

# La Magnétohydrodynamique et son application

## à la propulsion navale



Numéro de candidat :  
**25545**

Le Yamato I  
Source : Wikipedia

# **Comment mettre en évidence le phénomène de magnétohydrodynamique et construire un prototype de bateau fonctionnant avec ce principe ?**

## Objectifs

- Mettre en évidence le phénomène de magnétohydrodynamique (MHD) par une expérience simple
- S'intéresser aux phénomènes chimiques à l'oeuvre dans le processus
- Construire un prototype de bateau fonctionnant par MHD

## Sommaire

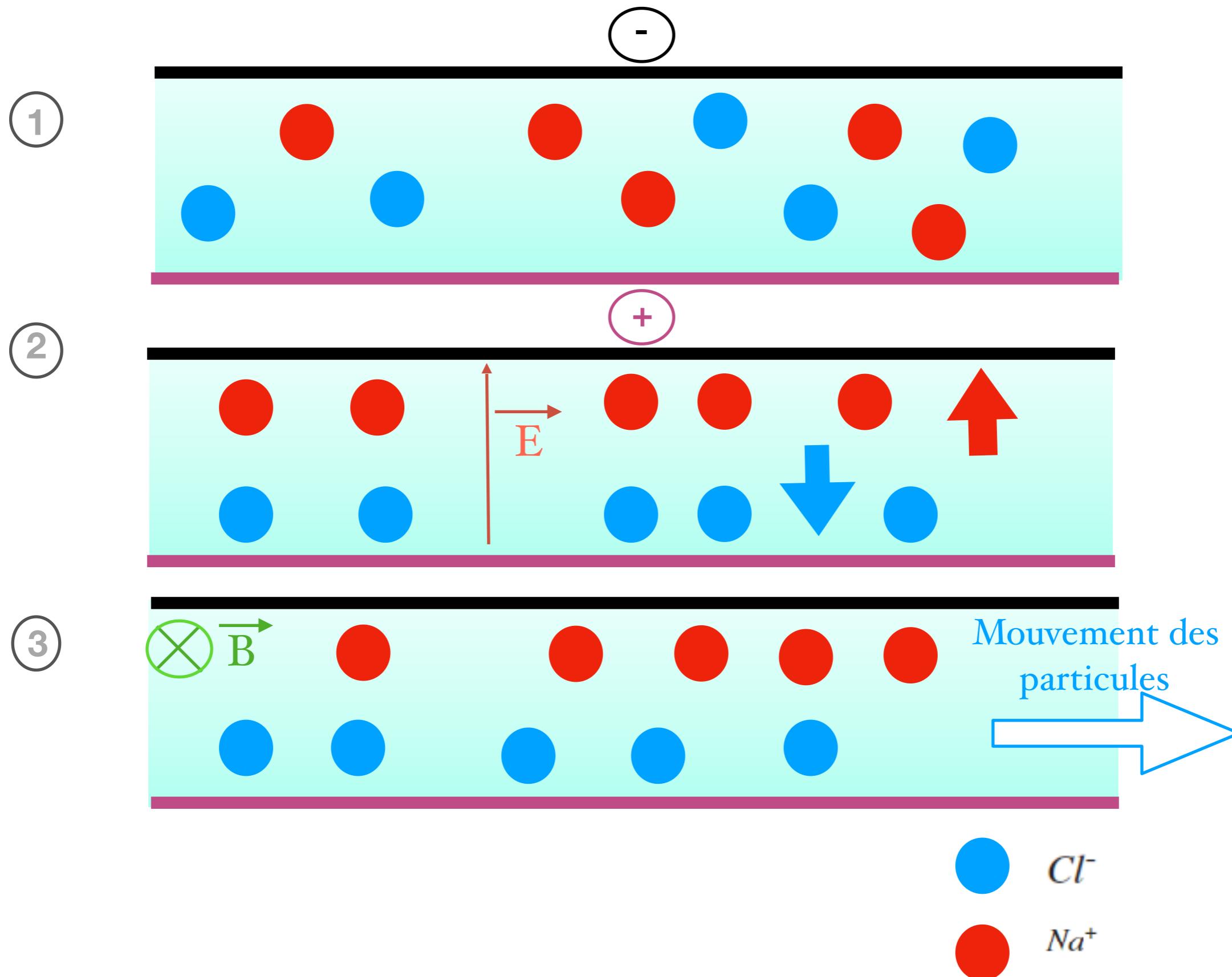
I. Mise en évidence du phénomène

II. Processus chimiques à l'oeuvre

III. La propulsion MHD et autres applications

## I) Mise en évidence du phénomène

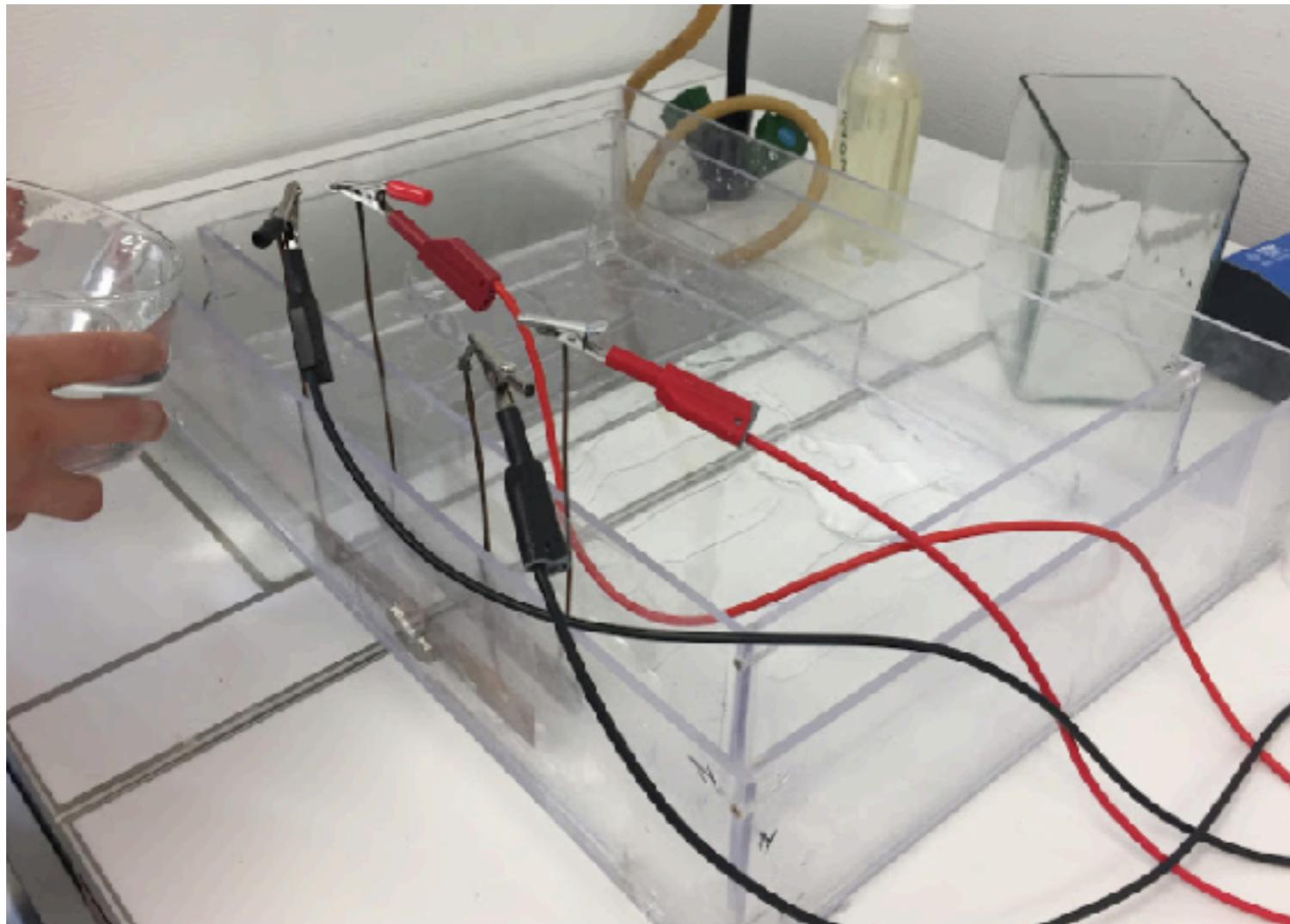
# Principe simplifié de la magnétohydrodynamique



## Première expérience : mise en évidence du phénomène

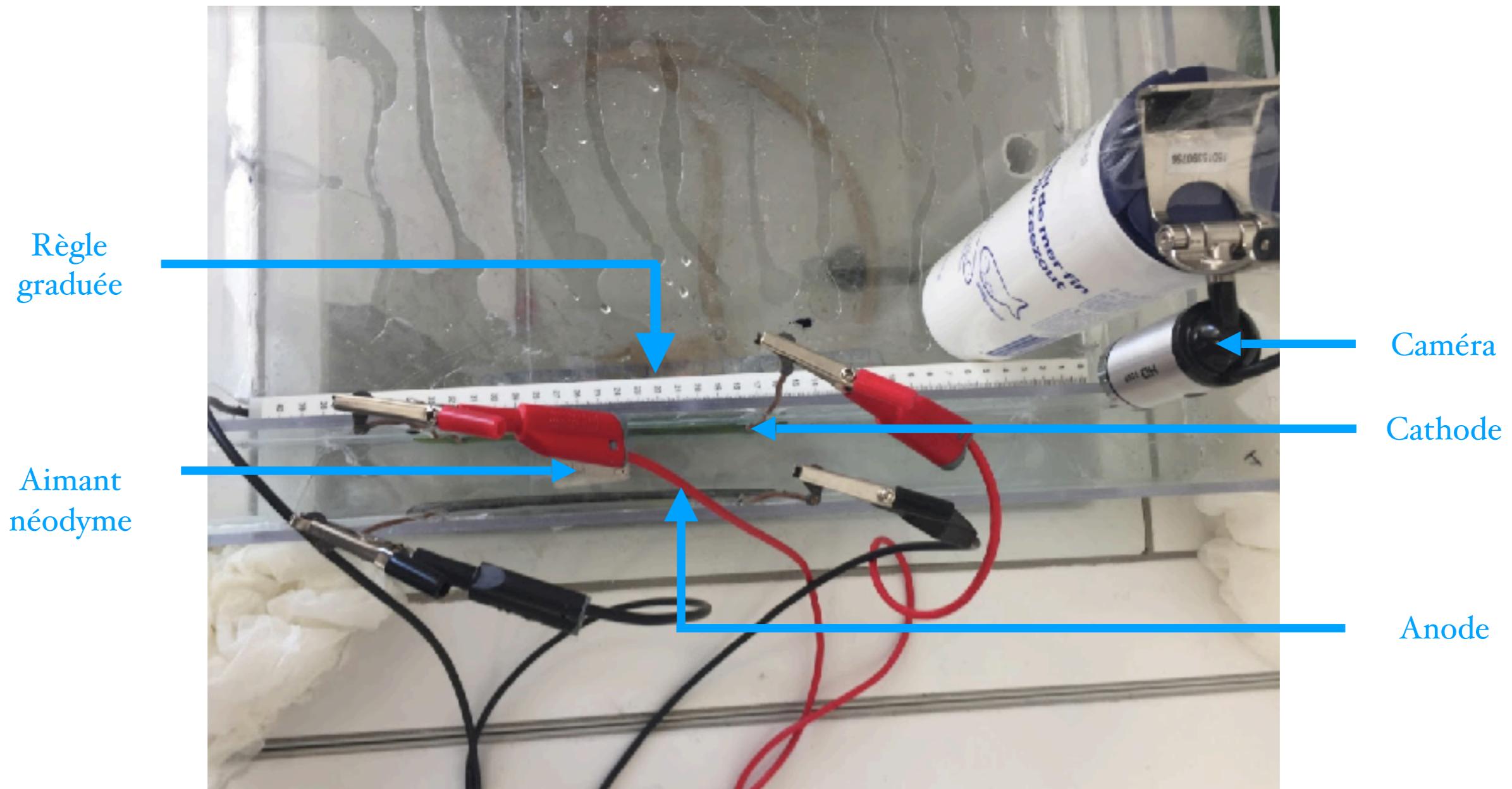
### Objectifs :

- Mettre en mouvement le fluide (eau salée) sous l'effet d'un champ électrique et d'un champ magnétique extérieurs.
- Relever la vitesse du fluide à l'aide d'un logiciel de mesure

