

# Soutenance de stage - disposition détaillée

Philipp Weder

30 août 2020

## 1 Mot de bienvenue

- Bonjour à tous....
- Pendant mon stage, je me suis occupé du sujet de la *natation à l'échelle microscopique*. Plus précisément, j'ai analysé un micro-nageur, qu'on a appelé "parking 4-sphere swimmer" (SPR4) que je vais vous présenter tout de suite. Mais commençons par le début...

## 2 Introduction

- Edward Purcell était le premier à publier ses idées sur la natation à l'échelle microscopique en 1977 dans son papier "Life at low Reynolds number" [5]. En particulier, il a démontré le fameux "scallop theorem" qui dit qu'une coquille Saint Jacques microscopique ne peut pas nager.
- Cette observation a motivé la recherche pour le mécanisme le plus simple de natation à l'échelle microscopique. Jusque là, des nombreux tels mécanismes ont été analysés, au moins partiellement. Voici, trois exemple : Le nageur 3S à gauche qui ne peut se déplacer sur une droite, le nageur SPR3 dont on sait de [2] qu'il peut se déplacer dans un plan et puis le nageur SPR4 qui a été traité dans ce projet.
- Le problème mathématique principal est qu'à l'échelle microscopique le nombre de Reynolds  $Re = \rho u L / \mu$  est très bas, ce qui entraîne que dans les équations de Navier-Stokes les forces d'inertie deviennent négligeables. Par conséquent, un micro-nageur ne peut utiliser que les forces visqueuses pour se déplacer. Plus précisément, un micro-nageur est régi par les équations de Stokes qui sont linéaires et réversibles par rapport au temps. Ceci implique en particulier qu'un mouvement réciproque ne contribuera pas au déplacement !
- En termes mathématiques, on face on problème de contrôlabilité, c'est-à-dire on veut trouver un mécanisme pour nager avec un nombre le plus petit possible de contrôles tel que l'on puisse atteindre n'importe quelle position dans l'espace avec une suite de mouvements périodiques.
- Une question supplémentaire naturelle est celle de la natation optimale, c'est-à-dire trouver les mouvements optimaux par rapport à la consommation d'énergie.
- Pour le nageur SPR4, le problème de contrôlabilité a déjà été résolu dans [1]. Or, on n'a pas encore des expressions explicites.
- Dans mon projet, j'ai analysé le nageur SPR4 analytiquement sous l'hypothèse que les mouvements soient petits. Ensuite, j'ai essayé sous la même hypothèse de trouver la structure des courbes de contrôle optimales. Portant, je n'y suis parvenu que pour une classe particulière de déplacements prescrits. Bien sûr, on a également exploré le cas général.

## 3 Structure du projet

La structure du reste de la présentation est comme ce qui suit :

- (i) Tout d'abord, je vais vous présenter le modèle mathématique qui a été introduit dans [1] et je vais vous montrer les propriétés de symétrie satisfaites par le système de contrôle en question.

- (ii) Ensuite, je vais introduire l'hypothèse des courbes de contrôle petites et je vais présenter les implications qui en résultent pour notre système de contrôle.
- (iii) Puis, je parlerai du problème d'optimisation associé dont on verra la solution dans un cas particulier.
- (iv) Finalement, j'aborderai les perspectives sur le sujet et je présenterai la conjecture sur le cas général, qu'on a faite à la fin du projet.

