Symétries de 4S

1 Préliminaires

L'espace des états de 4S est donné par $\mathcal{M} = (\sqrt{3/2}, +\infty)^4$, tandis que l'espace des positions est donné par $\mathcal{P} = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Ici, on fait l'identification

$$SO(3) = \{R \in O(3) \mid \det(R) = 1\} \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

On notera I la matrice d'identité de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ et les rotations élémentaires autour des axes des coordonnées $R_z(\theta)$ et similaire pour x et y. On caractérise l'orientation du nageur par la direction du quatrième bras et l'angle entre le premier bras et l'axe x. On fixe la convention que l'orientation correspondante à l'identité et celle où le quatrième bras est aligné à l'axe z et l'angle entre le premier bras et l'axe x vaut zéro.

Nous avons vu dans *Optimally Swimming Stokesian Robots* que le problème de contrôle associé au nageur 4S s'écrit

$$\begin{cases} \dot{p} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_i(R,\xi)\dot{\xi}_i \\ p(0) = p_0, \end{cases} \tag{1}$$

où les $\mathbf{F}_i$ sont des champs de vecteurs sur $T\mathcal{P}$.

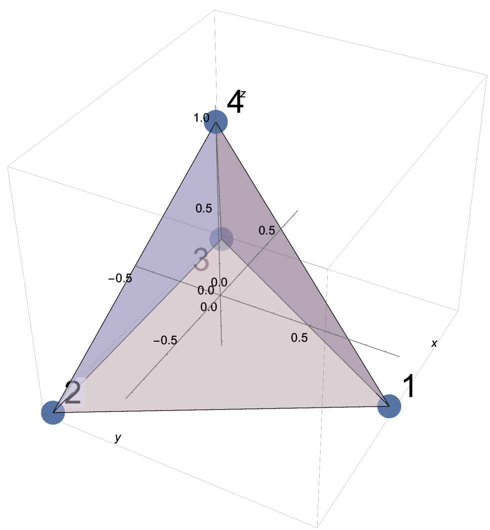

FIGURE 1 – La position du nageur 4S correspondante à l'identité

2 Symétrie rotationnelle

Lemme 1. *A un point $R \in SO(3)$ l'espace tangent est donné par*

$$R^* \operatorname{Asym}_3(\mathbb{R}) = \{RA \mid A \in \operatorname{Asym}_3(\mathbb{R})\},$$

où $\operatorname{Asym}_3(\mathbb{R})$ *désigne les matrices réelles antisymétriques de taille 3.*

Démonstration. On remarque d'abord qu'il suffit de calculer l'espace tangent à l'identité car $SO(3)$ est un groupe de Lie et donc $SO(3)$ agit sur soi-même par difféomorphismes. En effet, si on connaît l'espace tangent à l'identité, l'espace tangent à un point arbitraire $R \in SO(3)$ est donné par le tire-en-arrière $T_R SO(3) = R^* T_I SO(3)$. De plus, $SO(3)$ est la composante connexe de l'identité de $O(3)$ (par continuité de la déterminante). Par conséquent, nous avons $T_I SO(3) = T_I O(3)$. Or, d'après le théorème du rang constant, $O(3)$ est défini par $O(3) = \Phi^{-1}(I)$, où $\Phi : GL(\mathbb{R}, 3) \to M_{3\times 3}(R)$ est donné par $\Phi(A) = A^T A$. Pour $Q \in GL(\mathbb{R}, 3)$, la différentielle $d_Q\Phi : T_Q O(3) \to T_{Q^T Q} M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ est donnée par $R \mapsto RQ + QR^T$, en particulier à l'identité nous avons $d_I\Phi(R) = R + R^T$. Il suit d'un corollaire du théorème du rang constant que

$$T_I O(3) = \ker d_I \Phi = \{R \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid R + R^T = 0\} = \mathrm{Asym}_3(\mathbb{R}).$$

$\square$

Avec ce lemme, on trouve que pour tout $p = (\mathbf{c}, R) \in \mathcal{P}$ on a $T_p\mathcal{P} \simeq \mathbb{R}^3 \times R^* \,\mathrm{Asym}_3(\mathbb{R})$. En particulier, on peut écrire le système (1) sous la forme

$$\dot{p} = F(R, \xi)\dot{\xi} = (F_c(R, \xi)\dot{\xi}, F_\theta(R, \xi)\dot{\xi}),$$

où $F_c(R, \xi) \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ et $F_\theta(R, \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, R^* \,\mathrm{Asym}_3(\mathbb{R}))$.

