

Micro-nageurs Stokesiens

Analyse du micro-nageur "parking 4-sphere swimmer" (SPr4)

Philipp Weder

CMAP - Ecole Polytechnique

Introduction

Table of contents

1. Introduction
2. Modélisation et symétries
3. Régime des petites courbes de contrôle
4. Optimisation
5. Le cas simple
6. Conclusions et perspectives
7. Questions ?

Modélisation et symétries

- Tétraèdre de référence avec sommets (S_1, S_2, S_3, S_4) centré à $c \in \mathbb{R}^4$ tel que $\text{dist}(c, S_i) = 1$
- Quatre boules B_i , centrées à b_i de rayon $a > 0$ peuvent bouger le long de la demi-droite d'origine c passant par S_i
- La résistance visqueuse des bras est négligée
- Description complète par deux ensembles de variables:
 1. *Les variables de forme*: $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathcal{M} := (\sqrt{3/2}a, +\infty)^4$, où les ξ_i sont les longueurs des bras.
 2. *Les variables de position*: $p = (c, R) \in \mathcal{P} := \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$.
- $z_i := \overline{cS_i}$

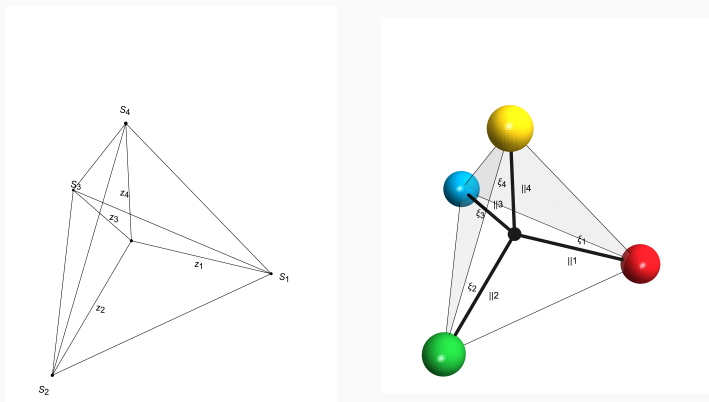


Figure 1: Le tétraèdre de référence et le "parking 4-sphere swimmer" (SPR4).

- Soit $r \in B_a$, la boule centrée à l'origine de rayon $a > 0$. Le point actuel sur B_i est donné par

$$r_i(\xi, p, r) := c + R(\xi_i z_i + r). \quad (1)$$

- Les r_i sont analytiques \rightarrow déduire la vitesse instantanée

$$u_i(\xi, p, r) = \dot{c} + \omega \times (\xi_i z_i + r) + R z_i \dot{\xi}_i, \quad (2)$$

où ω est le vecteur axial associé à la matrice anti-symétrique $\dot{R}R$.

- Système dynamique trouvé dans [1]

$$\dot{p} = F(R, \xi)\dot{\xi} := \begin{pmatrix} F_c(R, \xi) \\ F_\theta(R, \xi) \end{pmatrix} \dot{\xi}, \quad (3)$$

tel que $\dot{c} = F_c(R, \xi)\dot{\xi}$ et $\dot{R} = R_\theta(R, \xi)\dot{\xi}$.

▪

$$F_c(R, \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) \text{ et } F_\theta(R, \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, T_R SO(3)). \quad (4)$$

- Pour $R \in SO(3)$ fixé, on a

$$T_R SO(3) = \{RM \mid M \in \text{Skew}_3(\mathbb{R})\}. \quad (5)$$

- $\dim T_R SO(3) = 3 \implies$ on peut exprimer $F_c(R, \xi), F_\theta(R, \xi)$ des matrices de taille 4×3 , dès qu'on a choisi des bases