## 4 Modélisation et symétries

### 4.1 Notation et modèle

- Pour le modèle du nageur vu avant, on se donne un tétraèdre de référence avec sommets  $(S_1, S_2, S_3, S_4)$  centré à  $c \in \mathbb{R}^4$  tel que  $\text{dist}(c, S_i) = 1$ .
  - Alors le nageur SPR4 consiste de quatre boules  $B_i$  centrées à  $b_i$  de rayon  $a > 0$  telles que la boule  $B_i$  peut bouger le long de la demi-droite d'origine  $c$  passant par  $S_i$ .
  - Donc, on est dans la situation où les quatre boules sont reliées à  $c$  par des bras très fin, qui peuvent s'allonger et se rétracter. Or, on néglige la résistance visqueuse des bras. De plus, il n'y a aucune restriction pour l'orientation du nageur dans le fluide, c'est-à-dire à longueurs de bras fixés, le nageur est juste un corps rigide dans un fluide Stokesien.
  - La configuration géométrique est complètement décrite par deux ensembles de variables :
    - (i) *Les variables de forme* :  $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathcal{M} := (\sqrt{3/2}a, +\infty)^4$ , où les  $\xi_i$  sont les longueurs des bras.
    - (ii) *Les variables de position* :  $p = (c, R) \in \mathcal{P} := \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ .
- De plus, on pose  $z_i := \overline{S_i c}$ .
- Dans [1], il a été montré comment  $p$  change si on varie  $\xi$ . Plus précisément, on a le système dynamique suivant :

$$\dot{p} = F(R, \xi) \dot{\xi} := \begin{pmatrix} F_c(R, \xi) \\ F_\theta(R, \xi) \end{pmatrix} \dot{\xi}, \quad (1)$$

tel que  $\dot{c} = F_c(R, \xi) \dot{\xi}$  et  $\dot{R} = R_\theta(R, \xi) \dot{\xi}$ .

- On remarque qu'on a

$$F_c(R, \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) \text{ et } F_\theta(R, \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, T_R \text{SO}(3)). \quad (2)$$

Donc, dès qu'on a fixé des bases, on peut les exprimer comme des matrices de taille  $3 \times 4$ .

### 4.2 Symétries

- Passons à l'investigation du système de contrôle (1) sur la base des symétries satisfaites par les équations de Stokes.
- Notamment, les équations de Stokes sont invariantes sous rotations et sous changement de point de vue.
- Donc, on a appliqué les transformations correspondantes à une solution du système dynamique et puis on a déterminée comment  $F$  se transforme par différentiation.

#### 4.2.1 Invariance rotationnelle

De l'invariance rotationnelle des équations de STokes, on déduit que pour toute rotation  $R \in \text{SO}(3)$ , on a

$$F_c(R, \xi) = R F_c(\xi) \text{ and } F_\theta(R, \xi) = R F_\theta(R, \xi), \quad \forall (R, \xi) \in \text{SO}(3) \times \mathcal{M}, \quad (3)$$

où  $F_c(\xi) := F_c(I, \xi)$  et  $F_\theta(\xi) := F_\theta(I, \xi)$ .

#### 4.2.2 Permutation des bras

- On veut profiter de l'invariance des équations de Stokes sous changement de point de vue pour déterminer comment  $F$  se transforme lors d'une permutations de deux bras.

- Notons  $P_{ij} \in M4 \times 4(\mathbb{R})$  la matrice de permutation qui échange les indices  $i$  et  $j$  d'un vecteur. Cette transformation appliquée à l'espace de contrôles  $\mathcal{M}$  signifie la permutation des bras  $i||$  et  $j||$ .
- Soit  $S_{ij}$  la réflexion qui envoie  $i||$  sur  $j||$  dans  $\mathcal{P}$ .
- En effet, la permutation des bras  $||i$  et  $||j$  correspond à regarder la trajectoire dans un miroir qui envoie le bras  $||i$  sur  $||j$ , i.e. qui correspond à  $S_{ij}$ . Ainsi, on peut exploiter l'invariance des équations de Stokes.
- À l'aide d'un calcul un peu plus technique, on trouve le résultat suivant :

$$F_c(P_{ij}\xi) = S_{ij}F_c(\xi)P_{ij} \text{ et } F_\theta(P_{ij}\xi) = -S_{ij}F_\theta(\xi)P_{ij}, \forall \xi \in \mathcal{M}. \quad (4)$$

- Attention : Il faut toujours choisir la base canonique  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  pour  $\mathbb{R}^4$  et la base  $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3)$  avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

pour justifier la notation dans l'équation à droite dans la proposition.