Soit maintenant $p_0 = (c_0, R_0)$ une position initiale et $\xi : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ une courbe de contrôle avec I un voisinage de zéro et $\xi_0 := \xi(0)$. Soit $\gamma(p_0, \xi) = (\gamma_c(p_0, \xi), \gamma_\theta(p_0, \xi))$ la solution associée au système (1) avec condition initiale $p(0) = p_0$. Il suit de l'invariance rotationnelle des équations de Stokes que pour tout $R \in SO(3)$

$$\gamma_c(c_0, RR_0, \xi)(t) = R\gamma_c(c_0, R_0, \xi)(t) + (I - R)c_0 \tag{2}$$

$$\gamma_\theta(c_0, RR_0, \xi)(t) = R\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)(t) \tag{3}$$

Proposition 1. *Soit $\xi_0 := \xi(0) \in \mathcal{M}$ l'état initial des paramètres de contrôle et $T_\xi\mathcal{M}$ l'espace tangent de $\mathcal{M}$ à ξ. Si le système de contrôle (1) est invariant sous rotations et si $T_\xi\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$, alors*

$$F(R, \xi) = (RF_c(\xi), RF_\theta(\xi)) \qquad \textit{avec} \qquad F_c(\xi) := F_c(I, \xi), F_\theta(\xi) := F_\theta(I, \xi)$$

pour tout $(R, \xi) \in SO(3) \times \mathcal{M}$.

Démonstration. Par définition du système (1) on a

$$\dot{\gamma}_c(c_0, RR_0, \xi)(t) = F_c\left(\gamma_\theta(c_0, RR_0, \xi), \xi\right)\dot{\xi}(t),$$
$$\dot{\gamma}_\theta(c_0, RR_0, \xi)(t) = F_\theta\left(\gamma_\theta(c_0, RR_0, \xi), \xi\right)\dot{\xi}(t)$$

Par (2) et (3), on a également par définition du système

$$\dot{\gamma}_c(c_0, RR_0, \xi)(t) = RF_c(\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi), \xi)\dot{\xi}(t)$$
$$\dot{\gamma}_\theta(c_0, RR_0, \xi)(t) = RF_\theta(\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi), \xi)\dot{\xi}(t)$$

Ainsi, on trouve pour tout $R \in SO(3)$

$$F_c\left(\gamma_\theta(c_0, RR_0, \xi), \xi\right)\dot{\xi} = RF_c(\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi), \xi)\dot{\xi}$$
$$F_\theta\left(\gamma_\theta(c_0, RR_0, \xi), \xi\right)\dot{\xi} = RF_\theta(\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi), \xi)\dot{\xi},$$

Vu que $T_\xi\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$, évaluation à $t = 0$ de cette dernière expression fournit $F_c(R\,R_0, \xi_0) = RF_c(R_0, \xi_0)$ et $F_\theta(R\,R_0, \xi_0) = RF_\theta(R_0, \xi_0)$. Finalement, si on définit $R_0 = I$, on obtient le résultat souhaité. $\square$

3 Permutation des bras

D'abord, on définit les matrices de permutations suivantes :

$$L = (e_2 \mid e_1 \mid e_3 \mid e_4) \qquad M = (e_1 \mid e_3 \mid e_2 \mid e_4) \qquad N = (e_1 \mid e_2 \mid e_4 \mid e_3)$$

où si on les applique à $\mathcal{M}$, les matrices L, M, N et O correspondent aux permutations des bras $||1 \leftrightsquigarrow ||2, ||2 \leftrightsquigarrow ||3, ||$ et $3 \leftrightsquigarrow ||4$ respectivement. On notera $S_{xy}(\phi)$ la réflexion à un plan orthogonal au plan xy faisant un angle ϕ avec l'axe x. On notera $S_{yz}(\phi)$ l'analogue pour le plan yz. De plus, on remarque pour la suite que l'angle entre deux bras d'un tétraèdre, *l'angle du tétraèdre*, est donné par

$$\alpha_{tet} = \arccos(-1/3).$$

Comme pour l'invariance rotationnelle on traitera la partie spatiale et la partie angulaire séparément.

