Serie 8

Philipp Stassen, Felix Jäger, Lisa Krebber

13. Juni 2018

Aufgabe 2

Sei S eine Sprache und Φ eine konsistente Menge von universellen S-Sätzen, in denen das symbol $\equiv$ nicht auftaucht.

Behauptung: Es gibt ein Model $\mathfrak{M}$ von Φ mit $\mathfrak{M}(t_1) \neq \mathfrak{M}(t_2)$ für alle paarweise verschiedenen Terme t_0 und t_1.

Beweis. Wir konstruieren ein Termmodell $\mathfrak{T}^\Phi$ nach dem Vorbild der Vorlesung (*Definition* 52). Die Relation $\sim$ sei trivial und identifiziere bloß syntaktisch identische Terme. Damit ist T^S die Grundmenge von $\mathfrak{T}^\Phi$. Damit folgt die gewünschte Eigenschaft, dass $\mathfrak{T}^\Phi(t_0) \neq \mathfrak{T}^\Phi(t_1)$ für paarweise verschiedene Terme t_0 und t_1 direkt aus der Definition von $\mathfrak{T}^\Phi$.

(1) Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{T}^\Phi \models \Phi$. Wir wissen, dass $\mathfrak{T}^\Phi$ alle atomaren Formeln aus Φ erfüllt (Theorem 54). Um die Aussage $\mathfrak{T}^\Phi \models \Phi$ zu zeigen, müssen wir ähnlich wie bei der Konstruktion von Henkin Mengen vorgehen. Da Φ nach Annahme konsistent ist, und die Ableitungs Vollständigkeit nach *Theorem* 61 ohne Komplikationen auch für diesen Fall folgt, genügt es zu zeigen, dass Φ "Zeugen" enthält. Wir schwächen die Aussage etwas ab, und verlangen keine Zeugen. Im Gegenzug müssen wir die Sprache nicht erweitern, da Φ diese schwächere Annahme bereits erfüllt.

(2) Behauptung: Für $\varphi = \forall x \psi \in \Phi$ gibt es Terme $t_0, ..., t_{n-1}$ sodass $\Phi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg(\bigwedge_{0 \leq i < n} \psi \frac{t_i}{x})$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Herbrands Theorem und dem Vollständigkeitssatz. *qed*(2)

(3) Nun müssen wir um (1) zu erhalten noch zeigen, dass *Lemma 56 c)* und *Theorem 57* in leicht abgewandelter Form trotzdem gelten.

Lemma 56 c) Für alle $t_0, ..., t_{n-1} \in T^S$ gilt $\Phi \vdash \bigwedge_{0 \leq i < n} \psi \frac{t_i}{x}$ gdw $\Phi \vdash \forall x\, \psi$.

Der Beweis wiederholt die Argumentation des originalen Lemmas.

Beweis Theorem 57 Lediglich Part *iv*) des Beweises, also der Induktionsschrit zum Allquantor, muss modifiziert werden. $\square$