ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΜΠ

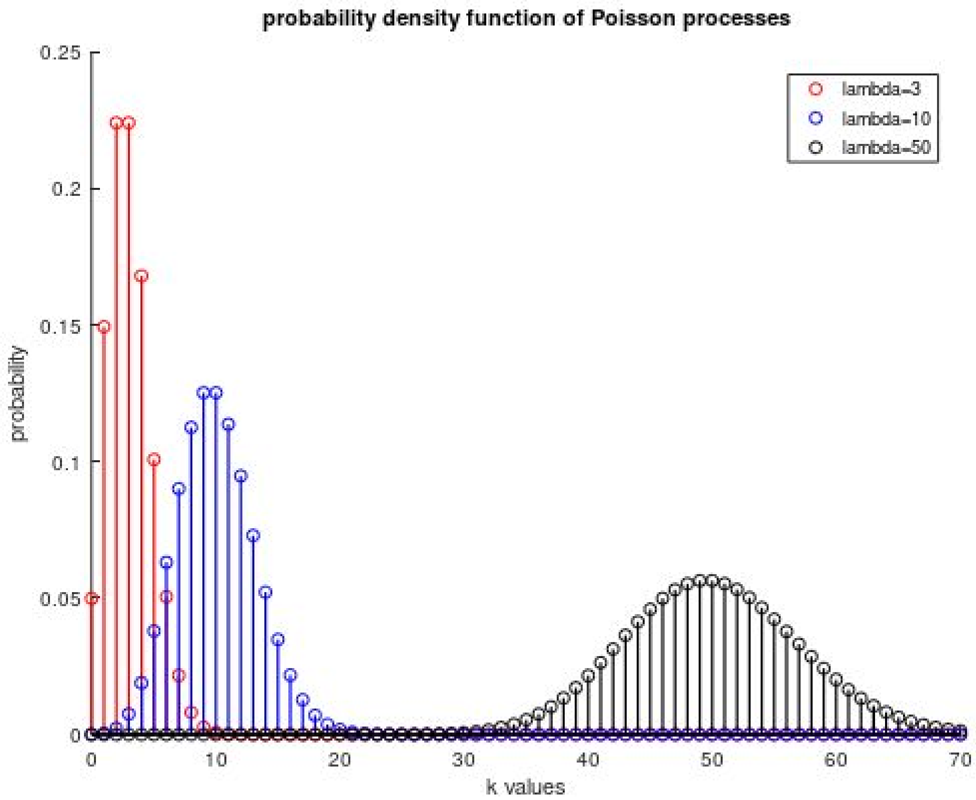
"QUEUING SYSTEMS"

Ορφανουδάκης Φίλιππος 03113140

1η Ομάδα Ασκήσεων

Κατανομή Poisson

A)

