

# Soutenance de stage - disposition détaillée

Philipp Weder

27 août 2020

## 1 Mot de bienvenue

## 2 Introduction

## 3 Structure du projet

La structure du reste de la présentation est comme ce qui suit :

- (i) Tout d'abord, je vais vous présenter le modèle mathématique qui a été introduit dans [1] et je vais vous montrer les propriétés de symétrie satisfaites par le système de contrôle en question.
- (ii) Ensuite, je vais introduire l'hypothèse des courbes de contrôle petites et je vais présenter les implications qui en résultent pour notre système de contrôle.
- (iii) Puis, je parlerai du problème d'optimisation associé dont on verra la solution dans un cas particulier.
- (iv) Finalement, j'aborderai les perspectives sur le sujet et je présenterai la conjecture sur le cas général, qu'on a faite à la fin du projet.

## 4 Modélisation et symétries

### 4.1 Notation et modèle

- Pour le modèle du nageur vu avant, on se donne un tétraèdre de référence avec sommets  $(S_1, S_2, S_3, S_4)$  centré à  $c \in \mathbb{R}^4$  tel que  $\text{dist}(c, S_i) = 1$ .
- Alors le nageur SPR4 consiste de quatre boules  $B_i$  centrées à  $b_i$  de rayon  $a > 0$  telles que la boule  $B_i$  peut bouger le long de la demi-droite d'origine  $c$  passant par  $S_i$ .
- Donc, on est dans la situation où les quatre boules sont reliées à  $c$  par des bras très fin, qui peuvent s'allonger et se rétracter. Or, on néglige la résistance visqueuse des bras. De plus, il n'y a aucune restriction pour l'orientation du nageur dans le fluide, c'est-à-dire à longueurs de bras fixés, le nageur est juste un corps rigide dans un fluide Stokesien.
- La configuration géométrique est complètement décrite par deux ensembles de variables :
  - (i) *Les variables de forme* :  $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathcal{M} := (\sqrt{3/2}a, +\infty)^4$ , où les  $\xi_i$  sont les longueurs des bras.
  - (ii) *Les variables de position* :  $p = (c, R) \in \mathcal{P} := \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ .

De plus, on pose  $z_i := \overline{S_i c}$ . En effet, ceci est une description complète du nageur, car si  $r \in B_a$ , la boule de rayon  $a$  centrée à l'origine, le point actuel sur la boule  $B_i$  est donné par

$$r_i(\xi, p, r) := c + R(\xi_i z_i + r). \quad (1)$$

Les fonctions  $r_i$  sont analytiques, par conséquent on peut en déduire la vitesse instantanée sur la boule  $B_i$  :

$$u_i(\xi, p, r) = \dot{c} + \omega \times (\xi_i z_i + r) + R z_i \dot{\xi}_i, \quad (2)$$

où  $\omega$  est le vecteur axial associé à la matrice anti-symétrique  $\dot{R}R$ .

- Dans [1], il a été montré comment  $p$  change si on varie  $\xi$ . Plus précisément, on a le système dynamique suivant :

$$\dot{p} = F(R, \xi) \dot{\xi} := \begin{pmatrix} F_c(R, \xi) \\ F_\theta(R, \xi) \end{pmatrix} \dot{\xi}, \quad (3)$$

tel que  $\dot{c} = F_c(R, \xi) \dot{\xi}$  et  $\dot{R} = R_\theta(R, \xi) \dot{\xi}$ .

- On remarque qu'on a

$$F_c(R, \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) \text{ et } F_\theta(R, \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, T_R \text{SO}(3)). \quad (4)$$

De plus, on sait que pour  $R \in \text{SO}(3)$  fixé, on a

$$T_R \text{SO}(3) = \{RM \mid M \in \text{Skew}_3(\mathbb{R})\}. \quad (5)$$

En particulier, on a  $\dim T_R \text{SO}(3) = 3$ . Ainsi, dès qu'on a choisi une base pour les espaces tangents correspondants, on peut exprimer  $F_c(R, \xi)$  et  $F_\theta(R, \xi)$  comme des matrices de taille  $4 \times 3$  pour  $R$  et  $\xi$  fixes.

