Euler - Lagrange pour (4S)

APPROCHE LINÉARISÉ

On prend la dynamique linéarisé en orientation, i.e.

$$\begin{cases} \dot{c} = F_{c,0}\, \dot{\xi} + \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (\xi^T A_k \dot{\xi})\, e_k \left(+ \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) \\ \dot{R} = \sum_{j \in \mathbb{N}_3} (\xi^T B_j \dot{\xi})\, L_j \left(+ \mathcal{O}(\epsilon^4) \right) \end{cases}$$

Avec $\mathcal{F}(\xi) := \begin{pmatrix} F_{c,0} \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \xi^T A_1 \\ \vdots \\ \xi^T B_3 \end{pmatrix}}_{=: \mathcal{H}(\xi \otimes \cdot)} \in \mathcal{M}_{6\times 4}(\mathbb{R})$

on peut écrire

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{R} \end{pmatrix} = \mathcal{F}(\xi)\, \dot{\xi}.$$

PROBLÈME D'OPTIMISATION

$$(P1) \begin{cases} \text{Trouver} & \inf_{\xi} \int_I G\dot{\xi} \cdot \dot{\xi}\, dt \\ \text{sous ct.} & \int_I \mathcal{F}(\xi)\dot{\xi}\, dt = \delta p. \end{cases}$$

Définissons

$$\mathcal{L}_\mu(t, p, q) := Gq \cdot q + \mu^T (\mathcal{F}(p) q - \delta p).$$

Ainsi, (P1) est équivalent au problème

$$(P2) \qquad \inf_{\xi} \sup_{\mu \in \mathbb{R}^6} \int_I \mathcal{L}_\mu(t, \xi(t), \dot{\xi}(t))\,dt.$$

Le problème dual est donné par

$$(P2') \qquad \sup_{\mu \in \mathbb{R}^6} \inf_{\xi} \int_I \mathcal{L}_\mu(t, \xi(t), \dot{\xi}(t))\,dt,$$

dont on doit résoudre la partie inf

$$(P2'.1) \qquad \inf_{\xi} \int_I \mathcal{L}_\mu(t, \xi(t), \dot{\xi}(t))\,dt,$$

à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial q}(t, \xi(t), \dot{\xi}(t))\right] = \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial p}(t, \xi(t), \dot{\xi}(t)).$$

On a :

- $$\frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial q} = 2G\dot{\xi}(t) + \mu^T \mathcal{F}(\xi(t));$$

- $$\frac{d}{dt}\left(\mu^T \mathcal{F}(\xi(t))\right) = \begin{pmatrix} \mu^T \nabla_\xi^T \mathcal{F}(\xi)^{(1)} \\ \vdots \\ \mu^T \nabla_\xi^T \mathcal{F}(\xi)^{(4)} \end{pmatrix} \dot{\xi}.$$

- $$\nabla_\xi\left(\mu^T \mathcal{F}(\xi)\dot{\xi}\right) = \begin{pmatrix} \mu^T \frac{\partial \mathcal{F}(\xi)}{\partial \xi_1}\dot{\xi} \\ \vdots \\ \mu^T \frac{\partial \mathcal{F}(\xi)}{\partial \xi_6}\dot{\xi} \end{pmatrix} = \partial f(\xi \otimes \dot{\xi})$$

$$= \begin{pmatrix} \mu^T \frac{\partial \mathcal{F}(\xi)}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \mu^T \frac{\partial \mathcal{F}(\xi)}{\partial \xi_6} \end{pmatrix} \dot{\xi}$$

Donc, nous avons l'équation

$$2G\dot{\xi} + \left[\begin{pmatrix} \mu^T \nabla_\xi \mathcal{F}(\xi)^{(1)} \\ \vdots \\ \mu^T \nabla_\xi \mathcal{F}(\xi)^{(4)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu^T \frac{\partial \mathcal{F}(\xi)}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \mu^T \frac{\partial \mathcal{F}(\xi)}{\partial \xi_4} \end{pmatrix} \right] \dot{\xi} = 0.$$

Le terme dans $[\ldots]$ on voudrait bien exprimer en termes de $\mathcal{H}$.