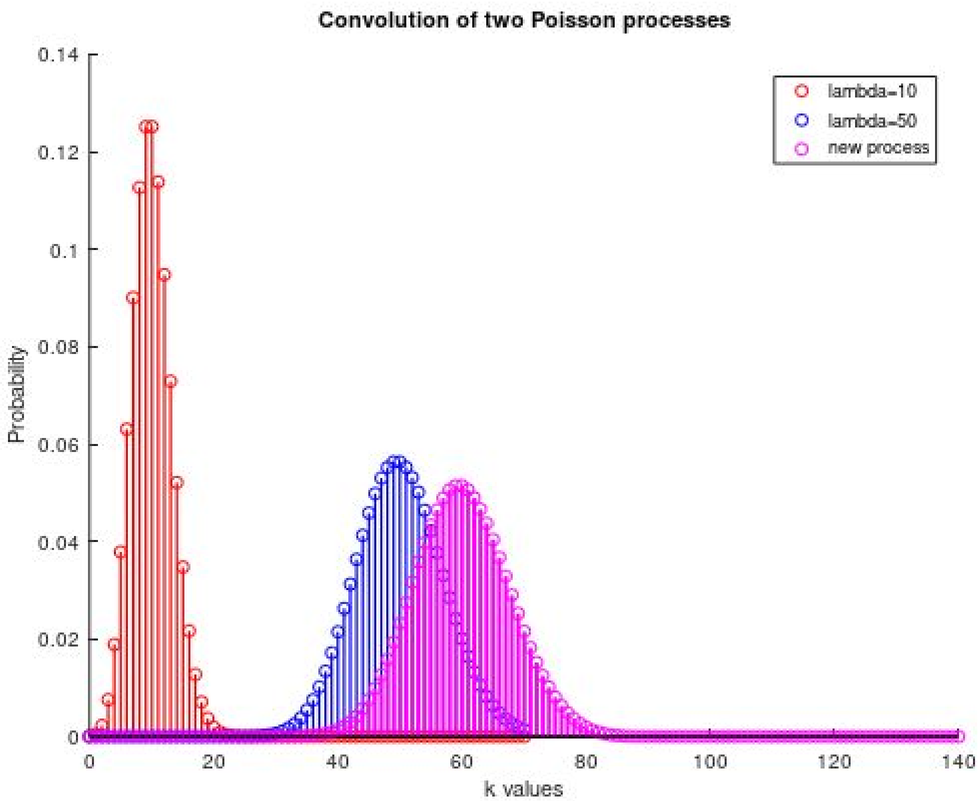


Παρατηρούμε μια μετακίνηση της καμπύλης προς τα δεξιά καθώς και ''ανοιγμα'' της όσο μεγαλώνει το lambda, αναμενόμενο αφου η παραμετρος αυτή υποδηλώνει το μέσο πλήθος εμφάνισης γεγονότων , οπότε περιμένουμε τη μεγαλύτερη πιθανότητα να την πάρει το k = lambda.

B)

Μέση τιμή = μ = 30
Διακύμανση = Var =30
Παρατηρούμε ότι το lambda ισούται με τη μέση τιμή και τη διακύμανση , όπως γνωρίζουμε και απο θεωρία

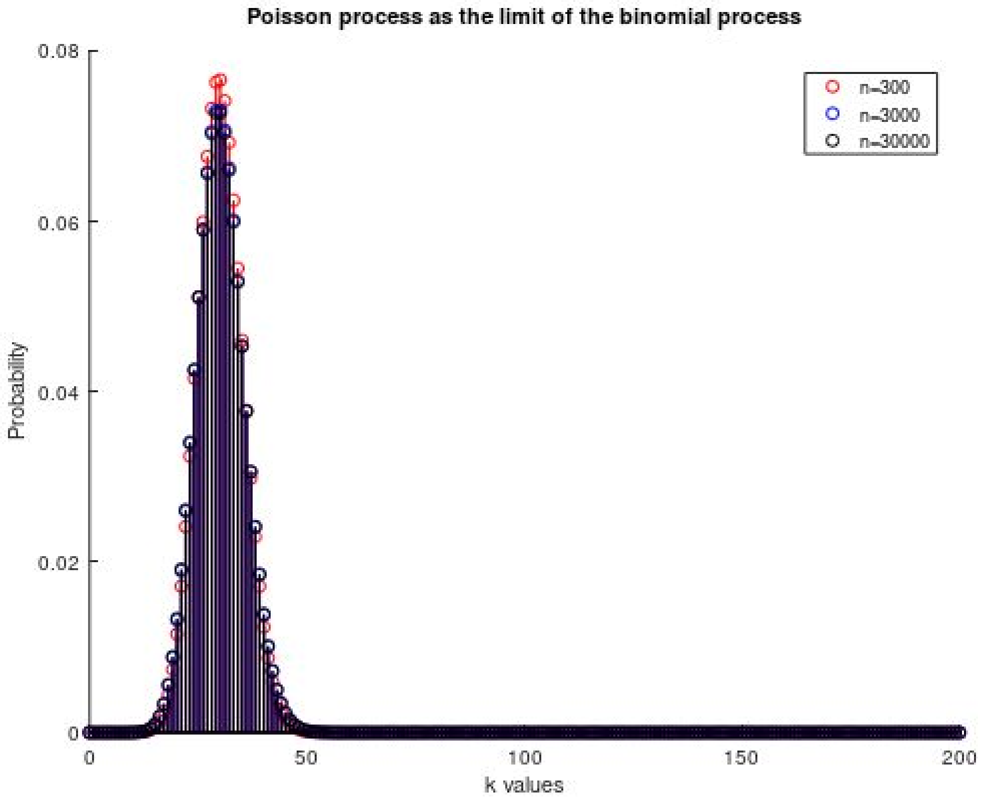
C)



Παρατηρούμε ότι η υπέρθεση των δύο κατανομών Poisson έχει σαν αποτέλεσμα μια νέα κατανομή Poisson , και πιο συγκεκριμένα η υπέρθεση δύο κατανομών Poisson με λ1,λ2 δημιουργεί μια κατανομή Poisson με λ3=λ1+λ2 με την προυπόθεση να είναι ανεξάρτητες και θετικές.