- Condition initiale $p_0 = (c_0, R_0) \in \mathcal{P}$
- Courbe de contrôle $\xi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, avec J un voisinage de zéro
- $\gamma(c_0, R_0, \xi) : I \rightarrow \mathcal{P}$ solution associée au système dynamique

$$\dot{p} = F(R, \xi)\dot{\xi}, \quad p(0) := p_0. \quad (6)$$

- $\gamma_c(c_0, R_0, \xi)$ et $\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)$ les projections à \mathbb{R}^3 et $\text{SO}(3)$
- Par définition, on a

$$\dot{\gamma}(c_0, R_0, \xi)(t) = F(\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)(t), \xi(t))\dot{\xi}(t), \forall t \in J. \quad (7)$$

Symétries - Invariance rotationnelle

- Invariance rotationnelle des équations de Stokes \implies

$$\gamma_c(c_0, RR_0, \xi)(t) = R\gamma_c(c_0, R_0, \xi)(t) + (I - R)c_0, \forall t \in J \quad (8)$$

et

$$\gamma_\theta(c_0, RR_0, \xi)(t) = R\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)(t), \forall t \in J \quad (9)$$

- Un calcul montre

Proposition 2.1

Soit $\xi_0 := \xi(0) \in \mathcal{M}$ le point initiale de la courbe de contrôle et notons $T_\xi \mathcal{M}$ l'espace tangent à ξ . Si le système de contrôle 3 est invariant sous rotations et si pour tout $\xi \in \mathcal{M}$ on a $T_\xi \mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$, alors

$$F_c(R, \xi) = RF_c(\xi) \text{ and } F_\theta(R, \xi) = RF_\theta(R, \xi), \forall (R, \xi) \in \text{SO}(3) \times \mathcal{M}, \quad (10)$$

où $F_c(\xi) := F_c(I, \xi)$ et $F_\theta(\xi) := F_\theta(I, \xi)$

Symétries - Permutation des bras

- $P_{ij} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ matrice de permutation t.q. les indices i et j sont échangés
- S_{ij} la réflexion t.q. $||i \mapsto ||j$ et vice-versa dans l'orientation de référence l . En fait, S_{ij} est la réflexion au plan défini par les autres bras $||k$ et $||l$.
- Les équations de Stokes sont invariantes sous changement de point de vue. Avec la position initiale $p_0 := (c, l)$ on en déduit que

$$\gamma_c(c_0, l, P_{ij}\xi) = S_{ij}\gamma_c(S_{ij}c_0, l, \xi) \quad (11)$$

et

$$\gamma_\theta(c_0, l, P_{ij}\xi) = S_{ij}\gamma_\theta(S_{ij}c_0, l, \xi)S_{ij}. \quad (12)$$

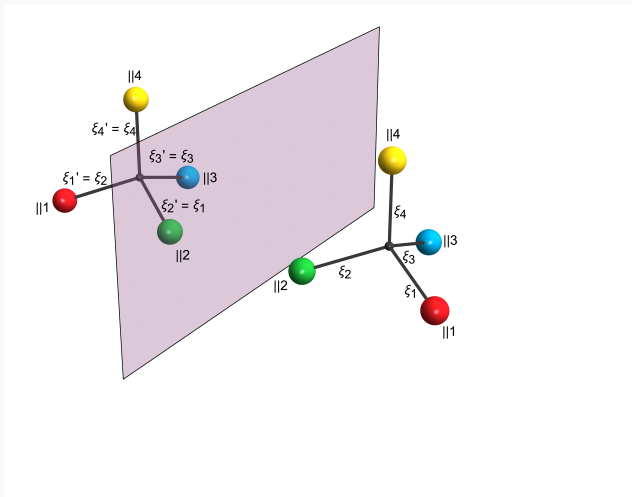


Figure 2: The reflection S_{12} applied to SPR_4 in the reference orientation corresponding to the swap ($||1 \longleftrightarrow ||2$)

- On trouve par un calcul technique

Proposition 2.2

Si le système de contrôle (3) satisfait les équations (11) et (12) et $T_\xi \mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$ pour tout $\xi \in \mathcal{M}$, alors

$$F_c(P_{ij}\xi) = S_{ij}F_c(\xi)P_{ij} \text{ et } F_\theta(P_{ij}\xi) = -S_{ij}F_\theta(\xi)P_{ij}. \forall \xi \in \mathcal{M}. \quad (13)$$

- Attention: Il faut toujours choisir la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ pour \mathbb{R}^4 et la base $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3)$ avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

pour justifier la notation!