## 4.2 Symétries

Passons à l'investigation du système de contrôle 3. Pour ceci, choisissons une condition initiale  $p_0 = (c_0, R_0) \in \mathcal{P}$  et une courbe de contrôle  $\xi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ , avec  $J$  un voisinage de zéro. Puis, notons  $\gamma(c_0, R_0, \xi) : I \rightarrow \mathcal{P}$  la solution associée au système dynamique

$$\dot{p} = F(R, \xi) \dot{\xi}, \quad p(0) := p_0. \quad (6)$$

On notera par  $\gamma_c(c_0, R_0, \xi)$  et  $\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)$  les projections à  $\mathbb{R}^3$  et  $\text{SO}(3)$ , respectivement. En particulier, on a par définition

$$\dot{\gamma}(c_0, R_0, \xi)(t) = F(\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)(t), \xi(t)) \dot{\xi}(t), \forall t \in J. \quad (7)$$

### 4.2.1 Invariance rotationnelle

- Les équations de Stokes sont invariant sous rotations, c'est-à-dire si on tourne tout le domaine géométrique, la solution se transforme de la même façon.
- Ceci implique pour la solution de notre système dynamique que

$$\gamma_c(c_0, RR_0, \xi)(t) = R\gamma_c(c_0, R_0, \xi)(t) + (I - R)c_0, \forall t \in J \quad (8)$$

et

$$\gamma_\theta(c_0, RR_0, \xi)(t) = R\gamma_\theta(c_0, R_0, \xi)(t), \forall t \in J \quad (9)$$

Ensuite, on trouve avec un calcul la propriété suivante du champs de vecteur  $F$  :

**Proposition 4.1.** *Soit  $\xi_0 := \xi(0) \in \mathcal{M}$  le point initiale de la courbe de contrôle et notons  $T_{\xi_0} \mathcal{M}$  l'espace tangent à  $\xi$ . Si le système de contrôle 3 est invariant sous rotations et si pour tout  $\xi \in \mathcal{M}$  on a  $T_\xi \mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$ , alors*

$$F_c(R, \xi) = RF_c(\xi) \text{ and } F_\theta(R, \xi) = RF_\theta(R, \xi), \forall (R, \xi) \in \text{SO}(3) \times \mathcal{M}, \quad (10)$$

où  $F_c(\xi) := F_c(I, \xi)$  et  $F_\theta(\xi) := F_\theta(I, \xi)$

- Ceci signifie juste qu'on peut toujours factoriser l'orientation de  $F$ .

### 4.2.2 Permutation des bras

- Notons  $P_{ij} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  la matrice de permutation qui échange les indices  $i$  et  $j$  d'un vecteur. Cette transformation appliquée à l'espace de contrôles  $\mathcal{M}$  signifie la permutation des bras  $i||$  et  $j||$ .
- Soit  $S_{ij}$  la réflexion qui envoie  $i||$  sur  $j||$  dans  $\mathcal{P}$ . Remarquons que la réflexion  $S_{ij}$  se passe au plans qui passe par les bras  $k||$  et  $l||$ .

- Les équations sont invariantes sous changement de point de vue, ce qui implique pour notre solution que pour la position initiale  $p_0 := (c, I)$  on a

$$\gamma_c(c_0, I, P_{ij}\xi) = S_{ij}\gamma_c(S_{ij}c_0, I, \xi) \quad (11)$$

et

$$\gamma_\theta(c_0, I, P_{ij}\xi) = S_{ij}\gamma_\theta(S_{ij}c_0, I, \xi)S_{ij}. \quad (12)$$

- À l'aide d'un calcul un peu plus technique, on trouve le résultat suivant :

**Proposition 4.2.** *Si le système de contrôle (3) satisfait les équations (11) et (12) et  $T_\xi\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^4$  pour tout  $\xi \in \mathcal{M}$ , alors*

$$F_c(P_{ij}\xi) = S_{ij}F_c(\xi)P_{ij} \text{ et } F_\theta(P_{ij}\xi) = -S_{ij}F_\theta(\xi)P_{ij}. \forall \xi \in \mathcal{M}. \quad (13)$$

- Attention : Il faut toujours choisir la base canonique  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  pour  $\mathbb{R}^4$  et la base  $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3)$  avec

$$L_1 = \frac{d}{d\theta}R_1(\theta)|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$L_2 = \frac{d}{d\theta}R_2(\theta)|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$L_3 = \frac{d}{d\theta}R_3(\theta)|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

pour justifier la notation dans l'équation à droite dans la proposition.

## 5 Régime des petites courbes de contrôle

- Maintenant, on a envie d'exploiter les propriétés de symétrie de  $F$  de la partie précédente. Pour faire ceci, attaquons  $F$  du côté analytique.
- On part de la factorisation

$$F_c(R, \zeta) = RF_c(\zeta) \text{ et } F_\theta(R, \xi) = RF_\theta(\xi), \forall R \in \text{SO}(3), \quad (17)$$

où  $F_c(\zeta) := F_c(I, \zeta)$  et  $F_\theta(\xi) := F_\theta(I, \xi)$ . Puis, supposons que  $\zeta = \xi_0 + \xi$ , où  $\xi_0$  a toutes les composantes égales. Finalement, posons  $F_{c, \xi_0}(\xi) := F_c(\xi_0 + \xi)$  et  $F_{\theta, \xi_0}(\xi) := F_\theta(\xi_0 + \xi)$ .

