# Micro-nageurs Stokesiens

## Analyse du micro-nageur "parking 4-sphere swimmer" (SPr4)

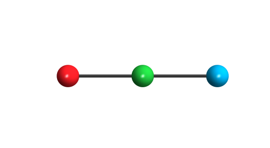
Philipp Weder

CMAP - Ecole Polytechnique

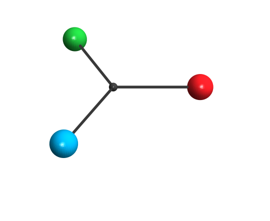
# Introduction

# Introduction

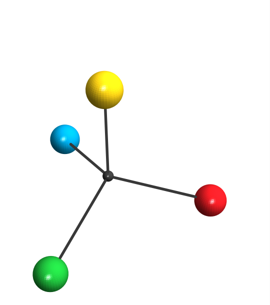
- Premiers résultats sur le sujet par Purcell en 1977, en particulier le "scallop theorem"
- Analyse (partielle) de plusieurs mécanismes de micro-natation



**(a)** 3S



**(b)** SPr3



**(c)** SPr4

**Figure 1:** Exemples de micro-nageurs

# Introduction

- Problème mathématique: Re $\ll 1 \implies$ forces d'inertie négligeables
- Problème de contrôle
- Question supplémentaire: Natation optimal, i.e. problème de contrôle optimale
- Contrôlabilité globale de $\mathrm{SP{\scriptsize R}4}$ démontré dans [1], mais pas explicitement
- Dans ce projet: Analyse du nageur $\mathrm{SP{\scriptsize R}4}$ sous l'hypothèse des mouvements petits de la structure des courbes de contrôle optimales pour une classe particulière de déplacements prescrits.

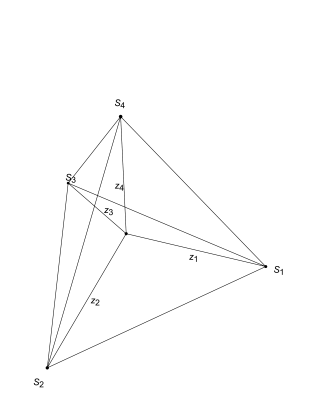
# Table des matières

# Modélisation et symétries

# Notation et modèle

- Tétraèdre de référence avec sommets $(S_1, S_2, S_3, S_4)$ centré à $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{dist}(c, S_i) = 1$
- Quatre boules $B_i$, centrées à $b_i$ de rayon $a > 0$ peuvent bouger le long de la demi-droite d'origine $c$ passant par $S_i$
- La résistance visqueuse des bras est négligée
- Description complète par deux ensembles de variables:
  1. *Les variables de forme:* $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathcal{M} := (\sqrt{3/2}a, +\infty)^4$, où les $\xi_i$ sont les longueurs des bras.
  2. *Les variables de position:* $p = (c, R) \in \mathcal{P} := \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$.
- $z_i := \overline{cS_i}$

# Notation et modèle



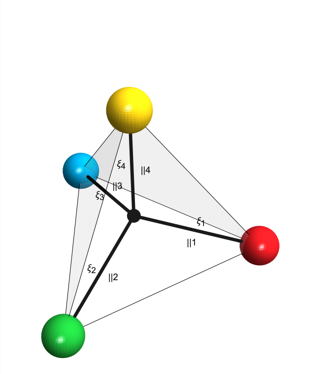




**Figure 2:** Le tétraèdre de référence et le "parking 4-sphere swimmer" (SPR4).

# Notation et modèle

- Système dynamique trouvé dans [1]

$$\dot{p} = F(R,\xi)\dot{\xi} := \begin{pmatrix} F_c(R,\xi) \\ F_\theta(R,\xi) \end{pmatrix} \dot{\xi}, \tag{1}$$

  tel que $\dot{c} = F_c(R,\xi)\dot{\xi}$ et $\dot{R} = F_\theta(R,\xi)\dot{\xi}$.

- $$F_c(R,\xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) \text{ et } F_\theta(R,\xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, T_R\,\mathrm{SO}(3)). \tag{2}$$

  Donc, dès qu'on a fixé des bases, on peut les exprimer comme des matrices de taille $3 \times 4$.

