technische universität
dortmund

Versuch 103

Biegung elastischer Stäbe

Philipp Haude
Steffen Maßmann

Durchführung: 29.11.2022
Abgabetermin: 06.12.2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Mit dem Versuch V103 soll das Elastizitätsmodul eines Metalls ermittelt werden. Dafür werden ein eckiger und ein runder Stab aus demselben Metall untersucht.

2 Theorie

Das Elastizitätsmodul E ist eine Materialkonstante eines Werkstoffes und wird in Verbindung mit den Hookeschem Gesetz

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

zum Proportinalitätsfaktor. Dabei besagt das Hooksche Gesetz, dass sich die Normalspannung σ eines Körpers bestimmen lässt, indem angenommen wird, dass bei einer sehr geringen Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ die Spannung σ im linearen Zusammenhang steht.

Wird ein Stab einseitig eingespannt und ein Gewicht an diesem befestigt, dann wirkt ein Drehmoment

$$M_{\mathrm{F}} = F(L - x)$$

an diesem. Dabei ist F die Schwerkraft des Gewichts. Dieses verursacht eine Zug- und eine Druckspannung im Stab, welche wiederum ein Drehmoment

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)\mathrm{dq}$$

zur Folge hat. Die Position des Stabes ist dann in Ruhe, wenn $M_{\mathrm{F}} = M_\sigma$ ist.
Die Durchbiegung eines einseitig eingespannten Stabes kann durch dieses Gleichgewicht mit

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \cdot \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{2}$$

bestimmt werden. Wobei x der Ort ist, an welchem die Durchbiegung $D(x)$ zu erwarten ist.

Wird ein Stab beidseitig eingespannt und ein Gewicht an diesem befestigt, dann wirkt ein Drehmoment

$$\mathrm{M_F} = -\frac{\mathrm{F}}{2}\mathrm{x}$$

für den Bereich $0 \leq x \leq L/2$ und ein Drehmoment

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x)$$

für den Bereich $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.
Auch hier kann durch ein Gleichgewicht jeweils ein Ausdruck für die Durchbiegung gefunden werden. Für den Bereich $0 \leq x \leq L/2$ kann diese mit

$$D(x) = \frac{F}{48EI} \cdot \left(3L^2x - 4x^3\right) \tag{3}$$

und für den Bereich $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ kann diese mit

$$D(x) = \frac{F}{48EI} \cdot \left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right) \tag{4}$$

beschrieben werden.

Das Flächenträgheitsmoment I_q für eine quadratische Fläche mit der Seitenlänge a lässt sich mit

$$I_q = \frac{a^4}{12} \tag{5}$$

berechnen und das Flächenträgheitsmoment I_r für ein kreisförmige Fläche mit dem Radius r mit Hilfe von

$$I_r = \frac{\pi r^4}{4}. \tag{6}$$

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Um die Verbiegung des einseitig eingespannten runden und eckigen Stabes zu bestimmen, wird die Apparatur der Abbildung 1 verwendet. Die Apparatur besteht aus zwei Trägerbalken, an denen man die Stäbe einzeln einspannen kann (A und B), einer Schraube (C), mit welcher sich der Stab festziehen lässt, zwei verschiebbaren Messuhren und einer Längenskala.
Für die einseitig eingespannten Stäbe wird nur das eine Ende in (A) geschoben und mit Hilfe von (C) fest eingespannt. An dem nicht eingespannten Ende des Stabes kann nun ein Gewicht befestigt werden und die Verbiegung durch die Messuhren gemessen werden. Dazu werden zuvor, beim nicht ausgelenkten Stab, die Messuhren genullt und daraufhin die Differenz der Auslenkung gemessen, wenn der Stab ausgelenkt ist. Die Uhren werden nach jeder Messung verschoben und es wird erneut die Differenz bestimmt.
Da anzunehmen ist, dass die Stäbe durch etwaiger Wiederholung nicht mehr optimal gerade sind, wird in diesem Fall nach jeder Verschiebung die Messuhr erneut genullt, um Messfehler zu verringern. Dafür wird das freischwingende Gewicht F jedes mal abgehangen, die Uhr genullt, das Gewicht wieder befestigt und die Differenz bestimmt.

