Practica 1: Lenguajes

Philips

1er Cuatrimestre 2025

Ejercicio 1

Sea $\Sigma = \{a,\ b\}$ un alfabeto. Hallar:

$$\Sigma^0, \quad \Sigma^1, \quad \Sigma^2, \quad \Sigma^*, \quad \Sigma^+, \quad |\Sigma|, \quad |\Sigma^0|$$

- $\Sigma^0 = \{\lambda\}$
- $\Sigma^1 = \{a, b\}$
- $\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$
- $\Sigma^* = \bigcup\limits_{i \geq 0} \Sigma^i = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, ...\}$
- $\Sigma^+ = \bigcup\limits_{i \geq 0} \Sigma^i = \{a, b, aa, ab, ba, bb, ...\}$
- $|\Sigma| = 2$
- $|\Sigma^0| = 1$

Ejercicio 2

Decidir si, dado $\Sigma = \{a,\ b\}$, vale:

$$\lambda \in \Sigma, \quad \lambda \subseteq \Sigma, \quad \lambda \in \Sigma^+, \quad \lambda \in \Sigma^*, \quad \Sigma^0 = \lambda, \quad \Sigma^0 = \{\lambda\}$$

- $\lambda \in \Sigma \equiv False$
- $\lambda \subseteq \Sigma \equiv False$
- $\lambda \in \Sigma^+ \equiv False$
- $\lambda \in \Sigma^* \equiv True$
- $\Sigma^0 = \lambda \equiv False$
- $\Sigma^0 = \{\lambda\} \equiv True$

Ejercicio 3

Sea $\alpha = abb$ una cadena. Calcular:

$$\alpha^0, \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \prod_{k=0,\ldots,3} \alpha^k = \alpha^0.\alpha^1.\alpha^2.\alpha^3, \quad \alpha^r$$

- $\alpha^0 = \lambda$
- $\alpha^1 = abb$
- $\alpha^2 = abb.abb = abbabb$
- $\alpha^3 = abb.abb.abb = abbabbabb$
- $\prod_{k=0,\ldots,3} \alpha^k = \alpha^0.\alpha^1.\alpha^2.\alpha^3 = \lambda.abb.abbabb.abbabbabb$
- $\alpha^r = (abb)^r = bba$

Ejercicio 4

Sean las cadenas $\alpha = abb$ y $\beta = acb$. Calcular:

$$\alpha\beta, \quad (\alpha\beta)^r, \quad (\beta)^r, \quad \beta^r\alpha^r, \quad \lambda\alpha, \quad \lambda\beta, \quad \alpha\lambda\beta, \quad \alpha^2\lambda^3\beta^2$$

- $\alpha\beta = abbacb$
- $(\alpha\beta)^r = bcabba$
- $(\beta)^r = bca$
- $\beta^r\alpha^r = bcabba$
- $\lambda\alpha = abb$
- $\lambda\beta = acb$
- $\alpha\lambda\beta = abbacb$
- $\alpha^2\lambda^3\beta^2 = abbabbacbacb$

Ejercicio 5

Dado un alfabeto Σ, sean $x,y \in \Sigma$ y $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Demostrar que:

I. $|x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$

II. $|\alpha^r| = |\alpha|$

III. $|\alpha x\beta| = |x\alpha\beta|$

IV. $|\alpha.\alpha| = 2|\alpha|$

V. $(\alpha.\beta)^r = \beta^r.\alpha^r$

VI. $(\alpha^r)^r = \alpha$

VII. $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r$

i. Quiero demostrar que $|x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$.

Como $x, y \in \Sigma$, usando la definición recursiva de longitud ($||$), los puedo "sacar" de la operación de la cadena y sumar un 1 cada vez que uso la ya mencionada definición.