# Symétries

- Investigation du système de contrôle (1) sur la base des symétries des équations de Stokes
- Équations de Stokes $\rightarrow$ invariantes sous rotations et changement de point de vue
- Pour trouver les symétries de $F$ $\rightarrow$ appliquer les transformations correspondantes à une solution, puis différentiation

## Symétries - Invariance rotationnelle

Pour toute rotation $R \in \mathrm{SO}(3)$, on trouve

$$F_c(R,\xi) = RF_c(\xi) \text{ and } F_\theta(R,\xi) = RF_\theta(R,\xi), \quad \forall (R,\xi) \in \mathrm{SO}(3) \times \mathcal{M}_{,}(3)$$

où $F_c(\xi) := F_c(I,\xi)$ et $F_\theta(\xi) := F_\theta(I,\xi)$.

# Symétries - Permutation des bras $||i \leftrightsquigarrow ||j$

- Utiliser l'invariance sous changement de point de vue pour déterminer la symétrie de $F$ sous permutation de deux bras
- $P_{ij} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ matrice de permutation t.q. les indices $i$ et $j$ sont échangés
- $S_{ij}$ la réflexion t.q. $||i \mapsto ||j$ et vice-versa dans l'orientation de référence $I$.

# Symétries - Permutation des bras

$||i \leftrightsquigarrow ||j$ correspond à regarder la trajectoire dans un miroir t.q. $||i \mapsto ||j$ et vice-versa.

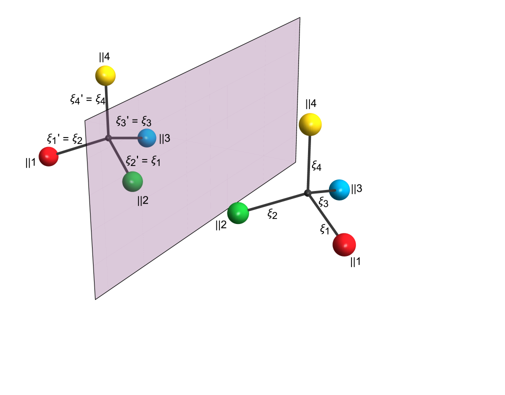



**Figure 3:** La refléxion $S_{12}$ appliquée à $\mathrm{SP{\small R}4}$ dans l'orientation de référence correspondant à l'échangement ($||1 \leftrightsquigarrow ||2$)

# Symétries - Permutation des bras

- On trouve par un calcul technique

$$F_c(P_{ij}\xi) = S_{ij}F_c(\xi)P_{ij} \text{ et } F_\theta(P_{ij}\xi) = -S_{ij}F_\theta(\xi)P_{ij}. \forall \xi \in \mathcal{M}. \tag{4}$$

- Attention: Il faut toujours choisir la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ pour $\mathbb{R}^4$ et la base $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3)$ avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

pour justifier la notation!

# Petites courbes

# Petites courbes - Développement limité

- On a la factorisation

$$F_c(R,\zeta) = RF_c(\zeta) \text{ et } F_\theta(R,\xi) = RF_\theta(\zeta), \forall R \in \mathrm{SO}(3), \tag{7}$$

où $F_c(\zeta) := F_c(I,\zeta)$ et $F_\theta(\zeta) := F_\theta(I,\zeta)$.

- On suppose que $\zeta = \xi_0 + \xi$, $\xi_0$ avec toutes les composantes égales
- $F_{c,\xi_0}(\xi) := F_c(\xi_0 + \xi)$, $F_{\theta,\xi_0}(\xi) := F_\theta(\xi_0 + \xi)$
- Résultat de [1]: $F$ et donc aussi $F_{c,\xi_0}, F_{\theta,\xi_0}$ analytiques
- On fait le développement limité

$$F_{c,\xi_0}(\xi)\eta = F_{c,0}\eta + \mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta \tag{8}$$

$$F_{\theta,\xi_0}(\xi)\eta = F_{\theta,0}\eta + \mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta, \tag{9}$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}^4$.

# Petites courbes - Développement limité

- Substitution des conditions de symétrie de $F$ dans le développement limité fournit

$$F_{c,0} = S_{ij} F_{c,0} P_{ij} \tag{10}$$
$$F_{\theta,0} = -S_{ij} F_{\theta,0} P_{ij} \tag{11}$$

$$\mathcal{H}_{c,0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = S_{ij}\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \tag{12}$$
$$\mathcal{H}_{\theta,0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = -S_{ij}\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \tag{13}$$

- On veut déterminer les espaces de solutions de ces systèmes d'équations vectorielles.

