Logik und diskrete Stukturen

Felix (2807144) & Philipp (2583572) Müller

WS 14/15

Blatt 4

Aufgabe 1

R ist eine Äquivalenzrelation $\iff$ R ist *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv*.

a) $R : \forall a_1, a_2 \in A : (a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2))$ ist Äquivalenzrelation.

   i) reflexiv: $\forall a \in M : aRa$. Es gilt $a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2)$✓

   ii) symmetrisch: $\forall a, b \in M : (aRb \implies bRa)$.

$$aRb \implies a \sim b \iff f(a) = f(b) \implies f(b) = f(a) \iff b \sim a \iff bRa✓$$

   iii) transitiv: $\forall a, b, c \in M : ((aRb \wedge bRc) \implies aRc)$:

$$(aRb \implies a \sim b \iff f(a) = f(b)) \wedge (bRc \implies b \sim c \iff f(b) = f(c))$$

   Wegen $f(a) = f(b)$ und $f(b) = f(c)$ gilt $f(a) = f(c)$ und somit $a \sim c \iff aRc$. ✓
   Somit ist R Äquivalenzrelation.

b) Ist $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf A und ist $C = \{a_\sim \mid a \in A\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$, so gibt es eine Abbildung $p : A \to C$, so dass für alle $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \sim a_2 \iff p(a_1) = p(a_2)$$

Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A ist, ist sie reflexiv, symmetrisch und transitiv. Weil in C alle Äquivalenzklassen von $\sim$ enthalten sind, welche aufgrund der Definition der Äquivalenzrelation o.g. Eigenschaften besitzen musst es für zwei Elemente a, b, welche $a \sim b$ erfüllen auch solche $p(a), p(b) \in C$ geben, so dass $p(a) = p(b)$ gilt.
Die Äquivalenzklassen zu zwei Elementen sind entweder gleich oder disjunkt, ersteres genau dann, wenn die Elemente äquivalent sind. Es gilt:

$$[a_1] = [a_2] \iff a_1 \sim a_2 \iff a_1 \in [a_2] \iff a_2 \in [a_1]$$

Somit sind beide Inklusionen gezeigt.

c) Seien $\sim$ und C wie in Aufgabenteil **b)**. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und gilt $\forall a_1, a_2 \in A :$ $(a_1 \sim a_2 \implies f(a_1) = f(a_2))$ so wird durch $g([a]_\sim) = f(a)$ für alle $a \in A$ eine Abbildung $g : C \to B$ definiert. Wir suchen also eine Abbildung $g : \{[a]_\sim \mid a \in A\} \to f(a) \forall A$.

Aus `http://www.roeglin.org/teaching/WS2012/LuDS/LuDS.pdf` **2.12.**

Definition. Eine Relation $f \subseteq A \times B$ heißt Abbildung oder Funktion, wenn jedes $a \in A$ zu genau einem Element $b \in B$ in Relation steht. Um anzudeuten, dass f eine Abbildung ist, schreiben wir $f : A \to B$ [...]

Es muss also gezeigt werden, dass jedes $c \in C$ mit einem $b \in B$ in Relation steht. Wir betrachten $g : [a] \to f(a)$ mit $f(a)$. f ist funktional fast äquivalent zu p, nur nicht bidirektional. Da wir uns aber nur für $g : C \to B$ interessieren ist dies keine Einschränkung. Damit gilt auch $C \subseteq B$. Weil f ein eindirektionales p ist gilt auch, dass $g([a]_\sim) = f(a)$ für alle $a \in A$ mit $g : C \to B$.

Aufgabe 2

a) Beschreiben Sie für die Äquivalenzrelationen aus Aufgabe 2.a) und 2.c) vom Übungsblatt 3 die Äquivalenzklassen.

   i) 2.a) $|a| = |b|$. Daher beispielsweise $[1] = \{-1, 1\}$ und $[2] = [-2, 2]$ Es gilt allgemein $[a] = \{-a, a\} \ \forall a$.

   ii) 2.c) $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : \ a - b = z \cdot p\}$, für ein $p \in \mathbb{N}$.

   Für $z = 1, \ p = 1$ findet man $[2] = \{1\}$ sowie $[3] = \{2\}$ usw. Allgemein gilt für hiermit $[n] = \{n - 1\}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Ebenso $[n] = n - p$ für z fix und analog für p.

b) Bestimmen Sie folgende Äquivalenzklassen:

   i) $[42] \oplus_{47} [276]$

   Aus `http://www.roeglin.org/teaching/WS2012/LuDS/LuDS.pdf` **2.17.**:

   Definition. $[a] \oplus_n [b] = [a + b]_n$

   Daher suchen wir $[42 + 276]_{47} = [318]_{47}$ Rest ist 36, daher gilt $[318]_{47} = \{x \bmod 47 = 36 \iff x = 47n + 36, \ n \in \mathbb{Z}\}$

   ii) $[7] \odot_{11} [19]$. Es folgt wieder $[7 \cdot 19]_{11} = [133]_{11}$, Rest ist 1, daher gilt $[133]_{11} = \{ \ x = 11n + 1, \ n \in \mathbb{Z} \iff [1] \text{ mit } \equiv_3\}$.

Aufgabe 3

Eine reguläre Grammatik ist ein Tupel (Σ, V, S, P).

a) Die Sprache aller Wörter, die maximal viermal die 1 enthalten.

  i) $\Sigma = \{0, 1\}$
  ii) $V = \{S\}$
  iii) $P = \{S \to \epsilon, S \to 0S, S \to S0, S \to 1^n S, S \to S1^n,\ n \in \mathbb{N}_0, n \leq 4\}$

b) Die Sprache aller Wörter, bei denen keine zwei 0 hintereinanderstehen.

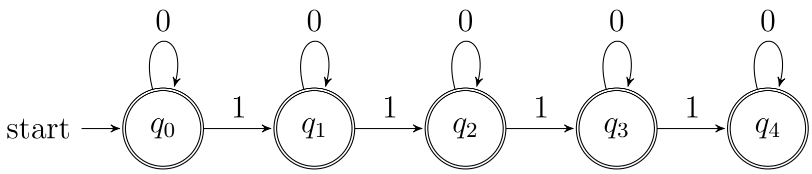
  i) $\Sigma = \{0, 1\}$
  ii) $V = \{S\}$
  iii) $P = \{S \to \epsilon, S \to 01S, S \to S01, S \to 1^n S, S \to S1^n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$

Aufgabe 4

DEA besteht aus einem Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0 \in Q, F \subseteq Q)$

a) 3.a)

  i) $Q = \{q_i,\ i \in \{0, \ldots, 4\}\}$
  ii) $\Sigma = \{0, 1\}$
  iii) $q_0 = q_0$
  iv) $F = Q$
  v) δ:



b) 3.b)

  i) $Q = \{q_0, q_1\}$
  ii) $\Sigma = \{0, 1\}$
  iii) $q_0 = q_0$
  iv) $F = Q$

v) δ: