ÜbBl 1 LUDS

Gruppe 7
Johannes Loevenich Mi 08-10 00

Aufgabe 1

Lösung mit 7 Negationen, Konjunktionen und Disjunktionen

A	B	C	$\neg B$	$\cup (\neg A \cap \neg C)$	$\cup (A \cap C)$	Gesamtergebnis
0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

Lösung mit 6 N, K, D durch

$$\neg B \cup \neg(A \cup B) \cup (A \cap C)$$

denn $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

Aufgabe 2: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ mit vollständiger Induktion

(1) Induktionsanfang (IA) $i=0$ $\quad \sum_{i=0}^{0} x^0 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{x^1-1}{x-1} = 1$ ✓

(2) Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i \overset{!}{=} \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} \overset{\text{iv}}{=} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

□

iv = Induktionsvoraussetzung

ÜbBlatt2 LUDS Grp7

Aufgabe 3 Zu zeigen mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$ (iv)

① iA: $i=1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{1} 1 \cdot 2^1 \overset{iv}{=} 0+2$ ✓

② iS: $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i + (n+1) \cdot 2^{n+1} \overset{iv}{=} (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= (n-1+n+1) \cdot 2^{n+1} + 2 = \cancel{2n \cdot 2^{n+1} + 2} = 2n \cdot 2^{n+1} + 2$$

$$= ((n+1)-1) \cdot 2^{n+2} + 2$$

$\square$

Aufgabe 4

a) i) $\forall x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

ii) $\exists n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3$ und $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: x^n + y^n = z^n$

b) i) $\exists x \in \mathbb{R}: \neg(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Q})$

$= \exists x \in \mathbb{R}: \neg(x \notin \mathbb{Q} \vee \sqrt{x} \in \mathbb{Q})$

$= \exists x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3$ und $\exists x, y, z \in \mathbb{Z}: x^n + y^n \neq z^n$