Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Informatik

Bonn, **24. November 2011**

Musterlösung zum Aufgabenblatt 4 der Vorlesung Logik und Diskrete Strukturen

Erstellt von Marcel Prinz

Aufgabe 1: Monoide

Sei M eine beliebige Menge. Betrachten Sie die Struktur $P = (\mathcal{P}(M), \cup, \emptyset)$ (wobei $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M bezeichnet). Zeigen Sie:

a) P ist ein kommutatives Monoid

Lösung:
Definition Monoid: *Ein Monoid ist eine Struktur bestehend aus einer Menge mit einer klammerfrei notierbaren (assoziativen) Verknüpfung und einem neutralen Element. Ein kommutatives Monoid besitzt eine Verküpfung die sowohl assoziativ als auch kommutativ ist.*
Als Menge ist die Potenzmenge einer Menge M gegeben. Es muss gezeigt werden, dass die Verknüpfung "$\cup$"(Vereinigung) assoziativ und kommutativ ist, und dass sich die leere Menge $\emptyset$ bezüglich der Verknüpfung neutral verhält.

- Überprüfung der Assoziativität: Es muss gelten: $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(M) : (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

  Seien $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \cup \{x \mid x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A\} \cup \{x \mid x \in B \vee x \in C\} = A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

- Überprüfung der Kommutativität: Es muss gelten: $\forall A, B \in \mathcal{P}(M) : A \cup B = B \cup A$

  Seien $A, B \in \mathcal{P}(M)$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \\ &= \{x \mid x \in B \vee x \in A\} \\ &= B \cup A \end{aligned}$$

- Überprüfung des neutralen Elements $\emptyset$. Es muss gelten: $\forall A \in \mathcal{P}(M) : A \cup \emptyset = A$

  $A \cup \emptyset = A$ gilt auf Grund der Definition der leeren Menge aus der Vorlesung! Oder als kurzer Beweis: Sei $A \in \mathcal{P}(M)$

  $$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= \{x \mid x \in A \vee x \in \emptyset\} \\ & \text{x kann nur aus A sein , da in leeren Menge keine Elemente enthalten sind} \\ &= A \end{aligned}$$

  P erfüllt alle Bedingungen und ist somit ein kommutatives Monoid.

  $\square$

b) P ist keine Gruppe.

Lösung:
Definition Gruppe: *Eine Gruppe ist eine Struktur bestehend aus einer Menge mit einer klammerfrei notierbaren (assoziativen) Verknüpfung und einem neutralen Element. Des Weiteren existieren zu allen Elementen aus der Menge inverse Elemente bezüglich der Verknüpfung.*

Da P ein Monoid ist, muss nachgewiesen werden, dass es nicht zu allen Elementen aus $\mathcal{P}(M)$ ein inverses Elemente in $\mathcal{P}(M)$ existiert. Sei M eine nicht leere Menge, so existiert in $\mathcal{P}(M)$ eine nicht leere Teilmenge A von in M.
Sei $B \in \mathcal{P}(M)$ und B ist das inverse Element zu A, dann muss gelten: $A \cup B = \emptyset$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \\ & \text{Die Vereinigung enthält ach Vorausetzung mind. ein Element} \\ &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass P keine Gruppe sein kann wenn M nicht leer ist.

Wenn M aber nun eine leere Menge ist, so Enthält die Potenzmenge nur die leere Menge: $\mathcal{P}(\{\}) = \{\emptyset\}$ Man erhält die Struktur $P = (\{\emptyset\}, \cup, \emptyset)$ Da die leere Menge das einzige Element der Trägermenge ist und $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ gilt gibt es zu allen Elementen ein Inverses bezüglich der Vereinigung.
Daraus folgt: Wenn M eine leere Menge ist, ist P eine einelementige abelsche Gruppe (abelsch bedeutet die Verknüpfung ist kommutativ).

Aufgabe 2: Gruppen

Seien $(A, *, n_A)$ und $(B, \star, n_B)$ Gruppen. Zeigen Sie: Definiert man die Verknüpfung $\circ : (A \times B) \times (A \times B) \longrightarrow A \times B$ durch $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 * a_2; b_1 \star b_2)$ für alle $a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B$, so bildet $(A \times B; \circ; (n_A; n_B))$ eine Gruppe.

Lösung:
Als Menge ist das Kreuzprodukt der beiden Trägermengen A und B gegeben. Es muss gezeigt werden, dass die Verknüpfung '$\circ$' assoziativ ist, und dass sich das Paar $(n_A; n_B)$ bezüglich der Verknüpfung neutral verhält. Des Weiteren müssen zu allen Elementen aus der Menge $A \times B$ inverse Elemente bezüglich der Verknüpfung '$\circ$' in $A \times B$ existieren.