3.1 Symétrie spatiale

Pour chaque permutation on fixe une orientation de référence R_L, R_M et R_N respectivement de sorte que les deux bras en question soient symétrique par rapport au plan yz. Pour alléger la notation, on écrit $S := S_{xy}(\frac{\pi}{2})$. De plus, on pose $R_L = R_z(-\pi/6), R_M = R_z(\pi/2)$ et $R_N = R_z(-\pi/6)R_y(-\alpha_{tet})$. Finalement, on fixe pour toutes les trois permutations une position spatiale de référence $c_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^3$. Soient alors $\gamma(c_{\text{ref}}, R_L, L\xi), \gamma(c_{\text{ref}}, R_M, M\xi)$ et $\gamma(c_{\text{ref}}, R_N, N\xi)$ des solutions du système de contrôle. Ainsixx, on trouve grâce à l'invariance sous changement de point d'observations des équations de Stokes, i.e. en regardant les solutions dans un miroir, les relations

$$\begin{aligned} \gamma_c(c_{\text{ref}}, R_L, L\xi) &= S\gamma_c(Sc_{\text{ref}}, R_L, \xi) \\ \gamma_c(c_{\text{ref}}, R_M, M\xi) &= S\gamma_c(Sc_{\text{ref}}, R_M, \xi) \\ \gamma_c(c_{\text{ref}}, R_N, N\xi) &= S\gamma_c(Sc_{\text{ref}}, R_N, \xi). \end{aligned} \tag{4}$$

Soit $p_0 = (c_o, R_0) \in \mathcal{P}$ une position initiale et $\gamma_c(c_0, R_0, L\xi)$ la partie spatiale de la solution du problème de contrôle. Pour tout $R \in SO(3)$, on a par (2)

$$\gamma_c(c_0, R_0, L\xi) = R^{-1}\gamma_c(c_0, RR_0, L\xi) - (R^{-1} - I)c_0.$$

Soit $R_1 := R_L R_0^{-1}$. Par la condition (4), on a

$$\gamma_c(c_0, R_0, L\xi)(t) = R_1^{-1}S\gamma_c(Sc_0, R_L, \xi)(t) - (R_1^{-1} - I)c_0.$$

Ainsi, on trouve par définition du système et avec la proposition 1

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_c(c_0, R_0, \xi)(t) &= \gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)(t)F_c(L\xi)L\dot{\xi}(t) \\ &= R_1^{-1}S\gamma_\theta(Sc_0, R_L, \xi)(t)F_c(\xi)\dot{\xi}(t). \end{aligned}$$

Évaluation à $t = 0$ et le fait que $T_\xi\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$ pour tout $\xi \in \mathcal{M}$ fournissent

$$R_0F_c(L\xi_0)L = R_1^{-1}SR_LF_c(\xi_0).$$

En posant $S_L := R_L^{-1}SR_L$, on trouve alors $F_c(L\xi) = S_LF_c(\xi)L$ pour tout $\xi \in \mathcal{M}$. En particulier, ce calcul fonctionne de même pour les autres permutations et en posant

$$S_M := R_M^{-1}SR_M \qquad\qquad S_N := R_N^{-1}SR_N$$

nous avons alors démontré le résultat suivant.