## Petites courbes - Termes d'ordre zéro

- Calcul élémentaire pour trouver

$$F_{c,0} = \mathfrak{a}(z_1|z_2|z_3|z_4), \tag{14}$$

avec $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ ou bien

$$F_{c,0} = -3\sqrt{3}\mathfrak{a}[\tau_1|\tau_2|\tau_3]^T, \tag{15}$$

où $\tau_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1,0)^T$, $\tau_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^T$, $\tau_3 := \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,-3)^T$ forment une base orthonormale ensemble avec $\tau_4 := \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$. Cette base sera utile plus tard.
- Des arguments similaires montrent que $F_{\theta,0} = 0$, ce qui est intuitivement clair.

# Petites courbes - Termes d'ordre un

- Même approche que [3]

$$A_k := (\mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3 \tag{16}$$

$$B_k := (\mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_j) \cdot L_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3. \tag{17}$$

- Ainsi, on a pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \eta \cdot \xi) \hat{e}_k, \tag{18}$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (B_k \eta \cdot \xi) L_k. \tag{19}$$

- À lieu de calculer directement les matrices $A_k$ et $B_k$, on a calculé leurs parties symétriques et anti-symétriques en utilisant des arguments de symétrie. Notons les parties anti-symmétriques

$$M_k := \frac{1}{2}[A_k - A_k^T], k \in \mathbb{N}_3 \tag{20}$$

$$M_{k+3} := \frac{1}{2}[B_k - B_k^T], k \in \mathbb{N}_3. \tag{21}$$

# Petites courbes - Termes d'ordre un

Dans la suite seulement les parties anti-symétrique seront importantes:

$$M_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$M_2 = \sqrt{3}\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$M_3 = 2\sqrt{2}\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

# Petites courbes - Termes d'ordre un

$$M_4 = \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$M_5 = \sqrt{3}\delta \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$M_6 = 2\sqrt{2}\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

# Petites courbes - Linéarisation

- Restriction de l'espace des contrôles à $H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4)$, où $J := [0, 2\pi]$
- $\langle f \rangle := (2\pi)^{-1} \int_J f(t)dt$ pour $f \in H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4)$
- Dans la partie précédente, on a trouve que pour $\zeta = \xi_0 + \xi$, on a autour de $\xi = 0$

$$\begin{cases} \dot{c} & = RF_{c,0}\dot{\xi} + R\sum_{k\in\mathbb{N}_3}(A_k\dot{\xi}\cdot\xi)\hat{e}_k \\ \dot{R} & = R\sum_{k\in\mathbb{N}_3}(B_k\dot{\xi}\cdot\xi)L_k. \end{cases} \tag{28}$$

# Petites courbes - Linéarisation

- On définit les déplacements nets par

$$\begin{aligned} \delta c : & H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4) \to \mathbb{R}^3, & \delta R : & H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4) \to \mathfrak{so}(3) \\ & \xi \mapsto 2\pi \langle \dot{c}(\xi) \rangle, & & \xi \mapsto 2\pi \langle \dot{R}(\xi) \rangle \end{aligned} \tag{29}$$

- Impossible d'évaluer ces expressions exactement à cause du $R$ dans (28)!
- Un argument du *calcul chronologique* permet de linéariser autour de $R_0 = I$. Ainsi, on trouve

**Proposition 3.1**

*Pour tout $\xi \in H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4)$, dans un voisinage de $0 \in H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4)$, on a les estimes suivants*

$$\begin{aligned} \delta c(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle \hat{e}_k + \mathcal{O}(||\xi||^3_{H^1_\sharp}), \\ \delta R(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle L_k + \mathcal{O}(||\xi||^4_{H^1_\sharp}). \end{aligned} \tag{30}$$

# Petites courbes - Linéarisation & déplacements nets

- $A$ symétrique $\overset{I.P.P.}{\Longrightarrow} \langle A\xi \cdot \dot{\xi}\rangle = -\langle A\xi \cdot \dot{\xi}\rangle = 0$ et donc

$$\langle A_k\dot{\xi} \cdot \xi\rangle = \langle M_k\dot{\xi} \cdot \xi\rangle, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_3 \tag{31}$$

$$\langle B_k\dot{\xi} \cdot \xi\rangle = \langle M_{k+3}\dot{\xi} \cdot \xi\rangle, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_3 \tag{32}$$

- Si on note $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_6}$ la base canonique de $\mathbb{R}^6$, un calcul montre que

$$\frac{\delta p}{2\pi} = -2\sqrt{6}\alpha \sum_{k\in\mathbb{N}_3} \langle \det(\xi|\dot{\xi}|\tau_{k+1}|\tau_{k+2})\rangle f_k - 2\sqrt{6}\delta \sum_{k\in\mathbb{N}_3} \langle \det(\xi|\dot{\xi}|\tau_k|\tau_4)\rangle f_{k+3}, \tag{33}$$

  où $k$ pris mod 3.