Écrivons $\mathcal{H}(p \otimes q) = \sum_{k=1}^{6} \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} H_{ijk}\, p_i q_j\, e_k$.

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} H_{ij1}\, p_i q_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} H_{ij6}\, p_i q_j \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} (H_{ij1})_{ij} = A_1 \\ \vdots \\ (H_{ij6})_{ij} = B_3. \end{matrix}$$

En particulier

$$\mathcal{H}(p \otimes \cdot\ ) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} H_{i11}\, p_i & \cdots & \sum_{i=1}^{4} H_{i41}\, p_i \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{4} H_{i16}\, p_i & \cdots & \sum_{i=1}^{4} H_{i46}\, p_i \end{pmatrix}$$

et donc

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\xi)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \mathcal{H}(\xi \otimes \cdot\ )}{\partial \xi_i} = \begin{pmatrix} H_{i11} & \cdots & H_{i41} \\ \vdots & & \\ H_{i16} & \cdots & H_{i46} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_\xi \left(\mu^T \mathcal{F}(\xi) \dot{\xi} \right) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{6} H_{ijk}\, \mu_k\, \dot{\xi}_j\, e_i.}$$

De même, nous avons

$$\nabla_\xi^T \mathcal{F}(\xi)^{(j)} = \nabla_\xi^T \mathcal{H}(\xi \otimes \cdot)^{(j)} = \nabla_\xi^T \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} H_{ij1} \xi_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{4} H_{ij6} \xi_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} H_{1j1} & \cdots & H_{4j1} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{1j6} & \cdots & H_{4j6} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \mu^T \nabla_\xi^T \mathcal{F}(\xi)^{(j)} = \left(\sum_{k=1}^{6} H_{1jk} \mu_k , \ldots , \sum_{k=1}^{6} H_{4jk} \right).$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mu^T \mathcal{F}(\xi(t))\right) = \begin{pmatrix} \mu^T \nabla_\xi^T \mathcal{F}(\xi(t)) \\ \vdots \\ \mu^T \nabla_\xi^T \mathcal{F}(\xi(t)) \end{pmatrix} \dot{\xi}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{6} H_{i1k} \mu_k \dot{\xi}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{6} H_{i4k} \mu_k \dot{\xi}_i \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{6} H_{ijk} \mu_k \dot{\xi}_i e_j .$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\mu^T \mathcal{F}(\xi(t))\right) &= \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{6} H_{ijk} \mu_k \dot{\xi}_i e_j \\ \overset{(i \leftrightarrow j)}{=} & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{6} H_{jik} \mu_k \dot{\xi}_j e_i . \end{aligned}}$$

Ainsi, l'équation d'Euler-Lagrange devient

(2) $\quad 2G\ddot{\xi} - 2\Omega(\mu)\dot{\xi} = 0,$

où

$$-2\Omega(\mu) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{6} \mu_k (H_{11k} - H_{11k}) & \cdots & \sum_{k=1}^{6} \mu_k (H_{41k} - H_{14k}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{6} \mu_k (H_{14k} - H_{41k}) & \cdots & \sum_{k=1}^{6} \mu_k (H_{44k} - H_{44k}) \end{pmatrix}$$

On pose $A_k := B_{k-3}$ pour $k = 4,5,6$ et $M_k := \frac{1}{2}(A_k - A_k^T)$. En particulier, on a

$$A_k = (H_{ijk})_{ij} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_6$$

et on trouve

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega(\mu) &= \left(\sum_{k=1}^{6} \mu_k \tfrac{1}{2}(H_{ijk} - H_{jik})\right)_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{6} \mu_k M_k. \end{aligned}}$$

Si on définit $\eta := G^{1/2}\dot{\xi}$, où on utilise que G est symétrique et positive définie, (2) s'écrit

(3) $\quad \dot{\eta} - \tilde{\Omega}(\mu)\eta = 0,$

avec $\tilde{\Omega}(\mu) = \sum_{k=1}^{6} \mu_k \hat{M}_k$, $\hat{M}_k := G^{-1/2} M_k G^{-1/2}$
La solution de (3) est donnée par

(4) $\quad \eta(t) = \exp(\tilde{\Omega}(\mu)t)\,\eta(0).$