Logik und diskrete Stukturen

Felix (2807144) & Philipp (2583572) Müller

WS 14/15

Blatt 8

Aufgabe 1

a) Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Induktionsanfang:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2 \checkmark$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2n + 1 \\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{2n}\frac{i(i+4)}{2} + \sum_{i=4}^{2(n+2)}\frac{i(i-4)}{2} - \sum_{i=2}^{2(n+1)} i^2 - i - 2 \\ &= \sum_{i=0}^{2n}\frac{i^2+4i}{2} + \sum_{i=4}^{2n+4}\frac{i^2-4i}{2} - \sum_{i=2}^{2n+2} i^2 - i - 2 \\ &= \sum_{i=0}^{2n}\frac{i^2}{2} + \sum_{i=0}^{2n} 2i + \sum_{i=4}^{2n+4}\frac{i^2}{2} - \sum_{i=4}^{2n+4} 2i - \sum_{i=2}^{2n+2} i^2 + \sum_{i=2}^{2n+2} i + \sum_{i=2}^{2n+2} 2\end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} i^2}{2} + 2\sum_{i=0}^{2n} i + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{2n+4} i^2}{2}}_{=\frac{\sum_{i=0}^{2n} i^2}{2}+\frac{(2n+1)^2+(2n+2)^2+(2n+3)^2+(2n+4)^2}{2}} - \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{4}{2}+\frac{9}{2}}_{=7}$$

$$- \underbrace{\sum_{i=0}^{2n+2} i^2}_{=\sum_{i=0}^{2n} i+(2n+1)^2+(2n+2)^2} -1 + \sum_{i=0}^{2n+2} i - 1 + 4n$$

$$= 2n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2+(2n+2)^2+(2n+3)^2+(2n+4)^2}{2} + \underbrace{\frac{(2n+2)(2n+3)}{2}}_{=\underbrace{\frac{4n^2+6n+4n+6}{2}}_{=2n^2+5n+3}} +4n-9$$

$$= 4n^2 + 2n + \frac{4n^2+4n+1+4n^2+8n+4+4n^2+12n+9+4n^2+16n+16}{2}$$

$$+ 2n^2 + 5n + 3 + 4n - 9$$

$$= \frac{16n^2+40n+30}{2} + 3n^2 + 11n - 9$$

$$= 11n^2 + 55n + 21$$

Aufgabe 2

a) Wir wählen aus der Menge der Punkten genau die 2-elementigen Kombinationen, diese spiegeln gerade die Kanten des hierdurch entstehenden Graphen wieder. Daher ergibt sich für die Anzahl der Kanten in Abhängigkeit der Punkte n

$$\binom{n}{2}$$

b) Für $n < 4$ gibt es keine Schnittpunkte. Für $n \geq 4$ fügt jeder hinzukommende Punkt $\binom{n+1}{4} - \binom{n}{4}$ Schnittpunkte hinzu. Daher ergeben sich für die gesamte Anzahl der Schnittpunkte

$$\begin{cases} \binom{n}{4} & n \geq 4 \\ 0 & n < 4 \end{cases}$$

für n Punkte.

Aufgabe 3

a) Betrachte $(\mathbb{R}^2, \#)$ mit $(x_1, x_2)\#(y_1, y_2) = (x_1, y_2)$.

i) **Assoziativität**

$$\begin{aligned}
[(x_1, x_2)\#(y_1, y_2)]\,\#(z_1, z_2) &= (x_1, y_2)\#(z_1, z_2) \\
&= (x_1, z_2) \\
(x_1, x_2)\,[(y_1, y_2)\#(z_1, z_2)] &= (x_1, x_2)\#(y_1, z_2) \\
&= (x_1, z_2)
\end{aligned}$$

Daher ist $\#$ assoziativ.

ii) **Neutrales Element** Wir suchen ein Element $e = (e_1, e_2)$, welches folgende Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned}
\underbrace{(x_1, x_2)\#(e_1, e_2)}_{=(x_1,e_2)} &\stackrel{!}{=} (x_1, x_2) \\
&\stackrel{!}{=} (e_1, e_2)\#(x_1, x_2) \\
&= (e_1, x_2) \\
\implies (x_1, e_2) \stackrel{!}{=} (e_1, x_2) \stackrel{!}{=} (x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Es muss also $e_2 \stackrel{!}{=} x_2$ und $e_1 \stackrel{!}{=} x_1$ gelten.
Daher können wir kein eindeutiges neutrales Element e für alle (x_1, x_2) finden, da die Wahl von e abhängig von der Wahl von x ist.

iii) **Inverses Element** Weil kein neutrales Element existiert, kann auch kein inverses Element b existieren, da dieses definiert ist als $x\#b = e,\ \forall x$.

iv) **Kommutativität** Wir prüfen

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2)\#(y_1, y_2) &= (x_1, y_2) \\
&\neq (y_1, x_2) \\
&= (y_1, y_2)\#(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

und sehen, dass $\#$ nicht kommutativ ist. Daher handelt es sich hier um eine nichtkommutative Halbgruppe.

b) $(\mathbb{Z}, \star)$ mit $x \star y = x + y - 1$

i) **Assoziativität**

$$\begin{aligned}(x \star y) \star z &= (x + y - 1) \star z \\ &= x + y + z - 1 - 1 \\ &= x + y + z - 2 \\ x \star (y \star z) &= x \star (y + z - 1) \\ &= x + y + z - 1 - 1 \\ &= x + y + z - 2\end{aligned}$$

Daher ist $\star$ assoziativ.

