



**Mémoire présenté
devant l’Institut de Science Financière et d’Assurances
pour l’obtention
du diplôme d’Actuaire de l’Université de Lyon**

le 15 septembre 2009

Par : ADIL RAHIMI Mostafa

Titre: « Les Momentum et leur application dans le cadre des marchés boursiers »

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans 5 ans)

Membre du jury I.A.

M. PLANCHET Frédéric

Entreprise :

ROCHE-BRUNE Asset Management

40 avenue Georges Pompidou

69003 Lyon

Membres du jury I.S.F.A.

M. AUGROS Jean-Claude

M. BIENVENÜE Alexis

Mme EYRAUD-LOISEL Anne

M. LAURENT Jean-Paul

M. LEBOISNE Nicolas

M. LOISEL Stéphane

Mme MAUME-DESCHAMPS Véronique

M. PLANCHET Frédéric

M. QUITTARD-PINON François

Mme REY-FOURNIER Béatrice

M. RULLIERE Didier

Directeur de mémoire :

Alexandre HEZEZ

Invité :

Secrétariat

Mme GARCIA Marie-José

Mme BARTHELEMY Diane

M. BRIAS Samy

Mme BRUNET Marie-Christine

Mme GHAZOUANI Sondès

M. HUET Jean-Daniel

Mme MOUCHON Marie-Claude

Bibliothèque :

Mme SONNIER Michèle

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement les personnes qui m'ont aidé et encouragé pour réaliser ce mémoire :

*Je remercie Alexandre Hezez,
de m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet.*

*Je remercie Veronique Maume Deschamps,
pour son suivi pédagogique,
et pour son temps qu'elle a consacré à me conseiller,
et à lire et relire les différentes versions de ce mémoire.*

*Je remercie Anne Loisel,
pour son soutien et des conseils qu'elle a su me donner durant les moments difficiles.*

*Je remercie également toutes les personnes
qui ont participé directement ou indirectement
à la réalisation de ce mémoire.*

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est de faire une introduction aux Momentums. Ces derniers occupent une place de plus en plus importante, et sont aujourd'hui utilisés par différents acteurs financiers et sur des différents actifs.

Ainsi, à travers ce mémoire, on présentera une liste non exhaustive des momentums et on abordera les problèmes liés à leur utilisation. On introduira alors les séries temporelles, et plus particulièrement les modèles ARMA/(G)ARCH. On comparera le rendement et le niveau de risque obtenus à l'aide de ces différentes méthodes.

Abstract :

The aim of this study is to introduce Momentums. Momentums became more and more important, and they are used by various financial actors and on various assets.

So, through this paper, we will present a not exhaustive list of momentums and we will approach the problems linked to their use. We will introduce then the temporal series, and more particularly ARMA/(G)ARCH models. We will compare the return and the level of risk obtained thanks to these various methods.

Mots clés : Momentum, analyse techniques, indicateurs de puissances, oscillateurs, tendance, prévision, surachat, survente, ROC, MACD, Bandes de Bollinger, RSI, ARMA, ARCH, GARCH, lissage exponentiel, rendement, volatilité, portefeuille, valeurs, risque.

Table des matières

1 Les indicateurs de puissances	2
1.1 Quelques précisions d'ordre général	2
1.1.1 Le momentum basique	2
1.1.2 La représentation graphique	3
1.1.3 Autres précisions	3
1.2 Les signaux donnés par les oscillateurs	4
1.2.1 L'analyse de surachat/survente	4
1.2.2 Les divergences	5
1.3 Les oscillateurs simples non bornés	7
1.3.1 Rate Of Change (ROC)	7
1.3.2 Moving Average Convergence Divergence (MACD)	10
1.4 Les oscillateurs simples bornés	12
1.4.1 Indicateur de force relative (RSI)	12
1.4.2 Les indicateurs stochastiques	13
1.5 D'autres momentums	14
1.5.1 Les bandes de Bollinger	14
1.5.2 Mais aussi beaucoup d'autres	16
2 Choix des momentums	17
2.1 La corrélation entre les prix et les momentums	17
2.1.1 Présentation des données	17
2.1.2 Méthode de calcul	18
2.1.3 Présentation des résultats	19
2.2 Analyse des données	19
2.2.1 Présentation des données	20
2.2.2 Données centrées et normées	21
2.2.3 Les axes principaux	23
2.3 Les faiblesses de l'analyse technique	24
2.3.1 Le passé peut-il servir à prévoir l'avenir?	25
2.3.2 L'auto-accomplissement des prévisions	25
2.3.3 Le caractère subjectif	25
3 D'autres outils de prévision	27
3.1 Lissage exponentiel	27
3.1.1 introduction	27
3.1.2 Lissage exponentiel simple	28
3.1.3 Lissage exponentiel amélioré	29
3.1.4 Exemple instructif avec CAC40	30
3.2 Les modèles ARMA/ARIMA	33

3.2.1	Les processus ARMA(p,q)	34
3.2.2	Estimation des paramètres	35
3.2.3	Comment prévoir dans un processus ARMA ?	37
3.2.4	Les processus ARIMA et SARIMA	38
3.2.5	Exemple instructif avec CAC40	39
3.3	Les modèles (G)ARCH	50
3.3.1	Les processus ARCH	50
3.3.2	Propriétés des processus ARCH	51
3.3.3	Simulations des processus ARCH	52
3.3.4	Cas pratique avec CAC40	54
3.3.5	Les processus GARCH	57
3.3.6	Propriétés des processus GARCH	58
3.3.7	Exemple instructif avec CAC40	59
3.4	Application pour le choix d'un portefeuille	63
3.4.1	La méthodologie	63
3.4.2	Analyse des portefeuilles	67
3.4.3	Prise en compte du risque	68
3.4.4	Comparaison des différentes méthodes	69
A Annexes		72
A Les différents tests		72
A.1	Test de Box-Pierce ou Ljung-Box (Box)	72
A.2	Test Dickey-Fuller Augmenté (adf)	72
A.3	Test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)	73
A.4	Test de Shapiro	75
B Codes des programmes utilisés		78
B.1	Les momentums	78
B.2	Étude de CAC	79
B.2.1	Lissage exponentiel	79
B.2.2	Le modèle ARMA	80
B.2.3	Le modèle ARCH	81
B.2.4	Le modèle GARCH	83
B.3	Automatisation des prévisions	84
B.3.1	Lissage exponentiel	84
B.3.2	Le modèle ARMA	85
B.3.3	Le modèle ARCH	87
B.3.4	Le modèle GARCH	88

C D'autres définitions et résultats	91
C.1 Le bruit blanc	91
C.2 Les processus stationnaires	91
C.3 Condition d'existance de solution stationnaire	91
C.4 La fonction d'auto-covariance	92
C.5 La fonction d'auto-corrélation	92
C.6 La fonction d'auto-corrélation partielle	92
C.7 L'estimateur de la fonction d'auto-covariance	93
C.8 L'estimateur de la fonction d'auto-corrélation	93
C.9 L'estimateur de la fonction d'auto-corrélation partielle	94
C.10 Théorème de Wold	94

Introduction

Aujourd’hui, les marchés nationaux et internationaux sont particulièrement volatils, reflétant l’éclatement de la bulle "nouvelle économie" (excès d’endettement et de valorisation), l’endettement excessif de certaines grandes entreprises, la crise de confiance dans les informations financières (provoquée par les affaires du type Enron ou encore très récemment les crises de subprimes par exemple), *etc.* Cette volatilité apparaît donc comme la conséquence plus que la cause de l’instabilité, et pourquoi pas du dynamisme des marchés financiers et de l’économie réelle.

Cette volatilité constitue la "matière première" d’une bonne partie des activités des marchés, dans lesquels les opérateurs de marché cherchent à maximiser le rendement des portefeuilles. Ne connaissant pas à l’avance l’évolution du marché, les traders ont recours à des outils techniques afin de détecter des indices annonçant un éventuel changement de tendance des marchés. C’est dans cet optique qu’intervient l’utilisation des momentum.

Les momentum permettent de travailler techniquement de nombreux actifs financiers, tels que les devises, les obligations, les actions, et bien beaucoup d’autres. Ils ont fait leurs preuves auprès des opérateurs de marché, et sont aujourd’hui utilisé par tout le monde, notamment grâce aux évolutions des ordinateurs, capables désormais de donner presque instantanément le résultat des calculs d’un indicateur des momentum.

Néanmoins, leur utilisation peut être mise en cause. En effet, même si en pratique ils ont fait leur preuve, au niveau théorique leur utilisation n'est pas justifiée. Leur interprétation est plus subjective qu'objective. C'est pourquoi, il ne faut pas s'arrêter à leur utilisation, mais de chercher un outil encore plus fiable et surtout justifié théoriquement. C'est dans ce cadre qu'on introduira l'utilisation des séries temporelles en finance des marchés.

On commencera dans un premier temps par une présentation non exhaustive des indicateurs de momentum. Dans un deuxième temps, on essayera d'en retenir les meilleurs selon les critères qu'on se fixera. Dans un troisième temps, on introduira les séries temporelles, notamment à travers des modèles *ARMA* et *(G)ARCH*. On comparera alors ces modèles aux indicateurs de momentum à l'aide d'une application pratique de choix de portefeuilles.

1 Les indicateurs de puissances

Qu'appelle-t-on momentum ? En effet, sur un marché organisé, les prix des actifs sont essentiellement influencés par des facteurs psychologiques, tels qu'une réaction suite à une décision de l'Etat, à une publication des comptes financiers, *etc.*... Ce phénomène a pour conséquence des variations plus ou moins importantes des prix. Le momentum est un terme générique, utilisé pour décrire la vitesse à laquelle se déplacent les prix dans un intervalle de temps donné. C'est un des outils techniques les plus utilisés non seulement par les opérateurs de marché (*traders*), mais également par les investisseurs. Ils permettent de détecter un renversement possible de la tendance des prix.

Les momentum peuvent être appliqués à des actifs très variés tels que les devises, les matières premières, les obligations, les actions, les indices sur actions, des métaux précieux, *etc.*...

1.1 Quelques précisions d'ordre général

1.1.1 Le momentum basique

Lorsqu'on parle de momentum, on se réfère à plusieurs indicateurs différents tels que "Rate Of Change" (ROC), l'indicateur de force relative (RSI), la Stochastique, et bien d'autres. Le momentum le plus basique est le suivant :

$$M(t) = \text{Prix}(t) - \text{Prix}(t - h)$$

où $M(t)$ est le momentum au temps t , $\text{Prix}(t)$ le prix au temps t du sous-jacent analysé et h l'horizon de temps considéré.

En pratique, on n'utilise jamais un seul indicateur. En effet, tout indicateur peut être défaillant à un moment donné ou un autre. C'est pourquoi, sur les marchés, on utilise plusieurs indicateurs afin de déterminer la tendance des prix. Lorsque plusieurs de ces indicateurs sont en accord, on peut avoir plus de confiance quand à la réalisation de la prédiction des tendances.

Il existe plusieurs types de tendances. Nous considérons trois types de tendances : à court terme, à moyen terme et à long terme. Elles durent respectivement de 3 à 6 semaines, de 6 à 39 semaines et de 1 à 2 ans. Remarquons que la tendance à long terme est beaucoup plus significative que la tendance à court ou moyen terme. De ce point de vue, les tendances à court terme, et dans une moindre mesure, les tendances à moyen terme, ne sont que des variations autour de la tendance à long terme.

1.1.2 La représentation graphique

Afin de rendre la lecture plus facile, la courbe d'un indicateur de momentum est tracée au-dessous de celle des prix, comme on peut le constater sur la figure suivante obtenue à l'aide des données concernant le *CAC40* et issues de *Yahoo* :

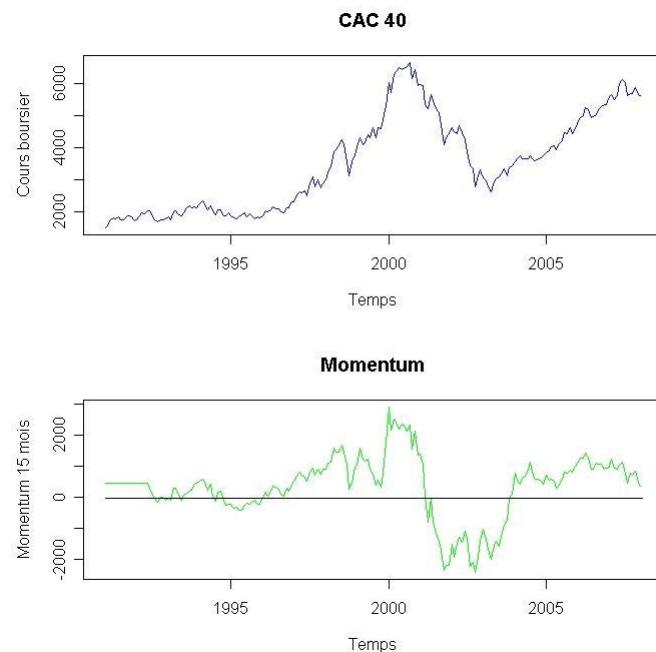


FIGURE 1 – Exemple de momentum (le momentum basique)

Parfois, deux ou plusieurs indicateurs sont représentés sur le même graphe afin de comparer des différents type d'indicateurs entre eux, ou des différent horizons de temps.

Comme ces indicateurs oscillent autours d'une ligne d'équilibre, ou entre deux lignes données, on les appelle également des **oscillateurs**.

1.1.3 Autres précisions

Avant d'entrer dans les détails de l'interprétation d'un momentum, n'oublions pas qu'il n'est rien d'autre qu'un indicateur de la tendance des prix. Ceci implique qu'un renversement de la tendance d'un momentum n'entraîne pas automatiquement le renversement de la tendance des prix. Le renversement de l'indicateur de momentum ne sera qu'un indice annonçant un possible renversement des prix.

Les spécificités et l'amplitude d'un momentum dépendent notamment de trois choses. Tout d'abord, elles dépendent de la nature de la formule de construction de l'oscillateur. Plus la formule utilise des techniques de lissage des données, telles que les moyennes mobiles par exemple, moins le momentum sera volatile. Ensuite, elles dépendent de la volatilité de l'actif sous-jacent analysé. En effet, si l'actif est très volatile, le momentum le sera aussi bien évidemment. De même, si l'actif est peu volatile, alors le momentum a tendance à avoir le même comportement. Et enfin, les spécificités et l'amplitude d'un momentum dépendent de l'horizon de temps utilisé dans la formule de calcul.

1.2 Les signaux donnés par les oscillateurs

1.2.1 L'analyse de surachat/survente

Commençons tout d'abord par l'analyse des périodes de surachat et de survente : on fixe deux valeurs extrêmes sur les graphes des momentum, une maximale et une minimale, de sorte que le momentum puisse les atteindre et les dépasser, mais avec une fréquence plutôt faible. On considère alors que si le momentum est au-dessus de la valeur maximale, alors il y a surachat *i.e.* le sous-jacent est surévalué par le marché par rapport à son historique des prix. De même, si le momentum est au-dessous de la valeur minimale, alors il y a survente, *i.e.* le sous-jacent est sous-évalué par le marché par rapport à son historique des prix. Les lignes de surachat et survente indiquent des points permettant d'anticiper des retournements de tendance. Le graphe suivant donne un exemple de momentum avec des lignes de surachat et de survente.

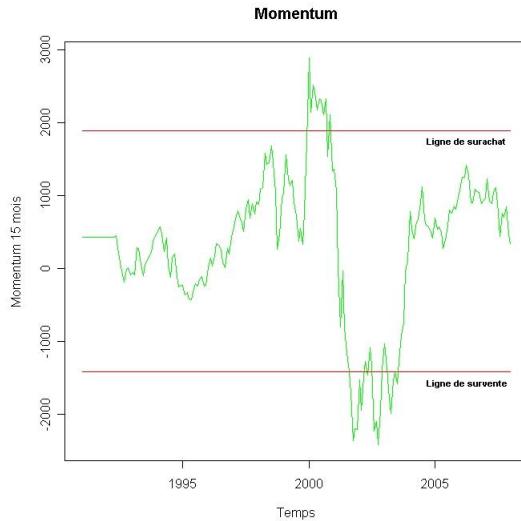


FIGURE 2 – surachat/survente

Il s'agit d'un momentum d'horizon 15 mois, *i.e.* à moyen terme. On s'est fixé des niveaux de surachat et de survente. On constate alors deux points intéressants : il y a eu un surachat vers 2001 et une survente entre 2002 et 2003.

En pratique, suivant le momentum calculé, les niveaux de surachat et de survente sont fixés communément. Cependant, ces niveaux peuvent ne pas être adéquats, car ils peuvent être atteints trop souvent par le momentum, ou bien au contraire, très rarement. Dans ces cas, ces niveaux sont réajustés visuellement. Néanmoins, on peut utiliser par exemple les quantiles pour déterminer un juste niveau. Dans l'exemple ci-dessus, les niveaux de survente et de surachat sont assez proches des quantiles de 10% et 90%.

1.2.2 Les divergences

Concernant la divergence[5], lorsque les prix et le momentum évoluent dans le même sens, on considère que la tendance des prix se poursuit. Cependant, lorsque les prix et le momentum évoluent dans le sens opposé, on considère que la tendance des prix est probablement sur le point de se retourner. Dans ce cas, il y a deux cas possibles : soit les prix ont une tendance haussière, et l'indicateur de momentum une tendance baissière, on parle alors de *divergence négative*. Soit les prix ont une tendance baissière, et l'indicateur de momentum une tendance haussière, on parle alors de *divergence positive*.

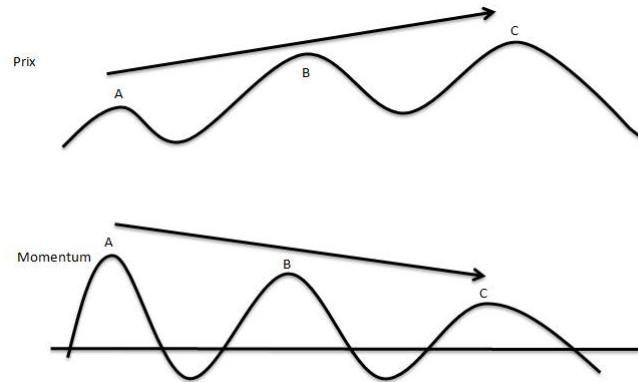


FIGURE 3 – Divergence entre le prix et son momentum

Sur cette figure, on a représenté une divergence négative. On constate que même si les prix ont tendance à avoir une évolution haussière, leur momentum a une tendance baissière, ce qui représente un avertissement sur une chute éventuelle des prix. Cette divergence indique seulement une amélioration ou détérioration des marchés, mais ne peut pas en elle-même indiquer un renversement de tendance.

Le renversement de la tendance est obtenu à l'aide des droites de tendance :

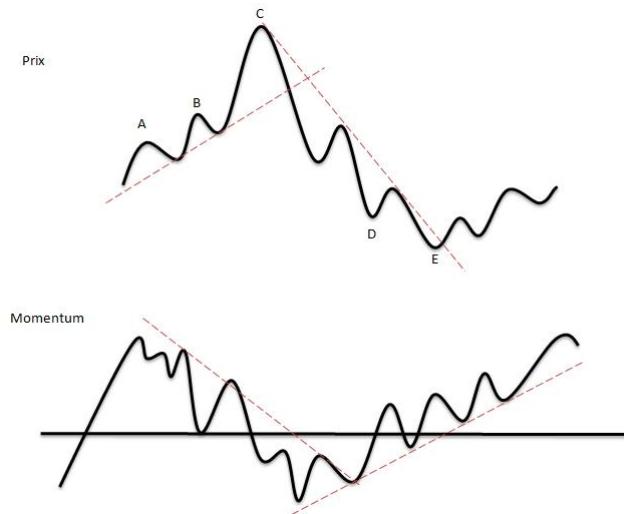


FIGURE 4 – Les droites de tendance

On admet que lorsqu'il y a une divergence entre les prix et la droite des momentums, si la droite de tendance des prix croise la courbe des prix et si la droite de tendance des momentums croise la courbe des momentums, alors il y a une forte probabilité qu'il y est un renversement de la tendance. C'est ce qu'on observe sur le graphe, juste après le point C.

La signification de la droite de tendance est proportionnelle aux points suivants :

- sa durée
- nombre de fois ou elle a été touchée ou approchée par les prix
- angle que forme sa pente

Dans le cadre de ce mémoire, on se limitera au cas des niveaux surachat et de survente.

1.3 Les oscillateurs simples non bornés

1.3.1 Rate Of Change (ROC)

ROC est un des indicateurs les plus simples à mettre en œuvre. Cependant, cela ne veut pas dire qu'il serait moins efficace que des indicateurs faisant intervenir des relations mathématiques complexes. Bien au contraire, cet indicateur est considéré comme un des plus efficaces.

Il se construit de la façon suivante :

$$ROC(t) = 100 * Prix(t)/Prix(t - h)$$

ou une autre version qu'on trouve dans certains livres :

$$ROC(t) = Prix(t) - Prix(t - h)$$

Ici $ROC(t)$ représente le "Rate Of Change" au temps t , $Prix(t)$ le prix au temps t du sous-jacent analysé et h l'horizon de temps considéré. La première méthode de calcul de ROC est appelée la méthode de division, et la seconde, la méthode de différence (ou momentum basique). On préfère la méthode de division, car elle permet de comparer plusieurs actifs entre eux, mais aussi de comparer un actif avec lui-même dans le temps.

Par convention, dans le cas de la méthode de division, la valeur de ROC est exprimée en terme de pourcentage. Cet indicateur ne possède pas de bornes. Il est donc théoriquement impossible d'avoir des niveaux de surachat et de survente. En pratique, on essaye de placer ces niveaux d'achat et de vente de telle sorte qu'ils englobent un nombre conséquent de maximums de pics et de creux, sans les inclure tous. Très souvent, la ligne de surachat est placée à 120% et la ligne de survente à 80%.

A titre d'exemple, traçons le ROC du CAC40, en prenant un horizon de 2 mois. On prend dans cet exemple des niveaux de surachat et de survente respectivement à 115% et 85%.

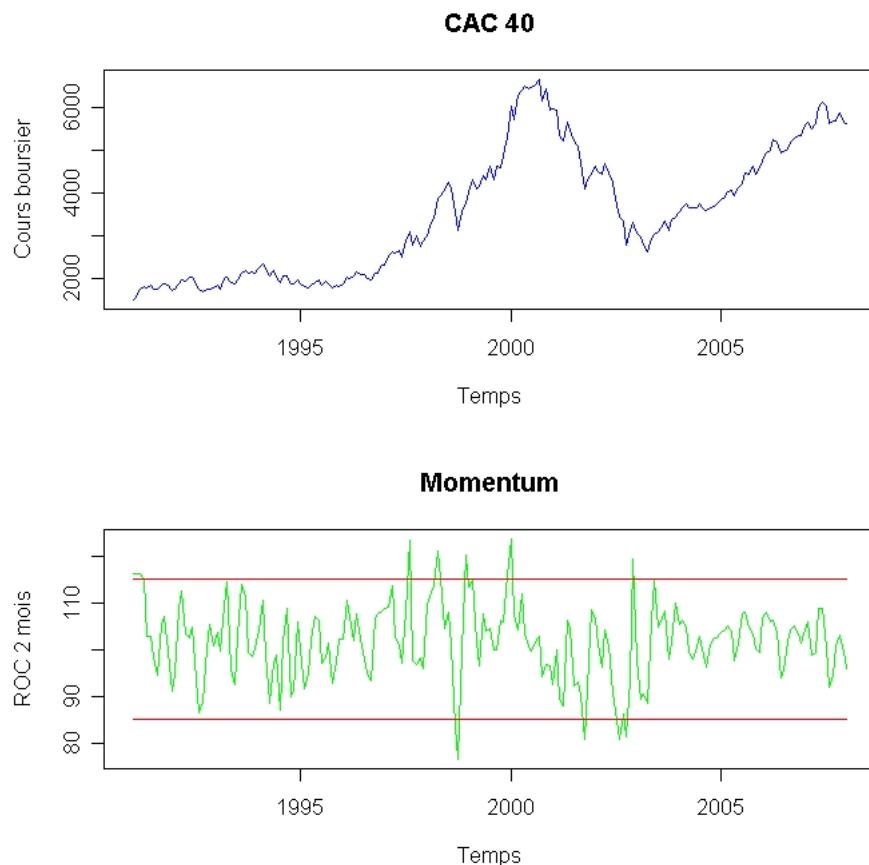


FIGURE 5 – CAC40 et son momentum 2 mois

On remarque que juste après l'année 2000, il y a eu un surachat, signe que le cours allait baisser. De même, entre 2002 et 2003, il y a eu une survente, signalant que les prix allaient augmenter. On constate qu'effectivement, ces deux remarques se confirment par la suite.

