

# Micro-nageurs Stokesiens

Analyse du micro-nageur "parking 4-sphere swimmer" (SPr4)

---

Philipp Weder

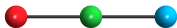
CMAP - Ecole Polytechnique

# Introduction

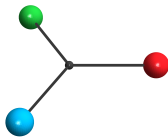
---

# Introduction

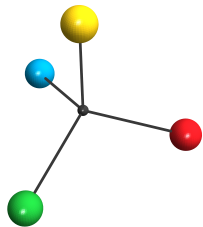
- Premiers résultats sur le sujet par Purcell en 1977, en particulier le "scallop theorem"
- Analyse (partielle) de plusieurs mécanismes de micro-natation



(a) 3S



(b) SPr3



(c) SPr4

**Figure 1:** Exemples de micro-nageurs

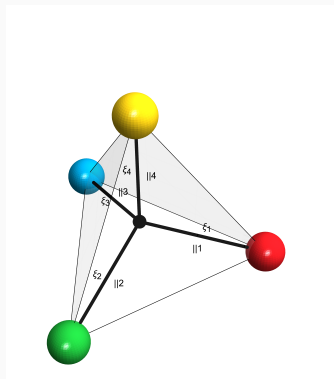
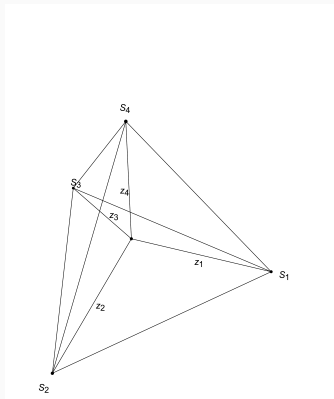
- Problème mathématique:  $Re \ll 1 \implies$  forces d'inertie négligeables
- Problème de contrôle
- Question supplémentaire: Natation optimal, i.e. problème de contrôle optimale
- Contrôlabilité globale de SPR4 démontré dans [1], mais pas explicitement
- Dans ce projet: Analyse du nageur SPR4 sous l'hypothèse des mouvements petits de la structure des courbes de contrôle optimales pour une classe particulière de déplacements prescrits.

1. Introduction
2. Modélisation et symétries
3. Régime des petites courbes de contrôle
4. Optimisation
5. Le cas simple
6. Conclusions et perspectives

# Modélisation et symétries

---

- Tétraèdre de référence avec sommets  $(S_1, S_2, S_3, S_4)$  centré à  $c \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\text{dist}(c, S_i) = 1$
- Quatre boules  $B_i$ , centrées à  $b_i$  de rayon  $a > 0$  peuvent bouger le long de la demi-droite d'origine  $c$  passant par  $S_i$
- La résistance visqueuse des bras est négligée
- Description complète par deux ensembles de variables:
  1. *Les variables de forme*:  $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathcal{M} := (\sqrt{3/2}a, +\infty)^4$ , où les  $\xi_i$  sont les longueurs des bras.
  2. *Les variables de position*:  $p = (c, R) \in \mathcal{P} := \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ .
- $z_i := \overline{cS_i}$



**Figure 2:** Le tétraèdre de référence et le "parking 4-sphere swimmer" ( $\text{SPR}_4$ ).



- Système dynamique trouvé dans [1]

$$\dot{p} = F(R, \xi)\dot{\xi} := \begin{pmatrix} F_c(R, \xi) \\ F_\theta(R, \xi) \end{pmatrix} \dot{\xi}, \quad (1)$$

tel que  $\dot{c} = F_c(R, \xi)\dot{\xi}$  et  $\dot{R} = F_\theta(R, \xi)\dot{\xi}$ .

▪

$$F_c(R, \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) \text{ et } F_\theta(R, \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, T_R SO(3)). \quad (2)$$

Donc, dès qu'on a fixé des bases, on peut les exprimer comme des matrices de taille  $3 \times 4$ .