Proposition 2. *Pour toute courbe de contrôle ξ, l'application F_c satisfait*

$$F_c(L\xi) = S_LF_c(\xi)L \qquad F_c(M\xi) = S_MF_c(\xi)M \qquad F_c(N\xi) = S_NF_c(\xi)N.$$

3.2 Symétrie angulaire

On commence par quelques observations concernant la réflexion d'une rotation à un plan. Jusque là, nous avons identifié $SO(3)$ aux matrices orthogonales de déterminante 1. Or, le théorème d'Euler dit que pour toute rotation dans $SO(3)$ il existe une axe de rotation $\mathbf{u} \in S^2$ de sorte que l'on puisse la représenter par le vecteur d'Euler $\omega = \theta\mathbf{u}$, où θ est l'angle de rotation. Le lien entre ces deux représentations est donné par l'exponentielle matricielle que l'on explicitera dans ce qui suit. On se rappelle que

$$\mathfrak{so}(3) = T_I SO(3) = \mathrm{Asym}_3(\mathbb{R}).$$

De plus, on notera $R_x(\theta), R_y(\theta)$ et $R_z(\theta)$ les rotations élémentaires autour des axes x, y et z, respectivement. On voit facilement que $\dim \mathrm{Asym}_3(\mathbb{R}) = 3$ et on trouve que les matrices

$$L_1 = \frac{d}{d\theta} R_x(\theta)_{|\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$L_2 = \frac{d}{d\theta} R_y(\theta)_{|\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$L_3 = \frac{d}{d\theta} R_z(\theta)_{|\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

forment une base de $\mathfrak{so}(3)$ que l'on notera $\mathcal{L}$. Pour $A \in \mathfrak{so}(3)$ on obtient avec les propriétés de l'exponentielle matricielle que

$$(e^A)^T e^A = e^{A^T} e^A = e^{-A} e^A = e^I = I.$$

Donc, cette application est bien-définie et en particulier on a $R_z(\theta) = e^{\theta L_z}$ et similaire pour les autres rotations similaires. On remarque que pour tout $A \in \mathfrak{so}(3)$ et $Q \in SO(3)$ on a $QAQ^T \in \mathfrak{so}(3)$. Soit maintenant $R \in SO(3)$ quelconque. On trouve toujours un $Q \in SO(3)$ de sorte que

$$R = QR_z(\theta)Q^T = Qe^{\theta L_z}Q^T = e^{\theta Q L_z Q^T} = e^{\theta \mathbf{u}\cdot\mathbf{L}},$$

avec $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)^T$ où on permet un petit abus de notation et $\mathbf{u} \in S^2$ car Q est une application orthogonale. Ceci montre bien que $\exp : \mathfrak{so}(3) \to SO(3)$ est surjectif. Réciproquement, le calcul direct montre que pour une axe de rotation $\mathbf{u} \in S^2$ et un angle de rotation $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice $R = \exp(\theta\mathbf{u} \cdot \mathbf{L})$ est bien la matrice de rotation associée.

Soit S une réflexion à un plan dans $\mathbb{R}^3$ et $R \in SO(3)$ l'orientation d'un corps rigide dans $\mathbb{R}^3$ avec vecteur d'Euler ω associé. On notera $\tilde{R} \in SO(3)$ l'orientation de l'image miroir du corps rigide avec vecteur d'Euler $\tilde{\omega}$. On s'aperçoit que $\tilde{\omega} = -S\omega$, i.e. l'axe de rotation est reflétée et au même temps le sens de rotation est inversé pour les rotations parallèles au plan de réflexion. Un petit calcul montre que

$$\tilde{\omega} \cdot \mathbf{L} = S(\omega \cdot \mathbf{L})S, \tag{5}$$

dont il suit que

$$\tilde{R} = \exp(\tilde{\omega} \cdot \mathbf{L}) = \exp(S(\omega \cdot \mathbf{L})S) = SRS. \tag{6}$$

Maintenant, on se donne une orientation de référence $R_{\text{ref}} := R_z(-\frac{\pi}{6})$ ainsi que les réflexions $T_L := S_{xy}(\frac{\pi}{2}), T_M := S_{xy}(\frac{5\pi}{6})$ et $T_N := S_{yz}((\pi - \alpha_{tet})/2)$. De nouveau par l'invariance sous changement de point de vue des équations de Stokes justifient les relations suivantes, où on a directement compensé pour la position initiale.