Remarquons également que les deux paramètres cités ci-dessous sont fixés sans une véritable justification :

- l'horizon de temps h
- les niveaux de surachat et de survente

Concernant le premier point, cela dépend bien évidemment de ce qu'on recherche, i.e. des tendances à court terme (3 à 6 semaines), des tendances à moyen terme (6 à 39 semaines) ou bien des tendances à long terme (1 à 2 ans). De plus, on peut s'intéresser à plusieurs horizons différents simultanément, afin de voir si un signal de surachat ou de survente sera confirmé ou non par ces indicateurs d'horizon différent :

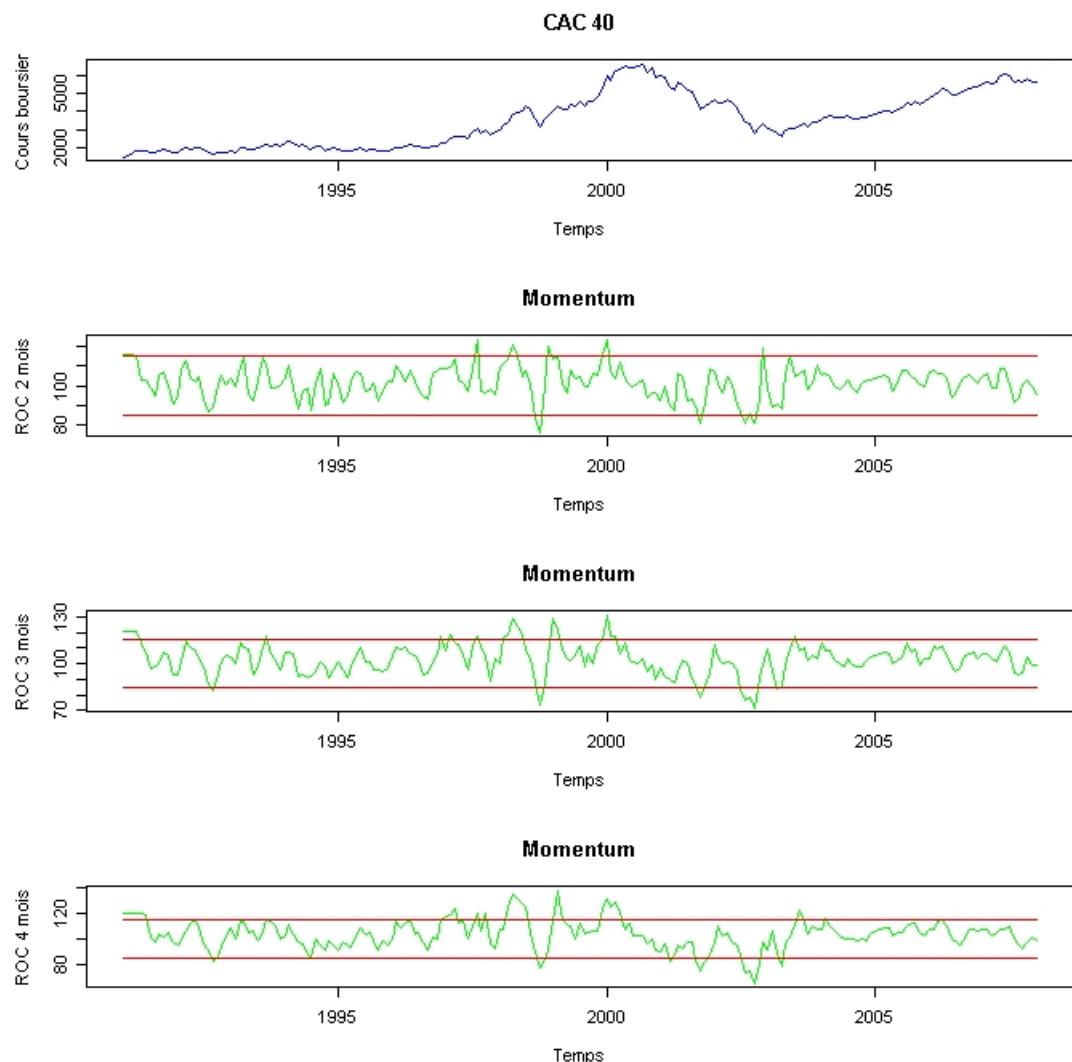


FIGURE 6 – CAC40 et ses momentum 2, 3 et 4 mois

1.3.2 Moving Average Convergence Divergence (MACD)

Déviation de tendance

Nous commençons par la remarque suivante : les prix fluctuent autour d'une tendance plus ou moins régulière. Ces fluctuations forment la base autour de laquelle seront construits les oscillateurs de momentum dits de déviance de tendance. La façon la plus simple de calculer une déviance de tendance, consiste à suivre la relation entre les prix et leur moyenne mobile, entre la moyenne mobile à N jours et une autre à N' jours, etc... Dans l'illustration suivante, nous avons considéré la relation entre les prix et leur moyenne mobile :

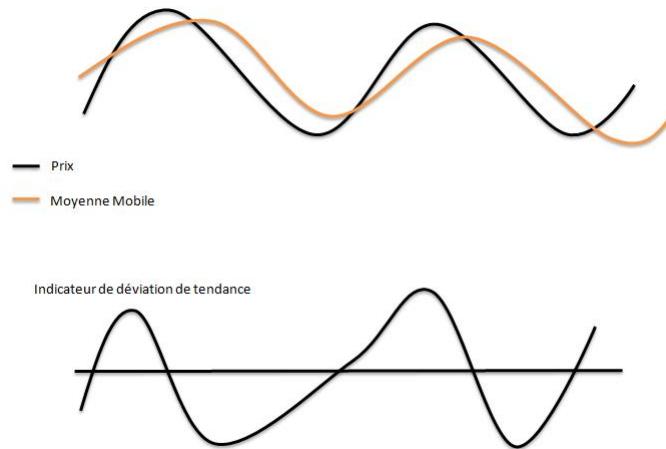


FIGURE 7 – Indicateur de déviance de tendance (Prix/Moyenne mobile)

Nous avons tracé une ligne horizontale représentant 1. Si le rapport du prix sur sa moyenne mobile est supérieur à 1, alors l'indicateur de déviance de tendance est au-dessus de cette ligne horizontale. De même, si le rapport de prix sur sa moyenne mobile est inférieur à 1, alors l'indicateur de déviance de tendance est au-dessous de cette ligne horizontale. Le croisement de cette ligne par l'indicateur donnera alors le signal de renversement de la tendance des prix.

Prenons un exemple de jeux de données pour illustrer ce qu'on vient de voir[5].

25, 26, 28, 26, 24, 21, 18

Considérons la moyenne mobile sur 15 jours par exemple. Nous obtenons alors le tableau suivant :

Date (mois de mars)	Cours	MA(15jours)	Cours/MA(15jours)
1	25	20	125%
2	26	21	123.8%
3	28	22	127.3%
4	26	23	113%
5	24	24	100%
8	21	24	87.5%
9	18	23	78.3%

Quelques précisions sur la moyenne mobile

Précédemment, on a utilisé la moyenne mobile simple. Mais qu'est-ce que la moyenne mobile simple ? En effet, il s'agit de la moyenne des prix sur les N dernières périodes :

$$MM_t(\text{sur } N \text{ jours}) = \frac{Prix_t + Prix_{t-1} + Prix_{t-2} + \dots + Prix_{t-N+1}}{N}$$

En pratique, il est plus judicieux de considérer la moyenne mobile pondérée. Cette pondération peut être faite en donnant plus de poids aux données récentes qu'aux données plus anciennes. Cependant, la moyenne mobile a tendance à fluctuer beaucoup plus qu'une moyenne mobile simple, et par conséquent de provoquer un peu plus des faux signaux.

Il existe également des moyenne mobiles exponentielles, notée MME. On les calcule de la façon suivante :

$$MME_t(\text{sur } N \text{ jours}) = \frac{1Prix_t + \alpha Prix_{t-1} + \alpha^2 Prix_{t-2} + \dots + \alpha^{N-1} Prix_{t-N+1}}{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{N-1}}$$

La valeur de α ($0 \leq \alpha \leq 1$) est obtenu en divisant 2 par nombre de jour pris en compte dans le calcul de la moyenne mobile. Par exemple pour une moyenne mobile de 15 jours, on a $\alpha = 0.133$.

Calcul de MACD

MACD est un des indicateurs de déviation de tendance. Elle utilise le plus souvent le rapport de deux moyennes mobiles exponentielles :

$$MACD_t = \frac{MME_t(\text{sur } N \text{ jours})}{MME_t(\text{sur } N' \text{ jours})}$$

1.4 Les oscillateurs simples bornés

1.4.1 Indicateur de force relative (RSI)

C'est un indicateur de momentum qui compare le prix d'un actif à ses prix antérieurs et il est de ce fait "relatif" aux évolutions du passé.

Il est calculé de la façon suivante :

$$RSI(t) = 100 - 100/(1 + RS(t, h))$$

$RS(t, h)$ est la moyenne des cours de clôture des jours à la hausse divisé par la moyenne des cours de clôture des jours à la baisse, h est la durée considérée.

Prenons par exemple la série fictive suivante :

252, 257, 258, 265, 272, 268, 265, 267, 272

Calculons maintenant son RS

Cours	Calcul	Variation
252		
257	257-252	+5
258	258-257	+1
265	265-258	+7
272	272-265	+7
268	268-272	-4
265	265-268	-3
267	267-265	+2
272	272-267	+5

Moyenne des cours de clôture des jours à la hausse :

$$(257 + 258 + 265 + 272 + 267 + 272)/8 = 198.88$$

Moyenne des cours de clôture des jours à la baisse :

$$(268 + 265)/8 = 66.63$$

On obtient ainsi la valeur de RSI :

$$RSI = 100 - 100/(1 + 198.88/66.63) = 74.90(\%)$$

Le RSI a quelques avantages par rapport à ROC. Tout d'abord, c'est un indicateur borné, à savoir il varie entre 0% et 100%. Ensuite, les variations extrêmes sont atténuées grâce à l'utilisation des moyennes dans son calcul.

Concernant les niveaux de surachat et de survente, ils sont communément fixés respectivement à 70% et à 30%. Mais ces deux valeurs peuvent être différentes si l'on constate que le RSI les atteint fréquemment. Comme on l'a évoqué dans 1.2.1, on peut utiliser les quantiles pour déterminer des deux bornes, mais dans le cadre de ce mémoire on essayera d'utiliser les valeurs et les méthodes les plus utilisées sur le marché.

1.4.2 Les indicateurs stochastiques

Les oscillateurs dits stochastiques[5] ont été inventé par George Lane et sont devenus extrêmement populaire dans les années 80, sans doute grâce à leur simplicité, mais surtout aux signaux intéressants qu'ils peuvent émettre. Parmi ces oscillateurs, deux sont principalement utilisés : le $\%K$ et le $\%D$.

Dans un article paru dans *Technical Analysis of Stocks and Commodities* en juin 1984, Lane explique qu'il a testé 28 indicateurs différents, chacun d'entre eux étant nommé avec une lettre de l'alphabet. Les oscillateurs portant la lettre D et K se sont révélés être les plus performants.

La formule de l'indicateur $\%K$ [10] est la suivante :

$$\%K_t = 100 \frac{C_t - B_t(\text{sur } N \text{ jours})}{H_t(\text{sur } N \text{ jours}) - B_t(\text{sur } N \text{ jours})}$$

où C_t est le dernier cours de clôture, B_t le cours le plus bas des N derniers jours et H_t le cours le plus haut des N derniers jours.

La formule de l'indicateur $\%D$ est la suivante :

$$\%D_t = 100 \frac{\tilde{H}_t(\text{sur } M \text{ jours})}{\tilde{B}_t(\text{sur } M \text{ jours})}$$

où \tilde{H}_t est la somme sur les M derniers jours de $C_t - B_t(\text{sur } N \text{ jours})$ et \tilde{B}_t est la somme sur les M derniers jours de $H_t(\text{sur } N \text{ jours}) - B_t(\text{sur } N \text{ jours})$. Par définition, on a donc $M < N$. De plus, par convention, la valeur $M = 3$ périodes est souvent utilisée.

Par construction, le $\%K$ est le plus sensible des deux indicateurs de Lane, mais c'est le $\%D$ qui a le plus de poids et qui donne les signaux importants. Voyons maintenant quels sont ces signaux.

Tout d'abord, le $\%D$ donne des signaux importants sur les situations de **surachat** et de **survente**. En effet, lorsque l'oscillateur se trouve sur des zones extrêmes (près de 0 ou de 100), le marché peut être considéré comme en survente ou en surachat. Cependant, en pratique, on s'aperçoit rapidement que même le $\%D$ connaît une oscillation rapide entre les bornes extrêmes, ce qui lui empêche de donner une indication significative des tensions de marché.

Ensuite, il peut donner des signaux dans des situations où le trader doit choisir entre la vente et l'achat. A l'aide de la remarque précédente, on introduit la moyenne mobile du $\%D$, appelée *slow %D*. On considère alors que quand le $\%D$ se trouve sur les bornes hautes (ou basses) et qu'il croise *slow %D* à la baisse (à la hausse), un signal de vente (d'achat) est donné, comme on peut le voir dans la graphe ci-dessous :

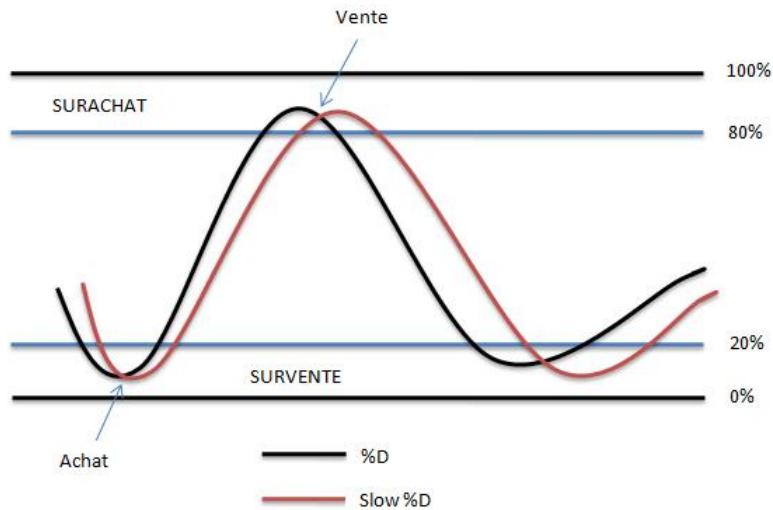


FIGURE 8 – L'indicateur $\%D$ et le *slow %D*

Et enfin, un dernier signal important révélé par l'oscillateur $\%D$: l'inertie des tendances. En effet, si cet oscillateur reste bloqué plusieurs jours sur les bornes extrêmes, il confirme alors l'existence d'une inertie dans la tendance des cours.

1.5 D'autres momentum

1.5.1 Les bandes de Bollinger

Les bandes de Bollinger ont été introduites par Bollinger dans les années 80. Elles répondent au besoin de disposer de bandes de trading extensibles en partant du constat que la volatilité est de nature dynamique et non statique.

Les bandes de Bollinger sont constituées à l'aide de deux courbes qui enveloppent le cours. On calcule tout d'abord la moyenne mobile sur N périodes du cours de la valeur considérée (le plus souvent une moyenne mobile sur 20 jours). Ensuite, on calcule l'écart-type des N données consécutives du cours. Les bandes

de Bollinger sont obtenues en sommant la moyenne mobile précédente et plus ou moins deux fois les écarts types. Autrement dit :

$$BB_t = MM_t(\text{sur } N \text{ jours}) \pm 2 \times \text{Ecart-type}_t(\text{prix sur } N \text{ jours})$$

avec BB_t les bandes de Bollinger à la date t , $MM_t(\text{sur } N \text{ jours})$ la moyenne mobile du cours sur N jours, et $\text{Ecart-type}_t(\text{prix sur } N \text{ jours})$ écart-type des N derniers cours.

Ici, on s'intéresse toujours aux données issues de *Yahoo* concernant le *CAC40*. En considérant une période de 20 jours, on a obtenu le graphe suivant :

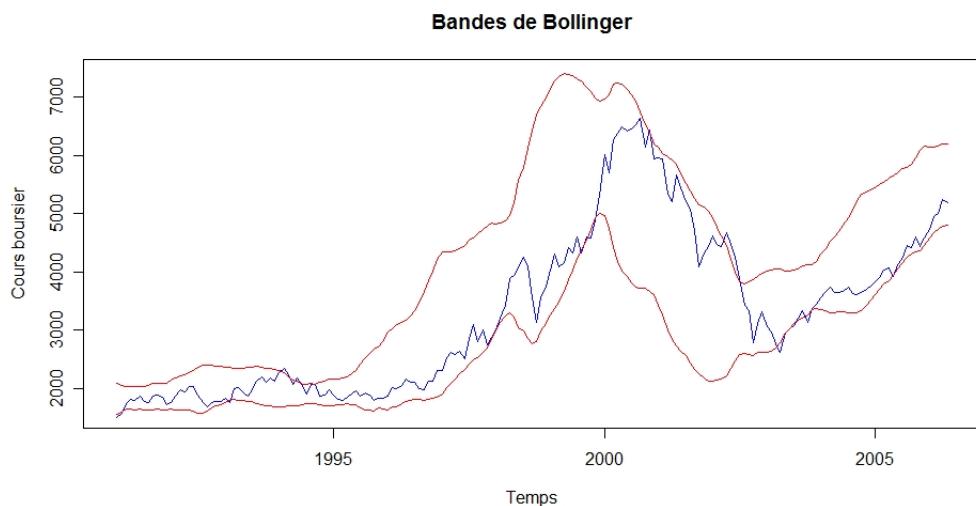


FIGURE 9 – Les bandes de Bollinger

Tout d'abord, les changements de prix majeurs ont tendance à se produire après un resserrement des bandes. C'est ce qu'on constate vers la fin de 1995. Cependant, il est difficile de savoir quand exactement le resserrement est maximal parce que les bandes peuvent encore se resserrer plus. Mais on peut faire confiance au début de l'écartement qui suit un resserrement parce qu'il indique le moment du changement attendu.

Ensuite, on constate que généralement quand les prix sortent assez nettement d'une bande, une poursuite de la tendance s'ensuit. C'est ce qui se passe vers 2003, où les prix sortent très nettement de la bande supérieure, confirmant la baisse des prix. Toutefois, si les prix sortent de la bande et y rentrent rapidement, alors cela signale très fortement un changement de tendance. On peut le voir sur le graphe, vers la fin de 2003 début 2004.

Enfin, on peut constater qu'un mouvement des cours qui a son origine sur un bord de bande a souvent tendance à aller sur l'autre bord de l'autre bande.

1.5.2 Mais aussi beaucoup d'autres

Il est bien évident que l'on ne va pas donner les caractéristiques de tous les momentum et leurs versions. Mais on peut néanmoins donner une liste non exhaustive des momentum les plus fréquemment utilisés par les traders et non encore traités dans ce mémoire :

- Le Commodity Channel Index (CCI)
- Les Chandelier
- L'indice de mouvement directionnel (DMI)
- Le Parabolique SAR

Pour chacun des ces oscillateurs, il existe de différentes versions. Remarquons également qu'il existe d'autres types de momentum issus de la combinaison de deux ou plusieurs autres indicateurs.

2 Choix des momentums

Dans cette deuxième partie, on se pose la question suivante : devant la multitude des momentums, comment choisir ceux qui sont les plus performants ? En un mot, on cherche le meilleur momentum selon les critères qu'on se fixe.

2.1 La corrélation entre les prix et les momentums

L'idée la plus basique c'est d'utiliser des coefficients de corrélation entre les prix et les différents momentums. En effet, on peut calculer les momentums mensuellement et les décaler de n mois par rapport aux prix, et de constater leur pouvoir prédictif : dans ce cas, plus le coefficient de corrélation est grande, meilleur est le momentum.

2.1.1 Présentation des données

On dispose des données mensuelles de 8500 entreprises cotées, sur 11 années.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		13/03/2008	29/02/2008	31/01/2008	31/12/2007	30/11/2007	31/10/2007	28/09/2007
2	FLWS US Equity	8,38	8,04	7,81	8,73	10,47	11,99	11,59
3	PHRM LN Equity	2137,5	3340	2395	2010	2205	2052,5	2417,5
4	TWT LN Equity	102,5	73,5	72,5	79,5	94,5	105,5	100,5
5	MMM US Equity	78,71	78,4	79,65	84,32	83,26	86,36	93,58
6	COMS US Equity	3,11	3,29	4,13	4,52	4,31	4,88	4,94
7	III LN Equity	777	818	937	1003	1088	1085	997
8	FOUR LN Equity	189	183	178	207,5	208	360	385,5
9	KDE US Equity	12,11	11,84	13,25	13,15	12,5	17,05	17,59
10	JOBS US Equity	19,45	18,15	17,78	18,02	20,48	22,29	19,36
11	888 LN Equity	147	140	121	142	135	123,25	120,5
12	NDN US Equity	9,27	9,29	8,31	7,96	8,06	10,75	10,27
13	CAS US Equity	24,31	22,23	21,18	27,19	25,1	30,1	32,6
14	MAERSKB DC Equity	49400	50900	49000	54400	60700	71000	71800
15	SHLM US Equity	20,27	20,44	20,39	21,55	21,56	23,61	19,73
16	ATEC AV Equity	57,88	59	63,76	91,1	91,6	168	133,9
17	ACMR US Equity	6,88	8,57	11,98	13,75	15,87	16,72	15,76
18	AALB NA Equity	13,08	12,9	11,59	13,6	14,33	16,61	16,72
19	AAON US Equity	17,07	16,51	17,8	19,82	19,03	18,26	19,73

FIGURE 10 – Données Bloomberg

Il s'agit des données issues de Bloomberg, concernant la cotation sur le marché des entreprises essentiellement américaines.

2.1.2 Méthode de calcul

Prenons l'exemple des bandes de Bollinger. Pour une entreprise donnée, chaque mois, nous calculons la valeur de ce momentum en s'aidant des prix des 20 dernières périodes, *i.e.* 20 dernières mois (dans cet exemple, on considère que le momentum correspond à la borne supérieure de Bollinger). On obtient ainsi la valeur des momentums sur tous les moins, exceptés les 20 derniers. On calcule ensuite le coefficient de corrélation entre ces momentums et les prix des actions de cette entreprise (*cf* la colonne "Momentum M").

Pour se rendre compte du pouvoir prédictif de ce momentum, on calcule également le coefficient de corrélation entre les prix et le momentum décalé d'un moins, puis de six mois (*cf* la colonne "Momentum M-1" et "Momentum M-6").

	A	B	C	D	E	F	G
1		Momentum M	Momentum M-1	Momentum M-6			Corrélation
2	FLWS US Equity	0,248368412	0,175468554	-0,024136037		Momentum M	0,685405391
3	PHRM LN Equity	0,674265742	0,050831225	-0,415063809			
4	TWT LN Equity	-0,524354925	-0,564284832	-0,878400765		Momentum M-1	0,638001927
5	MMM US Equity	0,957740502	0,945783225	0,894494321			
6	COMS US Equity	0,518041495	0,43971522	0,225193646		Momentum M-6	0,47045452
7	III LN Equity	0,691578715	0,640447495	0,342385368			
8	FOUR LN Equity	0,593588816	0,557992945	0,363470762			
9	KDE US Equity	0,688191907	0,622263595	0,437339935			
10	JOBS US Equity	0,293671444	0,033168007	-0,411098691			
11	888 LN Equity	-0,180590407	-0,348164649	-0,927143286			
12	NDN US Equity	0,760714187	0,727123014	0,564294503			
13	CAS US Equity	0,878799115	0,851809662	0,72247919			
14	MAERSKB DC Equ	0,894972812	0,870056076	0,751631934			
15	SHLM US Equity	0,641841141	0,585999571	0,325503386			
16	ATEC AV Equity	-0,000202656	-0,225993466	-0,858902135			
17	ACMR US Equity	0,846735067	0,830946432	0,759446909			
18	AALB NA Equity	0,938435021	0,926716614	0,858109694			

FIGURE 11 – Calcul des coefficients de corrélation pour les bandes de Bollinger

On calcule la moyenne de ces coefficients de corrélation pour les 8500 entreprises pour avoir des résultats significatifs et peu fluctuants (*cf* la colonne "Corrélation").

On effectue ce même travail pour certains momentums que l'on vient d'introduire. Dans le cadre de ce mémoire, on n'a pas l'ambition de traiter tous les momentums, ainsi que leurs variantes. Néanmoins, on choisit de traiter le cas des 5 momentums les plus fréquemment utilisés, à savoir :

- Le momentum basique (qu'on appellera Momentum dans la suite du mémoire et qui correspond également au momentum *ROC* dans sa version de différence de prix entre deux instants)
- *ROC* (dans sa version de division)

- *MACD*
- Bandes de Bollinger (en pratique, on considérera sa borne supérieure)
- *RSI*

2.1.3 Présentation des résultats

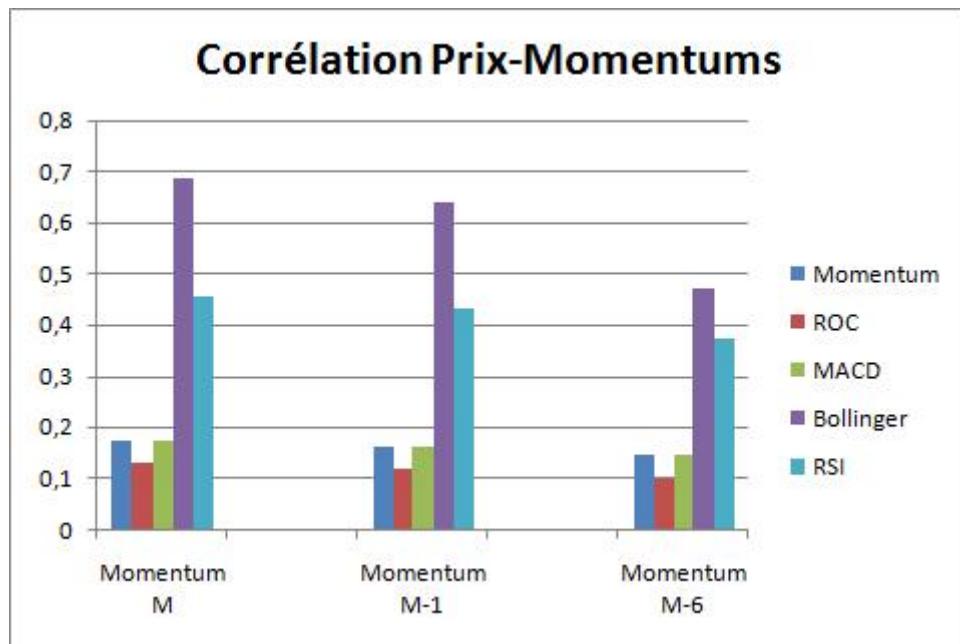


FIGURE 12 – Corrélation entre les prix et les momentum

On constate ici que les momentum comme le momentum basique, le ROC et le MACD sont très peu liés aux données de départ, et par conséquence, leur pouvoir prédictif est remis en question. Cependant, on constate que les résultats sont beaucoup meilleurs pour RSI, qui même décalé de 6 mois, reste assez lié aux prix. Le meilleur résultat est obtenu par les bandes de Bollinger, qui décalées d'un mois par rapport aux prix, donnent un coefficient de corrélation d'ordre de 65%

2.2 Analyse des données

On peut pousser l'analyse des momentum plus loin. Considérons les coefficients de corrélation entre les 5 momentum et les prix pour les 8500 entreprises, décalés d'un mois. On peut essayer alors utiliser l'Analyse en Composantes Principales.

2.2.1 Présentation des données

Commençons par donner une petite aperçue des données :

```
> données[1:19,]
   Momentum      ROC      MACD    Bollinger      RSI
1  0.07220079  0.11500720  0.71941701  0.17546855  0.02917936
2  0.23145149  0.27115494  0.23145149  0.05083123  0.00000000
3  0.50764361  0.58328891  0.50764361 -0.56428483  0.00000000
4  0.05546570  0.01873218  0.05546570  0.94578323  0.09477504
5  0.26231577  0.27723408  0.26231577  0.43971522  0.66749174
6  0.13967131  0.11654204  0.13967131  0.64044749  0.66630700
7  0.13026926  0.08361262  0.13026926  0.55799294  0.60834360
8  0.19743247  0.12063675  0.19743247  0.62226359 -0.14905024
9  0.36510547  0.48854563  0.36510547  0.03316801 -0.64940942
10 0.18237799  0.16418976  0.18237799 -0.34816465 -0.48577520
11 0.12036174  0.06488812  0.12036174  0.72712301  0.26543276
12 0.09357030  0.07264117  0.09357030  0.85180966  0.59013657
13 0.08261205  0.01189371  0.08261205  0.87005608  0.25386585
14 0.15924009  0.15033054  0.15924009  0.58599957  0.18667212
15 0.38678531  0.44591652  0.38678531 -0.22599347  0.00000000
16 0.14118338  0.10850591  0.14118338  0.83094643  0.54685325
17 0.08648827  0.02036642  0.08648827  0.92671661  0.58318417
18 0.06943320 -0.02237021  0.06943320  0.96834020 -0.07249912
19 0.16820306  0.10969990  0.16820306  0.76257069  0.73227442
```

FIGURE 13 – Présentation des données

Cherchons maintenant le nombre d'axes principaux nécessaires :

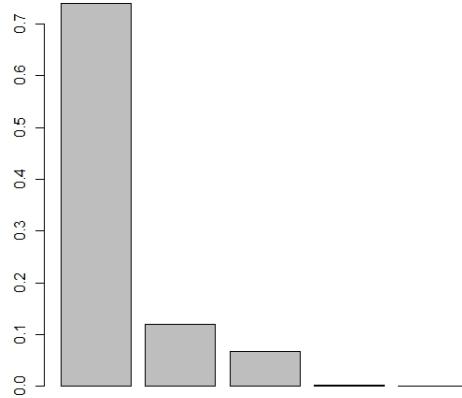


FIGURE 14 – Choix du nombre d'axes principaux

Ici, trois axes principaux suffisent. Représentons les données sur ces axes :

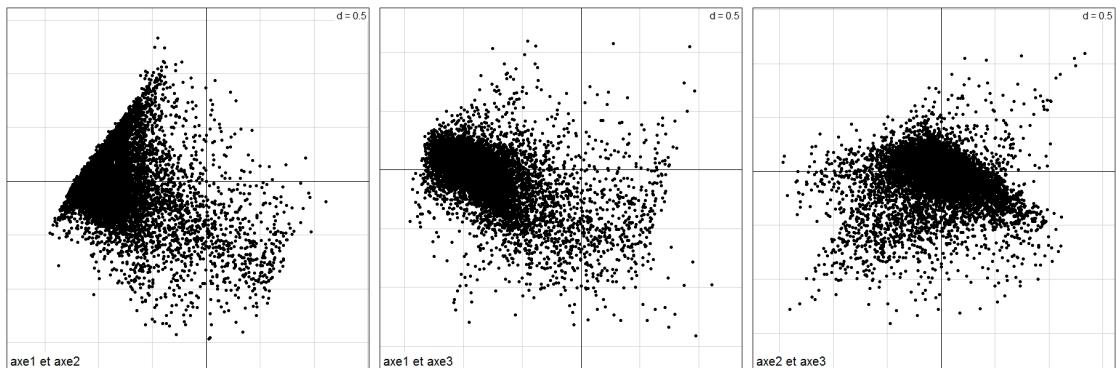


FIGURE 15 – Nuage de points des données sur les différents axes principaux

Nous constatons, dans 1^{er} et 2^e graphe, que les données ne sont pas centrées.