Petites courbes

- On a la factorisation

$$F_c(R, \zeta) = RF_c(\zeta) \text{ et } F_\theta(R, \xi) = RF_\theta(\xi), \forall R \in SO(3), \quad (16)$$

où $F_c(\zeta) := F_c(I, \zeta)$ et $F_\theta(\xi) := F_\theta(I, \xi)$.

- On suppose que $\zeta = \xi_0 + \xi$, ξ_0 avec toutes les composantes égales
- $F_{c, \xi_0}(\xi) := F_c(\xi_0 + \xi)$, $F_{\theta, \xi_0}(\xi) := F_\theta(\xi_0 + \xi)$
- Résultat de [1]: F et donc aussi $F_{c, \xi_0}, F_{\theta, \xi_0}$ analytiques
- On fait le développement limité

$$F_{c, \xi_0}(\xi)\eta = F_{c, 0}\eta + \mathcal{H}_{c, 0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta \quad (17)$$

$$F_{\theta, \xi_0}(\xi)\eta = F_{\theta, 0}\eta + \mathcal{H}_{\theta, 0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta, \quad (18)$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}^4$.

- Substitution des conditions de symétrie de F dans le développement limité fournit

$$F_{c,0} = S_{ij}F_{c,0}P_{ij} \quad (19)$$

$$F_{\theta,0} = -S_{ij}F_{\theta,0}P_{ij} \quad (20)$$

$$\mathcal{H}_{c,0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = S_{ij}\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \quad (21)$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = -S_{ij}\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \quad (22)$$

- On veut déterminer les espaces de solutions de ces systèmes d'équations vectorielles.

- Calcul élémentaire pour trouver

$$F_{c,0} = \alpha(z_1|z_2|z_3|z_4), \quad (23)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou bien

$$F_{c,0} = -3\sqrt{3}\alpha[\tau_1|\tau_2|\tau_3]^T, \quad (24)$$

où $\tau_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1, 0)^T$, $\tau_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)^T$,
 $\tau_3 := \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1, -3)^T$ forment une base orthonormale ensemble
avec $\tau_4 := \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$. Cette base sera utile plus tard.

- Des arguments similaires montrent que $F_{\theta,0} = 0$, ce qui est intuitivement clair

- Même approche que [2]

$$A_k := (\mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3 \quad (25)$$

$$B_k := (\mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3. \quad (26)$$

- Ainsi, on a pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \eta \cdot \xi) \hat{e}_k, \quad (27)$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (B_k \eta \cdot \xi) L_k. \quad (28)$$

- À lieu de calculer directement les matrices A_k et B_k , on a calculé leurs parties symétriques et anti-symétriques en utilisant des arguments de symétrie. Notons les parties anti-symétriques

$$M_k := \frac{1}{2}[A_k - A_k^T], k \in \mathbb{N}_3 \quad (29)$$

$$M_{k+3} := \frac{1}{2}[B_k - B_k^T], k \in \mathbb{N}_3, \quad (30)$$

et de façon similaire les parties symétriques $N_k, k \in \mathbb{N}_6$.