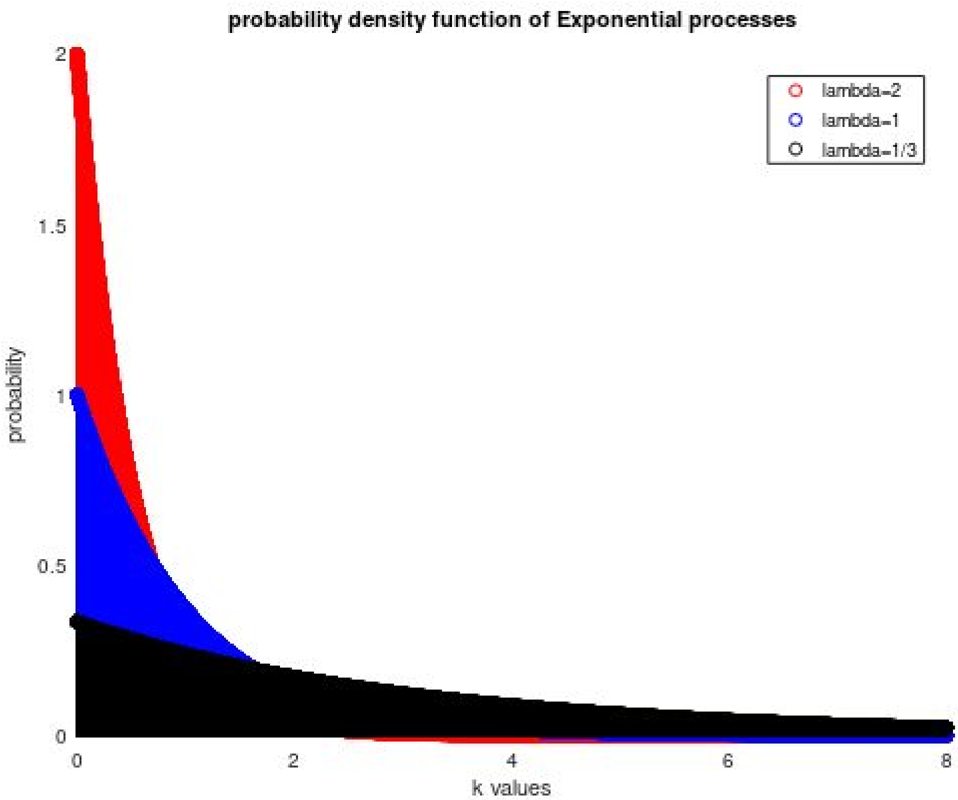
D)

Η κατανομή Poisson μπορεί να θεωρηθεί σαν το όριο της δυωνυμικής κατανομής , όταν $n \to \infty$ και $p<<1(\approx <1/25)$ τότε προκύπτει ότι $\lambda=n*p$, (τον περιορισμό για την πιθανότητα να συμβεί το γεγονός την βάλαμε καθώς μπορούμε και για $n>100$ να πάρουμε προσεγγιστικά poisson αλλά θέλουμε το λ να είναι της τάξης του 1).