2.2.2 Données centrées et normées

Le but de centrer les données c'est d'avoir une représentation des entreprises les unes par rapport aux autres. Cherchons donc à nouveau le nombre d'axes principaux nécessaires pour nos données centrées et réduites :

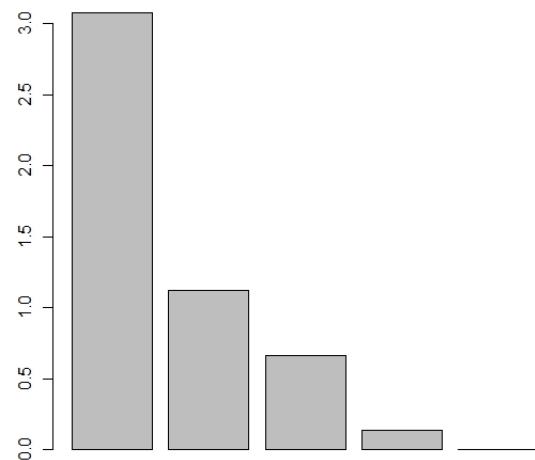


FIGURE 16 – Choix du nombre d'axes principaux

Comme précédemment, trois axes principaux suffisent ici pour présenter l'ensemble des données. Voyons maintenant le nuage de point sur ces axes :

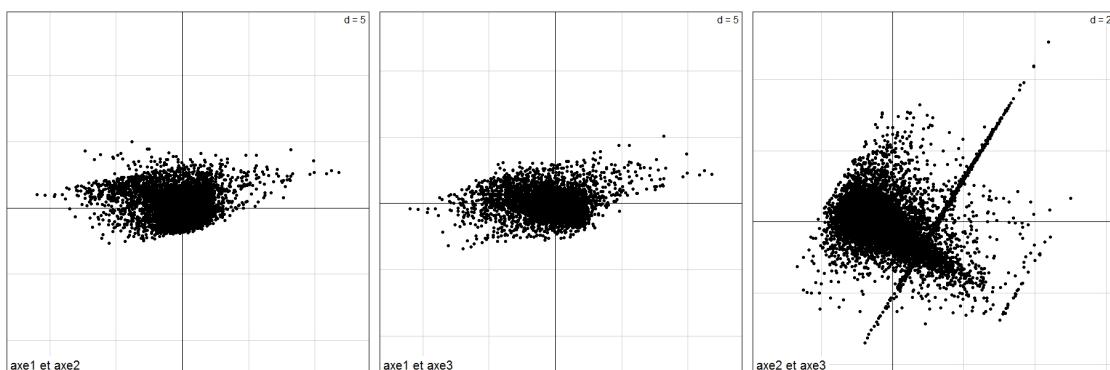


FIGURE 17 – Données centrées et normées

2.2.3 Les axes principaux

Voyons maintenant la contribution de chacun des arguments sur les axes principaux :

```
> acpcn$co[]
```

	Comp1	Comp2	Comp3
Momentum	-0.957641876	-0.14902070	-0.21085181
ROC	-0.949312404	-0.01449461	0.03908671
MACD	-0.957452811	-0.14840370	-0.21099583
Bollinger	0.584658260	-0.49916452	-0.63268390
RSI	0.007386708	-0.90937013	0.41565106

FIGURE 18 – Les axes principaux

On constate que toutes les données, à part le RSI, contribue au premier axe principal. Le deuxième axe principal met en avant surtout les momentum RSI et bandes de Bollinger. Et enfin, le troisième axe principal met en avant l'opposition entre le Momentum, le MACD et les bandes de Bollinger d'une part, et le RSI d'autre part. On peut voir ces remarques visuellement grâce aux cercles de corrélation :

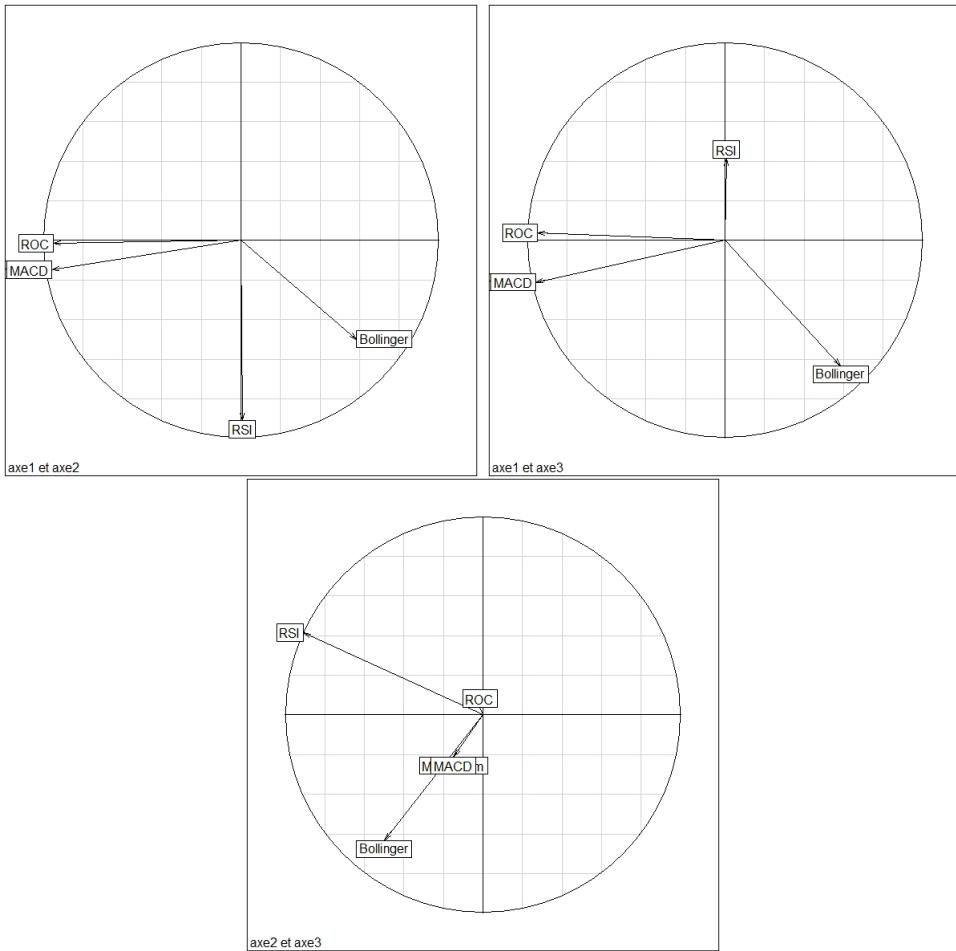


FIGURE 19 – Cercles de corrélation

Essayons de tirer quelques conclusions à partir de ces graphes. Tout d'abord, on constate que le momentum basique, MACD et ROC apportent les mêmes types d'information. De plus, on peut constater, grâce au premier cercle de corrélation, que les bandes de Bollinger détiennent une certaine information plus ou moins en commun avec les momentum basiques, le MACD et le ROC d'une part et le RSI d'autre part. Ainsi, pour la suite de l'étude, nous ne prenons en compte que trois momentum, à savoir le MACD, les bandes de Bollinger et le RSI.

2.3 Les faiblesses de l'analyse technique

L'analyse technique est très souvent sujette à critiques. On lui reproche différentes faiblesses plus ou moins importantes, pour ne pas dire plus ou moins graves.

Nous essayerons de voir ici les principales critiques qui lui sont reprochées.

2.3.1 Le passé peut-il servir à prévoir l'avenir ?

L'analyse technique est fondée sur la répétition des figures sur un graphe. On peut se poser la question suivante : en quoi le passé d'une action permet-il de prévoir son cours futur ?

C'est une des mauvaises critiques à l'égard de l'analyse technique. En effet, quelque soit la méthode de prévision, et quelque soit le domaine dans lequel on l'applique, elle repose entièrement sur l'étude des données passées, qu'elles soient de nature boursières, comptables, ou autre. C'est la seule chose dont on dispose pour essayer de prévoir l'avenir.

2.3.2 L'auto-accomplissement des prévisions

On reproche également aux analystes techniques de provoquer les mouvements de cours qu'ils prétendent prévoir. Imaginons que sur 100 analystes techniques, 80 prévoient une augmentation des cours boursiers. Ces 80 analystes préféreront acheter pour revendre plus cher. En achetant, ils participeront activement à l'augmentation du cours boursier, et donc à la réalisation de leur prévision.

Cette critique est fondée, cependant elle est à prendre en compte dans une certaine mesure seulement. En effet, on peut reprocher la même chose aux analystes fondamentaux qui basent leur prévisions sur des informations financières, notamment l'étude des comptes des entreprises, et qui sont bien plus nombreux que les analystes techniques, du moins sur le marché des actions.

2.3.3 Le caractère subjectif

C'est la critique la plus importante envers l'analyse technique. En effet, l'analyse technique a un caractère totalement subjectif, et donc non scientifique. On peut citer par exemple un passage du livre "*Analyse Technique : théories et méthodes*"[10], corédigé par trois auteurs, dont Thierry BECHU, qui a été responsable de l'analyse technique et trader dans plusieurs banques en France et à l'étranger, et qui est co-fondateur et ancien président de l'Association Française d'Analyse Technique (AFATE) :

" Il reste qu'un même graphique de cours pourra être interprété différemment par divers analystes techniques, chacun réagissant en fonction de sa propre subjectivité, de son expérience personnelle. A ce titre, l'analyse technique ne peut prétendre être scientifique. "

Et il poursuit :

" L'Université de printemps de l'AFATE de 2007 a permis de réunir plusieurs spécialistes qui ont tous reconnu leur lecture subjective même si certaines méthodes

revêtent un caractère assurément objectif. La part de subjectivité dans l'interprétation des graphiques risque toutefois de diminuer dans un avenir proche, du fait de l'utilisation croissante de l'ordinateur dans la génération de diagnostiques techniques. Pour l'instant, l'art l'importe encore sur la science. "

On retiendra donc qu'au jour d'aujourd'hui, l'analyse technique est quelque chose qui n'est pas tout à fait scientifique. Elle reste assez subjective, et dépend donc de l'interprétation que chacun en fait.

3 D'autres outils de prévision

Dans la partie précédente, nous avons vu quelques limites des momentums dans leur utilisation actuelle. Dans cette nouvelle partie, nous essayerons de présenter dans un premier temps quelques autres méthodes de prévision, des moins sophistiquées au beaucoup plus sophistiquées. Dans un deuxième temps, nous essayerons de comparer ces différentes méthodes aux momentums afin de constater le pouvoir prédictif de chacune d'entre-elles.

3.1 Lissage exponentiel

3.1.1 introduction

Les séries temporelles sont principalement utilisées pour prévoir des résultats dans différents domaines, notamment dans l'économie. On les utilise par exemple pour prévoir l'évolution des ventes d'un certain produit, prévoir la consommation d'électricité, etc. en se basant sur les résultats antérieurs à la prévision.

Certaines méthodes de prévision dites "*autoprojectives*" sont regroupées sous le nom du lissage exponentiel. Elles n'ont pas des bases mathématiques aussi solides que les modélisations du type ARMA ou GARCH, mais elles sont fréquemment utilisées, notamment grâce leur faible coût en calcul.

Une série temporelle (ou encore une série chronologique) est une suite finie (x_1, \dots, x_n) de données indexées par le temps. L'indice temps peut être selon les cas la minute, l'heure, le jour, le mois, l'année etc. Le nombre n est appelé la longueur de la série. Il est la plupart du temps bien utile de représenter la série temporelle sur un graphe construit de la manière suivante : en abscisse le temps, en ordonnée la valeur de l'observation à chaque instant. Pour des questions de lisibilité, les points ainsi obtenus sont reliés par des segments de droite. Le graphe apparaît donc comme une ligne brisée.

Prenons par exemple la série de données concernant le trafic aérien international, constituée de données mensuelles de janvier 1949 à décembre 1960¹ :

1. Source des données : <http://www.math.ntnu.no/~ulvmoen/tma4285/airpass.txt>

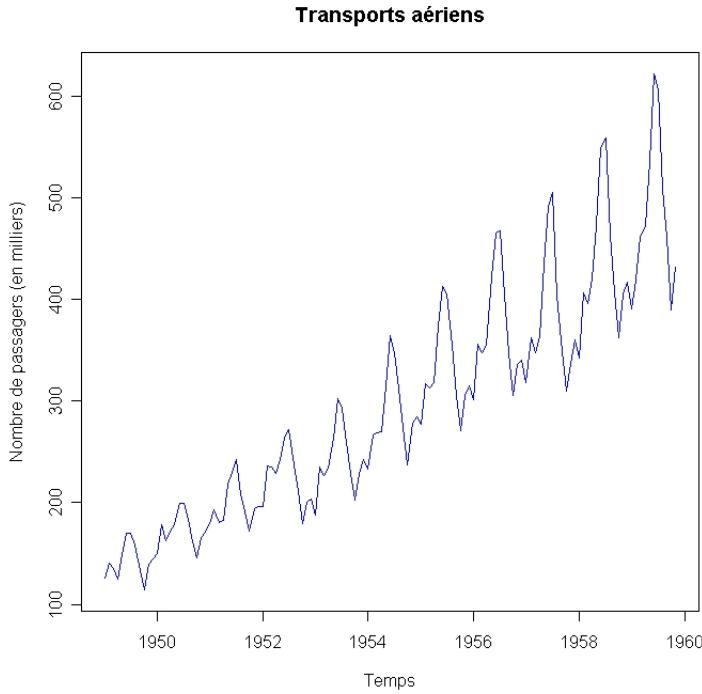


FIGURE 20 – Transports Aériens

Sur cet exemple, on constate deux choses : une tendance linéaire (voire plus) très marquée, ainsi qu'une composante périodique correspondant à l'année.

Supposons qu'on dispose d'une série chronologique (x_1, x_2, \dots, x_n) . On se place à la date n , et on souhaite prévoir la valeur de x_{n+h} , *i.e.* la valeur de x en $n+h$. Notons cette valeur de prévision $\hat{x}_{n,h}$. Dans ce cas de lissage exponentiel, il s'agit d'ajuster à la chronique, localement, une fonction simple :

- une constante dans le lissage exponentiel simple,
- une droite dans le lissage exponentiel double,
- des fonctions polynomiales ou périodiques dans les lissages plus généraux.

3.1.2 Lissage exponentiel simple

Cette méthode de prévision est assez simpliste car la prévision ne dépend pas de l'horizon de temps h précédemment défini. Soit α un réel, tel que $0 < \alpha < 1$. La valeur prédite $\hat{x}_{n,h}$ est définie de la façon suivante :

$$\hat{x}_{n,h} = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j x_{n-j}$$

On peut remarquer que l'influence des observations éloignées augmente avec la valeur de α .

On peut donner une forme récursive de $\hat{x}_{n,h}$:

$$\hat{x}_{n,h} = (1 - \alpha)x_n + \alpha\hat{x}_{n-1,h}$$

On prend souvent $\hat{x}_{1,h} = x_1$.

Ainsi, on peut remarquer que la connaissance de la prévision en $n+h$ basée sur les $n-1$ observations, et de l'observation x_n suffisent pour calculer immédiatement la prévision suivante $\hat{x}_{n,h}$

On peut également remarquer que cette méthode est mauvaise lorsque les données comportent des composantes saisonnières ou des tendances.

Maintenant, on peut se poser la question suivante : comment avoir la valeur de α ? En effet, lorsqu'on veut donner beaucoup d'importance aux observations éloignées, on choisit des valeurs pour α proches de 1. Et inversement, lorsqu'on veut donner plus de poids aux observations récentes, on choisit des valeurs de α petites. Cependant, on peut également chercher la valeur de α qui permet de réaliser la meilleure prévision selon le critère des moindres carrées, en essayant de minimiser la quantité suivante :

$$\sum_{t=1}^{n-h} (x_{t+h} - (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j x_{t-j})^2$$

3.1.3 Lissage exponentiel amélioré

Comme son nom l'indique, le lissage exponentiel amélioré (ou encore le lissage exponentiel double), est une version améliorée du lissage exponentiel simple[4]. Ici, on ajuste au voisinage de n une droite d'équation $y_t = a_1 + a_2(t - n)$. On définit alors $\hat{x}_{n,h}$ par :

$$\hat{x}_{n,h} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 h$$

où les coefficients \hat{a}_1 et \hat{a}_2 sont solution de l'équation suivante :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j (x_{n-j} - (\hat{a}_1 + \hat{a}_2 j))^2 = \inf_{\hat{a}_1 \in \mathbb{R}, \hat{a}_2 \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j (x_{n-j} - (a_1 + a_2 j))^2$$

Soit explicitement

$$\hat{a}_1(n) = \hat{a}_1(n-1) + \hat{a}_2(n-1) + (1 - \alpha^2)(x_n - \hat{x}_{n-1,1})$$

$$\hat{a}_2(n) = \hat{a}_2(n-1) + (1 - \alpha)^2(x_n - \hat{x}_{n-1,1})$$

avec comme valeurs initiales

$$\hat{a}_1(0) = x_1$$

$$\hat{a}_2(0) = x_2 - x_1$$

3.1.4 Exemple instructif avec CAC40

On récupère l'historique du cours boursier de CAC 40 depuis *Yahoo Finance*. Il s'agit d'un historique mensuel des cours à l'ouverture, entre janvier 1991 et janvier 2008.

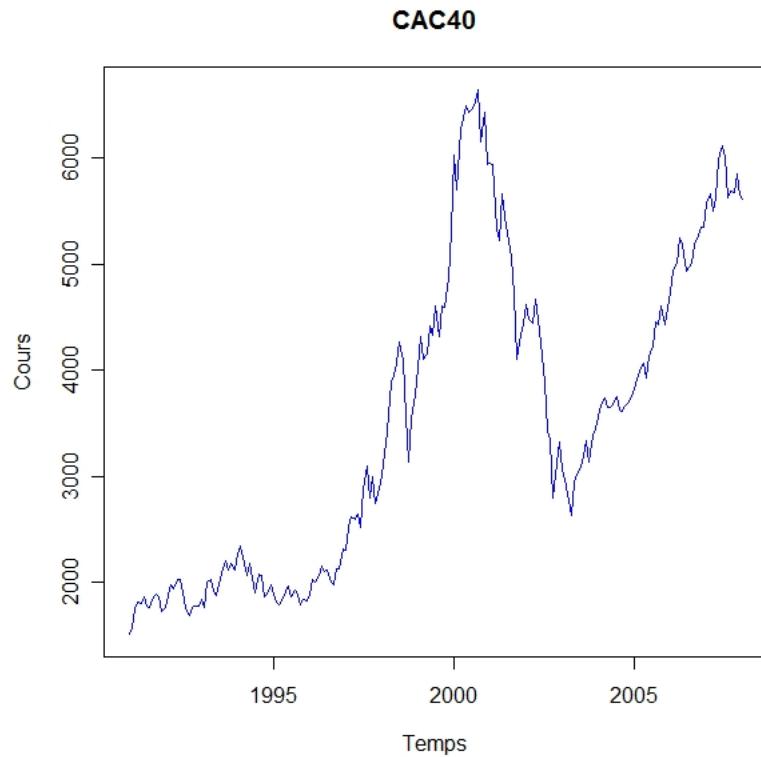


FIGURE 21 – Evolution du CAC 40

Dans cet exemple, on ne constate pas de tendance particulière, c'est pourquoi on appliquera la méthode de lissage exponentiel simple. On obtient ainsi différentes prédictions possibles en fonction de α :

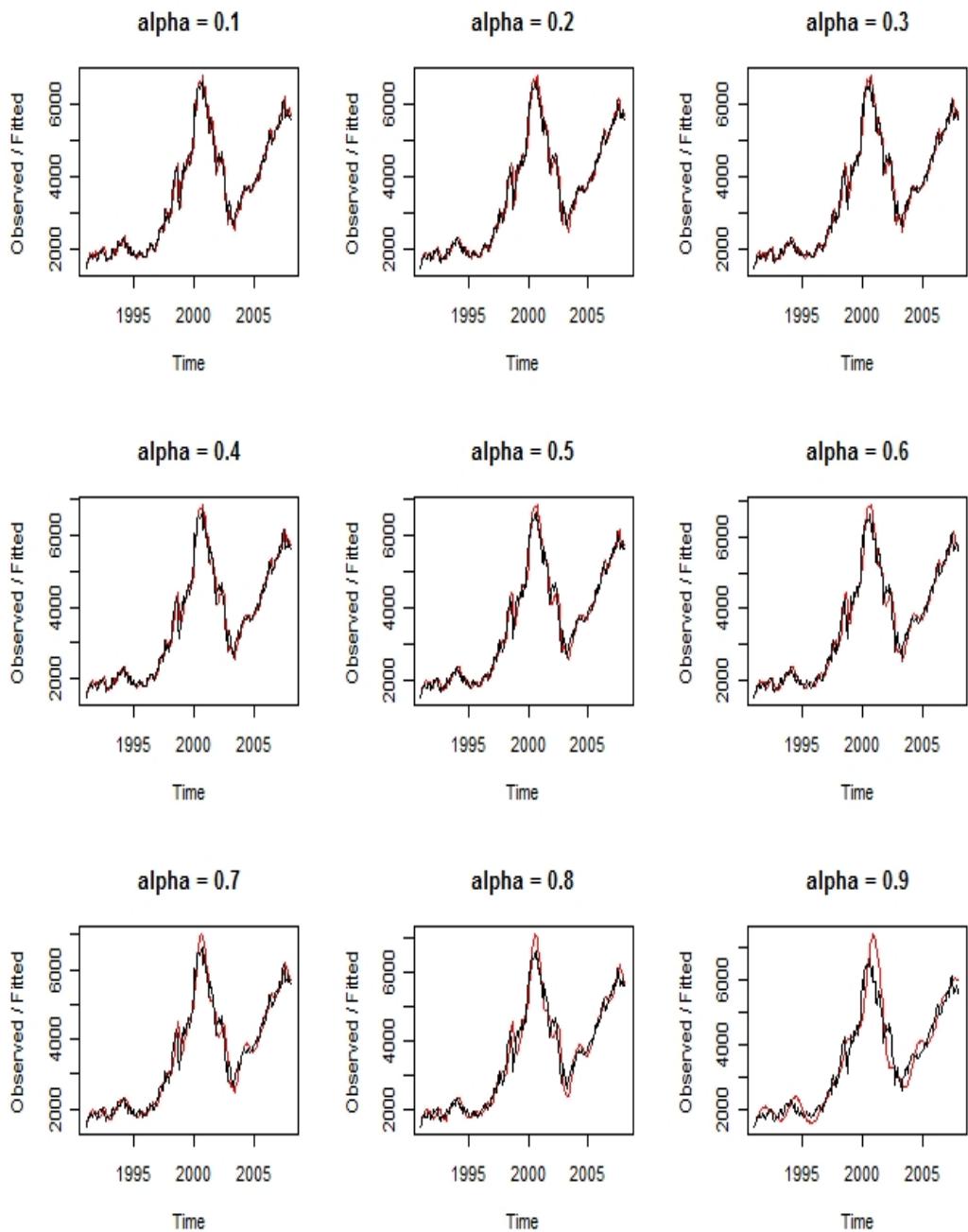


FIGURE 22 – Lissage des données du CAC40 pour différentes valeurs de α

Sur ce graphe, on a représenté le lissage exponentiel simple pour différentes

valeurs de α . En noir, ce sont les courbes de CAC40, et en rouge leur ajustement avec le modèle exponentiel. On constate comme prévu que lorsque α augmente, la valeur prévue s'éloigne de plus en plus de la dernière valeur prise en compte. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, plus la valeur de α est grande, plus on donne de l'importance aux observations éloignées dans le temps.

Comme il s'agit des données boursières, il est aisément de comprendre que les observations récentes ont une importance beaucoup plus grande que les observations un peu plus éloignées dans le temps. C'est pourquoi, on choisit pour notre modèle la valeur de $\alpha = 0.05$:

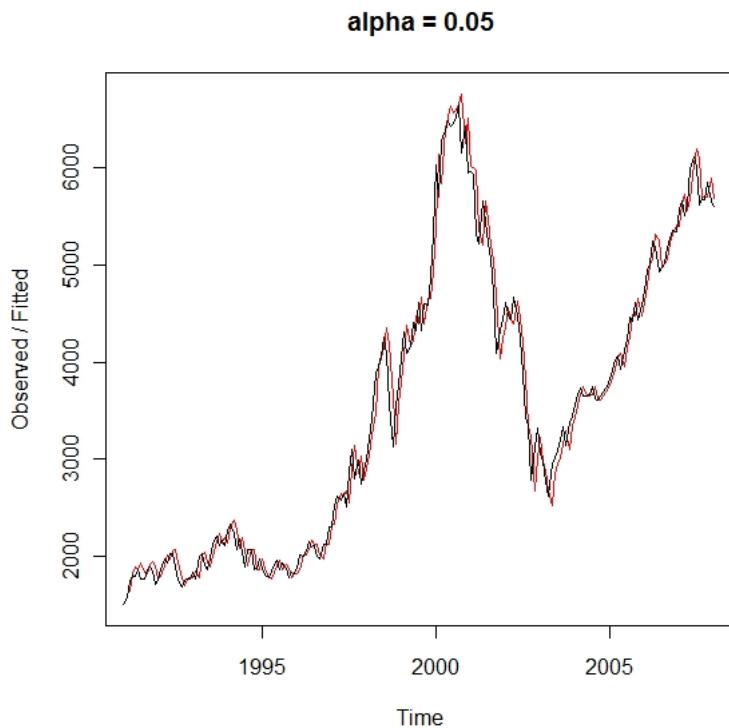


FIGURE 23 – Lissage des données du CAC40 pour $\alpha = 0.05$

Comme précédemment, on a représenté en noir le cours du CAC 40 et en rouge l'ajustement à un modèle exponentiel simple.

