

Ejercicio 5 ★

Unir con flechas las expresiones que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* ("most general unifier"). Asumir que a es una constante, X, Y, Z son variables, f y g son símbolos de función, y P y Q predicados.

$P(f(X))$ $P(a)$ $P(Y)$ $Q(X, f(Y))$ $Q(X, f(Z))$ $Q(X, f(a))$ X $f(X)$

$P(X)$ $P(f(a))$ $P(g(Z))$ $Q(f(Y), X)$ $Q(f(Y), f(X))$ $Q(f(Y), Y)$ $f(f(c))$ $f(g(Y))$

- X unifica con todas las expresiones, menos las que contengan a X como subtérmino.
 $\hookrightarrow \{X \doteq P(X)\} \longrightarrow$ Falla por occurs-check.
- $\{Q(X, f(Z)) \doteq Q(f(Y), Y)\} \xrightarrow{\text{dec}} \{X \doteq f(Y), f(Z) \doteq Y\} \xrightarrow{\text{elim}} \{f(Z) \doteq Y\} \xrightarrow{\text{swap}} \{Y \doteq f(Z)\} \xrightarrow{\text{elim}} \emptyset$
- $\{Q(X, f(Z)) \doteq Q(f(Y), Y)\} \xrightarrow{\text{dec}} \{X \doteq f(Y), f(Z) \doteq Y\} \xrightarrow{\text{elim}} \{f(Z) \doteq Y\} \xrightarrow{\text{swap}} \{Y \doteq f(Z)\} \xrightarrow{\text{elim}} \emptyset$
- $\{P(a) \doteq P(g(Z))\} \xrightarrow{\text{dec}} \{a \doteq g(Z)\} \longrightarrow$ Falla x clash (a es una cte)

Ejercicio 6 ★

Determinar, para cada uno de los siguientes pares de términos de primer orden, si son unificables o no. En cada caso justificar su respuesta exhibiendo una secuencia exitosa o fallida (según el caso) del algoritmo de Martelli-Montanari. Asimismo, en caso de que los términos sean unificables indicar el *mgu* ("most general unifier"). Notación: X, Y, Z variables; a, b, c constantes; f, g símbolos de función.

- $f(X, X, Y)$ y $f(a, b, Z)$
- Y y $f(X)$
- $f(g(c, Y), X)$ y $f(Z, g(Z, a))$
- $f(a)$ y $g(Y)$
- $f(X)$ y X
- $g(X, Y)$ y $g(f(Y), f(X))$

- $\{f(X, X, Y) \doteq f(a, b, Z)\} \xrightarrow{\text{dec}} \{X \doteq a, X \doteq b, Y \doteq Z\} \xrightarrow{\text{elim}} \{a \doteq b, Y \doteq Z\} \longrightarrow$ Falla x occurs-check
- $\{Y \doteq f(X)\} \xrightarrow{\text{elim}} \emptyset$
- $\{f(g(c, Y), X) \doteq f(Z, g(Z, a))\} \xrightarrow{\text{dec}} \{g(c, Y) \doteq Z, X \doteq g(Z, a)\} \xrightarrow{\text{swap}} \{Z \doteq g(c, Y), X \doteq g(Z, a)\} \xrightarrow{\text{elim}} \{X \doteq g(g(c, Y), a)\} \xrightarrow{\text{elim}} \emptyset$
 $\Rightarrow S = \{X := g(g(c, Y), a), Z := g(c, Y)\}$
- $\{f(a) \doteq g(Y)\} \xrightarrow{\text{dec}} \{a \doteq Y\} \xrightarrow{\text{swap}} \{Y \doteq a\} \xrightarrow{\text{elim}} \emptyset$
- $\{f(X) \doteq X\} \longrightarrow$ Falla x occurs-check
- $\{g(X, Y) \doteq g(f(Y), f(X))\} \xrightarrow{\text{dec}} \{X \doteq f(Y), Y \doteq f(X)\} \xrightarrow{\text{elim}} \{Y \doteq f(f(Y))\} \longrightarrow$ Falla x occurs-check

Ejercicio 7

Preguntas para pensar.

- I. La relación entre términos *unifica con*, ¿es reflexiva? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva?
- II. ¿Existe algún término t tal que todo término s unifique con él?
- III. ¿Cómo aplicaría el algoritmo de unificación al problema de determinar si, dado un conjunto finito de términos, existe un unificador común a todos?

I) • Es reflexiva trivialmente x la regla de λ de λ
 • Es simétrica por swap siempre que haga una variable de los 2 lados del igual.
 • Es transitiva x construcción de la sustitución.