- Il a été démontré dans [1] que  $F$  et donc  $F_{c, \xi_0}$  et  $F_{\theta, \xi_0}$  sont analytiques. Par conséquent, nous avons le droit de faire le développement limité suivant :

$$F_{c, \xi_0}(\xi)\eta = F_{c, 0}\eta + \mathcal{H}_{c, 0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta \quad (18)$$

$$F_{\theta, \xi_0}(\xi)\eta = F_{\theta, 0}\eta + \mathcal{H}_{\theta, 0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta, \quad (19)$$

où  $F_{c, 0} := F_c(\xi_0) \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{H}_{c, 0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$  représentent la dérivée d'ordre 1 de  $F_{c, \xi_0}$  à  $\xi = 0$ .  $F_{\theta, \xi}$  est défini de façon analogue.

- Pour les termes d'ordre zéro on peut montrer que

$$F_{c, 0} = S_{ij}F_{c, 0}P_{ij} \quad (20)$$

$$F_{\theta, 0} = -S_{ij}F_{\theta, 0}P_{ij} \quad (21)$$

ainsi que pour les termes d'ordre un que

$$\mathcal{H}_{c, 0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = S_{ij}\mathcal{H}_{c, 0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \quad (22)$$

$$\mathcal{H}_{\theta, 0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = -S_{ij}\mathcal{H}_{\theta, 0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \quad (23)$$

- Donc, on dispose de deux grands systèmes d'équations vectorielles, dont on veut déterminer l'espace de solutions.

### 5.1 Termes d'ordre zéro

- Un calcul élémentaire, qui n'utilise que (20) et les propriétés des  $S_{ij}$  montre que

$$F_{c,0} = \mathbf{a}(z_1|z_2|z_3|z_4), \quad (24)$$

avec  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$  ou bien

$$F_{c,0} = -3\sqrt{3}\mathbf{a}[\tau_1|\tau_2|\tau_3]^T, \quad (25)$$

où  $\tau_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1, 0)^T$ ,  $\tau_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)^T$ ,  $\tau_3 := \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1, -3)^T$  forment une base orthonormale ensemble avec  $\tau_4 := \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$ . Cette base orthonormale sera utile plus tard.

### 5.2 Termes d'ordre un

- Pour déterminer les termes d'ordre un, on a suivi l'approche dans [2], où on a évalué les tenseurs sur la base canonique et où on a posé

$$A_k := (\mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3 \quad (26)$$

$$B_k := (\mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3. \quad (27)$$

Ainsi, on a pour tout  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \eta \cdot \xi) \hat{e}_k, \quad (28)$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (B_k \eta \cdot \xi) L_k. \quad (29)$$

- À lieu de calculer directement les matrices  $A_k$  et  $B_k$ , on a calculé leurs parties symétriques et anti-symétriques en utilisant des arguments de symétrie. En fait, seulement les parties anti-symétriques seront importantes pour la suite. Notons-les

$$M_k := \frac{1}{2}[A_k - A_k^T], k \in \mathbb{N}_3 \quad (30)$$

$$M_{k+3} := \frac{1}{2}[B_k - B_k^T], k \in \mathbb{N}_3. \quad (31)$$

- Finalement, il ne reste que 5 paramètres inconnus dans les matrices  $A_k$  et  $B_k$ .

### 5.3 Linéarisation

- Maintenant, on se donne un espace pour les courbes, notamment  $H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , où  $J := [0, 2\pi]$ .
- On notera  $\langle f \rangle := (2\pi)^{-1} \int_J f(t) dt$  pour  $f \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$  la moyenne d'une fonction.
- Reprenons le système dynamique. Initialement, pour  $\zeta \in \mathcal{M}$ , le système dynamique s'écrivait

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= RF_c(\zeta)\dot{\zeta} \\ \dot{R} &= RF_{\theta}(\zeta)\dot{\zeta}. \end{cases} \quad (32)$$

Puis dans la partie précédente, on a posé  $\zeta = \xi_0 + \xi$  et un développement limité autour de  $\xi = 0$  nous a fourni le système simplifié

