Übungsblatt 3

Samstag, 25. Oktober 2014 18:11

Aufgabe 1:

a)

$$T(1) := 1$$

$$T(n) := T(n-1) + n \quad \text{für } n \geq 2$$

I.A.: $T(n) \leq n^2 \;\; \forall_n \in \mathbb{N}$

$n = 1$: $\quad T(1) = 1 \leq 1 = 1^2$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$

$$T(n+1) \overset{!}{\leq} (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$T(n+1) = T(n) + n + 1$$

$$\overset{IA}{\leq} n^2 + n + 1 \leq n^2 + 2n + 1 \quad \boxtimes$$

b)

IA: $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n = 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{1} i\right)^2 = 1^2 = 1 = 1^3 = \sum_{i=1}^{1} i^3$$

$n \rightsquigarrow n+1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2 \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i + n+1\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (i)\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (i) \cdot (n+1) + n^2 + 2n + 1$$

Anmerkung: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, Beweis siehe Vorlesung

$$\overset{IA}{=} \sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{2n(n+1)\cdot(n+1)}{2} + n^2 + 2n + 1$$

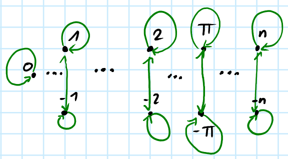
$$= \sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{2n^3 + 4n^2 + 2n}{2} + n^2 + 2n + 1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$\boxtimes$

Aufgabe 2:

a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a| = |b|\} = \{(0,0), (-1,1), (1,-1), (\pi, -\pi), \ldots\}$



reflexiv, weil $|a| = |a|$

symmetrisch, weil $|a| = |-a|$

nicht transitiv, weil $\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es nur zwei mögliche Paarungen: r selbst und $-r$. Für 0 gibt es offensichtlich nur sich selbst als Partner.

nicht antisymmetrisch, weil es offensichtlich „Doppelpfeile" gibt.

b) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a-b| < 1\}$

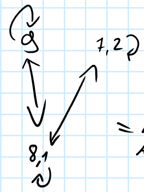
reflexiv, weil $a - a = 0 < 1 \;\; \forall a \in \mathbb{R}$

symmetrisch, weil $|a-b| = |b-a| \;\; \forall a,b \in R_2$ $\quad$ 1,2) reflexiv, weil $a-a=0<1 \ \forall a \in \mathbb{R}$

symmetrisch, weil $|a-b|=|b-a| \ \forall a,b \in R_2$

nicht transitiv, weil $(9, 7.2) \notin R_2$

nicht antisymmetrisch, weil es offensichtlich „Doppelpfeile" gibt.



≈ nur ein Ausschnitt

c)

$R_3^\rho = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : a-b = z \cdot \rho\}$, für ein $\rho \in \mathbb{N}$

reflexiv, weil $a-a=0 \ \forall a \in \mathbb{Z} \land 0 \in \mathbb{Z} \land$ (0 ist absorbierendes Element bezüglich der Multiplikation $\Rightarrow 0 \cdot \rho = 0 \ \forall \rho \in \mathbb{N}$)

symmetrisch, denn wenn es für (a,b) ein z_1 gibt, für das die Bedingung gilt, dann gibt es für (b,a) ein z_2 mit $z_2 = -z_1$

$$a-b = z \cdot \rho \quad | \cdot (-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad b-a = -z \cdot \rho \qquad \square$$

transitiv, weil

$$\left.\begin{aligned} a-b &= z_1 \cdot \rho \\ b-c &= z_2 \cdot \rho \ \Rightarrow b = c + \rho z_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a - c - \rho z_2 = z_1 \cdot \rho$$
$$a-c = z_3 \cdot \rho \qquad \Leftrightarrow a = c + \rho z_2 + \rho z_1$$
$$\Leftrightarrow a = \rho(z_1+z_2)+c$$

$$\Rightarrow \rho(z_1+z_2)+c-c = z_3 \cdot \rho$$
$$\Leftrightarrow \rho(z_1+z_2) = z_3 \cdot \rho$$
$$\Leftrightarrow z_1 + z_2 = z_3 \qquad \square$$

Wenn es für (a,b) ein z_1 gibt, für (b,c) ein z_2, dann gibt es für (a,c) ein z_3 mit $z_3 = z_1 + z_2$.

nicht antisymmetrisch, weil es Doppelpfeile gibt (a,b) und (b,a), siehe Beweis für Symmetrie.