Für die beidseitig eingespannten Stäbe wird das gleiche Verfahren verwendet, jedoch wird hierbei das Gewicht in die Mitte verlagert und das freihängende Ende in den Trägerbalken (B) gespannt.

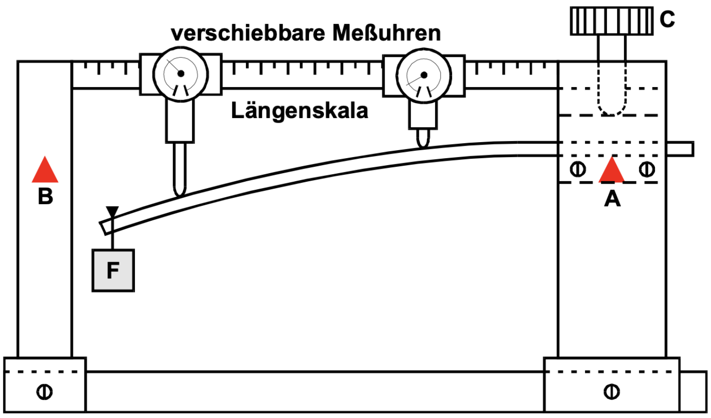

Abbildung 1: Der Aufbau der Messaperatur [2, Seite]

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei einseitiger Einspannung

Für die Messung ist sowohl die Länge der jeweiligen freihängenden Enden als auch die Position der Masse essentiell. In diesem Fall hängt die Masse von $(499{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ bei $(53{,}500 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$, also am Ende des $(54{,}000 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ langen Stabes. Diese Messungen sind in Tabelle 1 dargestellt.

x in cm	$D_r(x)$ in µm	$D_q(x)$ in µm
3	5	3
6	17	11
9	32	21
12	56	35
15	83	51
18	112	71
21	149	96
24	171	121
27	189	151
30	209	171
33	240	205
36	261	227
39	296	282
42	325	306
45	361	320
48	395	340

Tabelle 1: Die Auslenkung der Stäbe an Ort x bei einseitiger Einspannung

4.1.1 Runder Stab

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird $D_r(x)$ gegen $\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$, also der Gleichung 2 aufgetragen, und eine lineare Regression mittels Python durchgeführt.
Das dafür relevante Trägheitsmoment lässt sich ebenfalls mittels Python und der Gleichung 6 bestimmen, sodass sich für das Trägheitsmoment

$$I_r = (4{,}91 \pm 0{,}10) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4$$

ergibt. Das Elastizitätsmodul kann nun durch Umstellung von Gleichung 2 und 3 bzw. 4 bestimmt werden, indem die Steigung der linearen Regression $k_e = \frac{F}{2EI}$ und $k_b = \frac{F}{48EI}$ verwendet wird. So ist

$$E_e = \frac{F}{2k_e I} \tag{7}$$

bzw.

$$E_b = \frac{F}{48k_b I} \tag{8}$$

In dem Fall für den einseitig eingespannten runden Stab ist mit (7)

$$E_{er} = (1{,}16 \pm 0{,}05) \cdot 10^{12}\,\mathrm{N/m^2}.$$

Dies ist ebenfalls visuell einsehbar durch den passenden Plot 2.