- Investigation du système de contrôle (1) sur la base des symétries des équations de Stokes
- Équations de Stokes  $\rightarrow$  invariantes sous rotations et changement de point de vue
- Pour trouver les symétries de  $F \rightarrow$  appliquer les transformations correspondantes à une solution, puis différentiation

Pour toute rotation  $R \in SO(3)$ , on trouve

$$F_c(R, \xi) = RF_c(\xi) \text{ and } F_\theta(R, \xi) = RF_\theta(R, \xi), \quad \forall (R, \xi) \in SO(3) \times \mathcal{M}, (3)$$

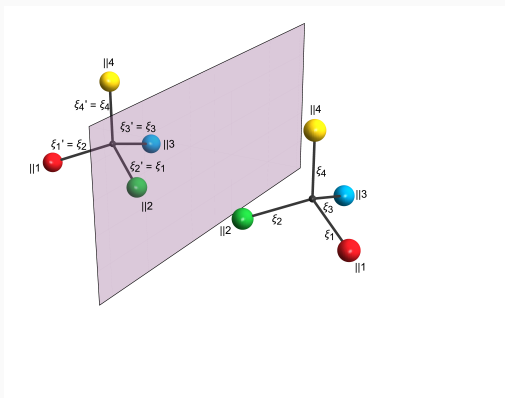
où  $F_c(\xi) := F_c(I, \xi)$  et  $F_\theta(\xi) := F_\theta(I, \xi)$ .

## Symétries - Permutation des bras $||i \leftrightarrow ||j$

- Utiliser l'invariance sous changement de point de vue pour déterminer la symétrie de  $F$  sous permutation de deux bras
- $P_{ij} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  matrice de permutation t.q. les indices  $i$  et  $j$  sont échangés
- $S_{ij}$  la réflexion t.q.  $||i \mapsto ||j$  et vice-versa dans l'orientation de référence  $I$ .

# Symétries - Permutation des bras

$||i \longleftrightarrow ||j$  correspond à regarder la trajectoire dans un miroir t.q.  $||i \mapsto ||j$  et vice-versa.



**Figure 3:** La réflexion  $S_{12}$  appliquée à  $\text{SPR}_4$  dans l'orientation de référence correspondant à l'échange ( $||1 \longleftrightarrow ||2$ )

- On trouve par un calcul technique

$$F_c(P_{ij}\xi) = S_{ij}F_c(\xi)P_{ij} \text{ et } F_\theta(P_{ij}\xi) = -S_{ij}F_\theta(\xi)P_{ij}. \forall \xi \in \mathcal{M}. \quad (4)$$

- Attention: Il faut toujours choisir la base canonique  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  pour  $\mathbb{R}^4$  et la base  $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3)$  avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

pour justifier la notation!

# Petites courbes

---

- On a la factorisation

$$F_c(R, \zeta) = RF_c(\zeta) \text{ et } F_\theta(R, \xi) = RF_\theta(\xi), \forall R \in SO(3), \quad (7)$$

où  $F_c(\zeta) := F_c(I, \zeta)$  et  $F_\theta(\xi) := F_\theta(I, \xi)$ .

- On suppose que  $\zeta = \xi_0 + \xi$ ,  $\xi_0$  avec toutes les composantes égales
- $F_{c, \xi_0}(\xi) := F_c(\xi_0 + \xi)$ ,  $F_{\theta, \xi_0}(\xi) := F_\theta(\xi_0 + \xi)$
- Résultat de [1]:  $F$  et donc aussi  $F_{c, \xi_0}, F_{\theta, \xi_0}$  analytiques
- On fait le développement limité

$$F_{c, \xi_0}(\xi)\eta = F_{c, 0}\eta + \mathcal{H}_{c, 0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta \quad (8)$$

$$F_{\theta, \xi_0}(\xi)\eta = F_{\theta, 0}\eta + \mathcal{H}_{\theta, 0}(\xi \otimes \eta) + \mathcal{O}(|\xi|)\eta, \quad (9)$$

pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^4$ .



