ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80, Τηλ: 772.1448, Fax: 772.1452
e-mail: maglaris@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

18 Μαρτίου 2019

Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

1η Ομάδα Ασκήσεων

Κατανομή Poisson

Α) Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function) της κατανομής Poisson: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους λ={3, 10, 50}. Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι και 70. Πώς αλλάζει η μορφή τους, καθώς μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου λ;

Β) Μέση τιμή και διακύμανση κατανομής Poisson: Να επιλέξετε την κατανομή Poisson με παράμετρο λ=30. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της και τη διακύμανσή της. Τι παρατηρείτε για τις τιμές που υπολογίσατε;

Γ) Υπέρθεση κατανομών Poisson: Να επιλέξετε τις κατανομές Poisson με παραμέτρους λ=10 και λ=50. Να υπολογίσετε την κατανομή που προκύπτει από τη συνέλιξη των δύο αυτών κατανομών και, στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τις τρεις αυτές κατανομές σε κοινό διάγραμμα. Τι είδους κατανομή προέκυψε; Τι παρατηρείτε για τη σχέση της κατανομής που υπολογίσατε με τις δύο επιμέρους κατανομές; Ποια είναι η απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτό;

Δ) Κατανομή Poisson ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής: Πώς μπορεί να ληφθεί μία κατανομή Poisson παραμέτρου λ ως το όριο μιας διωνυμικής (binomial) κατανομής παραμέτρων n και p; Να κατασκευάσετε, με αυτόν τον τρόπο, μία κατανομή Poisson παραμέτρου λ=30 σημεία/sec. Πιο συγκεκριμένα, να σχεδιάσετε, σε κοινό διάγραμμα, την εξέλιξη μιας διωνυμικής κατανομής, καθώς τείνει στην επιθυμητή κατανομή Poisson (τρία διαγράμματα αρκούν για n = 300, 3000, 30000).

Εκθετική κατανομή

Α) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF, Probability Density Function) της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των εκθετικών κατανομών με μέσους όρους 1/λ={0.5,1,3}. Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι 8 (Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την εντολή k = 0:0.00001:8. Έτσι, μπορείτε να προσεγγίσετε τη συνεχή εκθετική κατανομή ως μία διακριτή με πολύ μικρό σφάλμα).

Β) Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Cumulative Distribution Function) των εκθετικών κατανομών του προηγούμενου ερωτήματος σε κοινό διάγραμμα.

Γ) Απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής: Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής για $1/\lambda = 2.5$ sec, να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X>30000)$ και $Pr(X>50000|X>20000)$. Τι παρατηρείτε για τις δύο πιθανότητες; Γιατί συμβαίνει αυτό; Πώς ερμηνεύεται η παρατήρησή σας; (Επεξήγηση: οι τιμές 30000, 50000 και 20000 δηλώνουν τη θέση του σημείου στο διάνυσμα k = 0:0.00001:8 που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα).

Δ) Ελάχιστο δύο εκθετικών τυχαίων μεταβλητών: Να χρησιμοποιήσετε την εντολή exprnd( ) για να δημιουργήσετε 5000 ζεύγη δειγμάτων από δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X1 και X2 που ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέσους όρους $1/\lambda = 2$ sec και $1/\lambda = 1$ sec αντίστοιχα. Για την τυχαία μεταβλητή $Y= \min\{X1,X2\}$: Βρείτε το μέσο όρο της Y και κατασκευάστε το κανονικοποιημένο ιστόγραμμά της με την εντολή hist(), χρησιμοποιώντας 50 κλάσεις ίσου πλάτους. Στο ιστόγραμμα αυτό πρέπει να είναι ενωμένα και τα κέντρα των κλάσεων. Ποία κατανομή ακολουθεί και με τι παραμέτρους; Εκτός της προσομοίωσης, να δώσετε και θεωρητική απόδειξη.

Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

Α) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson N(t): Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθούν οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson; Να δημιουργήσετε με την εντολή exprnd( ) 100 διαδοχικά τυχαία γεγονότα και να σχεδιάσετε (συνάρτηση stairs) μία διαδικασία καταμέτρησης Poisson. Θεωρήστε $\lambda = 5$ γεγονότα/sec.

Β) Μέσος αριθμός γεγονότων: Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθεί ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο $\Delta T = t1 - t2$; Να βρείτε το μέσο αριθμό γεγονότων στη μονάδα του χρόνου. Τι παρατηρείτε;

Γ) Χρόνος προσομοίωσης: Υπολογίστε το μέσο χρόνο που μεσολαβεί ανάμεσα στα γεγονότα 49 και 50 σε 100 ανεξάρτητες επαναλήψεις της προσομοίωσης Να το συγκρίνετε με το χρόνο που μεσολαβεί ανάμεσα στα γεγονότα 50 και 51. Τι παρατηρείτε για τους δύο χρόνους; Γιατί συμβαίνει αυτό;

Για απορίες να στέλνετε στο queuing@netmode.ntua.gr