# Forme canonique des matrices anti-sym.

Pour commencer, on remarque qu'une matrice anti-symétrique $A \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ est normal, i.e. $AA^T = A^TA$ et que $iA$ est hermitien, donc on a

(i) Si $\lambda$ est une valeur propre alors $-\lambda$ l'est aussi.

(ii) Les valeurs propres sont purement imaginaires.

Par conséquent, les valeurs propres de $A$ sont données par des paires $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Théorème. (Gantmacher, Matrizentheorie, Springer 1986)

Il existe une transformation orthogonale $Q \in O(2n)$ telle que

$$A = Q\Sigma Q^T,$$

où

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve. La matrice $A$ étant normale, nous trouvons une base orthonormée de $\mathbb{C}^{2n}$ consistant de vecteurs propres. Le point ii)

Ci-dessus montre que cette base est de la forme $\{z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_n, \overline{z}_n\}$, où

$$A z_i = i\lambda_i \quad ; \quad A\overline{z}_i = -i\lambda_i.$$

Écrivons $z_i := x_i + i y_i$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$. Un petit calcul montre que les vecteurs

$$2x_1, 2y_1, \ldots, 2x_n, y_n$$

forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. En particulier, ils satisfont les équations

$$A x_i = -\lambda_i y_i$$
$$A y_i = \lambda_i x_i$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. Donc, en posant

$$Q = \left(2x_1 \middle| 2y_1 \middle| \ldots \middle| 2x_n \middle| 2y_n\right) \in O(2n),$$

nous obtenons le résultat. $\square$