## 5 Régime des petites courbes de contrôle

- Maintenant, on a envie d'exploiter les propriétés de symétrie de  $F$  de la partie précédente. Pour faire ceci, attaquons  $F$  du côté analytique.
- On part de la factorisation

$$F_c(R, \zeta) = RF_c(\zeta) \text{ et } F_\theta(R, \xi) = RF_\theta(\xi), \forall R \in \text{SO}(3), \quad (8)$$

où  $F_c(\zeta) := F_c(I, \zeta)$  et  $F_\theta(\xi) := F_\theta(I, \xi)$ . Puis, supposons que  $\zeta = \xi_0 + \xi$ , où  $\xi_0$  a toutes les composantes égales. Finalement, posons  $F_{c, \xi_0}(\xi) := F_c(\xi_0 + \xi)$  et  $F_{\theta, \xi_0}(\xi) := F_\theta(\xi_0 + \xi)$ .

- Il a été démontré dans [1] que  $F$  et donc  $F_{c, \xi_0}$  et  $F_{\theta, \xi_0}$  sont analytiques. Par conséquent, nous avons le droit de faire le développement limité suivant :

$$F_{c, \xi_0}(\xi)\eta = F_{c, 0}\eta + \mathcal{H}_{c, 0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta \quad (9)$$

$$F_{\theta, \xi_0}(\xi)\eta = F_{\theta, 0}\eta + \mathcal{H}_{\theta, 0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta, \quad (10)$$

où  $F_{c, 0} := F_c(\xi_0) \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{H}_{c, 0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$  représente la dérivée d'ordre 1 de  $F_{c, \xi_0}$  à  $\xi = 0$ .  $F_{\theta, \xi}$  est défini de façon analogue.

- Pour les termes d'ordre zéro on peut montrer que

$$F_{c, 0} = S_{ij}F_{c, 0}P_{ij} \quad (11)$$

$$F_{\theta, 0} = -S_{ij}F_{\theta, 0}P_{ij} \quad (12)$$

ainsi que pour les termes d'ordre un que

$$\mathcal{H}_{c, 0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = S_{ij}\mathcal{H}_{c, 0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \quad (13)$$

$$\mathcal{H}_{\theta, 0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = -S_{ij}\mathcal{H}_{\theta, 0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \quad (14)$$

- Donc, on dispose de deux grands systèmes d'équations vectorielles, dont on veut déterminer l'espace de solutions.

### 5.1 Termes d'ordre zéro

- Un calcul élémentaire, qui n'utilise que (11) et les propriétés des  $S_{ij}$  montre que

$$F_{c,0} = \mathfrak{a}(z_1|z_2|z_3|z_4), \quad (15)$$

avec  $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$  ou bien

$$F_{c,0} = -3\sqrt{3}\mathfrak{a}[\tau_1|\tau_2|\tau_3]^T, \quad (16)$$

où  $\tau_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1, 0)^T$ ,  $\tau_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)^T$ ,  $\tau_3 := \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1, -3)^T$  forment une base orthonormale ensemble avec  $\tau_4 := \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$ . Cette base orthonormale sera utile plus tard.

### 5.2 Termes d'ordre un

- Pour déterminer les termes d'ordre un, on a suivi l'approche dans [2], où on a évalué les tenseurs sur la base canonique et où on a posé

$$A_k := (\mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3 \quad (17)$$

$$B_k := (\mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3. \quad (18)$$

Ainsi, on a pour tout  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \eta \cdot \xi) \hat{e}_k, \quad (19)$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (B_k \eta \cdot \xi) L_k. \quad (20)$$

- À lieu de calculer directement les matrices  $A_k$  et  $B_k$ , on a calculé leurs parties symétriques et anti-symétriques en utilisant des arguments de symétrie. En fait, seulement les parties anti-symétriques seront importantes pour la suite. Notons-les

$$M_k := \frac{1}{2}[A_k - A_k^T], k \in \mathbb{N}_3 \quad (21)$$

$$M_{k+3} := \frac{1}{2}[B_k - B_k^T], k \in \mathbb{N}_3. \quad (22)$$

- Finalement, il ne reste que 5 paramètres inconnus dans les matrices  $A_k$  et  $B_k$ .

