Equations de contrôle linéarisées

$$\begin{cases} \dot{c} = R F_{C,0}\, \dot{\xi} + R \sum\limits_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \dot{\xi} \cdot \xi)\, e_k & (1) \\ \dot{R} = R \sum\limits_{j} (B_j \dot{\xi} \cdot \xi)\, L_j . & (2) \end{cases}$$

La solution de (2) avec $R(0) = R_0$ est donnée par

$$R(t) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \Gamma(\tau)\, d\tau,$$

où $\Gamma(t) := \sum (B_j \dot{\xi}(t) \cdot \xi(t))\, L_j$ et $\overrightarrow{\exp}$ désigne l'exponentielle chronologique de Agrachev

Définissons $S_m := I + \sum\limits_{n=1}^{m-1} \int \cdots \int_{\Delta_n(t)} \Gamma_{\tau_n} \circ \cdots \circ \Gamma_{\tau_1}\, d\tau_n \cdots d\tau_1$
avec $\Delta_n(t) = \{ (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \tau_n \leq \cdots \leq \tau_1 \leq t \}$.

Pour un champs de vecteurs $\bar{V}(t)$ sur $so(3)$ nous avons d'après Agrachev que

$$(*) \qquad \left\| \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \epsilon \bar{V}(\tau)\, d\tau - S_m^{\epsilon}(t) \right) R_0 \right\|_{s, SO(3)} = O(\epsilon^m)$$

pour $\epsilon \downarrow 0$ car $SO(3)$ est compact.

⚠ Ici $\|\cdot\|_{s,K}$ désigne une famille de semi-normes sur $C^\infty(M)$ pour $s \geq 0$, $K \subset M$ pour une variété quelconque.

On peut en produire une métrique en posant

$$d(x,y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|x-y\|_k}{1 + \|x-y\|_k} .$$

APPROCHE NAIVE

Fixons $\hat{\xi} \in H^1_\#(I, \mathbb{R}^4)$ t.q. $\|\hat{\xi}\|_{H^1_\#} = 1$. Alors, nous avons pour $\epsilon > 0$ et $\xi := \epsilon \hat{\xi}$ que

$$\Gamma_\epsilon(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}_3} (B_j \dot{\xi} \cdot \xi) L_j = \epsilon^2 \sum_{j \in \mathbb{N}_3} (B_j \dot{\hat{\xi}} \cdot \hat{\xi}) L_j$$
$$= \epsilon^2 \Gamma_1(t).$$

Ici, on a

$$S_m^\epsilon(t) = I + \sum_{n=1}^{m-1} \int \cdots \int_{\Delta_n(t)} \epsilon^2 \Gamma_1(t) \circ \cdots \circ \epsilon^2 \Gamma_1(\tau) d\tau_1 \circ \cdots \tau_n$$

En particulier, $(*)$ fournit l'estime $\forall s > 0$

$$\left\| \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \Gamma_\epsilon(\tau) d\tau - S_m^\epsilon(t) \right) R_0 \right\|_{s, SO(3)} = O(\epsilon^{2m}), \ \epsilon \downarrow 0.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\dot{c} = \left(I + \int_0^t \Gamma_\epsilon(\tau) d\tau \right) \left(F_{\epsilon,0} \dot{\xi} + \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \dot{\xi} \cdot \xi) e_k \right)$$
$$+ O(\epsilon^4), \ \epsilon \downarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \delta c = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle e_k + O(\epsilon^3), \ \epsilon \downarrow 0$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle M_k \xi \cdot \xi \rangle e_k$$

$M_k = \text{asym}(A_k)$.

Similairement, on a

$$\dot{R} = \left(I + \int_0^t \Gamma_\epsilon(\tau) d\tau \right) \sum_{j \in \mathbb{N}_3} (B_j \dot{\xi} \cdot \xi) L_j + O(\epsilon^4)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \delta R = \sum_{j \in \mathbb{N}_3} \langle B_j \dot{\xi} \cdot \xi \rangle L_j + O(\epsilon^4), \ \epsilon \downarrow 0$$