Soutenance de stage - dispotition détaillée

Philipp Weder

26 août 2020

1 Mot de bienvenue

2 Introduction

3 Structure du projet

La structure du reste de la présentation est comme ce qui suit :

(i) Tout d'abord, je vais vous présenter le modèle mathématique qui a été introduit dans [1] et je vais vous montrer les propriétés de symétrie satisfaites par le système de contrôle en question.

(ii) Ensuite, je vais introduire l'hypothèse des courbes de contrôle petites et je vais présenter les implications qui en résultent pour notre système de contrôle.

(iii) Puis, je parlerai du problème d'optimisation associé dont on verra la solution dans un cas particulier.

(iv) Finalement, j'aborderai les perspectives sur le sujet et je présenterai la conjecture sur le cas général, qu'on a faite à la fin du projet.

4 Modélisation et symétries

4.1 Notation et modèle

- Pour le modèle du nageur vu avant, on se donne un tétraèdre de référence avec sommets (S_1, S_2, S_3, S_4) centré à $c \in \mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{dist}(c, S_i) = 1$.
- Alors le nageur SPR4 consiste de quatre boules B_i centrées à b_i de rayon $a > 0$ telles que la boule B_i peut bouger le long de la demi-droite d'origine c passant par S_i.
- Donc, on est dans la situation où les quatre boules sont reliées à c par des bras très fin, qui peuvent s'allonger et se rétracter. Or, on néglige la résistance visqueuse des bras. De plus, il n'y a aucune restriction pour l'orientation du nageur dans le fluide, c'est-à-dire à longueurs de bras fixés, le nageur est juste un corps rigide dans un fluide Stokesien.
- La configuration géométrique est complètement décrite par deux ensembles de variables :

  (i) *Les variables de forme :* $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathcal{M} := (\sqrt{3/2}a, +\infty)^4$, où les ξ_i sont les longueurs des bras.

  (ii) *Les variables de position :* $p = (c, R) \in \mathcal{P} := \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$.

  De plus, on pose $z_i := \overline{S_i c}$. En effet, ceci est une description complète du nageur, car si $r \in B_a$, la boule de rayon a centrée à l'origine, le point actuel sur la boule B_i est donné par

$$r_i(\xi, p, r) := c + R(\xi_i z_i + r). \tag{1}$$

  Les fonctions r_i sont analytique, par conséquent on peut en déduire la vitesse instantanée sur la boule B_i :

$$u_i(\xi, p, r) = \dot{c} + \omega \times (\xi_i z_i + r) + R z_i \dot{\xi}_i, \tag{2}$$

  où ω est le vecteur axial associé à la matrice anti-symétrique $\dot{R}R$.

– Dans [1], il a été montré comment p change si on varie ξ. Plus précisément, on a le système dynamique suivant :

$$\dot{p} = F(R,\xi)\dot{\xi} := \begin{pmatrix} F_c(R,\xi) \\ F_\theta(R,\xi) \end{pmatrix} \dot{\xi}, \tag{3}$$

tel que $\dot{c} = F_c(R,\xi)\dot{\xi}$ et $\dot{R} = R_\theta(R,\xi)\dot{\xi}$.

– On remarque qu'on a

$$F_c(R,\xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3) \text{ et } F_\theta(R,\xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, T_R\,\mathrm{SO}(3)). \tag{4}$$

De plus, on sait que pour $R \in \mathrm{SO}(3)$ fixé, on a

$$T_R SO(3) = \{RM \mid M \in \mathrm{Skew}_3(\mathbb{R})\}. \tag{5}$$

En particulier, on a $\dim T_R\,\mathrm{SO}(3) = 3$. Ainsi, dès qu'on a choisi une base pour les espaces tangents correspondants, on peut exprimer $F_c(R,\xi)$ et $F_\theta(R,\xi)$ comme des matrices de taille 4×3 pour R et ξ fixes.