Essayons maintenant, à l'aide de ce modèle, de prévoir[12] les 10 dernières observations. Pour cela, on va prendre en compte les données du CAC40, auxquelles on enlève les 10 dernières observations :

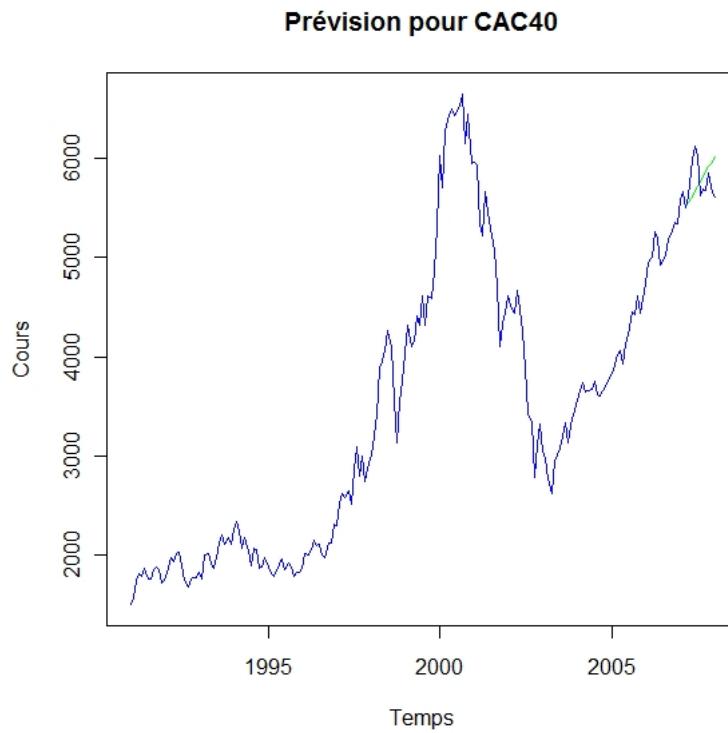


FIGURE 24 – Prévision pour CAC40 ($h = 10$)

Sur ce graphe, on a représenté en bleu l'évolution du CAC40, et en vert, les 10 dernières valeurs prévues du CAC40. On constate que ce modèle ne permet pas de prendre en compte des variations importantes.

3.2 Les modèles ARMA/ARIMA

Passons maintenant à un type de modélisation plus complet et plus complexe que le lissage exponentiel. Il s'agit ici des processus dits ARMA (pour "*AutoRegressive Moving Average*"). Nous verrons d'abord en détail ce processus, et ensuite, nous l'appliquerons à nos données du CAC40 afin de comprendre comment on peut les utiliser pour faire des prévisions.

3.2.1 Les processus ARMA(p,q)

Les processus ARMA[11] font partie d'une famille très large des processus stationnaires². Ils ont principalement deux avantages :

- ils sont d'excellents outils de prévision
- on dispose des méthodes performantes pour estimer leur paramètres

Ces processus sont composés des processus auto-régressifs $AR(p)$ et de moyennes mobiles ("moving average") $MA(q)$.

Définissons tout d'abord les processus autorégressifs, et donnons quelques propriétés les concernant. Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc centré de variance σ^2 . On appelle (x_n) un processus autorégressif d'ordre p , noté $AR(p)$, si $\forall n$:

$$X_n + a_1 X_{n-1} + \cdots + a_p X_{n-p} = \epsilon_n$$

On définit également son polynôme caractéristique³ par

$$A(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p$$

Sa *fonction d'auto-covariance* satisfait l'équation de récurrence linéaire suivante :

$$\sigma(h) + a_1 \sigma(h-1) + \cdots + a_p \sigma(h-p) = 0 \quad \forall h > 0$$

Sa *fonction d'auto-corrélation partielle* satisfait l'équation de récurrence linéaire suivante :

$$\rho(h) + a_1 \rho(h-1) + \cdots + a_p \rho(h-p) = 0 \quad \forall h > 0$$

On remarque également que

$$\sigma(h) = 0 \quad \forall |h| > p$$

Définissons maintenant les processus dits moyennes mobiles, et donnons également quelques propriétés les concernant. Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc centré de variance σ^2 . On appelle (x_n) un processus moyenne mobile d'ordre q , noté $MA(q)$, si $\forall n$:

$$X_n = \epsilon_n + b_1 \epsilon_{n-1} + \cdots + b_q \epsilon_{n-p}$$

On définit également son polynôme caractéristique par

$$B(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_q z^q$$

2. cf Annexes pour la définition d'un processus stationnaire

3. cf Annexes pour la condition d'existence de solution stationnaire

On remarque également que

$$\sigma(h) = 0 \quad \forall |h| > q$$

Comme nous l'avons déjà évoqué, les processus $ARMA(p, q)$ sont composés des processus auto-régressifs $AR(p)$ et de moyennes mobiles $MA(q)$. On les définit de la façon suivante : soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc centré de variance σ^2 . On appelle (x_n) un processus $ARMA(p, q)$, si $\forall n$:

$$X_n + a_1 X_{n-1} + \cdots + a_p X_{n-p} = \epsilon_n + b_1 \epsilon_{n-1} + \cdots + b_q \epsilon_{n-q}$$

Comme précédemment, on définit ses deux polynômes caractéristiques⁴ par

$$A(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p$$

$$B(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_q z^q$$

3.2.2 Estimation des paramètres

Ainsi, avec les notations précédentes, (x_n) est un processus $ARMA(p, q)$, si $\forall n$:

$$X_n + a_1 X_{n-1} + \cdots + a_p X_{n-p} = \epsilon_n + b_1 \epsilon_{n-1} + \cdots + b_q \epsilon_{n-p}$$

On remarque qu'on a utilisé plusieurs paramètres dont on n'a pas défini les valeurs. Il s'agit précisément des valeurs de :

- p et q
- a_1, a_2, \dots, a_p et b_1, b_2, \dots, b_q

L'estimation de p et de q se fait simplement en lisant le graphe des fonctions *d'auto-corrélation* et *d'auto-corrélation partielle*. En effet, le graphe de la fonction *d'auto-corrélation* nous fournit la valeur de q. Le graphe de la fonction *d'auto-corrélation partielle* nous donne la valeur de p. On peut alors essayer d'améliorer le modèle en prenant des valeurs de p et q plus petites que les valeurs obtenues précédemment, en utilisant notamment les critères d'AIC ou de BIC⁵.

A titre d'illustration, prenons un jeu de données quelconque, pour lequel on donne le graphe de la fonction *d'auto-corrélation* ainsi que le graphe de la fonction *d'auto-corrélation partielle* :

4. cf Annexes pour la condition d'existence de solution stationnaire

5. cf plus bas pour la définition des différentes critères

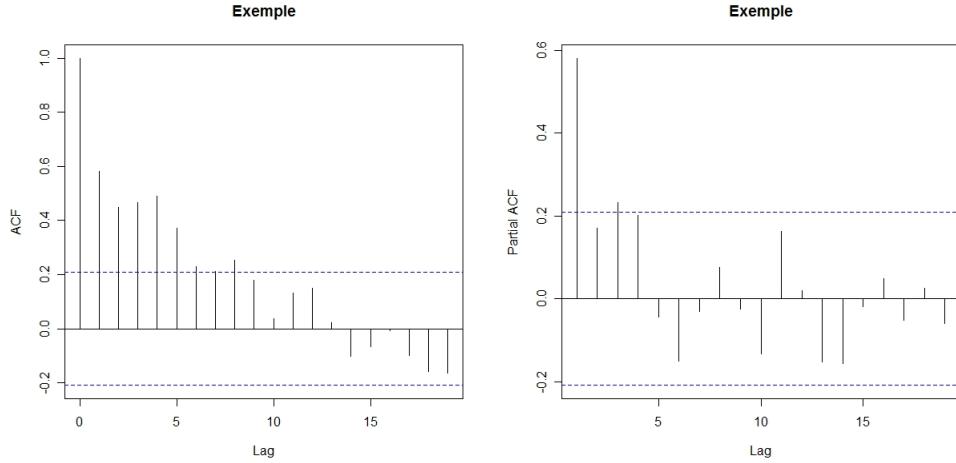


FIGURE 25 – ACF et PACF d'un jeu de données fictives

Sur cet exemple, on remarque que sur le graphe ACF ("Auto Correlation Function"), la valeur maximale qui reste significative est $q = 8$. De même, d'après le graphe PACF("Partial Auto Correlation Function"), la valeur maximale qui reste significative est $p = 3$.

Lorsqu'on a déterminé les ordres p et q , l'estimation des paramètres d'un modèle $ARMA(p, q)$ se réalise par des différentes méthodes :

- Moindres Carrés Ordinaires
- Maximum de Vraisemblance approché (Box et Jenkins [1970])
- Maximum de Vraisemblance exacte
(Newbold [1974], Harvey et Philips [1979], Harvey [1981])

Pour comparer des différents modèles ainsi obtenus, on peut utiliser les critères suivants :

- Critère de Akaike ou AIC : le meilleur des modèles ARMA(p, q) est le modèle qui minimise la statistique :

$$AIC(p, q) = T \log(\sigma_{\epsilon}^2) + 2(p + q)$$

- Critère d'information bayésien ou BIC : le meilleur des modèles ARMA(p, q) est le modèle qui minimise la statistique :

$$BIC(p, q) = T \log(\sigma_{\epsilon}^2) - (n-p+q) \log[1 - \frac{p+q}{T}] + (p+q) \log(T) + \log[(p+q)^{-1} (\frac{\sigma_{\epsilon}^2}{\sigma_{\epsilon}^2 - 1})]$$

- Critère de Schwarz [1978]

$$SC(p, q) = T \log(\sigma_\epsilon^2) + (p + q) \log(T)$$

- Critère de Hannan-Quin [1979]

$$HQ(p, q) = \log(\sigma_\epsilon^2) + (p + q)c \log\left[\frac{\log(T)}{T}\right]$$

3.2.3 Comment prévoir dans un processus ARMA ?

Avant de réaliser des prévisions, il est nécessaire de traiter les données. Plusieurs cas sont possibles :

- Si le processus contient une tendance déterministe, on extrait cette dernière par régression afin d'obtenir une série stationnaire lors de la phase d'estimation. Ensuite, lors de la phase de prévision, on adjoint aux prévisions réalisées sur la composante ARMA stationnaire, la projection de la tendance.
- De même, si la série de départ contient une composante saisonnière, il ne faut pas oublier de la prendre en compte lors de la prévision.

Lorsque pour identifier le processus étudié à un processus ARMA, on a appliqué différentes transformations, il est nécessaire lors de la phase de prévision de prendre en compte la transformation retenue.

On considère un processus $ARMA(p, q)$ de la forme suivante :

$$X_n = a_1 X_{n-1} + \cdots + a_p X_{n-p} + \epsilon_n + b_1 \epsilon_{n-1} + \cdots + b_q \epsilon_{n-q}$$

En appliquant le théorème de Wold⁶ et en considérant la forme $MA(\infty)$ correspondante :

$$x_n = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \epsilon_{n-j} \quad \pi_0 = 1$$

la meilleure prévision que l'on peut faire de x_{n+1} compte tenu de toute l'information disponible jusqu'à la date x_n , notée $\hat{x}_n(1)$, est donnée par :

$$\hat{x}_n(1) = E(x_{n+1}|x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = E(x_{n+1}|\epsilon_n, \epsilon_{n-1}, \dots, \epsilon_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \epsilon_{n+1-j}$$

L'erreur de prédiction est alors de :

$$x_{n+1} - \hat{x}_n(1) = \epsilon_{n+1}$$

6. cf Annexes pour plus de détails au sujet du théorème de Wold

Le procédé précédent peut être généralisé à une prévision à un horizon h :

$$\hat{x}_n(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \epsilon_{n+h-j} \quad \pi_0 = 1$$

d'erreur de prédiction :

$$x_{n+h} - \hat{x}_n(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \pi_j \epsilon_{n+h-j}$$

Déterminons un intervalle de confiance sur la prévision $\hat{x}_n(h)$, sous l'hypothèse de normalité des résidus ϵ_n :

$$\frac{x_{n+h} - \hat{x}_n(h)}{\text{var}(x_{n+h} - \hat{x}_n(h))^{1/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Comme

$$E\{(x_{n+h} - \hat{x}_n(h))^2\} = E\left\{\left(\sum_{j=0}^{k-1} \pi_j \epsilon_{n+h-j}\right)^2\right\} = \sum_{j=0}^{k-1} \pi_j^2 \sigma_\epsilon^2$$

on a alors

$$\frac{x_{n+h} - \hat{x}_n(h)}{\sigma_\epsilon [\sum_{j=0}^{k-1} \pi_j^2]^{1/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Ainsi, on obtient l'intervalle de confiance suivant de niveau α :

$$\left[\hat{x}_n(h) - t^{\alpha/2} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \pi_j^2 \right)^{1/2} \hat{\sigma}_\epsilon; \hat{x}_n(h) + t^{\alpha/2} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \pi_j^2 \right)^{1/2} \hat{\sigma}_\epsilon \right]$$

3.2.4 Les processus ARIMA et SARIMA

Voyons maintenant rapidement comment sont définis les processus *ARIMA* (pour "*Autoregressive integrated moving average*") et *SARIMA* (pour "*Seasonal Integrated AutoRegressive Moving Average*").

Soit Δ l'opérateur de différenciation, *i.e.* $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$. On appelle (X_n) un processus *ARIMA* (p, d, q) , si le processus :

$$Y_n = \Delta^d X_n$$

est un processus $ARMA(p, q)$.

Ces processus $ARIMA(p, d, q)$ conviennent particulièrement bien aux séries chronologiques qui ont une tendance polynomiale de degré $d - 1$.

Soit Δ_D l'opérateur défini de la façon suivante : $\Delta_D X_n = X_n - X_{n-D}$. On appelle (X_n) un processus $SARIMA(p, d, D, q)$, si le processus :

$$Y_n = \Delta_D \circ \Delta^d X_n$$

est un processus $ARMA(p, q)$.

Ces processus $SARIMA(p, d, D, q)$ conviennent particulièrement bien aux séries chronologiques qui ont une tendance polynomiale de degré d , et une période de longueur D .

3.2.5 Exemple instructif avec CAC40

Reprendons les données du CAC40 précédemment utilisées. Traçons le graphe de sa fonction d'auto-covariance afin de voir si les données sont stationnaires :

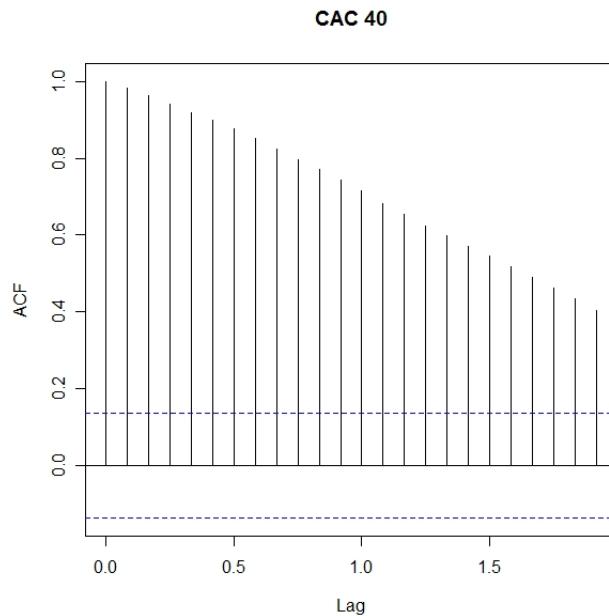


FIGURE 26 – Fonction d'auto-covariance du CAC 40

On constate que les variables sont liées entre elles, *i.e.* les données ne semblent pas être stationnaires. On confirme cette hypothèse à l'aide d'un test de *Dickey-Fuller*⁷ :

```
> adf.test(donnees)

Augmented Dickey-Fuller Test

data: donnees
Dickey-Fuller = -1.7359, Lag order = 5, p-value = 0.6867
alternative hypothesis: stationary
```

FIGURE 27 – CAC 40 : test de Dickey-Fuller

La *p-valeur* de ce test est de 0.69. Ce test confirme donc que les données ne sont pas stationnaires.

Passons maintenant au rendement du CAC40 :

$$r_t = \frac{Prix_t - Prix_{t-1}}{Prix_{t-1}}$$

7. cf Annexes pour plus de détaille à propos de test de Dickey-Fuller

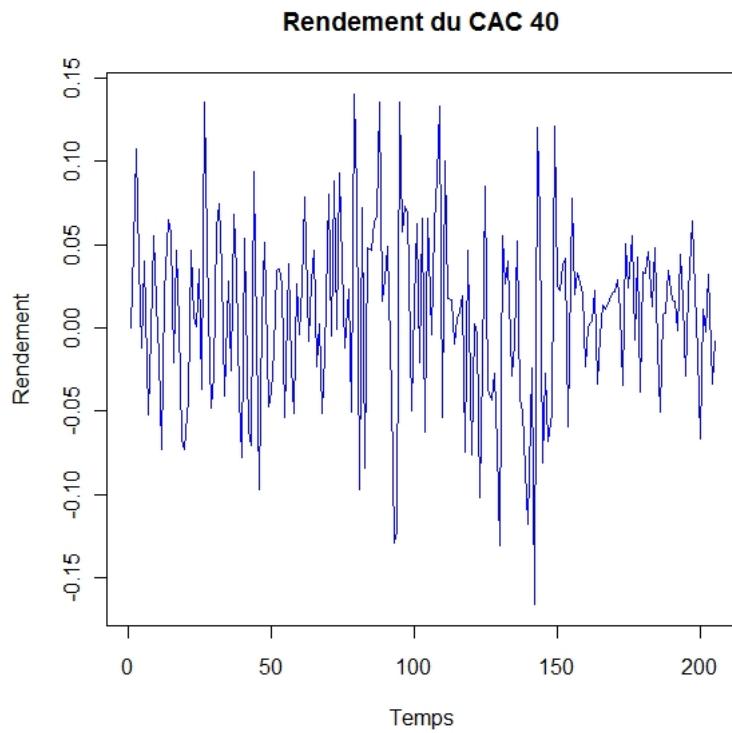


FIGURE 28 – Rendement du CAC 40

On n'observe pas de tendance marquée sur le graphe ci-dessus. On peut supposer donc qu'il n'y a pas de tendance (on vérifiera cette hypothèse à l'aide du test de Dickey-Fuller, *cf plus bas*). On procède alors à la représentation du périodogramme des rendements :

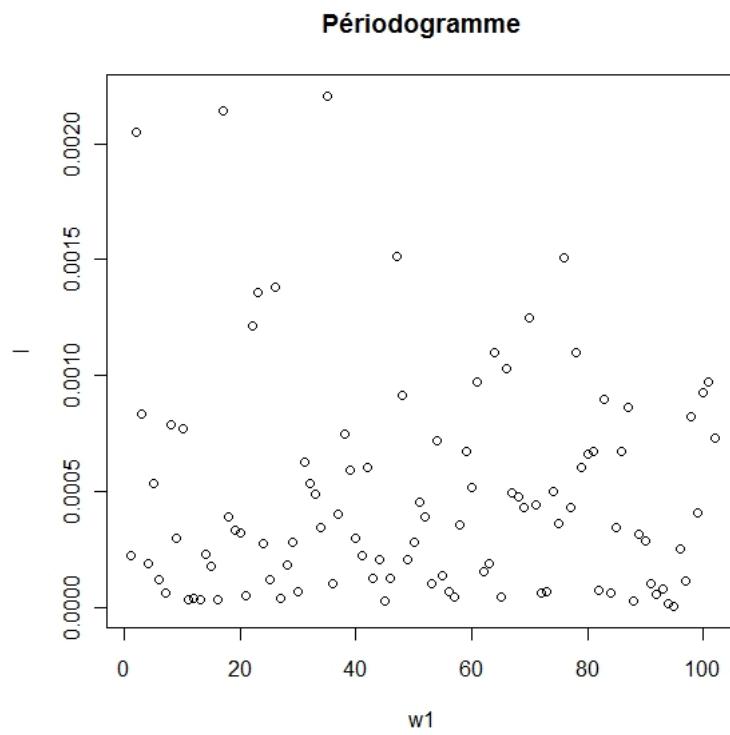


FIGURE 29 – Périodicité du CAC 40

Comme pour la tendance, ici on n'observe pas de périodicité.

Testons maintenant la stationnarité des rendements à l'aide du test de KPSS⁸ :

```
> kpss.test(rendement)
KPSS Test for Level Stationarity
data: rendement
KPSS Level = 0.112, Truncation lag parameter = 3, p-value = 0.1
Warning message:
In kpss.test(rendement) : p-value greater than printed p-value
```

FIGURE 30 – Rendement du CAC 40 : test de stationnarité

8. cf Annexes à propos du test de stationnarité KPSS

La p -valeur de ce test est supérieur à 0.1. Ce test confirme donc que les rendements sont bien stationnaires.

Nous allons désormais travailler non pas directement avec la série des rendements, mais avec la série des rendements centrés, *i.e.* la série obtenue à l'aide de la série des rendements à laquelle on a enlevé sa moyenne :

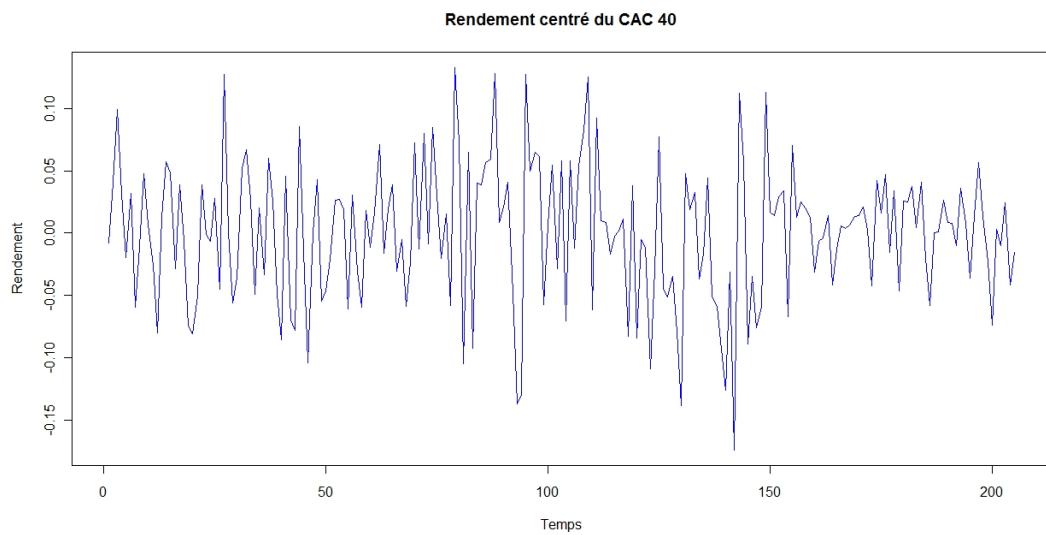


FIGURE 31 – Rendement centré

Passons maintenant à une modélisation de type ARMA des rendements centrés. Pour cela, déterminons d'abord la valeur de p et de q :

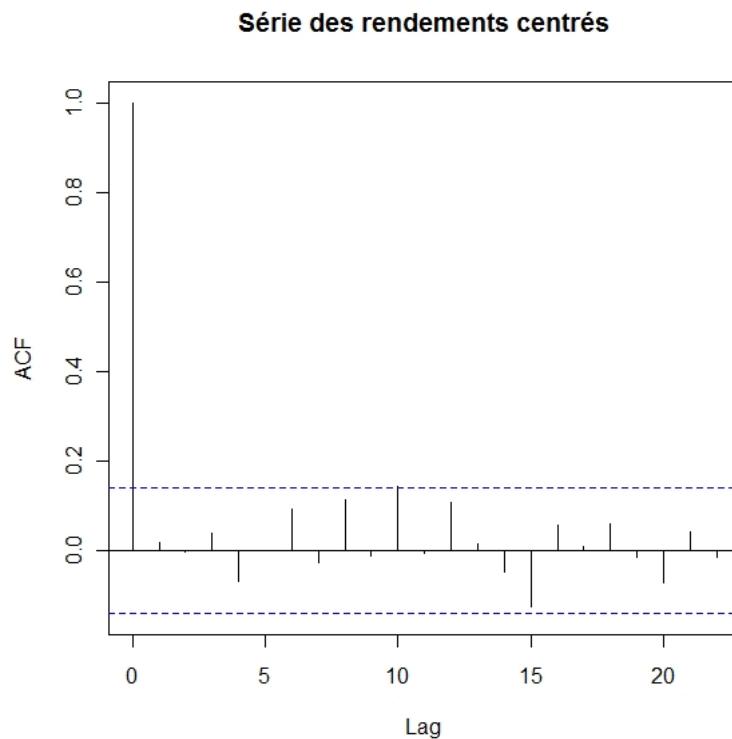


FIGURE 32 – Fonction d'auto-corrélation des rendements

La dernière valeur non négligeable correspond à $q = 10$.

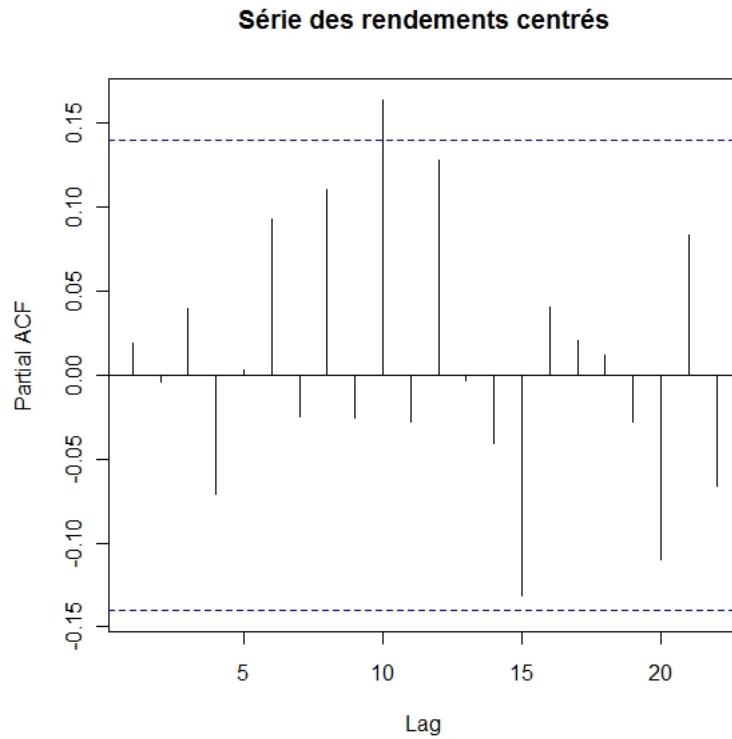


FIGURE 33 – Fonction d’auto-corrélation partielle des rendements

On en conclut donc que la valeur de p recherchée est $p = 10$.