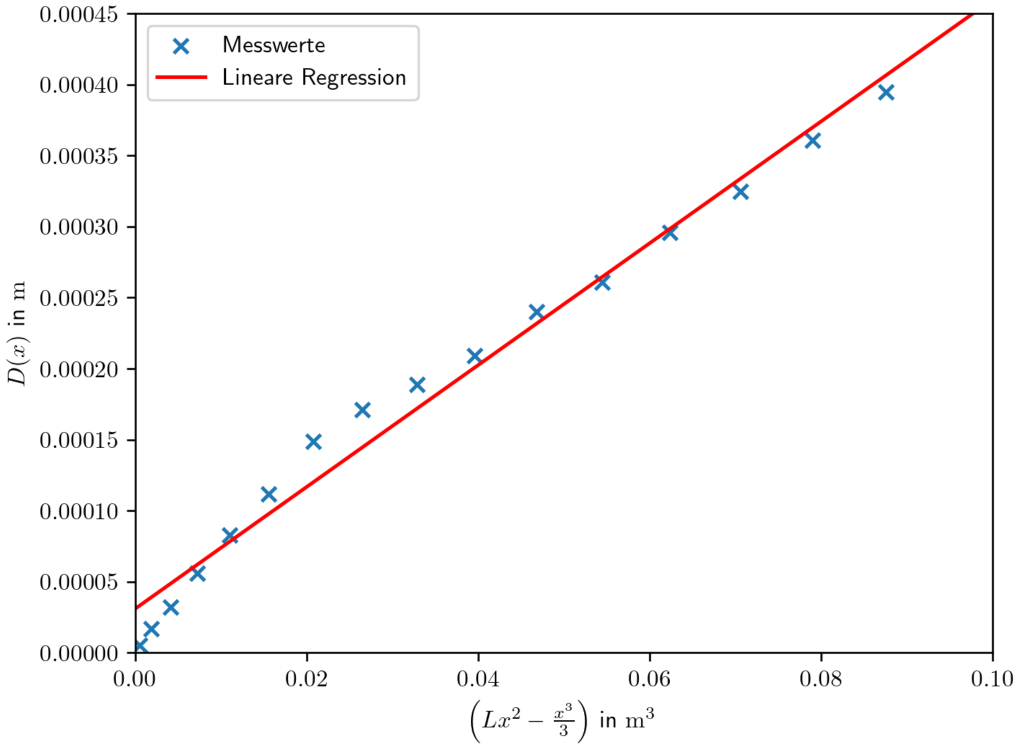

Abbildung 2: Durchbiegung des einseitig eingespannten runden Stabes in Abhängigkeit eines Linearisierungsterms.

4.1.2 Eckiger Stab

Für das Elastizitätsmodul des eckigen Stabes gilt dasselbe Procedere wie bei dem runden Stab. Der einzige Unterschied ist, dass

$$I_q = (8{,}33 \pm 0{,}17) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m^4}$$

anderes als aus Gleichung 5 ist und $D_q(x)$ nun gegen Gleichung 2 aufgetragen wird. Dadurch ergibt sich für das E mit (7)

$$E_{eq} = (7{,}25 \pm 0{,}22) \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$$

ein leichter Unterschied im Vergleich zu dem E_{er}. Dies spiegelt auch der dazugehörige Plot 3 wider.

