12.1.2015 MONTAG

LUDS

PROBEKLAUSUR

Aufgabe 1

$$[\![n^3]\!] \oplus_3 [\![2n]\!] = 0$$

in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$n=1$

$$[\![1]\!] \oplus_3 [\![2 \cdot 1]\!] = [\![3]\!] = [\![0]\!]$$

$n \mapsto n+1$:

$$[\![(n+1)^3]\!] \oplus_3 [\![2 \cdot (n+1)]\!]$$

Pascals Dreieck

$$= [\![n^3 + 3n^2 + 3n + 1]\!] \oplus_3 [\![2n + 2]\!]$$

$$= [\![n^3 + 2n]\!] \overset{IV}{=} 0$$

b) Mengen M, N

$f: M \to N$

$\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \quad f(x) = y$

$\Longleftrightarrow \neg (\exists y \in N \quad \forall x \in M \quad f(x) \neq y)$

$\Longleftrightarrow \neg (\exists y \in \mathbb{N}) \; \neg (\forall x \in M) \; \neg (f(x) \neq y)$

$\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in M \quad f(x) = y$

c) $A, B \neq \emptyset \qquad |A| = |B|$ endl. und $f: A \to B$ inj.

zzg. f: ist dann auch bij.

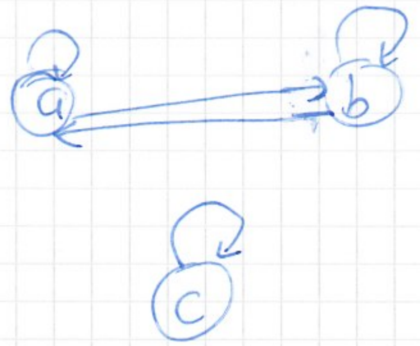
Ang. f ist inj. aber nicht surj.

$\Rightarrow \exists y \in B$ mit $\neg \exists x$ s.d. $f(x) = y$

$\overset{inj.}{\Rightarrow} \quad |B| > |A|$

$\lightning$ weil $|A| = |B|$

d) $R = \{(a,a), (a,b), (b,a), (c,c), (b,b)\}$



Aufgabe 2

a) $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$

Σ = Alphabet

Q = Zustandsmenge

δ = Übergangsfunktion

Definitionsb. D $Q \times \Sigma$

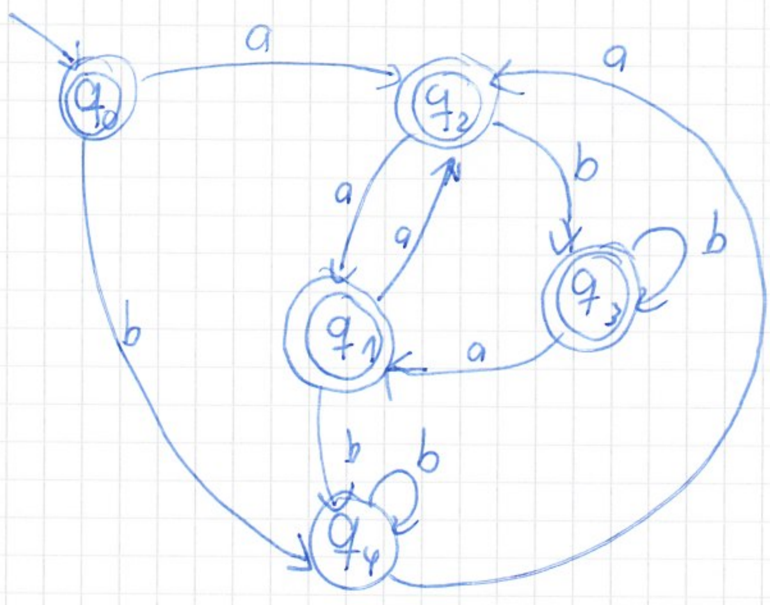
Bildb. Q

q_0 = Startzustand

F = Endzustände

b) $L(M_1) \mathrel{\hat{=}} |w|_a$ ist ungerade

$L(M_2) \mathrel{\hat{=}}$ Wort endet mit a oder Σ



c) L ist Sprache, DFA entscheidet L

Dann gilt n: alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$

Wort kann in drei Teile geteilt werden.

? $z = u v w$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$

und für alle $i \in \mathbb{N}_0$, $u v^i w \in L$

d) $R = ((a b^* a + b^*)^* + a^* b a^*)$

e) $G = (\Sigma, V, S, P)$ $\Sigma = \{a, b, c\}$

$V = \{1, 2, 3\}$ $S = 1$

$P: 1 \rightarrow a1$, $1 \rightarrow a2$

$2 \rightarrow \varepsilon$, $2 \rightarrow b3$

$3 \rightarrow c2$

f) Angenommen, L sei regulär, wird von DFA entscheiden $|Q| = n$

Es gilt $b^n a^{2n} \in L$

$|z| \geq 3n \geq n$ $uv = b^m$, $m \leq n$, $\Rightarrow$ v besteht nur aus b's

$z = uvw$ $|uv| \leq n$ $|v| \geq 1$

Es müsste $u v^2 w \in L$

$= b^{n + |v|} a^{2n}$ $\lightning$ $|v| \geq 1$

Aufgabe 3

a) $\cdot : \min\{a,b\}$ $(A,\cdot)$ komm. monoid.

Kommutation $\underline{K}$: $a \in A$, $b \in A$

$a \circ b = \min\{a,b\} = \min\{b,a\} = b \circ a$

$\underline{A}$: $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot \min\{b,c\}$

$= \min\{a, \min\{b.c\}\}$

$= \min\{a,b,c\} = \min\{a,b\} \cdot c$

$= (a \cdot b) \cdot c$

$\underline{NE}$: $A = 1, \dots, n$ $n \in \mathbb{N}$

$\min\{x, n\}$ $x \in A$ $= x$ $\Rightarrow n$ ist NE

c) $[\![15]\!]$ in $(\mathbb{Z}/22\mathbb{Z})$

$a \cdot [\![15]\!] = [\![1]\!]$ in $\mathbb{Z}/22\mathbb{Z}$

$3 \cdot [\![15]\!] = [\![45]\!] = [\![1]\!]$

$\Rightarrow$ 3 ist Inverse von $[\![15]\!]$

d)

b) $22 = 1 \cdot 15 + 7$
$15 = 2 \cdot 7 + 1$
$7 = 7 \cdot 1 + 0$

d) $1 = 1 \cdot 15 + 7$

$= 15 - 2(22 - 1 \cdot 15)$

$= 15 - 2 \cdot 22 + 2 \cdot 15$

$= -2 \cdot 22 + 3 \cdot 15$

$z = -2 \quad , \quad y = 3$

$x = 2 \cdot 3 \cdot 15 + 6(-2) \cdot 22$

$= 90 - 264 = -174 \equiv 156 \pmod{330}$

?