Cependant, les valeurs de $p = 10$ et $q = 10$ sont assez grandes. On pourra essayer d’utiliser le critère de AIC pour déterminer un modèle dont les valeurs de p et de q sont moins conséquentes. Ci-dessous, on a représenté les valeurs d’ AIC pour $p = 0, \dots, 10$ et $q = 0, \dots, 10$

```

> Valeur_AIC[,]
   p    q [,0]      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
[1,] -568.7927 -566.8652 -564.8722 -563.1651 -561.8597 -559.8946 -560.0942
[2,] -566.8645 -564.9818 -563.0143 -561.3503 -559.8674 -566.8571 -568.9155
[3,] -564.8681 -563.4144 -564.4584 -560.3495 -560.6886 -563.9055 -567.5480
[4,] -563.1750 -561.4733 -564.4498 -558.3407 -560.7938 -559.6875 -570.2686
[5,] -562.1418 -560.1420 -574.2794 -557.3128 -559.7903 -569.0731 -574.8934
[6,] -560.1426 -562.8909 -572.3888 -570.4802 -556.9060 -556.2938 -572.9049
[7,] -559.8335 -562.8424 -562.1125 -569.1494 -574.6549 -570.2514 -570.6794
[8,] -557.9523 -560.8848 -560.2852 -568.8586 -572.9747 -567.9541 -569.4814
[9,] -558.3364 -560.5222 -559.7624 -567.2584 -560.4738 -565.9913 -568.2398
[10,] -556.4468 -558.5451 -557.7977 -565.3875 -558.6720 -565.9925 -567.0367
[11,] -559.6357 -559.0480 -558.0047 -556.9596 -560.9485 -563.8947 -567.7599
                [,7]      [,8]      [,9]      [,10]
[1,] -558.6748 -561.0534 -559.0727 -563.3696
[2,] -567.3186 -568.5365 -566.5526 -567.9920
[3,] -566.4967 -567.8392 -566.0874 -566.3583
[4,] -569.5884 -569.7630 -567.6014 -569.3875
[5,] -569.3145 -570.9088 -569.1173 -565.0943
[6,] -570.9064 -568.9607 -568.6359 -568.1948
[7,] -571.7464 -571.3405 -570.1061 -567.6407
[8,] -564.4978 -570.1043 -568.1240 -566.2446
[9,] -569.6024 -570.4047 -567.9611 -566.2070
[10,] -568.3193 -567.7337 -566.3783 -565.8863
[11,] -566.7499 -565.7418 -563.4585 -567.3294

```

FIGURE 34 – Tableau des valeurs AIC

Si l'on trie ces valeurs comme sur la figure ci-dessous, on obtient aisément les valeurs de p et q pour lesquelles l' AIC est minimale :

```

> sort(Valeur_AIC[,])
[1] -574.8934 -574.6549 -574.2794 -572.9747 -572.9049 -572.3888 -571.7464
[8] -571.3405 -570.9088 -570.9064 -570.6794 -570.4802 -570.4047 -570.2686
[15] -570.2514 -570.1061 -570.1043 -569.7630 -569.6024 -569.5884 -569.4814
[22] -569.3875 -569.3145 -569.1494 -569.1173 -569.0731 -568.9607 -568.9155
[29] -568.8586 -568.7927 -568.6359 -568.5365 -568.3193 -568.2398 -568.1948
[36] -568.1240 -567.9920 -567.9611 -567.9541 -567.8392 -567.7599 -567.7337
[43] -567.6407 -567.6014 -567.5480 -567.3294 -567.3186 -567.2584 -567.0367
[50] -566.8652 -566.8645 -566.8571 -566.7499 -566.5526 -566.4967 -566.3783
[57] -566.3583 -566.2446 -566.2070 -566.0874 -565.9925 -565.9913 -565.8863
[64] -565.7418 -565.3875 -565.0943 -564.9818 -564.8722 -564.8681 -564.4978
[71] -564.4584 -564.4498 -563.9055 -563.8947 -563.4585 -563.4144 -563.3696
[78] -563.1750 -563.1651 -563.0143 -562.8909 -562.8424 -562.1418 -562.1125
[85] -561.8597 -561.4733 -561.3503 -561.0534 -560.9485 -560.8848 -560.7938
[92] -560.6886 -560.5222 -560.4738 -560.3495 -560.2852 -560.1426 -560.1420
[99] -560.0942 -559.8946 -559.8674 -559.8335 -559.7903 -559.7624 -559.6875
[106] -559.6357 -559.0727 -559.0480 -558.6748 -558.6720 -558.5451 -558.3407
[113] -558.3364 -558.0047 -557.9523 -557.7977 -557.3128 -556.9596 -556.9060
[120] -556.4468 -556.2938

```

FIGURE 35 – Tableau des valeurs AIC triées

Dans l'ordre, les plus petites valeurs d' AIC sont -574.8934 , -574.6549 et -574.2794 , qui correspondent respectivement à $(p, q) = (4, 6)$, $(p, q) = (6, 4)$ et $(p, q) = (4, 2)$. Comme ces valeurs d' AIC sont assez proches, on considérera par la suite le modèle $ARMA(4, 2)$.

On peut également effectuer d'autres vérifications. Commençons par regarder si les résidus de cette modélisation sont bien indépendants⁹ :

```
> Box.test(rendement_centre_arma$residuals)
Box-Pierce test

data: rendement_centre_arma$residuals
X-squared = 2e-04, df = 1, p-value = 0.9886
```

FIGURE 36 – Test d'indépendance des résidus du rendement

On obtient une p -valeur de 0.99, ce qui ne laisse pas de doute sur l'indépendance des résidus de ce modèle.

On peut également tester la normalité des résidus¹⁰ de ce modèle :

```
> shapiro.test(rendement_centre_arma$residuals)
Shapiro-Wilk normality test

data: rendement_centre_arma$residuals
W = 0.9914, p-value = 0.2968
```

FIGURE 37 – Test de Shapiro des résidus du rendement

On obtient une p -valeur de 0.30, ce qui confirme la normalité des résidus de ce modèle.

Passons maintenant à la prévision[12]. Enlevons 10 valeurs des rendements, et essayons de les prévoir à partir de notre modèle.

9. cf Annexes pour plus de détails à propos du test de Box-Pierce (ou Ljung-Box)

10. cf Annexes à propos du test de Shapiro

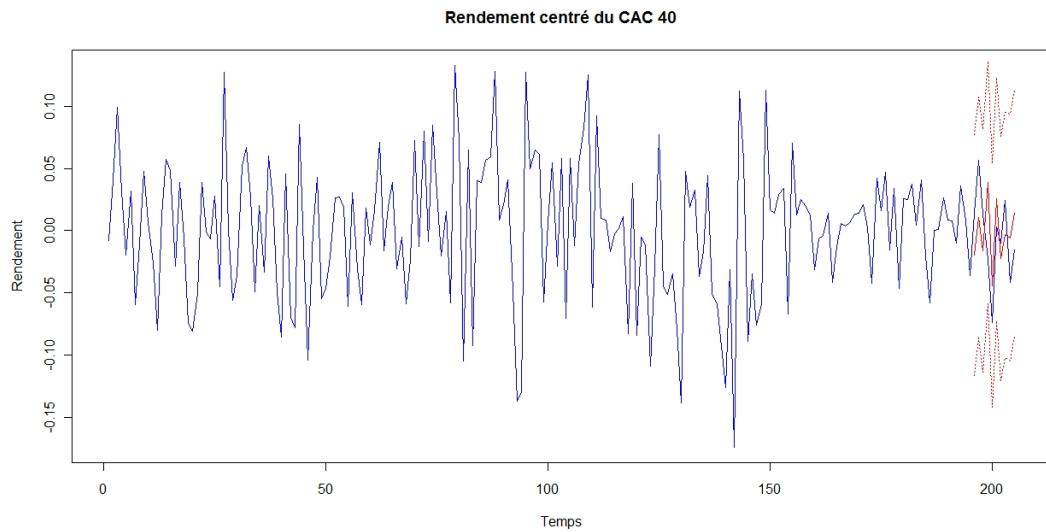


FIGURE 38 – Prévision à un horizon de 10 mois

La courbe des rendements est représentée en bleu, la courbe des rendements prévus par ARMA est représentée en rouge, encadrée par deux autres courbes, représentant la borne supérieure et la borne inférieure de l'intervalle de confiance pour chaque valeur prédite. On obtient alors pour les cours du CAC40 :

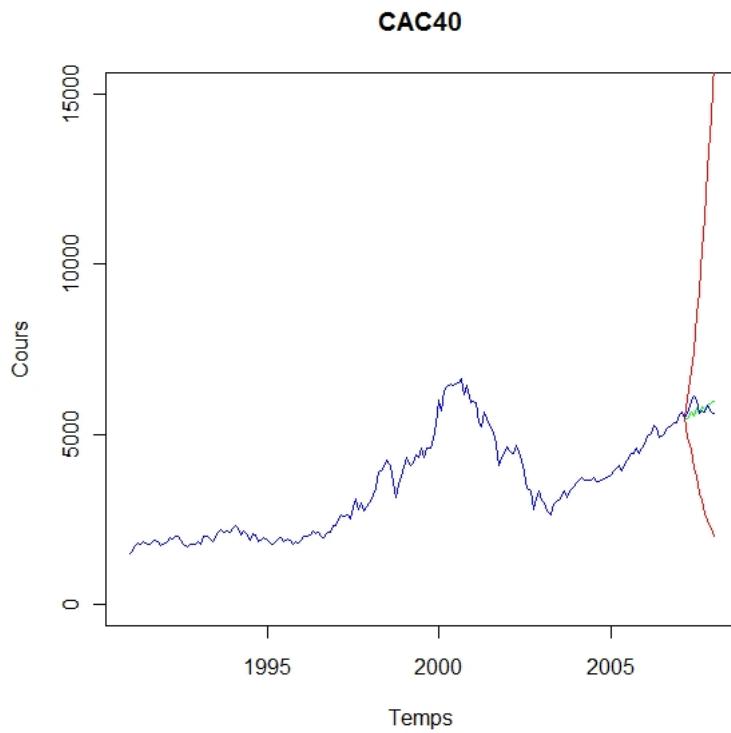


FIGURE 39 – Prévision à un horizon de 10 mois

On constate que la prévision est plutôt bien, mais ne peut prévoir une augmentation brusque ou une chute brusque, comme c'est le cas dans les premières valeurs prévues où le cours a augmenté. De plus, plus l'horizon de temps de prévision est important, plus les valeurs prévues semblent être éloignées des valeurs observées. On préfère alors faire une prévision à un horizon plus court.

Calculons maintenant l'écart entre la valeur de la borne supérieure et la valeur de la borne inférieure correspondant à la dernière prévision :

```
> donnees_prev_up[length(donnees_prev_up)] - donnees_prev_down[length(donnees_prev_down)]
[1] 13901.5
```

FIGURE 40 – Ecart entre la borne supérieure et la borne inférieure

On utilisera cette valeur pour la comparer à d'autres méthodes qu'on abordera dans la suite.

3.3 Les modèles (G)ARCH

L'étude de certaines séries temporelles issues du monde économique et financier, comme par exemple les taux d'échanges ou les indices, montre des caractéristiques bien particulières qui ne sont pas prises en compte dans des modèles du type *ARMA* ou *ARIMA*. Considérons par exemple le rendement du CAC40 :

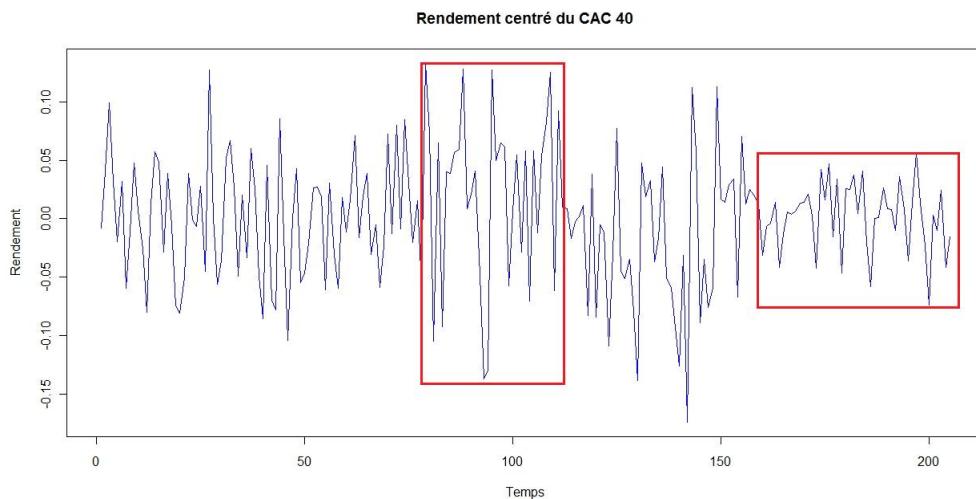


FIGURE 41 – Rendement centré

On constate qu'il y a des périodes où les rendements sont beaucoup plus volatiles qu'à d'autres périodes. Plus précisément, on constate un comportement de la variabilité des rendements en "cluster", *i.e.* un regroupement des périodes à fortes volatilités et des périodes à faibles volatilités. L'hypothèse de la constance de la volatilité est remise en cause.

Dans le cas de volatilité variable au cours du temps, on parle de "*hétéroscé-dasticité*", et inversement, dans le cas de la constance de la volatilité au cours du temps, on parle de "*homoscédasticité*". Ici, on souhaite donc prendre en compte "*l'hétéroscé-dasticité*" de la volatilité.

3.3.1 Les processus ARCH

On souhaite désormais prendre en compte un changement éventuel de la variance au cours du temps. Cela devient possible grâce notamment aux processus ARCH (pour "*AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*") introduits par Engle en 1983[9]. L'idée de cette méthode, avec les notations précédentes, est de

déterminer la distribution de ϵ_t conditionnellement à toutes les valeurs passées X_{t-1}, X_{t-2}, \dots . Considérons qu'on a

$$X_t = \epsilon_t$$

La distribution de ϵ_t conditionnellement au passé est la suivante :

$$\epsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

où la variance conditionnelles σ_t^2 dépend du temps et est égale à

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2$$

Le modèle pour X_t qu'on vient de définir correspond au processus $ARCH(p)$. Ainsi, σ_t^2 est relié linéairement au carré des p dernières observations. Si les observations sont élevées en valeur absolue, la σ_t^2 a tendance à être élevée également, de même de petites observations induisent une volatilité plus faible.

Tout comme pour les paramètres des modèles $ARMA$, les paramètres des modèles $ARCH$ peuvent être estimés par la technique du maximum de vraisemblance, par la méthode des moments généralisés ou par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance.

3.3.2 Propriétés des processus ARCH

Tout d'abord, on peut calculer l'espérance conditionnelle et inconditionnelle du processus $ARCH[8]$. Avec les notations précédentes, on obtient aisément :

$$E(X_t | X_{t-1}, \dots, X_0) = E(\epsilon_t | X_{t-1}, \dots, X_0) = E(\epsilon_t) = 0$$

En utilisant la loi des espérances itérées, on peut calculer l'espérance inconditionnelle du processus :

$$E(X_t) = E(E(X_t | X_{t-1}, \dots, X_0)) = 0$$

Ensuite, on peut calculer la variance conditionnelle ou inconditionnelle du processus $ARCH$. En effet, la définition d'un processus $ARCH$ fait intervenir la notion de variance conditionnelle. Cette dernière permet de modéliser la variance locale du processus à chaque instant t , en fonction des observations antérieures :

$$E(X_t^2 | X_{t-1}, \dots, X_0) = E(\epsilon_t^2 | X_{t-1}, \dots, X_0) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2$$

A l'aide de ce résultat, on peut calculer la variance inconditionnelle du processus :

$$v_t = E(X_t^2) = E(E(X_t^2 | X_{t-1}, \dots, X_0)) = \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t-1}^2) + \dots + \alpha_p E(X_{t-p}^2)$$

on obtient donc une récurrence

$$v_t = \alpha_0 + \alpha_1 v_{t-1} + \cdots + \alpha_p v_{t-p}$$

dont la solution est la suivante :

$$v_t = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 + \cdots + \alpha_p} \text{ sous la condition } \sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$$

En résumé, si (X_t) est un processus $ARCH(p)$, alors :

- $E(X_t|X_{t-1}, \dots, X_0) = 0$
- $E(X_t) = 0$
- $Var(X_t|X_{t-1}, \dots, X_0) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p X_{t-p}^2$
- $Var(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 + \cdots + \alpha_p}$ si $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$

Ainsi, contrairement à la variance inconditionnelle, la variance conditionnelle n'est pas constante en t.

3.3.3 Simulations des processus ARCH

Afin de mieux comprendre ce modèle, on peut essayer de simuler des processus $ARCH(p)$:

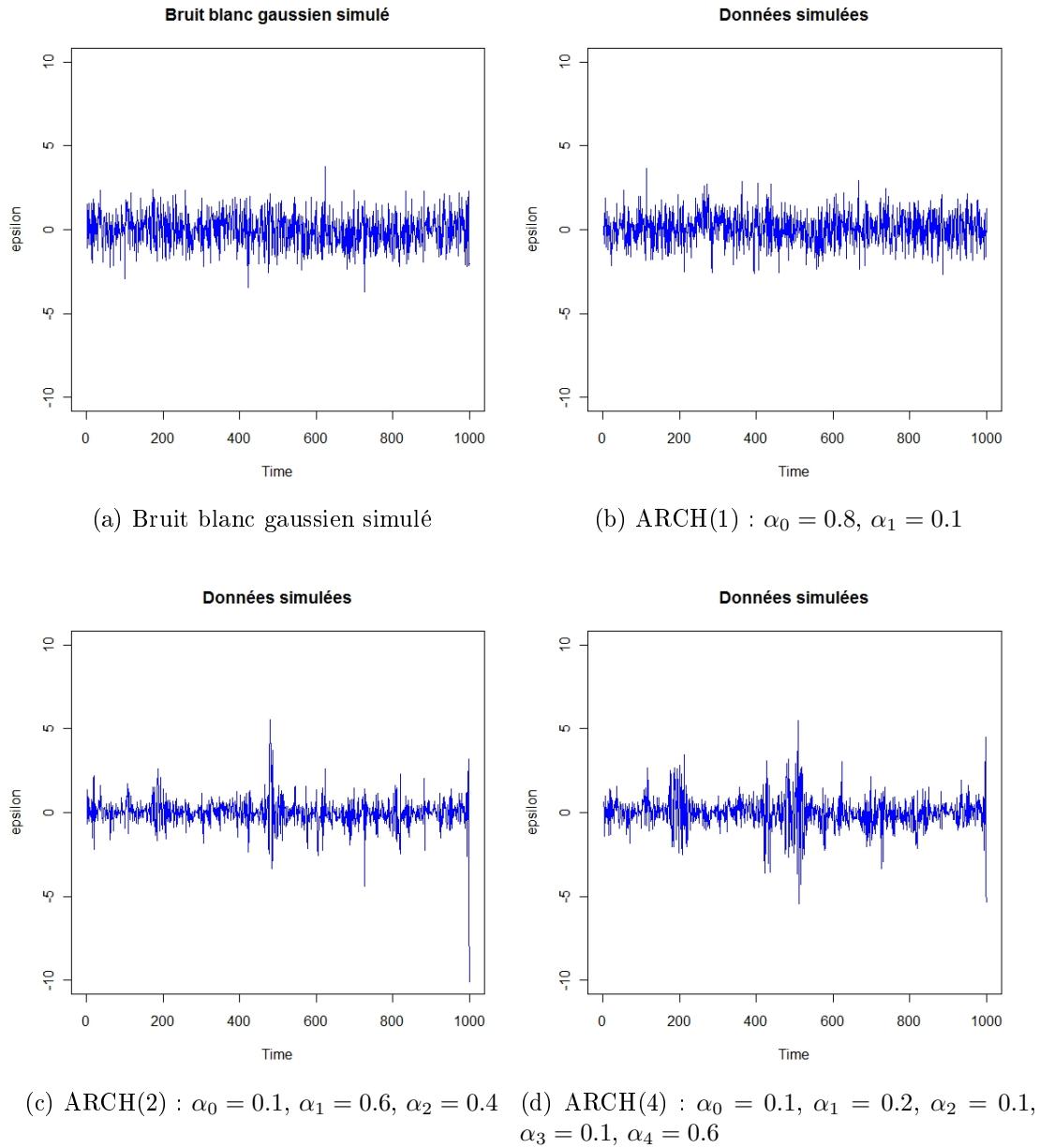


FIGURE 42 – Simulation des processus ARCH

On peut constater que plus le nombre de paramètres du modèle est élevé, plus la volatilité est persistante. Plus précisément, l'ordre p du modèle détermine la durée de la persistence du choc. Ainsi, en augmentant le nombre de paramètres, on accentue le phénomène de "cluster".

3.3.4 Cas pratique avec CAC40

Utilisons de nouveau le jeu de données concernant le CAC40. Pour déterminer l'ordre p du modèle $ARCH[7]$, on utilise le critère AIC du modèle AR appliqué au carré des rendements centrés du CAC40¹¹ :

```
> ar(x = rendement_centre[1:(length(rendement_centre) - 10)]^2, aic = TRUE, order.max = 5)
Call:
ar(x = rendement_centre[1:(length(rendement_centre) - 10)]^2,      aic = TRUE, order.max = 5)

Coefficients:
 1       2
0.1706  0.2052

Order selected 2  sigma^2 estimated as  1.899e-05
```

FIGURE 43 – Meilleur modèle AR pour le carré des rendements

L'ordre p qui minimise le critère AIC est obtenu pour $p = 2$. On utilise donc le modèle $ARCH(2)$ pour nos rendements centrés :

```
Call:
garch(x = rendement_centre, order = c(0, 2), trace = FALSE)

Model:
GARCH(0,2)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-2.7013 -0.7420  0.1014  0.6620  2.6492 

Coefficient(s):
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
a0  0.0015985  0.0003216   4.970 6.68e-07 ***
a1  0.2637678  0.1332144   1.980  0.0477 *  
a2  0.2312624  0.1166530   1.982  0.0474 *  
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

FIGURE 44 – Les paramètres du modèle ARCH(2)

On peut tester l'indépendance des résidus de ce modèle :

11. cf la partie "Propriétés des processus GARCH"

```

> Box.test(archFitoutput$residuals)

Box-Pierce test

data: archFitoutput$residuals
X-squared = 0.1984, df = 1, p-value = 0.656

```

FIGURE 45 – Teste d’indépendance des résidus

La p -valeur est égale à 0.66, on conclut donc que les résidus sont indépendants.

De même, on peut tester la normalité des résidus obtenus par ce modèle :

```

> shapiro.test(archFitoutput$residuals)

Shapiro-Wilk normality test

data: archFitoutput$residuals
W = 0.9916, p-value = 0.2937

```

FIGURE 46 – Teste de normalité des résidus

On obtient une p -valeur de 0.3, ce qui confirme la normalité des résidus de ce modèle.

Passons à présent à la prévision des rendements centrés auxquels on a enlevé les 10 dernières observations

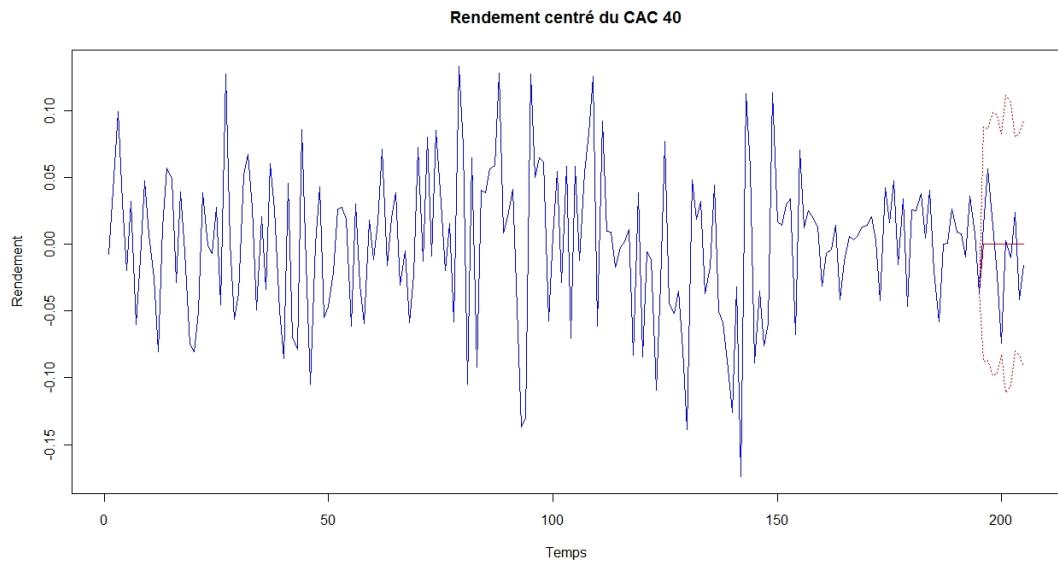


FIGURE 47 – Prévision à un horizon de 10 mois

Sur ce graphe, on a représenté en bleu les valeurs effectives des rendements centrés, et en rouge l'intervalle de confiance pour les valeurs prévues à l'aide du modèle $ARCH(2)$.

On obtient ainsi pour CAC40, les bornes d'intervalle de confiance suivantes :

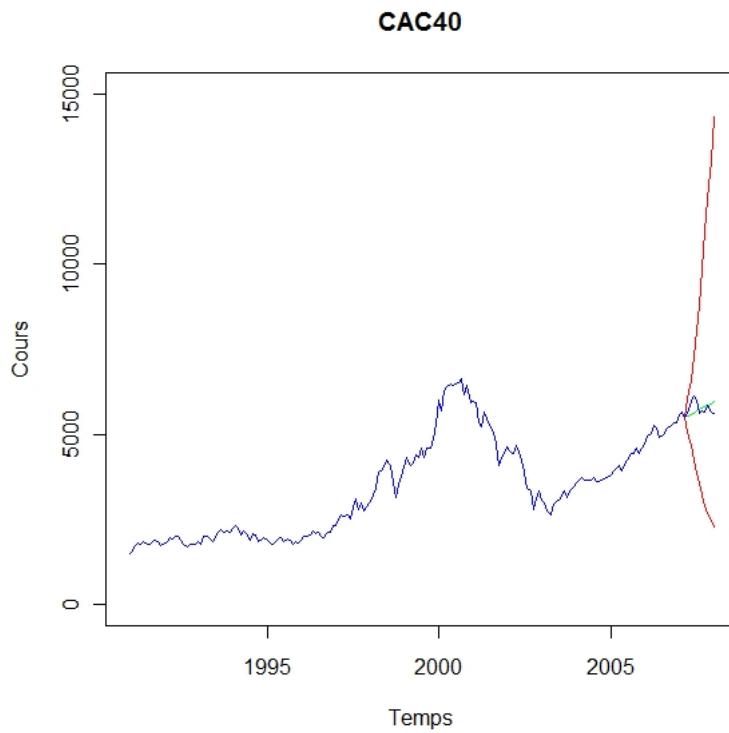


FIGURE 48 – Prévision à un horizon de 10 mois

On constate que l'écart entre la borne supérieure et la borne inférieure de la dernière valeur prévue a largement diminué par rapport au modèle $ARMA(4, 2)$. Plus précisément, la valeur de cet écart est de

```
> donnees_prev_up[length(donnees_prev_up)] - donnees_prev_down[length(donnees_prev_down)]
[1] 12030.75
```

FIGURE 49 – Ecart entre la borne supérieure et la borne inférieure

3.3.5 Les processus GARCH

Voyons maintenant comment on peut définir les modèles $GARCH(p, q)$ ¹². En effet, la définition du modèle $ARCH$ peut être généralisée pour obtenir les modèles

12. Ces modèles ont été proposés par Bollerslev en 1986

GARCH. Comme précédemment, considérons le modèle :

$$X_t = \epsilon_t$$

Soit (η_t) une suite de variable *i.i.d.*, avec $E(\eta_t) = 0$ et $E(\eta_t^2 = 1)$, (ϵ_t) est un processus *GARCH*(p, q) s'il vérifie

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases}$$

avec $\omega_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, q$) et $\beta_j \geq 0$ ($i = 1, \dots, p$). Ainsi, pour $p = 0$, on obtient le modèle *ARCH*(q).

3.3.6 Propriétés des processus GARCH

Tout d'abord, on peut remarquer que le carré d'un modèle *GARCH* n'est rien d'autre que le modèle *ARMA*[2]. Pour cela, posons

$$u_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$$

Comme

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

En substituant, on a donc

$$\epsilon_t^2 - u_t = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j (\epsilon_{t-j}^2 - u_{t-j})$$

Soit

$$\epsilon_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j u_{t-j} + u_t$$

Ainsi, cette remarque nous permet d'utiliser les résultats concernant les modèles *ARMA* pour déterminer l'ordre p et q . Cependant, en pratique, on a très souvent recours au modèle *GARCH*(1, 1).

De même que pour les processus *ARCH*, dans le cas des processus *GARCH*[8] on a :

$$E(X_t | X_{t-1}, \dots, X_0) = E(\epsilon_t | X_{t-1}, \dots, X_0) = E(\epsilon_t) = 0$$

et

$$E(X_t) = E(E(X_t | X_{t-1}, \dots, X_0)) = 0$$

Cependant, en ce qui concerne la variance, dans le cas général, son calcul n'est pas direct.

Et enfin, on peut également donner la condition de stationnarité[8] des processus $GARCH(p, q)$:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

3.3.7 Exemple instructif avec CAC40

Reprenons de nouveau les données du CAC40 précédemment utilisées. Commençons par les valeurs de maximum de vraisemblance du carré des rendements centrés du CAC40 afin de déterminer la valeur de p et de q :

