Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Informatik

Bonn, **19. Dezember 2011**

# Musterlösung zum Aufgabenblatt 6 der Vorlesung Logik und Diskrete Strukturen

Erstellt von Marcel Prinz
prinz@cs.uni-bonn.de

## Aufgabe 1: Vollständige Induktion

Wir betrachten folgende rekursiv definierten Folgen.

**a)** Es sei $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 2$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie:
Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt die Gleichheit $a_n = 2n - 1$.

**Lösung:**
*Induktionsanfang:* $n = 1$

$$a_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1 = a_1$$

*Induktionsschritt:* $n \longrightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2 \\ &\overset{\text{I.V}}{=} 2n - 1 + 2 \\ &= 2(n+1) - 1 \end{aligned}$$

□

**b)** Es sei $b_1 = 1$ und $b_{n+1} = 3b_n + 1$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie:
Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt die Gleichheit $b_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

**Lösung:**
*Induktionsanfang:* $n = 1$

$$b_1 = 1 = \frac{2}{2} = \frac{3^1 - 1}{2} = b_1$$

*Induktionsschritt:* $n \longrightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3b_n + 1 \\ &\overset{\text{I.V}}{=} 3\frac{3^n - 1}{2} + 1 \\ &= \frac{3^{n+1} - 3}{2} + 1 \\ &= \frac{3^{n+1} - 3}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

□

**c)** Es sei $c_1 = 8$ und $c_{n+1} = 2c_n + n$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie:
Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt die Gleichheit $c_n = 5 \cdot 2^n - n - 1$.

**Lösung:**
*Induktionsanfang:* $n = 1$

$$c_1 = 8 = 10 - 2 = 5 \cdot 2^1 - 1 - 1 = a_1$$

*Induktionsschritt:* $n \longrightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 2c_n + n \\ &\overset{\text{I.V}}{=} 2 \cdot (5 \cdot 2^n - n - 1) + n \\ &= 5 \cdot 2^{n+1} - 2n - 2 + n \\ &= 5 \cdot 2^{n+1} - n - 2 \\ &= 5 \cdot 2^{n+1} - (n+1) - 1 \end{aligned}$$

$\square$

## Aufgabe 2: Binominalkoeffizient

Benutzen Sie die grundlegenden Identitäten $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$ und $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$, um per Induktion für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

**Lösung:**
*Induktionsanfang:* $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k \binom{1}{k} = 1 \cdot \binom{1}{1} = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$$

*Induktionsschritt:* $n \longrightarrow n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n+1}{k} + (n+1)\binom{n+1}{n+1}$$

Zuerst wird der letzte Summand aus der Summe gezogen.

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) + (n+1)$$

Als nächstes nutzt man die erste Identität: $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k-1} + (n+1)$$

Danach wird die Klammer ausmultipliziert und auf zwei Summen aufgeteilt.

$$\overset{\text{I.V}}{=} n2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k-1} + (n+1)$$

So kann man einmal die Induktionsvorausetzung nutzen.

$$= n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n}{k} + (n+1)$$

Um wieder die Identitäten bzw. Induktionsvorausetzung nutzen zu können, muss man im Binominalkoeffizienten in der Summe den Index $k$ anpassen

$$= n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n}{k} - (n+1)\binom{n}{n} + (n+1)$$

Man erweiter die Summe um den n-ten Summanden, den man anschließend wieder subtrahiert damit die Gleichheit bestehen bleibt

$$= n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n}{k} - (n+1) + (n+1)$$

Der letzte Binominalkoeffizient ergibt 1, so dass (n+1) subtrahiert wird.

$$= n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Anschließend wird die Klammer ausmultipliziert und auf zwei Summen verteilt

$$= n2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} + 2^n$$

Bei der zweiten Summe kann man sich die zweite Identität verwenden: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.
In der ersten Summe kann der Summand für $k = 0$ ignoriert werden, da er 0 ergibt.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{I.V}}{=} n2^{n-1} + n2^{n-1} + 2^n \\ &= 2 \cdot n2^{n-1} + 2^n \\ &= n2^n + 2^n \\ &= (n+1)2^n \end{aligned}$$

Nun kann wieder die Induktionsvorausetzung eingesetzt werden. Danach noch zusammenfassen.

$\square$

**Aufgabe 3: Einheiten und Nullteiler**

Geben Sie die für die folgenden beiden kommutativen Ringe mit Eins jeweils die Menge der Einheiten und die Menge der Nullteiler an. Beweisen sie Ihre Antwort.

**a)** $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

**Lösung:**
**Definition Einheit**: *Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Seien $v, w$ Elemente von $R$ und es gelte $v \cdot w = 1$, so nennt man $v$ und $w$ Einheiten von $R$*
**Definition Nullteiler**: *Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Seien $a \neq 0, b \neq$ Elemente von $R$ und es gelte $a \cdot b = 0$, so nennt man $a$ und $b$ Nullteiler von $R$*

Außerdem gilt für jedes Element $x$ aus $R$, $x$ ist entweder Nullteiler oder Einheit von $R$.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$

Eingeiten $:= \{[1], [2], [3], [4]\}$

$$[1] \cdot [1] = [1]$$
$$[2] \cdot [3] = [1]$$
$$[4] \cdot [4] = [1]$$

Nullteiler $:= \{\}$

Es gibt keine Nullteiler da schon alle Elemente, die ungleich 0 sind, Eingheiten sind.

**b)** $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

**Lösung:**
$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]\}$

Nullteiler $:= \{[2], [3], [4], [6], [8], [9], [10], \}$

$$[2] \cdot [6] = [0]$$
$$3] \cdot [4] = [0]$$
$$[3] \cdot [8] = [0]$$
$$[4] \cdot [9] = [0]$$
$$[6] \cdot [10] = [0]$$

Alle Elemente, außer [0], die keine Nullteiler sind, sind Einheiten.

Einheiten $:= \{[1], [5], [7], [11]\}$

**Aufgabe 4: Rekursion und Widerspruchsbeweis**

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere Menge reeler Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Jede nicht leere Teilmenge von $M$ enthält eine kleinste und eine größte Zahl. Beweisen Sie, dass M nur endlich viele Elemente enthält

**Lösung:**
Wir nehemen an, dass $M$ unendlich viele Elemente enthält. Des Weiteren definieren wir folgende Teilmengen von $M$: $M_0 = M$ und $u_0 = \min\{M_0\}$. Weiter gilt $M_1 = M_0 \backslash u_0$. Wir definieren $M_i$ rekursiv: $M_i = M_{i-1} \backslash u_{i-1}$ $\forall i \geq 1$.

Sei $U := \{u_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$, so gibt es ein $u_k$ welches die größte Zaghl von $U$ sein muss, da $U$ offensichtlich eine Teilmenge von $M$ ist. Nun kann man, weil M unendlich viele Elemente enthält, über die Rekursion $M_{k+1} = M_k \backslash u_k$ die Menge $M_{k+1}$ bilden. Es muss muss eine Element $u_{k+1}$ existieren mit der Eigenschaft $u_{k+1} > u_k$ und $u_{k+1} \in U$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt, dass M endlich sein muss.

$\square$