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= RF_{c,0}\dot{\xi} + R \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \dot{\xi} \cdot \xi) \hat{e}_k \\ \dot{R} &= R \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (B_k \dot{\xi} \cdot \xi) L_k. \end{cases} \quad (33)$$

- Définissons les déplacements nets

$$\delta c : H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (34)$$

$$\xi \mapsto 2\pi \langle \dot{\zeta}(\xi) \rangle$$

$$\delta p : H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4) \rightarrow \mathfrak{so}(3) \quad (35)$$

$$\xi \mapsto 2\pi \langle \dot{R}(\xi) \rangle$$

Il est impossible d'évaluer ses expressions exactement, mais un argument du calcul chronologique nous a permis de linéariser le système simplifié autour de  $R_0 = I$ . Ainsi, on est arrivé à établir le résultat suivant :

**Proposition 5.1.** *Pour tout  $\xi \in H_{\#}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , dans un voisinage de  $0 \in H_{\#}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , on a les estimes suivantes*

$$\begin{aligned}\delta c(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle \hat{e}_k + \mathcal{O}(\|\xi\|_{H_{\#}^1}^3), \\ \delta R(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle L_k + \mathcal{O}(\|\xi\|_{H_{\#}^1}^4).\end{aligned}\tag{36}$$

- Si  $A$  est une matrice symétrique, on trouve par intégration par parties que  $\langle A \xi \cdot \dot{\xi} \rangle = -\langle A \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = 0$  et donc

$$\langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}_3 \tag{37}$$

$$\langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_{k+3} \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}_3 \tag{38}$$

- Par un calcul direct, on trouve

$$M_k \dot{\xi} \cdot \xi = -2\sqrt{6} \alpha \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_{k+1} | \tau_{k+2}), \quad k \in \mathbb{N}_3 \tag{39}$$

$$M_{3+k} \dot{\xi} \cdot \xi = -2\sqrt{6} \delta \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_k | \tau_4), \quad k \in \mathbb{N}_3, \tag{40}$$

où  $\{\tau_l\}_{l \in \mathbb{N}_4}$  est la base orthonormée vue précédemment et  $k$  est pris mod 3.

- Si on note  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_6}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^6$ , ceci fournit finalement

$$\frac{\delta p}{2\pi} = -2\sqrt{6} \alpha \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_{k+1} | \tau_{k+2}) f_k - 2\sqrt{6} \delta \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_k | \tau_4) f_{k+3}, \tag{41}$$

où  $k$  est de nouveau pris mod 3.

- En résumé, jusque là on a établi la dynamique du nageur dans le régime de petites courbes de contrôle à cinq paramètres près et on sait exprimer le déplacement net à 3 paramètres près.

## 6 Optimisation I

- On adopte la définition d'efficacité selon Lighthill [4] : Les mouvements optimaux sont ceux qui minimisent la dissipation d'énergie cinétique en atteignant un déplacement net prescrit.
- En termes mathématiques, la dissipation d'énergie due à un mouvement  $\xi \in H_{\#}^1(J, \mathbb{R}^4)$  s'écrit par une fonctionnelle d'énergie appropriée

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J \mathbf{g}(\xi(t)) \dot{\xi}(t) \cdot \dot{\xi}(t) dt, \tag{42}$$

où la densité d'énergie  $\mathbf{g} \in C^1(\mathbb{R}^4)$  est une fonction à valeurs dans les matrices symétriques et définies positives de  $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ . (En fait, c'est une métrique Riemannienne)

- Sous l'hypothèse des petites courbes de contrôle, on peut supposer que  $\mathbf{g}(\xi) = \mathbf{g}(0) + o(1)$ , avec  $\mathbf{g}(0)$  une matrice symétrique définie positive dans  $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ . Ainsi, l'énergie s'écrit

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J Q_{\mathbf{g}}(\dot{\xi}(t)) dt, \tag{43}$$

avec  $Q_{\mathbf{g}}$  la forme quadratique associée à la matrice  $\mathbf{g}(0)$ , i.e.  $Q_{\mathbf{g}}(\eta) := \mathbf{g}(0) \eta \cdot \eta$ .

