# Logik und diskrete Stukturen

**Felix (2807144) & Philipp (2583572) Müller**

WS 14/15

## Blatt 5

### Aufgabe 1

a) Für $n \geq 2$ gilt $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$

I.A.: $n = 2$. $1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ ✓

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}(1-\frac{1}{k}) &= \frac{1}{n+1} \\
(1-\frac{1}{n+1})\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k}) &= \frac{1}{n+1} \\
\text{IV anwenden: } (1-\frac{1}{n+1})\frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1} \\
\frac{(n+1)-1}{n+1}\frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1} \\
\frac{n}{n+1}\frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1} \\
\frac{n}{(n+1)n} &= \frac{1}{n+1} \\
\frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n+1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{2}{k}) = \sum_{i=1}^{n+1} i$

I.A.: $n = 1$, $1 + \frac{2}{1} = 1 + 2$ ✓

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{2}{k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right) + (n+2)$$

$$1+\frac{2}{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right) + n + 2$$

$$\text{I.V.: } \left(1+\frac{2}{n+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} + n + 2$$

$$1+\frac{2}{n+1} = \frac{n+2}{\sum_{i=1}^{n+1} + 1}$$

$$\text{Gauss: } \frac{2}{n+1} + 1 = \frac{2(n+2)}{(n+1)(n+2)} + 1$$

$$\frac{2}{n+1} = \frac{2}{n+1} \qquad \blacksquare$$

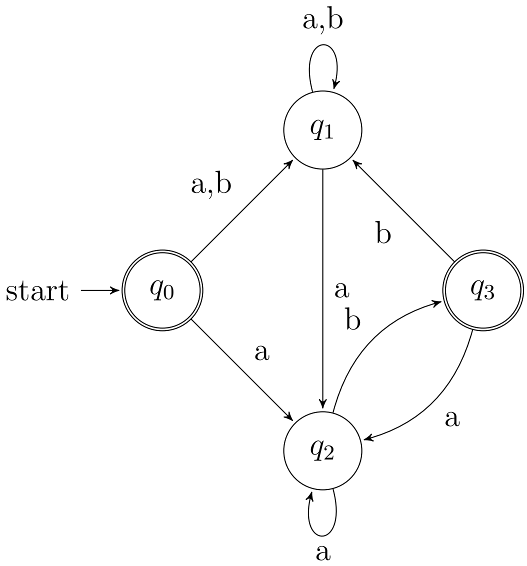
## Aufgabe 2

a) Konstruieren Sie aus dem NFA $M$ mithilfe der Potenzmengenkonstruktion einen äquivalenten DFA $M'$.

Der **NFA** $M$ ist definiert als:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$F = \{q_0, q_3\}$$
$$q_0 = \{q_0\}$$
$$\delta \subseteq (Q \times \Sigma) \times Q$$
$$\delta : Q \times \Sigma \to P(Q)$$

Graphisch:



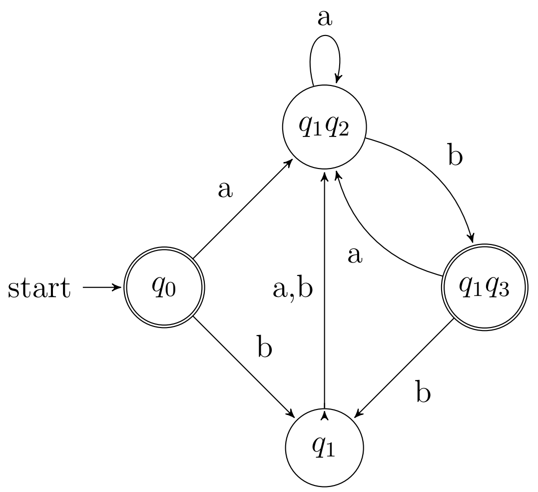
Der zugehörige **DFA** $M'$ charaktierisiert sich wie folgt.