$$\begin{aligned}\gamma_\theta(c_{\text{ref}}, R_{\text{ref}}, L\xi) &= R_{\text{ref}} T_L R_{\text{ref}}^{-1} \gamma_\theta(T_L c_{\text{ref}}, R_{\text{ref}}, \xi) T_L \\ \gamma_\theta(c_{\text{ref}}, R_{\text{ref}}, M\xi) &= R_{\text{ref}} T_M R_{\text{ref}}^{-1} \gamma_\theta(T_M c_{\text{ref}}, R_{\text{ref}}, \xi) T_M \\ \gamma_\theta(c_{\text{ref}}, R_{\text{ref}}, N\xi) &= R_{\text{ref}} T_N R_{\text{ref}}^{-1} \gamma_\theta(T_N c_{\text{ref}}, R_{\text{ref}}, \xi) T_N.\end{aligned} \tag{7}$$

Soit $p_0 = (c_0, R_0) \in \mathcal{P}$ une position initiale. Alors, nous avons par (3) pour tout $R \in SO(3)$

$$\gamma_\theta(c_0, R_0, L\xi) = R^{-1} \gamma_\theta(c_0, RR_0, L\xi).$$

En particulier, pour $R_1 := R_{\text{ref}} R_0^{-1}$ on obtient avec la condition (7)

$$\begin{aligned}\gamma_\theta(c_0, R_0, L\xi) &= R_1^{-1} \gamma_\theta(c_0, R_{\text{ref}}, L\xi) \\ &= R_1^{-1} R_{\text{ref}} T_L R_{\text{ref}}^{-1} \gamma_\theta(T_L c_0, R_{\text{ref}}, \xi) T_L.\end{aligned} \tag{8}$$

Par définition du système et en utilisant la proposition 1, on obtient à $t = 0$

$$F_\theta(L\xi_0) L\dot{\xi}(0) = T_L F_\theta(\xi_0) \dot{\xi}(0) T_L. \tag{9}$$

On continue par représenter $F_\theta(\xi_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \text{Asym}_3(\mathbb{R}))$ par une matrice $[F_\theta(\xi_0)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ par rapport aux bases $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. En particulier, le calcul de (5) montre que la la matrice représentant l'application linéaire $A \in \text{Asym}_3(\mathbb{R}) \mapsto T_L A T_L \in \text{Asym}_3(\mathbb{R})$ est donnée par $-T_L$ dans la base $\mathcal{L}$. Donc, nous avons par rapport aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned}&[F_\theta(L\xi_0) L\dot{\xi}(0)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} = [F_\theta(L\xi_0)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} L[\dot{\xi}(0)]_{\mathcal{E}}, \\ &[T_L F_\theta(\xi_0)\dot{\xi}(0) T_L]_{\mathcal{L}} = -T_L [F_\theta(\xi_0)\dot{\xi}(0)]_{\mathcal{L}} = -T_L [F_\theta(\xi_0)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} [\dot{\xi}(0)]_{\mathcal{E}},\end{aligned}$$

et donc $[F_\theta(L\xi)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} = -T_L [F_\theta(\xi)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} L$ car $T_\xi \mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$ pour tout $\xi \in \mathcal{M}$. Le calcul pour les autres permutations se déroule de la même façon et donc nous avons démontré le résultat suivant.

Proposition 3. *Pour toute courbe de contrôle ξ, l'application F_θ satisfait*

$$[F_\theta(L\xi)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} = -T_L [F_\theta(\xi)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} L, \qquad [F_\theta(M\xi)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} = -T_M [F_\theta(\xi)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} M,$$
$$[F_\theta(N\xi)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} = -T_N [F_\theta(\xi)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} N.$$

