Prof. Dr. Norbert Blum
Elena Trunz
Informatik V

BA-INF 011 – Logik und Diskrete Strukturen
WS 2013/14
Mögliche Klausuraufgaben
Stand vom 5.2.2014

Bitte beachten Sie, dass die tatsächlichen Klausuraufgaben von den unten aufgeführten geringfügig abweichen können, e.g. andere Zahlen, Buchstaben etc.

1. Mengen, Relationen und Funktionen

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Mengenoperationen:

1. Assoziativität.
2. Distributivität.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die De Morgan'sche Regeln für Mengenoperationen.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Aussage: Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. xy ist genau dann ungerade, wenn sowohl x als auch y ungerade sind.

Aufgabe 4

Seien A eine Menge und Π eine Menge von Teilmengen von A, so dass $\emptyset \notin \Pi$, $\bigcup \Pi = A$ und alle Elemente von Π paarweise disjunkt sind. Beweisen Sie, dass Π eine Partition von A ist.

Aufgabe 5

Sei $R = \{(a,b),(a,c),(c,d),(a,a),(b,a)\}$. Was ist die Hintereinanderausführung $R \circ R$ von R mit sich selbst? Was ist das Inverse R^{-1} von R? Sind R, $R \circ R$ und R^{-1} Funktionen?

Aufgabe 6

Seien $A \neq \emptyset$ und $R := \emptyset \subseteq A \times A$. Ist R reflexiv, symmetrisch, anti-symmetrisch oder transitiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7

Seien R und S partielle Ordnungen auf A. Zeigen Sie, dass $R \cap S$ eine partielle Ordnung ist.

*Aufgabe 8**

Gegeben seien die binären Relationen R und S auf $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$, wie in Abbildung 1 dargestellt.

1. Schreiben Sie die Relationen R, S und $R \cup S$ in Mengenschreibweise auf.
2. Sind die Relationen R, S und $R \cup S$ symmetrisch, reflexiv oder transitiv?
3. (Neu) Geben Sie den reflexiven, transitiven Abschluss von $R \cup S$ an.

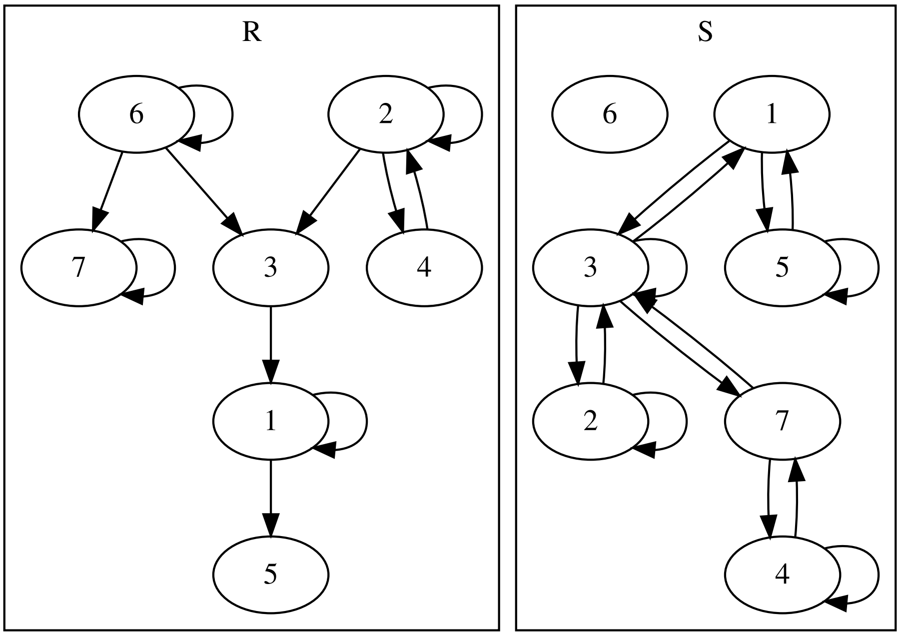

Abbildung 1: Die Relationen R und S.

Aufgabe 9

Sei $f : A \to B$. Zeigen Sie, dass $R = \{(a, a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 10

Sei S eine Menge von Mengen. Zeigen Sie, dass $R_S := \{(A, B) \mid A, B \in S, A \subseteq B\}$ eine partielle Ordnung ist. Sei nun $S = 2^{\{1,2,3\}}$. Zeichnen Sie den gerichteten Graphen, der R_S repräsentiert. Welches Element oder welche Elemente sind minimal?