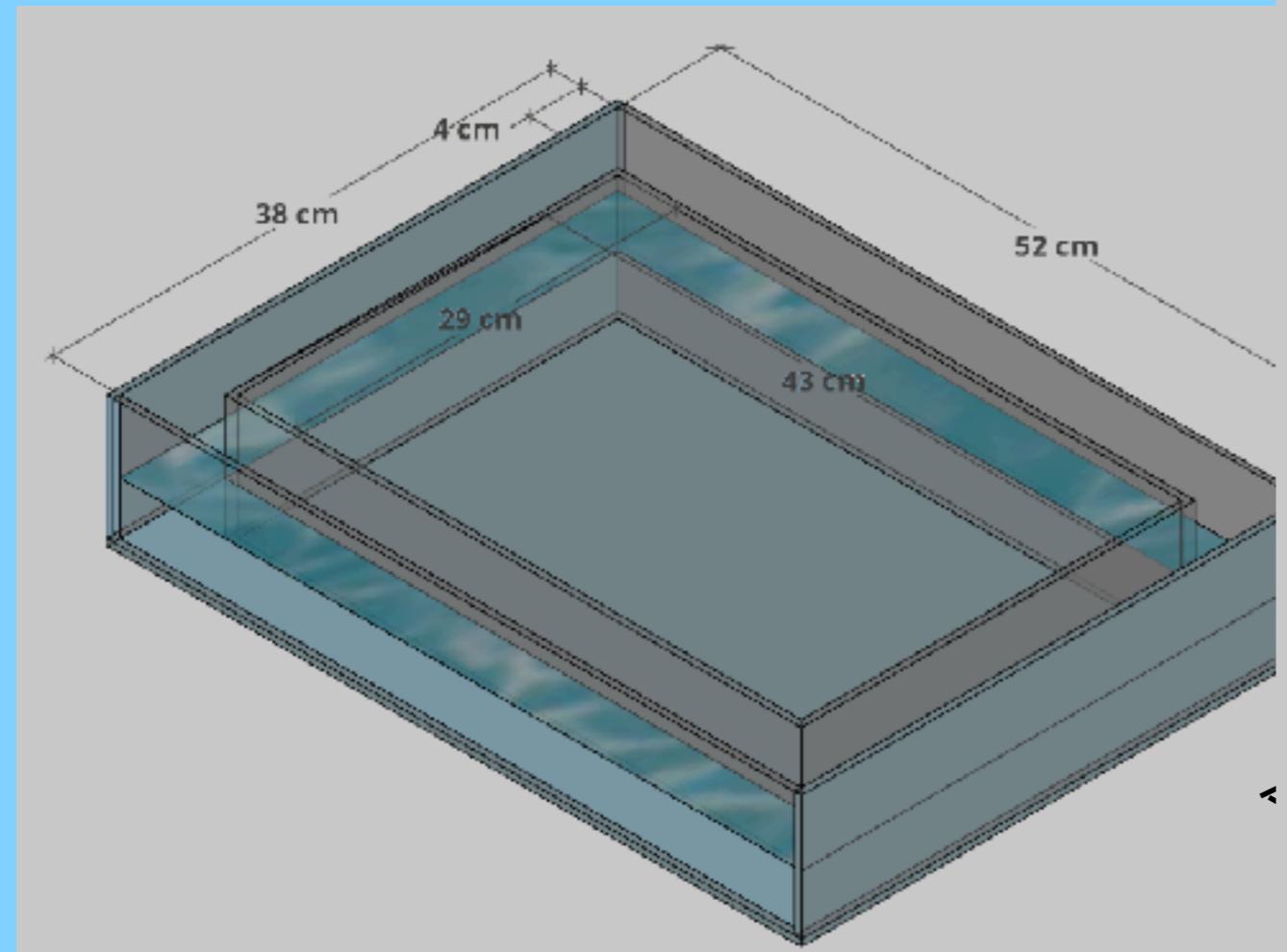


Remplissage du bac avec l'eau salée

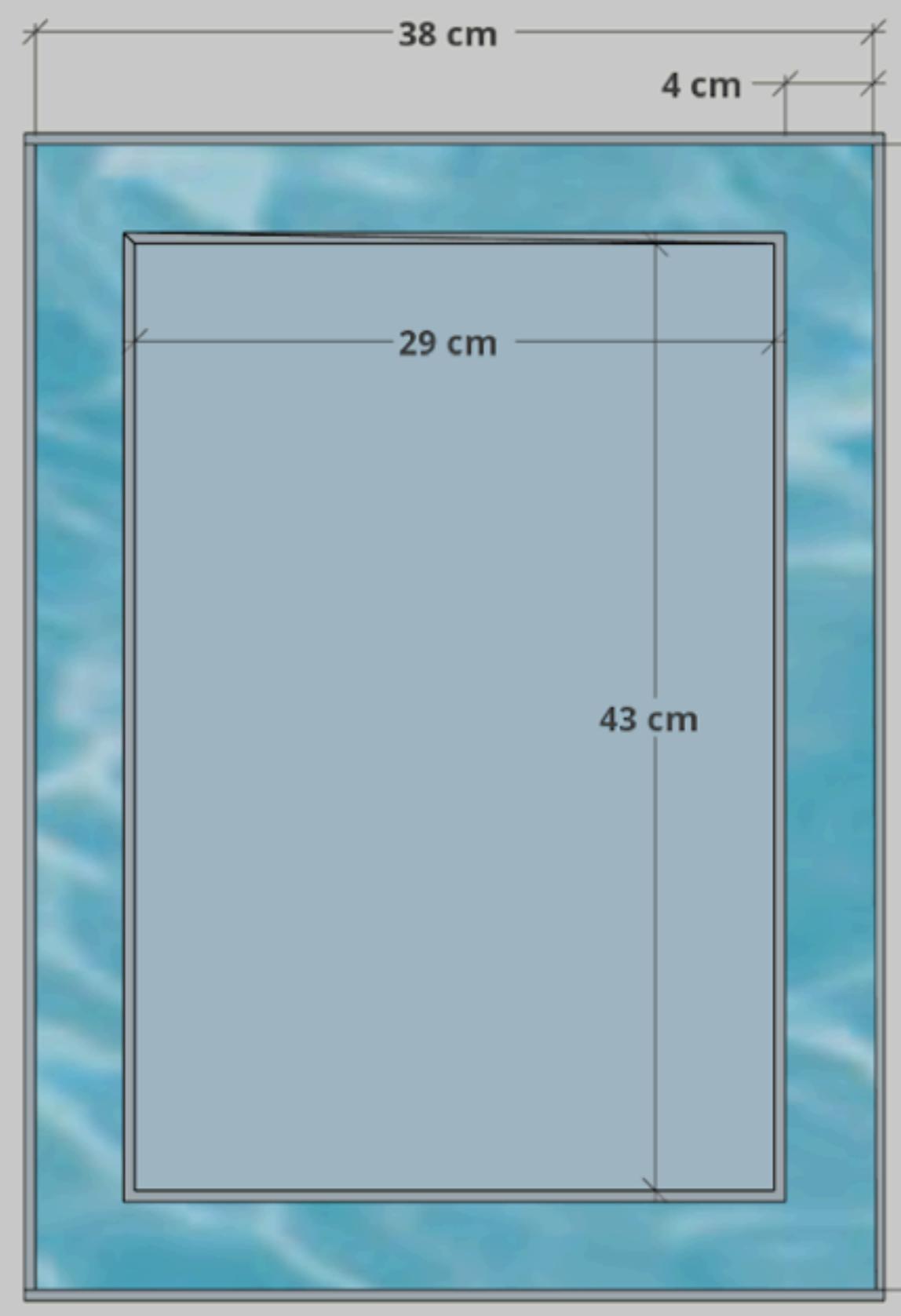
## Dispositif expérimental



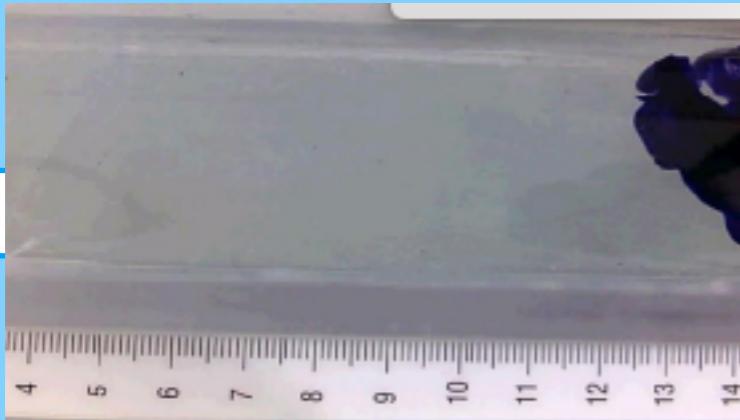
# Dispositif expérimental



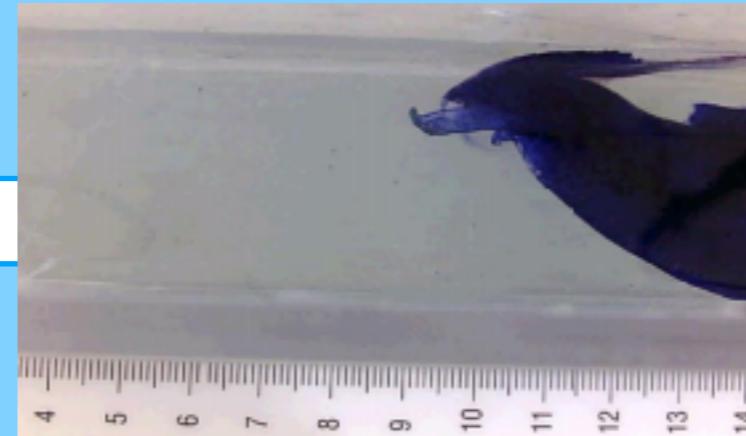
Vue 3D du canal en plastique



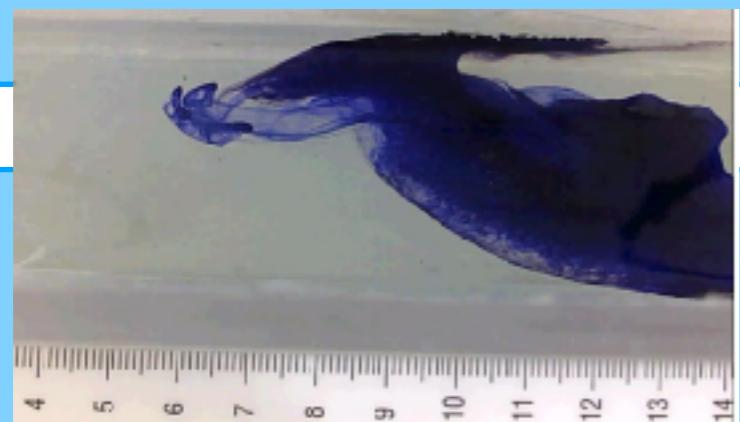
## Premières observations



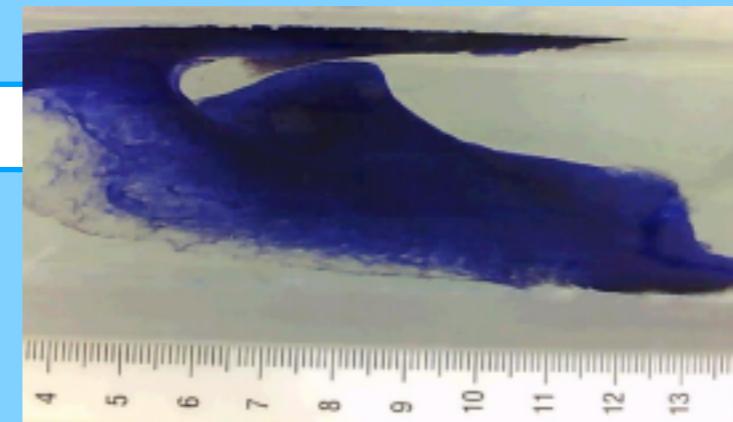
$T = 1\text{ s}$



$T = 5\text{ s}$



$T = 9\text{ s}$



$T = 14\text{ s}$

# Équations de la magnétohydrodynamique

2 domaines de la physique



Mécanique des fluides

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho v \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(v)) + \rho \vec{g} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

avec :

P pression (Pa)

$\vec{B}$  champ magnétique (T)

$\rho$  masse volumique du fluide ( $\text{kg.m}^{-3}$ )  $\vec{j}$  vecteur densité de courant ( $\text{A.m}^{-2}$ )

$\vec{g}$  champ de pesanteur ( $\text{m.s}^{-2}$ )

$\vec{v}$  vitesse du fluide ( $\text{m.s}^{-1}$ )

$\nu$  viscosité cinétique de l'eau en  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$



Electromagnétisme

$$\text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{ARQS})$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

avec :

$\vec{j}$  vecteur densité courant ( $\text{A.m}^{-2}$ )

$\sigma$  conductivité du fluide ( $\text{S.m}^{-1}$ )

$\vec{E}$  champ électrique ( $\text{V.m}^{-1}$ )

$\mu_0$  permittivité relative du vide ( $\text{F.m}^{-1}$ )

## Choix de modélisation : l'écoulement de Hartmann

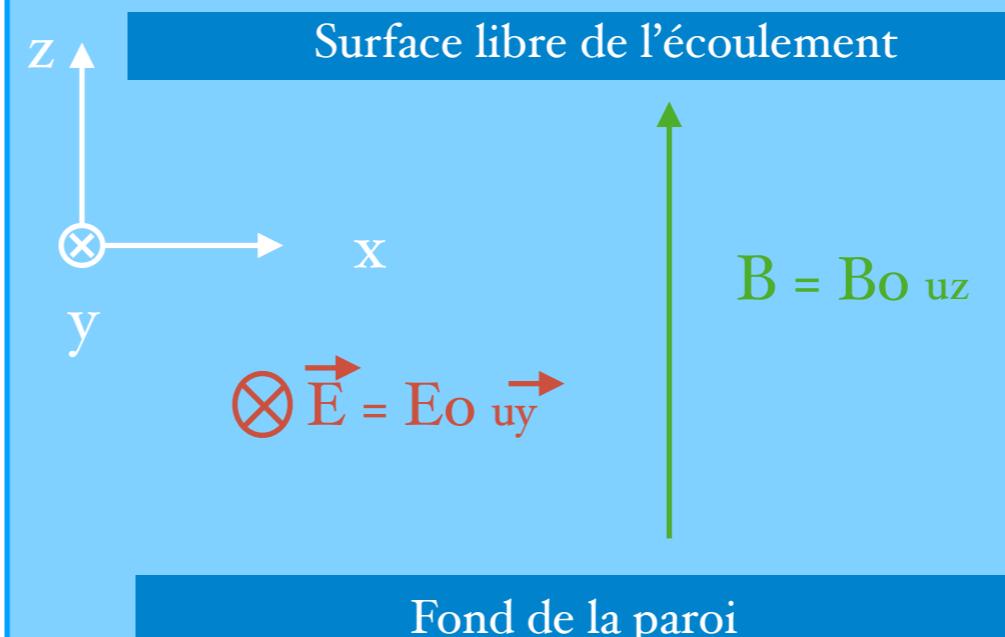
Écoulement **stationnaire, laminaire** d'un fluide **conducteur visqueux** supposé **incompressible** entre deux plaques **infinies** parallèles

### Résolution analytique

$$V_x(y) = \frac{E_o}{B_o} \frac{(1 - \cosh(H \frac{y}{a}))}{\cosh(H)}$$

avec le nombre d'Hartmann ( $H$ ) :  
(sans dimension)

