

# Practica 1 - Definiciones y demostraciones EXTRAS

Philips

1er Cuatrimestre 2025

## 1 Definiciones sobre palabras y cadenas:

(1) Definición recursiva de longitud:

$$|\lambda| \stackrel{(L0)}{=} 0$$

$$|x.\alpha| \stackrel{(L1)}{=} 1 + |\alpha|$$

(2) Definición recursiva de la cantidad de apariciones:

$$|\lambda|_x \stackrel{(a0)}{=} 0$$

$$|y \cdot \alpha|_x \stackrel{(a1)}{=} \begin{cases} 1 + |\alpha|_x & \text{si } y = x \\ |\alpha|_x & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

(3) Definición recursiva de reversa:

$$\lambda^r \stackrel{(r0)}{=} \lambda$$

$$(x\alpha)^r \stackrel{(r1)}{=} \alpha^r.x$$

(4) Definición recursiva de potencia:

$$\alpha^0 \stackrel{(p0)}{=} \lambda$$

$$\alpha^{n+1} \stackrel{(p1)}{=} \alpha \cdot \alpha^n$$

## 2 Definiciones sobre Lenguajes

(1) Complemento:

$$\mathcal{L}^c = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}$$

(2) Unión:

$$\text{Dados } \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*, \quad \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \in \mathcal{L}_1 \vee \alpha \in \mathcal{L}_2\}$$

(3) Intersección:

$$\text{Dados } \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*, \quad \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \in \mathcal{L}_1 \wedge \alpha \in \mathcal{L}_2\}$$

(4) Reverso:

$$\text{Dado } \mathcal{L} \subseteq \Sigma^*, \quad \mathcal{L}^r = \{\alpha^r \mid \alpha \in \mathcal{L}\}$$

(5) Concatenación:

$$\text{Dados } \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*, \quad \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \{\alpha \cdot \beta \mid \alpha \in \mathcal{L}_1 \wedge \beta \in \mathcal{L}_2\}$$

(6) Potencia:

$$\mathcal{L}^n = \begin{cases} \Lambda & \text{si } n = 0 \\ \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

(7) Clausura de Kleene:

$$\mathcal{L}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}^n$$

(8) Clausura positiva:

$$\mathcal{L}^+ = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{L}^n$$

(9) Prefijos

Sea  $L \subseteq \Sigma^*$  un lenguaje:

$$\text{Ini}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists \beta \in \Sigma^* \text{ tal que } \alpha\beta \in \mathcal{L}\}$$

(10) Sufijos

Sea  $L \subseteq \Sigma^*$  un lenguaje:

$$\text{Fin}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists \beta \in \Sigma^* \text{ tal que } \beta\alpha \in \mathcal{L}\}$$

(11) Subcadenas

Sea  $L \subseteq \Sigma^*$  un lenguaje:

$$\text{Sub}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists \beta, \gamma \in \Sigma^* \text{ tal que } \beta\alpha\gamma \in \mathcal{L}\}$$

### 3 Demostraciones básicas:

(1) Propiedad:  $|\alpha.\beta| = |\alpha| + |\beta|$

Demo por inducción estructural sobre  $\alpha$ :

1. Caso base: Si  $\alpha = \lambda$ :

$$|\lambda.\beta| = |\beta| = 0 + |\beta| = |\lambda| + |\beta|$$

2. Caso inductivo:  $\alpha = x.\alpha'$

Suponemos que la propiedad vale para  $\alpha'$

$$\begin{aligned}
|\alpha \cdot \beta| &= |(x.\alpha').\beta| && (\text{def. } \alpha) \\
&= 1 + |\alpha' \cdot \beta| && (\text{def. } |\cdot|) \\
&= 1 + |\alpha'| + |\beta| && (HI) \\
&= |x \cdot \alpha'| + |\beta| && (\text{def. } |\cdot|) \\
&= |\alpha| + |\beta| && (\text{def. } \alpha)
\end{aligned}$$

(2) lol