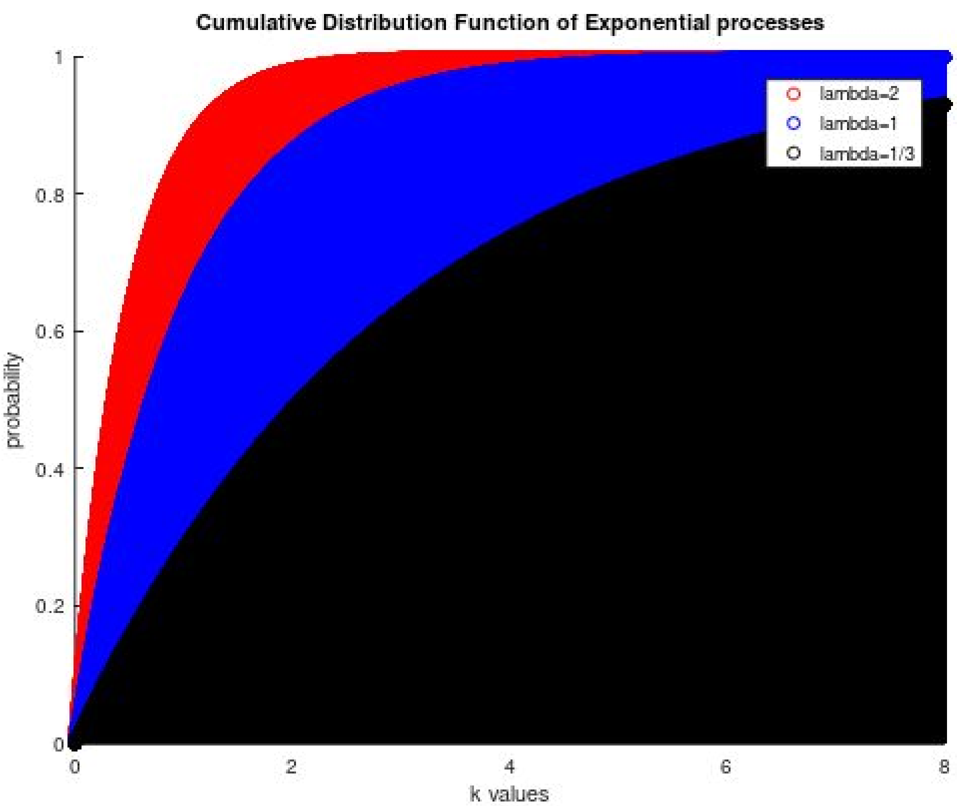


Εκθετική κατανομή

A)


probability density function of Exponential processes
lambda=2
lambda=1
lambda=1/3
probability
k values
0
2
4
6
8
0.5
1
1.5

B)


Cumulative Distribution Function of Exponential processes
lambda=2
lambda=1
lambda=1/3
probability
k values
0
2
4
6
8
0.2
0.4
0.6
0.8
1

C)

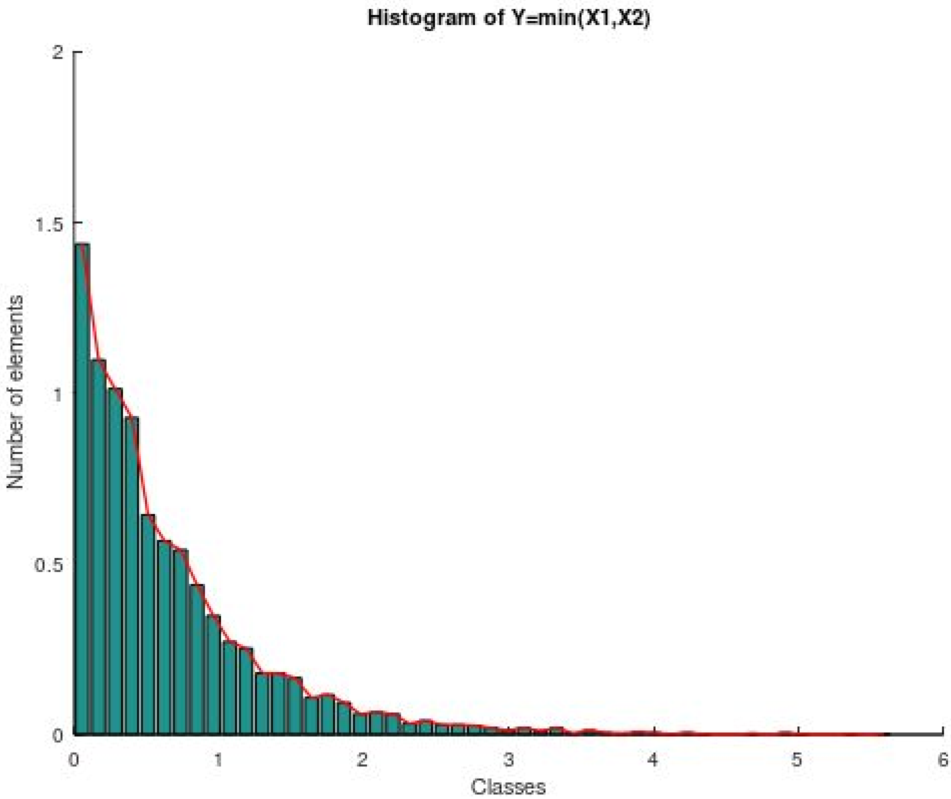
```
P(X>30000) is
 0.99988
P(X>50000|X>20000) is
 0.99980
```

Σχεδόν ίσες
Αυτό συμβαίνει λόγω μιας ιδιότητας της εκθετικής κατανομής της έλλειψης μνήμης , πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι :
Pr(X≥ a+b | X≥ a)= Pr(X≥b).