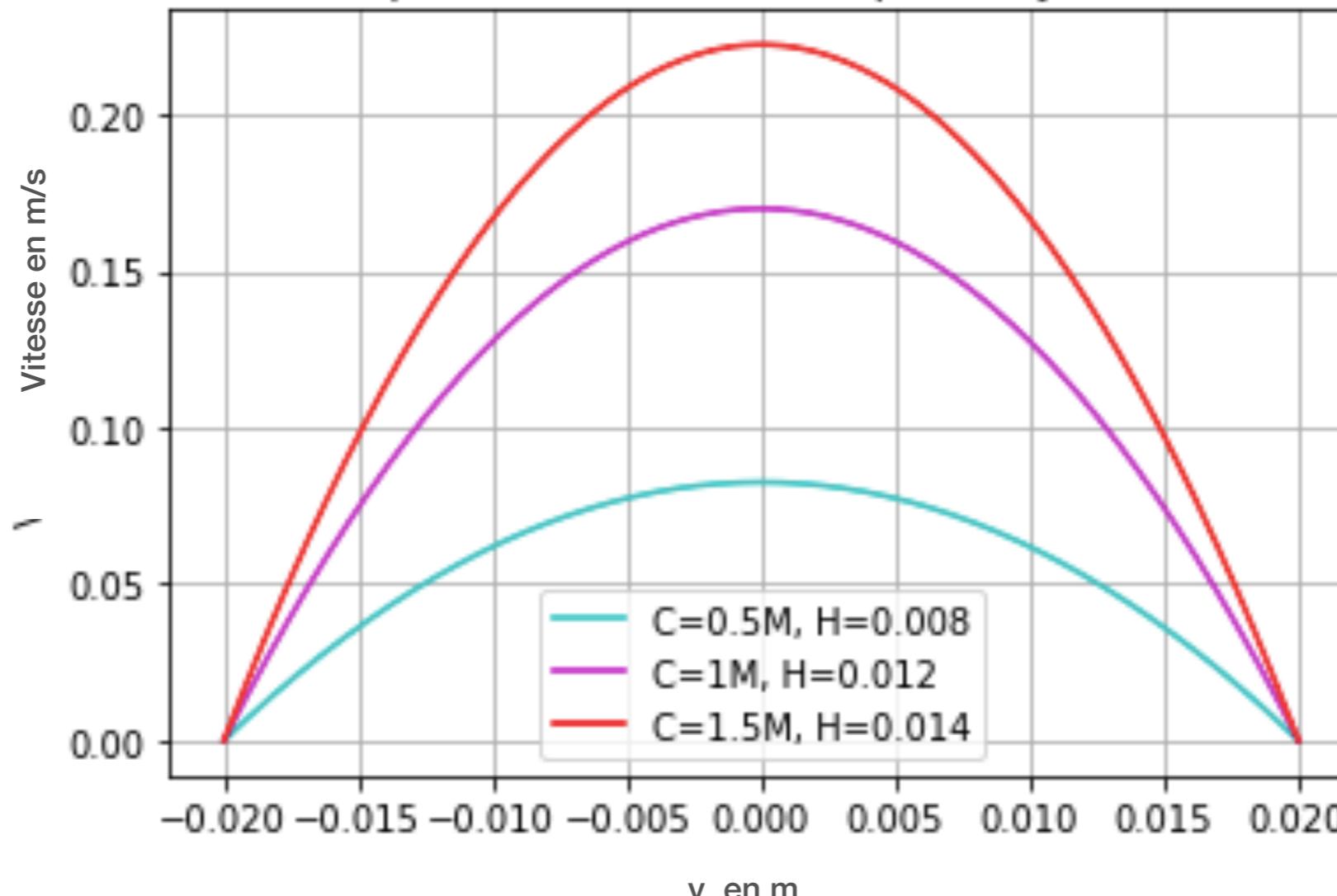
$$H = Ro a \sqrt{\frac{\sigma}{\rho v}}$$



## Influence du nombre de Hartmann

$$H = Ro a \sqrt{\frac{\sigma}{\rho v}}$$

Champ des vitesses dans le plan (0,y,z), U=5V



# Comparaison théorie et expérience : influence de la tension

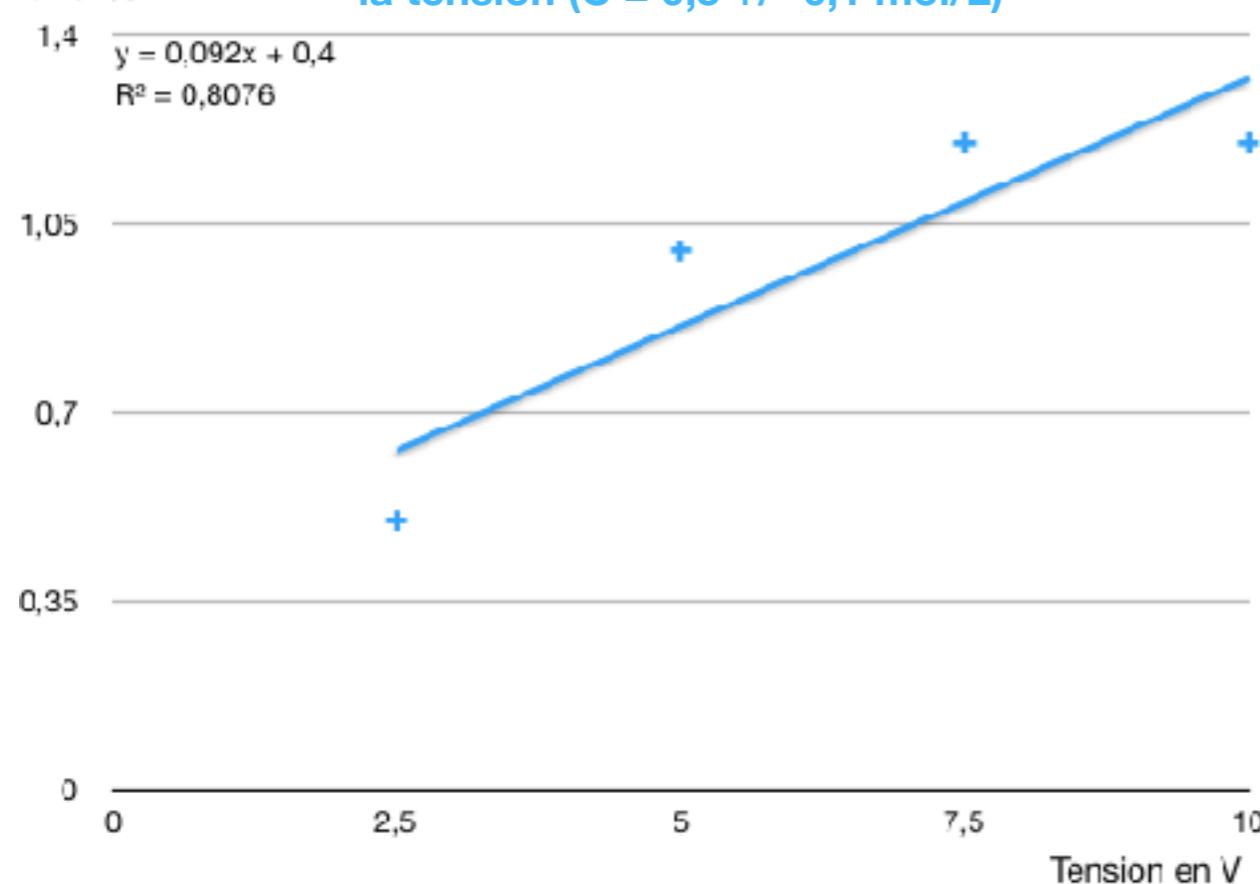
Vitesse moyenne sur la largeur d'eau :

$$V_{moy} = \frac{(H - \tan H)}{H} \frac{E_o}{B_o} \quad \text{avec : } E_o = \frac{U}{2a}$$

Vitesse moyenne  
en cm/s

$$y = 0,092x + 0,4$$
$$R^2 = 0,8076$$

Vitesse moyenne en fonction de  
la tension ( $C = 0,5 \pm 0,1 \text{ mol/L}$ )



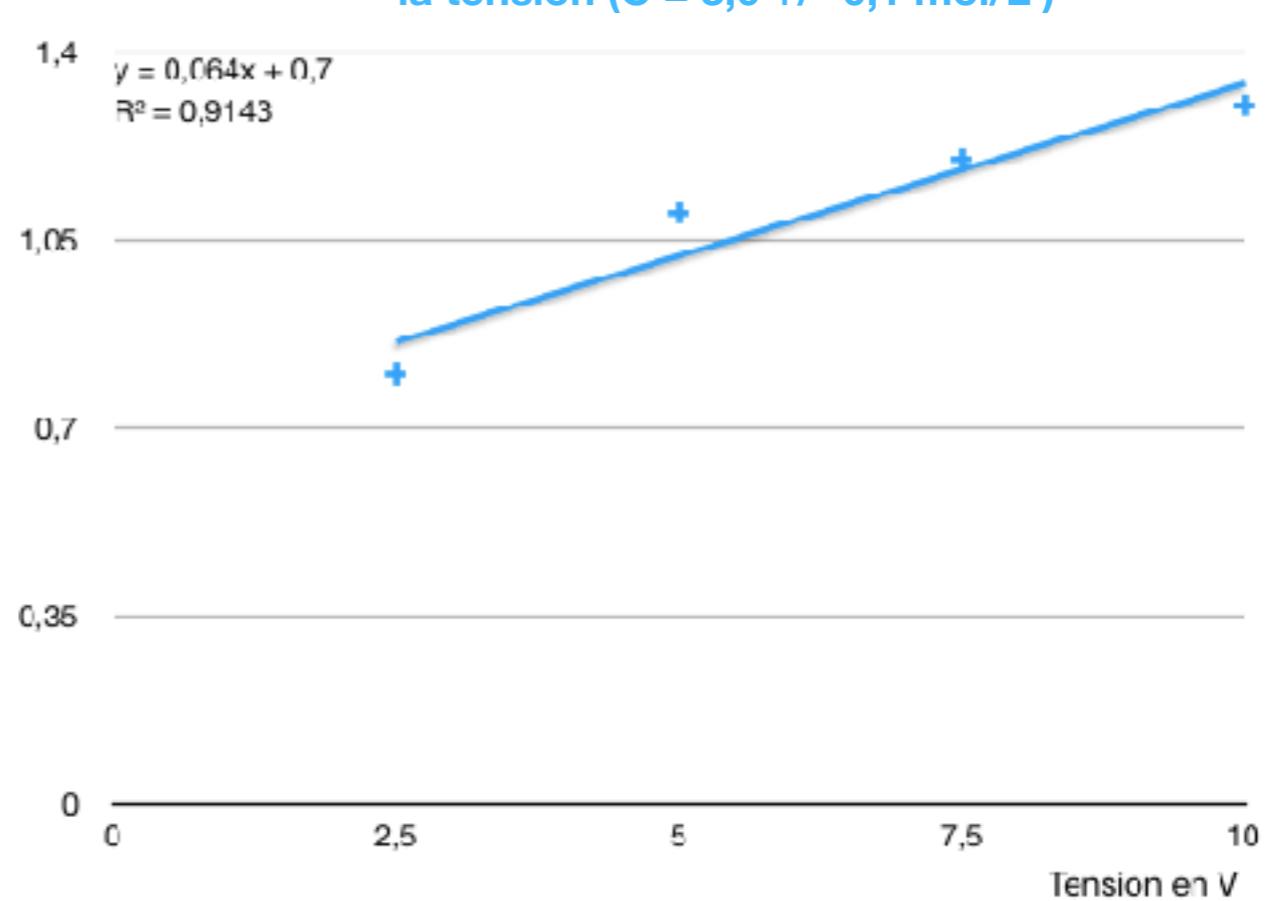
$$V_{min} = 0,50 \pm 0,1 \text{ cm.s}^{-1}$$

$$V_{max} = 1,2 \pm 0,1 \text{ cm.s}^{-1}$$

Vitesse moyenne  
en cm/s

$$y = 0,064x + 0,7$$
$$R^2 = 0,9143$$

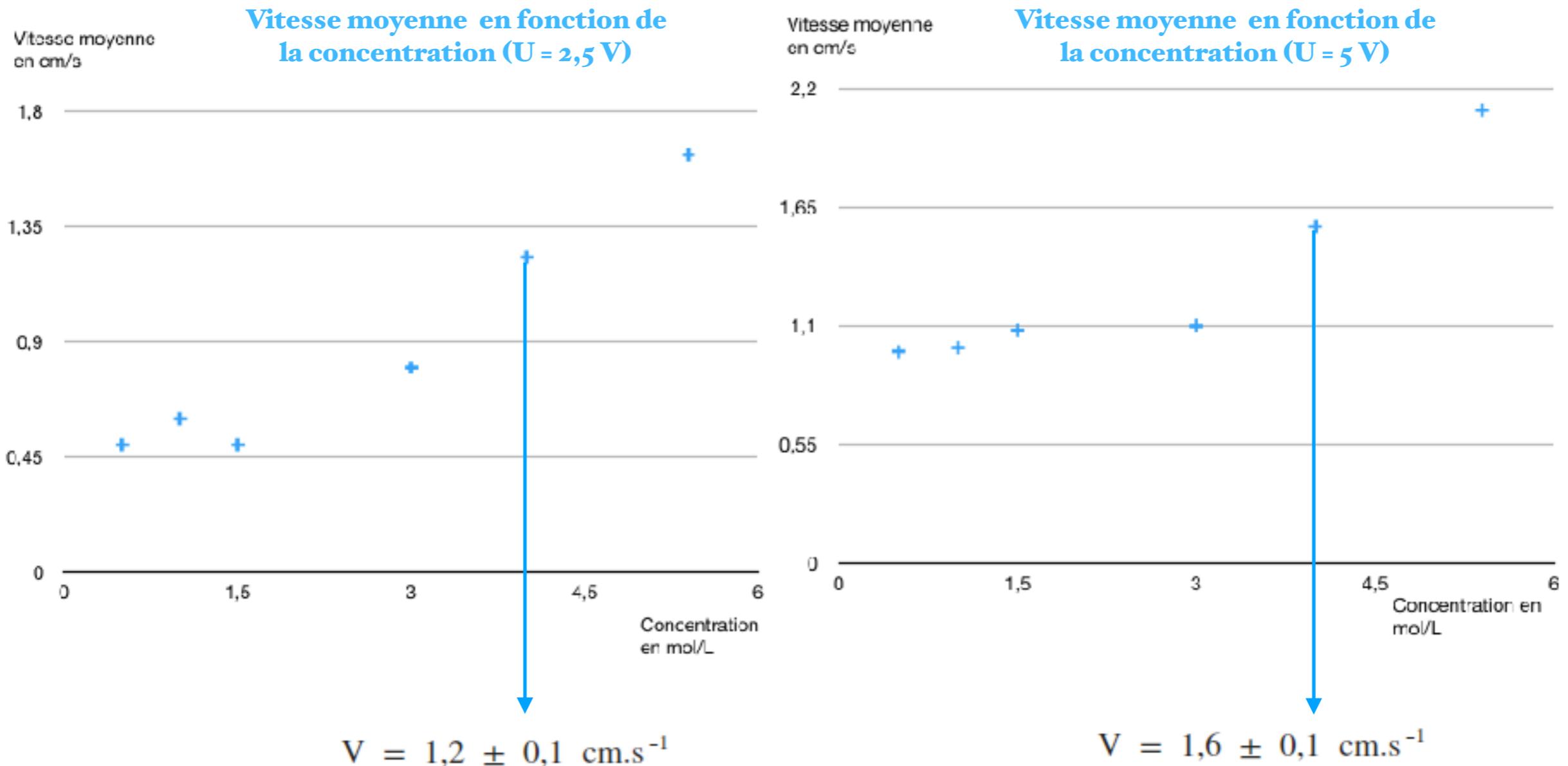
Vitesse moyenne en fonction de  
la tension ( $C = 3,0 \pm 0,1 \text{ mol/L}$ )



$$V_{min} = 0,50 \pm 0,1 \text{ cm.s}^{-1}$$

$$V_{max} = 1,3 \pm 0,1 \text{ cm.s}^{-1}$$

## Influence de la concentration



## II) Processus chimique à l'oeuvre

# Espèces en solution

Espèces en solution :

