Logik und diskrete Stukturen

Felix (2807144) & Philipp (2583572) Müller

WS 14/15

Blatt 2

Aufgabe 1

$$\neg\left[B \wedge ((A \vee B) \wedge \neg(A \vee C))\right] \iff \neg(B \wedge (A \veebar C)) \tag{1}$$

Aufgabe 2

Induktionsanfang: $n = 0$

$$x^0 = \frac{x^1 - 1}{x - 1} \tag{2}$$

$$1 = 1 \tag{3}$$

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{(n+1)+1} - 1}{x - 1} \tag{4}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) + x^{n+1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1} \tag{5}$$

$$\underbrace{\to}_{\text{I.A.}} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1} \tag{6}$$

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1} - x^{n+1} \tag{7}$$

$$x^{n+1} - 1 = x^{n+2} - 1 - (x - 1)x^{n+1} \tag{8}$$

$$= x^{n+2} - 1 - (x^{n+2} - x^{n+1}) \tag{9}$$

$$= x^{n+2} - 1 - x \tag{10}$$

$$= x^{n+1} - 1 \qquad \blacksquare \tag{11}$$

Aufgabe 3

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 \cdot x^1 = (1-1) \cdot 2^{1+1} + 2 \qquad (12)$$
$$2 = 2 \qquad (13)$$

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+2} + 2 \qquad (14)$$
$$\underbrace{\rightarrow}_{\text{I.A.}} (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n+1) \cdot 2n + 1 = n \cdot 2^{n+2} + 2 \qquad (15)$$
$$(n-1+n+1) \cdot 2^{n+1} = n \cdot 2^{n+2} \qquad (16)$$
$$2n \cdot 2^{n+1} = 2n \cdot 2^{n+1} \qquad \blacksquare \qquad (17)$$

Aufgabe 4 (a)

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$
2. $\exists n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3 \wedge x, y, z \in \mathbb{Z} : x^n + y^n = z^n$

Aufgabe 4 (b)

1. $\exists x \notin \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q} \not\Longrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \vee n \leq 3 \vee x, y, z \notin \mathbb{Z} : x^n + y^n \neq z^n$