Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Informatik

Bonn, **18. November 2011**

Musterlösung zum Aufgabenblatt 3 der Vorlesung Logik und Diskrete Strukturen

Erstellt von Marcel Prinz

Aufgabe 1: Rechnen mit komplexen Zahlen

a) Geben Sie eine explizite Formel für das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl (a, b) an (wobei $(a, b) \neq (0, 0)$ vorausgesetzt wird) und rechnen Sie nach,dass ihre Formel korrekt ist.

Lösung:
Eine komplexe Zahl $z' = (x, y)$ ist das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl $z = (a, b)$, wenn gilt:

$$z \cdot z' = (1, 0)$$

Hierbei ist $(1, 0)$ das neutrale Element der komplexen Multiplikation. Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen z und z' ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (a, b) \cdot (x, y) \\ &= (ax - by, ay + bx) \end{aligned}$$

Da die Multiplikation $(1, 0)$ ergeben soll folgt:

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \qquad (1) \\ ay + bx &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Zunächst wird die zweite Gleichung nach einer der beiden Unbekannten, x oder y, umgeformt (a und b sind bekannt). Hier wird nach x umgeformt:

$$\begin{aligned} ay + bx &= 0 \\ bx &= -ay \\ x &= -\frac{ay}{b} \end{aligned}$$

Jetzt wird das x aus der Gleichung (1) durch den Bruch $-\frac{ay}{b}$ ersetzt. Dadurch wird eine

Unbekannte in der Gleichung eleminiert und man kann anschließend nach y auflösen.

$$\begin{aligned}
ax - by &= 1 \\
a\left(-\frac{ay}{b}\right) - by &= 1 \\
-y\left(\frac{a^2}{b} + b\right) &= 1 \\
y\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{b}\right) &= -1 \\
y\frac{a^2+b^2}{b} &= -1 \\
y = -\frac{b}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

Da $x = -\frac{ay}{b}$ gilt folgt:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{ay}{b} \\
x &= -\frac{a\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)}{b} \\
x &= \frac{ab}{b\left(a^2+b^2\right)} \\
x &= \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

So lässt sich das multiplikative Inverse $z' = (x, y)$ einer komplexen Zahl $z = (a, b)$ berechnen als $z' = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$.Es soll noch nachgerechnet werden, dass dieses Ergebnis korrekt ist. Mit anderen Worten: Ist $z \cdot z' = (1, 0)$?

$$\begin{aligned}
z \cdot z' &= (a, b) \cdot (x, y) \\
&= (ax - by, ay + bx) \\
&= \left(a\frac{a}{a^2+b^2} - b\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right), a\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right) + b\frac{a}{a^2+b^2}\right) \\
&= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, -\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) \\
&= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0\right) \\
&= (1, 0)
\end{aligned}$$

$\square$

b) Zu einer komplexen Zahl $z = (a, b)$ nennt man $\overline{z} = (a, -b)$ die *komplex konjugierte* Zahl. Zeigen Sie, dass sowohl die Summe als auch das Produkt einer komplexen Zahl z mit ihrer komplex konjugierten Zahl $\overline{z}$ reell ist (d.h. die zweite Komponente ist gleich null).

Lösung:
Zuerst die Addition:

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= (a,b) + (a,-b) \\ &= (a+a, b-b) \\ &= (2a, 0) \end{aligned}$$

$\square$

Nun die Multiplikation:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a,b) \cdot (a,-b) \\ &= (aa - b(-b), a(-b) + ab) \\ &= (a^2 + b^2, 0) \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2: Körperaxiome

Betrachten Sie die folgende κ-Struktur:

$$\mathcal{B} = ((1,0),(a^{\mathcal{B}}, m^{\mathcal{B}}),(),(0,1)$$

mit den ganzen Zahlen $0 = n^{\mathcal{B}}$ und $1 = e^{\mathcal{B}}$
wobei für die Abbildungen $a^{\mathcal{B}} : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$, $m^{\mathcal{B}} : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{\mathcal{B}}(0,0) &= a^{\mathcal{B}}(1,1) = 0 \\ a^{\mathcal{B}}(1,0) &= a^{\mathcal{B}}(0,1) = 1 \\ m^{\mathcal{B}}(0,0) &= m^{\mathcal{B}}(1,0) = m^{\mathcal{B}}(0,1) = 0 \\ m^{\mathcal{B}}(1,1) &= 1 \end{aligned}$$

a) Weisen Sie nach, dass die Struktur $\mathcal{B}$ alle Körperaxiome erfüllt.

Lösung:
Damit die κ-Struktur ein Körper ist müssen folgende Axiome gelten:

1.) Die Abbildungen $a^{\mathcal{B}}$ und $m^{\mathcal{B}}$ müssen kommutativ und assoziativ sein.

2.) Es müssen inverse und neutrale Elemente bezüglich den Abbildungen existieren.

3.) Das Distributivgesetz muss gelten.

Zu 1.): Wenn die Abbildungen $a^{\mathcal{B}}$ und $m^{\mathcal{B}}$ assoziativ sind, gilt:

$$\forall x,y,z \in \{0,1\} : a^{\mathcal{B}}(a^{\mathcal{B}}(x,y),z) = a^{\mathcal{B}}(x, a^{\mathcal{B}}(y,z))$$

$$\forall x,y,z \in \{0,1\} : m^{\mathcal{B}}(m^{\mathcal{B}}(x,y),z) = m^{\mathcal{B}}(x, m^{\mathcal{B}}(y,z))$$

Da die Abbildungen alle expliziet gegeben sind, müssen auch alle Möglichkeiten expliziet durchgerechnet werden. Es gibt für x, y und z genau $2^3 = 8$ Möglichkeiten sie mit 1 oder 0 zu belegen. Man kann das Ergebnis einer Abbildung $a^{\mathcal{B}}(x, y)$(bzw. $m^{\mathcal{B}}(x, y)$) einfach nachgucken und in den folgenden Gleichungen ersetzten.

