Aufgabenblatt 2

Philipp Stassen, Felix Jäger, Lisa Krebber

25. April 2018

Aufgabe 6

(1)

(a) Es sei $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$ und $\mathfrak{M}$ ein beliebiges Modell, sodass $\mathfrak{M} \models \Phi$.

Dann ist ebenfalls $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$, wie man der Wahrheitstabelle für $\wedge$ entnehmen kann. Da $\mathfrak{M}$ beliebig war, gilt die Aussage für alle Modelle von Φ. Demnach folgt $\Phi \models \varphi \wedge \psi$.

Alternativer Beweis Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$, dann gilt $\Phi \not\models \neg\psi$. Demnach gilt auch $\Phi \not\models \varphi \to \neg\psi$, also $\Phi \models \neg(\varphi \to \neg\psi)$. Da wir $\neg(\varphi \to \neg\psi) := \varphi \wedge \psi$ definiert haben, folgt die Behauptung. $\square$

(b) Die Argumente aus (a) lassen sich einfach umkehren. Ich zeige dies nur für den ersten Beweis.

Es sei $\Phi \models \varphi \wedge \psi$ und $\mathfrak{M}$ ein beliebiges Modell, sodass $\mathfrak{M} \models \Phi$. Dann gilt auch $\mathfrak{M} \models \varphi$ und $\mathfrak{M} \models \psi$, wie man der Wahrheitstabelle für $\wedge$ entnehmen kann. Da $\mathfrak{M}$ beliebig war, gilt dies für alle Modelle von Φ. Daraus folgt $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$. $\square$

(c) Es sei $\Phi \models \varphi$, $\psi \in L^S$ eine beliebige Formel und $\mathfrak{M}$ ein Modell, sodass $\mathfrak{M} \models \Phi$. Dann ist $\mathfrak{M} \models \varphi$, und anhand der Wahrheitstabelle für $\vee$ ist sowohl $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$ als auch $\mathfrak{M} \models \psi \vee \varphi$. Da das Modell beliebig war, folgt $\Phi \models \varphi \vee \psi$ bzw. $\Phi \models \psi \vee \varphi$. $\square$

(d) Es seien $\Phi \models \varphi \vee \psi$, $\Phi \models \neg\psi$ und $\mathfrak{M}$ ein Modell, sodass $\mathfrak{M} \models \Phi$. Demnach ist $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$ und $\mathfrak{M} \models \neg\psi$. Man kann der Wahrheitstabelle für $\vee$ entnehmen, dass $\mathfrak{M} \models \varphi$ gelten muss. Da das Modell $\mathfrak{M}$ beliebig war, folgt $\Phi \models \varphi$ $\square$

(2) Sei $S_{Gr} = (e, \circ)$ die Sprache der Gruppen, Φ sei leer, und

$$\varphi = \forall v_1 \forall v_2 v_1 \circ v_2 \equiv v_2 \circ v_1 \text{ sowie} \tag{1}$$

$$\psi = \neg\varphi. \tag{2}$$

Da $\varphi \vee \neg\varphi$ eine Tautologie ist, gilt $\models \varphi \vee \psi$.

Allerdings ist $(\mathbb{N}, +)$ ein Modell einer abelsche Gruppe und $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$, die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen, ein Modell einer nicht abelschen Gruppe. Deshalb gelten $\not\models \phi$ und $\not\models \psi$.

Ein bekannteres Beispiel ist die Wahl von $S = (\in)$, Φ ist das ZFC Axiomsystem gemeinsam mit der Annahme, dass es konsistent ist. ϕ ist die Kontinuumshypothese und ψ die Negation derselben. Auch hier ist $\phi \vee \psi$ eine Tautologie, aber sowohl ϕ als auch ψ gelten nicht für alle Modelle.