```
> Valeur_Criterie[,]
 [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
 [1,] 776.0096 779.2037 784.8844 785.3253 785.7358 786.1602
 [2,] 780.5991 783.6580 785.2172 788.3111 788.3778 787.4422
 [3,] 784.7908 784.7926 785.5731 785.8193 788.3674 789.2820
 [4,] 784.7935 787.9057 786.1207 788.5056 788.5321 790.5431
 [5,] 785.0553 787.1222 787.8550 788.4812 790.7498 790.9372
 [6,] 786.5245 786.8223 788.4557 789.7930 791.2137 791.9131
>
> sort(Valeur_Criterie[,])
 [1] 776.0096 779.2037 780.5991 783.6580 784.7908 784.7926 784.7935 784.8844
 [9] 785.0553 785.2172 785.3253 785.5731 785.7358 785.8193 786.1207 786.1602
[17] 786.5245 786.8223 787.1222 787.4422 787.8550 787.9057 788.3111 788.3674
[25] 788.3778 788.4557 788.4812 788.5056 788.5321 789.2820 789.7930 790.5431
[33] 790.7498 790.9372 791.2137 791.9131
```

FIGURE 50 – Log de maximum de vraisemblance pour $p = 0 \dots 5$ et $q = 0 \dots 5$

On constate que ces valeurs sont assez proches, c'est pourquoi on admettra le modèle fréquemment utilisé de $GARCH(1,1)$. Déterminons maintenant les paramètres du modèle :

```

Call:
garch(x = rendement_centre, order = c(1, 1))

Model:
GARCH(1,1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-2.4706 -0.6901  0.1129  0.6479  2.8723 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
a0 0.0001161  0.0001287   0.902   0.3669    
a1 0.1646036  0.0789514   2.085   0.0371 *  
b1 0.8018279  0.0929740   8.624  <2e-16 *** 

```

FIGURE 51 – Rendement modélisé par GARCH(1,1)

Testons l'indépendance des résidus de ce modèle :

```

> Box.test(garchFitoutput$residuals)

Box-Pierce test

data: garchFitoutput$residuals
X-squared = 0.1432, df = 1, p-value = 0.7051

```

FIGURE 52 – Teste d'indépendance des résidus

La p -valeur est de 0.71, on en conclut donc que les résidus sont indépendants.

On n'oublie pas de tester également la normalité des résidus de ce modèle :

```

> shapiro.test(garchFitoutput$residuals)

Shapiro-Wilk normality test

data: garchFitoutput$residuals
W = 0.9918, p-value = 0.3071

```

FIGURE 53 – Teste de normalité des résidus

On obtient une p -valeur de 0.31, ce qui confirme la normalité des résidus de ce modèle.

Passons maintenant à la modélisation de la volatilité du CAC40 à l'aide de ce modèle. Pour cela, on considère donc les données concernant le rendement centré du CAC40 :

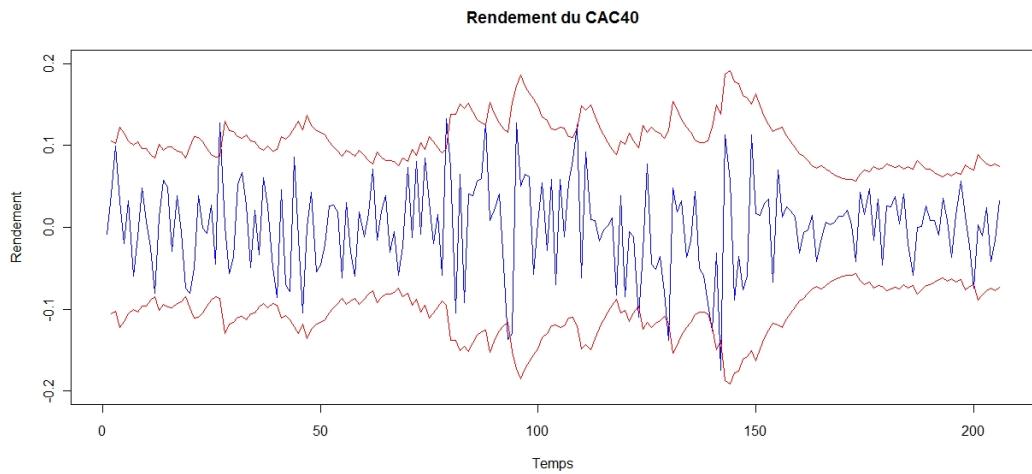


FIGURE 54 – Rendement modélisé par GARCH(1,1)

On a représenté en rouge les bornes obtenues à l'aide des écart-types issus de notre modèle ARCH(1,1). On peut constater que l'ajustement est plutôt pertinent.

Essayons maintenant de faire des prévisions à l'aide de ce modèle

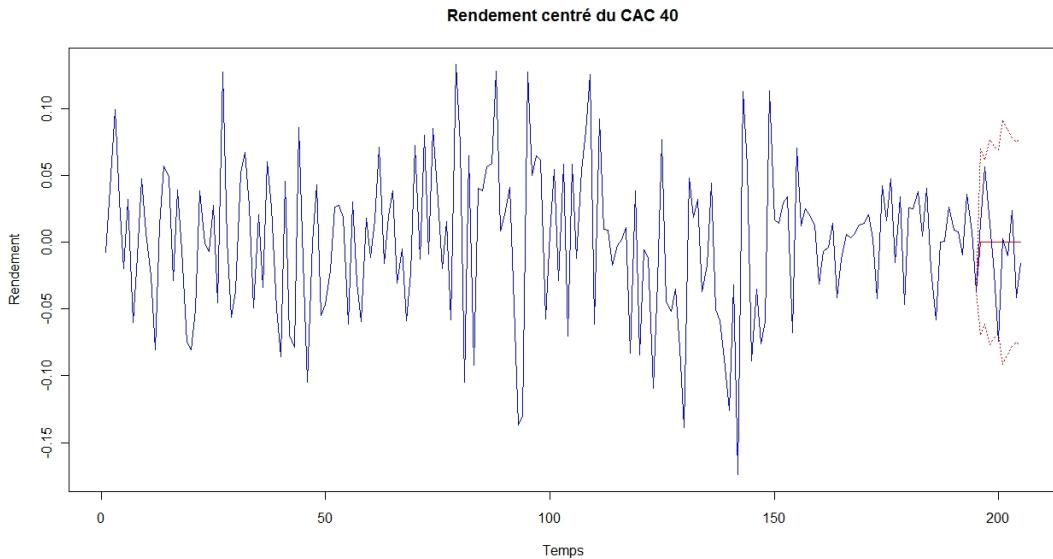


FIGURE 55 – Prévision à un horizon de 10 mois

La courbe des rendements est représentée en bleu, la courbe des rendements prévus par GARCH(1,1) est représentée en rouge, encadré par deux autres courbes représentant la borne supérieure et la borne inférieure de l'intervalle de confiance pour chaque valeur prédite. On obtient alors pour les cours du CAC40 le graphe ci-dessus, qu'on compare à la courbe de CAC40 dans le cas de l'utilisation du modèle ARMA et du modèle ARCH :

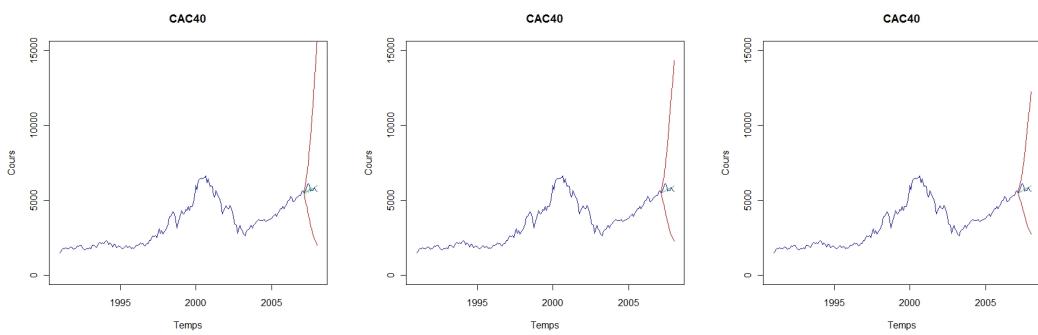


FIGURE 56 – ARMA(4,2) à gauche, ARCH(2) au centre et GARCH(1,1) à droite

Calculons précisément la valeur de l'écart entre la borne supérieure et la borne

inférieure de la dernière prévision :

```
> donnees_prev_up[length(donnees_prev_up)] - donnees_prev_down[length(donnees_prev_down)]
[1] 9519.726
```

FIGURE 57 – Ecart entre la borne supérieure et la borne inférieure

Ainsi, on a les valeurs suivantes pour chaque modèle :

	ARMA	ARCH	GARCH
Taille de l'intervalle de confiance (95%)	13902	12031	9520

On constate qu'il y a eu un réel gain au niveau de l'intervalle de confiance. En effet, la longueur de l'intervalle de confiance s'est considérablement réduite en passant du modèle *ARMA(4, 2)* au modèle *ARCH(2)*, puis au modèle *GARCH(1, 1)*.

3.4 Application pour le choix d'un portefeuille

Dans cette partie, nous essayerons d'appliquer les momentum dans un but de constituer un portefeuille dynamique, *i.e.* les valeurs du portefeuille peuvent varier au cours du temps. On constituera également des portefeuilles basés uniquement sur les prévisions des modèles ARMA et GARCH. On verra alors leur évolution au cours du temps, et on les comparera aux portefeuilles momentum.

3.4.1 La méthodologie

Pour mener à bien cette tâche, nous disposons des données issues de *Bloomberg* :

	31/01/2008	31/12/2007	30/11/2007	31/10/2007	28/09/2007	31/08/2007	31/07/2007	29/06/2007	31/05/2007
AVAZ RU Equity	1.82	1.8	1.6	1.6	1.6	1.6	1.74	1.4	1.05
FORTS TI Equity	1.62	2.24	2.3	2.58	2.76	2.84	2.88	2.62	2.7
ANSGR TI Equity	1.38	2	2.04	2.16	2.28	2.24	2.33	1.98	2.10909
FFKRL TI Equity	1.85	3.32	3.96	4.04	4.08	4.02	4.6	4.08	4.24
HURGZ TI Equity	3.14	3.62	3.66258	4.13773	3.78137	3.42501	3.95955	3.60319	3.91995
DOHOL TI Equity	1.58	2.22	2.29	2.56	2.64	2.49	2.82	2.64	2.88
AKGRT TI Equity	4.8	6.9	7.35	8.6	8.35	8.75	9.1	7.9	7.3
FINBN TI Equity	5.2	5.25	5.3	5.3	5.15	5.25	5.45	5.3125	5.40179
SBER RU Equity	3.6	4.22	4.23	4.3	4.17	3.83	4.15	3.89	3.54
YKBNK TI Equity	3.1	4.12	4.4	4.54	3.86	3.74	3.88	2.92	2.98
PARN TI Equity	1.89	2.8	2.82	2.82	2.96	2.35	2.58	2.58	2.74
ACAN FP Equity	2.34	2.5	2.63	2.99	2.95	3.04	3.3	3.4	3.55
SNGS RU Equity	0.9456	1.24	1.2	1.325	1.365	1.27	1.14	1.095	1.1
UNYEC TI Equity	6.05	6.7	7	7.2	6.9	7.35	7.9	7.05	5.45
EGPRO TI Equity	3.16	3.9	4.32	4.38	4.44	4.32	4.34	4.24	4.52
TSKB TI Equity	1.36	1.93	1.93	1.97	2.14	1.95	2.21	2.03	2.12
ISCTR TI Equity	5.8	7.35	7.65	7.95	7.3	6.35	7.1	6.15	6.15
GUSGR TI Equity	1.65	1.85	1.98	2.23	2.38	2.43	2.5	2.02	2.09
MSNG RU Equity	0.226	0.238	0.2475	0.257	0.25	0.2363	0.2333	0.237	0.229
BOLUC TI Equity	1.67	2.28	2.38	2.56	2.62	2.76	3.06	2.92	2.68

FIGURE 58 – Données issues de *Bloomberg*

Il s'agit du cours boursier d'environ 4000 entreprises, entre mars 1996 et février 2008. Ce sont des données mensuelles.

A l'aide de ces données, on construit alors différents portefeuilles. La stratégie adoptée est bien sûr différente pour chaque méthode. On peut donner quelques précisions à ce sujet :

- *MACD* : pour chaque entreprise on calcule le rapport entre la moyenne mobile simple 6 mois et la moyenne mobile simple 12. Ce calcul est effectué mensuellement et pour les 4000 entreprises. Puis on trie ces valeurs mensuelles pour ne garder finalement que les 100 entreprises ayant les momentum les plus faibles. En effet, un faible momentum signifie dans ce cas une période de survente, et donc à priori il faut investir dans ces valeurs sous-évaluées.

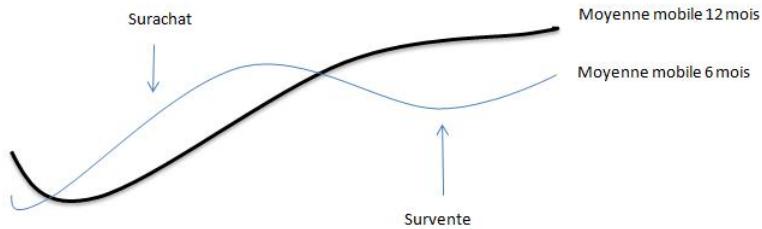


FIGURE 59 – Illustration surachat/survente

On constitue alors un portefeuille contenant 100 valeurs. Et pour chaque mois suivant, on regarde si son momentum est inférieur ou supérieur à 1.1 (et non pas à 1, car la valeur de 1.1 permet d'avoir des transactions régulièrement, mais pas de façon trop fréquente). Si le momentum est inférieur à 1.1, on est alors dans une période de survente, donc on garde notre valeur. Cependant, si le momentum est supérieur à 1.1, on se retrouve alors dans une période de surachat, et c'est l'occasion de vendre notre valeur.

- *RSI* : idem que précédemment, mais ici on considère 24 mois pour le calcul du momentum et on liquide notre position si le momentum est supérieur à 70% (*i.e.* la valeur la plus fréquemment utilisée).
- *Bandes de Bollinger* : pour les bandes de Bollinger, la principale difficulté est de déterminer le resserrement des bandes.

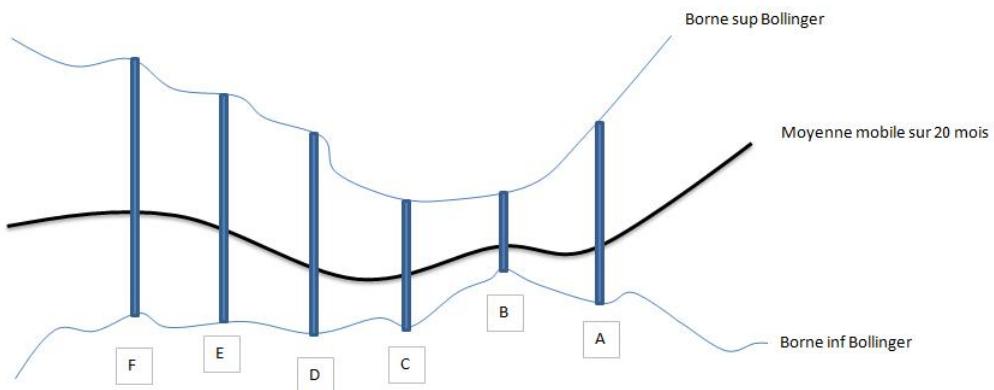


FIGURE 60 – Détermination du resserrement des bandes de Bollinger

Tant qu'on se trouve entre les instants B et F, il nous est impossible de détecter ce resserrement. Ce qu'on peut dire à ce stade, c'est qu'entre les instants F et B, les bandes se resserrent. Cependant, à partir de l'instant A, on constate que le resserrement était maximal à l'instant B. Et le phénomène

est d'autant plus important que le rapport entre l'écart à l'instant B et à l'instant A est petit. On trie alors les entreprises selon ce rapport, les "meilleures" étant celle pour lesquelles ce rapport est petit.

En parallèle, on calcule le rapport entre les prix et la moyenne mobile 20 mois. Si ce rapport est supérieur à 1, alors on se trouve dans une période de surachat, et inversement, si ce rapport est inférieur à 1, on se trouve alors dans une période de survente.

Chaque mois, on regarde si on se trouve au début de l'écartement des bandes. Si c'est le cas, et si le rapport entre les prix et la moyenne mobile précédemment calculé est supérieur à 1, alors on profite de la période de surachat, et on procède à la vente de notre action. On achète alors un titre étant dans une période de survente.

- *Lissage Exponentiel* : pour l'ensemble des entreprises, on prend $\alpha = 0.10$. Les premières prévisions sont basées sur 12 mois de données.
- *ARMA* : on utilise des modèles $ARMA(p, q)$, et afin d'accélérer le processus des calculs, on se restreint à des valeurs inférieures ou égales à 3 pour p et pour q . Chaque mois, on se base sur des données des mois précédents pour déterminer les paramètres du modèle, et procéder à la prévision pour le mois en cours.
- *ARCH* : ici, on utilise des modèles ARCH(p) pour lequel $p \geq 1$ pour l'ensemble des données afin de prévoir les volatilités¹³. On se base alors sur ces dernières pour déterminer la borne inférieure de l'intervalle de confiance des valeurs prévues, et on ne prendra en compte que ces valeurs minimales.
- *GARCH* : ici, on utilise des modèles simples de GARCH(1,1) pour l'ensemble des données afin de prévoir les volatilités. De même que pour les modèles ARCH, on se base sur ces volatilités pour déterminer la borne inférieure de l'intervalle de confiance des valeurs prévues, et on ne prendra en compte que ces valeurs minimales.

Quelque soit la méthode, on obtient un classement des entreprises dans l'ordre de préférence d'investissement. On choisit alors les 100 premières entreprises, et on investit une valeur initiale de 100 unités monétaire. Le schéma suivant permet de comprendre comment sont constitués les portefeuilles :

13. Limitation imposée par la bibliothèque "tseries" sous R, car $p = 0$ arrête l'exécution du programme.

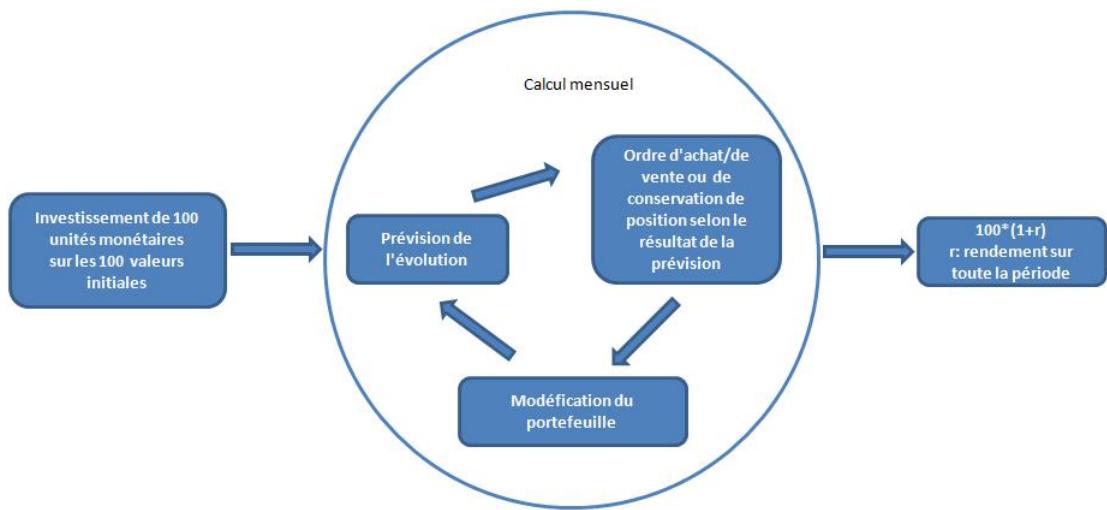


FIGURE 61 – Synthèse des étapes de constitution des portefeuilles

3.4.2 Analyse des portefeuilles

Regardons maintenant en détail l'évolution de nos portefeuilles. Ci-dessous on a représenté l'évolution des portefeuilles basés sur *MACD* et *RSI* :

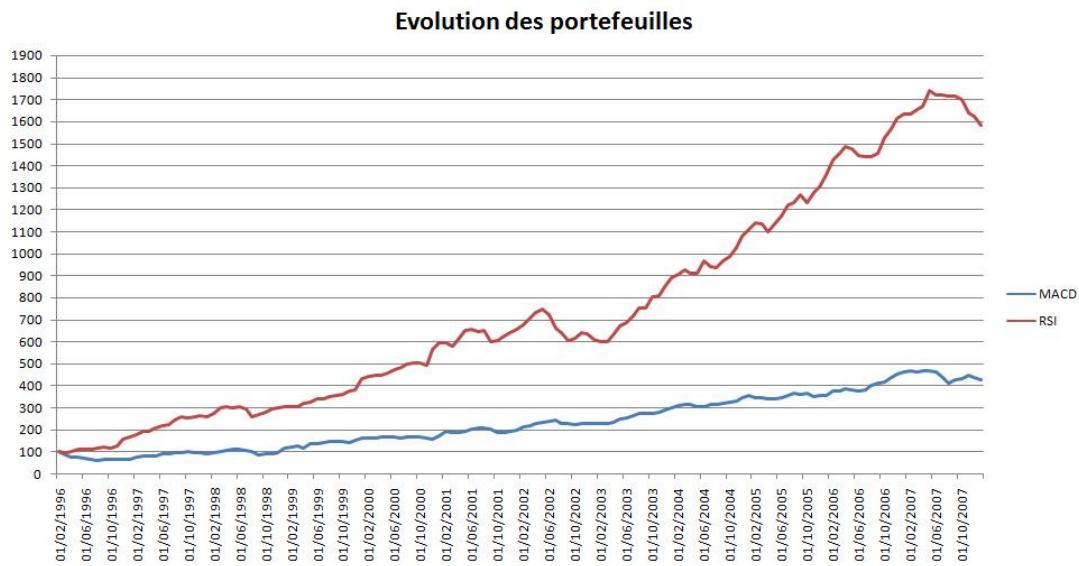


FIGURE 62 – Exemple d'évolution de portefeuille : cas de MACD et RSI

On part d'une valeur de 100 um pour les deux portefeuilles, et on constate que la stratégie basée sur le *RSI* est plus payante que la stratégie basée sur le *MACD*, puisque on passe d'une valeur de 100 um à 1600 um pour le *RSI*, alors qu'on passe de 100 um à moins de 450 um pour le *MACD*.

On fait alors la même comparaison pour toutes les méthodes retenues :

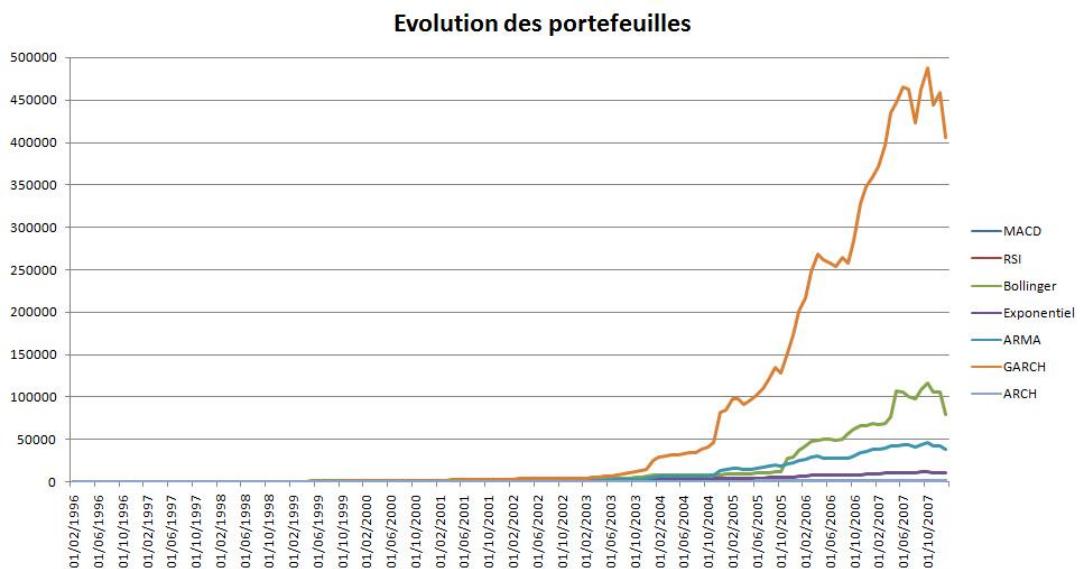


FIGURE 63 – Evolution des portefeuilles

Ici on constate la surperformance de la stratégie basée sur les modèles *GARCH*. De plus, on constate que la stratégie basée sur les *bandes de Bollinger* est plus performante en terme de rentabilité que la stratégie basée sur les modèles *ARMA*.

3.4.3 Prise en compte du risque

Il serait peu prudent de se baser uniquement sur le rendement pour juger de la performance des modèles. En effet, il faut inclure aussi le risque pour chaque modèle. Dans le cadre de ce mémoire, on utilise la volatilité en tant que mesure de risque, cependant remarquons que ce n'est pas la seule mesure de risque. On aurait pu par exemple utiliser la *Value At Risque* comme l'a fait Engle dans l'article "*The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics*"[9].

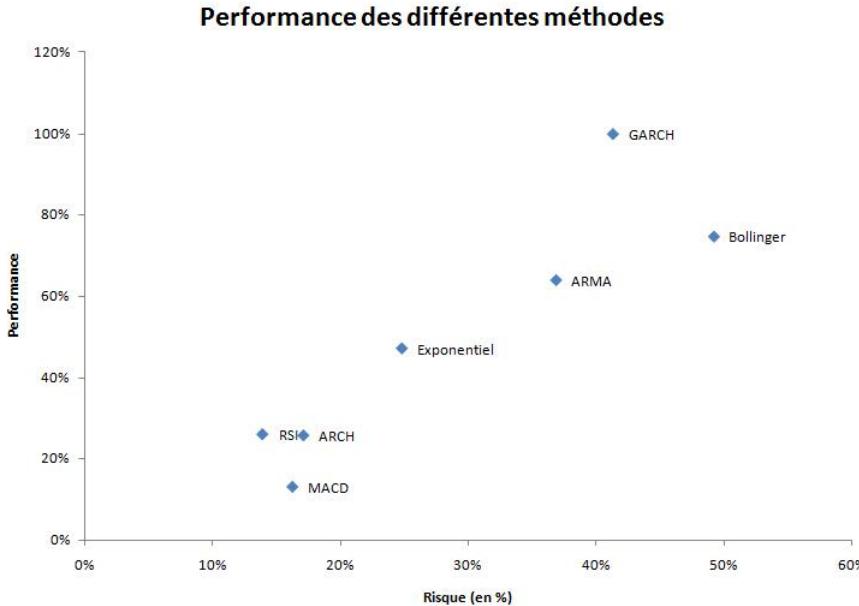


FIGURE 64 – La performance en fonction du risque

Sur le graphe ci-dessus, on a représenté le rendement annuel de chaque méthode, en fonction de leur volatilité annuelle. Sur ce graphe, on retrouve une notion assez rependue de la finance, à savoir la notion de *la frontière efficiente*. Autrement dit, la performance croît avec le risque. La question qu'on peut se poser ici est de savoir si la prise de risque est bien rémunérée, ou mieux, si la prise de risque est surrémunérée et de combien ?

3.4.4 Comparaison des différentes méthodes

Pour répondre à la question précédente, on peut utiliser le *ratio de Sharpe*. Qu'appelle-t-on le *Ratio de Sharpe* ? Il s'agit d'un ratio qui mesure l'écart entre le rendement d'un portefeuille d'actifs financiers et le rendement d'un placement sans risque, divisé par la volatilité du portefeuille. Formellement, on a la relation suivante :

$$S = \frac{R - r}{\sigma}$$

où R est le taux de rendement du portefeuille considéré, r étant le référentiel de comparaison choisi (dans les applications ci-dessous, on prendra le taux d'emprunt

de l'Etat français sur un horizon de 10 ans), et σ l'écart-type du taux de rendement du portefeuille considéré¹⁴.

Si $0 < S \leq 0.5$, on considère alors que le surrendement du portefeuille se fait pour une prise de risque trop élevée.

Si $S > 0.5$, on considère alors que la surperformance ne se fait pas au prix d'un risque trop élevé.

On obtient ainsi le *ratio de Sharpe* pour les différents portefeuilles :

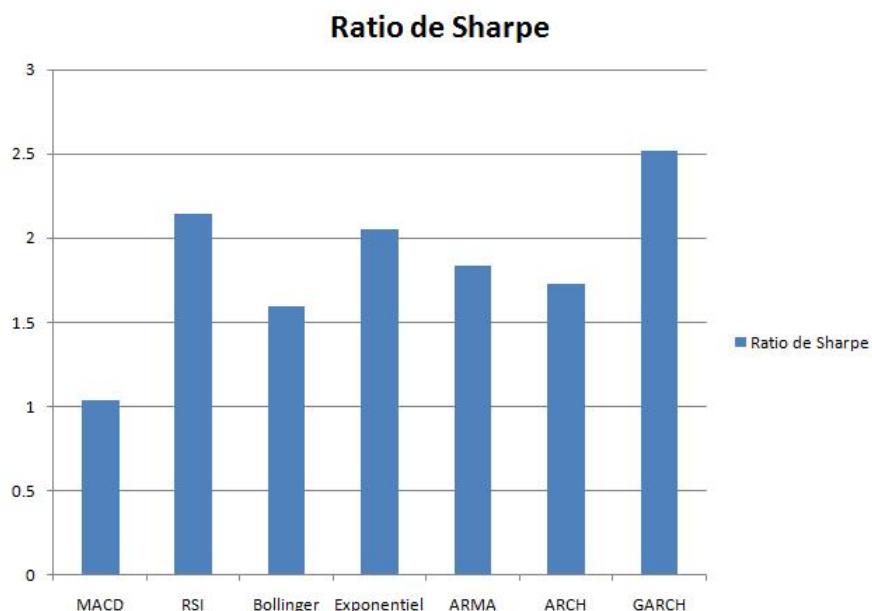


FIGURE 65 – Le Ratio de Sharpe des portefeuilles

Tout d'abord, on peut constater que la surperformance de toutes les méthodes par rapport au référentiel se fait sans prise de risque excessive (les ratios de *Sharpe* étant tous supérieurs à 0.5). Ensuite, on peut constater que c'est la méthode de *GARCH* qui obtient le *ratio de Sharpe* le plus élevé, donc à risque égal, cette méthode donne le meilleur rendement que les autres méthodes. Et enfin, on peut constater qu'il y a une surprise : il s'agit du portefeuille basé sur le momentum *RSI*, qui a un *ratio de Sharpe* plus élevé que les portefeuilles basés sur les modèles *ARMA* ou *lissage exponentiel*.

14. source Wikipédia

Conclusion

À travers ce mémoire, on a vu quelques propriétés communes des momentum, et on s'est intéressé particulièrement aux momentum les plus utilisés sur le marché boursier, faute de pouvoir s'intéresser à tous les momentum, qui sont il faut le reconnaître bien nombreux. Parmi les momentum auxquels on s'est intéressé, on en a choisi trois (*à savoir* le MACD, le RSI et les bandes de Bollinger) d'abord à l'aide de calcul des coefficients de corrélation, et ensuite à l'aide de l'Analyse en Composantes Principales (ACP). On a alors évoqué les critiques formulées à l'égard des momentum, et on a introduit des outils qui ont une justification théorique et qui peuvent être utilisés dans le même but que les momentum.

En s'appuyant uniquement sur le rendement des portefeuilles constitués à l'aide de chaque méthodes, on a constaté que le modèle GARCH obtenait le meilleur rendement, suivi du momentum bandes de Bollinger et du modèle ARMA. Cependant, en prenant en compte le risque, présenté dans le cadre de ce mémoire par la volatilité, on a constaté que le niveau de risque de ces trois modèles étaient également élevé par rapport aux autres modèles. Ainsi, il a fallu utiliser un critère permettant de comparer les différents modèles, en prenant en compte le rendement et le niveau de risque. C'est dans ce but qu'on a utilisé les ratios de *Sharpe*. Compte tenu de niveau de risque, on s'est aperçu que le momentum RSI était meilleur que les modèles de lissage exponentiel, ARMA ou encore ARCH. Cependant, le modèle GARCH restait meilleur malgré le niveau de risque élevé.

Ce qu'on peut conclure de cette étude, c'est qu'il n'y a pas une différence significative en ce qui concerne le résultat obtenu à l'aide des momentum, qui on le rappelle restent des méthodes non scientifiques, et les méthodes qui ont une base scientifique, comme les modèles ARMA et (G)ARCH, même si ces derniers sont beaucoup plus coûteux en calcul que les momentum. Seul le modèle GARCH donne des résultats légèrement meilleurs que les autres méthodes, mais on peut évoquer le fait que sur le marché, les traders utilisent non pas un seul momentum, mais plusieurs momentum et également leur combinaison, et ils peuvent donc ainsi avoir des résultats encore meilleurs que les modèles GARCH. C'est pourquoi la surperformance du modèle GARCH est à prendre avec des précautions.

Première partie

Annexes

A Les différents tests

A.1 Test de Box-Pierce ou Ljung-Box (Box)

La statistique Q de Ljung-Box permet de tester l'hypothèse d'indépendance sérielle d'une série (ou que la série est bruit blanc). Plus spécifiquement cette statistique teste l'hypothèse que les n coefficients d'auto-corrélation sont nuls. Elle est basée sur la somme des auto-corrélations de la série et elle est distribuée selon une loi Chi-carrée avec n degrés de liberté.

L'hypothèse nulle est alors donnée par :

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_n = 0$$

La statistique du test est alors :

$$Q = n(n+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{\rho}_j^2}{n-j}$$

où n est la taille de l'échantillon, $\hat{\rho}_j^2$ est l'auto-corrélation de retard j , et h nombre de retards à tester. Pour un niveau de signification α , l'hypothèse H_0 est rejetée si

$$Q > \chi_{1-\alpha,h}^2$$

A.2 Test Dickey-Fuller Augmenté (adf)

Le test de Dickey Fuller simple (1979) est un test de racine unitaire (ou de non stationnarité) dont l'hypothèse nulle est la non stationnarité d'un processus auto-régressif d'ordre un. Considérons un processus (X_n) satisfaisant la représentation $AR(1)$ suivante :

$$X_n = \rho X_{n-1} + u_n$$

où u_n est un bruit blanc, $\rho \in \mathbb{R}$.

Le principe général du test de Dickey Fuller consiste à tester l'hypothèse nulle de la présence d'une racine unitaire :

$$H_0 : \rho = 1$$

$$H_1 : |\rho| < 1$$

Si $\rho = 1$, alors la variable X_n est une variable intégrée d'ordre 1. C'est le cas du modèle de marche aléatoire sans dérive. Si $\rho < 1$, alors la variable X_n est stationnaire.

Si $\rho = 1$, la variance de X_n est dépendante de n , ce qui va à l'encontre de la condition de stationnarité ; par contre si $\rho < 1$, la variance de X_n est indépendante de n (constante). La statistique de ce test est la statistique t usuelle avec des valeurs critiques calculées par Dickey et Fuller.

Le test de racine unitaire Dickey-Fuller augmenté est utilisé quand les variables sont autocorrélées. Le test consiste à tester l'hypothèse $\alpha = 1$ du modèle :

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta X_{n-i} + v_n$$

Le deuxième terme à droite de l'équation a pour but de corriger le problème d'autocorrélation. Dans le cas d'indépendance sérielle, $\gamma_i = 0 \forall i$, et par conséquent le test de racine unitaire Dickey-Fuller augmenté est identique au test Dickey-Fuller. Les valeurs critiques sont identiques à celles du test précédent.

A.3 Test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

Le test de KPSS[3] est un test de stationnarité. Soit X une variable aléatoire réelle et X_1, X_2, \dots, X_n , n réalisations de X . Supposons que l'on puisse décomposer cette série sous la forme suivante :

$$X_n = r_n + \beta n + \epsilon_n$$

où r_n est un marche aléatoire, *i.e.* $r_n = r_{n-1} + u_n$ avec $u_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$, βn une tendance déterministe et ϵ_n l'erreur stationnaire. Dans ce modèle, pour tester si (X_n) est une tendance stationnaire, *i.e.* la série est stationnaire au tour d'une tendance déterministe, l'hypothèse H_0 serait $\sigma_u^2 = 0$, contre l'hypothèse $H_1 : \sigma_u^2 > 0$. Dans un autre cas de stationnarité, à savoir le cas où la série est stationnaire au tour d'une constante, l'hypothèse H_0 serait $\beta = 0$.

Dans le cas de stationnarité au tour d'une tendance, sous l'hypothèse H_0 , les résidus obtenus lors d'une régression linéaire de X sont les suivantes : $e_n = \epsilon_n$. Dans le cas de stationnarité au tour d'une constante, sous l'hypothèse H_0 , les résidus sont données par : $e_n = X_n - \bar{X}$

Posons

$$S_n = \sum_{j=1}^n e_j$$

et

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}[S_N^2]$$

Un estimateur empirique de σ^2 peut être construit à l'aide des résidus e_n (Newey et West, 1987) :

$$\hat{\sigma}^2(p) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_n^2 + \frac{2}{N} \sum_{j=1}^p w_j(p) \sum_{n=j+1}^N e_n e_{n-j}$$

où p est le retard de troncature, et $w_j(p)$ est un poids, défini par $w_j(p) = 1 - \frac{j}{p+1}$. Le test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin est alors donné par :

$$KPSS = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \frac{S_n^2}{\hat{\sigma}^2(p)}$$

Sous l'hypothèse de stationnarité H_0 au tour d'un point, on à la limite :

$$KPSS \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 V_1(r)^2 dr$$

où $V_1(r)$ est un pont brownien standard, *i.e.* $V_1(r) = B(r) - r * B(1)$ où $B(r)$ est un mouvement brownien standard pour tout r dans $[0; 1]$.

Sous l'hypothèse de stationnarité H_0 au tour d'une tendance, on à la limite :

$$KPSS \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 V_2(r)^2 dr$$

où $V_1(r)$ est un pont brownien standard de seconde ordre, *i.e.*

$$V_2(r) = B(r) + (2r - 3r^2)B(1) + 6r(r-1) \int_0^1 B(s)ds$$

Les valeurs maximales critiques sont données dans le tableau suivant :

TABLE 4. Upper tail critical values for the KPSS test statistic asymptotic distribution

Distribution	Upper tail percentiles			
	0.1	0.05	0.025	0.01
$\int_0^1 V_1(r)^2 dr$	0.347	0.463	0.574	0.739
$\int_0^1 V_2(r)^2 dr$	0.119	0.146	0.176	0.216

FIGURE 66 – Table des des valeurs critiques du test de KPSS

A.4 Test de Shapiro

Le test de Shapiro, aussi appelé test de Shapiro et Wilk, est un test de normalité d'une série d'observations d'une variable quantitative. Soit X une variable aléatoire réelle et X_1, X_2, \dots, X_n , n réalisations de X . On range alors ces observations par ordre croissant :

$$X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots \leq X_n$$

Le test de Shapiro se réalise alors en 6 étapes :

1. On calcule la moyenne de cette série de mesures :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

2. On calcule le nombre T_n défini par :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

3. On calcule les différences suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 &= X_n - X_1 \\ d_2 &= X_{n-1} - X_1 \\ &\vdots \\ d_i &= X_{n-i+1} - X_i \end{aligned}$$

4. On calcule alors le nombre W défini par :

$$W = \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^p (a_j d_j)^2$$

où les coefficients a_j sont données par la table des coefficients, comme ci-dessous par exemple.

$i \backslash n$	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
1	0,432 8	0,429 1	0,425 4	0,422 0	0,418 8	0,415 6	0,412 7	0,409 5	0,406 8	0,404 0	0,401 5
2	0,299 2	0,295 8	0,294 4	0,292 1	0,289 8	0,287 6	0,285 4	0,283 4	0,281 3	0,279 4	0,277 4
3	0,251 0	0,249 9	0,248 7	0,247 5	0,246 3	0,245 1	0,243 9	0,242 7	0,241 5	0,240 3	0,239 1
4	0,215 1	0,215 0	0,214 8	0,214 5	0,214 1	0,213 7	0,213 2	0,212 7	0,212 1	0,211 6	0,211 0
5	0,185 7	0,185 4	0,187 0	0,187 4	0,187 8	0,188 0	0,188 2	0,188 3	0,188 3	0,188 3	0,188 1
6	0,160 1	0,161 6	0,163 0	0,164 1	0,165 1	0,166 0	0,166 7	0,167 3	0,167 8	0,168 3	0,168 6
7	0,137 2	0,139 5	0,141 5	0,143 3	0,144 9	0,146 3	0,147 5	0,148 7	0,149 6	0,150 5	0,151 3
8	0,116 2	0,119 2	0,121 9	0,124 3	0,126 5	0,128 4	0,130 1	0,131 7	0,133 1	0,134 4	0,135 6
9	0,096 5	0,100 2	0,103 6	0,106 6	0,109 3	0,111 8	0,114 0	0,116 0	0,117 9	0,119 6	0,121 1
10	0,077 8	0,082 2	0,086 2	0,089 9	0,093 1	0,096 1	0,098 8	0,101 3	0,103 6	0,105 6	0,107 5
11	0,059 8	0,065 0	0,069 7	0,073 9	0,077 7	0,081 2	0,084 4	0,087 3	0,090 0	0,094 7	
12	0,042 4	0,048 3	0,053 7	0,058 5	0,062 9	0,066 9	0,070 8	0,073 9	0,077 0	0,079 8	0,082 4
13	0,025 3	0,032 0	0,038 1	0,043 5	0,048 5	0,053 0	0,057 2	0,061 0	0,064 5	0,067 7	0,070 6
14	0,008 4	0,015 9	0,022 7	0,028 9	0,034 4	0,039 5	0,044 1	0,048 4	0,052 3	0,055 9	0,069 2
15		0,000 0	0,007 6	0,014 4	0,020 6	0,026 2	0,031 4	0,036 1	0,040 4	0,044 4	0,048 1
16					0,000 0	0,006 8	0,013 1	0,018 7	0,023 9	0,028 7	0,033 1
17							0,000 0	0,005 2	0,011 9	0,017 2	0,022 0
18									0,000 0	0,005 7	0,011 0
19										0,000 0	0,005 3

FIGURE 67 – Table des coefficients a_i pour le test de Shapiro et Wilk

5. On choisit un risque (5% ou 1%) et on compare la valeur de W à une valeur W_{crit} , dite valeur critique, lue dans la table de Shapiro et Wilk.
6. La règle du test est alors la suivante :
 - Si $W > W_{crit}$ on accepte, au risque choisi, l'hypothèse de normalité de la série de mesure.
 - Si $W < W_{crit}$ on rejette l'hypothèse de normalité de la série de mesure.

Table 4b : table des valeurs limites W_α de $W = \frac{b^2}{z^2}$
 pour les risques $\alpha = 5\%$ et 1%
 (Biometrika 1965)

n	Risque 5 %	Risque 1 %
	$W_{0,05}$	$W_{0,01}$
5	0,762	0,686
6	0,788	0,713
7	0,803	0,730
8	0,818	0,749
9	0,829	0,764
10	0,842	0,781
11	0,850	0,792
12	0,859	0,805
13	0,866	0,814
14	0,874	0,825
15	0,881	0,835
16	0,887	0,844
17	0,892	0,851
18	0,897	0,858
19	0,901	0,863
20	0,905	0,868
21	0,908	0,873
22	0,911	0,878
23	0,914	0,881
24	0,916	0,884
25	0,918	0,888
26	0,920	0,891
27	0,923	0,894
28	0,924	0,896
29	0,926	0,898
30	0,927	0,900
31	0,929	0,902
32	0,930	0,904
33	0,931	0,906
34	0,933	0,908
35	0,934	0,910
36	0,935	0,912
37	0,936	0,914
38	0,938	0,916
39	0,939	0,917
40	0,940	0,919
41	0,941	0,920
42	0,942	0,922
43	0,943	0,923
44	0,944	0,924
45	0,945	0,926
46	0,945	0,927
47	0,946	0,928
48	0,947	0,929
49	0,947	0,929
50	0,947	0,930

FIGURE 68 – Table de Shapiro et Wilk

B Codes des programmes utilisés

B.1 Les momentum