Dans la suite seulement les parties anti-symétrique seront importantes:

$$M_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$M_2 = \sqrt{3}\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$M_3 = 2\sqrt{2}\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

$$M_4 = \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$M_5 = \sqrt{3}\delta \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$M_6 = 2\sqrt{2}\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

- Restriction de l'espace des contrôles à $H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$, où $J := [0, 2\pi]$
- $\langle f \rangle := (2\pi)^{-1} \int_J f(t) dt$ pour $f \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$
- Initialement, pour $\zeta \in \mathcal{M}$, le système dynamique s'écrivait

$$\begin{cases} \dot{c} &= RF_c(\zeta)\dot{\zeta} \\ \dot{R} &= RF_{\theta}(\zeta)\dot{\zeta}. \end{cases} \quad (37)$$

- Avec $\zeta = \xi_0 + \xi$, on a autour de $\xi = 0$

$$\begin{cases} \dot{c} &= RF_{c,0}\dot{\xi} + R \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \dot{\xi} \cdot \xi) \hat{e}_k \\ \dot{R} &= R \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (B_k \dot{\xi} \cdot \xi) L_k. \end{cases} \quad (38)$$

- On définit les déplacements nets par

$$\begin{aligned} \delta c : H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \delta p : H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathfrak{so}(3) \\ \xi &\mapsto 2\pi \langle \dot{c}(\xi) \rangle, & \xi &\mapsto 2\pi \langle \dot{R}(\xi) \rangle \end{aligned} \quad (39)$$

- Impossible d'évaluer ces expressions exactement à cause du R dans (38)!
- Un argument du *calcul chronologique* permet de linéariser autour de $R_0 = I$. Ainsi, on trouve

Proposition 3.1

Pour tout $\xi \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$, dans un voisinage de $0 \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$, on a les estimés suivants

$$\begin{aligned} \delta c(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle \hat{e}_k + \mathcal{O}(\|\xi\|_{H_{\sharp}^1}^3), \\ \delta R(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle L_k + \mathcal{O}(\|\xi\|_{H_{\sharp}^1}^4). \end{aligned} \quad (40)$$

- A symétrique $\xrightarrow{I.P.P.} \langle A\dot{\xi} \cdot \dot{\xi} \rangle = -\langle A\dot{\xi} \cdot \dot{\xi} \rangle = 0$ et donc

$$\langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}_3 \quad (41)$$

$$\langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_{k+3} \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}_3 \quad (42)$$

- Par un calcul on obtient

$$M_k \dot{\xi} \cdot \xi = -2\sqrt{6} \alpha \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_{k+1} | \tau_{k+2}), \quad k \in \mathbb{N}_3 \quad (43)$$

$$M_{3+k} \dot{\xi} \cdot \xi = -2\sqrt{6} \delta \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_k | \tau_4), \quad k \in \mathbb{N}_3, \quad (44)$$

où $\{\tau_I\}_{I \in \mathbb{N}_4}$ est la base orthonormée vue précédemment et k est pris mod 3.

- Soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_6}$ la base canonique de \mathbb{R}^6
- Finalement, on trouve

$$\frac{\delta p}{2\pi} = -2\sqrt{6}\alpha \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_{k+1} | \tau_{k+2}) f_k - 2\sqrt{6}\delta \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_k | \tau_4) f_{k+3}, \quad (45)$$

où k est de nouveau pris mod 3.

- Parce que dans (45), il n'y a que les M_k , le déplacement net est décrit à trois paramètres scalaires près.

Optimisation

- Définition d'efficacité selon Lighthill [4]: *Les mouvements optimaux sont ceux qui minimisent la dissipation d'énergie cinétique en atteignant un déplacement net prescrit.*
- La dissipation d'énergie due à un mouvement $\xi \in H^1_{\sharp}(J, \mathbb{R}^4)$ s'écrit par une fonctionnelle d'énergie appropriée

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J \mathfrak{g}(\xi(t)) \dot{\xi}(t) \cdot \dot{\xi}(t) dt. \quad (46)$$

- Sous l'hypothèse des petites courbes de contrôle, on peut supposer que $\mathfrak{g}(\xi) = \mathfrak{g}(0) + o(1)$, avec $\mathfrak{g}(0)$ une matrice symétrique définie positive dans $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$. Ainsi, l'énergie s'écrit

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J Q_{\mathfrak{g}}(\dot{\xi}(t)) dt, \quad (47)$$

avec $Q_{\mathfrak{g}}(\eta) := \mathfrak{g}(0)\eta \cdot \eta$.