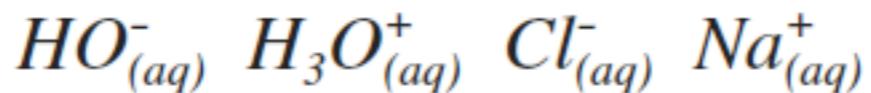
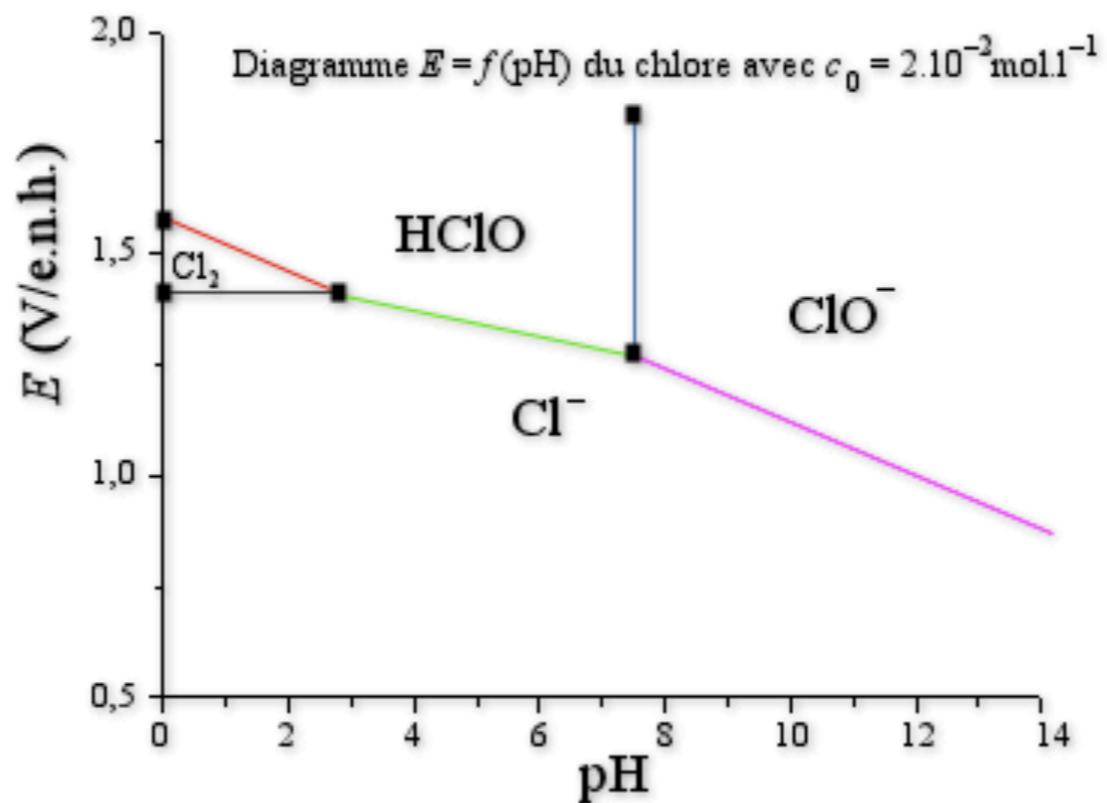


Diagramme E-pH du chlore :

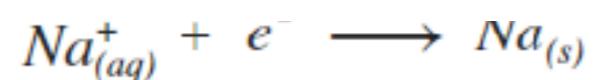
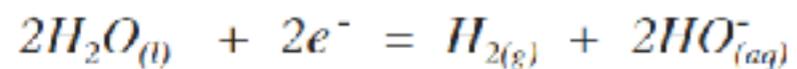
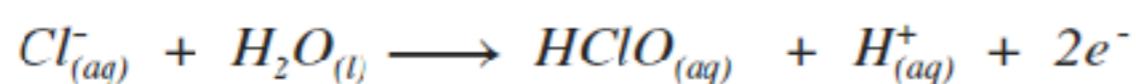
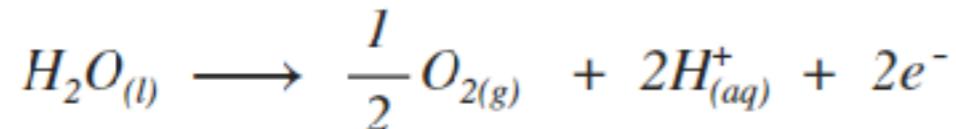


Source:  
[edu.umpc.fr](http://edu.umpc.fr)

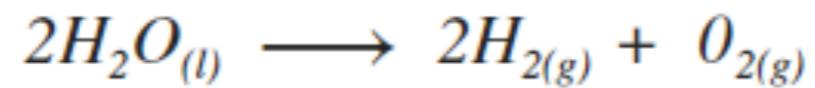
# Aspect thermodynamique de l'oxydoréduction

## Réactions possibles

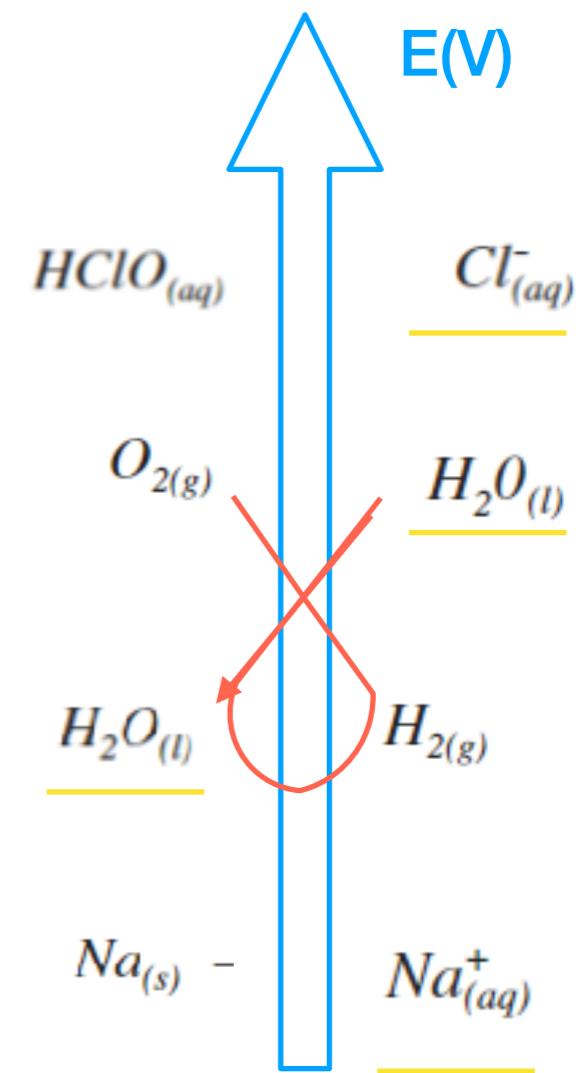
Réactions d'oxydo-réduction :



