Plans dans $\mathbb{R}^4$

Soient $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$, $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^4$ et $V := \mathrm{span}(v, w)$.

Considérons les quantités

$$p^{ij} := \begin{vmatrix} v_i & w_i \\ v_j & w_j \end{vmatrix} = v_i w_j - v_j w_i ,$$

avec $p^{ii} = 0$, $p^{ji} = -p^{ij}$. Donc, on a 6 quantités indépendantes qui représentent le plan V, i.e.

$$V \longleftrightarrow (p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34})^T \in \mathbb{R}^6.$$

En particulier, si $z \in \mathbb{R}^4$ est dans le plan V, la matrice $[v|w|z]$ est encore de rang 2 et donc toutes les déterminantes des 3×3 sous-mat. valent 0, ce qui fournit les quatres équations

$$\sum_{i=1}^{4} p^{ij} z_i = 0 \quad , \; j \in \mathbb{N}_4 .$$

Ceci ce traduit dans une équation matricielle $Pz = 0$ en posant

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ p_{12} & 0 & -p_{23} & -p_{24} \\ p_{13} & p_{23} & 0 & -p_{34} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & 0 \end{pmatrix} = vw^T - wv^T .$$

D'ailleurs, il y a une correspondance entre les bivecteurs qui sont des sommes des bivecteurs de la forme $u \wedge v$ et les matrices anti-symétriques qui est exactement donnée par

$$u \wedge v \longmapsto u^* \otimes v - v^* \otimes u.$$

Par conséquent, nous pouvons également représenter un plan $V = \mathrm{span}(v, w)$ par le bivecteur $v \wedge w$.

Greub, p. 193