Luds Klausur WS 13/14 1.Termin:

Mengen, Relationen..

1. Beweisen Sie eine der De Morgan'sche Regeln für Mengenoperationen.

2. Sei $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$. Was ist die Hintereinanderausfu¨hrung $R \circ R$ von R mit sich selbst? Was ist das Inverse R^{-1} von R? Sind R, $R \circ R$ und R^{-1} Funktionen?

3. Zeigen Sie das die Relation „gleichmächtig" eine Äquivalenzrelation ist.

Beweißtechniken:

Induktion Aufgabe 25

Aufgabe 29

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass n das Produkt von Primzahlen ist.

Sei S eine beliebige Teilmenge von N mit $|S| = 1000$. Zeigen Sie, dass es mindestens ein Paar von Ele- menten $x /= y$ gibt, so dass $x - y$ durch 573 teilbar ist. Verwenden Sie zum Beweis das Schubfachprinzip.

Modulare Arithmetik

Zeigen Sie: Seien $d \in N_0$, $x \equiv y \bmod n$ und $a \equiv b \bmod n$. Dann gilt $x-a \equiv y-b \bmod n$.

Seien $a,n \in N$ und $ggT(a,n) = 1$. Zeigen Sie, dass dann $ax \equiv b \bmod n$ in Z lösbar und die Lösung modulo n eindeutig ist.

Bestimmen Sie mittels Euklidischen Algorithmus den ggT(348,124) und geben Sie dabei alle Schritte explizit an.

Bestimmen Sie die kleinste von 1 verschiedene natürliche Zahl x_0, die die folgenden Kongruenzen gleich- zeitig erfu¨llt:

$x_0 \equiv 2 mod 3$
$x_0 \equiv 3 mod 5$
$x_0 \equiv 5 mod 2$

Algebraische Strukturen

Seien $H \subseteq Z$ und $(H, +, 0)$ eine nichttriviale Untergruppe von $(Z, +, 0)$. Zeigen Sie, dass dann $H = mZ$ fu¨r ein $m \in N$ gilt.

Beweisen Sie, dass zwei zyklische Gruppen genau dann isomorph sind, wenn sie dieselbe Ordnung haben.

Logik:

Zeigen Sie, dass jeder aussagenlogischer Ausdruck ϕ äquivalent zu einem Ausdruck in KNF und zu einem Ausdruck in DNF ist.

Betrachten Sie folgende Klauselmengen. Geben Sie mo¨glichst kurze Deduktionen von $\square$ aus K_i fu¨r $1 \leq i \leq 3$ an. Geben Sie bei Resolventen die Klauseln an, aus denen sie gebildet wurden. $\{\{\neg x,\neg y,\neg z\},\{\neg w,x\},\{w\},\{y\},\{\neg v,z\},\{v\}\}$.

1. Geben Sie den Resolutionssatz an.
   2. Geben Sie den Resolutionsalgorithmus an.

Bringen Sie folgende prädikatenlogische Ausdru¨cke in Pra¨nexnormalform und geben Sie dabei alle Zwi- schenschritte an:

1. $(\exists x(P(x,y)))\rightarrow(\exists x(Q(x,x)))$

Zeigen Sie, dass falls $\Delta \cup \{\neg\phi\}$ inkosistent ist, dann gilt auch $\Delta \vdash \phi$.

Automaten:

Aufgabe 1.

Nennen Sie den Satz von Myhill und Nerode.

Aufgabe 2