Teórica 1 - Definiciones y demostraciones EXTRAS

Philips

1er Cuatrimestre 2025

1 Definiciones sobre palabras y cadenas:

(1) Definición recursiva de longitud:

$$|\lambda| \overset{\text{(L0)}}{=} 0$$

$$|x.\alpha| \overset{\text{(L1)}}{=} 1 + |\alpha|$$

(2) Definición recursiva de la cantidad de apariciones:

$$|\lambda|_x \overset{\text{(a0)}}{=} 0$$

$$|y \cdot \alpha|_x \overset{\text{(a1)}}{=} \begin{cases} 1 + |\alpha|_x & \text{si } y = x \\ |\alpha|_x & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

(3) Definición recursiva de reversa:

$$\lambda^r \overset{\text{(r0)}}{=} \lambda$$

$$(x\alpha)^r \overset{\text{(r1)}}{=} \alpha^r.x$$

(4) Definición recursiva de potencia:

$$\alpha^0 \overset{\text{(p0)}}{=} \lambda$$

$$\alpha^{n+1} \overset{\text{(p1)}}{=} \alpha \cdot \alpha^n$$

2 Definiciones sobre Lenguajes

(1) Complemento:

$$\mathcal{L}^c = \Sigma^* \backslash \mathcal{L}$$

(2) Unión:

$$\text{Dados } \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*,\ \ \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \in \mathcal{L}_1 \vee \alpha \in \mathcal{L}_2\}$$

(3) Intersección:

$$\text{Dados } \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*, \;\; \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \in \mathcal{L}_1 \wedge \alpha \in \mathcal{L}_2\}$$

(4) Reverso:

$$\text{Dado } \mathcal{L} \subseteq \Sigma^*, \;\; \mathcal{L}^r = \{\alpha^r \mid \alpha \in \mathcal{L}\}$$

(5) Concatenación:

$$\text{Dados } \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*, \;\; \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \{\alpha \cdot \beta \mid \alpha \in \mathcal{L}_1 \wedge \beta \in \mathcal{L}_2\}$$

(6) Potencia:

$$\mathcal{L}^n = \begin{cases} \Lambda & \text{si } n = 0 \\ \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

(7) Clausura de Kleene:

$$\mathcal{L}^* = \textstyle\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}^n$$

(8) Clausura positiva:

$$\mathcal{L}^+ = \textstyle\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{L}^n$$

(9) Prefijos
Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje:

$$\text{Ini}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists \beta \in \Sigma^* \text{ tal que } \alpha\beta \in \mathcal{L}\}$$

(10) Sufijos
Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje:

$$\text{Fin}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists \beta \in \Sigma^* \text{ tal que } \beta\alpha \in \mathcal{L}\}$$

(11) Subcadenas
Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje:

$$\text{Sub}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists \beta, \gamma \in \Sigma^* \text{ tal que } \beta\alpha\gamma \in \mathcal{L}\}$$

3 Demostraciones básicas:

(1) Propiedad: $|\alpha.\beta| = |\alpha| + |\beta|$
Demo por inducción estructural sobre α:

1. Caso base: Si $\alpha = \lambda$:
$|\lambda.\beta| = |\beta| = 0 + |\beta| = |\lambda| + |\beta|$

2. Caso inductivo: $\alpha = x.\alpha'$
Suponemos que la propiedad vale para α'

$$
\begin{aligned}
|\alpha \cdot \beta| &= |(x.\alpha').\beta| && \text{(def. } \alpha) \\
&= 1 + |\alpha' \cdot \beta| && \text{(def. } |\cdot|) \\
&= 1 + |\alpha'| + |\beta| && (HI) \\
&= |x \cdot \alpha'| + |\beta| && \text{(def. } |\cdot|) \\
&= |\alpha| + |\beta| && \text{(def. } \alpha)
\end{aligned}
$$

(2) lol