$\Rightarrow R_3^\rho$ ist Äquivalenzrelation

Aufgabe 3:

a) i) $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$

Surjektiv:

$$\forall b \in \mathbb{R} : \exists a \in A : f(a) = b$$

Sei $b \in \mathbb{R}$ beliebig und angenommen f_λ sei nicht surjektiv, dann muss es ein $a \in \mathbb{R}$ geben für das $f(a) = b$ nicht gilt.

$b = \lambda \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{b}{\lambda}$ Widerspruch für $\lambda \in \mathbb{R} / \{0\}$

$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f_λ surjektiv.

injektiv:

$$\forall a, a' \in A : (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$$

Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig

zz.: $f(x_1) = f(x_2) \overset{!}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow x_1 \cdot \lambda = x_2 \cdot \lambda \quad | : \lambda \quad \lambda \neq 0$

$x_1 = x_2$

$\Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f_λ injektiv.

bijektiv:

Weil $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ f_λ surjektiv und injektiv ist, ist f_λ $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv.

ii) $g: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen.

injektiv: $M_1, M_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ beliebig

zz.: $g(M_1) = g(M_2) \overset{!}{\Longrightarrow} (M_1 = M_2 \Leftrightarrow (M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1))$

$\Leftrightarrow |M_1| = |M_2| \Rightarrow M_1 = M_2$

Gegenbeispiel:

$M_1 = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ✓

$M_2 = \{2, 3, 4\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ✓

$|M_1| = |M_2| = 3$ aber $M_1 \neq M_2$, weil $M_1 \not\subseteq M_2$

$\Rightarrow$ g ist nicht injektiv

surjektiv: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und angenommen g sei surjektiv, dann muss es ein $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ geben, für das $g(M) = n$ gilt.

Sei L eine beliebige Menge, dann haben die Elemente von $\mathcal{P}(L)$ die Kardinalitäten von 0 bis $|L|$.

Weil $|\mathbb{N}| = \infty$, hat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Kardinalitäten von 0 bis ∞, also gesamt $\mathbb{N}_0$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \infty$ bel. findet sich eine Menge $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ für die die Bedingung gilt. g ist surjektiv.

bijektiv: g ist nicht bijektiv, weil g nicht injektiv ist.

iii) $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x \cdot y \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

injektiv: Sei $(w,x), (y,z) \in \mathbb{R}^2$ beliebig

zz.:

$h(w,x) = h(y,z) \overset{!}{\Longrightarrow} (w,x) = (y,z)$

$w \cdot x = y \cdot z \Rightarrow (w,x) = (y,z)$

Gegenbeispiel:

$w = 2, \; x = 5$

$y = 1, \; z = 10$

$2 \cdot 5 = 1 \cdot 10 = 10 \Rightarrow (2,5) \neq (1,10)$

$\Rightarrow$ h ist nicht injektiv

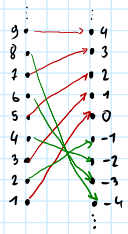
surjektiv: Sei $z \in \mathbb{R}$ beliebig: $z = x \cdot y$, dann müsste es ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ geben, für das gilt $h(x,y) = z$

$x \cdot y = z$

$\Leftrightarrow x = \frac{z}{y}$ und $y = \frac{z}{x} \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0$ ist h surjektiv

bijektiv: h ist nicht bijektiv, weil h nicht injektiv ist.

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -\frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$



Aufgabe 4:

a) $f: N \to P \quad \forall x \in N : x \mapsto f(x)$

$g: M \to N \quad \forall x \in M : x \mapsto g(x)$

zz: $f \circ g : M \to P$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ist Abbildung

Jedes $m \in M$ muss zu genau einem $p \in P$ in Relation stehen (Def. Abbildung).

$\Rightarrow f \circ g : M \to P \quad \forall x \in M : x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$

ist Abbildung $\blacksquare$

b) $f: M \to N$ ist Abbildung

Wann existiert $f^{-1} N \to M$ mit $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in M$ und $(f \circ f^{-1})(y) = y$ für alle $y \in N$?

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = y \quad \forall x \in M \wedge \forall y \in N \\ f^{-1}(y) = x \quad \forall x \in M \wedge \forall y \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \\ (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y \end{array}$$

f und f^{-1} müssen bijektiv sein.