Logik und diskrete Stukturen

Felix (2807144) & Philipp (2583572) Müller

WS 14/15

Blatt 6

Aufgabe 1

a) Da L eine reguläre Sprache ist, gibt es einen DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der L akzeptiert. A würde daher jeden Zustand $\bar{l} \in \bar{L}$ ablehnen. Daher können wir einen Automaten $\bar{A} = (Q', \Sigma', \delta', q_0', Q - F)$ konstruieren, der genau die Zustände akzeptiert, die A ablehnt. $\bar{A}$ akzeptiert also genau dann ein Wort w, wenn es $\bar{\delta}(q_0, w) \in Q - F$ gibt.

b) Mit L^2 bezeichnen wir die Konkatenation von $L = L_1$ mit sich selbst und mit L_i die Konkatenation von $L_i - 1$ und L. Damit enthält L_i genau die Wörter, die sich so in i Teile zerlegen lassen, daß alle Teile zu L gehören. Der positive Kleenesche Abschluß L^+ besteht aus der Vereinigung aller L_i, $i \geq 1$. Wenn wir testen wollen, ob ein Wort zu L^+ gehört, müssen wir ein passendes i und eine passende Zerlegung des Wortes "raten". Eine effiziente Konstruktion deterministischer Automaten scheint also ausgeschlossen zu sein, und wir gehen den Umweg über nichtdeterministische Automaten. Es genügt eine Kopie eines Automaten für L, in der wir in allen akzeptierenden Zuständen eine ϵ-Bewegung zum Anfangszustand erlauben. Immer wenn eine derartige ϵ-Bewegung ausgeführt wird, ist ein Teilwort aus L gelesen. Es werden also genau die Wörter aus L^+ akzeptiert. Der eigentliche Kleenesche Abschluß L^* von L besteht aus der Vereinigung aller $L^i, i \geq 1$, wobei L^0 nur das leere Wort enthält. Da L^* die Vereinigung von L^+ und $\{\epsilon\}$ ist, erhalten wir auch leicht einen nichtdeterministischen Automaten für L^*.

Aufgabe 2

a) $L_1 = \{w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \mid n \geq 1 \wedge (w_1 = 0 \vee w_n = 1)\}$

Es gilt also entweder, dass 1 am Ende oder 0 am Anfang des Wortes steht. Mit $n = 1$ kann das entstehende Wort $w_1 = w_n$ entweder 0 oder 1 sein. Wir können also schreiben

$$L_1 = (0) \cup (0 \cup 1)^* \cup (1)$$

b) $L_2 = \{w_1, \dots w_n \in \Sigma^* \mid n \geq 3 \text{ und } \exists i \in \{1, \dots, n-2\} : w_i = w_{i+1} = w_{i+2} = 0\}$

Das heißt in jedem Wort ist 000 enthalten, wobei es auch hierauf enden darf. Wir können also schreiben:

$$L_2 = (0 \cup 1)^* \, 000 \, (0 \cup 1)^*$$

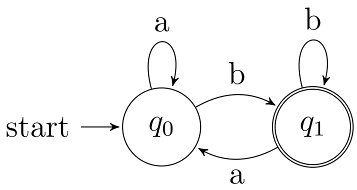
c) $L_3 = \{w_1, \dots w_n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : \; w_i = 1 \implies (i < n \wedge w_{i+1} = 0)\}$

Für jedes Wort gilt also $n \geq 2$, weil für i auch $i+1$ als Index existieren muss. 10 ist daher zulässig, auf jede 1 muss eine 0 folgen, 1 darf nicht das Ende des Wortes bilden. Daher:

$$L_3 = (0)^* \cup (10)^* \, 10$$

Aufgabe 3

a) Akzeptierte Sprache: $L(M) = (0)^* \, 1 \, (0 \cup 1)^*$

b) 

Aufgabe 4

Gegeben $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x, y) = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$. Wir wollen zeigen, dass f bijektiv ist. Dazu zeigen wir, dass f injektiv und surjektiv ist.

i) f ist injektiv.

Dann muss für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ gelten, dass $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ nur für $(x_1, y_1) =$

(x_2, y_2). Sei $x_1 + y_1 > x_2 + y_2$, dann haben wir

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{(x_1+y_1)(x_1+y_1+1)}{2} + y_1 \\
&\geq \frac{(x_2+y_2+1)(x_2+y_2+2)}{2} \\
&= \frac{(x_2+y_2+1)(x_2 y_2)}{2} + x_2 + y_2 + 2 \\
&> \frac{(x_2+y_2+1)(x_2 y_2)}{2} + y_2 \\
&= \frac{(x_2+y_2)(x_2+y_2+1)}{2} + y_2 = f(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

Da aus $(x_1, y_1) > (x_2, y_2)$ folgt, dass $f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2)$ muss auch gelten, dass $f(x_2, y_2) > f(x_1, y_1) \iff (x_2, y_2) > (x_1, y_1)$. Es kann daher nur $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ gelten, wenn $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Für $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ gilt.

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \\
&= \frac{(x_1+y_1)(x_1+y_1+1)}{2} + y_1 - \left[\frac{(x_1+y_1)(x_1+y_1+1)}{2} + y_1\right] \\
&= y_1 - y_2
\end{aligned}$$

für $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$.

ii) f ist surjektiv.
Es muss also gelten, dass $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x, y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \; n = f(x, y)$.
Induktionsanfang $n = 0$: Für $x = y = 0$ ist

$$f(0,0) = \frac{(0+0)(0+0+1)}{2} + 0 = 0$$

Induktionsschluss $n \to n+1$:

Gilt $n = f(x,y)$, dann ist

$$
\begin{aligned}
n+1 &= f(x,y)+1 \\
&= \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y + 1 \\
&= \begin{cases}
\dfrac{(x-1+y+1)(x-1+y+1+1)}{2} + y + 1 & \\
= f(-x, y+1) & x \in \mathbb{N}_{>0} \\
 & \\
\dfrac{y(y+1)}{2} + y + 1 = \dfrac{(y+2)(y+1)}{2} & \\
= \dfrac{(y+1)(y+2)}{2} & \\
= f(y+1, 0) = f(y+1, x) & x = 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

f ist also injektiv und surjektiv und damit bijektiv.