$|x \cdot (y \cdot \alpha)| \overset{(||)}{=} 1 + |y \cdot \alpha| \overset{(||)}{=} 2 + |\alpha|$

■

ii. Quiero demostrar que $|\alpha^r| = |\alpha|$.
Pruebo por inducción estructural sobre α:

1. Caso base: Si $\alpha = \lambda$:
$|\alpha|^r = |\lambda|$ (def. r)

2. Caso inductivo: $\alpha = x.\beta$
Suponemos que la propiedad vale para β

$$\begin{aligned} |x.\beta|^r &= |\beta^r.x| && \text{(def. r)} \\ &= |\beta^r| + 1 && \text{(def. ||)} \\ &= |\beta| + 1 && \text{(def. HI)} \\ &= |x \cdot \beta| && \text{(def. ||)} \\ &= |\alpha| && \text{(def. } \alpha\text{)} \end{aligned}$$

■

iii. Quiero demostrar que $|\alpha x \beta| = |x \alpha \beta|$.
Pruebo por inducción estructural sobre α:

1. Caso base: Si $\alpha = \lambda$:
$|\lambda x \beta| \overset{\lambda}{=} |x \lambda \beta| \overset{\alpha}{=} |x \alpha \beta|$

2. Caso inductivo: $\alpha = y.\alpha'$
Quiero ver si: $|y\alpha' x\beta| = |xy\alpha'\beta|$
Suponemos que la propiedad vale para α'

$$\begin{aligned} |(y\alpha')x\beta| &\overset{||}{=} 1 + |\alpha' x \beta| \\ &\overset{HI}{=} 1 + |x\alpha'\beta| \\ &\overset{||}{=} 1 + 1 + |\alpha'\beta| \\ &\overset{y}{=} 1 + |y\alpha'\beta| \\ &\overset{x}{=} |xy\alpha'\beta| \\ &\overset{\alpha}{=} |x\alpha\beta| \end{aligned}$$

■

iv. Quiero demostrar que $|\alpha.\alpha| = 2|\alpha|$.
Pruebo por inducción estructural sobre α:

$$\begin{gathered}\text{1. Caso base: Si } \alpha = \lambda \\ |\lambda \cdot \lambda| \stackrel{\cdot}{=} |\lambda| \stackrel{||}{=} 0 \stackrel{\text{Int}}{=} 2.0 \stackrel{||}{=} 2.|\lambda|\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{2. Caso inductivo: } \alpha = x\beta \\ \text{Quiero ver si: } |x\beta x\beta| = 2|x\beta| \\ \text{Suponemos que la propiedad vale para } \beta\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}|x\beta.x\beta| &\stackrel{||}{=} 1 + |\beta x\beta| \\ &\stackrel{\text{iii}}{=} 1 + |x\beta\beta| \\ &\stackrel{||}{=} 1 + 1 + |\beta\beta| \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} 2(1 + |\beta|) \\ &\stackrel{||}{=} 2(|x\beta|) \\ &\stackrel{\alpha}{=} 2(|\alpha|)\end{aligned}$$

$$\blacksquare$$

v. Quiero demostrar que $(\alpha.\beta)^r = \beta^r.\alpha^r$.
Pruebo por inducción estructural sobre α:

$$\begin{gathered}\text{1. Caso base: Si } \alpha = \lambda \\ (\lambda.\beta)^r \stackrel{\lambda}{=} \beta^r \stackrel{\lambda}{=} \beta^r.\lambda \stackrel{r}{=} \beta^r.\lambda^r\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{2. Caso inductivo: } \alpha = x\alpha' \\ \text{Quiero ver si: } (x\alpha'.\beta)^r = \beta^r.(x\alpha')^r \\ \text{Suponemos que la propiedad vale para } \beta\end{gathered}$$

...

1 Ejercicio 6

Dar ejemplos de cadenas que pertenezcan a los siguientes lenguajes:

I. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

II. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

III. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \land m \geq 1\}$

IV. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \land m \geq 0\}$

V. $\mathcal{L} = \{a^n (ac)^p (bab)^q \mid n \leq 0 \land q = p + 2 \land p \geq 1\}$

VI. $\mathcal{L} = \{a, b\}^3 \cap \Lambda$

VII. $\mathcal{L} = \{\alpha\alpha^r \mid \alpha \in \{a, b\}^+\}$

VIII. $\mathcal{L} = \{\alpha \in \{a, b\}^+ \mid \alpha = \alpha^+\}$

i. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Todas las palabras de $\mathcal{L}$ tienen la misma cantidad de a y b, y $\lambda \in \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{\lambda, ab, aabb, aaabbb\}$

ii. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Las palabras de $\mathcal{L}$ tienen, por lo menos, una a y una b ($\lambda \notin \mathcal{L}$), y la cantidad de apariciones de a es igual a la cantidad de apariciones de b.

