Cálculo Diferencial e Integral: Notas de Aula
Domínio e Imagem em gráficos, e Noção de limite

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20160303

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber ...

2 Pré-requitos da aula

- Domínio e imagem
- Tabela de valores de uma função

3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto na seção 1.7 para se aprofundar no conteúdo desta aula.

3.1 Problema

Como identificar no plano cartesiano o domínio e a imagem do gráfico de uma função?

3.2 Domínio e Imagem no gráfico

Começar com alguns gráficos (ainda sem mostrar a expressão de cada função) e perguntar qual é o intervalo que corresponde ao domínio e à imagem de cada função.

3.2.1 Exemplo 1

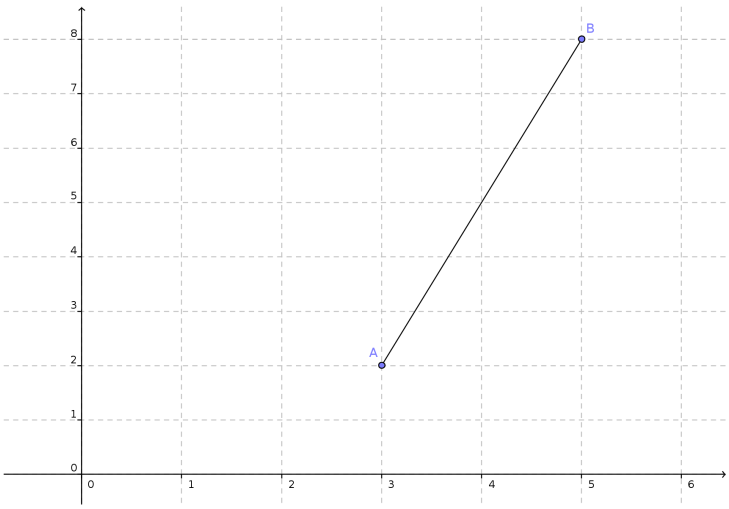

Figura 1: Gráfico

Resposta: A função da Figura 1:

$$f(x) = 3x - 7$$

3.2.2 Exemplo 2

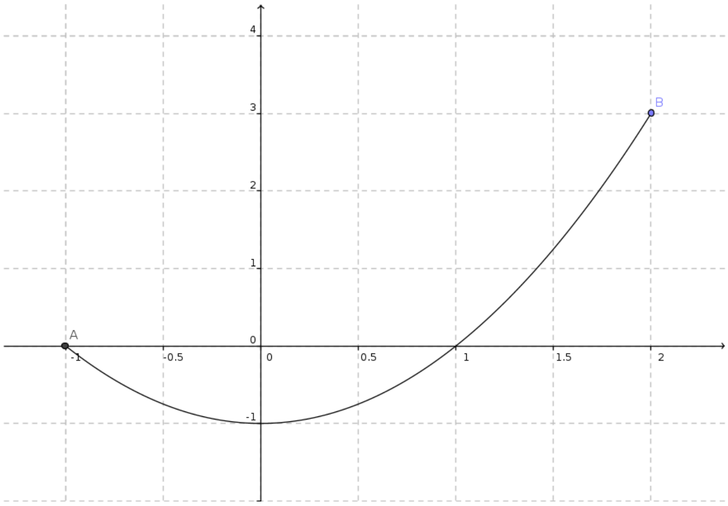

Figura 2: Gráfico

Resposta: a função da Figura 2:

$$f(x) = x^2 - 1$$

está definida para $-1 \leq x \leq 2$, e sua imagem é $[-1, 3]$.

3.2.3 Exemplo 3

Podemos também concatenar duas funções

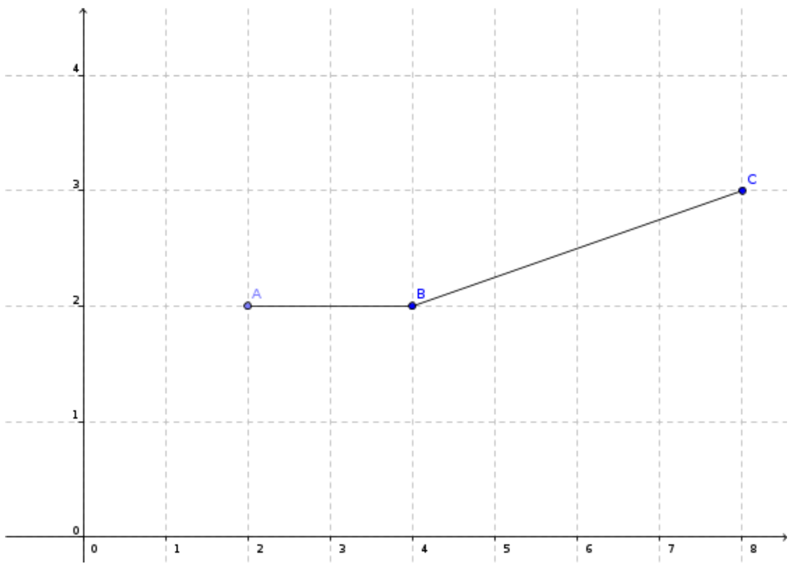

Figura 3: Gráfico

Resposta: a função da Figura 3:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 2 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{x}{4} + 1, & x > 4 \end{cases}$$

está definida para $-1 \leq x \leq 2$, e sua imagem é $[-1, 3]$.

