Practica 1: Lenguajes

Philips

1er Cuatrimestre 2025

Ejercicio 1

Sea $\Sigma = \{a,\ b\}$ un alfabeto. Hallar:

$$\Sigma^0, \quad \Sigma^1, \quad \Sigma^2, \quad \Sigma^*, \quad \Sigma^+, \quad |\Sigma|, \quad |\Sigma^0|$$

- $\Sigma^0 = \{\lambda\}$
- $\Sigma^1 = \{a, b\}$
- $\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$
- $\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, ...\}$
- $\Sigma^+ = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i = \{a, b, aa, ab, ba, bb, ...\}$
- $|\Sigma| = 2$
- $|\Sigma^0| = 1$

Ejercicio 2

Decidir si, dado $\Sigma = \{a,\ b\}$, vale:

$$\lambda \in \Sigma, \quad \lambda \subseteq \Sigma, \quad \lambda \in \Sigma^+, \quad \lambda \in \Sigma^*, \quad \Sigma^0 = \lambda, \quad \Sigma^0 = \{\lambda\}$$

- $\lambda \in \Sigma \equiv False$
- $\lambda \subseteq \Sigma \equiv False$
- $\lambda \in \Sigma^+ \equiv False$
- $\lambda \in \Sigma^* \equiv True$
- $\Sigma^0 = \lambda \equiv False$
- $\Sigma^0 = \{\lambda\} \equiv True$

Ejercicio 3

Sea $\alpha = abb$ una cadena. Calcular:

$$\alpha^0, \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \prod_{k=0,\ldots,3} \alpha^k = \alpha^0.\alpha^1.\alpha^2.\alpha^3, \quad \alpha^r$$

- $\alpha^0 = \lambda$
- $\alpha^1 = abb$
- $\alpha^2 = abb.abb = abbabb$
- $\alpha^3 = abb.abb.abb = abbabbabb$
- $\prod_{k=0,\ldots,3} \alpha^k = \alpha^0.\alpha^1.\alpha^2.\alpha^3 = \lambda.abb.abbabb.abbabbabb$
- $\alpha^r = (abb)^r = bba$

Ejercicio 4

Sean las cadenas $\alpha = abb$ y $\beta = acb$. Calcular:

$$\alpha\beta, \quad (\alpha\beta)^r, \quad (\beta)^r, \quad \beta^r\alpha^r, \quad \lambda\alpha, \quad \lambda\beta, \quad \alpha\lambda\beta, \quad \alpha^2\lambda^3\beta^2$$

- $\alpha\beta = abbacb$
- $(\alpha\beta)^r = bcabba$
- $(\beta)^r = bca$
- $\beta^r\alpha^r = bcabba$
- $\lambda\alpha = abb$
- $\lambda\beta = acb$
- $\alpha\lambda\beta = abbacb$
- $\alpha^2\lambda^3\beta^2 = abbabbacbacb$

Ejercicio 5

Dado un alfabeto Σ, sean $x,y \in \Sigma$ y $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Demostrar que:

I. $|x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$

II. $|\alpha^r| = |\alpha|$

III. $|\alpha x \beta| = |x \alpha \beta|$

IV. $|\alpha.\alpha| = 2|\alpha|$

V. $(\alpha.\beta)^r = \beta^r.\alpha^r$

VI. $(\alpha^r)^r = \alpha$

VII. $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r$

i. Quiero demostrar que $|x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$.

Como $x, y \in \Sigma$, usando la definición recursiva de longitud (L1), los puedo "sacar" de la operación de la cadena y sumar un 1 cada vez que uso la ya mencionada definición.

$|x \cdot (y \cdot \alpha)| \overset{(L1)}{=} 1 + |y \cdot \alpha| \overset{(L1)}{=} 2 + |\alpha|$

$\blacksquare$

ii. Quiero demostrar que $|\alpha^r| = |\alpha|$.
Pruebo por inducción estructural sobre α:

1. Caso base: Si $\alpha = \lambda$:
$|\lambda|^r = |\lambda| \qquad$ (def. r0, PREGUNTAR)

2. Caso inductivo: $\alpha = x.\alpha'$
Suponemos que la propiedad vale para α'

$|x.\alpha'|^r = |\alpha'^r.x| \qquad$ (def. r1)

...

1 Ejercicio 6

Dar ejemplos de cadenas que pertenezcan a los siguientes lenguajes:

I. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

II. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

III. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 1\}$

IV. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 0\}$

V. $\mathcal{L} = \{a^n (ac)^p (bab)^q \mid n \leq 0 \wedge q = p + 2 \wedge p \geq 1\}$

VI. $\mathcal{L} = \{a, b\}^3 \cap \Lambda$

VII. $\mathcal{L} = \{\alpha\alpha^r \mid \alpha \in \{a, b\}^+\}$

VIII. $\mathcal{L} = \{\alpha \in \{a, b\}^+ \mid \alpha = \alpha^+\}$

i. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Todas las palabras de $\mathcal{L}$ tienen la misma cantidad de a y b, y $\lambda \in \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{\lambda, ab, aabb, aaabbb\}$

ii. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Las palabras de $\mathcal{L}$ tienen, por lo menos, una a y una b ($\lambda \notin \mathcal{L}$), y la cantidad de apariciones de a es igual a la cantidad de apariciones de b.