4.2 Symétries

Passons à l'investigation du système de contrôle 3. Pour ceci, choisissons une condition initiale $p_0 = (c_0, R_0) \in \mathcal{P}$ et une courbe de contrôle $\xi : J \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, avec J un voisinage de zéro. Puis, notons $\gamma(c_0, R_0, \xi) : I \to \mathcal{P}$ la solution associée au système dynamique

$$\dot{p} = F(R,\xi)\dot{\xi}, \quad p(0) := p_0. \tag{6}$$

On notera par $\gamma_c(c_0, R_0, \xi)$ et $\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)$ les projections à $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{SO}(3)$, respectivement. En particulier, on a par définition

$$\dot{\gamma}(c_0, R_0, \xi)(t) = F(\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)(t), \xi(t))\dot{\xi}(t), \forall t \in J. \tag{7}$$

4.2.1 Invariance rotationelle

– Les équations de Stokes sont invariant sous rotations, c'est-à-dire si on tourne tout le domaine géométrique, la solution se transforme de la même façon.

– Ceci implique pour la solution de notre système dynamique que

$$\gamma_c(c_0, RR_0, \xi)(t) = R\gamma_c(c_0, R_0, \xi)(t) + (I - R)c_0, \forall t \in J \tag{8}$$

et

$$\gamma_\theta(c_0, RR_0, \xi)(t) = R\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)(t), \forall t \in J \tag{9}$$

Ensuite, on trouve avec un calcul la propriété suivante du champs de vecteur F :

Proposition 4.1. *Soit $\xi_0 := \xi(0) \in \mathcal{M}$ le point initiale de la courbe de contrôle et notons $T_\xi\mathcal{M}$ l'espace tangent à ξ. Si le système de contrôle 3 est invariant sous rotations et si pour tout $\xi \in \mathcal{M}$ on a $T_\xi\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$, alors*

$$F_c(R,\xi) = RF_c(\xi) \text{ and } F_\theta(R,\xi) = RF_\theta(R,\xi), \forall (R,\xi) \in \mathrm{SO}(3) \times \mathcal{M}, \tag{10}$$

où $F_c(\xi) := F_c(I,\xi)$ et $F_\theta(\xi) := F_\theta(I,\xi)$

– Ceci signifie juste qu'on peut toujours factoriser l'orientation de F.

4.2.2 Permutation des bras

– Notons $P_{ij} \in Mat_{4\times4}(\mathbb{R})$ la matrice de permutation qui échange les indices i et j d'un vecteur. Cette transformation appliquée à l'espace de contrôles $\mathcal{M}$ signifie la permutation des bras $i||$ et $j||$.

– Soit S_{ij} la réflexion qui envoi $i||$ sur $j||$ dans $\mathcal{P}$. Remarquons que la réflexion S_{ij} se passe au plans qui passe par les bras $k||$ et $l||$.

- Les équations sont invariantes sous changement de point de vue, ce qui implique pour notre solution que pour la position initiale $p_0 := (c, I)$ on a

$$\gamma_c(c_0, I, P_{ij}\xi) = S_{ij}\gamma_c(S_{ij}c_0, I, \xi) \tag{11}$$

et

$$\gamma_\theta(c_0, I, P_{ij}\xi) = S_{ij}\gamma_\theta(S_{ij}c_0, I, \xi)S_{ij}. \tag{12}$$

- À l'aide d'un calcul un peu plus technique, on trouve le résultat suivant :
Proposition 4.2. *Si le système de contrôle (3) satisfait les équations (11) et (12) et $T_\xi\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$ pour tout $\xi \in \mathcal{M}$, alors*

$$F_c(P_{ij}\xi) = S_{ij}F_c(\xi)P_{ij} \text{ et } F_\theta(P_{ij}\xi) = -S_{ij}F_\theta(\xi)P_{ij}.\forall\xi \in \mathcal{M}. \tag{13}$$

- Attention : Il faut toujours choisir la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4$ pour $\mathbb{R}^4$ et la base $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3)$ avec

$$L_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}R_1(\theta)_{|\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$L_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}R_2(\theta)_{|\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$L_3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}R_3(\theta)_{|\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

pour justifier la notation dans l'équation à droite dans la proposition.