4 Développement limité du système de contrôle

Soit $G : \mathcal{M} \to M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ une application analytique. On pose $\zeta = \xi_0 + \xi$, où $\xi_0 \in \mathcal{M}$ avec toutes composantes égales. De plus, on pose $G_{\xi_0}(\xi) := G(\xi_0 + \xi)$. Ainsi, nous pouvons écrire le développement limité pour $\eta \in \mathbb{R}^4$

$$G_{\xi_0}(\xi)\eta = G_0\eta + \mathcal{H}_0(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|^2)\eta, \tag{10}$$

où $G_0 := G(\xi_0) \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ représente la différentielle d'ordre un de G_{ξ_0} à $\xi = 0$. Le résultat suivant sera utile dans la suite :

Proposition 4. *Soient* $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ *et* $S_A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *des matrices telles que* $G(A\xi) = S_A G(\xi) A$ *pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^4$. *Alors, on a*

$$G_0 = S_A G_0 A \tag{11}$$

ainsi que

$$\mathcal{H}_0((A\xi)\otimes\eta) = S_A \mathcal{H}_0(\xi \otimes (A\eta)) \tag{12}$$

pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$.

Démonstration. Évaluation de la relation $G(A\xi) = S_A G(\xi)A$ à $\xi = 0$ fournit immédiatement (11). Puis, on pose $\eta := A\eta$ dans (10) et on obtient

$$G_{\xi_0}(\xi)A\eta = G_0 A\eta + \mathcal{H}_0(\xi \otimes A\eta) + \mathcal{O}(|\xi|^2)\eta. \tag{13}$$

Par conséquent, on déduit de (10) et (13) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0((A\xi)\otimes\eta) &\overset{(10)}{=} G_{\xi_0}(A\xi)\eta - G_0\eta + \mathcal{O}(|\xi|^2)\eta \\
&= S_A G_{\xi_0}(\xi)A\eta - G_0\eta + \mathcal{O}(|\xi|^2)\eta \\
&= S_A[G_0 A\eta + \mathcal{H}_0(\xi\otimes(A\eta))] - G_0\eta + \mathcal{O}(|\xi|^2)\eta \\
&= S_A\mathcal{H}_0(\xi\otimes(A\eta)) + \mathcal{O}(|\xi|^2)\eta,
\end{aligned}$$

et donc on a (12). □

Dans la suite, on identifiera la matrice $[F_\theta(\xi)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ à l'application $F_\theta(\xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathrm{Asym}_3(\mathbb{R}))$ car aucune confusion ne peut plus survenir. Ainsi, nous avons les deux fonctions $F_c, F_\theta : \mathcal{M} \to M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ qui sont analytiques. . Maintenant on peut écrire les développements limité

$$F_{c,\xi_0}(\xi)\eta = F_{c,0}\eta + \mathcal{H}_{c,0}(\xi\otimes\eta) + \mathcal{O}(|\xi|^2)\eta, \tag{14}$$

$$F_{\theta,\xi_0}(\xi)\eta = F_{\theta,0}\eta + \mathcal{H}_{\theta,0}(\xi\otimes\eta) + \mathcal{O}(|\xi|^2)\eta \tag{15}$$

En particulier, les propositions (2), (3) et (4) fournissent les relations suivantes pour les termes d'ordre zéro

$$S_L F_{c,0} L = F_{c,0} \qquad S_M F_{c,0} M = F_{c,0} \qquad S_N F_{c,0} N = F_{c,0} \tag{16}$$

$$-T_L F_{\theta,0} L = F_{\theta,0}, \qquad -T_M F_{\theta,0} M = F_{\theta,0}, \qquad -T_N F_{\theta,0} N = F_{\theta,0}. \tag{17}$$

et pour les termes d'ordre 1

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{c,0}((L\xi)\otimes\eta) &= S_L\mathcal{H}_{c,0}(\xi\otimes(L\eta)), & \mathcal{H}_{\theta,0}((L\xi)\otimes\eta) &= -T_L\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi\otimes(L\eta)) \\
\mathcal{H}_{c,0}((M\xi)\otimes\eta) &= S_M\mathcal{H}_{c,0}(\xi\otimes(M\eta)), & \mathcal{H}_{\theta,0}((M\xi)\otimes\eta) &= -T_M\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi\otimes(M\eta)) \\
\mathcal{H}_{c,0}((N\xi)\otimes\eta) &= S_N\mathcal{H}_{c,0}(\xi\otimes(N\eta)), & \mathcal{H}_{\theta,0}((N\xi)\otimes\eta) &= -T_N\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi\otimes(N\eta)).
\end{aligned} \tag{18}$$

