Aufgabenblatt 2

Philipp Stassen, Claas Latta

25. April 2018

Aufgabe 3

i) Sei $f : M \to N$ so, dass die induzierte Abbildung von $M/IM \to N/IM$ surjektiv ist.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi_{IM}"] & N \arrow[d, two heads, "\pi_{IN}"] \\ M/IM \arrow[r, two heads, "f'"] & M/IN \end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Diagram zu der Situation in Aufgabe 3i)

Um die Surjektivität von f zu zeigen, genügt es zu beweisen, dass der *Cokern* von f trivial ist, da dann $im(f) = ker(\pi_{cokerf}) = N$ gelten würde.

Wir wollen Nakayamas Lemma auf $\mathsf{coker}f$ anwenden. $\mathsf{coker}f$ ist zusammen mit der durch $\pi_{\mathsf{coker}f}$ induzierten Struktur ein endlich erzeugter A-Modul, da $\pi_{\mathsf{coker}f}$ surjectiv und A-linear ist. Es bleibt nun zu zeigen, dass $I \cdot \mathsf{coker}f = \mathsf{coker}f$ ist.

"$\subseteq$": ist klar, da $I \subset A$ und der *Cokern* ein A-Modul ist.

"$\supseteq$": Sei $n + \mathsf{im}f \in \mathsf{coker}f$ eine Nebenklasse des Cokerns, $m \in M$ so, dass $f'(\pi_{IM}(m)) = \pi_{IN}(f(m))$ (siehe Figure 1), und $f(m) = n + in'$. Die Existenz eines solchen m folgt aus der Surjektivität von f'. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} n + \mathsf{im}f &= n - f(m) + \mathsf{im}f && (1) \\ &= n - n + in' + \mathsf{im}f && (2) \\ &= in' + \mathsf{im}f \in (IN)/\mathsf{im}f. && (3) \end{aligned}$$

Also ist $n + \mathsf{im}f \in I(\mathsf{coker}f)$. Da wir annehmen, dass I im Jacobsen-Radikal enthalten ist, folgt nun mit Hilfe des Lemmas von Nakayama, dass $\mathsf{coker}f = 0$. $\square$

ii)

Korollar 0.1. *Unter den Annahmen der Vorraussetzungen für Nakayamas Lemma folgt, dass ein $a \in I$ existiert, sodass für alle $m \in M$ gilt $a \cdot m = m$.*

Beweis. Der Beweis folgt aus der Konklusion i) des Lemmas von Nakayama. Existiert nämlich ein $a \in I$, sodass $(1 + a)m = 0$ für alle $m \in M$, dann beweist $-a \in I$ die Korrektheit des Korollars. Die Gleichung kann einfach umgeformt werden

$$(-a) \cdot m = (1 - (1 + a))m = m - (1 + a)m = m \tag{4}$$

□

Sei $f : N \to N$ surjektiv und N ein endlich erzeugter A-Modul. Wir definieren die Multiplikation

$$\star : A[X] \times N \to N \tag{5}$$

$$P \star n := P(f)(n), \tag{6}$$

die die A-Multiplikation auf N erweitert. Das Ringprodukt wirkt auf N als die Hintereinanderausführung der Funktionen. Dass N mit dieser Multiplikation zu einem $A[X]$-Modul wird, kennen wir aus der Einführung in die Algebra.

Es ist klar, dass N auch als $A[X]$-Modul endlich erzeugt ist, da $A \subset A[X]$. Es ist $X \star N = f(N) = N$, aufgrund der Surjektivität von f. Deshalb gilt für $I = (X) \subset A[X]$, dass $I \star N = N$ ist. Wegen Korollar 0.1 existiert ein $Q \in I$, sodass für alle $n \in N$ gilt, dass $Q \star n = n$. Da $Q \in I$ lässt es sich schreiben als $Q'X$ mit $Q' \in A[X]$

Sei nun $f(n) = 0$, dann ist

$$n = Q \star n = Q'X \star n = Q'(f)(f(n)) = Q'(f)(0) = Q' \star 0 = 0, \tag{7}$$

Daraus folgt die Injektivität.

iii) Sei K ein Körper und $K[X]$ der zugehörige Polynomring. Dann ist die Vervollständigung des Polynomrings $K(X)$ ein (nicht endlich erzeugter) $K[X]$-Modul. Desweiteren ist $(X) \subset K[X]$ (das maximale Ideal von $K[X]$) eine Teilmenge des Jacobson-Radikal. Es ist klar, dass $(X) \cdot K(X) = K(X)$, da $K(X)$ ein Körper ist. $K(X)$ ist allerdings nicht leer. □

Aufgabe 4

i) Sei R ein Ring und M ein R-Modul.

Wir wollen zeigen dass M genau dann zerlegbar in $M = A \oplus B$, wenn $\mathrm{End}_R(M)$ ein idempotentes Element $e \neq 0, 1$ besitzt.

Beweis. "⇒" Sei $M = A \oplus B$. Wir können mithilfe der universellen Eigenschaft des Coproductes einen Endomorphismus $e \in \mathrm{End_R(M)}$ konstruieren, indem wir ihn nur auf den Summanden definieren (siehe fig. 2.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & A \oplus B \arrow[d, dotted, "e"] & B \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
 & C &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2: Coproduct

Wir definieren $f_1 : A \to M$ durch die die kanonische Einbettung $f_1 = \iota$ und $f_2 : B \to M$ durch die Nullabbildung $f_2 = b \mapsto 0$.

Die Abbildung e ist jetzt ein idempotentes Element von $\mathrm{End}_R(M)$, da

$$e^2(\iota_1(a)) = \iota_1(a) = e(\iota_1(a)) \text{ und} \tag{8}$$

$$e^2(\iota_2(b)) = 0 = e(\iota_2(b)) \tag{9}$$

und nach der universellen Eigenschaft des Coproduktes sind Funktionen die auf den Summanden übereinstimmen bereits gleich.

"$\Leftarrow$" Es sei $e^2 = e$ ein idempotentes Element von $\mathrm{End}_R(M)$, dann ist ist auch $1 - e$ ein idempotentes Element, da

$$(1-e) \cdot (1-e) = (1-e) - (1-e) \cdot e = 1 - e - e + e^2 = 1 - e \tag{10}$$

Da für beliebiges $m \in M$ gilt, dass $m = m \star e + m \star (1-e)$ (Distributivität), gilt $M = e(M) \oplus (1-e)(M)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\ker(e) \neq \{0\}$. Das folgt, da $m \star (1-e) \in \ker(e)$. Umgekehrt ist $m \star e \in \ker(1-e)$. $\square$