- Überprüfung der Assoziativität: Es muss gelten: $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in A \times B$: $((a_1, b_1) \circ (a_2, b_2)) \circ (a_3, b_3) = (a_1, b_1) \circ ((a_2, b_2) \circ (a_3, b_3))$

  Seien $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in A \times B$

$$
\begin{aligned}
((a_1, b_1) \circ (a_2, b_2)) \circ (a_3, b_3) &= (a_1 * a_2; b_1 \star b_2) \circ (a_3, b_3) \\
&= ((a_1 * a_2) * a_3; (b_1 \star b_2) \star b_3) \\
&\quad \text{Da die Verknüpfungen } * \text{ und } \star \text{ aus Gruppen sind,} \\
&\quad \text{sind sie assoziativ und es folgt:} \\
((a_1 * a_2) * a_3; (b_1 \star b_2) \star b_3) &= (a_1 * (a_2 * a_3); b_1 \star (b_2 \star b_3)) \\
&= (a_1, b_1) \circ (a_2 * a_3, b_2 \star b_3)) \\
&= (a_1, b_1) \circ ((a_2, b_2) \circ (a_3, b_3))
\end{aligned}
$$

- Überprüfung des neutralen Elements (n_A, n_B). Es muss gelten: $\forall\ (a, b) \in A \times B$: $(a, b) \circ (n_A, n_B) = (a, b) \circ (n_A, n_B) = (a, b)$

  Sei $(a, b) \in A \times B$:

$$
\begin{aligned}
(a, b) \circ (n_A, n_B) &= (a * n_A, b \star n_B) \\
&\quad \text{Da die Verknüpfungen } * \text{ und } A \text{ eine Gruppe mit dem neutralem Element } n_A \\
&\quad \text{bilden und das Gleiche für } \star, B \text{ und } n_B \text{ gilt, folgt:} \\
(a * n_A, (b \star n_B) &= (a, b)
\end{aligned}
$$

  Analog gilt:

$$
\begin{aligned}
(n_A, n_B) \circ (a, b) &= (n_A * a, n_B \star b) \\
&= (a, b)
\end{aligned}
$$

  (n_A, n_B) verhält sich bezüglich der Verknüpfung '$\circ$' neutral und ist ´damit das neutrale Element der Struktur.

- Überprüfung der Existenz von inversen Elementen. Es muss gelten:
  $\forall\ (a, b) \in A \times B\ \exists (a^{-1}, b^{-1}) \in A \times B\ : (a, b) \circ (a^{-1}, b^{-1}) = (n_A, n_B)$ Erst machen wir uns klar wenn das Tupel (a^{-1}, b^{-1}) existiert, dann gilt auch $(a, b) \circ (a^{-1}, b^{-1}) = (n_A, n_B)$

$$
\begin{aligned}
(a, b) \circ (a^{-1}, b^{-1}) &= (a * a^{-1}, b \star b^{-1}) \\
&\quad \text{Da } (A, *, n_A) \text{ eine Gruppe ist, existiert ein } a^{-1} \text{ in A,} \\
&\quad \text{das invers zu } a \text{ ist. Gleiches gilt für } b \text{ und } b^{-1}\text{. Es folgt daraus:} \\
(a * a^{-1}, b \star b^{-1}) &= (n_A, n_B)
\end{aligned}
$$

Das heißt, wenn das Element (a^{-1}, b^{-1}) existiert, ist es invers zu (a, b). Nun muss man sich noch kurz klar machen, dass zu jedem Tupel (a, b) ein inverses Element (a^{-1}, b^{-1}) in $A \times B$ existiert.
Man weiß, dass $\forall a \in A\ \exists a^{-1} \in A : a * a^{-1} = n_A$ und $\forall b \in B\ \exists b^{-1} \in B : b \star b^{-1} = n_B$ gilt, da $(A, *, n_A)$ und $(B, \star, n_B)$ Gruppen sind.
Das Kreuzprodukt von A und B ist wie folgt definiert:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Aus der Definition folgt schon, dass wenn $a^{-1} \in A$ und $b^{-1} \in B$ gilt: $(a^{-1}, b^{-1}) \in\ A \times B$.
Da für alle a aus A und alle b aus B inverse existieren folgt:
$\forall\ (a, b) \in A \times B\ \exists (a^{-1}, b^{-1}) \in A \times B\ : (a, b) \circ (a^{-1}, b^{-1}) = (n_A, n_B)$