5 Résolution des systèmes

5.1 Les termes d'ordre zéro

Pour la partie spatiale on applique juste les relations (16) à une matrice générique dans $M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ pour trouver

$$F_{c,0} = \begin{pmatrix} -2\mathfrak{a} & \mathfrak{a} & \mathfrak{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{3}\mathfrak{a} & -\sqrt{3}\mathfrak{a} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{a} & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{a} & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{a} & \frac{-3}{\sqrt{2}}\mathfrak{a} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

pour un $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$. On remarque que la partie de la matrice correspondante aux bras 1,2 et 3 et aux directions x et y est égale au terme d'ordre zéro pour le nageur 3S. De plus, les vecteurs $\tau_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1,0)^T$, $\tau_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^T$, $\tau_3 := \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,-3)^T$ et $\tau_4 := \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$ forment une base orthonormée en termes de laquelle $F_{c,0}$ s'écrit $F_{c,0} = \mathfrak{a}\sqrt{6}[\tau_1|\tau_2|\tau_3]^T$.

Pour la partie angulaire, le même calcul direct montre que $F_{\theta,0} = 0$ ce qui se voit déjà avec l'argument géométrique que dans une configuration symétrique des bras, il n'y aura pas de couple.

5.2 Les termes de premier ordre

On notera $\sigma_L = (2,1), \sigma_M = (2,3)$ et $\sigma_N = (3,4)$ de S_4 les permutations correspondantes à L, M et N, respectivement, i.e. pour la base ordonnée (e_1, e_2, e_3, e_4) on a $Le_i = e_{\sigma_L(i)}$ etc. Ainsi, en évaluant sur la base ordonnée, (18) s'écrit

$$\mathcal{H}_{c,0}(e_{\sigma_L(i)} \otimes e_j) = S_L \mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_{\sigma_L(j)}) \tag{20}$$

$$\mathcal{H}_{c,0}(e_{\sigma_M(i)} \otimes e_j) = S_M \mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_{\sigma_M(j)}) \tag{21}$$

$$\mathcal{H}_{c,0}(e_{\sigma_N(i)} \otimes e_j) = S_N \mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_{\sigma_N(j)}), \tag{22}$$

pour tout $i, j \in \mathbb{N}_4$. Ceci fournit un système de 48 équations vectorielles. En effet, chaque $\mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_j)$ est un vecteur dans $\mathbb{R}^3$. Or, on remarque que les matrices S_L, S_M et S_L sont idempotentes, c'est-à-dire que l'on a également les équations $S_L \mathcal{H}_{c,0}(e_{\sigma_L(i)} \otimes e_j) = \mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_{\sigma_L(j)})$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}_4$ et similaire pour M et N. Ceci réduit le système à 30 équations vectorielles. On pose $A_k = (\mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_j) \cdot e_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}$ pour $k \in \mathbb{N}_3$. Ainsi, le vecteur $\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \eta \cdot \xi) e_k.$$

En posant

$$\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{H}_{c,0}(e_1 \otimes e_4) \cdot e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{H}_{c,0}(e_1 \otimes e_4) \cdot e_3,$$

ainsi que $\beta = -\frac{1}{4}\mathcal{H}_{c,0}(e_1 \otimes e_4) \cdot e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{H}_{c,0}(e_1 \otimes e_4) \cdot e_3$, $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{H}_{c,0}(e_1 \otimes e_2) \cdot e_3$ et $\lambda = -\frac{3}{2}\mathcal{H}_{c,0}(e_1 \otimes e_1) \cdot e_1$ on obtient à l'aide des relations (20) - (22)