- En particulier, on peut décrire les déplacements nets à deux paramètres scalaires près.

# Optimisation

## Optimisation - Notation

- Définition d'efficacité selon Lighthill [5]: *Les mouvements optimaux sont ceux qui minimisent la dissipation d'énergie cinétique en atteignant un déplacement net prescrit.*
- La dissipation d'énergie due à un mouvement $\xi \in H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4)$ s'écrit par une fonctionnelle d'énergie appropriée

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J \mathfrak{g}(\xi(t))\dot{\xi}(t) \cdot \dot{\xi}(t)\mathrm{d}t. \tag{34}$$

- Sous l'hypothèse des petites courbes de contrôle, on peut supposer que $\mathfrak{g}(\xi) = \mathfrak{g}(0) + o(1)$, avec $\mathfrak{g}(0)$ une matrice symétrique définie positive dans $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$. Ainsi, l'énergie s'écrit

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J Q_\mathfrak{g}(\dot{\xi}(t))\mathrm{d}t, \tag{35}$$

avec $Q_\mathfrak{g}(\eta) := \mathfrak{g}(0)\eta \cdot \eta$.

## Optimisation - Notation

- Les propriétés de symétrie des équations Stokes impliquent en particulier que

$$Q_{\mathfrak{g}}(P_{ij}\eta) = Q_{\mathfrak{g}}(\eta),\ i, j \in \mathbb{N}_4. \tag{36}$$

- La matrice $G$ représentant $Q_{\mathfrak{g}}$ est de la forme suivante:

$$G = \begin{pmatrix} \kappa & h & h & h \\ h & \kappa & h & h \\ h & h & \kappa & h \\ h & h & h & \kappa \end{pmatrix}, \tag{37}$$

  pour deux paramètres $h$ et $\kappa > \max(h, -3h)$.
- On a $G\tau_k = (\kappa - h)\tau_k$ pour $k \in \mathbb{N}_3$ et $G\tau_4 = (\kappa + 3h)\tau_4$
- On notera $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{g}_2 := \mathfrak{g}_3 := \kappa - h$ et $\mathfrak{g}_4 := \kappa + 3h$ t.q.

$$G = U\Lambda_{\mathfrak{g}}U^T, \quad U := [\tau_1|\tau_2|\tau_3|\tau_4], \quad \Lambda_{\mathfrak{g}} := \mathrm{diag}(\mathfrak{g}_i). \tag{38}$$

# Optimisation - Notation

On face le problème d'optimisation: Minimiser $\int_J Q_{\mathfrak{g}}(\dot{\xi}(t))\mathrm{d}t$ sous la contrainte

$$\begin{aligned}\delta p = \mathfrak{h}_c \sum_{k\in\mathbb{N}_3} \left(\int_J \det(\xi(t)|\dot{\xi}(t)|\tau_{k+1}|\tau_{k+2})\mathrm{d}t\right) f_k \\ +\mathfrak{h}_\theta \sum_{k\in\mathbb{N}_3} \left(\int_J \det(\xi(t)|\dot{\xi}(t)|\tau_k|\tau_4)\mathrm{d}t\right) f_{k+3}\end{aligned} \quad (39)$$

avec $\mathfrak{h}_c = -2\sqrt{6}\alpha$ et $\mathfrak{h}_\theta = -2\sqrt{6}\delta$.