- Les propriétés de symétrie des équations Stokes impliquent en particulier que

$$Q_{\mathbf{g}}(P_{ij} \eta) = Q_{\mathbf{g}}(\eta), \quad i, j \in \mathbb{N}_4. \tag{44}$$

On en déduit avec un petit calcul que la matrice  $G$  qui représente  $Q_{\mathbf{g}}$  est de la forme suivante :

$$G = \begin{pmatrix} \kappa & h & h & h \\ h & \kappa & h & h \\ h & h & \kappa & h \\ h & h & h & \kappa \end{pmatrix}, \tag{45}$$

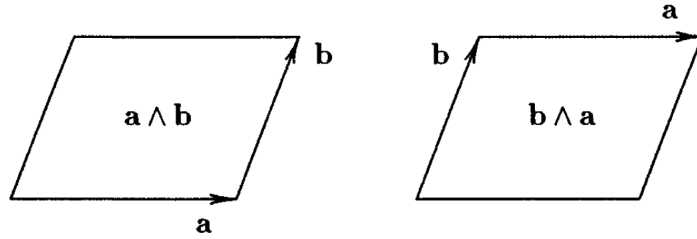
pour deux paramètres  $h$  et  $\kappa > \max(h, -3h)$ . En particulier, on observe que  $G\tau_k = (\kappa - h)\tau_k$  pour  $k \in \mathbb{N}_3$  et  $G\tau_4 = (\kappa + 3h)\tau_4$ . Dans la suite on notera  $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{g}_2 := \mathfrak{g}_3 := \kappa - h$  et  $\mathfrak{g}_4 := \kappa + 3h$  les valeurs propres de  $G$ . Ensuite, on diagonalise  $G$  :

$$G = U\Lambda_{\mathfrak{g}}U^T, \quad U := [\tau_1|\tau_2|\tau_3|\tau_4], \quad \Lambda_{\mathfrak{g}} := \text{diag}(\mathfrak{g}_i). \quad (46)$$

- Donc, on face le problème d'optimisation suivant : Trouver  $\inf_{\xi \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)} \int_J Q_{\mathfrak{g}}(\dot{\xi}(t)) dt$  sous la contrainte  $\delta p = \mathfrak{h}_c \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \left( \int_J \det(\xi(t)|\dot{\xi}(t)|\tau_{k+1}|\tau_{k+2}) dt \right) f_k + \mathfrak{h}_{\theta} \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \left( \int_J \det(\xi(t)|\dot{\xi}(t)|\tau_k|\tau_4) dt \right) f_{k+3}$  avec  $\mathfrak{h}_c = -2\sqrt{6}\alpha$  et  $\mathfrak{h}_{\theta} = -2\sqrt{6}\delta$ .

## 7 Bivecteurs en $\mathbb{R}^4$

- Pour bien révéler la structure du problème ainsi que pour bien comprendre les différences entre le nageur SPR3 de [2] et SPR4, on aura besoin de la notion de bivecteur.
- Sans entrer dans les détails, je vais illustrer la notion sur la base du cas  $\mathbb{R}^3$ . Un bivecteur dans  $\mathbb{R}^3$  est juste un petit parallélogramme avec magnitude donnée par la surface et la direction donnée par l'orientation du parallélogramme dans  $\mathbb{R}^3$  ensemble avec l'orientation des vecteurs aux bords. De plus, on a envie de comprendre un bivecteur comme un produit des vecteurs aux bords, ce qui est exactement réalisé par le produit "wedge".



- Ainsi, les bivecteurs forment un espace vectoriel  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  avec une base donnée par

$$\{\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2, \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3, \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3\}, \quad (47)$$

si  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . En outre, le produit scalaire est donné par

$$(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Finalement, la norme d'un bivecteur  $\omega = \omega_{12}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + \omega_{13}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + \omega_{23}\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$  est donnée par

$$|\omega| = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{23}^2}. \quad (49)$$

- Ces idées se généralisent facilement à dimension supérieure. En effet, si  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , alors une base de l'espace  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  est donnée par

$$\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}, \quad (50)$$

où on a défini  $e_{ij} := e_i \wedge e_j$  pour alléger la notation.

- Ceci indique déjà la différence fondamentale entre les deux espaces  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  et  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  car ce premier est isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ , tandis que ce dernier n'est pas isomorphe à  $\mathbb{R}^4$ .
- Une conséquence de  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$  est que tout bivecteur de  $\mathbb{R}^3$  est *simple*, c'est-à-dire que

$$\forall \omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \exists u, v \in \mathbb{R}^3 : \omega = u \wedge v. \quad (51)$$

Ceci n'est plus le cas pour  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ , e.g.  $e_{12} + e_{34} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  n'est pas simple. Néanmoins, tout bivecteur de  $\mathbb{R}^4$  est la somme d'au plus deux bivecteurs simples et orthogonaux.