Optimisation - Notation

- Les propriétés de symétrie des équations Stokes impliquent en particulier que

$$Q_g(P_{ij}\eta) = Q_g(\eta), \quad i, j \in \mathbb{N}_4. \quad (48)$$

- La matrice G représentant Q_g est de la forme suivante:

$$G = \begin{pmatrix} \kappa & h & h & h \\ h & \kappa & h & h \\ h & h & \kappa & h \\ h & h & h & \kappa \end{pmatrix}, \quad (49)$$

pour deux paramètres h et $\kappa > \max(h, -3h)$.

- On a $G_{\tau_k} = (\kappa - h)\tau_k$ pour $k \in \mathbb{N}_3$ et $G_{\tau_4} = (\kappa + 3h)\tau_4$
- On notera $g_1 := g_2 := g_3 := \kappa - h$ et $g_4 := \kappa + 3h$ t.q.

$$G = U\Lambda_g U^T, \quad U := [\tau_1 | \tau_2 | \tau_3 | \tau_4], \quad \Lambda_g := \text{diag}(g_i). \quad (50)$$

On face le problème d'optimisation: Trouver $\inf_{\xi \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)} \int_J Q_{\mathfrak{g}}(\dot{\xi}(t)) dt$ sous la contrainte

$$\begin{aligned} \delta p = \mathfrak{h}_c \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \left(\int_J \det(\xi(t) | \dot{\xi}(t) | \tau_{k+1} | \tau_{k+2}) dt \right) f_k \\ + \mathfrak{h}_{\theta} \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \left(\int_J \det(\xi(t) | \dot{\xi}(t) | \tau_k | \tau_4) dt \right) f_{k+3} \end{aligned} \quad (51)$$

avec $\mathfrak{h}_c = -2\sqrt{6}\alpha$ et $\mathfrak{h}_{\theta} = -2\sqrt{6}\delta$.

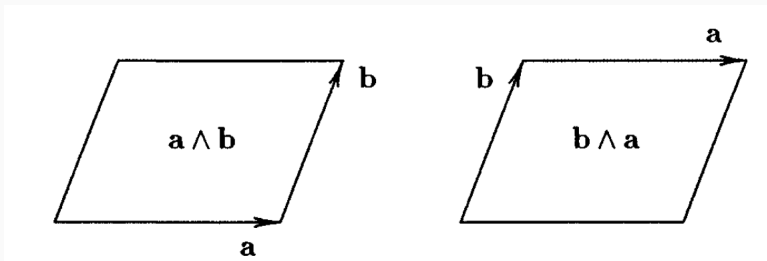


Figure 3: Affichage d'un bivecteur dans \mathbb{R}^3 [5]

- Les bivecteurs forment un espace vectoriel $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ avec une base donnée par

$$\{\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2, \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3, \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3\}, \quad (52)$$

si $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

- Le produit scalaire est donné par

$$(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

- La norme d'un bivecteur $\omega = \omega_{12}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + \omega_{13}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + \omega_{23}\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$ est donnée par

$$|\omega| = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{23}^2}. \quad (54)$$

- Ces idées se généralisent facilement à dimension supérieure. En effet, si $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^4 , alors une base de l'espace $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ est donnée par

$$\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}, \quad (55)$$

où $e_{ij} := e_i \wedge e_j$.