## Réaction thermodynamiquement favorisée

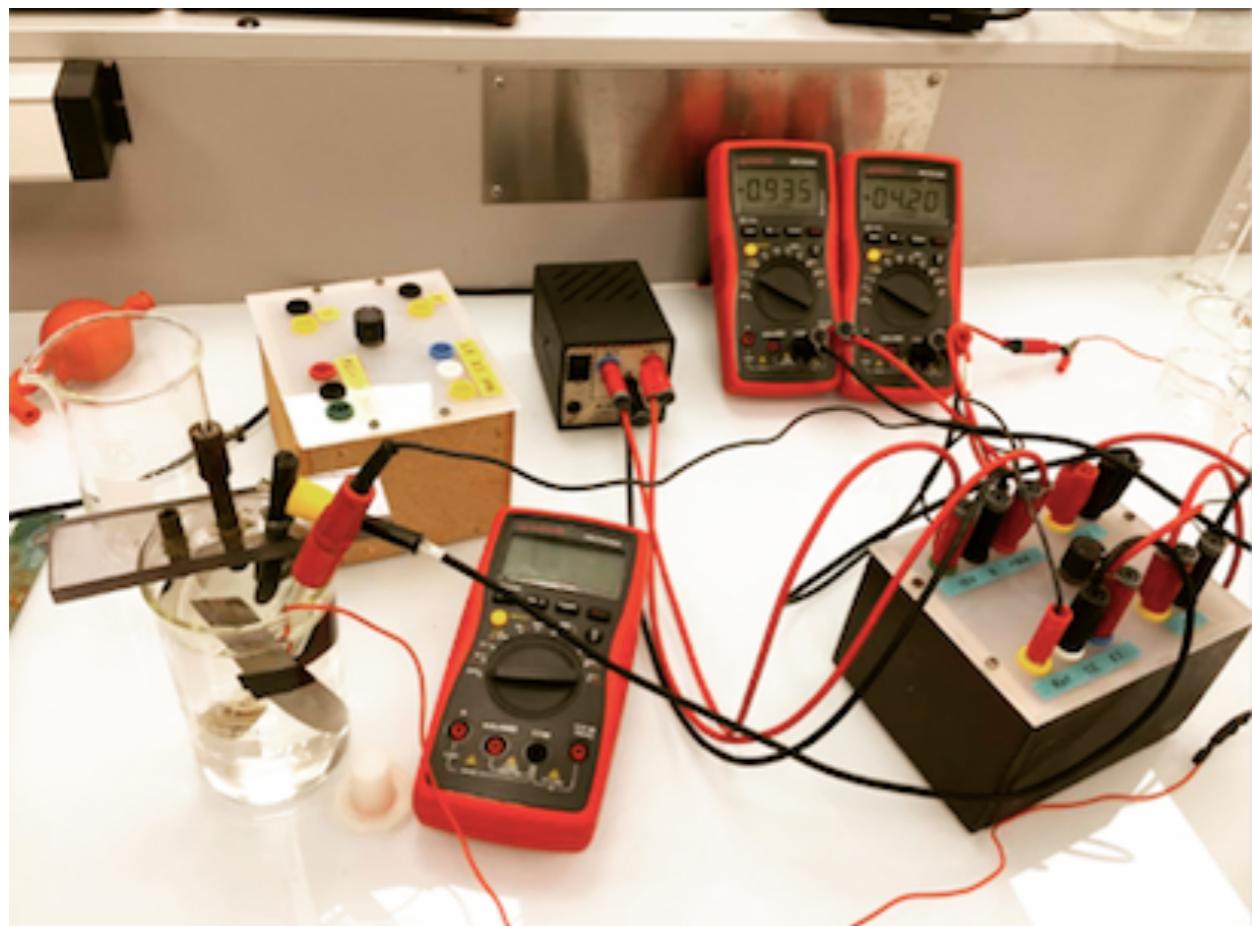


## Echelle des potentiels standards

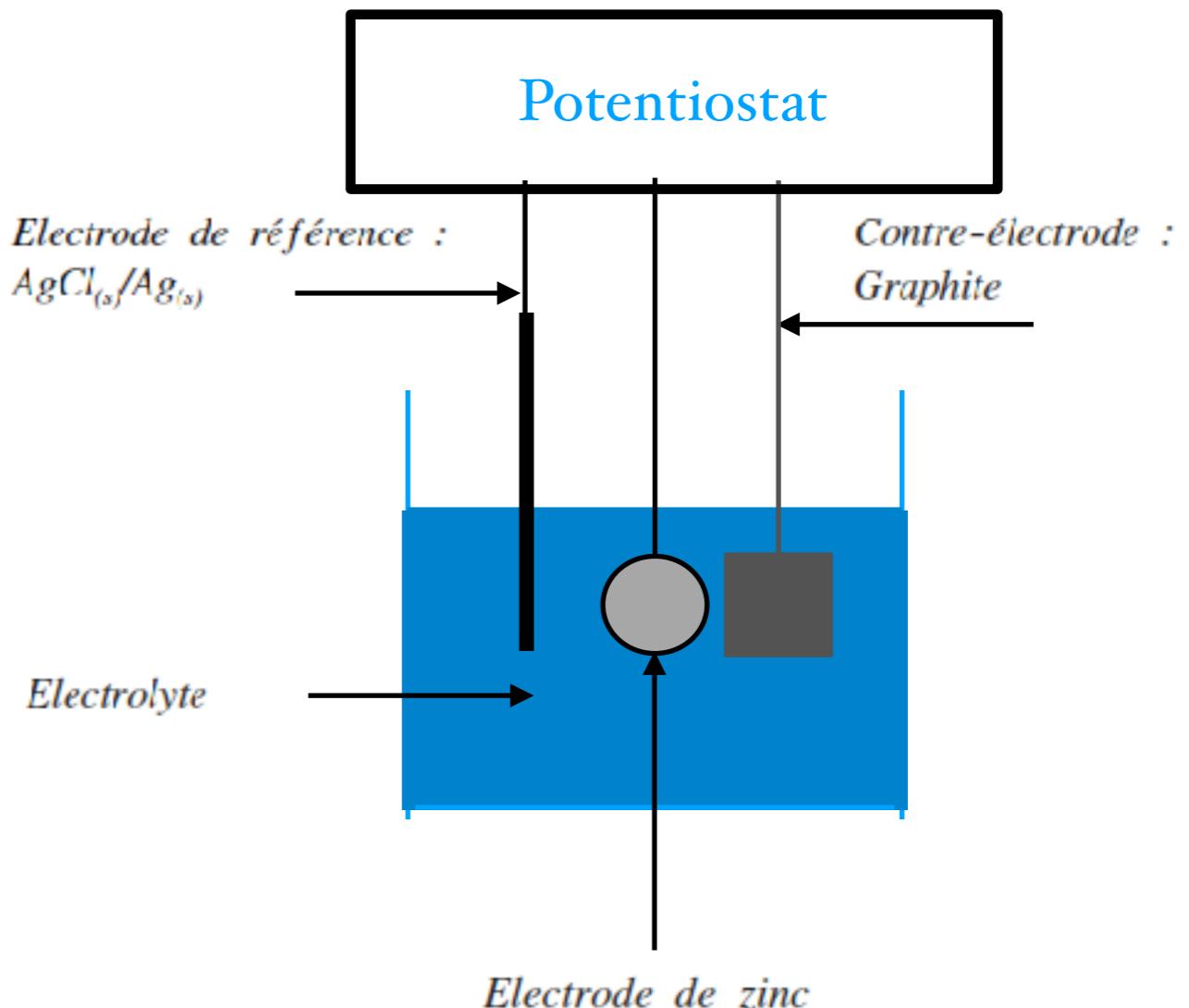


## Aspect cinétique

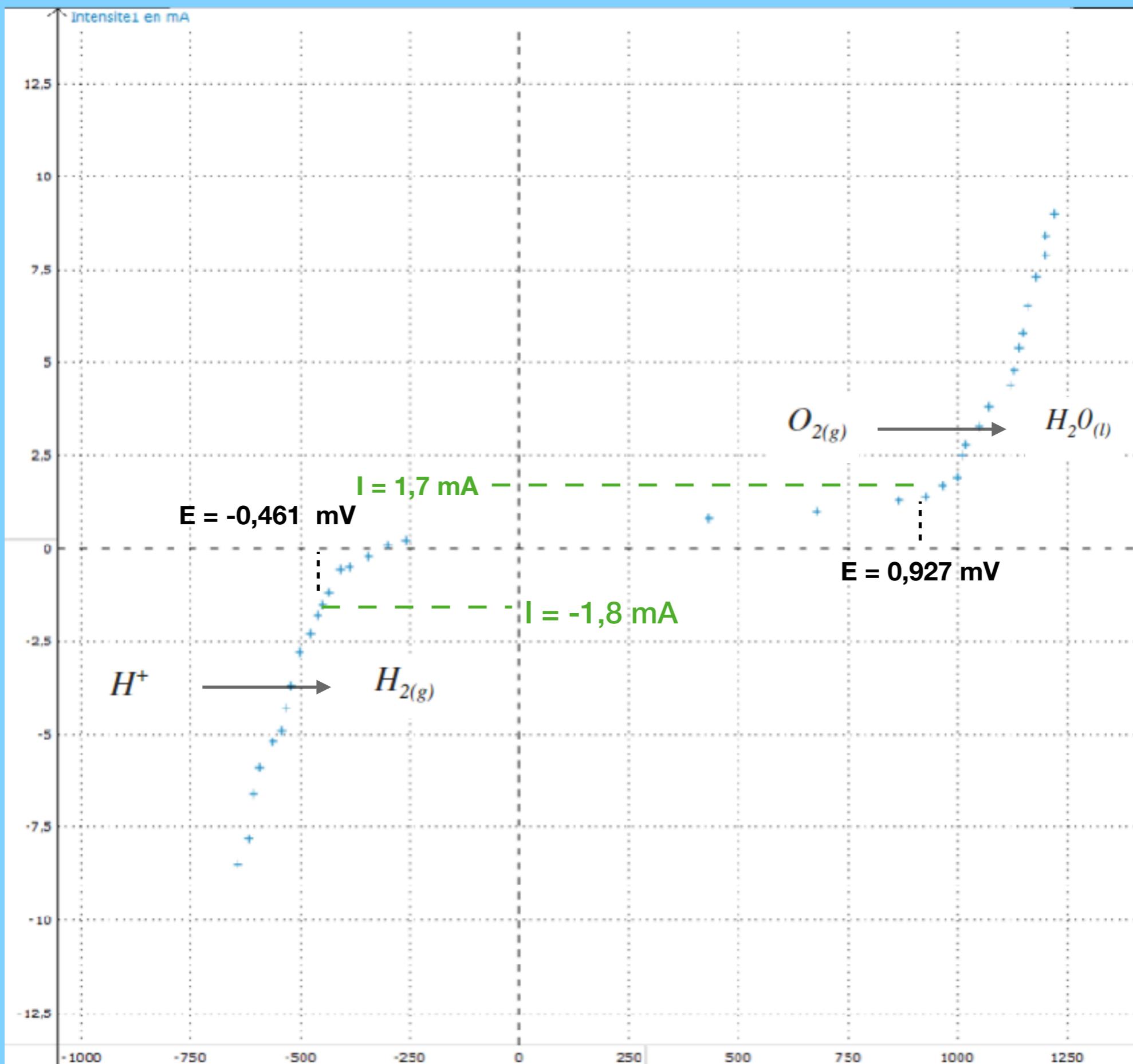
Objectifs: mettre en oeuvre le tracé de courbe intensité-potentiel sur l'électrode de zinc



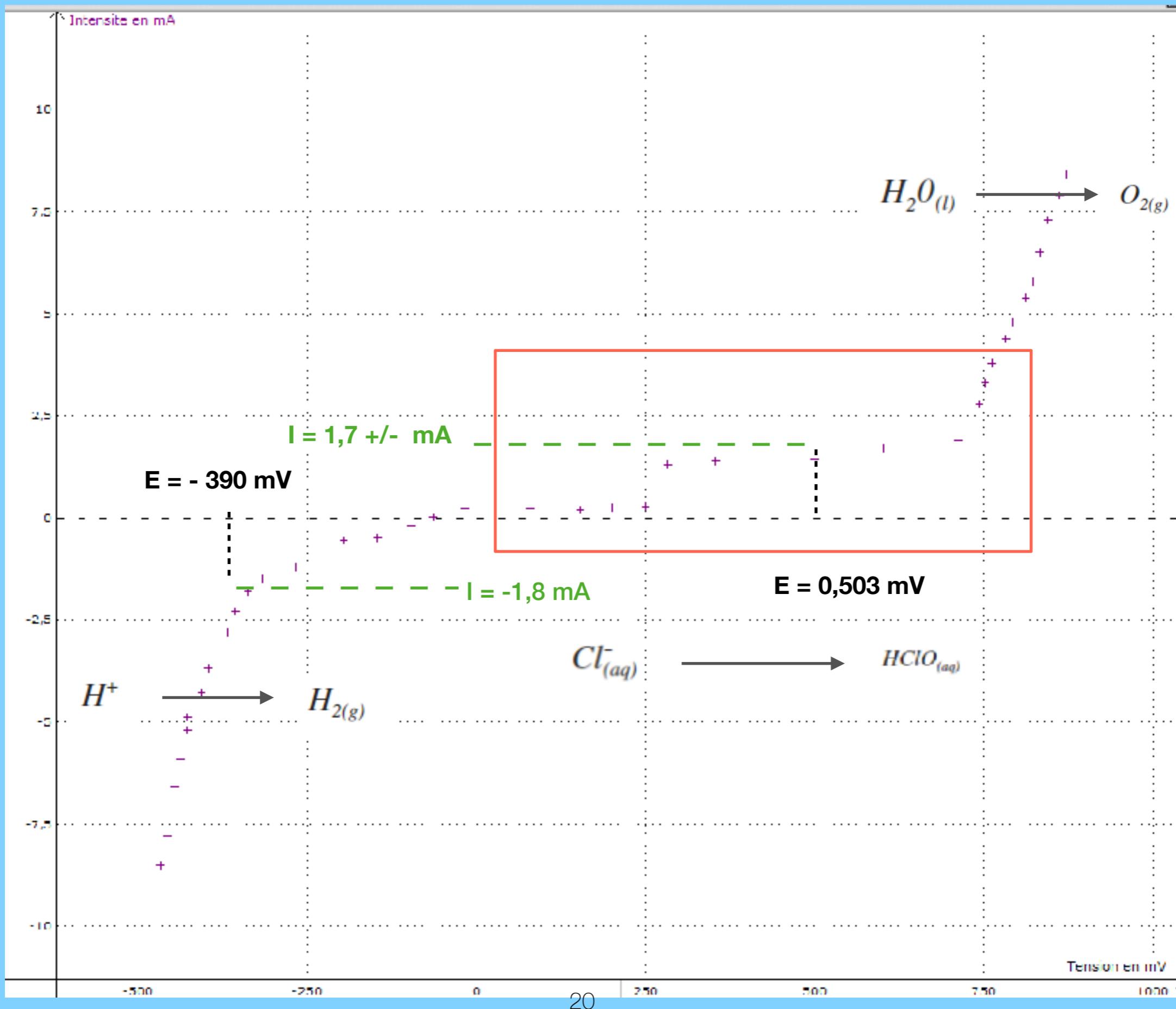
**Montage expérimental**



# Relevé 1 : Eau à pH = 6



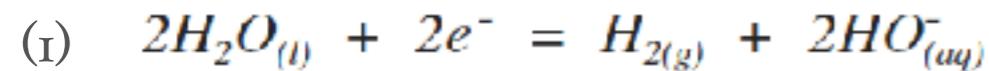
## Relevé 2 : Solution aqueuse de chlorure de sodium à 0,5 mol/L



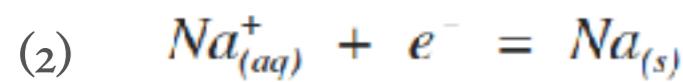
## Détermination de la réaction

### Cathode

Surtension E pour I = -1,8 ± 0,3 mA



$$E = -390 \pm 4 \text{ mV}$$



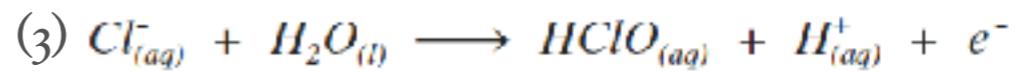
$$E^0 = -2,76 \text{ V}$$

$$-2,76 \text{ V} < -0,390 \text{ mV}$$

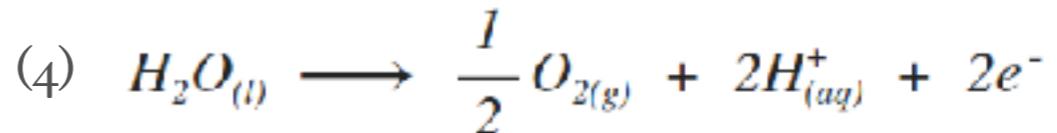
(2) est favorisée

### Anode

Surtension E pour I = 1,7 ± 0,3 mA



$$E = 503 \pm 5 \text{ mV}$$

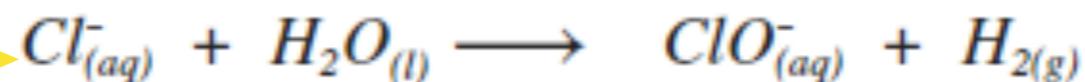
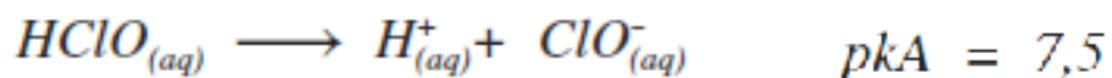


$$E = 927 \pm 4 \text{ mV}$$

$$0,503 \text{ mV} < 0,927 \text{ mV}$$

(3) est favorisée

Equilibre acido-basique :