Ejemplos: $\{ab, aabb, aaabbb\}$

iii. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 1\}$

No es necesario que las cantidades de aparición de a y b sean iguales pero deben aparecer al menos una vez en cada palabra, y $\lambda \notin \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{ab, abb, aaaab, aaabbbb\}$

iv. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 0\}$

La cadena b puede o no aparecer en la palabra. Por otro lado, la cadena a siempre aparece, al menos, una vez en cada palabra de $\mathcal{L}$. Por último, $\lambda \notin \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{a, abb, aaaaabbbb\}$

v. $\mathcal{L} = \{a^n (ac)^p (bab)^q \mid n \geq 0 \wedge q = p + 2 \wedge p \geq 1\}$

Las palabras de $\mathcal{L}$ tienen, al menos, una aparición de ac, ya que se cumple que $p \geq 1$. Además, dado que $q = p + 2$, esto implica que $q \geq 3$, por lo que todas las cadenas tienen, al menos, tres apariciones consecutivas de la subcadena bab (o más). Por otro lado, la cadena a puede o no aparecer en la palabra, ya que $n \geq 0$. Por último, la cantidad de apariciones de bab está directamente determinada por la cantidad de apariciones de ac, siguiendo la relación $q = p + 2$. Esto significa que siempre habrá más apariciones de bab que de ac en cualquier cadena de $\mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{aacbabbabbab, acacbabbabbabbab\}$

vi. $\mathcal{L} = \{\{a, b\}^3 \cap \Lambda\}$

$\{a, b\}^3$ representa el conjunto de todas las cadenas de longitud 3 formadas con los símbolos a y b. Pero, como Λ es el conjunto que contiene solamente la palabra vacía y todas las palabras que pertenecen a $\{a, b\}^3$ tienen longitud igual a 3, la intersección entre ambos es vacía.

Ejemplos: $\{\emptyset\}$

vii. $\mathcal{L} = \{\alpha\alpha^r \mid \alpha \in \{a, b\}^+\}$

Todas las palabras de $\mathcal{L}$ se forman concatenando una cadena que pertenezca $\{a, b\}^+$ con su reversa. Todas estas palabras tienen longitud mayor o igual que

2, por lo que $\lambda \notin \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{aa, bb, baab\}$

viii. $\mathcal{L} = \{\alpha \in \{a,b\}^+ \mid \alpha = \alpha^+\}$

Todas las palabras de $\mathcal{L}$ son cadenas de la forma $\{a,b\}^+$ y cumplen que son iguales a su reversa. $\lambda \notin \mathcal{L}$ pues $\lambda \notin \{a,b\}^+$. PREGUNTAR

Ejemplos: $\{a, b, aa, bb, aba, bab\}$

Ejercicio 7

Definir por comprensión los siguientes lenguajes:

I. $\mathcal{L}_1 = \{ab, aabb, aaabbb, ...\}$

II. $\mathcal{L}_2 = \{aab, aaaabb, aaaaaabbb, ...\}$

III. $\mathcal{L}_3 = \{aaabccc, aaaabcccc, aaaaabccccc, ...\}$

i. $\mathcal{L}_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

ii. $\mathcal{L}_2 = \{a^n b^m \mid n = m * 2 \wedge m \geq 1\}$

iii. $\mathcal{L}_3 = \{a^n b c^n \mid n \geq 3\}$

Ejercicio 8

Dados $\mathcal{L}_1 = \{a, bc\}, \mathcal{L}_2 = \{aaa, bc\}$, y siendo $\Lambda = \{\lambda\}$, calcular:

I. $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{a, bc, aaa\}$

II. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{bc\}$

III. $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \{aaaa, abc, bcaaa, bcbc\}$

IV. $\mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2)^0 = \{a, bc\}$

V. $\mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2)^2 = \mathcal{L}_1 \cdot \{aaaaaa, aaabc, bcaaa, bcbc\}$
$= \{aaaaaaa, aaaabc, abcaaa, abcbc, bcaaaaaa, bcaaabc, bcbcaaa, bcbcbc\}$