```
library(tseries)
donnees <- read.ts(file="CAC40_mensuel.dat", start=1991, frequency=12,skip=0)
par(mfrow = c(2, 1))
plot(donnees,main="CAC 40",xlab="Temps",ylab="Cours boursier",col="blue")
momentum15<-ts(c(rep(donnees[16]-donnees[1],15),donnees[16:205]-donnees[1:190]),start=1991, frequency=12)
plot(momentum15,main="Momentum",xlab="Temps",ylab="Momentum 15 mois",col="green",type='l')
par(mfrow = c(1, 1))
plot(momentum15,main="Momentum",xlab="Temps",ylab="Momentum 15 mois",col="green",type='l')
lines(ts(rep(max(momentum15)-1000,205),start=1991,frequency=12),col='red')
lines(ts(rep(min(momentum15)+1000,205),start=1991,frequency=12),col='red')

#ROC
par(mfrow = c(4, 1))
plot(donnees,main="CAC 40",xlab="Temps",ylab="Cours boursier",col="blue")
ROC2<-ts(c(rep(100*donnees[3]/donnees[1],2),100*donnees[3:205]/donnees[1:203]),start=1991, frequency=12)
plot(ROC2,main="Momentum",xlab="Temps",ylab="ROC 2 mois",col="green",type='l')
lines(ts(rep(115,205),start=1991,frequency=12),col='red')
lines(ts(rep(85,205),start=1991,frequency=12),col='red')

ROC3<-ts(c(rep(100*donnees[4]/donnees[1],3),100*donnees[4:205]/donnees[1:202]),start=1991, frequency=12)
plot(ROC3,main="Momentum",xlab="Temps",ylab="ROC 3 mois",col="green",type='l')
lines(ts(rep(115,205),start=1991,frequency=12),col='red')
lines(ts(rep(85,205),start=1991,frequency=12),col='red')

ROC4<-ts(c(rep(100*donnees[5]/donnees[1],4),100*donnees[5:205]/donnees[1:201]),start=1991, frequency=12)
plot(ROC4,main="Momentum",xlab="Temps",ylab="ROC 4 mois",col="green",type='l')
lines(ts(rep(115,205),start=1991,frequency=12),col='red')
lines(ts(rep(85,205),start=1991,frequency=12),col='red')

#RSI
RSI<-function(VecteurDonnees,horizon)
{
Vecteur1 <- VecteurDonnees[1:(length(VecteurDonnees)-1)] - VecteurDonnees[2:length(VecteurDonnees)]
Vecteur2 <- 0
for(i in 1:(length(VecteurDonnees)-horizon))
{
vect <- Vecteur1[i:(i+horizon)]
if(i==1)
{
MoyenneHaussiere <- Vecteur1[Vecteur1>0]
MoyenneBaissiere <- Vecteur1[Vecteur1<0]
}
else
{
MoyenneHaussiere <- c(MoyenneHaussiere,Vecteur1[Vecteur1>0])
MoyenneBaissiere <- c(MoyenneBaissiere,Vecteur1[Vecteur1<0])
}
MoyenneHaussiere <- sum(MoyenneHaussiere[1:length(MoyenneHaussiere)]) / horizon
MoyenneBaissiere <- sum(MoyenneBaissiere[1:length(MoyenneBaissiere)]) / horizon
Vecteur2 <- c(Vecteur2,100-100/(1+MoyenneHaussiere/MoyenneBaissiere))
}
Vecteur2 <- Vecteur2[c(-1)]
Vecteur2 <- ts(c(rep(Vecteur2[1],horizon),Vecteur2),start=1991, frequency=12)
}

par(mfrow = c(2, 1))
plot(donnees,main="CAC 40",xlab="Temps",ylab="Cours boursier",col="blue")
RSI3<-RSI(donnees,3)
plot(RSI3,main="Momentum",xlab="Temps",ylab="RSI 3 mois",col="green",type='l')
lines(ts(rep(70,205),start=1991,frequency=12),col='red')
```

```

lines(ts(rep(30,205),start=1991,frequency=12),col='red')

# Bandes de Bollinger
Bollinger<-function(n,liste,borneSup_ou_borne_inf)
{
d <- 2

MoyenneMobile <- 0
BorneSupBollinger <- 0
BorneInfBollinger <- 0

for(i in 1:(length(liste)-n))
{
MoyenneMobile <- c(MoyenneMobile,sum(liste[i:(i+n-1)])/n)
BorneSupBollinger <- c(BorneSupBollinger,d*sqrt(var(liste[i:(i+n-1)])))
BorneInfBollinger <- c(BorneInfBollinger,-d*sqrt(var(liste[i:(i+n-1)])))
}

BorneSupBollinger <- BorneSupBollinger[-1]
BorneInfBollinger <- BorneInfBollinger[-1]
MoyenneMobile <- MoyenneMobile[-1]

if(borneSup_ou_borne_inf=="BorneInf"){return(MoyenneMobile + BorneInfBollinger)}
else{return(MoyenneMobile + BorneSupBollinger)}
}

TraceBandesBollinger<-function(n,liste)
{
BorneSup <- ts(Bollinger(n,liste,"BorneSup"),start=1991, frequency=12)
BorneInf <- ts(Bollinger(n,liste,"BorneInf"),start=1991, frequency=12)
liste <- ts(liste[1:(length(liste)-n)],start=1991, frequency=12)

plot(liste,main="Bandes de Bollinger",xlab="Temps",ylab="Cours boursier",ylim=c(min(BorneInf),max(BorneSup)),col="blue")
lines(BorneSup,col='red')
lines(BorneInf,col='red')
}

TraceBandesBollinger(20,donnees)

```

B.2 Étude de CAC

B.2.1 Lissage exponentiel

```

library(tseries)

donnees <- read.ts(file="CAC40_mensuel.dat", start=1991, frequency=12,skip=0)
plot(donnees,main = 'CAC40',col='blue',xlab='Temps', ylab='Cours')

par(mfrow=c(3,3))
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.9, gamma=0),main="alpha = 0.1")
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.8, gamma=0),main="alpha = 0.2")
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.7, gamma=0),main="alpha = 0.3")
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.6, gamma=0),main="alpha = 0.4")
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.5, gamma=0),main="alpha = 0.5")
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.4, gamma=0),main="alpha = 0.6")
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.3, gamma=0),main="alpha = 0.7")
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.2, gamma=0),main="alpha = 0.8")
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.1, gamma=0),main="alpha = 0.9")

HoltWinters(donnees, gamma=0)
plot(HoltWinters(donnees, alpha = 0.95, gamma=0),main="alpha = 0.05")

donnees_lissees <- HoltWinters(donnees[1:(length(donnees)-10)], alpha = 0.95, gamma=0)
donnees_lissees_prev<-predict(donnees_lissees, n.ahead = 10)

donnees_lissees_prev<-ts(c(donnees[1:(length(donnees)-10)],donnees_lissees_prev[1:10]),start=1991,freq=12)
plot(donnees_lissees_prev,col='green',t='1',main="Prévision pour CAC40", xlab='Temps', ylab='Cours')
points(donnees,col='blue',t='1')

```

B.2.2 Le modèle ARMA

```

library(tseries)

donnees <- read.ts(file="CAC40_mensuel.dat", start=1991, frequency=12,skip=0)
plot(donnees,main = 'CAC40',col='blue',xlab='Temps', ylab='Cours')

acf(donnees,main="CAC 40")
adf.test(donnees)

rendement<-ts(c(0,(donnees[2:(length(donnees))]- donnees[1:(length(donnees)-1)]))/donnees[1:(length(donnees)-1)])
plot(rendement,col='blue',main='Rendement du CAC 40',xlab='Temps',ylab='Rendement')

periodo<-function(x)
{
n<-length(x)
m<-floor(n/2)
t<-1:n
w<-t[1:m]*2*pi/n
c<-cos(t%*%t(w))
s<-sin(t%*%t(w))
mat<-cbind(c,s)
coef<-as.vector((t(x)%*%mat))
print(length(coef))
I<-(1/(2*pi))*((coef[1:n]^2+coef[(m+1):(2*m)])^2)
print(length(I))
w1<-t[1:m]
print(length(w1))
plot(w1,I,main="Périodogramme")
}

periodo(rendement)

kpss.test(rendement)

rendement_centre <- rendement - mean(rendement)
plot(rendement_centre,col='blue',main='Rendement centré du CAC 40',xlab='Temps',ylab='Rendement')

par(mfrow = c(2,1))
hist(rendement_centre,main="Histogramme des rendements mensuels du CAC40",
xlab="classes",col="grey",border="dark grey",xlim=c(-0.2,0.2),ylim=c(0,100))
hist(rnorm(length(rendement_centre)),mean(rendement_centre),(var(rendement_centre))^(1/2)),
main="Histogramme d'un échantillon suivant la loi normale",xlab="classes",col="grey",
border="dark grey",xlim=c(-0.2,0.2),ylim=c(0,100))

points <- seq(from = min(rendement_centre), to = max(rendement_centre), length = 100)
hist(rendement_centre,main="Histogramme des rendements mensuels du CAC40",xlab="classes",
col="grey",border="dark grey",xlim=c(-0.2,0.2),breaks=10,prob=T)
lines(points, dnorm(points, mean(rendement_centre), sd(rendement_centre)),col="red")

shapiro.test(rendement_centre)

ks.test(rendement_centre,rnorm(length(rendement_centre),mean(rendement_centre),sd(rendement_centre)))

acf(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)], main="Série des rendements centrés")
pacf(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)], main="Série des rendements centrés")

#####
# Prev 10 Mois V2

library(tseries)

donnees <- read.ts(file="CAC40_mensuel.dat", start=1991, frequency=12,skip=0)
rendement<-ts(c(0,(donnees[2:(length(donnees))]- donnees[1:(length(donnees)-1)]))/donnees[1:(length(donnees)-1)])
rendement_centre <- rendement - mean(rendement)

vect <- NULL
StandardErreur <- NULL
for(i in 0:9)
{

rendement_centre_arma <- arima(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10+i)], order=c(4,0,2))
prev <- predict(rendement_centre_arma, n.ahead = 1)
vect <- c(vect,prev$pred[1])
StandardErreur <- c(StandardErreur, prev$se[1])
print(prev$pred[1])
}

```

}

```

rendement_centre_prev <- c(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)],vect)
rendement_centre_prev_up <- c(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)], vect+1.96*StandardErreur)
rendement_centre_prev_down <- c(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)], vect-1.96*StandardErreur)

plot(rendement_centre,col='blue',main='Rendement centré du CAC 40',xlab='Temps',ylab='Rendement')
lines(rendement_centre_prev,col="red")
lines(rendement_centre_prev_up,col="red",lty=3)
lines(rendement_centre_prev_down,col="red",lty=3)
lines(rendement_centre,col="blue")

rendement_prev <- rendement_centre_prev + mean(rendement)
rendement_prev_up <- rendement_centre_prev_up + mean(rendement)
rendement_prev_down <- rendement_centre_prev_down + mean(rendement)

donnees_prev <- cumprod(c(donnees[1],(1+rendement_prev[-1])))
donnees_prev_up <- cumprod(c(donnees[1],(1+rendement_prev_up[-1])))
donnees_prev_down <- cumprod(c(donnees[1],(1+rendement_prev_down[-1])))

donnees_prev <- ts(donnees_prev, start=1991, frequency=12)
donnees_prev_up <- ts(donnees_prev_up, start=1991, frequency=12)
donnees_prev_down <- ts(donnees_prev_down, start=1991, frequency=12)

plot(donnees,ylim=c(0,15000),main = 'CAC40',col='red',xlab='Temps', ylab='Cours')
lines(donnees_prev,col="green")
lines(donnees_prev_up,col="red")
lines(donnees_prev_down,col="red")
lines(donnees,col="blue")

donnees_prev_up[length(donnees_prev_up)] - donnees_prev_down[length(donnees_prev_down)]

```

B.2.3 Le modèle ARCH