3.2.4 Exemplo 4

Para uma concatenação de mais funções, podemos colar duas retas em uma parábola:

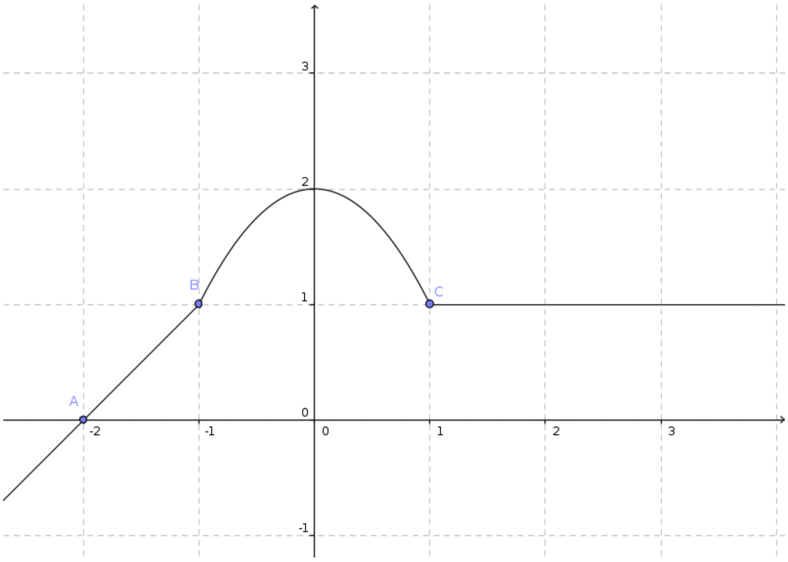

Figura 4: Gráfico

Função da Figura 4:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ -x^2+2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Resposta: o domínio é $\mathbb{R}$, e a imagem é $[-\infty, 2]$.

3.3 Noção de Limite

3.3.1 Exemplo 1

- Juntar os alunos em duplas;
- Pegar as calculadoras;
- Lembrar que na prova **não** será permitida a calculadora
- Calcular os valores de $f(x)$ para os valores de x abaixo, e preencher a tabela.
- Caso falte tempo, fazer somente esse na calculadora, e entregar os valores para oos dois últimos exemplos.

"Para que valor a função $f(x)$ se aproxima, quando x se aproxima de 1?"

$$f(x) = 2x + 3$$

x	$f(x)$
0,95	4,90
0,96	4,92
0,97	4,94
0,98	4,96
0,99	4,98

x	$f(x)$
1,010	5,020
1,009	5,018
1,008	5,016
1,007	5,014
1,006	5,012

3.3.2 Exemplo 2

(Neste exemplo, a calculadora ainda vai encontrar uma boa aproximação do limite).

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

, definida no intervalo $]-2, 2[$.

O que acontece com f quando x se aproxima de 2?

x	$f(x)$
1,95	0,25316
1,96	0,25253
1,97	0,25189
1,98	0,25126
1,99	0,25063

x	$f(x)$
2,010	0,24238
2,009	0,24944
2,008	0,24950
2,007	0,24956
2,006	0,24938

Neste ponto, explicar como proceder algebricamente (produto notável, diferença de dois quadrados).

3.3.3 Exercício

$$f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}$$

$f(x)$, definida no intervalo $]-5, 5[$.

Usar álgebra para descobrir o que acontece com f quando x se aproxima de -5?

3.3.4 Exemplo 3

Agora os alunos verão **porque** não é permitido calculadora nesta disciplina! Eis um exemplo em que a calculadora "erra".

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$$

$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, estudar o comportamento de f para x próximo de 0.

x	$f(x)$

x	$f(x)$
0,0001	0.16666668
0,00001	0.16666668
0,000001	0.16653345
0,0000001	0.17763568
0,00000001	0.00000000

Quando x está perigosamente próximo de 0, a função parece assumir o valor 0. Será que este é o limite?

Não! O limite é $\frac{1}{6}$!

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \times \frac{(\sqrt{x^2+9}+3)}{(\sqrt{x^2+9}+3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{{\sqrt{x^2+9}}^2 - 3^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{{\sqrt{x^2+9}}^2 - 3^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(9-9)}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Não confie cegamente na calculadora!