### III) La propulsion MHD et autres applications

## Prototype en fonctionnement

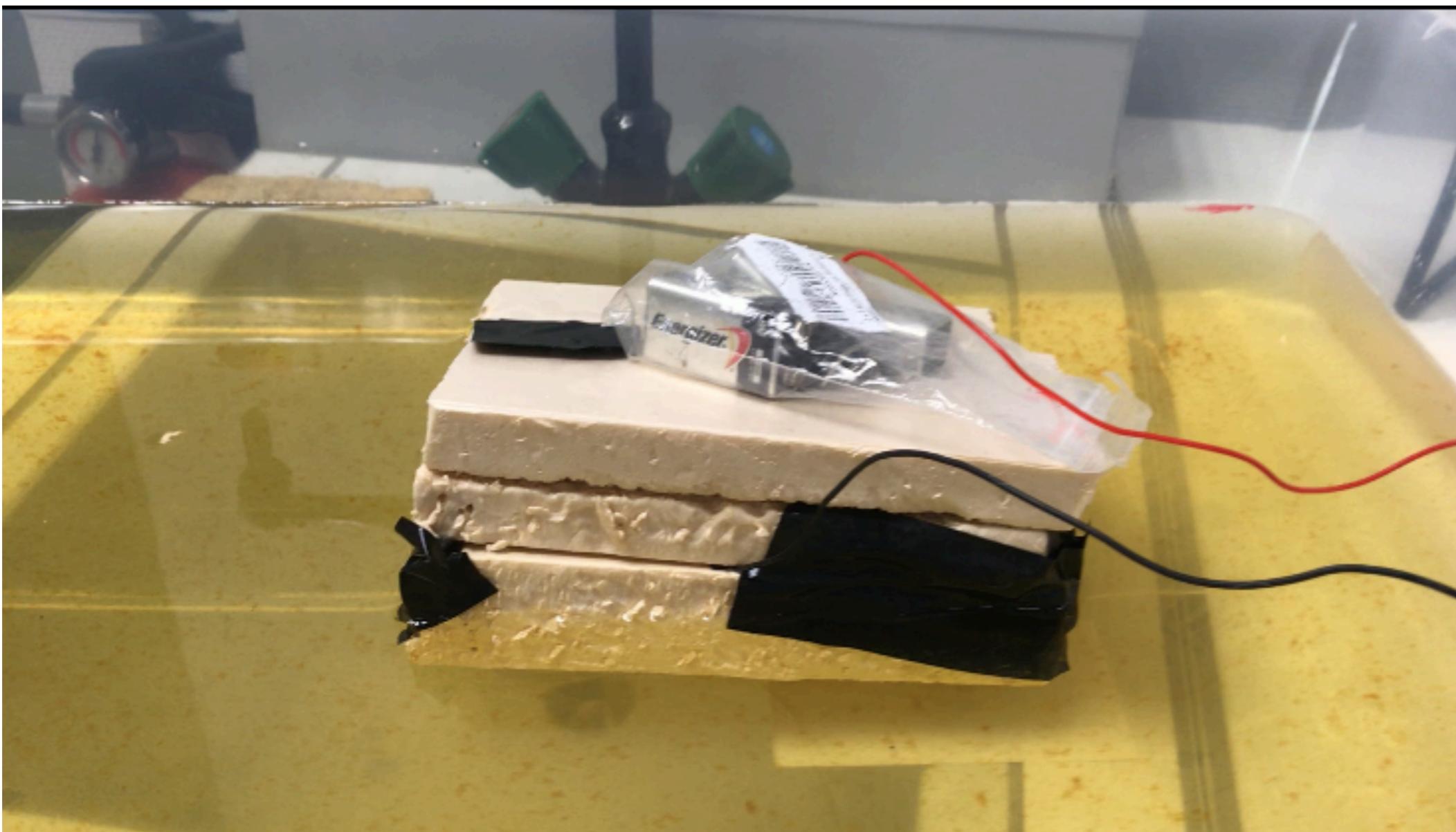
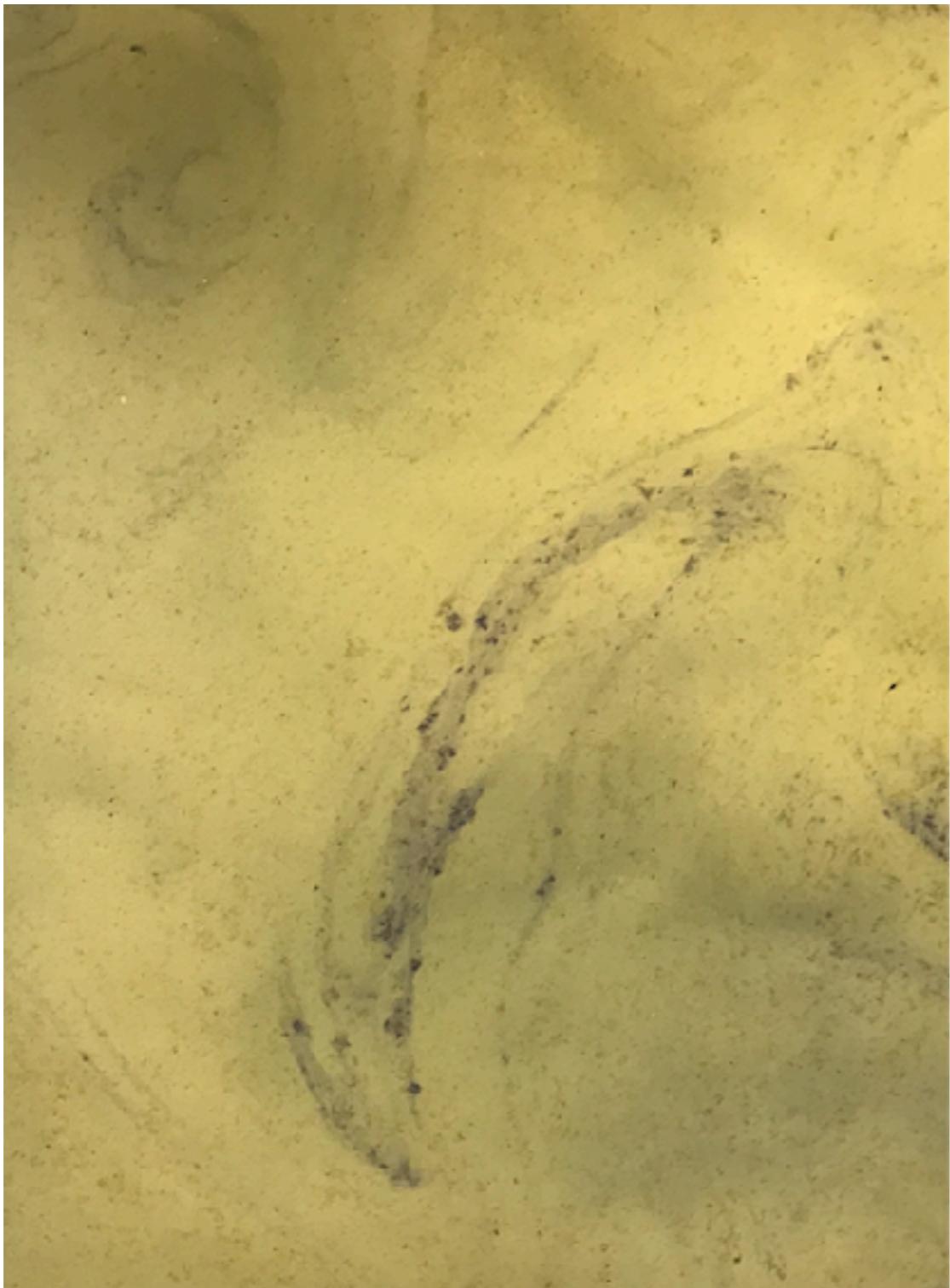


Photo du prototype

## Limite du prototype



Coloration de la solution après électrolyse

### Aspects chimiques :

- dégagement gazeux en sortie de la tuyère
- consommation des éléments

### Aspects physiques :

- difficulté d'obtenir un champ magnétique uniforme dans la tuyère
- forte inertie du bateau

## Rencontre avec les chercheurs Arnaud Zaslavsky et Lorenzo Matteini



Site de l'observatoire de Meudon  
Source : [www.obspm.fr](http://www.obspm.fr)

## Applications de la MHD dans d'autres domaines : Visite de l'observatoire de Meudon

### Nombre de Reynolds magnétique

$$Rm = \sigma v \mu_0 L$$

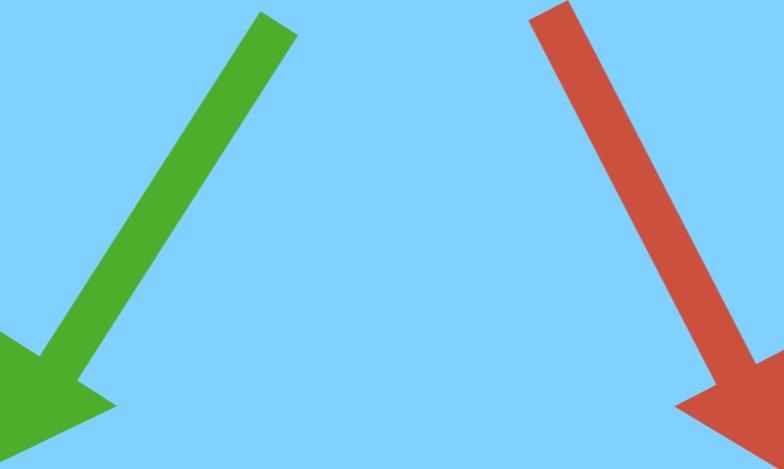
avec :

$\sigma$  la conductivité du fluide en  $S.m^{-1}$

$\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide en  $H.m^{-1}$

$L$  la dimension caractéristique de l'écoulement

$v$  la vitesse moyenne de l'écoulement



#### MHD RÉSISTIVE

Phénomène prédominant :  
Diffusion

#### MHD IDÉALE

Phénomène prédominant :  
Convection

## Applications de la MHD dans d'autres domaines : Visite de l'observatoire de Meudon

### Ordre de grandeur pour l'expérience 1 :

$$R_m = 2,5 \pm 0,4 \cdot 10^{-12} \simeq 10^{-12}$$

$$\sigma = 40 \pm 2 \text{ mS.m}^{-1}$$

$$\mu_o = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

$$L = 4,0 \pm 0,1 \text{ cm.s}^{-1}$$

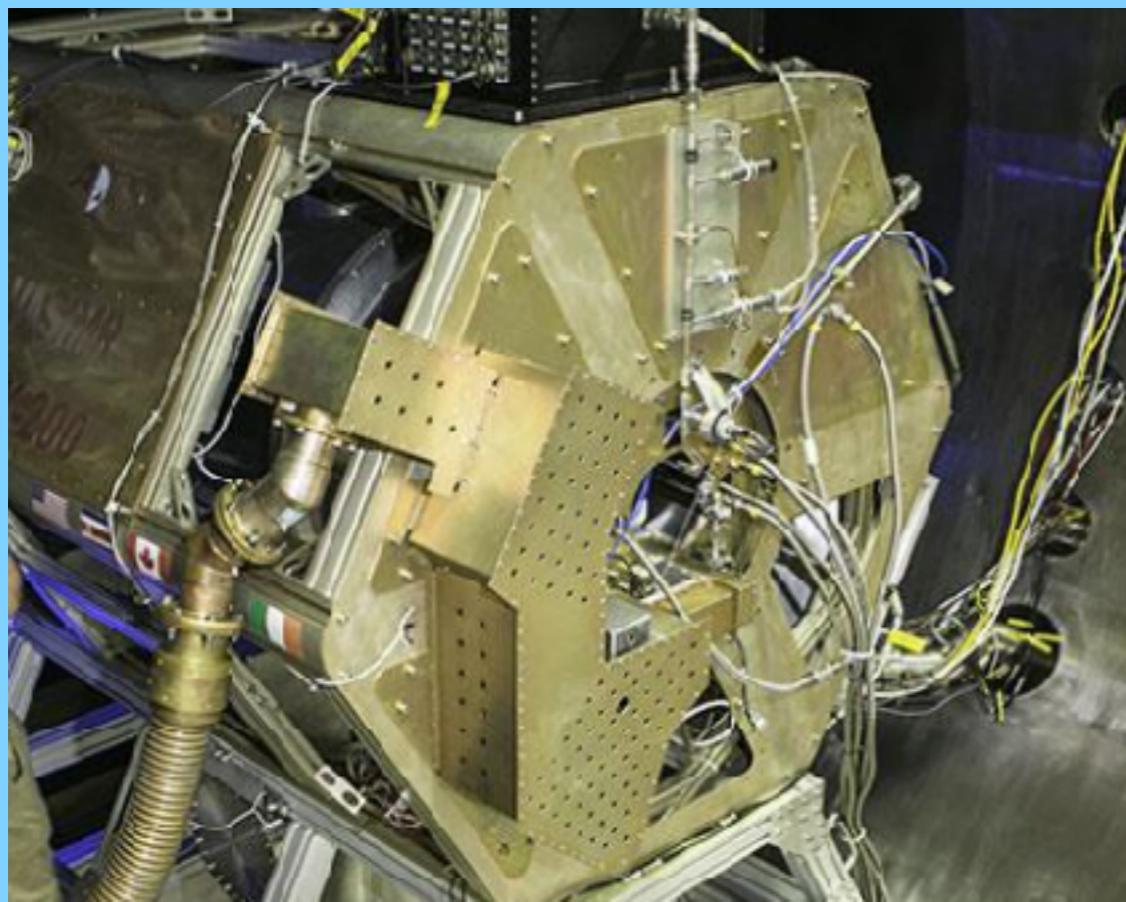
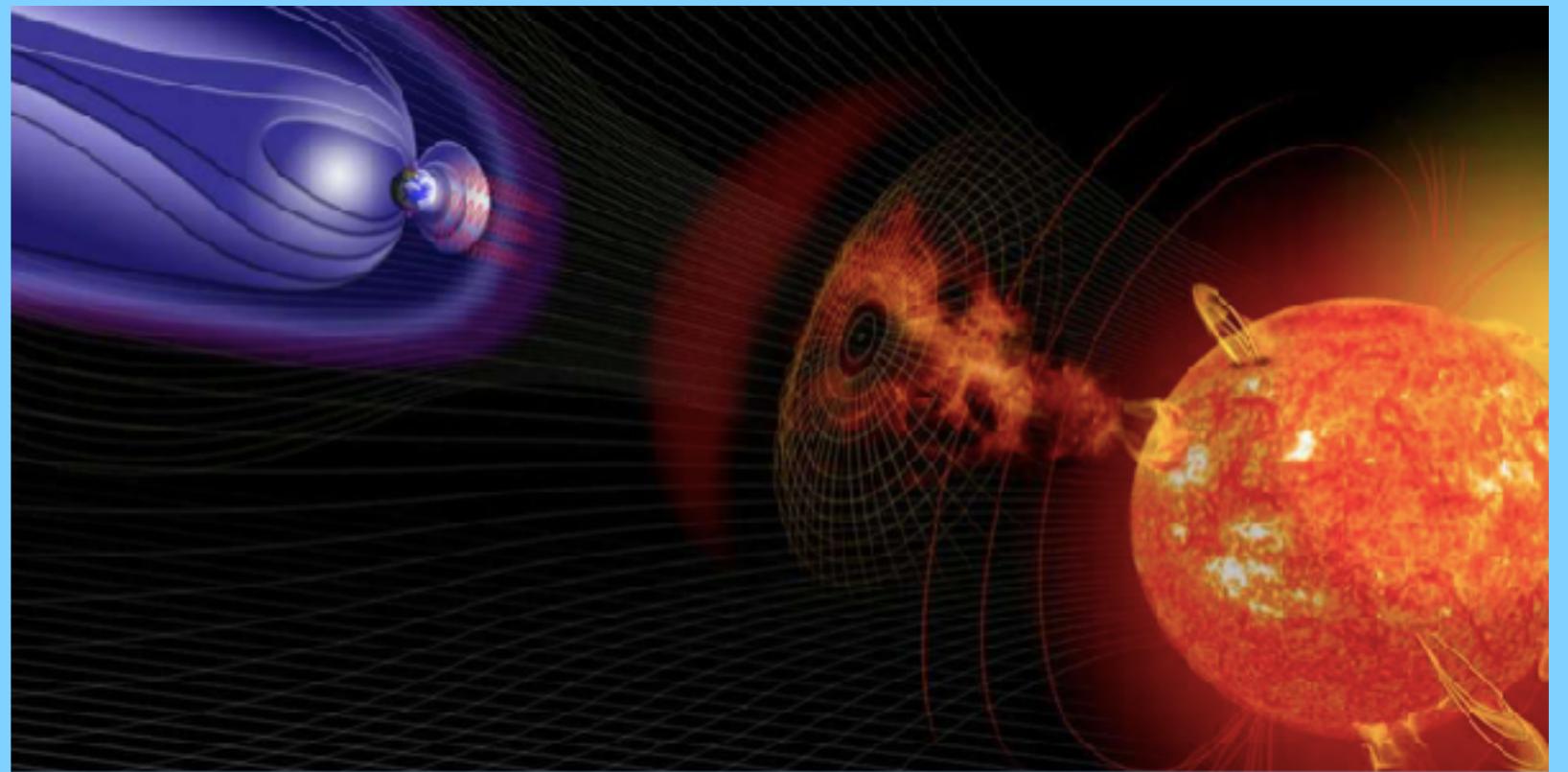
$$v = 1,22 \pm 0,2 \text{ cm.s}^{-1}$$

### Ordres de grandeur habituels :

**Propulsion navale MHD :**  $Rm = 5 \cdot 10^{-5}$

**Propulseur MHD à Plasma :**  $Rm = 3$

**Couronne solaire :**  $Rm = 10^{15}$



Prototype VASIMR  
Source : [adastrarocket.com](http://adastrarocket.com)

Vue d'artiste d'artiste d'une éruption solaire  
Source : CNRS

# Conclusion

## Bibliographie

- [1] David CÉBRON, Jean-François SIGRIST, Vincent SOYER, P. FERRANT. Validation test cases for multiphysic problems: application to magnetohydrodynamic numerical simulations. ASME 2008 Pressure Vessels and Piping Conference (PVP2008), Jul 2008, Chicago, United States.
- [2] David CÉBRON, Sylvain VIROULET, Jérémie VIDAL, Jean-Paul MASSON, Philippe VIROULET. Experimental and Theoretical Study of Magnetohydrodynamic Ship Models. PLoS ONE, Public Library of Science, 2017.
- [3] Philippe MATHON. Influences des forces électromagnétiques sur les processus électrochimiques - Application à la propulsion MHD. Electromagnétisme. Institut Polytechnique de Grenoble, 2008.
- [4] Moteur et générateur Magnétohydrodynamique, Site internet de l'Université Paris-Diderot, [http://phyexpdoc.script.univ-paris-diderot.fr/projets/\\_sites\\_01\\_02\\_1/Mhd/index.htm](http://phyexpdoc.script.univ-paris-diderot.fr/projets/_sites_01_02_1/Mhd/index.htm)
- [5] Anas EL GALLAF. Etude de la dynamique non-linéaire des écoulements chauffés et soumis à des champs magnétiques. Sciences de l'ingénieur. Ecole Centrale de Lyon, 2009.
- [6] Baptiste Ferrero, Jean Charles Mariani, Xavier Mousset. Moteur Magnétohydrodynamique, Site internet de l'école ESPCI Paris, 2016. <https://blog.espci.fr/psei/author/bferrero>
- [7] René MOREAU, Professeur à l'INP/ENSHMG, Membre de l'Académie des Sciences, La magnétohydrodynamique ou ces fluides qui conduisent l'électricité, Ed. La Houille Blanche, N°5/6, 1994.
- [8] Gabriel I. Font and Scott C. Dudley, U.S. Air Force Academy, Colorado Springs, CO - Magnetohydrodynamic propulsion for the classroom. The Physics Teacher, VOL 42, October 2004.