Επομένως Pr(X>50000|X>20000)=Pr(X>50000-20000)=Pr(30000).

D)

```
Mean of Y=min{X1,X2} =
 0.66005
```



Το αποτέλεσμα και η κατανομή που ακολουθεί είναι η εκθετική με παράμετρο 1/λ1 + 1/λ2= 3
Απόδειξη :

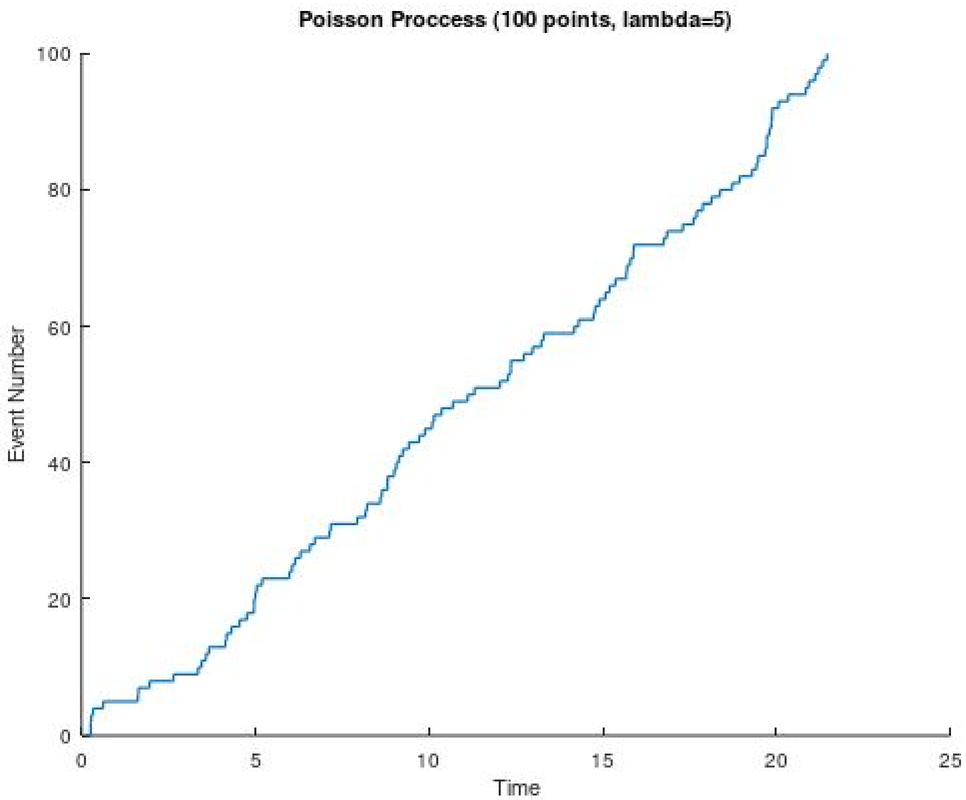
Έστω 1/λ1 τότε έχω ότι : $P(X1 \geq t)=e^{(-t/\lambda 1)}$
Έστω 1/λ2 τότε έχω ότι : $P(X2 \geq t)=e^{(-t/\lambda 2)}$

Αν έχω Y=min(X1,X2) τότε $P(Y \geq t)=P(X1 \geq t, X2 \geq t)=P(X1 \geq t)P(X2 \geq t)=e^{-(1/\lambda 1+1/\lambda 2)t}$.

Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

A)

Η κατανομή που ακολουθούν οι χρόνοι διαδοχικών εμφανίσεων γεγονότων Poisson με μέσο ρυθμό λ είναι η εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ.



B)
Ο μέσος αριθμός γεγονότων σε μια περίοδο χρόνου ακολουθεί κατανομή Poisson

```
Average number of arrivals per second =
 4.6611
```

Παρατηρούμε ότι είναι πάρα πολύ κοντά στο λ=5 .

C)

```
Average time between 49th and 50th event =
 0.20657
Average time between 50th and 51st event =
 0.20313
```

Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιότητας της εκθετικής κατανομής που ακολουθούν οι χρόνοι διαδοχικών γεγονότων.

Ουσιαστικά για κάθε συνεχόμενα event η ο χρόνος είναι ανεξάρτητος απο τον χρόνο εμφάνισης των προηγούμενων event και μεταξύ τους ισοπίθανοι ή στην δικιά μας περίπτωση ίσοι.

Τέλος βλέπουμε ότι ο μέσος χρόνος είναι όσο 1/λ.