```

#####
# Quelques données simulées mais non utilisées
n <- 1000
e <- rnorm(n)
x <- double(n)

# ARCH(1)
a <- c(0.1, 0.5)
x[1:1] <- rnorm(1)
for(i in 2:n)
{
  x[i] <- e[i]*sqrt(a[1]+a[2]*x[i-1]^2)
}
x_1 <- ts(x[1:1000])
plot(x_1, main="Données simulées", ylab="epsilon")

# ARCH(2)
a <- c(0.1, 0.5, 0.2)
x[1:2] <- rnorm(2)
for(i in 3:n)
{
  x[i] <- e[i]*sqrt(a[1]+a[2]*x[i-1]^2+a[3]*x[i-2]^2)
}
x_2 <- ts(x[1:1000])
plot(x_2, main="Données simulées", ylab="epsilon")

# ARCH(3)
a <- c(0.1, 0.5, 0.2, 0.3)
x[1:3] <- rnorm(3)
for(i in 4:n)
{
  x[i] <- e[i]*sqrt(a[1]+a[2]*x[i-1]^2+a[3]*x[i-2]^2+a[4]*x[i-3]^2)
}
x_3 <- ts(x[1:1000])
plot(x_3, main="Données simulées", ylab="epsilon")

```

```

# ARCH(4)
a <- c(0.1, 0.5, 0.2, 0.3, 0.2)
x[1:4] <- rnorm(4)
for(i in 5:n)
{
  x[i] <- e[i]*sqrt(a[1]+a[2]*x[i-1]^2+a[3]*x[i-2]^2+a[4]*x[i-3]^2+a[5]*x[i-4]^2)
}
x_4 <- ts(x[1:1000])
plot(x_4, main="Données simulées", ylab="epsilon")

# ARCH(1)
ARCH_Sim <- function(j){

n <- 1000
e <- rnorm(n)
x <- double(n)

a <- c(0.1, j)
x[1:2] <- rnorm(2)
for(i in 3:n)
{
  x[i] <- e[i]*sqrt(a[1]+a[2]*x[i-1]^2)
}
return(ts(x[1:1000]))
}

plot(ARCH_Sim(0/10), main="Données simulées", ylab="epsilon")
plot(ARCH_Sim(4/10), main="Données simulées", ylab="epsilon")
plot(ARCH_Sim(8/10), main="Données simulées", ylab="epsilon")
plot(ARCH_Sim(12/10), main="Données simulées", ylab="epsilon")
plot(ARCH_Sim(16/10), main="Données simulées", ylab="epsilon")
plot(ARCH_Sim(20/10), main="Données simulées", ylab="epsilon")

#####
##### CAC 40 #####
library(tseries)

# donnees: le cours boursier mensuel du CAC40
donnees <- read.ts(file="CAC40_mensuel.dat", start=1991, frequency=12,skip=0)

# Calcul de son rendement, puis de son rendement centré
rendement<-ts(c(0,(donnees[2:(length(donnees))]- donnees[1:(length(donnees)-1)])/donnees[1:(length(donnees)-1)]))
rendement_centre <- rendement - mean(rendement)

ar(x = rendement_centre[1:(length(rendement_centre) - 10)]^2, aic = TRUE,order.max = 5)
archFitoutput <- garch(rendement_centre, order = c(0,2),trace=FALSE)
summary(archFitoutput)

Box.test(archFitoutput$residuals)
shapiro.test(archFitoutput$residuals)

vect <- NULL

for(i in 0:9)
{
archFitoutput <- garch(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10+i)], order = c(0,2),trace=FALSE)
prev <- predict(archFitoutput, genuine = TRUE)
vect <- c(vect,prev[length(prev)])
print(prev[length(prev)])
}

prev <- prev[,2]
prev <- c(prev[1:(length(prev)-10)], vect)

prev

rendement_centre_prev <- c(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)],rep(0,10))
rendement_centre_prev_up <- c(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)], -1.96*vect)
rendement_centre_prev_down <- c(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)], 1.96*vect)

plot(rendement_centre,col='blue',main='Rendement centré du CAC 40',xlab='Temps',ylab='Rendement')
lines(rendement_centre_prev,col="red")
lines(rendement_centre_prev_up,col="red",lty=3)
lines(rendement_centre_prev_down,col="red",lty=3)

```

```

lines(rendement_centre,col="blue")

rendement_prev <- rendement_centre_prev + mean(rendement)
rendement_prev_up <- rendement_centre_prev_up + mean(rendement)
rendement_prev_down <- rendement_centre_prev_down + mean(rendement)

donnees_prev <- cumprod(c(donnees[1],(1+rendement_prev[-1])))
donnees_prev_up <- cumprod(c(donnees[1],(1+rendement_prev_up[-1])))
donnees_prev_down <- cumprod(c(donnees[1],(1+rendement_prev_down[-1])))

donnees_prev <- ts(donnees_prev, start=1991, frequency=12)
donnees_prev_up <- ts(donnees_prev_up, start=1991, frequency=12)
donnees_prev_down <- ts(donnees_prev_down, start=1991, frequency=12)

plot(donnees,ylim=c(0,15000),main = 'CAC40',col='red',xlab='Temps', ylab='Cours')
lines(donnees_prev,col="green")
lines(donnees_prev_up,col="red")
lines(donnees_prev_down,col="red")
lines(donnees,col="blue")

donnees_prev_up[length(donnees_prev_up)] - donnees_prev_down[length(donnees_prev_down)]

```

B.2.4 Le modèle GARCH

```

library(tseries)

# donnees: le cours boursier mensuel du CAC40
donnees <- read.ts(file="CAC40_mensuel.dat", start=1991, frequency=12,skip=0)

# Calcul de son rendement, puis de son rendement centré
rendement<-ts(c(0,(donnees[2:(length(donnees))]- donnees[1:(length(donnees)-1)])/donnees[1:(length(donnees)-1)]))
rendement_centre <- rendement - mean(rendement)

garchFitoutput <- garch(rendement_centre, order = c(1,1),trace=FALSE)

Box.test(garchFitoutput$residuals)
shapiro.test(garchFitoutput$residuals)

vect <- NULL

for(i in 0:9)
{
garchFitoutput <- garch(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10+i)], order = c(1,1),trace=FALSE)
prev <- predict(garchFitoutput, genuine = TRUE)
vect <- c(vect,prev[length(prev)])
print(prev[length(prev)])
}

prev <- prev[,2]
prev <- c(prev[1:(length(prev)-10)], vect)

rendement_centre_prev <- c(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)],rep(0,10))
rendement_centre_prev_up <- c(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)], -1.96*vect)
rendement_centre_prev_down <- c(rendement_centre[1:(length(rendement_centre)-10)], 1.96*vect)

plot(rendement_centre,col='blue',main='Rendement centré du CAC 40',xlab='Temps',ylab='Rendement')
lines(rendement_centre_prev,col="red")
lines(rendement_centre_prev_up,col="red",lty=3)
lines(rendement_centre_prev_down,col="red",lty=3)
lines(rendement_centre,col="blue")

rendement_prev <- rendement_centre_prev + mean(rendement)
rendement_prev_up <- rendement_centre_prev_up + mean(rendement)
rendement_prev_down <- rendement_centre_prev_down + mean(rendement)

donnees_prev <- cumprod(c(donnees[1],(1+rendement_prev[-1])))
donnees_prev_up <- cumprod(c(donnees[1],(1+rendement_prev_up[-1])))

```

```

donnees_prev_down <- cumprod(c(donnees[1],(1+rendement_prev_down[-1])))

donnees_prev <- ts(donnees_prev, start=1991, frequency=12)
donnees_prev_up <- ts(donnees_prev_up, start=1991, frequency=12)
donnees_prev_down <- ts(donnees_prev_down, start=1991, frequency=12)

plot(donnees,ylim=c(0,15000),main = 'CAC40',col='red',xlab='Temps', ylab='Cours')
lines(donnees_prev,col="green")
lines(donnees_prev_up,col="red")
lines(donnees_prev_down,col="red")
lines(donnees,col="blue")

donnees_prev_up[length(donnees_prev_up)] - donnees_prev_down[length(donnees_prev_down)]

```

B.3 Automatisation des prévisions

B.3.1 Lissage exponentiel

```

# Il faut sauvegarder le fichier xls au format csv séparateur point virgule
library(tseries)

donnees <- read.csv("Donnees.csv", sep=";")

Conv_En_Vect_ligne_i <- function(rendements,i)
{
  rendement_mensuel <- NULL
  for(j in 2:length(rendements))
  {
    rendement_mensuel <- c(rendement_mensuel,rendements[i,j])
  }
  return(rendement_mensuel)
}

SerieTemporelle <- function(serie_temp)
{
  serie <- NULL
  for(k in 1:length(serie_temp))
  {
    serie <- c(serie,serie_temp[length(serie_temp)-k+1])
  }
  Serie_i <- ts(serie,start=c(1996,3), frequency = 12)
  return(Serie_i)
}

espion <- NULL

Prévision_i <- function(rendements,i,lagmax, h)
{
  serie_depart <- Conv_En_Vect_ligne_i(rendements,i)

  serie_centre <- serie_depart - mean(serie_depart)
  serie_centre <- SerieTemporelle(serie_centre)
  espion <- serie_centre

  serie_centre_expo <- HoltWinters(serie_centre, alpha = 0.90, gamma=0)
  serie_centre_expo_prev <- predict(serie_centre_expo, n.ahead = 1)

  return(serie_centre_expo_prev[1] + mean(serie_depart))
}

```

```

Prevision_colonne <- function(rendements,lagmax, h)
{
  previsions <- 0

  for(i in 1:length(rendements[,1]))
  {
    previsions <- c(previsions,Prevision_i(rendements,i,lagmax, h))
  }

  previsions <- as.matrix(previsions[-1], ncol=1)

  return(c(previsions))
}

BackTesting <- function(lagmax, h, NombreDeColonnesDeBase)
{
  resultats <- donnees[, (length(donnees)-NombreDeColonnesDeBase+1):(length(donnees))]

  for(j in NombreDeColonnesDeBase:(length(donnees)-1)){
    print(j)
    rendements <- donnees[, (length(donnees)-j+1):(length(donnees))]

    rendements <- cbind(donnees[,1],rendements)

    vect_resultat <- Prevision_colonne(rendements,lagmax, h)

    resultats <- cbind(vect_resultat,resultats)
  }

  write.table(resultats, "Previsions.txt")

  return(resultats)
}

a <- BackTesting(3, 1, 12)

```

B.3.2 Le modèle ARMA

```

# Il faut sauvegarder le fichier xls au format csv séparateur point virgule
library(tseries)

donnees <- read.csv("Donnees.csv", sep=";", na = TRUE)

espion <- NULL

MoisDebut <- 1
AnneeDebut <- 2008

EnleverNA_ligne_i <- function(rendements,i)
{
  rendement_mensuel <- 0

  for(j in 2:length(rendements))
  {

    if(is.na(rendements[i,j])!=TRUE)
    {
      rendement_mensuel <- c(rendement_mensuel,rendements[i,j])
    }

    else{j <- length(rendements)}
  }

  rendement_mensuel <- rendement_mensuel[-1]

  if(j!=2)
  {
    return(rendement_mensuel)
  }
  else
  {
    return(c(0))
  }
}

```

```

}

SerieTemporelle <- function(serie_temp)
{
  serie <- 0

  for(k in 1:length(serie_temp))
  {
    serie <- c(serie,serie_temp[length(serie_temp)-k+1])

    n <- length(serie_temp)
    k <- as.integer(n/12)
    AnneeDebut_temp <- AnneeDebut - k -1
    MoisDebut_temp <- 12 -n + k*12 + MoisDebut + 1
  }

  Serie_i <- ts(serie[-1],start=c>AnneeDebut_temp,MoisDebut_temp), frequency = 12)

  return(Serie_i)
}

Determination_q <- function(serie, lagmax)
{
  q <- 0

  serie_acf <- acf(serie, lag.max = lagmax, plot=FALSE)

  coefficients_auto_covariances <- serie_acf$acf
  coefficients_auto_covariances <- coefficients_auto_covariances[,1]

  borne_significativite <- 1.96/sqrt(length(serie))

  for(k in 1:lagmax)
  {
    if(abs(coefficients_auto_covariances[k])>borne_significativite)
    {
      q <- k - 1
    }
  }

  return(q)
}

Determination_p <- function(serie,lagmax)
{
  p <- 0

  serie_pacf <- pacf(serie, lag.max = lagmax, plot=FALSE)

  coefficients_auto_correlation <- serie_pacf$acf
  coefficients_auto_correlation <- coefficients_auto_correlation[,1]

  borne_significativite <- 1.96/sqrt(length(serie))

  for(k in 1:lagmax)
  {
    if(abs(coefficients_auto_correlation[k])>borne_significativite)
    {
      p <- k
    }
  }

  return(p)
}

Prevision <- function(rendements,i,lagmax, h)
{
  serie_depart <- EnleveNA_ligne_i(rendements,i)

  if(length(serie_depart)<=lagmax)
  {
    return(c(0))
  }
  else
  {
    serie_centre <- serie_depart - mean(serie_depart)
    serie_centre <- SerieTemporelle(serie_centre)
  }
}

```

```

lagmax <- min(lagmax,length(serie_centre)-1)
p <- max(1,Determination_p(serie_centre,lagmax))
q <- max(1,Determination_q(serie_centre,lagmax))

espion <- serie_centre

serie_centre_arma <- arima(serie_centre, order=c(p,0,q), method = "ML")
serie_centre_arma_prev <- predict(serie_centre_arma, n.ahead = h)

return(serie_centre_arma_prev$pred + mean(serie_depart))
}
}

Exportation <- function(rendements,lagmax, h)
{
previsions <- 0

for(i in 1:length(rendements[,1]))
{
# print(i)
previsions <- c(previsions,Prevision(rendements,i,lagmax, h))
}

previsions <- as.matrix(previsions[-1], ncol=1)

return(c(previsions))
}

BackTesting <- function(lagmax, h, NombreDeColonnesDeBase)
{
resultats <- donnees[,,(length(donnees)-NombreDeColonnesDeBase+1):(length(donnees))]

for(j in NombreDeColonnesDeBase:(length(donnees)-1)){

print(j)
rendements <- donnees[,,(length(donnees)-j+1):(length(donnees))]

rendements <- cbind(donnees[,1],rendements)

vect_resultat <- Exportation(rendements,lagmax, h)

resultats <- cbind(vect_resultat,resultats)
}

write.table(resultats, "Previsions.txt")

return(resultats)
}

a <- BackTesting(3, 1, 12)

```

B.3.3 Le modèle ARCH

```

library(tseries)

donnees <- read.csv("Donnees.csv", sep=";")

Conv_En_Vect_ligne_i <- function(rendements,i)
{
rendement_mensuel <- NULL

for(j in 2:length(rendements))
{
rendement_mensuel <- c(rendement_mensuel,rendements[i,j])
}

return(rendement_mensuel)
}

SerieTemporelle <- function(serie_temp)
{

```

```

serie <- NULL
for(k in 1:length(serie_temp))
{
  serie <- c(serie,serie_temp[length(serie_temp)-k+1])
}

Serie_i <- ts(serie,start=c(1996,3), frequency = 12)
return(Serie_i)
}

espion <- NULL
Prevision_i <- function(rendements,i,lagmax, h)
{
  serie_depart <- Conv_En_Vect_ligne_i(rendements,i)

  serie_centre <- serie_depart - mean(serie_depart)
  serie_centre <- SerieTemporelle(serie_centre)
  espion <-> serie_centre

  Valeur_p <- ar(x = serie_centre^2, aic = TRUE,order.max = h)
  Valeur_p <- max(1,Valeur_p$order)

  serie_centre_arch <- garch(serie_centre, order= c(0,Valeur_p),control=garch.control(trace = FALSE))
  serie_centre_arch_prev <- predict(serie_centre_arch, genuine = TRUE)

  return(1.96*serie_centre_arch_prev[length(serie_centre)+1 ,2] + mean(serie_depart))
}

Prevision_colonne <- function(rendements,lagmax, h)
{
  previsions <- 0
  for(i in 1:length(rendements[,1]))
  {
    previsions <- c(previsions,Prevision_i(rendements,i,lagmax, h))

    previsions <- as.matrix(previsions[-1], ncol=1)
  }
  return(c(previsions))
}

BackTesting <- function(lagmax, h, NombreDeColonnesDeBase)
{
  resultats <- donnees[, (length(donnees)-NombreDeColonnesDeBase+1):(length(donnees))]

  for(j in NombreDeColonnesDeBase:(length(donnees)-1)){
    print(j)
    rendements <- donnees[, (length(donnees)-j+1):(length(donnees))]

    rendements <- cbind(donnees[,1],rendements)
    vect_resultat <- Prevision_colonne(rendements,lagmax, h)
    resultats <- cbind(vect_resultat,resultats)
  }

  write.table(resultats, "Previsions.txt")
  return(resultats)
}

a <- BackTesting(5, 1, 12)

```

B.3.4 Le modèle GARCH

```
library(tseries)
```

```

donnees <- read.csv("Donnees.csv", sep=";")

Conv_En_Vect_ligne_i <- function(rendements,i)
{
  rendement_mensuel <- NULL
  for(j in 2:length(rendements))
  {
    rendement_mensuel <- c(rendement_mensuel,rendements[i,j])
  }
  return(rendement_mensuel)
}

SerieTemporelle <- function(serie_temp)
{
  serie <- NULL
  for(k in 1:length(serie_temp))
  {
    serie <- c(serie,serie_temp[length(serie_temp)-k+1])
  }
  Serie_i <- ts(serie,start=c(1996,3), frequency = 12)
  return(Serie_i)
}

espion <- NULL

Prévision_i <- function(rendements,i,lagmax, h)
{
  serie_depart <- Conv_En_Vect_ligne_i(rendements,i)

  serie_centre <- serie_depart - mean(serie_depart)
  serie_centre <- SerieTemporelle(serie_centre)
  espion <- serie_centre

  serie_centre_garch <- garch(serie_centre, order= c(1,1),control=garch.control(trace = FALSE))
  serie_centre_garch_prev <- predict(serie_centre_garch, genuine = TRUE)

  return(1.96*serie_centre_garch_prev[length(serie_centre)+1 ,2] + mean(serie_depart))
}

Prévision_colonne <- function(rendements,lagmax, h)
{
  prévisions <- 0
  for(i in 1:length(rendements[,1]))
  {
    prévisions <- c(prévisions,Prévision_i(rendements,i,lagmax, h))
  }
  prévisions <- as.matrix(prévisions[-1], ncol=1)
  return(c(prévisions))
}

BackTesting <- function(lagmax, h, NombreDeColonnesDeBase)
{
  résultats <- donnees[, (length(donnees)-NombreDeColonnesDeBase+1):(length(donnees))]

  for(j in NombreDeColonnesDeBase:(length(donnees)-1)){
    print(j)
    rendements <- donnees[, (length(donnees)-j+1):(length(donnees))]
    rendements <- cbind(donnees[,1],rendements)
    vect_resultat <- Prévision_colonne(rendements,lagmax, h)
    résultats <- cbind(vect_resultat,résultats)
  }
}

```

```
}

write.table(resultats, "Previsions.txt")

return(resultats)
}

a <- BackTesting(3, 1, 12)
```

C D'autres définitions et résultats

C.1 Le bruit blanc

Le processus (ϵ_t) est un bruit blanc fort si ce processus est *iid* et $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0 \forall t$. Si $\forall t, \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, h)$, on parle de bruit blanc gaussien (standard si $h = 1$)

Le processus (ϵ_t) est un bruit blanc faible si ϵ_t sont identiquement distribués et non correlés.

Dans le cadre de ce mémoire, on utilise la notion du bruit blanc fort lorsque l'on parle de bruit blanc.

C.2 Les processus stationnaires

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots)$ est *fortement stationnaire* si $\forall (t_1, \dots, t_N)$ et $\forall h$, la loi de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_N})$ est la même que la loi de $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_N+h})$

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots)$ est *faiblement stationnaire* si $\forall t, \mathbb{E}(X_t) = \mu$ et $\forall t, s, h$, $Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+h}, X_{s+h})$

Pour les processus faiblement stationnaires, on définit les fonctions d'auto-covariance et d'auto-corrélation. C'est pourquoi, dans le cadre de ce mémoire, lorsqu'on parle de processus stationnaires, on se réfère aux processus faiblement stationnaires.

C.3 Condition d'existance de solution stationnaire

Pour les modèle $AR(p)$ [11], si le polynôme caractéristique A a toute ses racines de module > 1 , alors il existe une unique solution stationnaire à $A(L)(X_t) = \epsilon_t$ qui admet pour représentation causale $X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}$ où les ψ_i sont donnés par le développement en série entière de

$$\frac{1}{A(z)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i z^i$$

Pour les modèle $ARMA(p, q)$ [11], si le polynôme caractéristique A a toute ses racines de module > 1 et si A et B n'ont pas de racines communes, alors il existe une unique solution stationnaire qui admet une représentation causale $X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}$ où les ψ_i sont donnés par le développement en série entière de $\frac{B(z)}{A(z)}$.

C.4 La fonction d'auto-covariance

La fonction d'*auto-covariance* σ est définie de la façon suivante :

$$\sigma(h) = Cov(X_n, X_{n+h}) \quad \forall n$$

On remarque quelques propriétés intéressantes de la fonction d'auto-covariance :

- $\sigma(h) = \sigma(-h) \quad \forall h$
- $\sigma(0) = Var(X_n) \geq 0$

C.5 La fonction d'auto-corrélation

On appelle *fonction d'auto-corrélation* la fonction définie comme suit

$$\rho(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma(0)} \quad \forall h$$

On remarque également quelques propriétés intéressantes de la fonction d'auto-covariance :

- $\rho(h) = \rho(-h) \quad \forall h$
- $\rho(h) \leq 1 \quad \forall h$
- $\rho(0) = 1$

C.6 La fonction d'auto-corrélation partielle

L'auto-corrélation partielle d'ordre h désigne la corrélation entre x_t et x_{t-h} obtenue lorsque l'influence des variables x_{t-h-i} a été retirée, pour $i \leq h$

La fonction d'auto-corrélation partielle d'ordre h d'un processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$, de moyenne $E(x_t) = m$, notée ρ_h , est définie par la dernier coefficient de la projection linéaire de x_{t+1} sur les h plus récentes valeurs :

$$x_{t+1} - m = c_1(x_t - m) + c_2(x_{t-1} - m) + \cdots + c_{h-1}(x_{t-h} - m) + \rho_h(x_{t-h+1} - m) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \rho_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_{h-1} \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \cdots & \sigma_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{h-1} & \sigma_{h-2} & \cdots & \sigma_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_h \end{pmatrix}$$

La fonction d'auto-corrélation partielle satisfait également la relation suivante :

$$\rho_h = \frac{|P_h^*|}{|P_h|} \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

avec

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \dots & \dots & \rho_h \end{pmatrix}$$

C.7 L'estimateur de la fonction d'auto-covariance

Soit $\hat{\sigma}$ l'estimateur de *la fonction d'auto-covariance* obtenue pour un échantillon de T réalisation du processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$. Elle est donnée pour tout $h \in \mathbb{Z}$ par :

$$\hat{\sigma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})$$

où

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$$

Les indices $\hat{\sigma}(1), \hat{\sigma}(2), \dots$ donnent une idée de la dépendance qu'il y a entre les données. Plus exactement, $\hat{\sigma}(1)$ indique la dépendance entre deux données successives, $\hat{\sigma}(2)$ indique la dépendance entre deux données écartées de deux unités de temps et ainsi de suite.

C.8 L'estimateur de la fonction d'auto-corrélation

Soit $\hat{\rho}$ l'estimateur de *la fonction d'auto-corrélation* obtenue pour un échantillon de T réalisation du processus $(x_t, t \in \mathbb{Z})$. Elle est donnée pour tout $h \in \mathbb{Z}$ par :

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\sigma}(h)}{\hat{\sigma}(0)}$$

Remarquons quelques propriétés de *l'estimateur de la fonction d'auto-corrélation* :

- Si le processus (x_n) est une tendance polynomiale pure, *i.e.*

$$x_n = a_1 n^p + a_2 n^{p-1} + \dots + a_{p+l} \quad n = 1, 2, \dots$$

alors $\hat{\rho}(h) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

- Si (x_n) est une série périodique pure, *i.e.*

$$x_j = a \cos\left(\frac{2j\pi}{T}\right) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

alors pour h fixé, $\hat{\rho}(h) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{2h\pi}{T}\right)$

C.9 L'estimateur de la fonction d'auto-corrélation partielle

L'estimateur de *la fonction d'auto-corrélation partielle* est obtenue de la façon suivante :

$$\hat{\rho}_h = \frac{|P_h^*|}{|P_h|} \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

avec

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{h-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{h-1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \hat{\rho}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{h-1} & \dots & \dots & \hat{\rho}_h \end{pmatrix}$$

C.10 Théorème de Wold

Soit X un processus stochastique stationnaire au sens faible. Elle peut être représentée sous la forme :

$$X_t = D_t + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \epsilon_{t-i}$$

où D_t est la composante déterministe, ϵ_t un bruit blanc *iid* $(0, \sigma_\epsilon^2)$ et $\{\phi\} = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots\}$ un ensemble de coefficients réels non aléatoires.

Références

- [1] Bart Hobijn, Philip Hans Franses et Marius Ooms, [1998], Generalizations of the KPSS-test for Stationarity. *Statistica Neerlandica*, Volume 58 Issue 4, 483 - 502.
- [2] Christian Gourioux, [1992], "Modèles ARCH Et Applications Financières". Economica
- [3] Denis Kwiatkowski, Peter C.B. Phillips, Peter Schmidt et Yongcheol Shin, [1992], Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics* 54, 159-178.
- [4] M.-C. Viano et A. Philippe, [1999/2004], Maîtrise d'Économétrie : Cours de Séries Temporelles. *Université des Sciences et Technologies de Lille, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées*, 22-30 et 45-57.
- [5] Martin Pring, [1999], "Le Momentum". Valor
- [6] Olivier Roustant, [2007], Modèle GARCH : Application à la prévision de la volatilité. *Ecole Nationale Supérieure des Mines*, 8-22.
- [7] Rainer von Sachs, [2008], Séries chronologiques - TP4. *Institut de statistique, Université catholique de Louvain*, 1-14.
- [8] Rainer von Sachs et Sébastien Van Bellegem, [2005], Séries chronologiques (4^e Édition). *Institut de statistique, Université catholique de Louvain*, 73-95 et 107-122.
- [9] Robert Engle, [2001], The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. *Journal of Economic Perspectives - Volume 15, Number 4*, 157-168.
- [10] Thierry Béchu, Éric Bertrand et Julien Nebenzahl, [2008], "L'Analyse Technique" (6^e Édition). Economica
- [11] Veronique Maume Deschamps, [2008], Cours des séries temporelles. *Institut de Science Financière et d'Assurances*.
- [12] Walter Zucchini et Oleg Nenadić, [2003], Time Series Analysis with R. *Institut für Statistik und Ökonometrie*, 8-23.