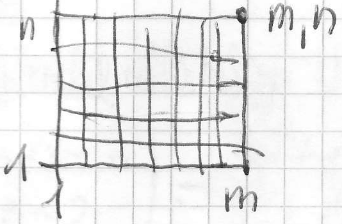
Mds Blatt 7

Aufg 3 a



$(x,y) \to (x+1,y)$

oder $(x,y) \to (x,y+1)$

Es gibt $m-1$ Schritte nach rechts und $n-1$ Schritte nach oben.
Um Pkt (m,n) zu erreichen gibt es:

$$M = \binom{n-1+m-1}{n-1} \text{ Möglichkeiten}$$

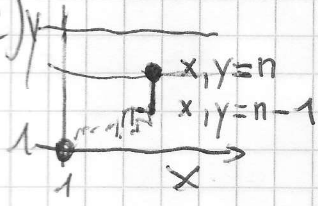
b) Sei $m,n \geq 20$. Um den Pkt (m,n) zu erreichen ohne über Pkt $(10,10)$ zu gehen, müssen:

1. Alle Wege $M_1: (1,1) \to (10,10)$ und
2. Alle Wege $M_2: (10,10) \to (m,n)$ betrachtet werden

$$M_1 = \binom{9+9}{9} = \binom{18}{9} \qquad M_2 = \binom{m-10+n-10}{n-10}$$

Dann gilt für die Anzahl der Möglichkeiten ohne über $(10,10)$: $\quad M_{ohne} = M - M_1 \cdot M_2$

$$M_{\substack{ohne \\ (10,10)}} = \binom{m+n-2}{n-1} - \binom{18}{9}\binom{m+n-20}{n-10}$$

c) 

Alle möglichen Wege von $(1,1) \to (x, y=n)$ müssen vorher den Punkt $(x, y=n-1)$ treffen. Nur so ist möglich, dass von $(x, y=n-1) \to (x, y=n)$ nur ein Weg möglich ist und ein $(x', y'=n)$ ausgeschlossen ist

Für festes x mit $1 \leq x \leq m$ gibt es dann ~~$x+n-3$~~ $\binom{x+n-3}{n-2}$ mögliche Wege.

WDS 7

Aufg 3 c Anzahl aller Wege $\forall x\ 1 \leq x \leq m$ gilt dann

$$\sum_{x=1}^{m} \binom{x+n-3}{n-2} = \sum_{x=1}^{m} \left(\binom{x+n-2}{n-1} - \binom{x+n-3}{n-1} \right) \quad \Big| \text{ wg. } \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$$

$$= \sum_{x=1}^{m} \binom{x+n-2}{n-1} - \sum_{x=1}^{m} \binom{x+n-3}{n-1}$$

$$= \cancel{\sum_{x=1}^{m-1} \binom{x+n-2}{n-1}} + \binom{m+n-2}{n-1} - \cancel{\sum_{x=1}^{m-1} \binom{x+n-2}{n-1}} - \cancel{\binom{n-2}{n-1}} - \underbrace{\binom{1+n-3}{n-1}}_{=0}$$

$$= \binom{m+n-2}{n-1}$$

Luds Blatt 7

Aufgabe 5 Sei $L \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprache.

zu zeigen: $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$ ist regulär.

Wir setzen:

$$f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(\varepsilon) = \varepsilon, \quad f(a) = a$$

$$f(R_1 + R_2) = f(R_1) + f(R_2) = R_1^R + R_2^R$$

$$f(R_2 \cdot R_1) = R_1^R \cdot R_2^R = f(R_1) \cdot f(R_2)$$

$$f(R^*) = (R^*)^R = f(R)^*$$

zzg $L(f(R))$ ist regulär

iA $f(\emptyset) = \emptyset = "\emptyset^R"$ ✓

$f(\varepsilon) = \varepsilon = "\varepsilon^R"$ ✓

$f(a) = a = a^R$ ✓

iV Reguläre Ausdrücke R_1, R_2, $f(R_1)$, $f(R_2)$ regulär

iS: Sei $R = R_1 + R_2$

$$L(f(R) = L(f R_1) + L(f(R_2) = L(f(R_1) \cup L(f(R_2))$$

$$L(f(R) = \{w^R : w \in R_1\} \cup \{w^R : w \in R_2\} = \{w^R : w \in L(R_1) \cup L($$

$$= \{w^R : w \in L(R_1 + R_2) = \{w^R : w \in L(R)\}$$ ✓

Sei $R = R_2 \cdot R_1$

$$L(f(R)) = L(f(R_2) \cdot f(R_1)) = L(f(R_2)) \cdot L(f(R_1))$$

$$= \{w_2^R w_1^R : w_2 \in L(R_2) \wedge w_1 \in L(R_1)$$

$$= \{(w_1 w_2)^R : w_2 \in L(R_2) \wedge w_1 \in L(R_1)\}$$

$$= \{w^R : w \in L(R_1 \cdot R)\} = \{w^R : w \in L(R)\}$$

LuDS 7

Aufgabe 5

Sei $R = R_1^*$

Fall 1: $R_1^0 = \varepsilon = \varepsilon(R_1^R)^0$ ✓

Fall 2 $R_1^1 = R_1$ iV R_1^R ist regulär.

Fall 3 R_1^* mit $* \geq 2 \iff$ endlich oft Konkatenation von regulären Ausdrücken $\Rightarrow (R_1^R)^*$ ist regulär

$$\Rightarrow L(R^R) = L^R = \{w^R \mid w \in L\} \text{ ist regulär} \quad \square$$