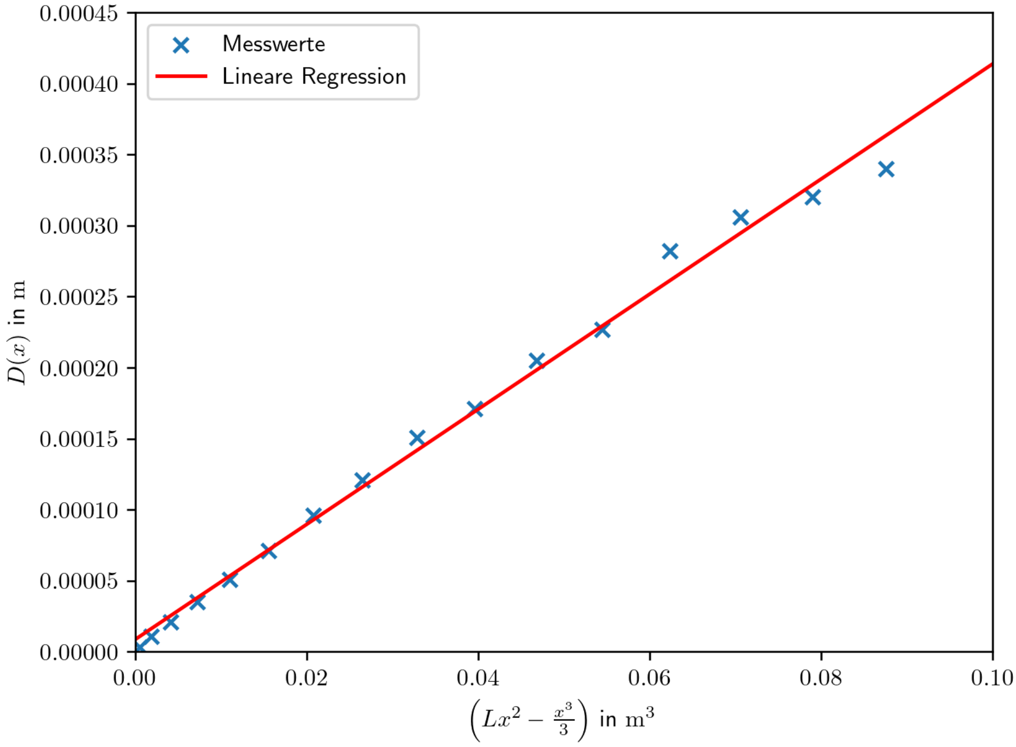

Abbildung 3: Durchbiegung des einseitig eingespannten eckigen Stabes in Abhängigkeit eines Linearisierungsterms.

4.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei beidseitiger Einspannung

Für die Messungen der beidseitig eingespannten Stäbe wird im Gegensatz zu den einseitig eingespannten Stäben die Masse mittig befestigt. Da nun beide Enden auf einem Trägerbalken festgemacht sind, beträgt die Gesamtlänge der jeweiligen Stäbe $(55{,}000 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$, wobei sich die Masse $(1021{,}0 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ mittig bei $(28{,}500 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ befindet. Diese Messungen sind in Tabelle 2 dargestellt.

x in cm	$D_r(x)$ in µm	$D_q(x)$ in µm
3	1	1
6	4	2
9	9	5
12	15	9
15	22	13
18	30	17
21	33	18
24	36	21
27	39	23
30	39	24
33	39	25
36	37	24
39	33	18
42	28	18
45	22	13
48	16	9
51	8	5
54	2	1

Tabelle 2: Die Auslenkung der Stäbe an Ort x bei beidseitiger Einspannung

4.2.1 Runder Stab

Für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird für den Fall des beidseitig eingespannten runden Stabes nun $D_r(x)$ gegen $(3L^2x - 4x^3)$ und $(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3)$, also Gleichung 3 und 4 aufgetragen. Dies wird wieder mal mittels einer linearen Regression durch Python und den schon bestimmten Wert I_r durchgeführt.
Der dazugehörige Wert des Elastizitätsmoduls mit (8)

$$E_{br} = (1{,}66 \pm 0{,}13) \cdot 10^{12}\,\mathrm{N/m^2}$$

lässt sich auch in dem Plot 4 feststellen.