- Substitution des conditions de symétrie de  $F$  dans le développement limité fournit

$$F_{c,0} = S_{ij}F_{c,0}P_{ij} \quad (10)$$

$$F_{\theta,0} = -S_{ij}F_{\theta,0}P_{ij} \quad (11)$$

$$\mathcal{H}_{c,0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = S_{ij}\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \quad (12)$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(P_{ij}\xi \otimes \eta) = -S_{ij}\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes P_{ij}\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \quad (13)$$

- On veut déterminer les espaces de solutions de ces systèmes d'équations vectorielles.

- Calcul élémentaire pour trouver

$$F_{c,0} = \mathfrak{a}(z_1|z_2|z_3|z_4), \quad (14)$$

avec  $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$  ou bien

$$F_{c,0} = -3\sqrt{3}\mathfrak{a}[\tau_1|\tau_2|\tau_3]^T, \quad (15)$$

où  $\tau_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1, 0)^T$ ,  $\tau_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)^T$ ,  
 $\tau_3 := \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1, -3)^T$  forment une base orthonormale ensemble  
avec  $\tau_4 := \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$ . Cette base sera utile plus tard.

- Des arguments similaires montrent que  $F_{\theta,0} = 0$ , ce qui est intuitivement clair.

- Même approche que [2]

$$A_k := (\mathcal{H}_{c,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3 \quad (16)$$

$$B_k := (\mathcal{H}_{\theta,0}(e_i \otimes e_j) \cdot \hat{e}_k)_{i,j \in \mathbb{N}_4}, k \in \mathbb{N}_3. \quad (17)$$

- Ainsi, on a pour tout  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{H}_{c,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \eta \cdot \xi) \hat{e}_k, \quad (18)$$

$$\mathcal{H}_{\theta,0}(\xi \otimes \eta) = \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (B_k \eta \cdot \xi) L_k. \quad (19)$$

- À lieu de calculer directement les matrices  $A_k$  et  $B_k$ , on a calculé leurs parties symétriques et anti-symétriques en utilisant des arguments de symétrie. Notons les parties anti-symétriques

$$M_k := \frac{1}{2}[A_k - A_k^T], k \in \mathbb{N}_3 \quad (20)$$

$$M_{k+3} := \frac{1}{2}[B_k - B_k^T], k \in \mathbb{N}_3. \quad (21)$$

Dans la suite seulement les parties anti-symétrique seront importantes:

$$M_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$M_2 = \sqrt{3}\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$M_3 = 2\sqrt{2}\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

$$M_4 = \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$M_5 = \sqrt{3}\delta \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$M_6 = 2\sqrt{2}\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

- Restriction de l'espace des contrôles à  $H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , où  $J := [0, 2\pi]$
- $\langle f \rangle := (2\pi)^{-1} \int_J f(t) dt$  pour  $f \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$
- Dans la partie précédente, on a trouvé que pour  $\zeta = \xi_0 + \xi$ , on a autour de  $\xi = 0$

$$\begin{cases} \dot{c} &= RF_{c,0}\dot{\xi} + R \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (A_k \dot{\xi} \cdot \xi) \hat{e}_k \\ \dot{R} &= R \sum_{k \in \mathbb{N}_3} (B_k \dot{\xi} \cdot \xi) L_k. \end{cases} \quad (28)$$

- On définit les déplacements nets par

$$\begin{aligned} \delta c : H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \delta R : H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4) &\rightarrow \mathfrak{so}(3) \\ \xi &\mapsto 2\pi \langle \dot{c}(\xi) \rangle, & \xi &\mapsto 2\pi \langle \dot{R}(\xi) \rangle \end{aligned} \quad (29)$$

- Impossible d'évaluer ces expressions exactement à cause du  $R$  dans (28)!
- Un argument du *calcul chronologique* permet de linéariser autour de  $R_0 = I$ . Ainsi, on trouve

## Proposition 3.1

Pour tout  $\xi \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , dans un voisinage de  $0 \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , on a les estimés suivants

$$\begin{aligned} \delta c(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle \hat{e}_k + \mathcal{O}(\|\xi\|_{H_{\sharp}^1}^3), \\ \delta R(\xi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle L_k + \mathcal{O}(\|\xi\|_{H_{\sharp}^1}^4). \end{aligned} \quad (30)$$