II) No, ya que:

- Si t es una var, no podrá unificar con un término que contenga a t como subtérmino (Falla x occurs-check).
- Si t es un predicado/función, no podrá unificar con otro término s que sea un pred fun distinta

Ejercicio 8 ★

Sean las constantes Nat y Bool y la función binaria \rightarrow (representada como un operador infijo), determinar el resultado de aplicar el algoritmo MGU ("most general unifier") sobre las ecuaciones planteadas a continuación. En caso de tener éxito, mostrar la sustitución resultante.

- I. MGU $\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}\}$
- II. MGU $\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq T_3\}$
- III. MGU $\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq T_2\}$
- IV. MGU $\{(T_2 \rightarrow T_1) \rightarrow \text{Bool} \doteq T_2 \rightarrow T_3\}$
- V. MGU $\{T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{Bool} \doteq T_2 \rightarrow T_3\}$
- VI. MGU $\{T_1 \rightarrow \text{Bool} \doteq \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}, T_1 \doteq T_2 \rightarrow T_3\}$
- VII. MGU $\{T_1 \rightarrow \text{Bool} \doteq \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}, T_2 \doteq T_1 \rightarrow T_1\}$
- VIII. MGU $\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq T_3 \rightarrow T_4, T_3 \doteq T_2 \rightarrow T_1\}$

I) $\xrightarrow{\text{dec}} \{T_1 \doteq \text{Nat}, T_2 \doteq \text{Bool}\} \xrightarrow{\text{elim}_{T_1}} \{T_2 \doteq \text{Bool}\} \xrightarrow{\text{elim}_{T_2}} \emptyset \quad S = \{T_2 := \text{B}, T_1 := \text{B}\}$

II) $\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq T_3\} \xrightarrow{\text{swap}} \{T_3 \doteq T_1 \rightarrow T_2\} \xrightarrow{\text{elim}_{T_3}} \emptyset \quad S = \{T_3 := T_1 \rightarrow T_2\}$

III) $\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq T_2\} \rightarrow \text{Falla x occurs-check}$

IV) $\{(T_2 \rightarrow T_1) \rightarrow \text{Bool} \doteq T_2 \rightarrow T_3\} \xrightarrow{\text{dec}} \{(T_2 \rightarrow T_1) \doteq T_2, \text{Bool} \doteq T_3\} \rightarrow \text{Falla x occurs-check}$

V) $\{T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{B} \doteq T_2 \rightarrow T_3\} \xrightarrow{\text{dec}} \{T_2 \doteq T_2, T_1 \rightarrow \text{B} \doteq T_3\} \xrightarrow{\text{del}} \{T_1 \rightarrow \text{B} \doteq T_3\} \xrightarrow{\text{swap}} \{T_3 \doteq T_1 \rightarrow \text{B}\} \xrightarrow{\text{elim}_{T_3}} \emptyset \quad S = \{T_3 := T_1 \rightarrow \text{B}\}$

VI) $\{T_1 \rightarrow \text{Bool} \doteq \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}, T_1 \doteq T_2 \rightarrow T_3\} \xrightarrow{\text{dec}} \{T_1 \doteq \text{Nat}, \text{Bool} \doteq \text{Bool}, T_1 \doteq T_2 \rightarrow T_3\} \xrightarrow{\text{del}} \{T_1 \doteq \text{Nat}, T_1 \doteq T_2 \rightarrow T_3\} \xrightarrow{\text{elim}_{T_1}} \{\text{Nat} \doteq T_2 \rightarrow T_3\} \rightarrow \text{Falla x clash}$

VII) $\{T_1 \rightarrow \text{B} \doteq \text{N} \rightarrow \text{B}, T_2 \doteq T_1 \rightarrow T_1\} \xrightarrow{\text{dec}} \{T_1 \doteq \text{N}, \text{B} \doteq \text{B}, T_2 \doteq T_1 \rightarrow T_1\} \xrightarrow{\text{elim}_{T_1}} \{\text{B} \doteq \text{B}, T_2 \doteq \text{N} \rightarrow \text{N}\} \xrightarrow{\text{del}} \{T_2 \doteq \text{N} \rightarrow \text{N}\} \xrightarrow{\text{elim}_{T_2}} \emptyset \quad S = \{T_2 := \text{N} \rightarrow \text{N}, T_1 := \text{N}\}$

VIII) $\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq T_3 \rightarrow T_4, T_3 \doteq T_2 \rightarrow T_1\} \xrightarrow{\text{dec}} \{T_1 \doteq T_3, T_2 \doteq T_4, T_3 \doteq T_2 \rightarrow T_1\} \xrightarrow{\text{elim}_{T_1}} \{T_2 \doteq T_4, T_3 \doteq T_2 \rightarrow T_3\} \rightarrow \text{Falla x occurs-check.}$