$$
\begin{aligned}
q_0' &= \{q_0\} \\
Q' = P(Q) &= \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \\
&\ldots \{q_0, q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \\
&\ldots \{q_0, q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_3\}, \{q_0, q_2, q_3\}, \\
&\ldots \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}\} \\
F' &= (q \in Q' \mid q \cap F \neq \emptyset) \\
&= \{Q' \setminus \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}\} \\
\delta' &= Q \times \Sigma \to Q
\end{aligned}
$$

Die Zustandsüberführungsrelation $\delta'$ für $M'$ können wir auch durch folgende Tabelle angeben:

| $\delta'$ | $q_0$ | $q_1q_2$ | $q_1$ | $q_1q_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $\{q_1q_2\}$ | $\{q_1q_2\}$ | $\{q_1q_2\}$ | $\{q_1q_2\}$ |
| $b$ | $\{q_1\}$ | $\{q_1q_3\}$ | $\{q_1q_2\}$ | $\{q_1\}$ |

Oder als Graph:




b) Geben Sie die Sprache an, die der NFA $M$ entscheidet.

$$
\begin{aligned}
L(M) = L(M') &= \{\epsilon, ab, aab, babab, abbaaab, \ldots, \text{ Wörter müssen auf } ab \text{ enden}\} \\
&= \{\epsilon, P(a^i, b^j)ab \mid i, j \geq 0,\ i, j \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

## Aufgabe 3

Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ nicht regulär sind.

Pumping Lemma:

$$\exists n \in \mathbb{N}_0, \forall z \in L, |z| \leq n : \exists u, v, w \text{ mit } z = uvw$$

Für die Zerlegung von $z$ gilt dann:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| > 0$
3. $\forall\, i \in \mathbb{N}_0 :\ uv^i w \in L$

a) $L_1 = \{a^i b^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$

Angenommen $L_1$ sei regulär. Dann gibt es nach dem Pumping Lemma eine Zahl $n$, so dass sich alle Wörter $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$ wie folgt zerlegen lassen.

Betrachte speziell das Wort $z = uvw = a^n b^{2n}$.

Gemäß Bedingung 2 ist $v$ nicht leer, gemäß Bedingung 1 besteht $uv$ und somit auch $v$ ausschließlich aus $a$s (da $|uv| \leq n$ und $|uvw| = |a^n b^{2n}| = 3n$). Mit Bedingung 3 müsste das Wort

$$uv^2 w = a^{n-|v|} a^{2\cdot|v|} b^2 n = a^{n+|v|} b^2 n$$

in $L$ liegen. Das ist aber offensichtlich falsch, denn dieses Wort hat mehr als halb soviele $a$s als $b$s, da $|v|$ größer 0 und damit $|n| + |v| > |n|$ . Damit gilt: $L$ kann nicht regulär sein.

b) $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } i < j < k\}$

Wähle $z = uvw = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, sodass $\alpha < \beta < \gamma$ gilt, nach Voraussetzung. Es gilt dann $|uvw| = |a^\alpha b^\beta c^\gamma| = \alpha + \beta + \gamma$ und $|uv| \leq n$, da $\alpha + \beta \leq \alpha + \beta + \gamma =: n$. Außerdem gilt $v > 0$.

Daher muss mit (3) auch das Wort $z^\star := uv^2w = a^\alpha(b^\beta)^2c^\gamma = a^\alpha b^{2\beta}c^\gamma$ in $L_2$ liegen. Dies ist jedoch nicht der Fall, da für $z^\star$ nicht mehr gilt, dass $\alpha < 2\beta < \gamma$. Dies wird offensichtlich, wenn man bspw. $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 3$ wählt. Daher gilt $z^\star \notin L_2$ und somit ist $L_2$ nicht regulär.

c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ist eine Zweierpotenz}\}$

Definiere $L_4 := \{a^{2^k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Es gilt $L_4 \subset L_3$.

Wähle nun $z = a^{2^k}$. Es gilt offensichtlich $z \in L_4$ und daher auch $z \in L_3$ sowie $|z| \geq n$.