## Annexe : Formule des calculs d'incertitude

### 2 types d'incertitudes



#### Incertitudes expérimentales

Ecart-type expérimental :

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

avec :

$n$  le nombre de mesures (ici 3)

$x_i$  les valeurs mesurées

$\bar{x}$  la moyenne des valeurs

#### Incertitudes liées au modèle

Incertitude de type composée:

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\sigma^2(y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i)$$

## Annexe : Calculs d'incertitude

### Expérience n°1 :

Concentration :

$$\Delta X_c = c \sqrt{\left(\frac{X_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{X_V}{V}\right)^2} \text{ avec } X_m = 0,1g$$

$$X_V = 2 \times \frac{g}{\sqrt{12}}$$

*g la graduation du récipient*

Tension :

$$\Delta X_V = \frac{l}{\sqrt{3}} (U \times \frac{p}{100} + n \times r) \text{ avec } r \text{ la résolution de l'alimentation (r=0,1)}$$

*n le nombre de digits (n=3)*

*p le paramètre de l'appareil (p=1)*

Conductivité :

$$\Delta X_\sigma = \sigma \times 0,02 + 3 \times 0,1$$

Demi-largeur d'eau :

$$\Delta X_a = \pm 0,1 \text{ cm}$$

### Expérience n°2:

Potentiel :

$$\Delta X_E = E \times 0,008 + 3 \times 1$$

## Annexe calculs d'incertitudes

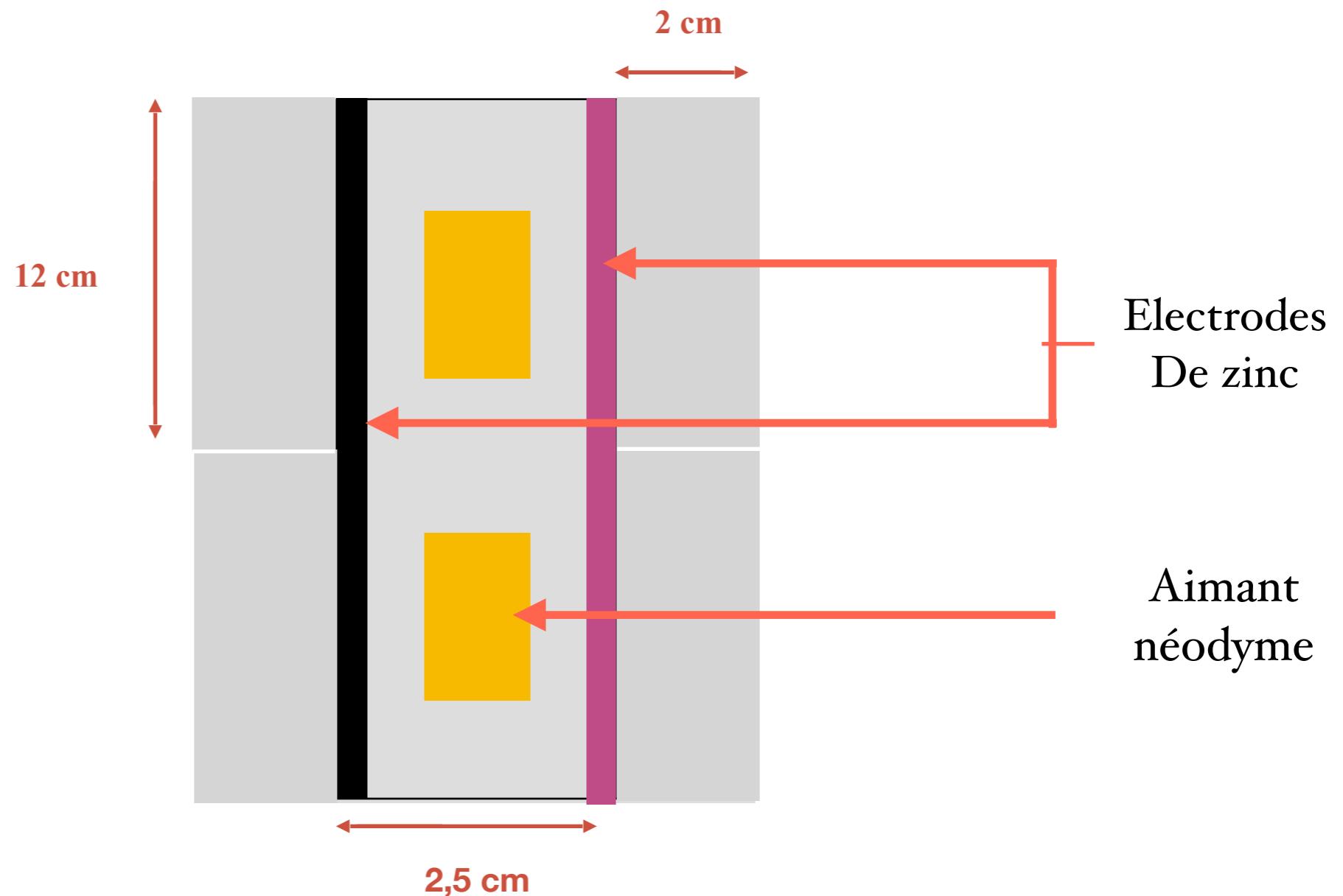
```
#Dérivéeconductivité = -(E/B*H) * [ (B*a) **2 / (2*mu*visc*  
(np.cosh(H)) **2) - (B*a*np.tanh(H) / 2*sqrt(mu*visc*cond)) ]  
#DérivéechampB= -(E/B**2) * (1-np.tanh(H)/H)+(1/B)*(E/H**2)*  
(a*sqrt(cond/mu*visc))* (H/np.cosh(H)-np.tanh(H))  
#DérivéechampE=(1-np.tanh(H)/H)/B  
  
def incertitude_vitesse(U, c, B):  
  
    return (sqrt((dérivée_conductivité(U, c, B)**2) * (ocond**2) +  
(dérivée_champB(U, c, B)**2) * (oB**2) + (dérivée_champE(U, c, B)**2) *  
(oE**2)))  
  
#j'ai enlevé le facteur d'élargissement  
#def incertitude(U, cond) :  
    #E=U/D  
    #H=B*2D*sqrt((cond/(mu*visc)) )  
    #return( (2*sqrt(-(E/B*H) * [ (B*a) **2 / 2*mu*visc* (np.cosh(H)) **2 -  
(B*a*np.tanh(H) / 2*sqrt(mu*visc*cond)) **2] *ocond+ (np.tanh(H)/H)+(1/B)*(E/H**2)*  
(a*sqrt(cond/mu*visc))* (H/np.cosh(H)-np.tanh(H)) **2) *oB+ (1-  
np.tanh(H)/H)*oE) """
```

## Annexe : Valeurs expérimentales

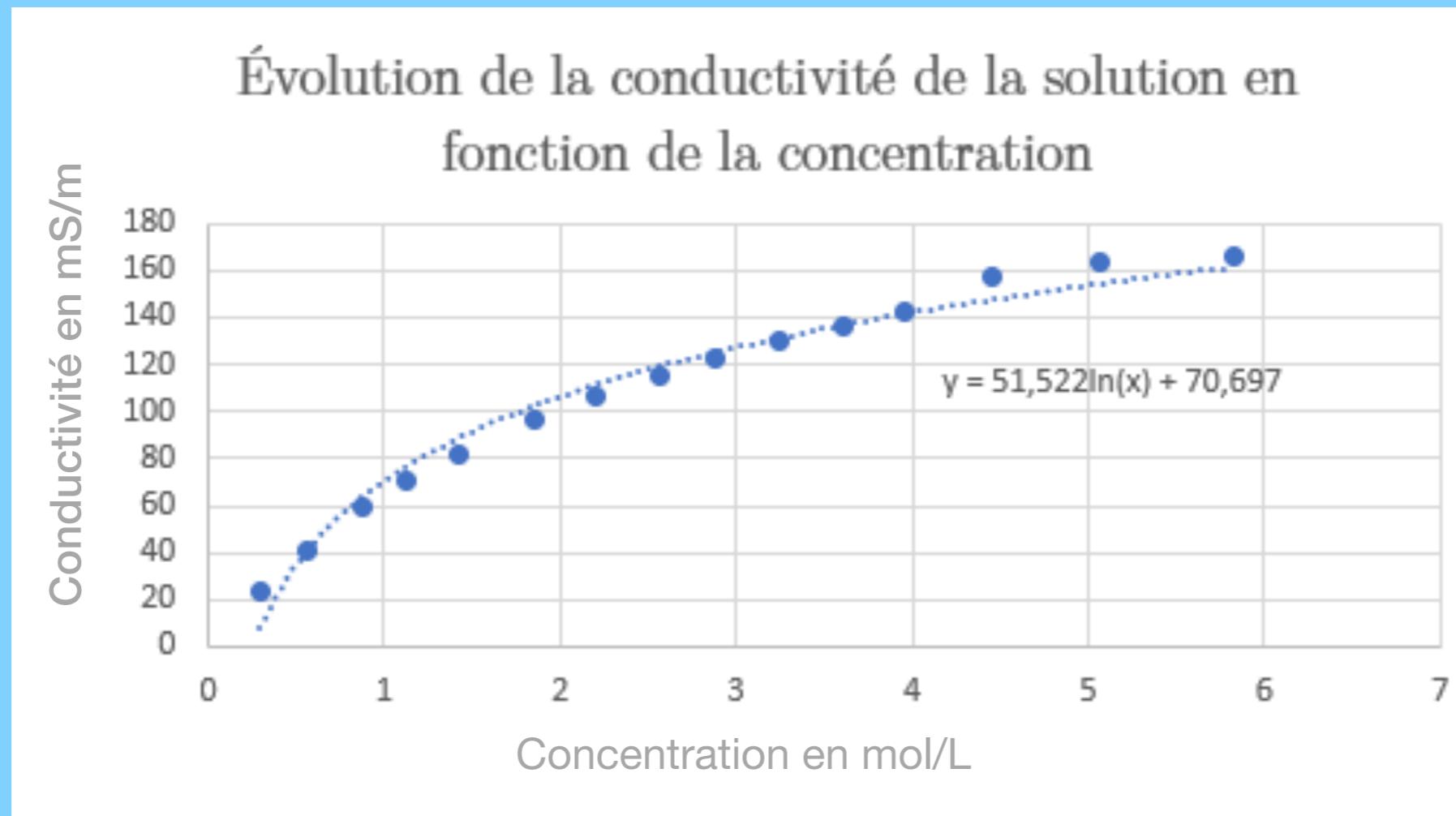
Experience	Concentration mol/L	Tension V	vitesse cm/s	Moyenne (cm/s)	incertitude vitesse (cm/s)	écart type expérimental
1	0,5	2,5	0,419			
2	0,5	2,5	0,618			
3	0,5	2,5	0,482	<b>0,5</b>	0,1	0,10
4	0,5	5	0,911			
5	0,5	5	1,05			
6	0,5	5	0,985	<b>1,0</b>	0,1	0,07
7	0,5	7,5	1,25			
8	0,5	7,5	1,01			
9	0,5	7,5	1,41	<b>1,2</b>	0,2	0,20
10	0,5	10	1,17	<b>1,2</b>	0,3	
11	1	2,5	0,655			
12	1	2,5	0,601	<b>0,6</b>	0,1	0,04
13	1	5	1,08			
14	1	5	0,953	<b>1,0</b>	0,3	0,09
15	1	7,5	0,76			
		7,5	0,71			
16	1	7,5	0,749	<b>0,8</b>	0,5	0,03
17	1	10	1,4			
18	1	10	1,28	<b>1,3</b>	0,7	0,08

<b>19</b>	1,5	2,5	0,396			
<b>20</b>	1,5	2,5	0,522	<b>0,5</b>	0,2	0,09
<b>21</b>	1,5	5	1,08			
<b>22</b>	1,5	5	1,08	<b>1,1</b>	0,4	0,00
<b>23</b>	1,5	7,5	0,733			
<b>24</b>	1,5	7,5	1,02	<b>0,9</b>	0,6	0,20
<b>25</b>	1,5	10	1,22	<b>1,1</b>	0,9	
<b>26</b>	3	2,5	0,67			
<b>27</b>	3	2,5	0,88	<b>0,8</b>	0,6	0,15
<b>28</b>	3	5	1,11			
<b>29</b>	3	5	1,28			
<b>30</b>	3	5	1,13	<b>1,1</b>	0,7	0,09
<b>31</b>	3	7,5	1,25			
<b>32</b>	3	7,5	1,04	<b>1,2</b>	0,8	0,15
		10	1,35	<b>1,2</b>		0,1
<b>33</b>	3	10	1,25	<b>1,3</b>	0,8	
	4	2,5	1,17			
	4	2,5	1,29	<b>1,2</b>	0,4	0,05
	4	5	1,54			
	4	5	1,66	<b>1,6</b>	0,4	0,06
<b>34</b>	5,4	2,5	1,63	<b>1,6</b>	0,4	
<b>35</b>	5,4	5	2,14	<b>2,1</b>	0,8	

## Conception de la tuyère



## Conductivité de l'eau en fonction de la concentration



## Annexe : démonstration pour le nombre de Reynolds magnétique

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell Ampère en ARQS :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

or  $\vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{\operatorname{rot}} \vec{j}$ ; on obtient donc  $\Delta \vec{B} = -\mu_0 \vec{\operatorname{rot}} \vec{j}$  car  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Avec la loi d'Ohm  $\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  où  $\gamma$  est la conductivité électrique du plasma, on trouve :

$$\Delta \vec{B} = -\mu_0 \vec{\operatorname{rot}} (\gamma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})) = -\mu_0 \gamma \vec{\operatorname{rot}} (\vec{E}) - \mu_0 \gamma \vec{\operatorname{rot}} (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

où on a fait l'hypothèse simplificatrice que la conductivité  $\gamma$  ne varie pas dans l'espace (ce qui n'est pas vrai, pour l'atmosphère solaire, à cause de la température hétérogène car  $\gamma = 8 \times 10^{-4} T^{3/2} S m^{-1}$ ).