Aufgabe 11

Zeigen Sie: Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A. Dann bilden die Äquivalenzklassen von R eine Partition von A.

Aufgabe 12

Zeigen Sie: Eine Relation R ist genau dann eine partielle Ordnung, wenn sie reflexiv und transitiv ist und keine nichttriviale Kreise besitzt.

Aufgabe 13

Zeigen Sie: Der reflexive, transitive Abschluss R^* einer zweistellige Relation R ist gleich

$(R \cup \{(a,b) \mid \exists \text{ Kette in } R \text{ von } a \text{ nach } b\}) \subseteq R^*$.

Aufgabe 14

1. Sei $R = \{(a,b), (a,c), (a,d), (d,c), (d,e)\}$. Geben Sie den reflexiven, transitiven Abschluss R^* von R an. Zeichnen Sie den gerichteten Graphen, der R^* repräsentiert.
2. Der symmetrische Abschluss einer Relation R auf A ist der Abschluss von R bezüglich der Relation

$$\widetilde{Q} := \{((a,b),(b,a)) \mid a, b \in A\}.$$

   Ist der transitive Abschluss von dem symmetrischen Abschluss einer Binärrelation immer reflexiv? Zeigen Sie dies oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 15

Zeigen Sie: Sei P eine Abschlusseigenschaft, die durch Relationen auf einer Menge D definiert ist und sei $A \subseteq D$. Dann existiert eine eindeutige Menge B mit $A \subseteq B$, die die Eigenschaft P besitzt.

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass jede endliche partielle Ordnung mindestens ein minimales Element besitzt.

Aufgabe 17

Zeigen Sie, dass die Relation „gleichmächtig“ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 18

Sei A eine abzählbar unendliche Menge. Zeigen Sie, dass A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Aufgabe 19

Zeigen Sie, dass die Vereinigung von endlich vielen abzählbaren Mengen abzählbar ist.

Aufgabe 20

Sei C eine Menge von Mengen, die wie folgt definiert ist.

- $\emptyset \in C$.
- Falls $S_1 \in C$ und $S_2 \in C$ sind, dann ist auch $\{S_1, S_2\} \in C$.
- Falls $S_1 \in C$ und $S_2 \in C$ sind, dann ist auch $S_1 \times S_2 \in C$.
- Keine anderen Elemente sind in C außer denen, die durch die ersten drei Regeln abgeleitet werden können.

1. Erklären Sie, warum $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in C$.
2. Zeigen oder widerlegen Sie, dass C unendliche Mengen enthält.
3. Ist C abzählbar oder Überabzählbar unendlich? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 21

Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Aufgabe 22

Zeigen Sie, dass die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist.

Aufgabe 23

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot (i+1) \cdot (i+2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4}.$$

Aufgabe 24

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass falls $n \geq 0$, dann ist $n^4 - 4n^2$ teilbar durch 3.

Aufgabe 25

Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

*Aufgabe 25 B**

Zeigen Sie für jedes $x \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\sum_{i=1}^{n} ix^{i-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

gilt.

Aufgabe 26

Sei S eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit $|S| = 1000$. Zeigen Sie, dass es mindestens ein Paar von Elementen $x \neq y$ gibt, so dass $x - y$ durch 573 teilbar ist. Verwenden Sie zum Beweis das Schubfachprinzip.

Aufgabe 27

Zeigen Sie: Für jede endliche Menge A gilt $|2^A| = 2^{|A|}$.

Aufgabe 28

Zeigen Sie, dass die Summe der ersten n, $n \geq 1$ ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

Aufgabe 29

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass n das Produkt von Primzahlen ist.

Aufgabe 30

Zeigen Sie, dass jeder Geldbetrag von mindestens 4 Cents mit Zwei- und Fünfcentstücken bezahlt werden kann.

Aufgabe 31

Sei R eine binäre Relation auf einer endlichen Menge A. Zeigen Sie, dass falls in R eine Kette der Länge $|A| + 1$ existiert, dann gibt es in R einen Kreis.

Aufgabe 32

Zeigen Sie, dass die Menge $2^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist.