- $A$  symétrique  $\xRightarrow{I.P.P.} \langle A\xi \cdot \dot{\xi} \rangle = -\langle A\xi \cdot \dot{\xi} \rangle = 0$  et donc

$$\langle A_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}_3 \quad (31)$$

$$\langle B_k \dot{\xi} \cdot \xi \rangle = \langle M_{k+3} \dot{\xi} \cdot \xi \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}_3 \quad (32)$$

- Si on note  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_6}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^6$ , un calcul montre que

$$\begin{aligned} \frac{\delta p}{2\pi} = & -2\sqrt{6}\alpha \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_{k+1} | \tau_{k+2}) \rangle f_k \\ & -2\sqrt{6}\delta \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \langle \det(\xi | \dot{\xi} | \tau_k | \tau_4) \rangle f_{k+3}, \end{aligned} \quad (33)$$

où  $k$  pris mod 3.

- En particulier, on peut décrire les déplacements nets à deux paramètres scalaires près.



# Optimisation

---

- Définition d'efficacité selon Lighthill [4]: *Les mouvements optimaux sont ceux qui minimisent la dissipation d'énergie cinétique en atteignant un déplacement net prescrit.*
- La dissipation d'énergie due à un mouvement  $\xi \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$  s'écrit par une fonctionnelle d'énergie appropriée

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J \mathfrak{g}(\xi(t)) \dot{\xi}(t) \cdot \dot{\xi}(t) dt. \quad (34)$$

- Sous l'hypothèse des petites courbes de contrôle, on peut supposer que  $\mathfrak{g}(\xi) = \mathfrak{g}(0) + o(1)$ , avec  $\mathfrak{g}(0)$  une matrice symétrique définie positive dans  $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ . Ainsi, l'énergie s'écrit

$$\mathcal{G}(\xi) := \int_J Q_{\mathfrak{g}}(\dot{\xi}(t)) dt, \quad (35)$$

avec  $Q_{\mathfrak{g}}(\eta) := \mathfrak{g}(0)\eta \cdot \eta$ .

- Les propriétés de symétrie des équations Stokes impliquent en particulier que

$$Q_g(P_{ij}\eta) = Q_g(\eta), \quad i, j \in \mathbb{N}_4. \quad (36)$$

- La matrice  $G$  représentant  $Q_g$  est de la forme suivante:

$$G = \begin{pmatrix} \kappa & h & h & h \\ h & \kappa & h & h \\ h & h & \kappa & h \\ h & h & h & \kappa \end{pmatrix}, \quad (37)$$

pour deux paramètres  $h$  et  $\kappa > \max(h, -3h)$ .

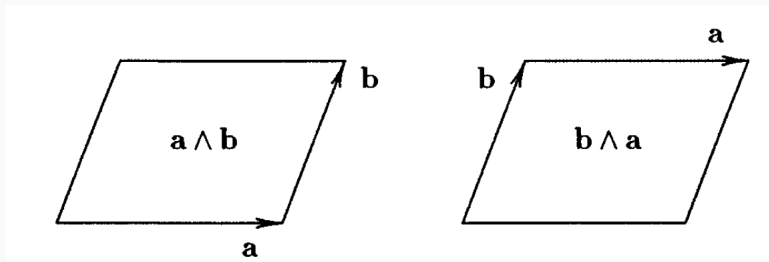
- On a  $G_{\tau_k} = (\kappa - h)\tau_k$  pour  $k \in \mathbb{N}_3$  et  $G_{\tau_4} = (\kappa + 3h)\tau_4$
- On notera  $g_1 := g_2 := g_3 := \kappa - h$  et  $g_4 := \kappa + 3h$  t.q.

$$G = U\Lambda_g U^T, \quad U := [\tau_1 | \tau_2 | \tau_3 | \tau_4], \quad \Lambda_g := \text{diag}(g_i). \quad (38)$$