Überprüfung der Assoziativität der Abbildung $a^{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned}
a^{\mathcal{B}}(a^{\mathcal{B}}(0,0),0) &= a^{\mathcal{B}}(0,a^{\mathcal{B}}(0,0)) \\
a^{\mathcal{B}}(0,0) &= a^{\mathcal{B}}(0,0) \checkmark \\
a^{\mathcal{B}}(a^{\mathcal{B}}(0,0),1) &= a^{\mathcal{B}}(0,a^{\mathcal{B}}(0,1)) \\
a^{\mathcal{B}}(0,1) &= a^{\mathcal{B}}(0,1) \checkmark \\
a^{\mathcal{B}}(a^{\mathcal{B}}(0,1),0) &= a^{\mathcal{B}}(0,a^{\mathcal{B}}(1,0)) \\
a^{\mathcal{B}}(1,0) &= a^{\mathcal{B}}(0,1) \\
1 &= 1 \checkmark \\
a^{\mathcal{B}}(a^{\mathcal{B}}(0,1),1) &= a^{\mathcal{B}}(0,a^{\mathcal{B}}(1,1)) \\
a^{\mathcal{B}}(1,1) &= a^{\mathcal{B}}(0,0) \\
0 &= 0 \checkmark \\
a^{\mathcal{B}}(a^{\mathcal{B}}(1,0),0) &= a^{\mathcal{B}}(1,a^{\mathcal{B}}(0,0)) \\
a^{\mathcal{B}}(1,0) &= a^{\mathcal{B}}(1,0) \checkmark \\
a^{\mathcal{B}}(a^{\mathcal{B}}(1,0),1) &= a^{\mathcal{B}}(1,a^{\mathcal{B}}(0,1)) \\
a^{\mathcal{B}}(1,1) &= a^{\mathcal{B}}(1,1) \checkmark \\
a^{\mathcal{B}}(a^{\mathcal{B}}(1,1),0) &= a^{\mathcal{B}}(1,a^{\mathcal{B}}(1,0)) \\
a^{\mathcal{B}}(0,0) &= a^{\mathcal{B}}(1,1) \\
0 &= 0 \checkmark \\
a^{\mathcal{B}}(a^{\mathcal{B}}(1,1),1) &= a^{\mathcal{B}}(1,a^{\mathcal{B}}(1,1)) \\
a^{\mathcal{B}}(0,1) &= a^{\mathcal{B}}(1,0) \\
0 &= 0 \checkmark
\end{aligned}$$

Überprüfung der Assoziativität der Abbildung $m^{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned}
m^{\mathcal{B}}(m^{\mathcal{B}}(0,0),0) &= m^{\mathcal{B}}(0,m^{\mathcal{B}}(0,0)) \\
m^{\mathcal{B}}(0,0) &= m^{\mathcal{B}}(0,0) \checkmark \\
m^{\mathcal{B}}(m^{\mathcal{B}}(0,0),1) &= m^{\mathcal{B}}(0,m^{\mathcal{B}}(0,1)) \\
m^{\mathcal{B}}(0,1) &= m^{\mathcal{B}}(0,0) \\
0 &= 0 \checkmark \\
m^{\mathcal{B}}(m^{\mathcal{B}}(0,1),0) &= m^{\mathcal{B}}(0,m^{\mathcal{B}}(1,0)) \\
m^{\mathcal{B}}(0,0) &= m^{\mathcal{B}}(0,0) \checkmark \\
m^{\mathcal{B}}(m^{\mathcal{B}}(0,1),1) &= m^{\mathcal{B}}(0,m^{\mathcal{B}}(1,1)) \\
m^{\mathcal{B}}(0,1) &= m^{\mathcal{B}}(0,1) \checkmark \\
m^{\mathcal{B}}(m^{\mathcal{B}}(1,0),0) &= m^{\mathcal{B}}(1,m^{\mathcal{B}}(0,0)) \\
a^{\mathcal{B}}(0,0) &= a^{\mathcal{B}}(1,0) \\
0 &= 0 \checkmark \\
m^{\mathcal{B}}(m^{\mathcal{B}}(1,0),1) &= m^{\mathcal{B}}(1,m^{\mathcal{B}}(0,1)) \\
m^{\mathcal{B}}(0,1) &= m^{\mathcal{B}}(1,0) \\
0 &= 0 \checkmark \\
m^{\mathcal{B}}(m^{\mathcal{B}}(1,1),0) &= m^{\mathcal{B}}(1,m^{\mathcal{B}}(1,0)) \\
m^{\mathcal{B}}(1,0) &= m^{\mathcal{B}}(1,0) \checkmark \\
m^{\mathcal{B}}(m^{\mathcal{B}}(1,1),1) &= m^{\mathcal{B}}(1,m^{\mathcal{B}}(1,1)) \\
m^{\mathcal{B}}(1,1) &= m^{\mathcal{B}}(1,1) \checkmark
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass man auf $\{0,1\}$ keine Relation $<_{\mathcal{B}}$ definieren kann, so dass $\mathcal{B}$ mit $<_{\mathcal{B}}$ die Axiome eines geordneten Körpers erfüllt.