### 5.3 Linéarisation

- Maintenant, on se donne un espace pour les courbes, notamment  $H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , où  $J := [0, 2\pi]$ .
- On notera  $\langle f \rangle := (2\pi)^{-1} \int_J f(t) dt$  pour  $f \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$  la moyenne d'une fonction. Puis dans la partie précédente, on a posé  $\zeta = \xi_0 + \xi$  et un développement limité autour de  $\xi = 0$  nous a fourni le système simplifié

$$\begin{cases} \dot{c} &= R F_{c,0} \dot{\xi} + R \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \dot{\xi} \cdot \xi) \hat{e}_k \\ \dot{R} &= R \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (B_k \dot{\xi} \cdot \xi) L_k. \end{cases} \quad (23)$$

- Définissons les déplacements nets

$$\begin{aligned} \delta c : H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \delta p : H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathfrak{so}(3) \\ \xi &\mapsto 2\pi \langle \dot{c}(\xi) \rangle, & \xi &\mapsto 2\pi \langle \dot{R}(\xi) \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

Il est impossible d'évaluer ses expressions exactement, mais un argument du calcul chronologique nous a permis de linéariser le système simplifié autour de  $R_0 = I$ . Ainsi, on est arrivé à établir le résultat suivant :

**Proposition 5.1.** *Pour tout  $\xi \in H_{\#}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , dans un voisinage de  $0 \in H_{\#}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , on a les estimés suivants*

$$\begin{aligned}\delta c(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle \hat{e}_k + \mathcal{O}(\|\xi\|_{H_{\#}^1}^3), \\ \delta R(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle L_k + \mathcal{O}(\|\xi\|_{H_{\#}^1}^4).\end{aligned}\tag{25}$$

- Si  $A$  est une matrice symétrique, on trouve par intégration par parties que  $\langle A \xi \cdot \dot{\xi} \rangle = -\langle A \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = 0$  et donc

$$\langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}_3 \tag{26}$$

$$\langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_{k+3} \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}_3 \tag{27}$$

- Si on note  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_6}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^6$ , un calcul montre que

$$\frac{\delta p}{2\pi} = -2\sqrt{6}\alpha \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_{k+1} | \tau_{k+2}) \rangle f_k - 2\sqrt{6}\delta \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_k | \tau_4) \rangle f_{k+3}, \tag{28}$$

où  $k$  pris mod 3.

- En résumé, jusque là on a établi la dynamique du nageur dans le régime de petites courbes de contrôle à cinq paramètres près et on sait exprimer le déplacement net à 3 paramètres près.

## 6 Optimisation I

- On adopte la définition d'efficacité selon Lighthill [4] : Les mouvements optimaux sont ceux qui minimisent la dissipation d'énergie cinétique en atteignant un déplacement net prescrit.
- En termes mathématiques, la dissipation d'énergie due à un mouvement  $\xi \in H_{\#}^1(J, \mathbb{R}^4)$  s'écrit par une fonctionnelle d'énergie appropriée

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J \mathbf{g}(\xi(t)) \dot{\xi}(t) \cdot \dot{\xi}(t) dt, \tag{29}$$

où la densité d'énergie  $\mathbf{g} \in C^1(\mathbb{R}^4)$  est une fonction à valeurs dans les matrices symétriques et définies positives de  $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ . (En fait, c'est une métrique Riemannienne)

- Sous l'hypothèse des petites courbes de contrôle, on peut supposer que  $\mathbf{g}(\xi) = \mathbf{g}(0) + o(1)$ , avec  $\mathbf{g}(0)$  une matrice symétrique définie positive dans  $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ . Ainsi, l'énergie s'écrit

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J Q_{\mathbf{g}}(\dot{\xi}(t)) dt, \tag{30}$$

avec  $Q_{\mathbf{g}}$  la forme quadratique associée à la matrice  $\mathbf{g}(0)$ , i.e.  $Q_{\mathbf{g}}(\eta) := \mathbf{g}(0)\eta \cdot \eta$ .

