Séries: Notas de Aula
Séries Geométricas

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20151023

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber reconhecer Séries Geométricas (tanto somatórios finitos e infinitos), e aplicá-las em problemas com somas incrementadas com razão constante.

2 Pré-requisitos da aula

Se $|r| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto na seção 9.1 para se aprofundar no conteúdo desta aula.

3.1 Formulário

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ onde } r \neq 1$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}, \text{ onde } |r| < 1$$

3.2 Problema

As Séries Geométricas tipicamente são aplicadas a problemas de juros compostos. Para sairmos do óbvio, vamos ver uma aplicação diferente desta ferramenta. Vocês poderão aplicar estas técnicas em problemas de juros compostos nos exercícios e problemas do livro.

Suponha que você toma um medicamento na forma de cápsula ou comprimido. Todas as doses contém a mesma quantidade Q de medicamento, mas conforme o tempo passa, seu corpo vai metabolizando ou excretando. Assim a quantidade presente no seu corpo vai diminuindo, e você precisa de uma nova dose, para manter sempre uma quantidade efetiva de medicamento no organismo. Como podemos descobrir qual é a quantidade de medicamento *presente* no seu corpo em cada instante de tempo?

Para fixar idéias, considere que você toma um comprimido de 100mg de medicamentol ©[1] a cada 8 horas. Vamos assumir que é conhecido, para este medicamento, que após o período de 8h, restam apenas 20% da dose de 100mg. Pergunta-se:

1. Qual é a quantidade Q_4 (mg) de medicamento após a ingestão da quarta dose? E quantidade Q_{10} ou Q_{18}? E Q_n?
2. Após um número n muito grande de doses, a quantidade Q_n continua a crescer indefinidamente, ou estabiliza em algum limite Q_∞?
3. Nos casos em que ela estabiliza, o que é necessário para que isso ocorra?

Você aprenderá a responder estas perguntas na seção 3.4 desta aula.

[1] Medicamento extremamente fictício, usado na falta de conhecimento

3.3 Séries geométricas

Considere a seguinte soma infinita:

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

O que podemos observar sobre cada nova parcela nesta soma? Cada novo termo é a metade do anterior, certo?

Mas com infinitos termos, precisamos de uma maneira mais compacta para efetuar essa operação, digamos, em uma calculadora. Precisamos encontrar uma *fórmula fechada.* Como fazer isso?

Primeiro vamos tentar identificar alguma lógica que sirva para todos os termos. Para isto, basta observar que isto é o mesmo que multiplicar o termo anterior por $\frac{1}{2}$. Observe:

$$\begin{aligned}
& 4 && +2 && +1 && +\frac{1}{2} && +\frac{1}{4} && +\frac{1}{8} && +\dots \\
= & 4 && +4\times\left(\frac{1}{2}\right) && +4\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right) && +4\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right) && +\dots \\
= & 4 && +4\times\left(\frac{1}{2}\right) && +4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 && +4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 && +4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 && +4\times\left(\frac{1}{2}\right)^5 && +\dots \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Pense um pouco sobre a fórmula do somatório acima. Substitua $n = 0$, $n = 1$, etc, e encontre os primeiros termos para ter certeza que você a entendeu.

3.3.1 Convergência de uma série geométrica infinita

Qualquer soma finita, tem um resultado. A questão é quando temos infinitos termos sendo somados, quando isso resulta em um número?

Qualquer série geométrica com razão r menor que 1 em módulo é convergente. Se a razão for maior que 1 (em módulo), ou igual a 1 ou -1, então ela é divergente.

3.3.2 Soma finita

No nosso exemplo $r = \frac{1}{2} \neq 1$, então podemos calcular qualquer soma finita com a fórmula da seção 3.1. Por exemplo, S_{15}:

$$S_{15} = \sum_{n=0}^{15} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 7.9998$$

Exercícios: Com a série do exemplo acima, verifique na calculadora que $S_4 = 7.5$ e $S_{10} = 7.9922$.