SOURCE CODE:

```
#1h OMADA ASKHSEWN

#KATANOMH POISSON

#A

k = 0:1:70;
lambda = [3,10,50];

for i=1:columns(lambda)
  poisson(i,:) = poisspdf(k,lambda(i));
endfor
colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  stem(k,poisson(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
 hold off;
title("probability density function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3","lambda=10","lambda=50");

#B
```

```
lambda = [3,10,30, 50];
for i=1:columns(lambda)
  poisson(i,:) = poisspdf(k,lambda(i));
endfor
index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index,:);
mean_value = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  mean_value = mean_value + i.*poisson(index,i+1);
endfor
display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);
second_moment = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  second_moment = second_moment + i.*i.*poisson(index,i+1);
endfor
variance = second_moment - mean_value.^2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);


#C

first = find(lambda==10);
second = find(lambda==50);
poisson_first = poisson(first,:);
poisson_second = poisson(second,:);
composed = conv(poisson_first,poisson_second);
new_k = 0:1:(2*70);
figure(2);
hold on;
stem(k,poisson_first(:),colors(1),"linewidth",1.2);
stem(k,poisson_second(:),colors(2),"linewidth",1.2);
stem(new_k,composed,"mo","linewidth",2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10","lambda=50","new process");

#D

k = 0:1:200;
lambda = 30;
i = [10,100,1000];
```

```
n = lambda.*i;
p = lambda./n;

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i=1:3
  binomial = binopdf(k,n(i),p(i));
  stem(k,binomial,colors(i),'linewidth',1.2);
endfor
legend("n=300","n=3000","n=30000");
hold off;

# EKTHETIKH KATANOMH

#A

k = 0:0.00001:8;
lambda = [0.5,1,3];
for i=1:columns(lambda)
  exp_pdf(i,:) = exppdf(k,lambda(i));
endfor
figure(4);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
 stem(k,exp_pdf(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
 hold off;
title("probability density function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=2","lambda=1","lambda=1/3");

#B

for i=1:columns(lambda)
  exp_cdf(i,:) = expcdf(k,lambda(i));
endfor
figure(5);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  stem(k,exp_cdf(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
 hold off;
```

```
title("Cumulative Distribution Function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=2","lambda=1","lambda=1/3");

#C

mean=2.5;
exponential_cdf(4,:) = expcdf(k,mean);
display("P(X>30000) is");
display(1-exponential_cdf(4,30));
display("P(X>50000|X>20000) is");
display(1-exponential_cdf(4,50))/(1-exponential_cdf(4,20));

#D


for i=1:5000
  X(i,:) = [exprnd(2), exprnd(1)];
endfor

for i=1:5000
  Y(i) = min(X(i,:));
endfor

mean2 = 0;
for i=1:5000
  mean2 = mean2 + Y(i);
endfor
mean2 = mean2 / 5000;
display("Mean of Y=min{X1,X2} =");
disp(mean2);

max_Y = max(Y);
width_of_class = max_Y / 50;

figure(6);
hold on;
[NN, XX] = hist(Y,50);
NN_without_free_variables = NN / width_of_class / 5000;
bar(XX,NN_without_free_variables);
plot(XX,NN_without_free_variables,"r","linewidth",1.3);
hold off;
title("Histogram of Y=min(X1,X2)");
xlabel("Classes");
ylabel("Number of elements");
```

```
# DIADIKASIA KATAMETRHSHS POISSON

#A

A(1) = exprnd(1/5);
for i=2:100
  A(i) = A(i-1) + exprnd(1/5);
  event(i) = i;
endfor
figure(7);
hold on;
stairs(A, event, "linewidth", 1.2);
hold off;
title("Poisson Proccess (100 points, lambda=5)");
xlabel("Time");
ylabel("Event Number");

#B

mean_arrivals = 100 / A(100);
display("Average number of arrivals per second =");
disp(mean_arrivals);

#C

between_49_50 = 0;
between_50_51 = 0;
for i=1:100
  A(1) = exprnd(1/5);
  for j=2:100
    A(j) = A(j-1) + exprnd(1/5);
    event(j) = j;
  endfor
  between_49_50 = between_49_50 + A(50) - A(49);
  between_50_51 = between_50_51 + A(51) - A(50);
endfor
between_49_50 = between_49_50 / 100;
between_50_51 = between_50_51 / 100;
display("Average time between 49th and 50th event =");
disp(between_49_50);
display("Average time between 50th and 51st event =");
disp(between_50_51);
```