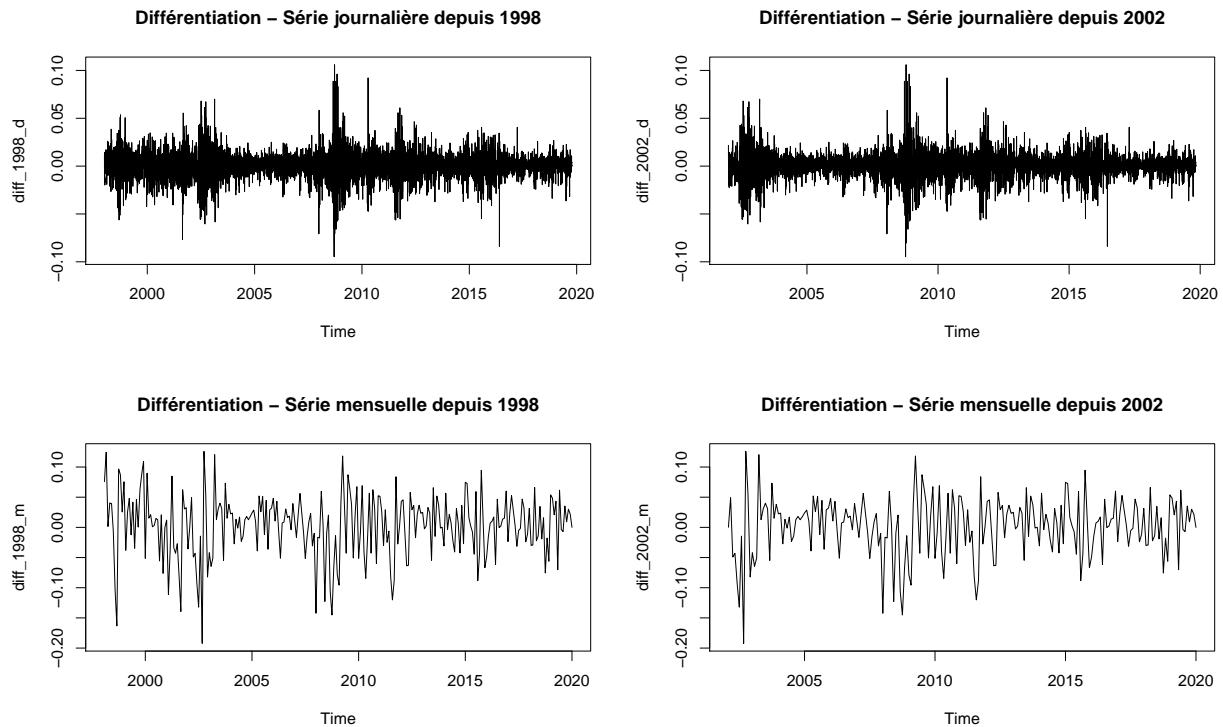
Là aussi on constate que les variables sont liées entre elles, i.e. les données ne semblent pas être stationnaires. On confirme cette hypothèse à l'aide d'un test de *Dickey – Fuller*.

série	Dickey-Fuller	Lag order	p-value
1998	-2.3092612	6	0.4456761
2002	-2.1857017	5	0.4980833
2008	-4.2978772	5	0.01
2014	-2.1515395	4	0.5136323