*Aufgabe 33**

Gegeben sei eine nichtleere Menge A. Geben Sie jeweils eine Relation auf A an, die

1. (2 Punkte) reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch,
2. (2 Punkte) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv, und
3. (2 Punkte) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

2. Modulare Arithmetik

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgende Teilbarkeitsregeln:

1. $a|b \Rightarrow a|bc$, für alle $c \in \mathbb{Z}$.
2. $(a|b$ und $b|c) \Rightarrow a|c$ (Transitivität).
3. $(a|b$ und $a|c) \Rightarrow a|(sb+tc)$ für alle $s,t \in \mathbb{Z}$.
4. $(a|(b+c)$ und $a|b) \Rightarrow a|c$.
5. Falls $c \neq 0$, dann gilt $a|b \Leftrightarrow ac|bc$.
6. Für $a,b \in \mathbb{N}$ gilt $a|b \Rightarrow a \leq b$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Seien $d \in \mathbb{N}_0$, $x \equiv y \ mod \ n$ und $a \equiv b \ mod \ n$. Dann gilt

1. $x + a \equiv y + b \ mod \ n$.
2. $x - a \equiv y - b \ mod \ n$.
3. $xa \equiv yb \ mod \ n$.
4. $x^d \equiv y^d \ mod \ n$.

Aufgabe 3

Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, \ldots$ sind rekursiv wie folgt definiert: $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass je zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen f_n und f_{n+1} teilerfremd sind, d.h. $ggT(f_n, f_{n+1}) = 1$ für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 4

Seien $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Zahlen $q,r \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $a = qb + r$ und $0 \leq r < |b|$.

Aufgabe 5

Seien $a,b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: es gilt $a \equiv b \ mod \ n$ genau dann, wenn $a - b$ durch n teilbar ist.

Aufgabe 6

Seien $a,b \in \mathbb{Z}$ ungleich Null. Zeigen Sie, dass dann $ggT(a,b)$ die kleinste positive Linearkombination von a und b ist.

Aufgabe 7

Seien $a,b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $(n|ab$ und $ggT(a,n) = 1) \Rightarrow n|b$.

Aufgabe 8

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $ggT(n, a) = ggT(n, b) = 1 \Rightarrow ggT(n, ab) = 1$.

Aufgabe 9

Seien $a, x, y \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass falls $ggT(a, n) = 1$ und $ax \equiv ay \ mod \ n$, dann gilt auch $x \equiv y \ mod \ n$.

Aufgabe 10

Seien R eine Repräsentantenmenge modulo n und $a \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a, n) = 1$. Zeigen Sie, dass dann auch aR eine Repräsentantenmenge modulo n ist.

Aufgabe 11

Seien $a, n \in \mathbb{N}$ und $ggT(a, n) = 1$. Zeigen Sie, dass dann $ax \equiv b \ mod \ n$ in $\mathbb{Z}$ lösbar und die Lösung modulo n eindeutig ist.

Aufgabe 12

Zeigen Sie: Für eine ganze Zahl a existiert ihr multiplikatives Inverses modulo n genau dann, wenn a relativ prim zu n ist.

Aufgabe 13

Der Algorithmus EUKLID terminiert nach höchstens $2\lceil \log \ b \rceil$ Schleifendurchläufe.

Aufgabe 14

Erweitern Sie den Algorithmus EUKLID, so dass dieser auch die Linearkombination des $ggT(a, b)$ der Eingaben a und b ausgibt.

Aufgabe 14

1. Bestimmen Sie mittels Euklidischen Algorithmus den $ggT(348, 124)$ und geben Sie dabei alle Schritte explizit an.
2. Sei $a = 61$ und $n = 130$. Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von $a \ mod \ n$.

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass für alle ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$ gilt: $ggT(an, bn) = n \ ggT(a, b)$.

Aufgabe 17

Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Arithmetik.

Aufgabe 18

Bestimmen Sie die kleinste von 1 verschiedene natürliche Zahl x_0, die die folgenden Kongruenzen gleichzeitig erfüllt:

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv 2 \; mod \; 3 \\ x_0 &\equiv 3 \; mod \; 5 \\ x_0 &\equiv 5 \; mod \; 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 19

Zeigen Sie: Die Gleichung $ax \equiv b \; mod \; n$ hat eine Lösung in $\mathbb{Z}_n$ genau dann, wenn b durch $ggT(a, n)$ teilbar ist.

3. Algebraische Strukturen

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgende Gruppeneigenschaften:

Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe. Dann gilt

1. Jedes Element $x \in G$ besitzt genau ein Inverses $x^{-1} \in G$.
2. Für alle $x \in G$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$.
3. Für alle $x, y \in G$ gilt $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.
4. Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z)$ und $(y \circ x = z \circ x \Rightarrow y = z)$.
5. Für alle $a, b \in G$ existiert genau ein $x \in G$ mit $a \circ x = b$ und genau ein $y \in G$ mit $y \circ a = b$.