VI. $\mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2)^+ = \mathcal{L}_1 \cdot \{aaa, bc, aaaaaa, bcbc, aaabc, bcaaa, ...\} = \{aaaa, abc, bcbc, abcbc, bcaaabc, ...\}$

VII. $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^+ = \{aaaa, abc, bcaaa, bcbc, bca, aaabc, ...\}$

VIII. $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^* = \{\lambda, a, aaa, bc, aaaa, abc, bcaaa, bcbc, bca, aaabc, ...\}$

IX. $\mathcal{L}_1 \cdot \Lambda \cdot \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2$

X. $\mathcal{L}_1 \cdot \emptyset \cdot \mathcal{L}_2 = \emptyset$

XI. $(\mathcal{L}_1)^r = \{a^r, (bc)^r\} = \{a, cb\}$ PREGUNTAR

XII. $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^r = \{aaaa, abc, bcaaa, bcbc\}^r$
$= \{(aaaa)^r, (abc)^r, (bcaaa)^r, (bcbc)^r\} = \{aaaa, cba, aaacb, cbcb\}$ PREGUNTAR

Ejercicio 9

Determinar el complemento de los siguientes lenguajes, considerando los alfabetos indicados en cada caso.

I. $\mathcal{L} = \Lambda$ para $\Sigma = \{a, b\}$

II. $\mathcal{L} = \{\lambda, a\}$ para $\Sigma = \{a\}$ y $\Sigma = \{a, b\}$

III. $\mathcal{L} = \{b\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

IV. $\mathcal{L} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$ para $\Sigma = \{a\}$ y $\Sigma = \{a, b\}$

V. $\mathcal{L} = \{\alpha_1 b \alpha_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, b\}^* \wedge |\alpha_1| > |\alpha_2|\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

i. $\mathcal{L}^c = \Sigma^*$

ii. $\Sigma^* \backslash \{\lambda, a\} = \{aa, aaa, aaaa, ...\}$
$\Sigma^* \backslash \{\lambda, a\} =$ Todas las cadenas que se pueden formar con a y b, sin λ y la cadena "a".

iii. $\mathcal{L}^c = \{\lambda\} \cup \{a\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*\}$

iv. $\{a^{2n+1} \mid n \geq 0\}$ Cadenas con cantidad impar de "a".
$\{a^{2n+1} \mid n \geq 0\} \cup \{\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^* \wedge |\alpha|_b \geq 1\}$ Cadenas con cantidad impar de "a" y cadenas que contienen al menos una "b".

v. $\{\alpha_1 b \alpha_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, b\}^* \wedge |\alpha_1| \leq |\alpha_2|\} \cup \{\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^* \wedge |\alpha|_b = 0\}$
Cadenas de forma $\alpha_1 b \alpha_2$ pero con $|\alpha_1| \leq |\alpha_2|$, y cadenas que no contienen la "b".

Ejercicio 10

Sea $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ lenguajes cualesquiera. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, demostrarlas. Si no, dar un contraejemplo.

I. $\mathcal{L}^+ \subseteq \mathcal{L}^* \equiv \mathit{True}$

II. $\mathcal{L}^+ \subsetneq \mathcal{L}^* \equiv \mathit{False}$

III. $\mathcal{L}^n \cdot \mathcal{L}^m = \mathcal{L}^{n+m}$ para todo $n, m \geq 0 \equiv \mathit{True}$

IV. $\mathcal{L}^n \subseteq \mathcal{L}^{n+1}$ para todo $n \geq 0 \equiv \mathit{True}$

V. $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2, n \geq 0 \Rightarrow (\mathcal{L}_1)^n \subseteq (\mathcal{L}_2)^n \equiv \mathit{True}$

VI. $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \Rightarrow (\mathcal{L}_1)^* \subseteq (\mathcal{L}_2)^* \equiv \mathit{True}$

VII. $(\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L}^* \equiv \mathit{True}$

VIII. $(\mathcal{L}^+)^+ = \mathcal{L}^* \equiv \mathit{False}$

IX. $(\mathcal{L}^+)^* = \mathcal{L}^* \equiv \mathit{True}$

X. $(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^* = (\mathcal{L}_1)^* \cup (\mathcal{L}_2)^* \equiv \mathit{False}$