On face le problème d'optimisation: Minimiser  $\int_J Q_g(\dot{\xi}(t))dt$  sous la contrainte

$$\begin{aligned} \delta p = \mathfrak{h}_c \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \left( \int_J \det(\xi(t)|\dot{\xi}(t)|\tau_{k+1}|\tau_{k+2})dt \right) f_k \\ + \mathfrak{h}_\theta \sum_{k \in \mathbb{N}_3} \left( \int_J \det(\xi(t)|\dot{\xi}(t)|\tau_k|\tau_4)dt \right) f_{k+3} \end{aligned} \quad (39)$$

avec  $\mathfrak{h}_c = -2\sqrt{6}\alpha$  et  $\mathfrak{h}_\theta = -2\sqrt{6}\delta$ .



**Figure 4:** Affichage d'un bivecteur dans  $\mathbb{R}^3$  [5]

- Les bivecteurs forment un espace vectoriel  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  avec une base donnée par

$$\{\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2, \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3, \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3\}, \quad (40)$$

si  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- Le produit scalaire est donné par

$$(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

- La norme d'un bivecteur  $\omega = \omega_{12}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + \omega_{13}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + \omega_{23}\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$  est donnée par

$$|\omega| = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{23}^2}. \quad (42)$$

- Ces idées se généralisent facilement à dimension supérieure. En effet, si  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , alors une base de l'espace  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  est donnée par

$$\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}, \quad (43)$$

où  $e_{ij} := e_i \wedge e_j$ .

- Différence fondamentale:  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ , mais  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \not\simeq \mathbb{R}^4$
- $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$  implique que tout  $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$  est *simple*, c'est-à-dire que

$$\forall \omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \exists u, v \in \mathbb{R}^3 : \omega = u \wedge v. \quad (44)$$

- Ceci n'est plus le cas pour  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ , e.g.  $e_{12} + e_{34} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  n'est pas simple
- Après passage en Fourier, la contrainte s'identifie à un bivecteur de  $\mathbb{R}^4$ . Si celui-ci est simple, nous pourrions résoudre le problème d'optimisation de façon similaire à [2].

- On pose  $\eta(t) := U^T \xi(t) \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ , ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{G}_U(\eta) = \int_J \Lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt, \quad (45)$$

avec  $\mathcal{G}_U(\eta) := \mathcal{G}(\xi) = \mathcal{G}(U\eta)$ .

- Si on envoie  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_6}$  vers une certaine base de  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ , on trouve

$$\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1} \delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \eta(t) dt, \quad (46)$$

avec  $\Lambda_{\mathfrak{h}} := \text{diag}(\mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_{\theta}, \mathfrak{h}_{\theta}, \mathfrak{h}_{\theta})$ .

- Ainsi, le problème d'optimisation devient: Minimiser  $\int_J \Lambda_{\mathfrak{g}} \dot{\eta}(t) \cdot \eta(t) dt$  sous la contrainte

$$\Lambda_{\mathfrak{h}}^{-1} \delta p = \int_J \dot{\eta}(t) \wedge \eta(t) dt. \quad (47)$$



- On passe en Fourier car les courbes de contrôle sont  $2\pi$ - périodiques par définition. On notera

$$\dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) := \{\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}^4)\}. \quad (48)$$

- Expansion en série de Fourier:

$$\eta(t) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \cos(nt)a_n + \sin(nt)b_n, \quad (49)$$

avec  $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) \times \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4)$ .

- Substitution dans la fonctionnelle d'énergie et la contrainte fournit

$$\mathcal{G}_U(\eta) := \int_J \Lambda_g \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\eta} dt = \pi \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 (\Lambda_g a_n \cdot a_n + \Lambda_g b_n \cdot b_n) \quad (50)$$

$$= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2, \quad (51)$$

où on a posé

$$\mathbf{u} := (u_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi \Lambda_g} (na_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (52)$$

$$\mathbf{v} := (v_n)_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{2\pi \Lambda_g} (nb_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (53)$$

et

$$\sqrt{\det \Lambda_g} (\Lambda_h \tilde{\Lambda}_g)^{-1} \delta p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n \wedge u_n}{n}, \quad (54)$$

avec  $\tilde{\Lambda}_g := \text{diag}(g_c, g_c, g_c, \sqrt{g_c g_\theta}, \sqrt{g_c g_\theta}, \sqrt{g_c g_\theta})$ , où

$g_1 := g_2 := g_3 := g_c$  et  $g_4 := g_\theta$ .