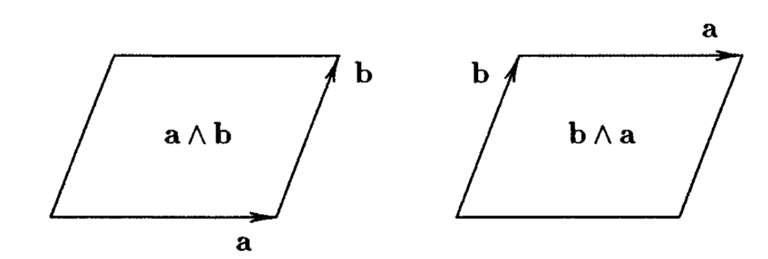



**Figure 4:** Affichage d'un bivecteur dans $\mathbb{R}^3$ [6]

- Les bivecteurs forment un espace vectoriel $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ avec une base donnée par
$$\{\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2, \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3, \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3\}, \tag{40}$$
si $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Le produit scalaire est donné par

$$(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

- La norme d'un bivecteur $\omega = \omega_{12}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + \omega_{13}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + \omega_{23}\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$ est donnée par

$$|\omega| = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{23}^2}. \tag{42}$$

- Ces idées se généralisent facilement à dimension supérieure. En effet, si $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, alors une base de l'espace $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ est donnée par

$$\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}, \tag{43}$$

où $e_{ij} := e_i \wedge e_j$.

# Optimisation - Bivecteurs de $\mathbb{R}^4$

- Différence fondamentale: $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$, mais $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \not\simeq \mathbb{R}^4$
- $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ implique que tout $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ est *simple*, c'est-à-dire que

$$\forall \omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \exists u, v \in \mathbb{R}^3 : \omega = u \wedge v. \tag{44}$$

- Ceci n'est plus le cas pour $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$, e.g. $e_{12} + e_{34} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ n'est pas simple
- Après passage en Fourier, la contrainte s'identifiera à un bivecteur de $\mathbb{R}^4$. Si celui-ci est simple, nous pourrons résoudre le problème d'optimisaton de façon similaire à [3].

# Optimisation - G-Orthogonalisation

- On pose $\eta(t) := U^T\xi(t) \in H^1_\sharp(J, R^4)$, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{G}_U(\eta) = \int_J \Lambda_{\mathfrak{g}}\dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta}(t)\mathrm{d}t, \tag{45}$$

  avec $\mathcal{G}_U(\eta) := \mathcal{G}(\xi) = \mathcal{G}(U\eta)$.

- Si on envoie $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_6}$ vers une certaine base de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$, on trouve

$$\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1}\delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \eta(t)\mathrm{d}t, \tag{46}$$

  avec $\Lambda_{\mathfrak{h}} := \mathrm{diag}(\mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_\theta, \mathfrak{h}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$.

- Ainsi, le problème d'optimisation devient: Minimiser $\int_J \Lambda_{\mathfrak{g}}\dot{\eta}(t) \cdot \eta(t)\mathrm{d}t$ sous la contrainte

$$\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1}\delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \dot{\eta}(t)\mathrm{d}t. \tag{47}$$

# Optimisation - Passage en Fourier

- On passe en Fourier car les courbes de contrôle sont $2\pi$- périodiques par définition. On notera

$$\dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) := \{\mathrm{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}^4)\}. \tag{48}$$

- Expansion en série de Fourier:

$$\eta(t) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \cos(nt)a_n + \sin(nt)b_n, \tag{49}$$

avec $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) \times \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4)$.

# Optimisation - Passage en Fourier

- Substitution dans la fonctionnelle d'énergie et la contrainte fournit

$$\mathcal{G}_U(\eta) := \int_J \Lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta} dt = \pi \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 (\Lambda_{\mathfrak{g}} a_n \cdot a_n + \Lambda_{\mathfrak{g}} b_n \cdot b_n) \tag{50}$$

$$= \frac{1}{2} ||\mathrm{u}||^2_{\ell^2(\mathbb{R}^4)} + \frac{1}{2} ||\mathrm{v}||^2_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}, \tag{51}$$

où on a posé

$$\mathrm{u} := (u_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi \Lambda_{\mathfrak{g}}} (n a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \tag{52}$$

$$\mathrm{v} := (v_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi \Lambda_{\mathfrak{g}}} (n b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \tag{53}$$

et

$$\sqrt{\det \Lambda_{\mathfrak{g}}} (\Lambda_{\mathfrak{h}} \tilde{\Lambda}_{\mathfrak{g}})^{-1} \delta p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n \wedge u_n}{n}, \tag{54}$$

avec $\tilde{\Lambda}_{\mathfrak{g}} := \operatorname{diag}(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c, \sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}, \sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}, \sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta})$, où $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{g}_2 := \mathfrak{g}_3 := \mathfrak{g}_c$ et $\mathfrak{g}_4 := \mathfrak{g}_\theta$.

