Logik und diskrete Stukturen

Felix (2807144) & Philipp (2583572) Müller

WS 14/15

Blatt 10

Aufgabe 1

Betrachte $Q = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass Q zusammen mit der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$ einen Körper bildet.

- **Assoziativität**:

$$
\begin{aligned}
&((a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}) + (a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2})) + (a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}) \\
&\equiv (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}) + (a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}) + (a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}) \\
&\equiv a_1 + a_2 + a_3 + b_1 \cdot \sqrt{2} + b_2 \cdot \sqrt{2} + b_3 \cdot \sqrt{2} \\
&\equiv (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}) + ((a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}) + (a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}))
\end{aligned}
$$

- **Neutrales Element**:

  Wir suchen $a + e = e + a = a$ für $a, e \in Q$.

$$a_1 + b_1\sqrt{2} + (a_e + b_e\sqrt{2}) = a_1 + b_1\sqrt{2}$$

  Da 0 das neutrale Element der Addition ist können wir $a_e = b_e = 0$ wählen.

- **Inverses Element**:

  Es soll gelten, dass

$$x_1 + x_1^{-1} = e = 0,\ x_1, x_1^{-1} \in \mathbb{Q}$$

  Daher

$$\equiv (a_1 + b_2\sqrt{2}) + a_1^\star + b_1^\star\sqrt{2} = 0$$
$$\iff (a_1 + b_1\sqrt{2}) - (a_1 + b_1\sqrt{2}) = 0$$
$$\implies (a_1, b_1)^{-1} = -(a_1, b_1) = (-a_1, -b_1) = x_1^{-1}$$

- **Kommutativität**

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1,\ x_1, x_2 \in Q$$
$$\equiv (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})$$

Mit den Rechenregeln der Addition über $\mathbb{Q}$ haben wir

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2})$$

Damit haben wir eine abelsche Gruppe.

- **Assoziativität** der multiplikativen Verknüpfung $(Q, \cdot)$. Zu zeigen: $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$.

$$((a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2})(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2})) \cdot (a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2})$$

Mit Rechenregeln aus $\mathbb{Q}$ folgt

$$\equiv (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2})((a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}))$$

Damit haben wir $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$.

- **Distributivität**

  Zu zeigen: $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3,\ x_1, x_2, x_3 \in Q$

$$(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}) \cdot ((a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}) + (a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}))$$

Mit den normalen Rechenregeln haben wir wieder

$$\equiv (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}) + (a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}) \cdot (a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2})$$

Aufgabe 2

$\odot_7$	$[\![1]\!]$	$[\![2]\!]$	$[\![3]\!]$	$[\![4]\!]$	$[\![5]\!]$	$[\![6]\!]$
$[\![1]\!]$	1	2	3	4	5	6
$[\![2]\!]$	2	4	6	1	3	5
$[\![3]\!]$	3	6	2	5	1	4
$[\![4]\!]$	4	1	5	2	6	3
$[\![5]\!]$	5	3	1	6	4	2
$[\![6]\!]$	6	5	4	3	2	1

Wie oben ersichtlich haben wie als erzeugendes Element $[\![3]\!]$ und $[\![5]\!]$. Die Gruppe $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \odot_7)$ ist zyklisch, weil eben solche Erzeuger existieren. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned}
3^1 &\mod 7 = 3 \\
3^2 &\mod 7 = 2 \\
3^3 &\mod 7 = 6 \\
3^4 &\mod 7 = 4 \\
3^5 &\mod 7 = 5 \\
3^6 &\mod 7 = 1
\end{aligned}$$

Damit haben wir ein $a \in G$ gefunden, so dass für alle $g \in G$ ein $j \in \mathbb{Z}$ existiert mit $g = a^j$.

Aufgabe 3

Seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe.

a) Zeigen Sie, dass $(R_1 \times R_2, +, \cdot)$ ein Ring ist

- **Abelsche Gruppe**, betrachte $(R_1 \times R_2, +),\ a_1, b_1 \in R_1,\ a_2, b_2 \in R_2$

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 +_1 b_1, a_2 +_2 b_2) \\
(b_1, b_2) + (a_1, a_2) &= (b_1 +_1 a_1, b_2 +_2 a_2) \\
&= (a_1 +_1 b_1, a_2 +_2 b_2)
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da $(R_1, +_1)$ und $(R_2, +_2)$ und damit auch $(R_1, +_1) \wedge (R_2, +_2)$ abelsch sind.

- **Assoziativität** Seien $a_1, b_1, c_1 \in R_1$ und $a_2, b_2, c_2 \in R_2$.

$$\begin{aligned}((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) &= (a_1 \cdot_1 b_1, a_2 \cdot_2 b_2) \cdot (c_1, c_2) \\ &= (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1, a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2)\end{aligned}$$

Ebenso andersrum

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)) &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 \cdot_1 c_1, b_2 \cdot_2 c_2) \\ &= (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1, a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2)\end{aligned}$$

- **Distributivität** $a_1, b_1, c_1 \in R_1 \wedge a_2, b_2, c_2 \in R_2$.

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 +_1 c_1, b_2 +_2 c_2) \\ &= (a_1 \cdot_1 (b_1 +_1 c_1), a_2 \cdot_2 (b_2 +_2 c_2)) \\ &= ((a_1 \cdot_1 b_1) +_1 (a_1 \cdot_1 c_1), (a_2 \cdot_2 b_2) +_2 (a_2 \cdot_2 c_2)\end{aligned}$$

Somit ist $R_1 \times R_2, +, \times$ ein Ring.

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}x_1 &= 6 \text{ und } 17 \\ x_2 &= 4 \text{ und } 13\end{aligned}$$

Euklid:

$$\begin{aligned}17 &= 1 \cdot 13 + 4 \\ 13 &= 4 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0\end{aligned}$$

ggT:

$$
\begin{aligned}
1 &= 13 - (4 \cdot 3) \\
&= 13 - (17 - 13) \cdot 3 \\
&= 13 - (3 \cdot 17 - 3 \cdot 13) \\
&= 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17 \\
&\implies 4 \cdot 6 \cdot 13 - 3 \cdot 4 \cdot 17 = 108
\end{aligned}
$$