- Ceci prouve le résultat suivant:

## Proposition 4.1

*La  $H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$ -minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{G}_U$  donnée par (45) sous la contrainte (46) équivaut à la minimisation de la fonctionnelle*

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{\ell^2(\mathbb{R}^4)}^2, \quad (55)$$

*définie sur l'espace produit  $\ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$  et sous la contrainte*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n = \omega \text{ with } \omega := \sqrt{\det \Lambda_g} (\Lambda_h \tilde{\Lambda}_g)^{-1} \delta p, \quad (56)$$

*où  $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3)$  est un déplacement net prescrit en position.*

- On observe que  $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ . et que  $\omega$  est simple si et seulement si  $\delta p$  est simple.

- On veut réduire ce problème à un problème en dimension finie (c.f. [2]), i.e. trouver pour toute paire de suites de coefficients de Fourier  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4) \times \dot{\ell}^2(\mathbb{R}^4)$  un nombre fini de coefficients de Fourier, i.e.  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in c_{00}(\mathbb{R}^4) \times c_{00}(\mathbb{R}^4)$  tel que

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ et } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \tilde{v}_n \wedge \tilde{u}_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} v_n \wedge u_n. \quad (57)$$

- $\rightarrow$  Problème d'optimisation dans  $\mathbb{R}^N$

## Le cas simple

---

Supposons que  $\omega = x \wedge y$  est un bivecteur simple. En effet, de manière similaire à [2], on trouve le résultat suivant:

### Proposition 5.1

*Si  $\omega$  est un bivecteur simple, alors pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \ell^2(\mathbb{R}^4) \times \ell^2(\mathbb{R}^4)$  tel que la contrainte (56) soit satisfaite, il existe deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{R}^4$  tels que pour les suites  $\mathbf{u}_\star := \mathbf{e}_1 u$  et  $\mathbf{v}_\star := \mathbf{e}_1 v \in \ell^2(\mathbb{R}^4)$  on ait*

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_\star, \mathbf{v}_\star) = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ and } v \wedge u = \omega. \quad (58)$$

Ensuite, la résolution du problème d'optimisation en dimension finie fournit le résultat final:

## Theorem 5.1

*Soit  $\delta p \in \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3) \simeq \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  un déplacement net prescrit. De plus, supposons que  $\delta p = x \wedge y$  soit un bivecteur simple. Alors, tout minimiseur  $\xi \in H_{\sharp}^1(J, \mathbb{R}^4)$  de la fonctionnelle d'énergie (35) sous la contrainte (39) est de la forme*

$$\xi(t) := (\cos t)a + (\sin t)b, \quad (59)$$

*i.e. une ellipse de  $\mathbb{R}^4$  centrée à l'origine et contenu dans le plan défini par les vecteurs  $a$  et  $b$ . On obtient les vecteurs  $a, b \in \mathbb{R}^4$  comme ce qui suit:*

## Le cas simple - Théorème final

1. On calcule le vecteur  $\omega$  via la relation

$$\omega := \text{diag} \left( \frac{\sqrt{g_c g_\theta}}{h_c}, \frac{\sqrt{g_c g_\theta}}{h_c}, \frac{\sqrt{g_c g_\theta}}{h_c}, \frac{g_c}{g_\theta}, \frac{g_c}{g_\theta}, \frac{g_c}{g_\theta} \right) \delta p = \tilde{x} \wedge \tilde{y}. \quad (60)$$

Puis on considère deux vecteurs  $u, v \in \text{span}\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$  tels que

$$|u|^2 = |v|^2 = |\omega| \text{ and } u \cdot v = 0. \quad (61)$$

2. On pose  $\hat{\omega} := \omega/|\omega|$  et on calcule les vecteurs  $a$  et  $b$  via les relations

$$a := \frac{U \Lambda_g^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} u, \quad b := \frac{U \Lambda_g^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} v. \quad (62)$$

Alors, on a  $v \wedge u = \omega$  et the la valeur minimum de  $\mathcal{G}$  est égale à  $|\omega|$ .