□

Aufgabe 3: Bewegungen

Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
$|f(x) - f(y)| = |x - y|$ und $|g(x) - g(y)| = |x - y|$.
Zeigen Sie:

a) Ist $f(0) = g(0)$ und $f(1) = g(1)$, so ist schon $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:
Aus den Vorausetzugen $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ und $|g(x) - g(y)| = |x - y|$ folgt:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = 1 = \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}$$

Da dies für alle Paare von x und y gilt, können die Graphen der Abbildungen f und g nur zwei Geraden darstellen, deren Steigung 1 oder -1 ist. Nun können zwei Geraden in der euklidischen Ebene(Euklidische Ebene $:= \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$) wie folgt zueinander liegen:

1. Zwei Geraden sind nicht parallel und schneiden sich in genau einem Punkt
2. Zwei Geraden sind parallel und haben keinen gemeinsamen Punkt
3. Zwei Geraden sind identisch: $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

Die Geraden haben laut Vorausetzung mindestens zwei gemeinsamme Punkte. Daraus folgt, dass nur der dritte Fall vorliegen kann.$f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

□

b) Ist $f(0) = 0$, so ist schon $|f(x)| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:
Es gilt aus der Vorausetzung: $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. Nun setzt man $y = 0$ und erhält $|f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|$. Des Weiterne gilt $f(0) = 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= |x| \\ |f(x) - 0| &= |x| \\ |f(x)| &= |x| \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4: Symmetrien

Geben Sie alle Symmetrien des Quadrats $Q = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq a \leq 1, -1 \leq b \leq 1\}$ und des Liniensegments $L = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq b \leq 1\}$an.

Lösung:
Definition Symmetrie: *Eine Symmetrie ist eine Abbildung $f : Q \longrightarrow Q$ für die gilt:*

$$\forall (x,y) \in Q \ \exists (x',y') \in Q : f((x,y)) = (x',y') \ \textit{Selbsterhaltung}$$

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) : |f((x_1,y_1)) - f((x_2,y_2))| = |(x_1,y_1) - (x_2,y_2)| \ \textit{Abstandserhaltung}$$

Die Betragsstriche gebem den Abstand zweier Punkte an

Im ersten Fall beschreibt die Menge Q das Quadrat in der euklidischen Ebene mit den Eckpunkten $E_1 = (-1,-1)$, $E_2 = (1,-1)$, $E_3 = (1,1)$ und $E_4 = (-1,1)$. Die maximale Entfehrung haben zwei gegenüberliegende Eckpunkte zueinander (z.B: E_1 und E_3). Aus der Abstandserhaltung folgt, dass Eckpunkte nur auf Eckpunkte abgebildet werden können, wenn die Abbildung eine Symmetrie darstellt. Des Weiteren folgt, dass gegenüberliegende Eckpunkte wieder auf gegenüberliegende Eckpunkte Abgebildet werden. Wenn E_1 auf eine der vier Eckpunkte abgebildet wird, steht schon fest auf welchen Eckpunkt E_3 abgebildet wird. Gleiches gilt für die Eckpunkte E_2 und E_4. Wählt man für E_1 eine der vier möglichen Zuordnungen, bleiben für E_2 noch zwei Möglichkeiten einer symmetrischen Zuordnung (Die Zuordnungen für E_3 und E_4 sind damit auch erledigt). Es gibt also $4 \cdot 2$-viele Symmetrien.
Man sollte noch erwähnen, dass die Abbildungen so gewählt werden können da es sich hier um ein Quadrat handelt. Bei einem Rechteck mit unterschiedlich langen Seitenpaaren wären schon nach der Wahl der Abbildung eines Eckpunktes für alle anderen Eckpunkte klar wohin sie Abgebildet werden (Weil ein Eckpunkt zu den anderen drei Eckpunkten drei unterschiedliche Abstände hat).

Mögliche Symmetrien

- Die Identität (Alle Punkte werden auf sich selbst abgebildet $f(x,y) = (x,y)$)
- Rotatinon um 90°, um 180° ,um 270°
- Spiegelung an der X-Achse Spiegelung an der Y-Achse
- Spiegelung an der Geraden $y = x$ Spiegelung an der Geraden $y = -x$ (Die Diagonalen)

Falls jemand die Punktspiegelung vermisst: Das entspricht der Rotation um 180° ;-)

Im zweiten Fall beschreibt die Menge L ein Liniensegment vom Punkt $P_1 = (-1,0)$ zum Punkt $P_2 = (1,0)$. Auf Grund der Abstandserhaltung müssen die beiden Endpunkte wieder auf Endpunkte abgebildet werden. Daraus folgt, dass es genau zwei Symmetrien gibt:

1. Die Identität
2. Rotation um 180°