Ejemplos: $\{ab, aabb, aaabbb\}$

iii. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 1\}$

No es necesario que las cantidades de aparición de a y b sean iguales pero deben aparecer al menos una vez en cada palabra, y $\lambda \notin \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{ab, abb, aaaab, aaabbbb\}$

iv. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 0\}$

La cadena b puede o no aparecer en la palabra. Por otro lado, la cadena a siempre aparece, al menos, una vez en cada palabra de $\mathcal{L}$. Por último, $\lambda \notin \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{a, abb, aaaaabbbb\}$

v. $\mathcal{L} = \{a^n (ac)^p (bab)^q \mid n \geq 0 \wedge q = p + 2 \wedge p \geq 1\}$

Las palabras de $\mathcal{L}$ tienen, al menos, una aparición de ac, ya que se cumple que $p \geq 1$. Además, dado que $q = p + 2$, esto implica que $q \geq 3$, por lo que todas las cadenas tienen, al menos, tres apariciones consecutivas de la subcadena bab (o más). Por otro lado, la cadena a puede o no aparecer en la palabra, ya que $n \geq 0$. Por último, la cantidad de apariciones de bab está directamente determinada por la cantidad de apariciones de ac, siguiendo la relación $q = p + 2$. Esto significa que siempre habrá más apariciones de bab que de ac en cualquier cadena de $\mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{aacbabbabbab, acacbabbabbabbab\}$

vi. $\mathcal{L} = \{\{a, b\}^3 \cap \Lambda\}$

$\{a, b\}^3$ representa el conjunto de todas las cadenas de longitud 3 formadas con los símbolos a y b. Pero, como Λ es el conjunto que contiene solamente la palabra vacía y todas las palabras que pertenecen a $\{a, b\}^3$ tienen longitud igual a 3, la intersección entre ambos es vacía.

Ejemplos: $\{\emptyset\}$

vii. $\mathcal{L} = \{\alpha\alpha^r \mid \alpha \in \{a, b\}^+\}$

Todas las palabras de $\mathcal{L}$ se forman concatenando una cadena que pertenezca $\{a, b\}^+$ con su reversa. Todas estas palabras tienen longitud mayor o igual que 2, por lo que $\lambda \notin \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{aa, bb, baab\}$

viii. $\mathcal{L} = \{\alpha \in \{a, b\}^+ \mid \alpha = \alpha^+\}$

Todas las palabras de $\mathcal{L}$ son cadenas de la forma $\{a, b\}^+$ y cumplen que son iguales a su reversa. $\lambda \notin \mathcal{L}$ pues $\lambda \notin \{a, b\}^+$. PREGUNTAR

Ejemplos: $\{a, b, aa, bb, aba, bab\}$

Ejercicio 7

Definir por comprensión los siguientes lenguajes:

I. $\mathcal{L}_1 = \{ab, aabb, aaabbb, ...\}$

II. $\mathcal{L}_2 = \{aab, aaaabb, aaaaaabbb, ...\}$

III. $\mathcal{L}_3 = \{aaabccc, aaaabcccc, aaaaabccccc, ...\}$

i. $\mathcal{L}_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

ii. $\mathcal{L}_2 = \{a^n b^m \mid n = m * 2 \wedge m \geq 1\}$

iii. $\mathcal{L}_3 = \{a^n b c^n \mid n \geq 3\}$

Ejercicio 8

Dados $\mathcal{L}_1 = \{a, bc\}, \mathcal{L}_2 = \{aaa, bc\}$, y siendo $\Lambda = \{\lambda\}$, calcular:

I. $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{a, bc, aaa\}$

II. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{bc\}$

III. $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \{aaaa, abc, bcaaa, bcbc\}$

IV. $\mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2)^0 = \{a, bc\}$

V. $\mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2)^2 = \mathcal{L}_1 \cdot \{aaaaaa, aaabc, bcaaa, bcbc\}$
$= \{aaaaaaa, aaaabc, abcaaa, abcbc, bcaaaaaa, bcaaabc, bcbcaaa, bcbcbc\}$

VI. $\mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2)^+ = \mathcal{L}_1 \cdot \{aaa, bc, aaaaaa, bcbc, aaabc, bcaaa, ...\} = \{aaaa, abc, bcbc, abcbc, bcaaabc, ...\}$

VII. $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^+ = \{aaaa, abc, bcaaa, bcbc, bca, aaabc, ...\}$

VIII. $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^* = \{\lambda, a, aaa, bc, aaaa, abc, bcaaa, bcbc, bca, aaabc, ...\}$

IX. $\mathcal{L}_1 \cdot \Lambda \cdot \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2$

X. $\mathcal{L}_1 \cdot \emptyset \cdot \mathcal{L}_2 = \emptyset$

XI. $(\mathcal{L}_1)^r = \{a^r, (bc)^r\} = \{a, cb\}$ PREGUNTAR

XII. $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)^r = \{aaaa, abc, bcaaa, bcbc\}^r$
$= \{(aaaa)^r, (abc)^r, (bcaaa)^r, (bcbc)^r\} = \{aaaa, cba, aaacb, cbcb\}$ PREGUNTAR

Ejercicio 9

Determinar el complemento de los siguientes lenguajes, considerando los alfabetos indicados en cada caso.

I. $\mathcal{L} = \Lambda$ para $\Sigma = \{a, b\}$

II. $\mathcal{L} = \{\lambda, a\}$ para $\Sigma = \{a\}$ y $\Sigma = \{a, b\}$

III. $\mathcal{L} = \{b\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

IV. $\mathcal{L} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$ para $\Sigma = \{a\}$ y $\Sigma = \{a, b\}$

V. $\mathcal{L} = \{\alpha_1 b \alpha_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, b\}^* \wedge |\alpha_1| > |\alpha_2|\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

i. $\mathcal{L}^c = \Sigma^*$

ii. $\Sigma^* \backslash \{\lambda, a\} = \{aa, aaa, aaaa, ...\}$
$\Sigma^* \backslash \{\lambda, a\} =$ Todas las cadenas que se pueden formar con a y b, sin λ y la cadena "a".

iii. asd