Zerlege $z$ in $uvw$ so, dass $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ mit

$$u = a^p,\ v = a^q,\ w = a^{2^n-p-q} \mid p + q \leq n,\ q > 0.$$

Sei oBdA $i = 2$, dann gilt $uv^iw = a^{2^n+q}$. Aufgrund von $2^n \geq n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $p + q < 2^n$ und daher $0 < q < 2^n$. Das heisst

$$2^n < 2^n + q < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Daher ist $2^n + q$ keine Zweierpotenz, sondern liegt zwischen $2^n$ und $2^{n+1}$. Somit folgt $z = uv^iw = uv^2w \notin L_4$ und $z \notin L_3$. Also verletzen sowohl $L_4$ als auch $L_3$ das Pumping Lemma und sind nicht regulär.

## Aufgabe 4

Gegeben seien zwei Sprachen $L_1 = \{0^k1^l \mid k, l \geq 0\}$ und $L_2 = \{1^k0^l1^l \mid k, l \geq 1\}$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$ sowie deren Vereinigung $L = L_1 \cup L_2$.

a) Zeigen Sie, dass man mithilfe des Pumping-Lemmas nicht zeigen kann, dass es keinen DFA gibt, der die Sprache $L$ entscheidet.

Prüft man $L$ auf die Bedingungen des Pumping Lemmas sollte $L$ dieses nicht erfüllen, insofern $L$ nicht regulär ist. Allerdings erfüllt $L$ das Pumping Lemma, weil für jedes Wort $z \in L$ eine Zerlegung $uvw$ existiert mit $|uv| \leq n,\ v > 0$ und $|z| \geq n$ für die auch $uv^iw \in L$ für $l \geq 0$.

Dazu kann $v$ einfach als erster Buchstabe gewählt werden. Dieser ist entweder ein $a$, die Anzahl von führenden $a$s ist beliebig. Oder er ist ein $b$ oder $c$, ohne führende $a$s ist aber die Anzahl von führenden $b$s oder $c$s beliebig.

b) Zeigen Sie, dass die Sprache L nicht von einem DFA entschieden werden kann.

Die Forderung, dass $L$ nicht von einem DFA entschieden kann ist analog zur Forderung, dass $L$ regulär ist.

Betrachte erst die Sprache $L_0 = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$. Wenn ein DFA für die Wörter $w$ und $w'$ denselben Zustand erreicht, erreicht er für jedes Wort $w''$ auch für die Wörter $ww''$ und $w'w''$ denselben Zustand. Das heisst er akzeptiert $ww''$ und $w'w''$ oder er akzeptiert beide nicht. Nimm an, dass der DFA $A$ die Sprache $L_0$ entscheidet.

Betrachte nun die unendlich vielen Wörter $w_k = 0^k,\ k \geq 1$. Da ein DFA nur endlich viele Zustände haben darf, gibt es zwei Wörter $w_i$ und $w_j$ mit $i \neq j$ so, dass $A$ nach dem Lesen von $w_i$ und $w_j$ den gleichen Zustand erreicht. Für $w'' = 1^i$ ist $w_i w'' \in L_0$ und $w_j w'' \notin L_0$. $A$ trifft also für eines der Wörter $w_i w''$ oder $w_j w''$ eine falsche Entscheidung. Daher gibt es keinen DFA, der $L_0$ entscheidet.

Betrachten wir nun $L = L_1 \cup L_2$ für verschiedene $k, l$:

$$L = \begin{cases} \epsilon & l, k = 0 \\ 0 & l = 0, k = 1 \\ 1 & l = 1, k = 0 \\ (1^l 0^l 0^l) & l \geq 1, k = 0 \\ \underbrace{(0^k 1^k)}_{\equiv L_0} & l = 0, k \geq 1 \\ (0^k 1^l 1^k \underbrace{0^l 1^l}_{\equiv L_0}) & l, k \geq 1 \end{cases}$$

Wir sehen also, dass $L$ unter nicht-trivialen Variablenbelegungen (insbesondere $k \geq 1$) äquivalent zu solchen Sprachen (z.B. $L_0$) ist, die nicht durch DFAs darstellbar sind. Daher ist $L$ selbst nicht regulär.