MDS

ÜbBlatt 5

Aufgabe 1

a) Zeige: $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq 2: \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$ (iV)

iA: $n=2 \quad \left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ✓

iS: $n \rightsquigarrow n+1 \quad \prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$\overset{iV}{=}\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)=\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1} \quad \square$$

b) zeige: $\forall n \in \mathbb{N}: \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)=\sum_{i=1}^{n+1} i$ [iV]

iA. $n=1: \quad 1\cdot\left(1+\frac{2}{1}\right)=1+2=3$ ✓

iS. $n \rightsquigarrow n+1 \quad \prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{2}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$

$$\overset{iV}{=}\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)\left(1+\frac{2}{n+1}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{(n+1)}\right)$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{(n+1+2)}{(n+1)}=\frac{(n+2)(n+3)}{2}=\sum_{i=1}^{n+2} i \quad \square$$

InDS
ÜbBlatt 5
Aufgabe 4

Grenzen des Pumping Lemmas (PL)

a) $L_1 = \{0^k 1^l \mid l,k \geq 0\}$ $L_2 = \{1^k 0^l 1^l \mid l,k \geq 1\}$

über Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ $L = L_1 \cup L_2$

PL: Wenn eine Sprache L durch DFA entschieden wird

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall z \in L$ und $|z| \geq n$

$\exists$ Zerlegung $z = uvw$: $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$

mit $i \in \mathbb{N}$ $\forall i \geq 0$: $uv^iw \in L$

– zu zeigen: $L = L_1 \cup L_2$, wird von DFA M entschieden

Idee: zeige $z \in L_1$, $z \in L_2 \Rightarrow z \in L_1 \cup L_2 = L$

$n = 1$, $z = z_1 z_2 \ldots z_m$ $|z| = m \geq n$ $|uv| \leq n$ $|v| = 1$

sei $u = \varepsilon$, $v = z_1$, $w = z_2 z_3 \ldots z_m$

PL gilt für L_1: Fall 1 wähle $v = 0 \Rightarrow z = uv^iw = 0^{k+i} 1^l \in L_1$

Fall 2 $v = 1 \Rightarrow z = uv^iw = 1^{i+l} \in L_1$

PL gilt für L_2: $v = 1$ $z = uv^iw = 1^{k+i} 0^l 1^l \in L_2 = \{1^k 0^l 1^l \mid k,l \geq 1\}$

Also: $\left.\begin{array}{l} z \in L_1 \\ z \in L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow z \in (L_1 \cup L_2) = L$

BuDS

ÜbBlatt 5

Aufgabe 4b) Zu zeigen: Ein DFA kann L nicht entscheiden.

Widerspruchsbeweis: Annahme: Es gibt einen DFA_1 der L entscheidet.

Dann muß er die beiden Teilsprachen entscheiden, da $L = L_1 \cup L_2$. Annahme DFA_M entscheidet L_2.

Sei Q die endliche Zustandsmenge von M. Betrachte die Menge der Wörter $\{1, 101, 10^2 1^2, \ldots 10^{|Q|} 1^{|Q|}\}$. ~~Das~~ Da es hier mehr Wörter als Zustände sind, muß es zwei Wörter geben, nach deren lesen DFA M im gleichen Zustand ist. Diese 2 Wörter seien $(10^i 1^i)$ und $(10^j 1^j)$ mit $i \neq j$ und für sie gilt

$$\delta^*(q_0, (10^i 1^i)) = \delta^*(q_0, (10^j 1^j))$$

. Da M die Sprache gem. Annahme entscheidet gilt $\delta^*(q_0, (10^i 1^i) \in F$ und damit auch $\delta^*(q_0, (10^j 1^j) \in F$ was im Widerspruch zur Annahme ist. Also ist die Annahme falsch.

$\Rightarrow$ Es gibt keinen DFA, der $L_2 = \{1^k 0^l 1^l \mid l, k \geq 1\}$ entscheidet.

Damit kann es keinen DFA geben, der $L = L_1 \cup L_2$ entscheidet.