XI. $(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)^* = (\mathcal{L}_1)^* \cap (\mathcal{L}_2)^* \equiv \mathit{False}$

XII. $(\mathcal{L}^2)^* = \mathcal{L}^* \equiv False$

XIII. $(\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_2)^* = \mathcal{L}^* \equiv True$

XIV. $(\mathcal{L}^n)^r = (\mathcal{L}^r)^n$ para todo $n \geq 0$

XV. $(\mathcal{L}^*)^r = (\mathcal{L}^r)^* \equiv True$

i. Por definición:
$\mathcal{L}^+ = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{L}^n \subseteq \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{L}^n \cup \mathcal{L}^0 = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{L}^n = \mathcal{L}^*$

ii. Contraejemplo:
Sea $\mathcal{L} = \{\lambda, a\}$, entonces $\mathcal{L}^+ \subseteq \mathcal{L}^*$ pero $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^*$.

iii. 3.

iv. 4.

v. Por inducción en n:
- Caso base: si $n = 0$, ${\mathcal{L}_1}^0 = {\mathcal{L}_2}^0 = \Lambda$.
- Caso inductivo: $n = m + 1$.

Supongo que para $m \geq 0$ se cumple que: ${\mathcal{L}_1}^m \subseteq {\mathcal{L}_2}^m$. Y, quiero ver que se cumple para $n = m + 1$.
Sea $\alpha \in {\mathcal{L}_1}^n$, esto quiere decir que $\alpha = \beta \cdot \gamma$ con $\beta \in \mathcal{L}_1$ y $\gamma \in {\mathcal{L}_1}^m$.
Entonces, $\beta \in \mathcal{L}_2$ y $\gamma \in {\mathcal{L}_2}^m$, pues por HI $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ y ${\mathcal{L}_1}^m \subseteq {\mathcal{L}_2}^m$. Luego, $\alpha \in {\mathcal{L}_2}^{m+1} = {\mathcal{L}_2}^n$.

vi. 6.

vii. 7.

viii. Contraejemplo:
Sea $\mathcal{L} = \{a\} \to \lambda \notin (\mathcal{L}^+)^+$, pero $\lambda \in (\mathcal{L}^*)$. Por lo tanto, $(\mathcal{L}^+)^+ \neq (\mathcal{L}^*)$.

ix. 9.

x. Contraejemplo:
Sea $\mathcal{L}_1 = \{a\}, \mathcal{L}_2 = \{b\}, ab \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^*$ pero $ab \notin \mathcal{L}_1^* \cup \mathcal{L}_2^*$.

xi. Contraejemplo:
Sean $\mathcal{L}_1 = b$ y $\mathcal{L}_2 = bb$.
$(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)^* = \emptyset^* = \Lambda$. Pero, $(\mathcal{L}_1)^* \cap (\mathcal{L}_2)^* = \{\lambda, a, aa, aaa, ...\} \cap \{\lambda, aa, aaaa, ...\} \neq \Lambda$.

xii. Contraejemplo:
Sea $\mathcal{L} = \{a\}, a \in \mathcal{L}^*$ pero $a \notin (\mathcal{L}_2)^*$.

xiii. 13.

xiv. 14.

xv. 15.

2 Ejercicio 11

Siendo:

- $Sub(\mathcal{L})$: subcadenas del lenguaje $\mathcal{L}$.
- $Ini(\mathcal{L})$: subcadenas iniciales (prefijos) del lenguaje $\mathcal{L}$.
- $Fin(\mathcal{L})$: subcadenas finales (sufijos) del lenguaje $\mathcal{L}$.

Demostrar que si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son lenguajes:

I. $\mathrm{Fin}(\mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1)$.

II. $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)$.

III. $\mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) = \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_2) \cup \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1)\mathcal{L}_2$.

IV. $\mathrm{Ini}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \mathrm{Ini}(\mathcal{L}_1) \cup \mathrm{Ini}(\mathcal{L}_2)$.

V. $\mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1) \cup \mathrm{Fin}(\mathcal{L}_2)$.

VI. $\mathrm{Ini}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Ini}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Fin}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Fin}(\mathcal{L}_1)) = \mathrm{Sub}(\mathcal{L}_1)$.

i. 1.

ii. 2.

iii. 3.

iv. 4.

v. 5.

vi. 6.