Aufgabe 2

1. Beweisen Sie, dass eine Halbgruppe $(M, \circ)$ höchstens ein neutrales Element besitzen kann.
2. Beweisen Sie die Eindeutigkeit der Elemente $x := a^{-1} \circ b$ und $y := b \circ a^{-1}$ als Lösungen der Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$.

Aufgabe 3

Bezeichne S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, d.h. die Menge aller Permutationen von $1, 2, ..., n$. Als Verknüpfung $\circ$ der Permutationen nehmen wir ihre Hintereinanderausführung, d.h. $f \circ g(x) = f(g(x))$. Bezeichne e die identische Permutation, d.h. $e(x) = x$. Zeigen Sie, dass $(S_n, \circ, e)$ eine Gruppe ist. Ist diese Gruppe kommutativ? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(m\mathbb{Z}, +, 0)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist.

Aufgabe 5

Zeigen Sie: Seien $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$. Dann ist $(H, \circ)$ genau dann eine Gruppe, wenn gilt:

- $a, b \in H \Rightarrow a \circ b \in H$, für alle $a, b \in G$,
- $e \in H$ und
- $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

Aufgabe 6

Zeigen Sie: Seien $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$. Dann ist $(H, \circ)$ genau dann eine Untergruppe von G, wenn $H \neq \emptyset$ und $\forall a, b \in G : \; a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

Aufgabe 7

Seien n eine natürliche Zahl und $\mathbb{Z}_n^\times := \{a \in \mathbb{Z}_n |\ a \neq 0 \text{ und } ggT(a,n) = 1\}$. Außerdem bezeichne $\cdot$ die Multiplikation modulo n. Zeigen Sie, dass dann $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 8

Seien $H \subseteq \mathbb{Z}$ und $(H, +, 0)$ eine nichttriviale Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Zeigen Sie, dass dann $H = m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 9

Sei $(H, \circ, e)$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \circ, e)$. Zeigen Sie, dass jedes Element $x \in G$ zu genau einer Linksklasse bezüglich H gehört.

Aufgabe 10

Seien $(H^{'}, \circ, e)$ und $(H^{''}, \circ, e)$ Untergruppen der Gruppe $(G, \circ, e)$ mit $H^{''} \subseteq H^{'}$. Zeigen Sie:

$$[G : H^{''}] = [G : H^{'}] \cdot [H^{'} : H^{''}]$$

Aufgabe 11

Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und $(H, \circ, e)$ eine Untergruppe von G. Zeigen Sie: $ord\ G = ord\ H \cdot ind\ H$.

Aufgabe 12

Seien $(G, \circ, e)$ eine endliche Gruppe und $a \in G$. Beweisen Sie, dass $H_a := \{a^0, a^1, ...\}$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 13

Beweisen Sie, dass zwei zyklische Gruppen genau dann isomorph sind, wenn sie dieselbe Ordnung haben.

Aufgabe 14

Sei $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper. Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{F}$ folgende Köpereigenschaften:

1. $0 \cdot x = 0$
2. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$
3. $(-x)^{-1} = -x^{-1}$ für $x \neq 0$
4. $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$.

Aufgabe 15

Seien $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G. $a, b \in G$ heißen *äquivalent* $a \sim b$, wenn $a^{-1}b \in H$.

1. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
2. Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ genau die Linksklassen bezüglich H sind.
3. Beweisen Sie, dass $a \circ H$ und H gleichmächtig sind.

Aufgabe 16

Seien $(G, \circ, e)$ eine endliche Gruppe und $a \in G$. Zeigen Sie, dass dann $a^{ord\ G} = e$ gilt.

Aufgabe 17

Sei $(G, \circ, e)$ eine endliche Gruppe und $a \in G$. Beweisen Sie, dass $H_a = \{a^0, a^1, ..., a^{ord\ a}\}$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 18

Sei $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge aller reellen Zahlen x mit $x \geq 0$ bzw. $x > 0$. Ferner sei die Abbildung $f : (\mathbb{R}_{\geq 0}, +, 0) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ mit $f(x) := 2^x$ gegeben. Ist f ein Homomorphismus? Ist die Umkehrabbildung von f ein Homomorphismus? Beweisen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 19

Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ zwei zyklische Gruppen mit erzeugenden Elementen $a \in G$ und $h \in H$. Ferner sei $ord\ G = ord\ H$. Betrachten Sie die Abbildung $f : G \to H$, wobei $f(g^k) := h^k$ für $k = 0, 1, 2, ...$ Beweisen Sie, dass die Abbildung f bijektiv ist.

Aufgabe 20

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass dann $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist.

4. Einführung in die Logik

Aufgabe 1

Zwei aussagenlogische Ausdrücke ϕ_1 und ϕ_2 heißen *äquivalent* $\phi_1 \equiv \phi_2$, falls für jede Belegung B, mit B ist für ϕ_1 und für ϕ_2 geeignet, gilt $B \models \phi_1 \Leftrightarrow B \models \phi_2$. Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2

Geben Sie die kürzesten Ausdrücke für die folgenden Ausdrücke an. Beweisen Sie die Äquivalenz.

1. $y \wedge \neg y \rightarrow x \vee \neg x$
2. $x \rightarrow (x \wedge y)$
3. $(y \rightarrow x) \vee x$
4. $((x \wedge y) \leftrightarrow (y \vee z)) \rightarrow \neg y$
5. $\neg((x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge (y \vee z)))$

Aufgabe 3

Gegeben sei folgender aussagenlogischer Ausdruck

$$(\neg x_1 \wedge x_2) \vee ((\neg x_1 \vee x_2) \wedge ((\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee x_3))$$

Leiten Sie aus diesem einen äquivalenten Ausdruck in disjunktiver Normalform ab.

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Gesetze der Aussagenlogik:

1. Idempotenz
2. Kommutativität
3. Assoziativität
4. Absorption
5. Distributivität
6. Doppelte Negation
7. De Morgan.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass jeder aussagenlogischer Ausdruck ϕ äquivalent zu einem Ausdruck in KNF und zu einem Ausdruck in DNF ist.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass für zwei beliebige aussagenlogische Ausdrücke ϕ_1 und ϕ_2 genau dann $\phi_1 \equiv \phi_2$ gilt, wenn $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ eine Tautologie ist.

Aufgabe 7

Betrachten Sie folgende Klauselmengen. Geben Sie möglichst kurze Deduktionen von $\square$ aus $\mathcal{K}_i$ für $1 \leq i \leq 3$ an. Geben Sie bei Resolventen die Klauseln an, aus denen sie gebildet wurden.

1. $\mathcal{K}_1 := \{\{x, y, \neg z\}, \{\neg x\}, \{x, y, z\}, \{x, \neg y\}\}$.
2. $\mathcal{K}_2 := \{\{x, y\}, \{x, \neg y, z\}, \{\neg x\}, \{\neg y, \neg z\}\}$.
3. $\mathcal{K}_3 := \{\{\neg x, \neg y, \neg z\}, \{\neg w, x\}, \{w\}, \{y\}, \{\neg v, z\}, \{v\}\}$.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass folgende Paare von prädikatenlogischen Ausdrücken *nicht* äquivalent sind:

1. $(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$ und $\forall x : P(x) \vee Q(x)$
2. $(\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x))$ und $\exists x : P(x) \wedge Q(x)$

Aufgabe 9

Beweisen Sie folgende Behauptungen:

1. Für jeden aussagenlogischen Ausdruck ϕ gibt es einen äquivalenten aussagenlogischen Ausdruck $\phi^{'}$ der keine Disjunktion enthält.
2. Jeder Term in einem prädikatenlogischen Ausdruck hat eine gerade Anzahl von Klammern.

Aufgabe 10

Zeigen Sie: Seien $\mathcal{K}$ eine Klauselmenge, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ und D eine Resolvente von K_1 und K_2. Dann sind $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^{'} := \mathcal{K} \cup D$ äquivalent.

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass eine Klauselmenge $\mathcal{K}$ genau dann unerfüllbar ist, wenn $\Box \in R^*(\mathcal{K})$.

Aufgabe 12

Zeigen Sie: Seien ϕ ein Ausdruck über Σ und M und $M^{'}$ zwei für Σ geeignete Strukturen. Falls M und $M^{'}$ bzgl. ϕ sich nur in Werten, die diese Variablen, die im ϕ nicht frei sind, zuweisen, unterscheiden, dann gilt genau dann $M \vDash \phi$ wenn $M^{'} \vDash \phi$.

Aufgabe 13

Beweisen Sie folgende Behauptungen:

1. Jeder Ausdruck der Form $\forall x\ \phi \rightarrow \phi[x := t]$ ist gültig.
2. Falls ϕ gültig ist, dann ist auch $\forall x\ \phi$ gültig.

