Aufgabenblatt 5

Philipp Stassen, Claas Latta

17. Mai 2018

Aufgabe 1

Sei A ein Hauptidealring, M ein endlich erzeugter A-Modul und

$$A^{r'} \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{k_i} A/(q_i^{t_{ij}}) \cong M \cong A^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{l_i} A/(p_i^{s_{ij}}) \tag{1}$$

mit $p_1, ..., p_m, q_1, .., q_m \in A$ prim und $1 \leq s_{i1} \leq ... \leq s_{il_i}$ resp. $1 \leq t_{i1} \leq ... \leq t_{ik_i}$.

i) Wir wollen zeigen, dass $r = r'$

Beweis. Es ist $M_{tor} \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{k_i} A/(q_i^{t_{ij}})$, denn

$$\prod_{i=1}^{m} q_i^{t_{ik_i}} \in \operatorname{Ann}_A \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{k_i} A/(q_i^{t_{ij}}) \right) \tag{2}$$

und A^r ist frei, da A ein Integritätsbereich ist. Also ist $A^{r'} \cong M/M_{tor} \cong A^r$. Nun folgt von Übungsblatt 3 Aufgabe 4, dass $r = r'$. □

ii) Behauptung: Bis auf Permutation der q_i gilt, dass p_i zu q_i assoziiert ist. Insbesondere gilt dann $m = n$.

Beweis. Es ist $M(q_i) \cong \bigoplus_{j=1}^{k_i} A/(q_i^{t_{ij}})$. Zu jedem i haben wir den Annulator $a = q_i^{t_{ik_i}} \in \operatorname{Ann}_A(M(q_i))$. Für $m \in M(q_i)$ und $\varphi \in \operatorname{Aut}(M)$ muss also gelten, dass $0 = \varphi(a \cdot m) = a \cdot \varphi(m)$. Also ist $a \in \operatorname{Ann}(\varphi(M(q_i)))$.

Da q_i prim ist, folgt aus $q_i^{t_{ik_i}} = a = p_i^{t_{il_i}}$ bereits, dass q_i assoziiert zu p_i ist. □

iii) Behauptung: Ist p_i assoziiert zu q_i, dann ist $s_{ij} = t_{ij}$ für alle j.

Beweis. Vermöge Teilaufgabe ii) wissen wir, dass $\varphi(M(q_i)) = M(p_i)$. Es genügt also die Aussage für einen primären Modul zu beweisen.

Sei $\bigoplus_{j=1}^{k} A/(q^{t_j}) \cong M \cong \bigoplus_{j=1}^{l} A/(p^{s_j})$ mit dem Isomorphismus

$$\varphi : \bigoplus_{j=1}^{k} A/(q^{t_j}) \to \bigoplus_{j=1}^{l} A/(p^{s_j}). \tag{3}$$

Wir wissen, dass

$$(q^{t_k}) = \mathrm{Ann}(M) = (p^{s_l}). \tag{4}$$

Deshalb folgt, dass $t_k = s_l$. Desweiteren induziert φ einen Isomorphismus

$$M/(A/q^{t_k}) \cong \bigoplus_{j=1}^{k-1} A/(q^{t_j}) \cong \bigoplus_{j=1}^{l-1} A/(p^{s_j}) \cong N/(A/p^{s_l}). \tag{5}$$

Wir iterieren dieses Verfahren und erhalten die Eindeutigkeit der Exponenten. □

iv) Behauptung: Es existieren minimales $d \in \mathbb{N}$ und bis auf Assoziiertheit eindeutige $a_1, ..., a_d \in A \backslash \{0\}$

$$M \cong A^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{d} A/(a_i) \tag{6}$$

und $a_1|a_2|...|a_d$.

Beweis. Nach dem chinesischen Restsatz (siehe Wiki oder irgendein Algebrabuch) ist für teilerfremde $a_1, ..., a_n$

$$A/(a_1 \cdot ... \cdot a_n) \cong \prod_{i=1}^{n} A/(a_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A/(a_i) \tag{7}$$

Wir definieren

$$a_d := \prod_{i=1}^{n} p_i^{t_{il_i}} \tag{8}$$

$$a_h := \prod_{i=1}^{n} p_i^{t_{i(l_i-(d-h)}} \text{ für } h < d \tag{9}$$

wobei wir definieren, dass $t_{ij} = 1$ falls $j \leq 0$. Dann gilt nach dem chinesischen Restsatz

$$A^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{l_i} A/(p_i^{s_{ij}}) \cong A^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{d} A/(a_i), \tag{10}$$

wobei $d = \max_{i=1}^{n}(l_i)$.

Dass diese Zerlegung eindeutig ist bis auf Assoziiertheit folgt daraus, dass die p_i eindeutig sind bis auf Assoziiertheit. Es ist nach Konstruktion klar, dass $a_1|a_2|...|a_d|$. $\square$