

# Práctica 3 - PLP

Philips

1er Cuatrimestre 2025

## Dedución natural

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash A} \text{ Ax} \quad \overline{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \text{ Ax}}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow E}{\Gamma' \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

### 1 Ejercicio 5

I. Modus ponens relativizado: ?

$$\frac{\frac{\overline{\rho \Rightarrow q \Rightarrow \tau, \rho \Rightarrow q, \rho \vdash \rho \Rightarrow q \Rightarrow \tau} \text{ ax} \quad \overline{\rho \Rightarrow q \Rightarrow \tau, \rho \Rightarrow q, \rho \vdash \rho \Rightarrow q} \text{ ax}}{\frac{\frac{\rho \Rightarrow q \Rightarrow \tau, \rho \Rightarrow q, \rho \vdash \tau}{\rho \Rightarrow q \Rightarrow \tau, \rho \Rightarrow q \vdash \rho \Rightarrow \tau} \Rightarrow i}{\rho \Rightarrow q \Rightarrow \tau \vdash (\rho \Rightarrow q) \Rightarrow \rho \Rightarrow \tau} \Rightarrow i}{\vdash (\rho \Rightarrow q \Rightarrow \tau) \Rightarrow (\rho \Rightarrow q) \Rightarrow \rho \Rightarrow \tau} \Rightarrow i$$

II. Reducción al absurdo:

$$\frac{\frac{\overline{(p \Rightarrow \perp), p \vdash p \Rightarrow \perp} \text{ ax} \quad \overline{(p \Rightarrow \perp), p \vdash p} \text{ ax}}{(p \Rightarrow \perp), p \vdash \perp} \Rightarrow e}{\frac{(p \Rightarrow \perp) \vdash \neg p}{\vdash (p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg p} \neg i} \Rightarrow i$$

III. Introducción de la doble negación:

$$\frac{\frac{\overline{p, \neg p \vdash p} \text{ ax} \quad \overline{p, \neg p \vdash \neg p} \text{ ax}}{p, \neg p \vdash \perp} \neg e}{\frac{p \vdash \neg \neg p}{\vdash p \Rightarrow \neg \neg p} \neg i} \Rightarrow i$$

IV. Eliminación de la triple negación:

$$\frac{\frac{\overline{\neg \neg \neg p, p \vdash \neg \neg p} \text{ III} \quad \overline{\neg \neg \neg p, p \vdash \neg \neg \neg p} \text{ ax}}{\neg \neg \neg p, p \vdash \perp} \neg e}{\frac{\neg \neg \neg p \vdash \neg p}{\vdash \neg \neg \neg p \Rightarrow \neg p} \neg i} \Rightarrow i$$

V. Contraposición:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma), \neg \sigma, p \vdash \neg \sigma} \text{ax} \quad \frac{}{(p \Rightarrow \sigma), \neg \sigma, p \vdash p} \text{ax} \quad \frac{}{(p \Rightarrow \sigma), \neg \sigma, p \vdash p \Rightarrow \sigma} \text{ax} \\
 \hline
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma), \neg \sigma, p \vdash \sigma} \neg e \\
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma), \neg \sigma, p \vdash \perp} \neg i \\
 \hline
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma), \neg \sigma \vdash \neg p} \Rightarrow i \\
 \hline
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma) \vdash \neg \sigma \Rightarrow \neg p} \Rightarrow i \\
 \hline
 \vdash (p \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\neg \sigma \Rightarrow \neg p) \Rightarrow i
 \end{array}$$

VI. Adjunción:  $((p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau)$

$(\Rightarrow)$  ida

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{((p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau), p, \sigma \vdash \sigma} \text{ax} \quad \frac{}{((p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau), p, \sigma \vdash p} \text{ax} \\
 \hline
 \frac{}{((p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau), p, \sigma \vdash (p \wedge \sigma)} \wedge i \\
 \hline
 \frac{}{((p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau), p, \sigma \vdash (p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau} \text{ax} \\
 \hline
 \frac{}{(p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau, p, \sigma \vdash \tau} \Rightarrow i \\
 \hline
 \frac{}{(p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau, p \vdash \sigma \Rightarrow \tau} \Rightarrow i \\
 \hline
 \frac{}{(p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau \vdash (p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau)} \Rightarrow i \\
 \hline
 \vdash ((p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau) \Rightarrow (p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow i
 \end{array}$$

$(\Rightarrow)$  vuelta

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau), (p \wedge \sigma), p \vdash (p \wedge \sigma)} \text{ax} \\
 \hline
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau), (p \wedge \sigma), p \vdash \sigma} \wedge e_2 \\
 \hline
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau), (p \wedge \sigma) \vdash p \Rightarrow \sigma} \Rightarrow i \quad \frac{}{(p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau), (p \wedge \sigma) \vdash p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau} \text{ax} \\
 \hline
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau), (p \wedge \sigma) \vdash \tau} \Rightarrow i \\
 \hline
 \frac{}{(p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \vdash ((p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau)} \Rightarrow i \\
 \hline
 \vdash (p \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow ((p \wedge \sigma) \Rightarrow \tau) \Rightarrow i
 \end{array}$$

VII. Ley de Morgan: