# Bivecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$

$\boxed{\mathbb{R}^3}$ Nous avons $\dim\left(\bigwedge^2 \mathbb{R}^3\right) = \binom{3}{2} = 3$ avec une base donnée par

$$\mathcal{E}_3 = \{e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_3\}$$

En particulier, nous avons l'isomorphisme $* : \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$, i.e. tout bivecteur dans $\mathbb{R}^3$ correspond à un vecteur dans $\mathbb{R}^3$, ce qui entraîne que tout bivecteur dans $\mathbb{R}^3$ est simple, i.e. pour $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ il existe $u, v \in \mathbb{R}^3$ t.q.

$$\omega = u \wedge v.$$

En fait, on a $*(a \wedge b) = a \times b$.

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ s'étend à $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ par

$$\langle x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2 \rangle = \left| \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_2 \\ x_2 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_2 \end{pmatrix} \right|$$

En particulier, on a

$$\|x \wedge y\| = |x||y| \sin \psi,$$

où $\psi$ est l'angle entre $x$ et $y$. De plus, la longueur d'un bivecteur générique $B \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\|B\| = \sqrt{\langle B, B \rangle} = \sqrt{B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2}.$$

Scanné avec CamScanner

$\boxed{\mathbb{R}^4}$ En dimension 4, nous avons

$$\dim\left(\bigwedge^2 \mathbb{R}^4\right) = \binom{4}{2} = 6.$$

Donc, on a un isomorphisme $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^6$. En particulier, les bivecteurs de $\mathbb{R}^4$ ne sont plus tous simples, e.g. $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$. En général, on peut écrire tout bivecteur $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ comme une somme de deux bivecteurs simples qui représentent deux plans complètement orthogonaux, i.e.

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = u_1 \wedge v_1 + u_2 + v_2$$

avec $u_i \cdot v_j = 0$ pour $i \neq j$. Par le théorème de Pythagore, on a

$$\|\omega\|^2 = \|\omega_1\|^2 + \|\omega_2\|^2$$

$$= |u_1|^2 |v_1|^2 \sin^2 \varphi_1 + |u_2|^2 |v_2|^2 \sin^2 \varphi_2.$$