Optimisation de l'énergie de (3S) sans produit vectoriel

A premier ordre, on a

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_I Q_g(\dot{\xi}(t))\,dt$$

avec Q_g représenté par $G = \begin{pmatrix} K & h & h \\ h & K & h \\ h & h & K \end{pmatrix}$

Orthogonalisation :

$\longrightarrow$ $G = U \Delta_g U^T$, $U := [\hat{t}_1 | \hat{t}_2 | \hat{t}_3]$,

$\Delta_g := \mathrm{diag}(g_1, g_2, g_3)$.

Changement de variables $\eta := U^T \xi \in H^1_\#(I, \mathbb{R}^3)$:

$$\Rightarrow \quad \mathcal{G}_U(\eta) = \int_I \Delta_g \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta}(t)\,dt,$$

avec $\mathcal{G}_U(\eta) := \mathcal{G}(\xi) = \mathcal{G}(U\eta)$.

$$\frac{1}{2\pi}\delta p(\xi) = \sum_{i \in \mathbb{N}_3} \langle M_i \dot{\xi} \cdot \xi \rangle e_i = \sum_{i \in \mathbb{N}_3} \langle N_i \dot{\eta} \cdot \eta \rangle,$$

où $N_i := U^T M_i U$.

Périodicité de η :

$$\eta(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} -n a_n \sin(nt) + n b_n \cos(nt).$$

$$N_i \dot{\eta}(t) \cdot \eta(t) = \sum_{n,m} \Big[-n \sin(nt) \cos(mt) N_i a_n \cdot a_m$$

$$- n \sin(nt) \sin(mt) N_i a_n \cdot b_m + n \cos(nt) \sin(mt)$$
$$\times N_i a_n \cdot b_m + n \cos(nt) \cos(mt) N_i b_n \cdot a_m . \Big]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \Big[- n N_i a_n \cdot a_0 \cos(nt) - n N_i b_n \cdot a_0 \sin(nt) \Big].$$

L^2 - orth $\Rightarrow \langle N_i \dot{\eta}(t) \cdot \eta(t) \rangle = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{N}} n N_i b_n \cdot a_n$

car $-n N_i a_n \cdot b_n = n N_i b_n \cdot a_n$ vu que les matrices N_i sont anti-symétriques.

On pose $u_n := \sqrt{2\pi n}\, a_n$, $v_n := \sqrt{2\pi n}\, b_n$ et on obtient

$$\delta p = \begin{pmatrix} \sum_n N_1 v_n \cdot u_n \\ \sum_n N_2 v_n \cdot u_n \\ \sum_n N_3 v_n \cdot u_n \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} N_1 v_n \cdot u_n \\ N_2 v_n \cdot u_n \\ N_3 v_n \cdot u_n \end{pmatrix}.$$

<u>Q</u> : Comment trouver $u, v \in \mathbb{R}$ t.q.

(i) $\|u\|_2 = \|(u_n)_n\|_{\ell^2}$; $\|v\|_2 = \|(v_n)_n\|_{\ell^2}$

(ii) $\delta p \cdot e_i = N_i v \cdot u$, $i = 1,2,3$. ?

Définissons $\omega := \delta p \in \mathbb{R}^3$ ainsi que le tenseur $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ donné par

$$T(u,v) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (N_k v \cdot u) e_k .$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\delta p = \omega = \sum_{n \in \mathbb{N}} T(u_n, v_n).$$

Donc, on veut trouver $u, v \in \mathbb{R}^3$ de sorte que

(i) $\mathcal{F}(\underline{u}_*, \underline{v}_*) = \mathcal{F}(\underline{u}, \underline{v})$,

$$\underline{u}_* := u \underline{e}_1, \underline{v}_* := v \underline{e}_1$$

$$\mathcal{F}(\underline{u}, \underline{v}) = \frac{1}{2} \|\underline{u}\|^2_{\ell^2} + \frac{1}{2} \|\underline{v}\|^2_{\ell^2};$$

(ii) $T(u,v) = \omega$.

Équivalence:

$$N_1 v \cdot u = M_1 (Uv) \cdot (Uu)$$

$$= -\alpha (Uv) \times (Uu) \cdot I_1 = \alpha\, v \times u \cdot e_1.$$

Avec le même calcul pour N_2, N_3 on obtient

$$T(u,v) = \Delta_h\, v \times u ,$$

où $\Delta_h = \operatorname{diag}(\alpha, \alpha, \mu)$.