MfS Blatt 9 Aufgabe 2 Sei $(R, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins mit neutralem Element Add = $0 \in R$, neutr. Element Mult = $1 \in R$ und $1 \neq 0$.

Zzg:

a) $a \in R \Rightarrow (-1) \cdot a = a$

$$(-1) \cdot a = (-1 \cdot a) + 0 = \underbrace{(-1) \cdot a + a}_{0} + (-a) = 0 + (-a) = -a.$$

b) sind $a, r \in R^*$ (Menge der Einheiten) $\Rightarrow$

$a \cdot r = a \Rightarrow r = 1$

$a = \underset{\text{neutr. El}}{a \cdot 1} = a \cdot r$ mit Kürzungsregel folgt $\Rightarrow r = 1$

c) $a, r \in R \not\Rightarrow (a \cdot r = a \Rightarrow r = 1)$

Gegenbeispiel: Sei $a = 0$, $0 \in R$, $\Rightarrow a \cdot r = a \;\forall r \in R$

d) $a, b \in R$, : $a \cdot b = 0 \not\Rightarrow a + 1$ oder $b + 1$ ist eine Einheit

Sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $a \cdot b = 0$ gilt z.B für $a = [\![2]\!]_6$ $b = [\![3]\!]_6$

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow [\![2]\!]_6 \cdot [\![3]\!]_6 = [\![0]\!]$

$a + 1 = [\![2]\!] + [\![1]\!] = [\![3]\!]_6 \neq [\![1]\!]$

$b + 1 = [\![3]\!] + [\![1]\!] = [\![4]\!] \neq [\![1]\!]$

e) $a \in R$ und $a \cdot a = 0 \Rightarrow a + 1$ ist eine Einheit

$a \cdot a = 0 \Rightarrow a \cdot 0 \Rightarrow a + 1 = 1 \Rightarrow (a + 1)$ ist eine Einheit.