LUDS
Üb Blatt 4

Aufgabe 1. Seien A und B nichtleere Mengen

a) Zu zeigen:

Ist $f: A \to B$ eine Abbildung von $A \to B$, so wird durch $\forall a_1, a_2 \in A: (a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2))$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A definiert.

Die Relation $\sim$ beinhaltet alle Tuppel (a_1, a_2) aus $A \times A$ für die gilt $f(a_1) = f(a_2)$. Dazu ist zu prüfen, ob die Relation $\sim$ die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt:

1.) Reflexivität: $\forall a_1 \in A$ gilt: $(a_1, a_1) \sim$ da für alle a_1 ~~...~~ $\in A$ gilt $f(a_1) = f(a_1)$ ✓

2.) Symmetrie: $\forall a_1, a_2 \in A$:
Wenn $(a_1, a_2) \in \sim \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow f(a_2) = f(a_1)$
~~Das~~ heißt: Wenn $(a_1, a_2) \in \sim \Rightarrow (a_2, 1) \in \sim$.
Die Rückrichtung lässt sich analog zeigen. Also gilt:
~~...~~ $(a_1, a_2) \in \sim \Leftrightarrow (a_2, a_1) \in \sim$ ✓

3.) Transitivität: $(a_1, a_2) \in \sim \wedge (a_2, a_3) \in \sim \Rightarrow (a_1, a_3) \in \sim$
Wenn $(a_1, a_2) \in \sim \wedge (a_2, a_3) \in \sim$ gilt $\Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$ und $f(a_2) = f(a_3)$. Dann gilt auch $f(a_1) = f(a_3) \Rightarrow$ $(a_1, a_3) \in \sim$ ✓

LUDS Üblatt 4

Aufgabe 1b

Ist $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf A und ist $C = \{[[a]]_\sim \mid a \in A\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$, so gibt es eine Abbildung $p: A \to C$, sodass $\forall a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \sim a_2 \iff p(a_1) = p(a_2)$$

Wenn $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist ~~auf~~ A und (a_1, a_2) ist in $\sim$ enthalten, dann gilt $[[a_1]]_\sim = [[a_2]]_\sim$ (gleiche Äquivalenzklasse) $\Rightarrow a_1, a_2 \in [[a_1]]_\sim$ und $a_1, a_2 \in [[a_2]]_\sim$

Es ~~gelten~~ sei: $[[a_1]]_\sim := \{b \in A \mid (a_1, b) \in \sim\}$ und

$[[a_2]]_\sim := \{b \in A \mid (a_2, b) \in \sim\}$

Sei b ein beliebiges Element $[[a_1]]_\sim \Rightarrow (a_1, b) \in \sim \Rightarrow (b, a_1) \in \sim$ wegen Symmetrie. Wegen $(a_1, a_2) \in \sim$ und $(b, a_1) \in \sim \Rightarrow$ $(b, a_2) \in \sim$ wegen Transitivität $\Rightarrow$ Symmetrie $(a_2, b) \in \sim$ und daraus folgt $b \in [[a_2]]$. D.h. jedes Element aus $[[a_1]]_\sim$ ist auch Element in $[[a_2]]_\sim$. Die Rückrichtung kann man analog folgern.

$a_1 \sim a_2 \iff [[a_1]]_\sim = [[a_2]]_\sim$ wähle $p: A \to C$ mit $p(a) = [[a]]_\sim$

$\Rightarrow a_1 \sim a_2 \iff p(a_1) = p(a_2)$ Dies gilt für alle $a_1, a_2 \in A$

Also existiert so eine ~~Funktion~~ Abbildung (Funktion) $p(a)$.

Mds Üb Blatt 4

Aufgabe 1c

Seien $\sim$ und C wie in Aufg 1b. Ist $f: A \to B$ eine Abbildung und gilt $\forall a_1, a_2 \in A: (a_1 \sim a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2))$

dann wird durch $g([\![a]\!]_\sim) = f(a) \ \forall a \in A$ eine Abbildung $g: C \to B$ definiert.

Zu zeigen ist also

$\forall a_1, a_2 \in A: (a_1 \sim a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)) \Rightarrow g([\![a]\!]_\sim) = f(a)$

In Teil b wurde hergeleitet, dass $\forall a_1, a_2 \in A: (a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow [\![a_1]\!] = [\![a_2]\!])$

Mit dieser Äquivalenz und $(a_1 \sim a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2))$

folgt $([\![a_1]\!]_\sim = [\![a_2]\!]_\sim \Rightarrow f(a_1) = f(a_2))$

$\Rightarrow (g([\![a_1]\!]_\sim) = g([\![a_2]\!]_\sim) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow \forall a \in A: g([\![a]\!]_\sim) = f(a)$

~~D~~amit gilt

$\forall a_1, a_2 \in A: ((a_1 \sim a) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)) \Rightarrow g([\![a]\!]_\sim) = f(a)$