Avec l'équation de Maxwell Faraday  $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ , on obtient :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \gamma \vec{\operatorname{rot}} (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

soit l' **équation de diffusion et d'advection du champ magnétique** :

$$\frac{\Delta \vec{B}}{\mu_0 \gamma} + \vec{\operatorname{rot}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Source : Jean-Marie Malherbe, Cours du MOOC PSL Hydrodynamique et MHD

## Démonstration pour le nombre de Reynolds magnétique

- Dans un milieu de conductivité **infinie**, on a simplement

$$\vec{\text{rot}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

qui constitue une équation de **transport** ou d'**advection** du champ magnétique dont le temps caractéristique est le temps dynamique égal à  $\boxed{\tau = L/v}$  (avec  $L$  dimension caractéristique).

- Dans un milieu **au repos**,

$$\frac{\Delta \vec{B}}{\mu_0 \gamma} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

est une équation de **diffusion pure**, dont le temps caractéristique (temps de diffusion) est égal à  $\boxed{\tau_d = L^2 \mu_0 \gamma}$


$$R_m = \frac{\tau_d}{\tau} = L \mu_0 \gamma v$$

## Annexe : profil des vitesses

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#PARAMETRES EXPERIMENTAUX

mu=1030 #Masse volumique de l'eau salée
U=5 #Tension en Volts
eta=10**(-6) #Viscosité dynamique de l'eau
E=U/0.03 #Calcul de la norme du champ électrostatique
sigma=sigmac() #Calcul de la conductivité pour C=1M
L=0.02 #Demie-hauteur de l'eau
B=0.075 #Norme du champs magnétique au milieu de l'eau
H=B*L*((sigma)/(eta*mu))**0.5 #Calcul du nombre de Hartmann pour U=5V, C=1M

#FONCTION AUXILLIAIRE DU CALCUL DU NOMBRE DE HARTMANN

def harlmannC(c):
    H=B*L*((sigmac(c))/(eta*mu))**0.5
    return H

#FONCTION AUXILLIAIRE POUR LE CALCUL DE LA CONDUCTIVITE EN FONCTION DE
#LA CONCENTRATION

def sigmac(c):
    "Calcul de la conductivité en fonction de la concentration à l'aide"
    "du modèle obtenu expérimentalement"
    sigma=float(51.522*np.log(c*1000) - 285.21)/1000
    return sigma
```

## Annexe : profil des vitesses

```
#U fixé, C varie

def vc05(z):
    "Calcul de la vitesse en z pour c=0.5M et U=5V"
    Ha=B*L*((0.034/(eta*mu))**(0.5))
    E=5/0.03
    vz= (E/B)*(1-(np.ccsch((Ha/L)*z)/np.cosh(Ha)))
    return vz
def vc1(z):
    "Calcul de la vitesse en z pour c=1M et U=5V"
    Ha=B*L*((0.07)/(eta*mu))**(0.5)
    E=5/0.03
    vz= (E/B)*(1-(np.ccsch((Ha/L)*z)/np.cosh(Ha)))
    return vz
def vc15(z):
    "Calcul de la vitesse en z pour c=1.5M et U=5V"
    Ha=B*L*((0.09158)/(eta*mu))**(0.5)
    E=5/0.03
    vz= (E/B)*(1-(np.ccsch((Ha/L)*z)/np.cosh(Ha)))
    return vz
def vc2(z):
    "Calcul de la vitesse en z pour c=2M et U=5V"
    Ha=B*L*((sigmac(2)/(eta*mu))**(0.5))
    E=5/0.03
    vz= (E/B)*(1-(np.ccsch((Ha/L)*z)/np.cosh(Ha)))
    return vz
def vc5(z):
    "Calcul de la vitesse en z pour c=5M et U=5V"
    Ha=B*L*((sigmac(5)/(eta*mu))**(0.5))
    E=5/0.03
    vz= (E/B)*(1-(np.ccsch((Ha/L)*z)/np.cosh(Ha)))
    return vz
def vc10(z):
    "Calcul de la vitesse en z pour c=10M et U=5V"
    Ha=B*L*((sigmac(10)/(eta*mu))**(0.5))
    E=5/0.03
    vz= (E/B)*(1-(np.ccsch((Ha/L)*z)/np.cosh(Ha)))
    return vz
```

## Annexe : profil des vitesses

```
def champvitesseselonC2():
    "Trace le champ des vitesses pour différentes valeurs de la concentration"
    t= np.linspace(-0.02,0.02,1000)
    f05=np.vectorize(vc05)
    f1=np.vectorize(vc1)
    f15=np.vectorize(vc15)
    f2=np.vectorize(vc2)
    f5=np.vectorize(vc5)
    f10=np.vectorize(vc10)
    Y05=f05(t)
    Y1=f1(t)
    Y15=f15(t)
    Y2=f2(t)
    Y5=f5(t)
    Y10=f10(t)
    plt.plot(t,Y05,'-b',label='C=0.5M')
    plt.plot(t,Y1,'-g',label='C=1M')
    plt.plot(t,Y15,'-k',label='C=1.5M')
    plt.plot(t,Y2,'-r',label='C=2M')
    plt.plot(t,Y5,'-c',label='C=5M')
    plt.plot(t,Y10,'-m',label='C=10M')
    plt.ylabel('Vitesse en m/s')
    plt.grid(True)
    plt.xlabel("z en m")
    plt.title('Champ des vitesses dans le plan (0,y,z), U=5V')
    plt.legend(['C=0.5M, H=0.008','C=1M, H=0.012','C=1.5M, H=0.014','C=2M, H=0.015','C=5M, H=0.018','C=10M, H=0.020'],loc='best',)
    plt.show
    return()
```

## Annexe : démonstration de l'écoulement de Hartmann

Référentiel terrestre supposé galiléen  
Système : une particule de fluide

Invariance par translation selon  $x$        $\rightarrow$        $\vec{v} = v(y, z) \vec{u}_x$   
Ecoulement principal selon l'axe ( $Ox$ )

homogène et incompressible       $\rightarrow$        $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$        $\rightarrow$        $\vec{v} = v(y) \vec{u}_x$   
 $\rightarrow$   
 $\operatorname{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$        $\rightarrow$        $\vec{E} = -E_0 \vec{u}_y$

Loi d'Ohm généralisée selon ( $Oy$ ) :

Projection de Navier-Stokes selon l'axe ( $Ox$ )       $\rightarrow$        $\frac{\partial P}{\partial x} = j_y B_o + \rho v \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$

Equation différentielle obtenue :

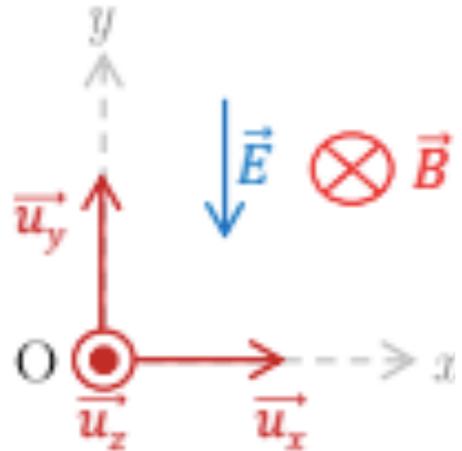
$$\frac{I}{\rho v} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \sigma \frac{E_o}{B_o} \right) = -V_x \sigma \frac{B_o^2}{\rho v} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

Conditions aux limites (adhérence à la paroi)       $\rightarrow$        $v(x, 0, z) = v(x, -a, z) = 0$

$$V_x(y) = \frac{E_o}{B_o} \frac{(1 - \cosh(H \frac{y}{a}))}{\cosh H}$$

Source : AÏSSI Anass ,NELAYAH Jaysen ,VILLAIN Sébastien : Moteur et générateur Magnétohydrodynamique,  
Site internet de l'Université Paris-Diderot,

## Annexe : mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique et électrique orthogonaux



Référentiel terrestre supposé galliléen

Système : particule chargée

Bilan des forces : Force de Lorentz

**Principe fondamental de la dynamique à la particule**

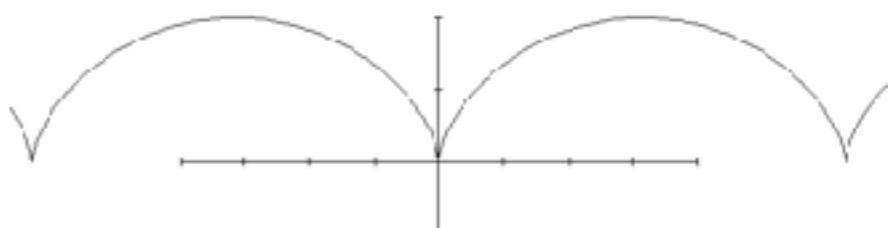
$$m \vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

On projette selon les axes  $x$  et  $y$  :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= w_o y \\ \ddot{y} &= -\frac{E_o}{B_o} w_o - w_o \dot{x}\end{aligned}$$

avec :  
 $w_o = \frac{qB_o}{m}$

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{-E_o}{B_o w_o} (1 - \cos(w_o t)) \\ y(t) &= \frac{E_o}{B_o w_o} \sin(w_o t) + \frac{E_o}{B_o} t\end{aligned}$$



## Annexe : propulseur MHD

### Schéma propulseur VASIMR

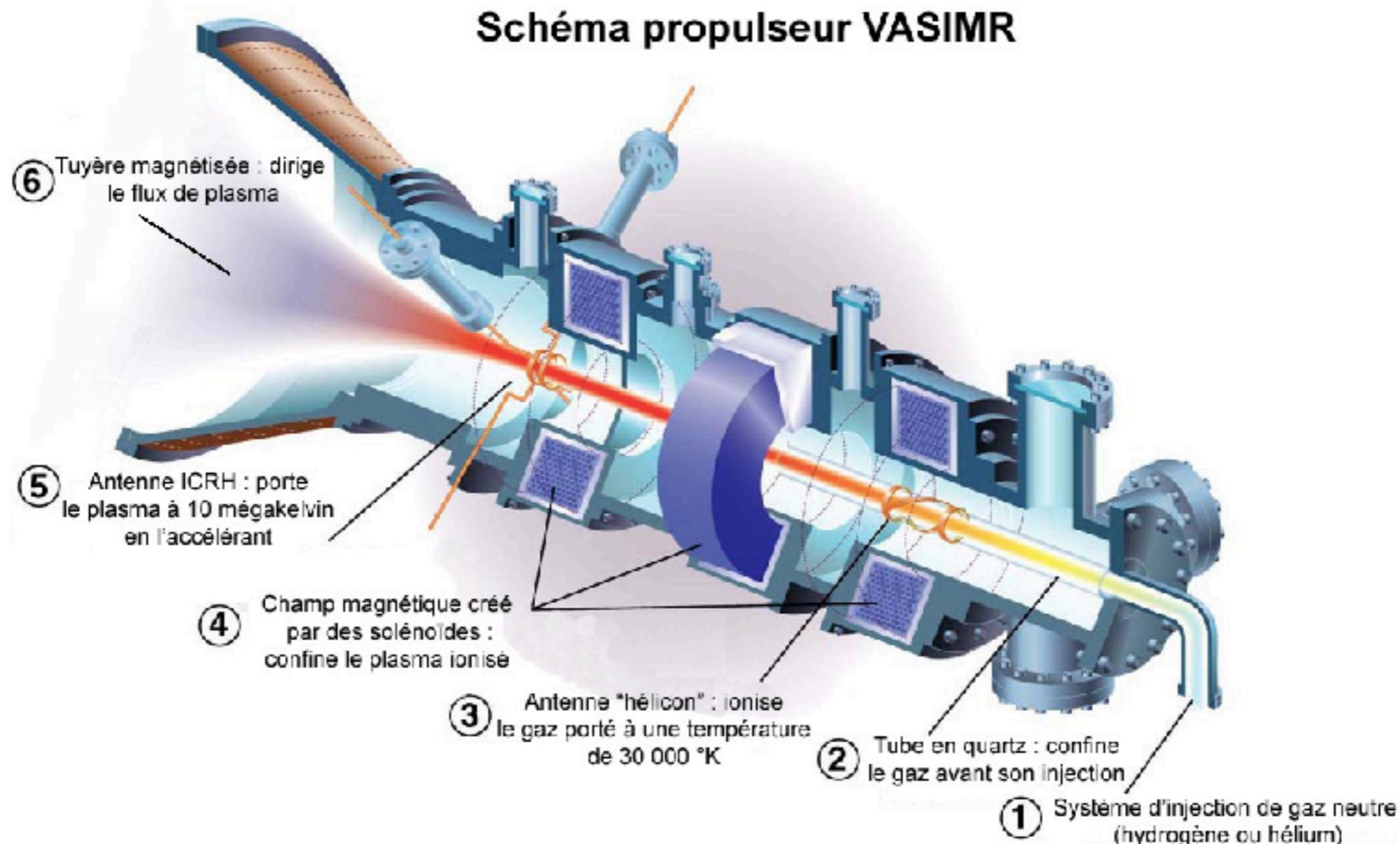


Schéma explicatif du VASIMR  
Source : Wikipédia