- Les propriétés de symétrie des équations Stokes impliquent en particulier que

$$Q_{\mathbf{g}}(P_{ij}\eta) = Q_{\mathbf{g}}(\eta), \quad i, j \in \mathbb{N}_4. \tag{31}$$

On en déduit avec un petit calcul que la matrice  $G$  qui représente  $Q_{\mathbf{g}}$  est de la forme suivante :

$$G = \begin{pmatrix} \kappa & h & h & h \\ h & \kappa & h & h \\ h & h & \kappa & h \\ h & h & h & \kappa \end{pmatrix}, \tag{32}$$

pour deux paramètres  $h$  et  $\kappa > \max(h, -3h)$ . En particulier, on observe que  $G\tau_k = (\kappa - h)\tau_k$  pour  $k \in \mathbb{N}_3$  et  $G\tau_4 = (\kappa + 3h)\tau_4$ . Dans la suite on notera  $\mathbf{g}_1 := \mathbf{g}_2 := \mathbf{g}_3 := \kappa - h$  et  $\mathbf{g}_4 := \kappa + 3h$  les valeurs propres de  $G$ . Ensuite, on diagonalise  $G$  :

$$G = U \Lambda_{\mathbf{g}} U^T, \quad U := [\tau_1 | \tau_2 | \tau_3 | \tau_4], \quad \Lambda_{\mathbf{g}} := \text{diag}(\mathbf{g}_i). \tag{33}$$

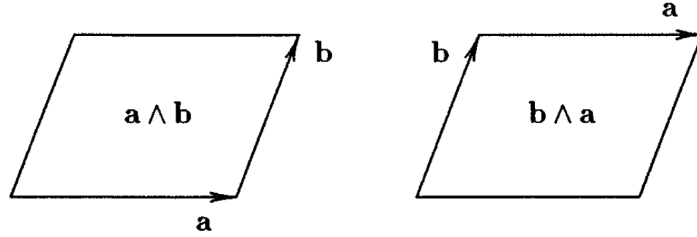
- Donc, on face le problème d'optimisation suivant : Trouver  $\inf_{\xi \in H^1_{\sharp}(J, \mathbb{R}^4)} \int_J Q_{\mathfrak{g}}(\dot{\xi}(t)) dt$  sous la contrainte

$$\begin{aligned} \delta p = \mathfrak{h}_c \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \left( \int_J \det(\xi(t) | \dot{\xi}(t) | \tau_{k+1} | \tau_{k+2}) dt \right) f_k \\ + \mathfrak{h}_\theta \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \left( \int_J \det(\xi(t) | \dot{\xi}(t) | \tau_k | \tau_4) dt \right) f_{k+3}, \end{aligned} \quad (34)$$

avec  $\mathfrak{h}_c = -2\sqrt{6}\alpha$  et  $\mathfrak{h}_\theta = -2\sqrt{6}\delta$ .

## 7 Bivecteurs en $\mathbb{R}^4$

- Pour bien révéler la structure du problème ainsi que pour bien comprendre les différences entre le nageur SPR3 de [2] et SPR4, on aura besoin de la notion de bivecteur.
- Sans entrer dans les détails, je vais illustrer la notion sur la base du cas  $\mathbb{R}^3$ . Un bivecteur dans  $\mathbb{R}^3$  est juste un petit parallélogramme avec magnitude donnée par la surface et la direction donnée par l'orientation du parallélogramme dans  $\mathbb{R}^3$  ensemble avec l'orientation des vecteurs aux bords. De plus, on a envie de comprendre un bivecteur comme un produit des vecteurs aux bords, ce qui est exactement réalisé par le produit "wedge".



- Ainsi, les bivecteurs forment un espace vectoriel  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  avec une base donnée par

$$\{\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2, \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3, \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3\}, \quad (35)$$

si  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . En outre, le produit scalaire est donné par

$$(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Finalement, la norme d'un bivecteur  $\omega = \omega_{12}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + \omega_{13}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + \omega_{23}\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$  est donnée par

$$|\omega| = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{23}^2}. \quad (37)$$

- Ces idées se généralisent facilement à dimension supérieure. En effet, si  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , alors une base de l'espace  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  est donnée par

$$\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}, \quad (38)$$

où on a défini  $e_{ij} := e_i \wedge e_j$  pour alléger la notation.

- Ceci indique déjà la différence fondamentale entre les deux espaces  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  et  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  car ce premier est isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ , tandis que ce dernier n'est pas isomorphe à  $\mathbb{R}^4$ .
- Une conséquence de  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$  est que tout bivecteur de  $\mathbb{R}^3$  est *simple*, c'est-à-dire que

$$\forall \omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \exists u, v \in \mathbb{R}^3 : \omega = u \wedge v. \quad (39)$$

Ceci n'est plus le cas pour  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ , e.g.  $e_{12} + e_{34} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  n'est pas simple.

- En fait, après passage en Fourier, c'est un point clé dans la solution du problème d'optimisation pour SPR3 que le déplacement net s'identifie à un bivecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui est a fortiori simple. De manière analogue, on trouvera que le déplacement net de SPR4 s'identifie à un bivecteur de  $\mathbb{R}^4$  qui n'est plus nécessairement simple. Or, dans le cas où le déplacement net s'identifie à un bivecteur simple de  $\mathbb{R}^4$ , on pourra résoudre le problème d'optimisation de façon similaire.

## 8 Optimisation II

### 8.1 G-Orthogonalisation

- On réécrit la fonctionnelle d'énergie et la contrainte en termes de la base de vecteurs propres  $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}_4}$  de la matrice  $G$ .
- On pose  $\eta(t) := U^T \xi(t) \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{G}_U(\eta) = \int_J \Lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt, \quad (40)$$

avec  $\mathcal{G}_U(\eta) := \mathcal{G}(\xi) = \mathcal{G}(U\eta)$ .

- Si on envoie  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_6}$  vers une certaine base de  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ , on trouve

$$\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1} \delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \eta(t) dt, \quad (41)$$

avec  $\Lambda_{\mathfrak{h}} := \text{diag}(\mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_\theta, \mathfrak{h}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$ . En particulier, on a séparé tous les paramètres inconnus de la courbe de contrôle. (De plus, on observe que la contrainte est l'intégrale d'une 2-forme.)

- Ainsi, le problème d'optimisation devient : Trouver  $\inf_{\eta \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)} \int_J \Lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt$  sous la contrainte  $\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1} \delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \eta(t) dt$ .
- Ce problème n'est pas trivial, donc on a envie de le réduire à un problème d'optimisation facile à résoudre.

### 8.2 Passage en Fourier

- Pour commencer, on passe en Fourier car les courbes de contrôle sont  $2\pi$ -périodiques par définition. On notera

$$\dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) := \{\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}^4)\}. \quad (42)$$

Puis, on peut écrire

$$\eta(t) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \cos(nt) a_n + \sin(nt) b_n, \quad (43)$$

avec  $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) \times \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4)$ .

- En substituant cette expansion dans la fonctionnelle d'énergie et la contrainte, on trouve

$$\mathcal{G}_U(\eta) := \int_J \Lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt = \pi \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 (\Lambda_{\mathfrak{g}} a_n \cdot a_n + \Lambda_{\mathfrak{g}} b_n \cdot b_n) \quad (44)$$

$$= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2, \quad (45)$$

où on a posé

$$\mathbf{u} := (u_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi\Lambda_{\mathfrak{g}}} (na_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \mathbf{v} := (v_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi\Lambda_{\mathfrak{g}}} (nb_n)_{n \in \mathbb{N}}. \quad (46)$$

et

$$\sqrt{\det \Lambda_{\mathfrak{g}}} (\Lambda_{\mathfrak{h}} \tilde{\Lambda}_{\mathfrak{g}})^{-1} \delta p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n \wedge u_n}{n}, \quad (47)$$

avec  $\tilde{\Lambda}_{\mathfrak{g}} := \text{diag}(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c, \sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}, \sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}, \sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta})$ , où  $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{g}_2 := \mathfrak{g}_3 := \mathfrak{g}_c$  et  $\mathfrak{g}_4 := \mathfrak{g}_\theta$ . En résumé, on a démontré ainsi le résultat suivant :