- En fait, après passage en Fourier, c'est un point clé dans la solution du problème d'optimisation pour SPR3 que le déplacement net s'identifie à un bivecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui est a fortiori simple. De manière analogue, on trouvera que le déplacement net de SPR4 s'identifie à un bivecteur de  $\mathbb{R}^4$  qui n'est plus nécessairement simple. Or, dans le cas où le déplacement net s'identifie à un bivecteur simple de  $\mathbb{R}^4$ , on pourra résoudre le problème d'optimisation de façon similaire.
- Finalement, pour identifier certains sous-espaces de  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  qui ne consistent que de bivecteurs simples, on se servira du critère suivant :  
**Lemma 7.1.** *un bivecteur  $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  est simple si et seulement si  $\omega \wedge \omega = 0$ .*

## 8 Optimisation II

### 8.1 G-Orthogonalisation

- On réécrit la fonctionnelle d'énergie et la contrainte en termes de la base de vecteurs propres  $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}_4}$  de la matrice  $G$ .
- On pose  $\eta(t) := U^T \xi(t) \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{G}_U(\eta) = \int_J \Lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt, \quad (52)$$

avec  $\mathcal{G}_U(\eta) := \mathcal{G}(\xi) = \mathcal{G}(U\eta)$ .

- Pour la contrainte, on observe que

$$\det(\xi|\dot{\xi}|\tau_i|\tau_j) = \det U \det(\eta|\dot{\eta}|e_i|e_j) = \det(\dot{\eta}|\eta|e_i|e_j), \quad \det U = -1. \quad (53)$$

Puis, un calcul montre que

$$\det(\dot{\eta}|\eta|e_k|e_4) = (\dot{\eta} \wedge \eta, e_{k+1} \wedge e_{k+2}), \quad k \in \mathbb{N}_3 \quad (54)$$

$$\det(\dot{\eta}|\eta|e_{k+1}|e_{k+2}) = (\dot{\eta} \wedge \eta, e_k \wedge e_4), \quad k \in \mathbb{N}_3 \quad (55)$$

Si on envoie maintenant la base canonique  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_6}$  sur la base ordonnée

$$(e_{14}, e_{24}, e_{34}, e_{23}, e_{31}, e_{12}) \quad (56)$$

de  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ , la contrainte s'écrit

$$\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1} \delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \eta(t) dt, \quad (57)$$

avec  $\Lambda_{\mathfrak{h}} := \text{diag}(\mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_\theta, \mathfrak{h}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$ . En particulier, on a séparé tous les paramètres inconnus de la courbe de contrôle. (De plus, on observe que la contrainte est l'intégrale d'une 2-forme.)

- Ainsi, le problème d'optimisation devient : Trouver  $\inf_{\eta \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)} \int_J \lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \eta(t) dt$  sous la contrainte  $\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1} \delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \eta(t) dt$ .
- Ce problème n'est pas trivial, donc on a envie de le réduire à un problème d'optimisation facile à résoudre.

### 8.2 Passage en Fourier

- Pour commencer, on passe en Fourier car les courbes de contrôle sont  $2\pi$ -périodiques par définition. On notera

$$\ell^2(\mathbb{R}^4) := \{\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}^4)\}. \quad (58)$$

Puis, on peut écrire

$$\eta(t) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \cos(nt)a_n + \sin(nt)b_n, \quad (59)$$

avec  $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$ .

- En substituant cette expansion dans la fonctionnelle d'énergie et la contrainte, on trouve

$$\mathcal{G}_U(\eta) := \int_J \Lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta} dt = \pi \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 (\Lambda_{\mathfrak{g}} a_n \cdot a_n + \Lambda_{\mathfrak{g}} b_n \cdot b_n) \quad (60)$$

$$= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2, \quad (61)$$

où on a posé

$$\mathbf{u} := (u_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi\Lambda_{\mathfrak{g}}}(na_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \mathbf{v} := (v_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi\Lambda_{\mathfrak{g}}}(nb_n)_{n \in \mathbb{N}}. \quad (62)$$

et

$$\sqrt{\det \Lambda_{\mathfrak{g}}}(\Lambda_{\mathfrak{h}} \tilde{\Lambda}_{\mathfrak{g}})^{-1} \delta p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n \wedge u_n}{n}, \quad (63)$$

avec  $\tilde{\Lambda}_{\mathfrak{g}} := \text{diag}(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c, \sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_{\theta}}, \sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_{\theta}}, \sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_{\theta}})$ , où  $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{g}_2 := \mathfrak{g}_3 := \mathfrak{g}_c$  et  $\mathfrak{g}_4 := \mathfrak{g}_{\theta}$ . En résumé, on a démontré ainsi le résultat suivant :

**Proposition 8.1.** *La  $H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ -minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{G}_U$  donnée par (52) sous la contrainte (57) équivaut la minimisation de la fonctionnelle*

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2, \quad (64)$$

définie sur l'espace produit  $\ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$  et sous la contrainte

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n = \omega \text{ with } \omega := \sqrt{\det \Lambda_{\mathfrak{g}}}(\Lambda_{\mathfrak{h}} \tilde{\Lambda}_{\mathfrak{g}})^{-1} \delta p, \quad (65)$$

où  $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3)$  est un déplacement net prescrit un position.