En outre, les vecteurs  $a$  et  $b$  sont  $g$ -orthogonaux, i.e. par rapport au produit scalaire défini pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^4$  par  $(x, y)_g := 2\pi \Lambda_g x \cdot y$ , et ils on la même  $g$ -norme  $|a|_g^2 = |b|_g^2 = |\omega|$ .



## Conclusions et perspectives

---

- Détermination des symétries du système dynamique qui décrit le micro-nageur  $SP_{R4}$  à l'aide des propriétés des équations de Stokes.
- Identification de la dynamique de  $SP_{R4}$  à termes d'ordre élevé près sous l'hypothèse des petites courbes de contrôle ainsi que le déplacement net. Il reste cinq paramètres scalaires inconnus.
- Structure des courbes de contrôle optimales dans un cas particulier qui décrit déjà une variété de déplacements nets.

- Pas de solution pour le problème d'optimisation général.
- Conjecture: En général, les courbes de contrôle optimales sont des ellipses situées dans un ou au plus deux plans totalement orthogonaux de  $\mathbb{R}^4$ . En outre, la fréquence de la rotation dans un des deux plans est le double de la fréquence dans l'autre plan.

On a les raisons suivantes pour cette conjecture:

1. Dans le cas simple  $\omega$  définit le plan dans lequel la courbe optimale est située. Or, un bivecteur non-simple représente deux plans totalement orthogonaux.  $\rightarrow$  Construire les quatre coefficients de Fourier à partir des deux plans définis par  $\omega$

2. L'équation d'Euler-Lagrange associée au problème d'optimisation (c.f. [3]) s'écrit:

$$G\ddot{\xi} - \Omega(\mu)\dot{\xi} = 0, \quad (63)$$

avec  $\Omega(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{N}_6} \mu_k M_k$ . La matrice  $\Omega(\mu)$  étant toujours anti-symétrique, la solution est une rotation dans  $R^4$ , c'est-à-dire elle est située dans deux plans totalement orthogonaux.

3. La dernière partie de la conjecture suit d'un argument de regroupement des suites **u** et **v**.

- Prouver la conjecture ci-dessus
- Faire l'approximation des bras longs pour simplifier le système encore une fois et déterminer les paramètres inconnus en termes de  $\xi_0$  et  $a$

**Questions ?**

---

## References

---



F. Alouges, A. DeSimone, L. Heltai, A. Lefebvre-Lepot, and B. M. and, “Optimally swimming stokesian robots,” *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, vol. 18, no. 5, pp. 1189–1215, 2013. DOI: 10.3934/dcdsb.2013.18.1189.



F. Alouges and G. D. Fratta, “Parking 3-sphere swimmer. i. energy minimizing strokes,” Sep. 2017. DOI: 10.31219/osf.io/7sfbj.



A. DeSimone, F. Alouges, and A. Lefebvre, “Biological fluid dynamics, non-linear partial differential equations,” in *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*, R. A. Meyers, Ed. New York, NY: Springer New York, 2011, pp. 26–31, ISBN: 978-1-4614-1806-1. DOI: 10.1007/978-1-4614-1806-1\_3. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_3).



M. J. Lighthill, “On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small reynolds numbers,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 109–118, May 1952. DOI: 10.1002/cpa.3160050201.



P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, Jun. 15, 2006, 352 pp., ISBN: 0521005515. [Online]. Available: [https://www.ebook.de/de/product/2991827/pertti\\_lounesto\\_clifford\\_algebras\\_and\\_spinors.html](https://www.ebook.de/de/product/2991827/pertti_lounesto_clifford_algebras_and_spinors.html).