Aufgabenblatt 3

Philipp Stassen, Claas Latta

2. Mai 2018

Aufgabe 1

(i) $\Rightarrow$ (ii): Gegeben ist die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3.$$

Abbildung 1: exakte Sequenz

Wir wollen zeigen, dass die folgende Sequenz für alle A-Moduln M exakt ist.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}_A(M, N_2) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}_A(M, N_3)$$

Abbildung 2: zu zeigen

Zuerst zeigen wir, dass $f\circ$ *injektiv* ist. Angenommen $f \circ \varphi = 0$, dann ist $\mathsf{im}(\varphi) \subseteq \ker(f) = \{0\}$, da f injektiv ist. Also ist $\ker(f\circ) = \{0\}$ und $f\circ$ injektiv.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathsf{im}(f\circ) = \ker(g\circ)$.
"$\subseteq$" Sei $\psi \in \mathsf{im}(f\circ)$. Dann ist $\mathsf{im}(\psi) \subseteq \mathsf{im}(f) = \ker(g)$. Deshalb ist $g \circ \psi = 0$ und $\psi \in \ker(g)$.
"$\supseteq$" Sei $\psi \in \ker(g\circ)$, also $g \circ \psi = 0$. Dann ist $\mathsf{im}(\psi) \subseteq \ker(g) = \mathsf{im}(f)$. Da f injektiv ist, existiert die Umkehrfunktion, sodass wir $f^{-1}(\psi(m)) =: \varphi(m) : M \to N_1$ definieren können. Dann ist aber $f \circ \varphi = \psi$ und damit $\psi \in \mathsf{im}(f\circ)$. $\square$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei nun umgekehrt die Sequenz für alle A-Moduln M exakt.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}_A(M, N_2) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}_A(M, N_3)$$

Abbildung 3: exakte Sequenz für beliebigen A-Modul M

Wir wollen zeigen dann auch die Sequenz in Figure 4 exakt ist.

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3.$$

Abbildung 4: zu zeigen

Zuerst zeigen wir, dass f injektiv ist. Wir betrachten die exakte Sequenz für $M = \ker(f)$.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\ker(f), N_1) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}_A(\ker(f), N_2) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}_A(\ker(f), N_3)$$

Die Einbettung $\iota : \ker(f) \hookrightarrow N_1$ ist ein Homomorphismus. Wenden wir $f\circ$ darauf an, erhalten wir, dass $f \circ \iota = 0$. Also ist $\iota = 0$, da $f\circ$ nach Annahme injektiv ist. Aufgrund der Injektivität von ι folgt aus $\iota(\ker(f)) = 0$, dass bereits $\ker(f) = 0$, also ist f injektiv.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathsf{im}(f) = \ker(g)$

"$\subseteq$": Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N_1, N_1) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}_A(N_1, N_2) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}_A(N_1, N_3)$$

Wir betrachten $\mathsf{id} \in \mathrm{Hom}_A(N_1, N_1)$. Da die Sequenz exakt ist, wissen wir, dass $\mathsf{im}(f\circ) = \ker(g\circ)$. Daraus folgt, dass $g \circ f \circ \mathsf{id} = 0$ ist. Also ist auch $g \circ f = 0$ und damit $\mathsf{im}(f) \subseteq \ker(g)$.

"$\supseteq$":

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\ker(g), N_1) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}_A(\ker(g), N_2) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}_A(\ker(g), N_3)$$

Es sei $\iota : \ker(g) \hookrightarrow N_2$, dann ist $g \circ \iota = 0$ und damit $\iota \in \ker(g\circ) = \mathsf{im}(f\circ)$. Da $\iota \in \mathsf{im}(f\circ)$ ist, existiert ein $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\ker(g), N_2)$, sodass $f \circ \varphi = \iota$. Sei nun $x \in \ker(g)$, dann ist $x = \iota(x) = f(\varphi(x)) \in \mathsf{im}(f)$. Also ist $\ker(g) \subseteq \mathsf{im}(f)$.

Aufgabe 2

i) Es sei A ein Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Wir wollen zeigen, dass $M/IM \cong (A/I) \otimes_A M$.

Dazu definieren wir die Abbildungen

$$\Phi : M/IM \to (A/I) \otimes_A M \tag{1}$$
$$[m]_{M/IM} \mapsto [1]_{A/I} \otimes_A m \tag{2}$$

und

$$\Psi : (A/I) \otimes_A M \to M/IM \tag{3}$$
$$[a]_{A/I} \otimes_A m \mapsto [a \cdot m]_{M/IM} \tag{4}$$

Die Abbildungen sind A-linear. Die Abbildungen sind invers zueinander:

$$\Psi \circ \Phi([m]) = \Psi([1] \otimes_A m) = [1 \cdot m] = [m] \tag{5}$$
$$\Phi \circ \Psi([a] \otimes_A m) = \Phi[A \cdot m] = [1] \otimes_A a \cdot m = [a] \otimes_A m \tag{6}$$

□

ii) Sei A ein Ring, $I, J \subseteq A$ Ideale, dann ist $A/I \otimes_A A/J \cong A/I + J$.