5 Régime des petites courbes de contrôle

- Maintenant, on a envie d'exploiter les propriétés de symétrie de F de la partie précédente. Pour faire ceci, attaquons F du côté analytique.
- On part de la factorisation

$$F_c(R, \zeta) = RF_c(\zeta) \text{ et } F_\theta(R, \xi) = RF_\theta(\zeta), \forall R \in \mathrm{SO}(3), \tag{17}$$

où $F_c(\zeta) := F_c(I, \zeta)$ et $F_\theta(\zeta) := F_\theta(I, \zeta)$. Puis, supposons que $\zeta = \xi_0 + \xi$, où ξ_0 a toutes les composoantes égales. Finalement, posons $F_{c,\xi_0}(\xi) := F_c(\xi_0 + \xi)$ et $F_{\theta,\xi_0}(\xi) := F_\theta(\xi_0 + \xi)$.
- Il a été démontré dans [1] que F et donc F_{c,ξ_0} et F_{θ,ξ_0} sont analytiques. Par conséquents, nous avons le droit de faire le développement limité suivant :

$$F_{c,\xi_0}(\xi)\eta = F_{c,0}\eta + \mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta \tag{18}$$

$$F_{\theta,\xi_0}(\xi)\eta = F_{\theta,0}\eta + \mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta, \tag{19}$$

où $F_{c,0} := F_c(\xi_0) \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_{c,0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ représent la dérivée d'ordre 1 de F_{c,ξ_0} à $\xi = 0$. $F_{\theta,\xi}$ est défini de façon analogue.
- Pour les termes d'ordre zéro on peut montrer que

$$F_{c,0} = S_{ij}F_{c,0}P_{ij} \tag{20}$$

$$F_{\theta,0} = -S_{ij}F_{\theta,0}P_{ij} \tag{21}$$

ainsi que pour les termes d'ordre un que

$$\mathcal{H}_{c,0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = S_{ij}\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \qquad \forall\xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \tag{22}$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = -S_{ij}\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \qquad \forall\xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \tag{23}$$

5.1 Termes d'ordre zéro

– Un calcul élémentaire, qui n'utilise que (20) et les propriétés des S_{ij} montre que

$$F_{c,0} = \mathfrak{a}(z_1|z_2|z_3|z_4), \tag{24}$$

avec $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ ou bien

$$F_{c,0} = -3\sqrt{3}\mathfrak{a}[\tau_1|\tau_2|\tau_3]^T, \tag{25}$$

où $\tau_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1,0)^T$, $\tau_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^T$, $\tau_3 := \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,-3)^T$ forment une base orthonormale ensemble avec $\tau_4 := \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$. Cette base orthonormale sera utile plus tard.

5.2 Termes d'ordre un

– Pour déterminer les termes d'ordre un, on a suivi l'approche dans **Alouges2017**, où on a évalué les tenseurs sur la base canonique et où on a posé

$$A_k := (\mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j\in\mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3 \tag{26}$$

$$B_k := (\mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j\in\mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3. \tag{27}$$

Ainsi, on a pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k\in\mathbb{N}_3} (A_k\eta \cdot \xi)\hat{e}_k, \tag{28}$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k\in\mathbb{N}_3} (B_k\eta \cdot \xi)L_k. \tag{29}$$

– À lieu de calculer directement les matrices A_k et B_k, on a calculé leurs parties symétriques et anti-symétriques en utilisant des arguments de symétrie. En fait, seulement les parties anti-symétriques seront importantes pour la suite. Notons-les

$$M_k := \frac{1}{2}[A_k - A_k^T], k \in \mathbb{N}_3 \tag{30}$$

$$M_{k+3} := \frac{1}{2}[B_k - B_k^T], k \in \mathbb{N}_3. \tag{31}$$

– Finalement, il ne reste que 5 paramètres inconnus dans les matrices A_k et B_k.