**Proposition 8.1.** *La  $H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ -minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{G}_U$  donnée par (40) sous la contrainte (41) équivaut la minimisation de la fonctionnelle*

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2, \quad (48)$$

définie sur l'espace produit  $\ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$  et sous la contrainte

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n = \omega \text{ with } \omega := \sqrt{\det \Lambda_{\mathfrak{g}}} (\Lambda_{\mathfrak{h}} \tilde{\Lambda}_{\mathfrak{g}})^{-1} \delta p, \quad (49)$$

où  $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3)$  est un déplacement net prescrit un position.

- On observe que  $\omega$  est la somme infinie des bivecteurs de  $\mathbb{R}^4$  et car cette somme converge absolument, on a  $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$ . De plus, on remarque que  $\omega$  est simple si et seulement si  $\delta p$  est simple.
- Dans l'esprit de [2], on a envie de réduire ce problème à dimension finie. Pour faire ceci, on veut trouver pour toute paire de suites de coefficients de Fourier  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$  un nombre fini de coefficients de Fourier, i.e.  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in c_{00}(\mathbb{R}^4) \times c_{00}(\mathbb{R}^4)$  tel que

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ et } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \tilde{v}_n \wedge \tilde{u}_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n. \quad (50)$$

Ainsi, on se ramènerait à un problème d'optimisation en  $\mathbb{R}^N$ .

## 9 Cas simple

- Supposons que  $\omega = x \wedge y$  est un bivecteur simple. En effet, de manière similaire à [2], on trouve le résultat suivant :

**Proposition 9.1.** *Si  $\omega$  est un bivecteur simple, alors pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$  tel que la contrainte (49) soit satisfaite, il existe deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{R}^4$  tels que pour les suites  $\mathbf{u}_\star := \mathbf{e}_1 u$  et  $\mathbf{v}_\star := \mathbf{e}_1 v \in \ell^2(\mathbb{R}^4)$  on ait*

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_\star, \mathbf{v}_\star) = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ and } v \wedge u = \omega. \quad (51)$$

- Ensuite, on résout le problème d'optimisation en dimension finie pour aboutir au résultat final :

**Theorem 9.1.** *Soit  $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3) \simeq \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  un déplacement net prescrit. De plus, supposons que  $\delta p = x \wedge y$  soit un bivecteur simple. Alors, tout minimiseur  $\xi \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$  de la fonctionnelle d'énergie (30) sous la contrainte (34) est de la forme*

$$\xi(t) := (\cos t)a + (\sin t)b, \quad (52)$$

i.e. une ellipse de  $\mathbb{R}^4$  centrée à l'origine et contenu dans le plan défini par les vecteurs  $a$  et  $b$ . On obtient les vecteurs  $a, b \in \mathbb{R}^4$  comme ce qui suit :

(i) On calcule le vecteur  $\omega$  via la relation

$$\omega := \text{diag} \left( \frac{\sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}}{\mathfrak{h}_c}, \frac{\sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}}{\mathfrak{h}_c}, \frac{\sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}}{\mathfrak{h}_c}, \frac{\mathfrak{g}_c}{\mathfrak{g}_\theta}, \frac{\mathfrak{g}_c}{\mathfrak{g}_\theta}, \frac{\mathfrak{g}_c}{\mathfrak{g}_\theta} \right) \delta p = \tilde{x} \wedge \tilde{y}. \quad (53)$$

Puis on considère deux vecteurs  $u, v \in \text{span}\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$  tels que

$$|u|^2 = |v|^2 = |\omega| \text{ and } u \cdot v = 0. \quad (54)$$

(ii) On pose  $\hat{\omega} := \omega/|\omega|$  et on calcule les vecteurs  $a$  et  $b$  via les relations

$$a := \frac{U \Lambda_{\mathfrak{g}}^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} u, \quad b := \frac{U \Lambda_{\mathfrak{g}}^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} v. \quad (55)$$

Alors, on a  $v \wedge u = \omega$  et the la valeur minimum de  $\mathcal{G}$  est égale à  $|\omega|$ .