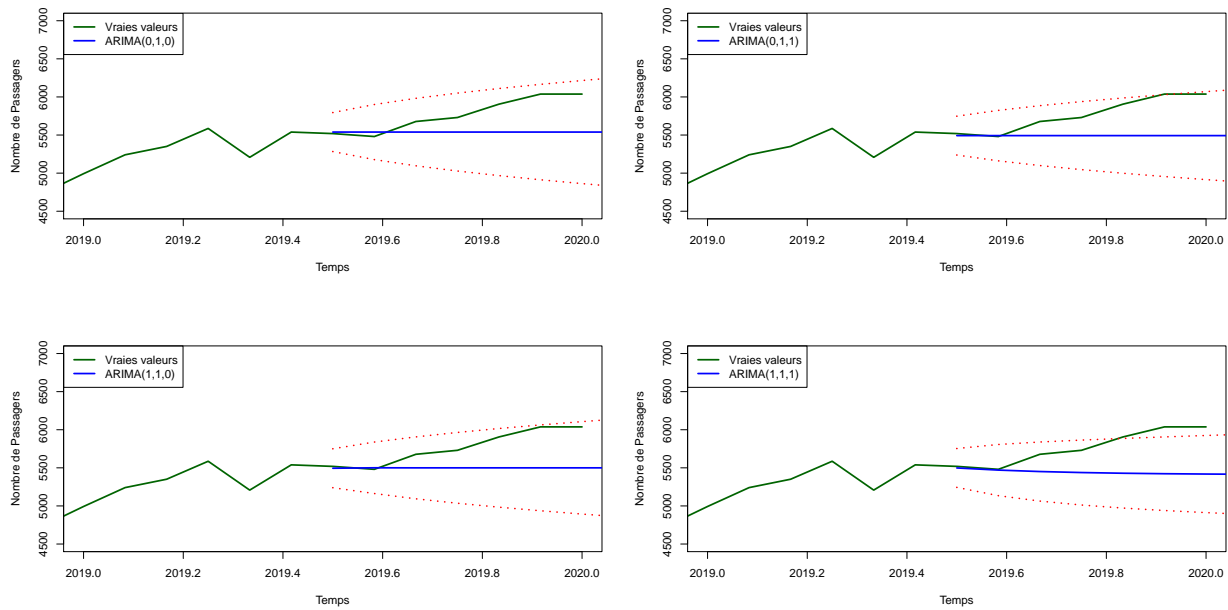
La p-valeur de ce test est importante et confirme donc que les données ne sont pas stationnaires. Il y a une exception cependant pour la série 2008.

4.2.2 Stationnarisation des processus par différentiation des séries

- Séries obtenues par différentiation pour les 2 jeux de données quotidien et mensuel à partir de 1998 et 2002