Aufgabe 14

1. (a) Zeigen Sie: Falls x nicht frei in ϕ vorkommt, dann ist der Ausdruck $\phi \rightarrow \forall x\ \phi$ gültig.
   (b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem x in ϕ frei vorkommt und der Ausdruck $\phi \rightarrow \forall x\ \phi$ ungültig ist.
2. Zeigen Sie: Für alle ϕ und ψ ist der Ausdruck $(\forall x\ (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\forall x\ \phi) \rightarrow (\forall x\ \psi))$ gültig.

Aufgabe 15

Seien ϕ und ψ beliebige prädikatenlogische Ausdrücke. Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt

1. $\forall x(\phi \wedge \psi) \equiv (\forall x\ \phi \wedge \forall x\ \psi)$.
2. Falls x nicht frei in ψ vorkommt, dann $\forall x(\phi \wedge \psi) \equiv (\forall x\ \phi \wedge \psi)$.
3. Falls x nicht frei in ψ vorkommt, dann $\forall x(\phi \vee \psi) \equiv (\forall x\ \phi \vee \psi)$.

Aufgabe 16

Seien ϕ und ψ beliebige prädikatenlogische Ausdrücke. Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt

1. Falls y nicht in ϕ vorkommt, dann $\forall x\ \phi \equiv \forall y\ \phi[x := y]$.
2. $\neg\forall x\ \phi \equiv \exists x\ \neg\phi$.
3. $\neg\exists x\ \phi \equiv \forall x\ \neg\phi$.

Aufgabe 17

Zeigen Sie: Jeder prädikatenlogischer Ausdruck kann in einen äquivalenten Ausdruck in Pränexnormalform transformiert werden.

Aufgabe 18

Bringen Sie folgende prädikatenlogische Ausdrücke in Pränexnormalform und geben Sie dabei alle Zwischenschritte an:

1. $(\exists x(P(x, y))) \rightarrow (\exists x(Q(x, x)))$
2. $\neg(\forall x(F(x, y) \rightarrow G(x, z)) \wedge \forall x, \forall y\ H(x, y))$
3. $\neg\exists z(F(z) \wedge \exists x(G(x, x) \wedge G(z, x)))$

Beim Umformen achten Sie auf den Gültigkeitsbereich der quantifizierten Variablen.

*Aufgabe 19**

1. Geben Sie den Resolutionssatz an.
2. Geben Sie den Resolutionsalgorithmus an.

*Aufgabe 20**

Sei

$$\alpha = (x_1 \wedge x_2) \vee \neg x_3 \vee (x_4 \wedge \neg x_5 \wedge (\neg x_1 \vee x_6)).$$

Geben Sie einen zu α äquivalenten Ausdruck in KNF sowie in DNF an.

*Aufgabe 21**

Zeigen Sie, dass falls $\Delta \cup \{\neg\phi\}$ inkosistent ist, dann gilt auch $\Delta \vdash \phi$.

5. Automatentheorie und formale Sprachen

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Zu jedem NEA $M_1 = (Q, \sum, \delta, q_0, F)$ existiert ein äquivalenter DEA $M_2 = (Q', \sum, \delta', q_0', F')$.

Aufgabe 2

Sei $M = (Q, \sum, \delta, q_0, F)$ ein DEA. Zeigen Sie, dass dann $L(M)$ regulär ist.

Aufgabe 3

Formulieren Sie den Satz von Myhill und Nerode.

Aufgabe 4

Beweisen Sie den Satz von Myhill und Nerode: Folgende drei Aussage sind äquivalent,

1. Die Menge $L \subseteq (\sum)^*$ wird durch einen DEA akzeptiert.
2. L ist die Vereinigung einiger Äquivalenzklassen einer rechtsinvarianten Äquivalenzrelation von endlichem Index.
3. Sei R_L definiert durch
$$xR_Ly \Leftrightarrow \forall z \in (\sum)^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$
Dann hat die Äquivalenzrelation R_L einen endlichen Index.

Aufgabe 5

Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Satz von Myhill und Nerode und der Minimierung der DEAs an.

Aufgabe 6

1. Formulieren Sie das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen.
2. Zeigen Sie, dass $L^1 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L^2 := \{0^m \$ 0^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär sind.
3. Beweisen Sie das Pumping Lemma für reguläre Sprachen.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass reguläre Mengen unter Durchschnittsbildung abgeschlossen sind.

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind neu. Des Weiteren werden keine neuen Aufgaben gestellt.