En outre, les vecteurs  $a$  et  $b$  sont  $\mathfrak{g}$ -orthogonaux, i.e. par rapport au produit scalaire défini pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^4$  par  $(x, y)_{\mathfrak{g}} := 2\pi \Lambda_{\mathfrak{g}} x \cdot y$ , et ils ont la même  $\mathfrak{g}$ -norme  $|a|_{\mathfrak{g}}^2 = |b|_{\mathfrak{g}}^2 = |\omega|$ .

## 10 Conclusion et perspectives

- On a révélé les symétries du système dynamique qui décrit le micro-nageur SPR4 à l'aide des propriétés des équations de Stokes.
- On a identifié la dynamique de SPR4 à termes d'ordre élevé près ainsi que le déplacement net. Il reste cinq paramètres scalaires inconnus.



- On a trouvé la structure des courbes de contrôle optimales dans un cas particulier qui décrit déjà une variété de déplacements nets.
- On n’a pas trouvé la solution au problème d’optimisation jusque là. Or, on fait la conjecture suivante : En général, les courbes de contrôle optimales sont des ellipses situées dans un ou au plus deux plans totalement orthogonaux de  $\mathbb{R}^4$ . En outre, la fréquence de la rotation dans un des deux plans et le double de la fréquence dans l’autre plan. On a les raisons suivantes pour cette conjecture :
  - (i) Dans le cas simple  $\omega$  définit le plan dans lequel la courbe optimale est située. Or, un bivecteur non-simple représente deux plans totalement orthogonaux. Donc, on estime qu’il y a moyen de construire les coefficients de Fourier qui définissent la courbe optimale à partir de  $\omega$  aussi dans le cas général.
  - (ii) Si on considère l’équation d’Euler-Lagrange associée au problème d’optimisation (c.f. [3]), on trouve qu’elle s’écrit
 
$$G\ddot{\xi} - \Omega(\mu)\dot{\xi} = 0, \quad (56)$$
 avec  $\Omega(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{N}_6} \mu_k M_k$ . La matrice  $\Omega(\mu)$  étant toujours anti-symétrique, la solution est une rotation dans  $R^4$ , c’est-à-dire elle est située dans deux plans totalement orthogonaux.
  - (iii) La dernière partie de la conjecture suit d’un argument de regroupement des suites  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ .
- Dans l’avenir, on a d’une part envie de prouver cette conjecture bien sûr. D’autre part, on a aussi envie de faire une approximation de bras longs pour encore une fois réduire le nombre de paramètres inconnus dans le système dynamique approximé et après faire des simulations plus précises que dans [1].

## Références

- [1] F. ALOUGES, A. DESIMONE, L. HELTAI, A. LEFEBVRE-LEPOT et B. M. AND, « Optimally swimming stokesian robots, » *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, t. 18, n° 5, p. 1189-1215, 2013. DOI : 10.3934/dcdsb.2013.18.1189.
- [2] F. ALOUGES et G. D. FRATTA, « Parking 3-sphere swimmer. I. Energy minimizing strokes, » sept. 2017. DOI : 10.31219/osf.io/7sfbj.
- [3] A. DESIMONE, F. ALOUGES et A. LEFEBVRE, « Biological Fluid Dynamics, Non-linear Partial Differential Equations, » in *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*, R. A. MEYERS, éd. New York, NY : Springer New York, 2011, p. 26-31, ISBN : 978-1-4614-1806-1. DOI : 10.1007/978-1-4614-1806-1\_3. adresse : [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_3).
- [4] M. J. LIGHTHILL, « On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small reynolds numbers, » *Communications on Pure and Applied Mathematics*, t. 5, n° 2, p. 109-118, mai 1952. DOI : 10.1002/cpa.3160050201.
- [5] E. M. PURCELL, « Life at low Reynolds number, » *American Journal of Physics*, t. 45, n° 1, p. 3-11, jan. 1977. DOI : 10.1119/1.10903.