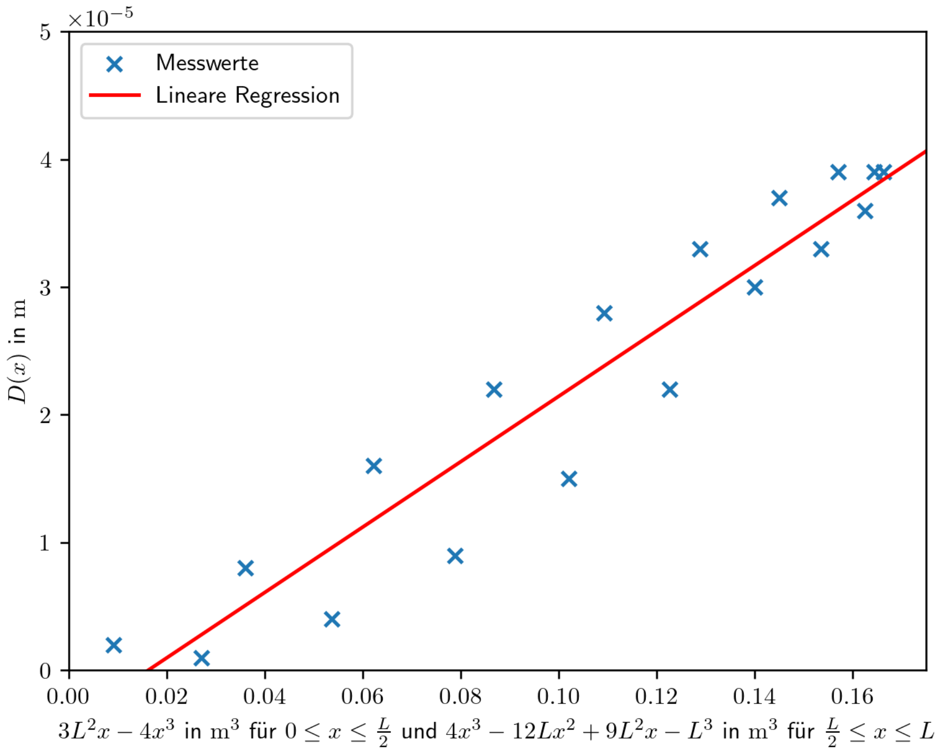

Abbildung 4: Durchbiegung des beidseitig eingespannten runden Stabes in Abhängigkeit eines Linearisierungsterms.

4.2.2 Eckiger Stab

Auch für den beidseitig eingespannten eckigen Stab gilt dasselbe Procedere wie bei dem beidseitig eingespannten runden Stab. Auch dieses Mal wird $D_q(x)$ gegen $(3L^2x - 4x^3)$ und $(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3)$ aufgetragen und anhand linearer Regression von Python und dem bereits bestimmten I_q durchgeführt.
Der im Anschluss mit (8) bestimmte Wert des Elastizitätsmoduls

$$E_{bq} = (1{,}63 \pm 0{,}15) \cdot 10^{12}\,\mathrm{N/m^2}$$

ist somit auch dem Plot 5 zu entnehmen.

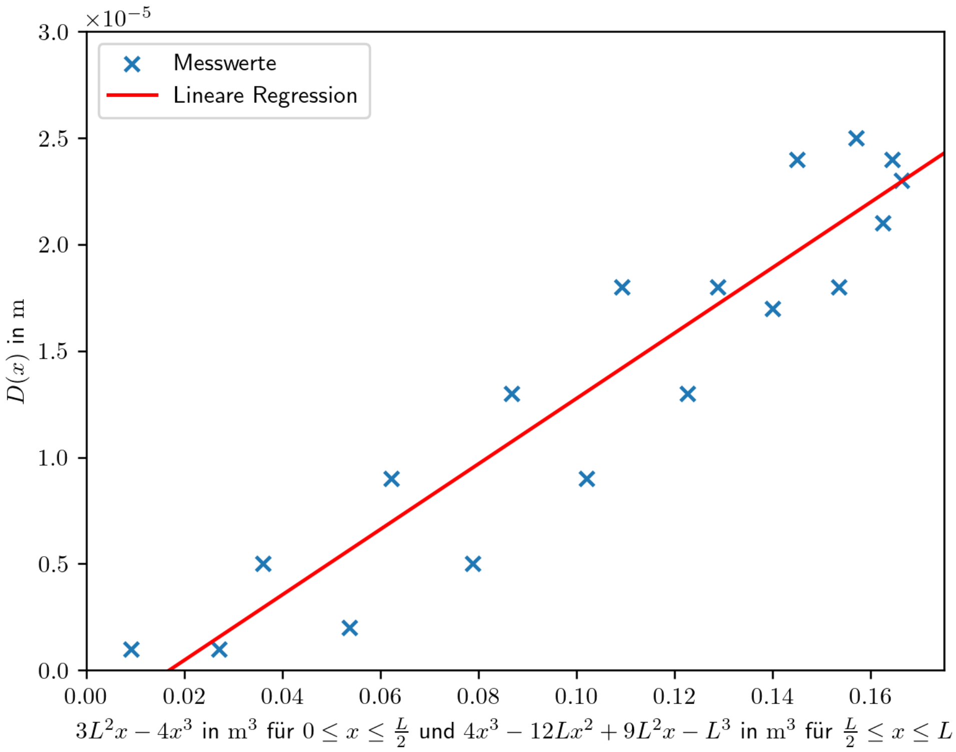

Abbildung 5: Durchbiegung des beidseitig eingespannten eckigen Stabes in Abhängigkeit eines Linearisierungsterms.