ii) **Neutrales Element** Wir suchen ein Element e mit $e: \; e \star x \overset{!}{=} x \star e \overset{!}{=} x$. Wir haben also

$$\begin{aligned}x \star e &= x + e - 1 \\ e \star x = e + x - 1\end{aligned}$$

Wähle $e = 1$, dann gilt $\forall x \in \mathbb{Z}$, dass

$$x \star e = x \star 1 = x + 1 - 1 = x = 1 + x - 1 = 1 \star x = e \star x$$

Daher haben wir mit $e = 1$ ein neutrales Element.

iii) **Inverses Element** Suche $b \star x \overset{!}{=} e = 1$.

$$b \star x = b + x - 1 \iff b = -x + 2 \text{ wenn } b \star x \overset{!}{=} 1 \text{ gelten soll.}$$

Da $-x \notin \mathbb{Z}$ haben wir kein inverses Element.

iv) **Kommutativität** Es gilt

$$x \star y = x + y - 1 = y + x - 1 = y \star x$$

Daher handelt es sich um einen kommutativen Matroid.

c) $(\{0,1\}^n, \cdot)$ mit $(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots b_n) = (a_1b_1, \dots, a_nb_n)$. Dies stellt die Multiplikation von binären Polynomen (also deren Koeffizienten) dar.

i) **Assoziativität**

$$\begin{aligned} [(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n)] \cdot (c_1, \dots c_n) &= (a_1b_1, \dots, a_nb_n) \cdot (c_1, \dots, c_n) \\ = (a_1b_1c_1, \dots, a_nb_nc_n) &= (a_1, \dots, a_n) \cdot [(b_1c_1, \dots, b_nc_n)] \\ &= (a_1, \dots, a_n) \cdot [(b_1, \dots, b_n) \cdot (c_1, \dots, c_n)] \end{aligned}$$

Daher ist $\cdot$ assoziativ.

ii) **Neutrales Element** Suche $(e_1, \dots, e_n)$ so, dass

$$\begin{aligned} (a_1 \dots a_n) \cdot (e_1, \dots, e_n) &\overset{!}{=} (a_1, \dots, a_n) \\ &\overset{!}{=} (e_1, \dots, e_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Wählen wir $e = (e_1, \dots, e_n) = (1, \dots, 1)$, dann folgt

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \cdot (e_1, \dots, e_n) = (a_1, \dots, a_n) \cdot (1, \dots, 1) = (a_1 1, \dots, a_n 1) \\ = (a_1, \dots, a_n) = (1a_1, \dots 1a_n) = (1, \dots, 1) \cdot (a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n)(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Daher haben wir ein neutrales Element gefunden.

iii) **Inverses Element** Wir suchen $b = (b_1, \dots b_n)$ so, dass

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) \overset{!}{=} (e_1, \dots, e_n) = (1, \dots, 1)$$

Über $\{0,1\}$ existiert ein solches b nicht, da $1 \cdot 1 = 1$, jedoch für $a_i = 0$ kein b existiert mit $a_i \cdot b = 1$, also $0 \cdot b = 1$.

iv) **Kommutativität**

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1b_1, \dots, a_nb_n) \\ = (b_1a_1, \dots, b_na_n) = (b_1, \dots, b_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Daher haben wir einen kommutativen Monoid.

Aufgabe 4

Sei $(M, \star)$, $M \neq \emptyset$ und $\star$ eine Verknüpfung auf M. Definiere $\circ$ als Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$ durch $A \circ B = \{a \star b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

a) Zu zeigen: $(M, \star)$ ist Halbgruppe $\implies$ $(\mathcal{P}(M), \circ)$ ist Halbgruppe. Sei $(M, \star)$ Halbgruppe. Dann ist $\star$ assoziativ, d.h. es existieren $a, b, c \in M$ mit

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

Da für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt, dass $A, B \in (\mathcal{P}(M)$. Für die Potenzmenge gilt, dass $(\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$, also alle Mengen in $(\mathcal{P}(M)$ entweder M oder Teilmengen von M sind und $\circ$ auf diesen elementweise ausgeführt wird vererbt sich die Assoziativität von $\star$, somit ist $(\mathcal{P}(M)$ auch assoziativ, wenn $(M, \star)$ assoziativ ist und damit auch Halbgruppe, wenn $(M, \star)$ Halbgruppe ist.

b) Zu zeigen: $(M, \star)$ ist Monoid $\implies$ $(\mathcal{P}(M), \circ)$ ist Monoid.

Die Assoziativität nehmen wir aus (a), dann ist noch zu zeigen, dass wir in $\mathcal{P}(M)$ das gleiche neutrale Element haben wie $(M, \star)$. Dies gilt offensichtlich, wenn das neutrale Element in $U \subset M$ enthalten ist, weil schon für alle $x \in M$ gilt, dass $e \star x = x$ für $x \in M$. Daher ist $(\mathcal{P}(M), \circ)$ auch ein Monoid, wenn $(M, \star)$ ein Monoid ist.

c) Zu zeigen: $(M, \star)$ ist Gruppe $\implies$ $(\mathcal{P}(M), \circ)$ ist Gruppe.

Wir müssen also noch die inversen Elemente betrachten, die zusätzlich zu der Assoziativität und der Existenz eines neutralen Elements für eine Gruppe notwendig sind. Hier bekommen wir jedoch Probleme, da Teilmengen von M keine Inversen haben können, selbst wenn $(M, \star)$ inverse Elemente hat. Beispielsweise für $\{\emptyset\}$ finden wir kein inverses Element, so dass gelten würde $b \star \emptyset = e$, mit b als inverses Element.