Orthogonalisation & Passage en Fourier

À premier ordre, l'énergie dépensée lors d'un mouvement $\xi : I \to \mathbb{R}^4$ (dans $H^1_\#(I, \mathbb{R}^4)$) est donnée par

$$\mathcal{G}(\xi) = \int_I G\dot{\xi} \cdot \dot{\xi} \, dt,$$

avec

$$G = \begin{pmatrix} K & h & h & h \\ h & K & h & h \\ h & h & K & h \\ h & h & h & K \end{pmatrix}, \quad K > \max(h, -3h)$$

positive définie, à cause de la symétrie.

$$G = U \Delta_g U^T, \quad U = [\tau_1 | \tau_2 | \tau_3 | \tau_4]$$

$$\Delta_g = \mathrm{diag}(g_i)$$

$$g_1 = g_2 = g_3 = -h + K$$
$$g_4 = 3h + K.$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-2, 1, 1, 0)^T$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1, 0)^T$$

$$\tau_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (1, 1, 1, -3)^T$$

$$\tau_4 = \frac{1}{2} (1, 1, 1, 1)^T.$$

Ainsi, on peut écrire pour $\eta := U^T \xi$

$$\mathcal{G}_U(\eta) = G(\xi) = \int_I \langle \mathbb{1}_g \dot{\eta} \cdot \dot{\eta} \, dt$$

La contrainte s'écrit

$$\delta p = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle M_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle \lambda_k + 2\pi \sum_{j \in \mathbb{N}_3} \langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle L_j \in \mathbb{R}^6.$$

On définit une nouvelle base de $\mathbb{R}^6$

$$\mathcal{E}' = \{E_1, \dots, E_6\} := \{e_1, e_2, e_3, L_1, L_2, L_3\}$$

pour écrire

$$\delta p = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_6} \langle N_k \dot{\eta} \cdot \eta \rangle ,$$

où $N_k = U^T M_k U \, , \; k \in \mathbb{N}_3$

$N_k = U^T B_{k-3} U \, , \; k = 4, 5, 6.$

PASSAGE EN FOURIER

On peut développer η dans sa série de Fourier i.e.

$$\eta(t) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} - n a_n \sin(nt) + n b_n \cos(nt).$$

Avec Parseval, on obtient en analogie avec (35)

$$\mathcal{G}_u(\eta) = \int_I \Delta_g \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta}(t)\, dt = \pi \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 (\Delta_g a_n \cdot a_n + \Delta_g b_n \cdot b_n)$$

$$= \frac{1}{2} \|\underline{u}\|^2_{\ell^2(\mathbb{R}^4)} + \frac{1}{2} \|\underline{v}\|^2_{\ell^2}(\mathbb{R}^4),$$

$$\underline{u} := (u_n)_n := \sqrt{2\pi \Delta_g}\,(n\, a_n)_n$$

$$\underline{v} := (v_n)_n := \sqrt{2\pi \Delta_g}\,(n\, b_n)_n.$$

Pour la contrainte, on obtient grâce à L^2-orthogonalité

$$\delta p \cdot E_k = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{N}} n\, N_k b_n \cdot a_n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\Delta_g}^{-1} N_k \sqrt{\Delta_g}^{-1}\right) v_n \cdot u_n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \tilde{N}_k v_n \cdot u_n,$$

où on a défini $\tilde{N}_k := \sqrt{\Delta_g}^{-1} N_k \sqrt{\Delta_g}^{-1}.$

$$\Rightarrow \delta p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_3} \tilde{N}_k v_n \cdot u_n\Big) E_k$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}_6} \frac{1}{n} T(v_n, u_n),$$

où, $T(u,v) := \sum_{k\in\mathbb{N}_6} (\tilde{N}_k v \cdot u) E_k$, i.e. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^6)$.

On souhaite de faire la même réduction à un problème de dimension finie que pour (35), i.e. pour n'importe quel $\omega := \delta p \in \mathbb{R}^6$, on veut trouver deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^4$ t.q.

(i) $|u| = \|\underline{u}\|_{\ell^2}$, $|v| = \|\underline{v}\|_{\ell^2}$;

(ii) $T(u,v) = \omega$.

Pour ceci, il faudra résoudre l'équation

$$T(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{|\omega|}{\|\underline{u}\|_{\ell^2}\|\underline{v}\|_{\ell^2}}\hat{\omega},$$

où $\hat{u} = u/|u|$, $\hat{v} = v/|v|$ et $\hat{\omega} = \omega/|\omega|$.

De plus, on aimerait bien que les vecteurs u, v soient contenus dans un certain plan dans $\mathbb{R}^4$.