Optimisation - Bivecteurs de \mathbb{R}^4

- Différence fondamentale: $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$, mais $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \not\simeq \mathbb{R}^4$
- $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ implique que tout $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ est *simple*, c'est-à-dire que

$$\forall \omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \exists u, v \in \mathbb{R}^3 : \omega = u \wedge v. \quad (56)$$

- Ceci n'est plus le cas pour $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$, e.g. $e_{12} + e_{34} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ n'est pas simple
- Tout bivecteur de \mathbb{R}^4 est la somme d'au plus deux bivecteurs simples et orthogonaux
- Après passage en Fourier, la contrainte s'identifie à un bivecteur de \mathbb{R}^4 . Si celui-ci est simple, nous pourrions résoudre le problème d'optimisation de façon similaire à [2].
- Critère pour trouver des bivecteurs simples:

Lemma 4.1

un bivecteur $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ est simple si et seulement si $\omega \wedge \omega = 0$.

- On pose $\eta(t) := U^T \xi(t) \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{G}_U(\eta) = \int_J \Lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt, \quad (57)$$

avec $\mathcal{G}_U(\eta) := \mathcal{G}(\xi) = \mathcal{G}(U\eta)$.

- Pour la contrainte, on observe que

$$\det(\xi | \dot{\xi} | \tau_i | \tau_j) = \det U \det(\eta | \dot{\eta} | e_i | e_j) = \det(\dot{\eta} | \eta | e_i | e_j), \quad \det U = -1 \quad (58)$$

- Puis, un calcul montre que

$$\det(\dot{\eta} | \eta | e_k | e_4) = (\dot{\eta} \wedge \eta, e_{k+1} \wedge e_{k+2}), \quad k \in \mathbb{N}_3 \quad (59)$$

$$\det(\dot{\eta} | \eta | e_{k+1} | e_{k+2}) = (\dot{\eta} \wedge \eta, e_k \wedge e_4), \quad k \in \mathbb{N}_3 \quad (60)$$

- Si on envoie maintenant la base canonique $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_6}$ sur la base ordonnée $(e_{14}, e_{24}, e_{34}, e_{23}, e_{31}, e_{12})$ de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$, la contrainte s'écrit

$$\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1} \delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \eta(t) dt, \quad (61)$$

avec $\Lambda_{\mathfrak{h}} := \text{diag}(\mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_\theta, \mathfrak{h}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$.

- Ainsi, le problème d'optimisation devient: Trouver $\inf_{\eta \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)} \int_J \lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \eta(t) dt$ sous la contrainte

$$\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1} \delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \eta(t) dt. \quad (62)$$

- On passe en Fourier car les courbes de contrôle sont 2π - périodiques par définition. On notera

$$\dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) := \{\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}^4)\}. \quad (63)$$

- Expansion en série de Fourier:

$$\eta(t) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \cos(nt)a_n + \sin(nt)b_n, \quad (64)$$

avec $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) \times \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4)$.

Optimisation - Passage en Fourier

- Substitution dans la fonctionnelle d'énergie et la contrainte fournit

$$\mathcal{G}_U(\eta) := \int_J \Lambda_g \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta} dt = \pi \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 (\Lambda_g a_n \cdot a_n + \Lambda_g b_n \cdot b_n) \quad (65)$$

$$= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2, \quad (66)$$

où on a posé

$$\mathbf{u} := (u_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi \Lambda_g} (na_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \mathbf{v} := (v_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi \Lambda_g} (nb_n)_{n \in \mathbb{N}}. \quad (67)$$

et

$$\sqrt{\det \Lambda_g} (\Lambda_h \tilde{\Lambda}_g)^{-1} \delta p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n \wedge u_n}{n}, \quad (68)$$

avec $\tilde{\Lambda}_g := \text{diag}(g_c, g_c, g_c, \sqrt{g_c g_\theta}, \sqrt{g_c g_\theta}, \sqrt{g_c g_\theta})$, où $g_1 := g_2 := g_3 := g_c$ et $g_4 := g_\theta$.

- Ceci prouve le résultat suivant:

Proposition 4.1

La $H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ -minimisation de la fonctionnelle \mathcal{G}_U donnée par (57) sous la contrainte (61) équivaut la minimisation de la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2, \quad (69)$$

définie sur l'espace produit $\ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$ et sous la contrainte

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n = \omega \text{ with } \omega := \sqrt{\det \Lambda_g} (\Lambda_{\mathfrak{h}} \tilde{\Lambda}_g)^{-1} \delta p, \quad (70)$$

où $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3)$ est un déplacement net prescrit un position.

