ÜbBlatt 6 ~~[illegible]~~

Aufgabe 1

a) L reguläre Sprache über Σ

$\Rightarrow \exists$ DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ der die Sprache L entscheidet.

zzg: $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ ist eine reguläre Sprache,

$\exists$ DFA $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \underbrace{(Q \setminus F)}_{=F'})$, der die Sprache $\Sigma^* \setminus L$ entscheidet.

Sei $w = w_1 \ldots w_n$ mit $w \in \Sigma^* \setminus L$

$\Rightarrow \delta^*(q_0, w) \in (Q \setminus F) = F'$ M' entscheidet $\Sigma^* \setminus L$

denn wenn $\delta^*(q_0, w) \notin F'$ wäre, würde gelten $\delta^*(q_0, w) \in F$ und das ist ein Widerspruch zur Annahme.

$\Rightarrow$ Theorem 3.12 $\Rightarrow$ $\overline{L}$ ist eine reguläre Sprache

b) zzg $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i = \{w_1 \ldots w_n \mid n \in \mathbb{N}_0$ und $w_1 \ldots w_n \in L\}$ ist reguläre Sprache

L ist reguläre Sprache $\Rightarrow$ R regulärer Ausdruck

$R \cdot R$ ist regulärer Ausdruck mit $L(R \cdot R) = L^{(1)} \cdot L^{(2)} = \{w_1 \ldots w_n \in \mathbb{N}_0$ und $w_1 \ldots w_n \in L\}$

$R \cdot R \cdot R$ ist regulärer Ausdruck $L(R \cdot R \cdot R) = L^{(1)} \cdot L^{(2)} \cdot L^{(3)} \ldots$

$\Rightarrow (R)^*$ ist ein regulärer Ausdruck für den Kleeneschen Abschluss L^* von L und es gilt

$L((R)^*) = L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^{(i)}$ mit $L^{(0)} = \{\varepsilon\}$ und $L^{(i)} = L \cdot L^{i-1}$

Blatt 6

Aufgabe 2

a) $L_1 = \{w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \mid n \geq 1$ und $(w_1 = 0$ oder $w_n = 1\} = L_1(R_1)$

$R_1 = (0(0+1)^* + (0+1)^* 1)$

b) $L_2 = \{w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \mid n \geq 3$ und $\exists i \in \{1, \dots n-2\} : w_i = w_{i+1} = w_{i+2} = 0\}$

$R_2 = (0+1)^* 0^3 (0+1)^*$

c) $L_3 = \{w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \mid \forall i \in \{1, \dots n\} : w_i = 1 \Rightarrow i < n \wedge w_{i+1} = 0)\}$

$R_3 = (0 + 10)^*$

Blatt 6

Aufgabe 4 $\quad g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

mit $\quad g(x,y) = \frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2} + y = y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k$

zzg: $g(x,y)$ ist bijektiv, d.h. $g(x,y)$ ist injektiv und surjektiv

Injektivität:

injektiv: $\forall \, x,y,x',y' \in \mathbb{N}: g(x,y) = g(x',y') \Rightarrow (x,y) = (x',y')$

$\Leftrightarrow (x,y) \neq (x',y') \Rightarrow g(x,y) \neq g(x',y')$

Fall 1: $x = x'$ $\;y \neq y'$ $\;$ sei OBdA $\;y > y'$

$$g(x,y) - g(x',y') = y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k - y' - \sum_{k=1}^{x'+y'-2} k = \underbrace{y - y'}_{>0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{x+y-2} k - \sum_{k=1}^{x'+y'-2} k}_{\geq 0} \neq 0$$

$\Rightarrow g(x,y) \neq g(x',y')$

Fall 2 $\;x \neq x'$, $y = y'$ $\;$ analog

Fall 3: $x \neq x'$, $y \neq y'$

3.1 $\;x+y = x'+y' \Rightarrow \; y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k \; \cancel{=} \; y' + \sum_{k=1}^{x'+y'-2} k \neq 0$

$\Rightarrow g(x,y) \neq g(x',y')$

(sonst wäre $y = y'$ ↯) zur Annahme

3.2 $\;x+y > x'+y' \Rightarrow \; y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k - y' + \sum_{k=1}^{x'+y'-2} k \neq 0 \; \Rightarrow g(x,y) \neq g(x',y')$

$\Rightarrow g(x,y)$ ist injektiv

Blatt 6

Aufgabe 4 fortsetz.

Zeig $g(x,y)$ ist surjektiv: $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x,y : g(x,y) = n$

Beweis über vollständige Induktion

IA: $n = 1 \Rightarrow g(x,y) = 1 = 1 + 0 = 1 + \sum_{k=1}^{x+y-2} k \Rightarrow x,y = (1,1)$

IV: sei $n = y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k = g(x,y)$

IS: $n \to n+1$ Für $y' = y+1$ und $x' = x-1$

$$g(x',y') = y' + \sum_{k=1}^{x'+y'-2} k = y + 1 + \sum_{k=1}^{(x-1)+(y+1)-2} k$$

$$= y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k + 1 = g(x,y) + 1 = n+1$$

$\Rightarrow g(x,y)$ ist surjektiv

$\Rightarrow g(x,y)$ ist bijektiv

Aufgabe 3 a) $L(M) = (0+1)^* 1 (0+1)^*$

b)