3.3.3 Soma infinita

Observe que o módulo da razão $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, então podemos aplicar a fórmula da seção 3.1:

$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

3.4 Resolução do problema

De onde vêm as fórmulas da seção 3.1? Vamos desconstruir a lógica por trás delas para responder às perguntas do problema da seção 3.2.

Cada dose nova ingerida de medicamentol © contém 100mg. Após o período, sobram 20% = 0.2, quando você ingere a próxima dose. Temos então as quantidades após cada dose:

$$\begin{array}{rllllr}
Q_1 = & 100 & & & & = 100 \\
Q_2 = & 100 & +100 \times 0.2 & & & = 120 \\
Q_3 = & 100 & +100 \times 0.2 & +100 \times (0.2)^2 & & = 124 \\
Q_4 = & 100 & +100 \times 0.2 & +100 \times (0.2)^2 & +100 \times (0.2)^3 & = 124.80 \\
Q_5 = & \ldots & & & & = 124.96 \\
Q_6 = & \ldots & & & & = 124.99
\end{array}$$

Observação 1: Q_1 tem um termo, Q_2 tem dois termos ... Qual é o maior expoente da razão $r = 0.2$ em cada Q_n?

Observação 2: Para mim parece que a quantidade resultante após cada dose, está estabilizando.

Exercícios: Calcule Q_5 digitando os 5 termos na calculadora. Agora você também já sabe conferir Q_6 na sua calculadora usando a fórmula. Mãos à obra!

Como você pode ver, daria muito trabalho fazer todas as somas e multiplicações para encontrar Q_{10} mesmo na calculadora. Uma fórmula fechada, permite encontrar a mesma resposta, de forma mais prática.

Mas como podemos encontrar uma fórmula fechada (como a da seção 3.1) para calcular uma quantidade Q_n qualquer?

Existe um "truque". Vamos tomar Q_4 como molde. Queremos encontrar uma fórmula fechada para Q_4, para calculá-lo. Assim, precisamos isolá-lo de um dos lados da igualdade.

Multiplicando Q_4 pela razão $r = 0.2$, temos:

$$0.2Q_4 = 100 \times (0.2) + 100 \times (0.2)^2 + 100 \times (0.2)^3 + 100 \times (0.2)^4$$

O truque está em subtrair Q_4 dessa quantidade $0.2Q_4$. Nessa subtração **todos** os termos que aparecem em ambos, se cancelam. Por exemplo, o termo 100×0.2 aparece em ambas. O termo $100 \times (0.2)^2$ também. Os únicos termos que não são comuns, são o 100 (que aparece apenas em Q_4) e o $100 \times (0.2)^4$ (que aparece apenas em $0.2Q_4$) (verifique!).

Assim,

$$Q_4 - 0.2Q_4 = 100 - 100 \times (0.2)^4$$

O somatório já ficou bem mais compacto e simpático, não? Agora, observe que em ambos os lados da igualdade, existem termos em comum. Eles podem ser colocados em evidência, para simplificar ainda mais a expressão.

$$Q_4(1 - 0.2) = 100(1 - 0.2^4)$$

$$Q_4 = \frac{100(1 - 0.2^4)}{(1 - 0.2)}$$

Ora, acabamos de descobrir como **encontrar** a fórmula para Q_4! Então, para um Q_n qualquer, seria:

$$Q_n = \frac{100(1 - 0.2^n)}{(1 - 0.2)}$$

E o que acontece quando tomamos o limite quando $n \to \infty$? Como o módulo da razão $|r| = |0.2| = 0.2 < 1$, sabemos que $\lim_{n\to\infty} 0.2^n = 0$. Então:

$$Q_\infty = \lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{100(1 - 0.2^n)}{(1 - 0.2)} = \frac{100(1 - 0)}{(1 - 0.2)} = \frac{100}{(1 - 0.2)} = 125$$

Conclusão: após um número de doses muito grande, a quantidade Q_∞ de medicamentol © no corpo estabiliza em 125mg.