- On observe que $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$. et que ω est simple si et seulement si δp est simple.

- On veut réduire ce problème à un problème en dimension finie (c.f. [2]), i.e. trouver pour toute paire de suites de coefficients de Fourier $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) \times \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4)$ un nombre fini de coefficients de Fourier, i.e. $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in c_{00}(\mathbb{R}^4) \times c_{00}(\mathbb{R}^4)$ tel que

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ et } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \tilde{v}_n \wedge \tilde{u}_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n. \quad (71)$$

- \rightarrow Problème d'optimisation dans \mathbb{R}^N

Le cas simple

Supposons que $\omega = x \wedge y$ est un bivecteur simple. En effet, de manière similaire à [2], on trouve le résultat suivant:

Proposition 5.1

Si ω est un bivecteur simple, alors pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$ tel que la contrainte (70) soit satisfaite, il existe deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^4$ tels que pour les suites $\mathbf{u}_\star := \mathbf{e}_1 u$ et $\mathbf{v}_\star := \mathbf{e}_1 v \in \ell^2(\mathbb{R}^4)$ on ait

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_\star, \mathbf{v}_\star) = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ and } v \wedge u = \omega. \quad (72)$$

Ensuite, la résolution du problème d'optimisation en dimension finie fournit le résultat final:

Theorem 5.1

Soit $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3) \simeq \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ un déplacement net prescrit. De plus, supposons que $\delta p = x \wedge y$ soit un bivecteur simple. Alors, tout minimiseur $\xi \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ de la fonctionnelle d'énergie (47) sous la contrainte (51) est de la forme

$$\xi(t) := (\cos t)a + (\sin t)b, \quad (73)$$

i.e. une ellipse de \mathbb{R}^4 centrée à l'origine et contenu dans le plan défini par les vecteurs a et b . On obtient les vecteurs $a, b \in \mathbb{R}^4$ comme ce qui suit:

Le cas simple - Théorème final

1. On calcule le vecteur ω via la relation

$$\omega := \text{diag} \left(\frac{\sqrt{g_c g_\theta}}{h_c}, \frac{\sqrt{g_c g_\theta}}{h_c}, \frac{\sqrt{g_c g_\theta}}{h_c}, \frac{g_c}{g_\theta}, \frac{g_c}{g_\theta}, \frac{g_c}{g_\theta} \right) \delta p = \tilde{x} \wedge \tilde{y}. \quad (74)$$

Puis on considère deux vecteurs $u, v \in \text{span}\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ tels que

$$|u|^2 = |v|^2 = |\omega| \text{ and } u \cdot v = 0. \quad (75)$$

2. On pose $\hat{\omega} := \omega/|\omega|$ et on calcule les vecteurs a et b via les relations

$$a := \frac{U \Lambda_g^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} u, \quad b := \frac{U \Lambda_g^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} v. \quad (76)$$

Alors, on a $v \wedge u = \omega$ et the la valeur minimum de \mathcal{G} est égale à $|\omega|$.

En outre, les vecteurs a et b sont g -orthogonaux, i.e. par rapport au produit scalaire défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}^4$ par $(x, y)_g := 2\pi \Lambda_g x \cdot y$, et ils on la même g -norme $|a|_g^2 = |b|_g^2 = |\omega|$.

