ÜbBlatt 3 LUDS grp

Aufgabe 1

a) Abbildung $T: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $T(1)=1$, $T(n)=T(n-1)+n$ für $n \geq 2$

Es gilt (zu zeigen) $T(n) \leq n^2 \;\forall n \in \mathbb{N}$

IA: Sei $n=1$ $T(1)=1 \leq n^2=1$ ✓ $T(2)=1+1=2 \leq n^2=4$ ✓

IS: Sei n beliebig und es gilt $T(n) \leq n^2$

$n \rightsquigarrow n+1$: $T(n+1) \overset{\text{Def}}{=} T(n)+n+1 \underset{T(n)\leq n^2}{\leq} n^2+n+1 \leq (n+1)^2 = (n^2+2n+1)$

$\Rightarrow T(n+1) \leq (n+1)^2$ $\square$

b) Es gilt $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wir wissen ⊛
$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ und
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

i.A: sei $n=1 \Rightarrow \left(\sum_{1}^{1} i\right)^2 = 1^2 = \sum_{1}^{1} i^3 = 1^3$ ✓

IS: $n \rightsquigarrow n+1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i + (n+1)\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} + n+1\right)^2$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{\cancel{2}(n+1)n(n+1)}{\cancel{2}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n^3+2n^2+n+n^2+2n+1)$$

$$\overset{⊛}{=} \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \sum_{i=1}^{n+1} i^3$$

$\square$

ÜbBlatt 3

Aufgabe 2

a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a| = |b|\}$

R_1 ist reflexiv: $R_1 = \{(a,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a| = |a|\}$

R_1 ist symmetrisch: $\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a| = |b|\} = \{(b,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |b$

R_1 ist NICHT antisymmetrisch: Beispiel: Zwar gilt

$\{(1,-1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |1| = |-1|\} = \{(-1,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |-1| = |1|\}$ ABE

$-1 \neq 1$

R_1 transitiv: $\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a| = |b|\}$ und $\{(b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |b| = |c|\}$

$\Rightarrow \{(a,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a| = |c|\}$

$\Rightarrow$ R_1 ist eine Äquivalenzrelation.

b) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a-b| < 1\}$

R_2 ist reflexiv $\{(a,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a-a| < 1\}$ ✓

R_2 ist symmetrisch $\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a-b| < 1\} = \{(b,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |b-a|$

R_2 ist transitiv $\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a-b| < 1\}$ und $\{(b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |b-c$

dann gilt für die Fälle, daß $\underset{\text{gleichzeitig}}{(a \text{ und } c)} \leq b$ oder $\underset{\text{beide}}{(a,c)} > b$

$\{(a,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a-c| < 1\}$.

c) $R_3^p = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : a-b = z \cdot p\}$ für ein p in $\mathbb{N}$

R_3^p ist reflexiv $\{(a,a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : a-a = z \cdot p\}$ mit $z = 0$

R_3^p ist ~~nicht~~ symmetrisch $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z_{ab} \in \mathbb{Z} : a-b = z_{a,b} \cdot p\}$

und $\{(b,a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z_{ba} \in \mathbb{Z} : b-a = z_{b,a} \cdot p\} \Rightarrow z_{a,b} = -z_{b,a}$

R_3^p antisymmetrisch für $(a-b = zp) \land (b-a = zp)$ für $a = b$ und z

R_3^p ist ~~nicht~~ transitiv $((a-b) = z_1 p)$ und $(b-c) = z_2 p)$

$\Rightarrow (a-c) = z_3 p$ für ein $p \in \mathbb{N}$

R_3^p ist also Äquivalentrelation.

Üb Blatt 3

Aufgabe 3a

i) $f_\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für festes $\lambda \in \mathbb{R}$

- f_λ ist nicht surjektiv und nicht injektiv für $\lambda = 0$
- für $\lambda \neq 0$ gilt

f_λ ist injektiv, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

f_λ ist surjektiv, $\forall (\lambda \cdot x) \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R}: f_\lambda(x) = \lambda x$

$\Rightarrow f_\lambda$ ist bijektiv $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$

ii) $g: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Men

$M \subseteq \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen

g ist nicht injektiv, da unterschiedliche Teilmengen von

~~auf~~ diesselbe Kardinalität haben können und

alle unendlichen Mengen auf ∞ abgebildet werden.

g ist nicht surjektiv

iii) $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

h ist nicht injektiv: Für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}: x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$

das heißt aber nicht, dass $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ sein muß

Beispiel: $h(1,2) = h(2,1)$ ~~aber~~ $(1,2) \neq (2,1)$

h ist surjektiv: sei $p = x \cdot y \quad \forall p \in \mathbb{R}: \exists (x,y) \in \mathbb{R}$ mit

$h(x,y) = p = x \cdot y$.

h ist nicht bijektiv

ÜbBlatt 3

Aufgabe 3b

Bijektive Abbildung $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$

$\forall x \in \mathbb{Z}: |x| \to x$

Habe anstatt $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}_0$ genommen, da nur so die Funktion f injektiv und surjektiv ist.

Aufgabe 4a)

$f: N \to P \quad \forall x \in N: x \longmapsto f(x)$

$g: M \to N \quad \forall x \in M: x \longmapsto g(x)$

$f \circ g: M \to P \quad \forall x \in M: x \longmapsto g(x) \longmapsto f(g(x))$

Aufgabe 4b Abbildung für

$f: M \to N \qquad f^{-1}: N \to M$ Umkehrabbildung

$\forall x \in M \quad x \mapsto f(x) \qquad \forall y \in N: \quad y \to f^{-1}(y)$

Die Umkehrabbildung f^{-1} existiert, wenn

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = y & \forall x \in M \text{ und } \forall y \in N \\ f^{-1}(y) = x & \quad " \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (f^{-1} \circ f)x = f^{-1}(f(x)) = x \\ (f \circ f^{-1})y = f(f^{-1}(y)) = y \end{array}$$

Dazu ist erforderlich, daß f und damit f^{-1} bijektiv sind und die Mengen M und N dieselbe Kardinalität haben.