Ejercicio 1

Dados $\mathcal{F} = \{d, f, g\}$, donde d itene aridad 0, f aridad 2 y g aridad 3. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son términos sobre $\mathcal{F}$?

I. $g(d, d)$ ✗
II. $f(X, g(Y, Z), d)$ ✗
III. $g(X, f(d, Z), d)$ ✓
IV. $g(X, h(Y, Z), d)$ ✗
V. $f(f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d)), g(d, d)), g(f(d, d, X), d), Z)$ ✗

Ejercicio 2

Sean c una constante, f un símbolo de función de aridad 1 y S y B, dos símbolos de predicado binarios. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son fórmulas?

I. $S(c, X)$ ✓
II. $B(c, f(c))$ ✓
III. $f(c)$ ✓
IV. $B(B(c, X), Y)$ ✗
V. $S(B(c), Z)$ ✗
VI. $(B(X, Y) \Rightarrow (\exists Z.S(Z, Y)))$ ✓
VII. $(S(X, Y) \Rightarrow S(Y, f(f(X))))$ ✓
VIII. $B(X, Y) \Rightarrow f(X)$ ✓
IX. $S(X, f(Y)) \wedge B(X, Y)$ ✓
X. $\forall X.B(X, f(X))$ ✓
XI. $\exists X.B(Y, X(c))$ ✗

IV) No, un Predicado No Puede tomar otro Predicado. Los Predicados toman términos, y estos son funciones y/o variables.

V) B es un Pred binario.

XI) No, X es una variable (No toma argumentos)

Ejercicio 3

Sea $\sigma = \exists X.P(Y, Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z)$

I. Identificar todas las variables libres y ligadas.
II. Calcular $\sigma\{X := W\}$, $\sigma\{Y := W\}$, $\sigma\{Y := f(X)\}$ y $\sigma\{Z := g(Y, Z)\}$.

I) libres ; ligadas $(\exists X. P(Y, Z)) \wedge (\forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z))$

II) • $\sigma\{X := W\} \Rightarrow \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, W) \vee P(Y, Z)$

• $\sigma\{Y := W\} \Rightarrow \exists X. P(W, Z) \wedge \forall Y'. \neg Q(Y', X) \vee P(Y', Z)$

• $\sigma\{Z := g(Y, Z)\}$

$\Rightarrow \exists X. P(Y, g(Y, Z)) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, g(Y, Z))$

Ejercicio 4

Dada $\sigma = \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)$

I. Identificar todas las variables libres y ligadas.

II. Calcular $\sigma\{X := t\}$, $\sigma\{Y := t\}$ y $\sigma\{Z := t\}$ con $t = g(f(g(Y,Y)),Y)$.

III. Calcular $\sigma\{X := t, Y := t, Z := t\}$ con $t = g(f(g(Y,Y)),Y)$.

IV. Calcular $\sigma(\{X := t\} \circ \{Y := t\} \circ \{Z := t\})$ con $t = g(f(g(Y,Y)),Y)$.

$(\neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z))) \wedge (\forall Z.P(X,Y,Z))$

II)

- $\sigma\{X:=t\} \Rightarrow \neg\forall X'.(\exists Y.P(X',Y,Z)) \wedge \forall Z.P(g(f(g(Y,Y)),Y),Y,Z)$
- $\sigma\{Y:=t\} \Rightarrow \neg\forall X.(\exists Y'.P(X,Y',Z)) \wedge \forall Z.P(X,g(f(g(Y,Y)),Y),Z)$
- $\sigma\{Z:=t\}$

  $\rightarrow \neg\forall X.(\exists Y'.P(X,Y',g(f(g(Y,Y)),Y))) \wedge \forall Z'.P(X,Y,Z')$

III) $\sigma\{X:=t, Y:=t, Z:=t\}$ con $t = g(f(g(Y,Y)),Y)$

$\neg\forall X'.(\exists Y'.P(X',Y',Z)) \wedge \forall Z'.P(X,Y,Z')$

$= \neg\forall X'.(\exists Y'.P(X',Y',g(f(g(Y,Y)),Y))) \wedge \forall Z'.P(g(f(g(Y,Y)),Y), g(f(g(Y,Y)),Y), Z')$

IV) Resumen

- Notamos $\sigma\{X:=t\}$ a la sustitución de las ocurrencias libres de X en la fórmula σ por el término t, evitando la captura de variables.
  - Si el término t contiene una variable Z ligada en σ, entonces antes de aplicar la sustitución, renombro la Z ligada en σ, y luego aplico la sustitución.