Le cas simple - Exemples de cas simples

- Naturellement, on se pose la question dans quelles situations ω est simple
- On remarque que ce critère est un particulier toujours satisfait dès que les composantes de ω correspondant à un certain indice valent zéro, e.g. $\omega_{i4} = 0$ pour $i \in \mathbb{N}_3$
- Ceci fournit quatre sous-espaces D_{ijk}^* de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ consistant uniquement de bivecteurs simples. Par inspection de notre base choisie pour $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$, on trouve les correspondances suivantes:

$D_{123}^* \longleftrightarrow$ rotations autour toutes les trois axes $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

$D_{124}^* \longleftrightarrow$ translation dans le plan de \hat{e}_1 et \hat{e}_2 , rotation autour de \hat{e}_3

$D_{134}^* \longleftrightarrow$ translation dans le plan de \hat{e}_1 et \hat{e}_3 , rotation autour de \hat{e}_2

$D_{234}^* \longleftrightarrow$ translation dans le plan de \hat{e}_2 et \hat{e}_3 , rotation autour de \hat{e}_1

- En revanche, le bivecteur non-simple $e_{12} + e_{34}$ correspond au déplacement net $e_3 + L_3$, c'est-à-dire un mouvement de vis. Pour ce genre de mouvements on a besoin d'une solution pour le cas général.

Conclusions et perspectives

- On a révélé les symétries du système dynamique qui décrit le micro-nageur SP_{R4} à l'aide des propriétés des équations de Stokes.
- On a identifié la dynamique de SP_{R4} à termes d'ordre élevé près ainsi que le déplacement net. Il reste cinq paramètres scalaires inconnus.
- On a trouvé la structure des courbes de contrôle optimales dans un cas particulier qui décrit déjà une variété de déplacements nets.

- On n'a pas trouvé la solution au problème d'optimisation jusque là. Or, on fait la conjecture suivante: En général, les courbes de contrôle optimales sont des ellipses situées dans un ou au plus deux plans totalement orthogonaux de \mathbb{R}^4 . En outre, la fréquence de la rotation dans un des deux plans est le double de la fréquence dans l'autre plan.

On a les raisons suivantes pour cette conjecture:

1. Dans le cas simple ω définit le plan dans lequel la courbe optimale est située. Or, un bivecteur non-simple représente deux plans totalement orthogonaux. Donc, on estime qu'il y a moyen de construire les coefficients de Fourier qui définissent la courbe optimale à partir de ω aussi dans le cas général.

2. Si on considère l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème d'optimisation (c.f. [3]), on trouve qu'elle s'écrit

$$G\ddot{\xi} - \Omega(\mu)\dot{\xi} = 0, \quad (77)$$

avec $\Omega(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{N}_6} \mu_k M_k$. La matrice $\Omega(\mu)$ étant toujours anti-symétrique, la solution est une rotation dans R^4 , c'est-à-dire elle est située dans deux plans totalement orthogonaux.

3. La dernière partie de la conjecture suit d'un argument de regroupement des suites \mathbf{u} et \mathbf{v} .

- Prouver la conjecture ci-dessus
- Faire l'approximation des bras longs pour simplifier le système encore une fois

Questions ?

References



F. Alouges, A. DeSimone, L. Heltai, A. Lefebvre-Lepot, and B. M. and, “Optimally swimming stokesian robots,” *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, vol. 18, no. 5, pp. 1189–1215, 2013. DOI: 10.3934/dcdsb.2013.18.1189.



F. Alouges and G. D. Fratta, “Parking 3-sphere swimmer. i. energy minimizing strokes,” Sep. 2017. DOI: 10.31219/osf.io/7sfbj.



A. DeSimone, F. Alouges, and A. Lefebvre, “Biological fluid dynamics, non-linear partial differential equations,” in *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*, R. A. Meyers, Ed. New York, NY: Springer New York, 2011, pp. 26–31, ISBN: 978-1-4614-1806-1. DOI: 10.1007/978-1-4614-1806-1_3. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_3.



M. J. Lighthill, “On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small reynolds numbers,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 109–118, May 1952. DOI: 10.1002/cpa.3160050201.



P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, Jun. 15, 2006, 352 pp., ISBN: 0521005515. [Online]. Available: https://www.ebook.de/de/product/2991827/pertti_lounesto_clifford_algebras_and_spinors.html.