4.2.3 Prédiction à partir des modèles ARIMA issues des séries mensuelles 2014



4.2.4 Modélisation GARCH(1,1) à partir de la fonction *garch*

```
##
## ***** ESTIMATION WITH ANALYTICAL GRADIENT *****
##
##
##      I      INITIAL X(I)      D(I)
##
##      1      1.073379e-04      1.000e+00
##      2      5.000000e-02      1.000e+00
##      3      5.000000e-02      1.000e+00
##
##      IT      NF      F      RELDF      PRELDF      RELDX      STPPAR      D*STEP      NPRELDF
##      0      1 -5.158e+03
##      1      7 -5.158e+03 4.60e-05 5.32e-04 1.0e-04 2.7e+10 1.0e-05 7.31e+06
##      2      8 -5.159e+03 1.07e-04 1.23e-04 4.9e-05 2.0e+00 5.0e-06 8.52e+00
##      3      9 -5.159e+03 1.38e-06 1.31e-06 5.0e-05 2.0e+00 5.0e-06 8.58e+00
##      4      17 -5.176e+03 3.28e-03 4.71e-03 4.5e-01 2.0e+00 8.2e-02 8.56e+00
##      5      20 -5.207e+03 6.03e-03 4.54e-03 7.4e-01 1.9e+00 3.3e-01 5.14e-01
##      6      22 -5.217e+03 1.86e-03 1.62e-03 7.9e-02 2.0e+00 6.6e-02 8.25e+01
##      7      24 -5.238e+03 4.02e-03 3.78e-03 1.3e-01 2.0e+00 1.3e-01 3.34e+03
##      8      26 -5.242e+03 8.13e-04 8.19e-04 2.2e-02 2.0e+00 2.6e-02 2.80e+05
##      9      32 -5.242e+03 3.22e-05 7.96e-05 7.7e-07 4.5e+02 9.2e-07 6.83e+01
##     10      33 -5.242e+03 1.09e-06 1.10e-06 7.5e-07 2.0e+00 9.2e-07 1.64e+01
##     11      43 -5.256e+03 2.50e-03 4.45e-03 1.1e-01 2.0e+00 1.5e-01 1.64e+01
##     12      44 -5.256e+03 2.47e-05 2.32e-03 1.7e-02 0.0e+00 2.8e-02 2.32e-03
##     13      45 -5.262e+03 1.16e-03 9.19e-04 9.3e-03 1.4e+00 1.4e-02 9.82e-04
##     14      46 -5.264e+03 3.37e-04 5.03e-04 8.2e-03 1.7e+00 1.4e-02 2.30e-03
##     15      49 -5.267e+03 6.94e-04 6.19e-04 4.2e-02 0.0e+00 8.0e-02 6.19e-04
```



```
##      16      50 -5.270e+03  4.76e-04  1.05e-03  3.7e-02  5.9e-01  8.0e-02  1.12e-03
##      17      51 -5.270e+03  6.31e-05  2.35e-04  2.1e-02  0.0e+00  4.6e-02  2.35e-04
##      18      53 -5.270e+03  3.64e-05  9.97e-05  2.1e-03  1.3e+00  3.6e-03  1.22e-04
##      19      54 -5.270e+03  3.21e-05  3.16e-05  1.6e-03  1.7e+00  3.6e-03  5.12e-05
##      20      55 -5.271e+03  1.54e-05  1.71e-05  3.1e-03  8.1e-01  7.2e-03  2.89e-05
##      21      56 -5.271e+03  5.82e-06  7.27e-06  3.3e-03  0.0e+00  7.2e-03  7.27e-06
##      22      57 -5.271e+03  3.63e-07  4.49e-07  4.0e-04  0.0e+00  7.0e-04  4.49e-07
##      23      58 -5.271e+03  1.51e-08  8.52e-09  7.3e-05  0.0e+00  1.3e-04  8.52e-09
##      24      59 -5.271e+03 -6.27e-10  9.49e-11  1.3e-05  0.0e+00  2.9e-05  9.49e-11
##
## ***** RELATIVE FUNCTION CONVERGENCE *****
##
## FUNCTION      -5.270601e+03      RELDX      1.280e-05
## FUNC. EVALS      59      GRAD. EVALS      24
## PRELDF      9.493e-11      NPRELDF      9.493e-11
##
##      I      FINAL X(I)      D(I)      G(I)
##
##      1      2.492218e-06      1.000e+00      3.602e+02
##      2      1.162629e-01      1.000e+00      1.201e-02
##      3      8.683131e-01      1.000e+00      -2.351e-02
```

```
summary(cac.garch)
```

```
##
## Call:
## garch(x = cac40.Rendement.Train)
##
## Model:
## GARCH(1,1)
##
## Residuals:
##      Min      1Q  Median      3Q      Max
## -5.42749 -0.56405  0.03621  0.61358  4.77379
##
## Coefficient(s):
##      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## a0 2.492e-06  5.875e-07  4.242 2.22e-05 ***
## a1 1.163e-01  1.169e-02  9.948 < 2e-16 ***
## b1 8.683e-01  1.340e-02  64.823 < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Diagnostic Tests:
## Jarque Bera Test
##
## data: Residuals
## X-squared = 177.03, df = 2, p-value < 2.2e-16
##
## Box-Ljung test
##
## data: Squared.Residuals
## X-squared = 0.0064225, df = 1, p-value = 0.9361
```

4.2.5 GARCH(1,1) Validation du modèle obtenu à partir de la fonction *garch*

```
##  
## Box-Pierce test  
##  
## data: cac.garch$residuals  
## X-squared = 21.059, df = 20, p-value = 0.3937
```

On regarde les tests classiques de normalités dans le cadre des données mensuelles.

```
##  
## Shapiro-Wilk normality test  
##  
## data: cac.garch$residuals  
## W = 0.98438, p-value = 1.679e-10  
  
##  
## Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test  
##  
## data: cac.garch$residuals  
## D = 0.039439, p-value = 7.807e-05
```