Beweis. Wir definieren die Abbildungen

$$\Phi : A/I \otimes_A A/J \to A/I + J \tag{7}$$
$$[a]_I \otimes_A [a']_J \mapsto [a \cdot a']_{I+J} \tag{8}$$

und die Umkehrung

$$\Psi : A/I + J \to A/I \otimes_A A/J \tag{9}$$
$$[a]_{I+J} \mapsto [1]_I \otimes_A [a]_J \tag{10}$$

Ψ ist wohldefiniert, da

$$\Psi([a+i]) \mapsto [1] \otimes_A [a+i]_J = [1]_I \otimes_A [a] + [1]_I \otimes_A [i]_J \tag{11}$$
$$= [1]_I \otimes_A [a] + [i]_I \otimes_A [1]_J \tag{12}$$
$$= [1]_I \otimes_A [a] + [0]_I \otimes_A [1]_J \tag{13}$$
$$= [1]_I \otimes_A [a] = \Psi([a]) \tag{14}$$

Beide Abbildungen sind A-linear. Die Abbildungen sind invers zeinander, da

$$\Phi \circ \Psi([a]) = \Phi([1] \otimes_A [a]) = [1 \cdot a] = [a] \tag{15}$$
$$\Psi \circ \Phi([a] \otimes_A [a']) = \Psi([a \cdot a']) = [1] \otimes_A [a \cdot a'] = [a] \otimes_A [a'] \tag{16}$$

□

iii) Sei A Ring, B eine A-Algebra, M ein A-Modul und N ein B-Modul. Wir wollen zeigen, dass $N \otimes_A M \cong N \otimes_B (B \otimes_A M)$.

Beweis. Wir definieren die Abbildungen

$$\Phi : N \otimes_A M \to N \otimes_B (B \otimes_A M) \tag{17}$$
$$\Phi(n \otimes_A m) := n \otimes_B (1 \otimes_A m) \tag{18}$$

und

$$\Psi : N \otimes_B (B \otimes_A M) \to N \otimes_A M \tag{19}$$
$$\Psi(n \otimes_B (b \otimes_A m)) := b \cdot n \otimes_A m \tag{20}$$

Diese Abbildungen sind B-linear und invers zueinander. Die B-Linearität folgt aus dem Satz 3.12 der Vorlesung. Die beiden Abbildungen sind invers zueinander, da

$$\Phi \circ \Psi(n \otimes_B (b \otimes_A m)) = \Phi(b \cdot n \otimes_A m) = b \cdot n \otimes_B (1 \otimes_A m) = n \otimes_B (b \otimes_A m) \tag{21}$$

$$\Psi \circ \Phi(n \otimes_A m) = \Psi(n \otimes_B (1 \otimes_A m)) = n \otimes_A m \tag{22}$$

□

iv) Sei A ein Ring, M ein A-Modul. Der Polynomring

$$M[X] = \{\sum_{i=0}^{n} m_i x^i | n \in \mathbb{N}, m_i \in M\} \tag{23}$$

wird mit der Multiplikation

$$M[X] \times A[X] \to M[X] \tag{24}$$

$$(P_M, P_A) \mapsto P_M \cdot P_A \tag{25}$$

zu einem $A[X]$-Modul. Wir wollen zeigen, dass $M[X] \cong A[X] \otimes_A M$.

Beweis. Wir definieren die Abbildungen

$$\Phi : M[x] \to A[X] \otimes_A M \tag{26}$$

$$\Phi(P_M) = \sum_{i=0}^{n} x^i \otimes_A m_i \tag{27}$$

und

$$\Psi : (A[X] \otimes_A M) \to M[X] \tag{28}$$

$$\Psi(P_A \otimes_A m) = P_A \cdot m \tag{29}$$

Die Abbildung Ψ ist so definiert, dass sie A-linear ist. Die Abbildungen sind invers zueinander

$$\Phi \circ \Psi(P_A \otimes_A m) = \Phi(P_A \cdot m) = \sum_{i=0}^{n} x^i \otimes_A a_i \cdot m = \sum a_i \cdot x^i \otimes_A m \tag{30}$$

$$= P_A \otimes_A m \tag{31}$$

$$\Psi \circ \Phi(P_M) = \Psi(\sum_{i=0}^{n} x^i \otimes_A m_i) = \sum_{i=0}^{n} \Psi(x^i \otimes_A m_i) = \sum x^i \cdot m_i = P_M \tag{32}$$

□