Aufgabenblatt 2

Philipp Stassen, Claas Latta

25. April 2018

Aufgabe 3

i) Sei $f:M\to N$ so, dass die induzierte Abbildung von $M/IM\to N/IM$ surjektiv ist.

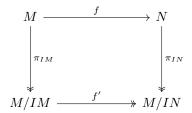


Abbildung 1: Diagram zu der Situation in Aufgabe 3i)

Um die Surjektivität von f zu zeigen, genügt es zu beweisen, dass der Cokern von f trivial ist, da dann $im(f) = ker(\pi_{cokerf}) = N$ gelten würde.

Wir wollen Nakayamas Lemma auf cokerf anwenden. cokerf ist zusammen mit der durch $\pi_{\mathsf{coker}f}$ induzierten Struktur ein endlich erzeugter A-Modul, da $\pi_{\mathsf{coker}f}$ surjectiv und A-linear ist. Es bleibt nun zu zeigen, dass $I \cdot \mathsf{coker}f = \mathsf{coker}f$ ist.

"
⊆": ist klar, da $I\subset A$ und der Cokerne
in A-Modul ist.

"\(\text{\text{\$?'}}\): Sei $n + \operatorname{im} f \in \operatorname{coker} f$ eine Nebenklasse des Cokerns, $m \in M$ so, dass $f'(\pi_{IM}(m)) = \pi_{IN}(f(m))$ (siehe Figure 1), und f(m) = n + in'. Die Existenz eines solchen m folgt aus der Surjektivität von f'. Daraus folgt:

$$n + \mathsf{im}f = n - f(m) + \mathsf{im}f \tag{1}$$

$$= n - n + in' + imf \tag{2}$$

$$= in' + imf \in (IN)/imf. \tag{3}$$

Also ist $n + \mathsf{im} f \in I(\mathsf{coker} f)$. Da wir annehmen, dass I im Jacobsen-Radikal enthalten ist, folgt nun mit Hilfe des Lemmas von Nakayama, dass $\mathsf{coker} f = 0$.

ii)

Korollar 0.1. Unter den Annahmen der Vorraussetzungen für Nakayamas Lemma folgt, dass ein $a \in I$ existiert, sodass für alle $m \in M$ gilt $a \cdot m = m$.

Beweis. Der Beweis folgt aus der Konklusion i) des Lemmas von Nakayama. Existiert nämlich ein $a\in I$, sodass (1+a)m=0 für alle $m\in M$, dann beweist $-a\in I$ die Korrektheit des Korollars. Die Gleichung kann einfach umgeformt werden

$$(-a) \cdot m = (1 - (1+a))m = m - (1+a)m = m \tag{4}$$

Sei $f:N\to N$ surjektiv und Nein endlich erzeugter A-Modul. Wir definieren die Multiplikation

$$\star : A[X] \times N \to N \tag{5}$$

$$P \star n := P(f)(n), \tag{6}$$

die die A-Multiplikation auf N erweitert. Das Ringprodukt wirkt auf N als die Hintereinanderausführung der Funktionen. Dass N mit dieser Multiplikation zu einem A[X]-Modul wird, kennen wir aus der Einführung in die Algebra.

Es ist klar, dass N auch als A[X]-Modul endlich erzeugt ist, da $A \subset A[X]$. Es ist $X \star N = f(N) = N$, aufgrund der Surjektivität von f. Deshalb gilt für $I = (X) \subset A[X]$, dass $I \star N = N$ ist. Wegen Korollar 0.1 existiert ein $Q \in I$, sodass für alle $n \in N$ gilt, dass $Q \star n = n$. Da $Q \in I$ lässt es sich schreiben als Q'X mit $Q' \in A[X]$

Sei nun f(n) = 0, dann ist

$$n = Q \star n = Q'X \star n = Q'(f)(f(n)) = Q'(f)(0) = Q' \star 0 = 0,$$
 (7)

Daraus folgt die Injektivität.

iii) Sei K ein Körper und K[X] der zugehörige Polynomring. Dann ist die Vervollständigung des Polynomrings K(X) ein (nicht endlich erzeugter) K[X]-Modul. Desweiteren ist $(X) \subset K[X]$ (das maximale Ideal von K[X]) eine Teilmenge des Jacobson-Radikal. Es ist klar, dass $(X) \cdot K(X) = K(X)$, da K(X) ein Körper ist. K(X) ist allerdings nicht leer.

Aufgabe 4

i) Sei R ein Ring und M ein R-Modul.

Wir wollen zeigen dass M genau dann zerlegbar in $M=A\oplus B$, wenn $\operatorname{End}_R(M)$ ein idempotentes Element $e\neq 0,1$ besitzt.

Beweis. " \Rightarrow " Sei $M = A \oplus B$. Wir können mithilfe der universellen Eigenschaft des Coproductes einen Endomorphismus $e \in \operatorname{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ konstruieren, indem wir ihn nur auf den Summanden definieren (siehe fig. 2.

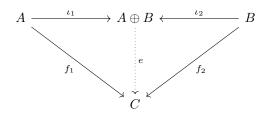


Abbildung 2: Coproduct

Wir definieren $f_1: A \to M$ durch die die kanonische Einbettung $f_1 = \iota$ und $f_2: B \to M$ durch die Nullabbildung $f_2 = b \mapsto 0$.

Die Abbildung e ist jetzt ein idempotentes Element von $\operatorname{End}_R(M)$, da

$$e^{2}(\iota_{1}(a)) = \iota_{1}(a) = e(\iota_{1}(a)) \text{ und}$$
 (8)

$$e^{2}(\iota_{2}(b)) = 0 = e(\iota_{2}(b))$$
 (9)

und nach der universellen Eigenschaft des Coproduktes sind Funktionen die auf den Summanden übereinstimmen bereits gleich.

"\(\infty\)" Es sei $e^2=e$ ein idempotentes Element von $\operatorname{End}_R(M)$, dann ist ist auch 1-e ein idempotentes Element, da

$$(1-e)\cdot(1-e) = (1-e)-(1-e)\cdot e = 1-e-e+e^2 = 1-e$$
 (10)

Da für beliebiges $m \in M$ gilt, dass $m = m \star e + m \star (1 - e)$ (Distributivität), gilt $M = e(M) \oplus (1 - e)(M)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\ker(e) \neq \{0\}$. Das folgt, da $m \star (1 - e) \in \ker(e)$. Umgekehrt ist $m \star e \in \ker(1 - e)$.