- On observe que  $\omega$  est la somme infinie des bivecteurs de  $\mathbb{R}^4$  et car cette somme converge absolument, on a  $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$ . De plus, on remarque que  $\omega$  est simple si et seulement si  $\delta p$  est simple.
- Dans l'esprit de [2], on a envie de réduire ce problème à dimension finie. Pour faire ceci, on veut trouver pour toute paire de suites de coefficients de Fourier  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) \times \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4)$  un nombre fini de coefficients de Fourier, i.e.  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in c_{00}(\mathbb{R}^4) \times c_{00}(\mathbb{R}^4)$  tel que

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ et } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \tilde{v}_n \wedge \tilde{u}_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n. \quad (66)$$

Ainsi, on se ramènerait à un problème d'optimisation en  $\mathbb{R}^N$ .

## 9 Cas simple

- Supposons que  $\omega = x \wedge y$  est un bivecteur simple. En effet, de manière similaire à [2], on trouve le résultat suivant :

**Proposition 9.1.** *Si  $\omega$  est un bivecteur simple, alors pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$  tel que la contrainte (65) soit satisfaite, il existe deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{R}^4$  tels que pour les suites  $\mathbf{u}_{\star} := \mathbf{e}_1 u$  et  $\mathbf{v}_{\star} := \mathbf{e}_1 v \in \ell^2(\mathbb{R}^4)$  on ait*

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{\star}, \mathbf{v}_{\star}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ and } v \wedge u = \omega. \quad (67)$$

- Ensuite, on résout le problème d'optimisation en dimension finie pour aboutir au résultat final :

**Theorem 9.1.** *Soit  $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3) \simeq \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  un déplacement net prescrit. De plus, supposons que  $\delta p = x \wedge y$  soit un bivecteur simple. Alors, tout minimiseur  $\xi \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$  de la fonctionnelle d'énergie (43) sous la contrainte (??) est de la forme*

$$\xi(t) := (\cos t)a + (\sin t)b, \quad (68)$$

i.e. une ellipse de  $\mathbb{R}^4$  centrée à l'origine et contenu dans le plan défini par les vecteurs  $a$  et  $b$ . On obtient les vecteurs  $a, b \in \mathbb{R}^4$  comme ce qui suit :



(i) On calcule le vecteur  $\omega$  via la relation

$$\omega := \text{diag} \left( \frac{\sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}}{\mathfrak{h}_c}, \frac{\sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}}{\mathfrak{h}_c}, \frac{\sqrt{\mathfrak{g}_c \mathfrak{g}_\theta}}{\mathfrak{h}_c}, \frac{\mathfrak{g}_c}{\mathfrak{g}_\theta}, \frac{\mathfrak{g}_c}{\mathfrak{g}_\theta}, \frac{\mathfrak{g}_c}{\mathfrak{g}_\theta} \right) \delta p = \tilde{x} \wedge \tilde{y}. \quad (69)$$

Puis on considère deux vecteurs  $u, v \in \text{span}\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$  tels que

$$|u|^2 = |v|^2 = |\omega| \text{ and } u \cdot v = 0. \quad (70)$$

(ii) On pose  $\hat{\omega} := \omega/|\omega|$  et on calcule les vecteurs  $a$  et  $b$  via les relations

$$a := \frac{U \Lambda_{\mathfrak{g}}^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} u, \quad b := \frac{U \Lambda_{\mathfrak{g}}^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} v. \quad (71)$$

Alors, on a  $v \wedge u = \omega$  et la valeur minimum de  $\mathcal{G}$  est égale à  $|\omega|$ .

En outre, les vecteurs  $a$  et  $b$  sont  $\mathfrak{g}$ -orthogonaux, i.e. par rapport au produit scalaire défini pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^4$  par  $(x, y)_{\mathfrak{g}} := 2\pi \Lambda_{\mathfrak{g}} x \cdot y$ , et ils ont la même  $\mathfrak{g}$ -norme  $|a|_{\mathfrak{g}}^2 = |b|_{\mathfrak{g}}^2 = |\omega|$ .