## Optimisation - Passage en Fourier

- Ceci prouve le résultat suivant:

**Proposition 4.1**

*La $H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4)$-minimisation de la fonctionelle $\mathcal{G}_U$ donnée par (45) sous la contrainte (46) équivaut la minimisation de la fonctionnelle*

$$\mathcal{F}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) := \frac{1}{2}||\mathrm{u}||^2_{\ell^2(\mathbb{R}^4)} + \frac{1}{2}||\mathrm{v}||^2_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}, \tag{55}$$

*définie sur l'espace produit $\ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$ et sous la contrainte*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n = \omega \textit{ with } \omega := \sqrt{\det \Lambda_{\mathfrak{g}}}(\Lambda_{\mathfrak{h}} \tilde{\Lambda}_{\mathfrak{g}})^{-1} \delta p, \tag{56}$$

*où $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3)$ est un déplacement net préscrit en position.*

- On observe que $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ et que $\omega$ est simple si et seulement si $\delta p$ est simple.

## Optimisation - Passage en Fourier

- On veut réduire ce problème à un problème en dimension finie (c.f. [3]), i.e. trouver pour toute paire de suites de coefficients de Fourier $(\mathrm{u},\mathrm{v}) \in \ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$ un nombre fini de coefficients de Fourier, i.e. $(\tilde{\mathrm{u}},\tilde{\mathrm{v}}) \in c_{00}(\mathbb{R}^4) \times c_{00}(\mathbb{R}^4)$ tel que

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathrm{u}},\tilde{\mathrm{v}}) = \mathcal{F}(\mathrm{u},\mathrm{v}) \text{ et } \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \tilde{v}_n \wedge \tilde{u}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n. \qquad (57)$$

- $\rightarrow$ Problème d'optimisation dans $\mathbb{R}^N$

# Le cas simple

# Le cas simple - Réduction à dimension finie

Supposons que $\omega = x \wedge y$ est un bivecteur simple. En effet, de manière similaire à [3], on trouve le résultat suivant:

**Proposition 5.1**

*Si* $\omega$ *est un bivecteur simple, alors pour tout* $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$ *tel que la contrainte (56) soit satisfaite, il existe deux vecteurs* $u, v \in \mathbb{R}^4$ *tels que pour les suites* $\mathsf{u}_\star := \mathsf{e}_1 u$ *et* $\mathsf{v}_\star := \mathsf{e}_1 v \in \ell^2(\mathbb{R}^4)$ *on ait*

$$\mathcal{F}(\mathsf{u}_\star, \mathsf{v}_\star) = \mathcal{F}(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \text{ and } v \wedge u = \omega. \tag{58}$$

Ensuite, la résolution du problème d'optimisation en dimension finie fournit le résultat final:

**Theorem 5.1**

*Soit* $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3) \simeq \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ *un déplacement net prescrit. De plus, supposons que* $\delta p = x \wedge y$ *soit un bivecteur simple. Alors, tout minimiseur* $\xi \in H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4)$ *de la fonctionnelle d'énergie (35) sous la contrainte (39) est de la forme*

$$\xi(t) := (\cos t)a + (\sin t)b, \tag{59}$$

*i.e. une ellipse de* $\mathbb{R}^4$ *centrée à l'origine et contenu dans le plan défini par les vecteurs* $a$ *et* $b$*. On obtient les vecteurs* $a, b \in \mathbb{R}^4$ *comme ce qui suit:*

1. On calcule le vecteur $\omega$ via la relation

$$\omega := \mathrm{diag}\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{g}_c\mathfrak{g}_\theta}}{\mathfrak{h}_c}, \frac{\sqrt{\mathfrak{g}_c\mathfrak{g}_\theta}}{\mathfrak{h}_c}, \frac{\sqrt{\mathfrak{g}_c\mathfrak{g}_\theta}}{\mathfrak{h}_c}, \frac{\mathfrak{g}_c}{\mathfrak{g}_\theta}, \frac{\mathfrak{g}_c}{\mathfrak{g}_\theta}, \frac{\mathfrak{g}_c}{\mathfrak{g}_\theta}\right)\delta p = \tilde{x} \wedge \tilde{y}. \quad (60)$$

   Puis on considère deux vecteurs $u, v \in \mathrm{span}\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ tels que

$$|u|^2 = |v|^2 = |\omega| \text{ and } u \cdot v = 0. \quad (61)$$

2. On pose $\hat{\omega} := \omega/|\omega|$ et on calcule les vecteurs a$a$ et $b$ via les relations

$$a := \frac{U\Lambda_{\mathfrak{g}}^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}u, \quad b := \frac{U\Lambda_{\mathfrak{g}}^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}v. \quad (62)$$

Alors, on a $v \wedge u = \omega$ et the la valeur minimum de $\mathcal{G}$ est égale à $|\omega|$.