$$A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2\lambda & 2(\alpha + 2(\beta+\gamma)) & 2(\alpha + 2(\beta+\gamma)) & 6(\alpha+\gamma) \\ 2(\alpha - \beta + 2\gamma) & \lambda & -4\alpha - 6\gamma & -3(\alpha+\gamma) \\ 2(\alpha - \beta + 2\gamma) & -4\alpha - 6\gamma & \lambda & -3(\alpha+\gamma) \\ 4(\alpha + 2\gamma) & -\alpha - 3\gamma & -\alpha - 3\gamma & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -2(\alpha+2\gamma) & 2(\alpha+2\gamma) & 0 \\ -2(\alpha+\beta+2\gamma) & \lambda & -2\alpha & -3(\alpha+\gamma) \\ 2(\alpha+\beta+2\gamma) & 2\alpha & -\lambda & 3(\alpha+\gamma) \\ 0 & -\alpha - 3\gamma & \alpha + 3\gamma & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$A_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \lambda & -2(2\alpha+\beta+4\gamma) & -2(2\alpha+\beta+4\gamma) & 6\gamma \\ -2(2\alpha+\beta+4\gamma) & \lambda & -4\alpha - 6\gamma & 6\gamma \\ -2(2\alpha+\beta+4\gamma) & -4\alpha - 6\gamma & \lambda & 6\gamma \\ 4\alpha + 6\beta + 8\gamma & 8\alpha + 6\gamma & 8\alpha + 6\gamma & -3\lambda \end{pmatrix} \tag{25}$$

Ainsi, on trouve pour les parties anti-symétriques $M_k := \frac{1}{2}(A_k - A_k^T), k \in \mathbb{N}_3$

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3\beta & 3\beta & \alpha-\gamma \\ -3\beta & 0 & 0 & -\alpha \\ -3\beta & 0 & 0 & -\alpha \\ \gamma-\alpha & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & \beta & -\beta & 0 \\ -\beta & 0 & -2\alpha & -\alpha \\ \beta & 2\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$M_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\alpha-3\beta-\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -4\alpha \\ 2\alpha+3\beta+\gamma & 4\alpha & 4\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Avec la même notation, on trouve pour la partie angulaire le système

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(e_{\sigma_L(i)} \otimes e_j) = -T_L \mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_{\sigma_L(j)}) \tag{29}$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(e_{\sigma_M(i)} \otimes e_j) = -T_M \mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_{\sigma_M(j)}) \tag{30}$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(e_{\sigma_N(i)} \otimes e_j) = -T_N \mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_{\sigma_N(j)}), \tag{31}$$

ce qui se réduit aussi à un système de 30 équations vectorielles car les matrices T_L, T_M et T_N sont bien idempotentes. On pose $B_k = (\mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_j) \cdot e_k)_{i,j\in\mathbb{N}_4}$ pour $k \in \mathbb{N}_3$. En posant $\delta := \mathcal{H}_{\theta,0}(e_1 \otimes e_4) \cdot e_1$, on trouve à l'aide des relations (29) - (31) et un calcul très similaire à celui de la partie spatiale

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta & \delta \\ 0 & 0 & -\delta & \delta \\ \delta & \delta & 0 & -2\delta \\ -\delta & -\delta & 2\delta & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -2\delta & -\delta & 3\delta \\ 2\delta & 0 & \delta & -3\delta \\ \delta & -\delta & 0 & 0 \\ -3\delta & 3\delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$B_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 0 & \delta & -\delta & 0 \\ -\delta & 0 & \delta & 0 \\ \delta & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

6 Système de contrôle linéarisé

En résumé, on a démontré dans les sections précédentes que à termes d'ordre élevé près, la dynamique de (4S) est donnée par

$$\begin{cases} \dot{c} = RF_{c,0}\dot{\xi} + R\sum_{k\in\mathbb{N}_3}(A_k\dot{\xi}\cdot\xi)e_k \\ \dot{R} = R\sum_{j\in\mathbb{N}_3}(B_j\dot{\xi}\cdot\xi)L_j. \end{cases} \tag{35}$$

En particulier, la partie angulaire est de la forme $\dot{R}(t) = R(t)\Gamma(t)$, i.e. une équation différentielle matricielle avec une matrice non-constante $\Gamma(t)$.