- Naturellement, on se pose la question dans quelles situations  $\omega$  est simple. Il se trouve qu'il y a une correspondance assez utile : Reprenons le critère du Lemme 7.1. On remarque que ce critère est un particulier toujours satisfait dès que les composantes de  $\omega$  correspondant à un certain indice valent zéro, e.g.  $\omega_{i4} = 0$  pour  $i \in \mathbb{N}_3$ . Ceci fournit quatre sous-espaces  $D_{ijk}^*$  de  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  consistant uniquement de bivecteurs simples. Par inspection de notre base choisie pour  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ , on trouve les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} D_{123}^* &\longleftrightarrow \text{rotations autour toutes les trois axes } \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \\ D_{124}^* &\longleftrightarrow \text{translation dans le plan de } \hat{e}_1 \text{ et } \hat{e}_2, \text{ rotation autour de } \hat{e}_3 \\ D_{134}^* &\longleftrightarrow \text{translation dans le plan de } \hat{e}_1 \text{ et } \hat{e}_3, \text{ rotation autour de } \hat{e}_2 \\ D_{234}^* &\longleftrightarrow \text{translation dans le plan de } \hat{e}_2 \text{ et } \hat{e}_3, \text{ rotation autour de } \hat{e}_1 \end{aligned}$$

En revanche, le bivecteur non-simple  $e_{12} + e_{34}$  correspond au déplacement net  $e_3 + L_3$ , c'est-à-dire un mouvement de vis. Pour ce genre de mouvements on a besoin d'une solution pour le cas général.

## 10 Conclusion et perspectives

- On a révélé les symétries du système dynamique qui décrit le micro-nageur SPR4 à l'aide des propriétés des équations de Stokes.
- On a identifié la dynamique de SPR4 à termes d'ordre élevé près ainsi que le déplacement net. Il reste cinq paramètres scalaires inconnus.
- On a trouvé la structure des courbes de contrôle optimales dans un cas particulier qui décrit déjà une variété de déplacements nets.
- On n'a pas trouvé la solution au problème d'optimisation jusque là. Or, on fait la conjecture suivante : En général, les courbes de contrôle optimales sont des ellipses situées dans un ou au plus deux plans totalement orthogonaux de  $\mathbb{R}^4$ . En outre, la fréquence de la rotation dans un des deux plans et le double de la fréquence dans l'autre plan.

On a les raisons suivantes pour cette conjecture :

- (i) Dans le cas simple  $\omega$  définit le plan dans lequel la courbe optimale est située. Or, un bivecteur non-simple représente deux plans totalement orthogonaux. Donc, on estime qu'il y a moyen de construire les coefficients de Fourier qui définissent la courbe optimale à partir de  $\omega$  aussi dans le cas général.
- (ii) Si on considère l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème d'optimisation (c.f. [3]), on trouve qu'elle s'écrit

$$G\ddot{\xi} - \Omega(\mu)\dot{\xi} = 0, \quad (72)$$

avec  $\Omega(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{N}_6} \mu_k M_k$ . La matrice  $\Omega(\mu)$  étant toujours anti-symétrique, la solution est une rotation dans  $\mathbb{R}^4$ , c'est-à-dire elle est située dans deux plans totalement orthogonaux.

- (iii) La dernière partie de la conjecture suit d'un argument de regroupement des suites  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ .
- Dans l'avenir, on a d'une part envie de prouver cette conjecture bien sûr. D'autre part, on a aussi envie de faire une approximation de bras longs pour encore une fois réduire le nombre de paramètres inconnus dans le système dynamique approximé et après faire des simulations plus précises que dans [1].

## Références

- [1] F. ALOUGES, A. DESIMONE, L. HELTAI, A. LEFEBVRE-LEPOT et B. M. AND, « Optimally swimming stokesian robots, » *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, t. 18, n° 5, p. 1189-1215, 2013. DOI : 10.3934/dcdsb.2013.18.1189.
- [2] F. ALOUGES et G. D. FRATTA, « Parking 3-sphere swimmer. I. Energy minimizing strokes, » sept. 2017. DOI : 10.31219/osf.io/7sfbj.
- [3] A. DESIMONE, F. ALOUGES et A. LEFEBVRE, « Biological Fluid Dynamics, Non-linear Partial Differential Equations, » in *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*, R. A. MEYERS, éd. New York, NY : Springer New York, 2011, p. 26-31, ISBN : 978-1-4614-1806-1. DOI : 10.1007/978-1-4614-1806-1\_3. adresse : [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_3).
- [4] M. J. LIGHTHILL, « On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small reynolds numbers, » *Communications on Pure and Applied Mathematics*, t. 5, n° 2, p. 109-118, mai 1952. DOI : 10.1002/cpa.3160050201.