En outre, les vecteurs $a$ et $b$ sont $\mathfrak{g}$-orthogonaux, i.e. par rapport au produit scalaire défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}^4$ par $(x, y)_{\mathfrak{g}} := 2\pi\Lambda_{\mathfrak{g}}x \cdot y$, et ils on la même $\mathfrak{g}$-norme $|a|_{\mathfrak{g}}^2 = |b|_{\mathfrak{g}}^2 = |\omega|$.

# Conclusions et perspectives

# Conclusions

- Détermination des symétries du système dynamique qui décrit le micro-nageur $\mathrm{SP{\small R}4}$ à l'aide des propriétés des équations de Stokes.
- Identification de la dynamique de $\mathrm{SP{\small R}4}$ à termes d'ordre élevé près sous l'hypothèse des petites courbes de contrôle ainsi que le déplacement net. Il reste cinq paramètres scalaires inconnus.
- Structure des courbes de contrôle optimales dans un cas particulier qui décrit déjà une variétés de déplacements nets.

# Conjecture

- Pas de solution pour le problème d'optimisation général.
- Conjecture: En général, les courbes de contrôle optimales sont des ellipses situées dans un ou au plus deux plans totalement orthogonaux de $\mathbb{R}^4$. En outre, la fréquence de la rotation dans un des deux plans et le double de la fréquence dans l'autre plan.

On a les raisons suivantes pour cette conjecture:

1. Dans le cas simple $\omega$ définit le plan dans lequel la courbe optimale est située. Or, un bivecteur non-simple représente deux plans totalement orthogonaux. $\rightarrow$ Construire les quatre coefficients de Fourier à partir des deux plans définis par $\omega$

2. L'équation d'Euler-Lagrange associée au problème d'optimisation (c.f. [4]) s'écrit:
$$G\ddot{\xi} - \Omega(\mu)\dot{\xi} = 0, \tag{63}$$
avec $\Omega(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{N}_6} \mu_k M_k$. La matrice $\Omega(\mu)$ étant toujours anti-symétrique, la solution est une rotation dans $R^4$, c'est-à-dire elle est située dans deux plans totalement orthogonaux.
3. La dernière partie de la conjecture suit d'un argument de regroupement des suites u et v.

# Perspectives

- Prouver la conjecture ci-dessus
- Faire l'approximation des bras longs comme dans [2] pour simplifier le système encore une fois et déterminer les paramètres inconnus en termes de $\xi_0$ et $a$

# Questions ?

# References

F. Alouges, A. DeSimone, L. Heltai, A. Lefebvre-Lepot, and B. M. and, “Optimally swimming stokesian robots,” *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, vol. 18, no. 5, pp. 1189–1215, 2013. DOI: 10.3934/dcdsb.2013.18.1189.

F. Alouges and G. D. Fratta, “Parking 3-sphere swimmer: II. the long-arm asymptotic regime,” *The European Physical Journal E*, vol. 43, no. 2, Feb. 2020. DOI: 10.1140/epje/i2020-11932-5.

——, “Parking 3-sphere swimmer. i. energy minimizing strokes,”, Sep. 2017. DOI: 10.31219/osf.io/7sfbj.

- A. DeSimone, F. Alouges, and A. Lefebvre, "Biological fluid dynamics, non-linear partial differential equations," in *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*, R. A. Meyers, Ed. New York, NY: Springer New York, 2011, pp. 26–31, ISBN: 978-1-4614-1806-1. DOI: 10.1007/978-1-4614-1806-1_3. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_3.
- M. J. Lighthill, "On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small reynolds numbers," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 109–118, May 1952. DOI: 10.1002/cpa.3160050201.
- P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, Jun. 15, 2006, 352 pp., ISBN: 0521005515. [Online]. Available: https://www.ebook.de/de/product/2991827/pertti_lounesto_clifford_algebras_and_spinors.html.