Logik und diskrete Stukturen

Felix (2807144) & Philipp (2583572) Müller

WS 14/15

Blatt 3

Aufgabe 1

a) Ohne vollständige Induktion:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
T(n-1) &= T(n-2) + n - 1 \\
T(n-2) &= T(n-3) + 2n - 2
\end{aligned}
$$

Substituiere:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-3) + n - 2 + n - 1 + n \\
T(n) &= T(n-k) + kn - \frac{k(k-1)}{2}
\end{aligned}
$$

Mit $n - k = 1 \implies k = n - 1$ folgt:

$$
\begin{aligned}
T(n) = T(1) + n(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\
n^2 - n - \left[\frac{n^2 - n - 2}{2}\right] \iff n^2 - 3n - 2 \leq n^2
\end{aligned}
$$

Mittel vollständiger Induktion:
Induktionsannahme:

$$T(1) = 1 \implies 1 \leq 1^2$$
$$T(2) = 1 + 2 \implies 3 \leq 2^2$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
T(n+1) &= T(n) + n + 1 \\
T(n+1) &= T(n-1) + 2n + 1 \\
&\leq (n+1)^2 \\
&\leq n^2 + 2n + 1 \\
T(n) &= T(n-1) + n \\
&\leq n^2 - n \\
&\leq n^2
\end{aligned}$$

b) Zu zeigen:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Induktionsanfang mit $n = 1$: $1^3 = 1^2$ ✓

Induktionschritt $(n \to n + 1)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3 \\
&= (1+2+3+\cdots+n)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2 + (n+1)^3 \\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} + \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 \\
&= (1+2+3+\cdots+(n+1))^2 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n+1} i\right]^2 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a| = |b|\}$

(a) reflexiv: $\forall a \in M : aRa \implies |a| = |a| \checkmark$

(b) symmetrisch: $\forall a, b \in M : (aRb \implies bRa) \implies |a| = |b| \iff |b| = |a| \checkmark$

(c) antisymmetrisch: $\forall a, b \in M : ((aRb \wedge bRa) \implies a = b)$.
$(|a| = |b|) \wedge (|b| = |a|) \not\Longrightarrow a = b \quad (-2 \neq 2)$

(d) transitiv: $\forall a, b, c \in M : ((aRb \wedge bRc) \implies aRc)$:
$(|a| = |b|) \wedge (|b| = |c|) \implies |a| = |c| \checkmark$

(e) Äquivalenzrelation: R ist *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* ✓

b) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a-b| \leq 1\}$

(a) reflexiv: $\forall a \in M : aRa \implies |a - a = 0 \leq 1|\checkmark$

(b) symmetrisch: $\forall a,b \in M : (aRb \implies bRa) : (|a-b| \leq 1 \not\Longleftrightarrow |b-a| \leq 1)$

(c) antisymmetrisch: $\forall a,b \in M : ((aRb \wedge bRa) \implies a = b)$.
$(|a-b| \leq 1 \wedge |b-a| \leq 1) \not\Longleftrightarrow a = b$ i.e. $a = 0.2,\ b = 0.1$

(d) transitiv: $\forall a,b,c \in M : ((aRb \wedge bRc) \implies aRc)$:
$(|a-b| \leq 1 \wedge |b-c| \leq 1) \not\Longleftrightarrow |a-c| \leq 1$ i.e. $a = -0.4,\ b = 0.5,\ c = 1$.

(e) Äquivalenzrelation: R ist *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv*:
Keine Äquivalenzrelation.

c) $R_3^p = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : a - b = zp\}$ für ein $p \in \mathbb{N}$

(a) reflexiv: $\forall a \in M : aRa \implies a - a = 0 = zp$ falls $0 \in \mathbb{N}$ (also $\mathbb{N}_0$)

(b) symmetrisch: $\forall a,b \in M : (aRb \implies bRa) : a - b = zp \implies b - a = zp$ falls p variabel sein darf. R_3^p ist symmetrisch mit $a - b = zp_0$ und $b - a = zp_1$ wobei $p_0 \neq p_1$ sein kann. Es gilt $p_0 = -p_1$. Falls p fix gewählt wird, ist R_3^p nicht symmetrisch.

(c) antisymmetrisch: $\forall a,b \in M : ((aRb \wedge bRa) \implies a = b)$.
$[(a-b) = zp_0 \wedge (b-a) = zp_1] \implies (a = b)$ wenn p_0 p_1 wie oben definiert sind. Für fixes p ist R_3^p nicht antisymmetrisch.

(d) transitiv: $\forall a,b,c \in M : ((aRb \wedge bRc) \implies aRc)$:
Auch die Transitivität gilt nur, wenn variable p zugelassen werden. Beispielsweise bei der Wahl von $a = -1,\ b = 2,\ c = 4$ kann die Transitivität nur gegeben sein, wenn wir für p positiv und negativ zulassen. Falls p fix ist, ist R_3^p nicht transitiv.

(e) Äquivalenzrelation: R ist *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv*:
I.A. keine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 3

1. Geben Sie für die folgenden Abbildungen an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

(a) $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für festes $\lambda \in \mathbb{R}$:
Bijektiv.

(b) $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Mengen $M \subset \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen M:
Surjektiv.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = xy$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
Surjektiv.

2. Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ an.

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{N} : \; z \to \begin{cases} 2z + 1 & z \geq 0 \\ -2z & z < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4

a) Aus `http://www.roeglin.org/teaching/WS2012/LuDS/LuDS.pdf` **Definition 2.12**: Eine Relation $f \subseteq A \times B$ heißt Abbildung oder Funktion, wenn jedes $a \in A$ zu genau einem Element $b \in B$ in Relation steht.

Daher sind die Bildmengen von g und f respektive:

$$g(M) = \{n \in N \mid \exists m \in M : g(m) = n\}$$

$$f(N) = \{p \in P \mid \exists n \in N : f(n) = p\}$$

Bei der Verknüpfung $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ wird zuerst $M \to N$ und dann $N \to P$ abgebildet.

Da f und g Abbildungen sind, existieren $n \in N$ und $p \in P$ auf welche $g \circ f$ durch $f(g(x))$ und $x \in M$ abbildet. Damit ist $(f \circ g)(x)$ auch eine Abbildung.

b) Die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \to M$ existiert, wenn f bijektiv ist. Dann ist f nämlich injektiv und surjektiv, weswegen sowhl $y \in N$ als auch $x \in M$ existieren mit $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ und $(f \circ f^{-1})(y)$.