5 Diskussion

Aus den Messungen und der Auswertung ergaben sich die Werte

$$
\begin{aligned}
E_{er} &= (1{,}16 \pm 0{,}05) \cdot 10^{12}\,\mathrm{N/m^2}, \\
E_{eq} &= (7{,}25 \pm 0{,}22) \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}, \\
E_{br} &= (1{,}66 \pm 0{,}13) \cdot 10^{12}\,\mathrm{N/m^2} \quad \text{und} \\
E_{bq} &= (1{,}63 \pm 0{,}15) \cdot 10^{12}\,\mathrm{N/m^2}
\end{aligned}
$$

für das Elastizitätsmodul.
Angenommen das Material sei Aluminium gewesen mit dem Literaturwert von $E = 70 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m^2}$ [1]. Dann zeigen sich Abweichungen nach oben mit

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{er} &= (1560 \pm 70)\,\%, \\
\Delta E_{eq} &= (936 \pm 31)\,\%, \\
\Delta E_{br} &= (2270 \pm 190)\,\% \quad \text{und} \\
\Delta E_{bq} &= (2230 \pm 220)\,\%
\end{aligned}
$$

Diese Abweichungen sind recht hoch und könnten auf verschiedene Fehler zurückzuführen sein. Zum einen sind die Messuhren, mit denen die Auslenkung gemessen wurde äußerst ungenau, da diese schon bei sehr leichten Erschütterungen abweichende Werte anzeigten. Des Weiteren war der zu messende Stab schon vor dem Auslenken mit dem Gewicht leicht verbogen. Auch die Befestigung der Stäbe gelang nicht einwandfrei, da die Apparatur nicht in der Lage war diese ausreichend fest zu fixieren. Zu guter Letzt gab es etwaige Messfehler durch den Faktor Mensch. So mussten die Messuhren wiederholt abgelesen, verschoben und genullt werden. Auch das Gewicht musste häufig abgenommen und wieder positioniert werden, wobei der Ort leicht variieren kann.

6 Anhang

	Rund beid.	Eckig beid	Eckig ein.	Rund ein.	
Ort [cm]	Auslenkung [mm]	Auslenkung [mm]	Auslenkung [mm]	Auslenkung [mm]	
3	1	1	3	5	
6	4	2	11	17	
9	9	5	21	32	
12	15	9	35	56	
15	22	13	51	83	
18	30	17	71	112	
21	33	18	96	149	
24	36	21	121	171	
27	39	23	151	189	
30	39	24	171	209	
33	39	25	205	240	
36	37	24	227	261	
39	33	18	282	296	
42	28	18	306	325	
45	22	13	320	361	
48	16	9	340	395	
51	8	5			
54	2	1			
	Gewicht bei	Gewicht bei	Gewicht bei	Gewicht bei	
	28,5cm	28,5cm	53,5cm	53,5	
	l = 55cm	l = 55cm	l = 54cm	l = 54cm	
	Gewicht:	Gewicht:	Gewicht	Gewicht	
	1021g	1021g	499.5g	499.5g	

K.Ak

m Rund [g]	d Rund [cm]	m Eckig [g]	d Eckig [cm]	L Rund [cm]	L Eckig [cm]
129.8	1.0	167.9	1.01	59	60
	1.005		1.005		
	1.0		1.0		
	1.005		1.01		
	1.0		1.005		
Δm	Δd 0.05				

Kba

7 Literaturverzeichnis

[1] *Mechanische Eigenschaften von Aluminium Al-Legierungen.* Website. [Maschinenbau-Wissen.de], 4. Dez. 2022. URL: https://www.maschinenbau-wissen.de/skript3/werkstofftechnik/aluminium/383-eigenschaften-alu.

[2] *Versuch V103: Biegung elastischer Stäbe.* Moodle. [Grundpraktikum I für Physikstudierende], 4. Dez. 2022.