5.3 Linéarisation

– Maintenant, on se donne un espace pour les courbes, notamment $H^1_\sharp(J,\mathbb{R}^4)$, où $J := [0,2\pi]$.
– On notera $\langle f\rangle := (2\pi)^{-1}\int_J f(t)dt$ pour $f \in H^1_\sharp(J,\mathbb{R}^4)$.
– Reprenons le système dynamique. Initialement, pour $\zeta \in \mathcal{M}$, le système dynamique s'écrivait

$$\begin{cases} \dot{c} &= RF_c(\zeta)\dot{\zeta} \\ \dot{R} &= RF_\theta(\zeta)\dot{\zeta}. \end{cases} \tag{32}$$

Puis dans la partie précédente, on a posé $\zeta = \xi_0 + \xi$ et un développement limité autour de $\xi = 0$ nous a fournit le système simplifié

$$\begin{cases} \dot{c} &= RF_{c,0}\dot{\xi} + R\sum_{k\in\mathbb{N}_3}(A_k\dot{\xi}\cdot\xi)\hat{e_k} \\ \dot{R} &= R\sum_{k\in\mathbb{N}_3}(B_k\dot{\xi}\cdot\xi)L_k. \end{cases} \tag{33}$$

– Définissons les déplacements nets

$$\delta c : H^1_\sharp(J,\mathbb{R}^4) \to \mathbb{R}^3 \tag{34}$$

$$\xi \mapsto 2\pi\langle\dot{c}(\xi)\rangle$$

$$\delta p : H^1_\sharp(J,\mathbb{R}^4) \to \mathfrak{so}(3) \tag{35}$$

$$\xi \mapsto 2\pi\langle\dot{R}(\xi)\rangle$$

Il est impossible d'évaluer ses expressions exactement, mais un argument du calcul chronologique nous a permis de linéariser le système simplifié autour de $R_0 = I$. Ainsi, on est arrivé à établir le résultat suivant :

Proposition 5.1. *Pour tout* $\xi \in H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4)$*, dans un voisinage de* $0 \in H^1_\sharp(J, \mathbb{R}^4)$*, on a les estimes suivants*

$$\begin{aligned} \delta c(\xi) &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{N}_3} \langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle \hat{e}_k + \mathcal{O}(||\xi||^3_{H^1_\sharp}), \\ \delta R(\xi) &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{N}_3} \langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle L_k + \mathcal{O}(||\xi||^4_{H^1_\sharp}). \end{aligned} \tag{36}$$

- Si A est une matrice symétrique, on trouve par intégration par parties que $\langle A\xi \cdot \dot{\xi}\rangle = -\langle A\xi \cdot \dot{\xi}\rangle = 0$ et donc

$$\langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_3 \tag{37}$$

$$\langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_{k+3} \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_3 \tag{38}$$

- Par un calcul direct, on trouve

$$M_k \dot{\xi} \cdot \xi = -2\sqrt{6}\,\alpha \det(\xi|\dot{\xi}|\tau_{k+1}|\tau_{k+2}), \qquad k \in \mathbb{N}_3 \tag{39}$$

$$M_{3+k} \dot{\xi} \cdot \xi = -2\sqrt{6}\,\delta \det(\xi|\dot{\xi}|\tau_k|\tau_4), \qquad k \in \mathbb{N}_3, \tag{40}$$

  , où $\{\tau_l\}_{l\in\mathbb{N}_4}$ est la base orthonormée vue précédemment et k est pris mod 3.
- Si on note $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_6}$ la base canonique de $\mathbb{R}^6$, ceci fournit finalement

$$\frac{\delta p}{2\pi} = -2\sqrt{6}\alpha \sum_{k\in\mathbb{N}_3} \det(\xi|\dot{\xi}|\tau_{k+1}|\tau_{k+2}) f_k - 2\sqrt{6}\delta \sum_{k\in\mathbb{N}_3} \det(\xi|\dot{\xi}|\tau_k|\tau_4) f_{k+3}, \tag{41}$$

  où k est de nouveau pris mod 3.
- En résumé, jusque là on a établit la dynamique du nageur dans le régime de petites courbes de contrôle à cinq paramètres près et on sait exprimer le déplacement net à 3 paramètres près.

6 Optimisation I

7 Bivecteurs en $\mathbb{R}^4$

8 Optimisation II

9 Cas simple

10 Conclusion et perspectives

Références

[1] F. Alouges, A. DeSimone, L. Heltai, A. Lefebvre-Lepot et B. M. and, « Optimally swimming stokesian robots, » *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, t. 18, n° 5, p. 1189-1215, 2013. doi : 10.3934/dcdsb.2013.18.1189.