Séries: Notas de Aula
Séries de Taylor e Polinômios de Taylor

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20151117

1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber determinar os coeficientes de Taylor de uma função infinitamente derivável, para encontrar sua série de Taylor ou seu polinômio de Taylor.

2 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto na seção 10.1 para se aprofundar no conteúdo desta aula.

2.1 Fórmula de Taylor

Polinômio de Taylor de $f(x)$ de grau n em torno de $x = a$:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

2.2 Coeficientes do polinômio de Taylor

Seja $f(x)$ uma função infinitamente derivável no ponto $x = a$. A série de Taylor é uma maneira de representar a função $f(x)$ como uma série de potências, que é uma soma infinita de monômios x^n.

Como todos os monômios x^n são os mesmos para qualquer função $f(x)$, o que difere duas funções são os coeficientes destas potências. A fórmula de Taylor é uma maneira de encontrar os coeficientes dos monômios que determinam a função de interesse, usando as derivadas de $f(x)$ no ponto $x = a$.

Se tivermos a série de potências completa, com *todas* as potências de 0 até ∞, então a função é *igual* a sua série de Taylor perto do ponto de referência $x = a$. Se truncarmos a série em alguma potência n qualquer, temos então o polinômio de Taylor, que é uma *aproximação* da função próximo de $x = a$. Quanto *maior* for o grau n escolhido para o polinômio, *melhor* será a aproximação.

Vejamos alguns exemplos de como calcular alguns polinômios de Taylor.

Exemplo:

Calcular o polinômio de Taylor $P_5(x)$ de $f(x) = e^x$, em torno de $x = 0$.

Precisamos calcular todas as derivadas até a quinta ($f^{(v)}(x)$). Como a derivada desta função é igual a ela própria, todas as derivadas são iguais. Assim como as derivadas são iguais, obviamente os valores das mesmas também serão iguais em $x = 0$.

Derivadas de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ f'''(x) &= e^x \\ f^{(iv)}(x) &= e^x \\ f^{(v)}(x) &= e^x \end{aligned}$$

Valores das derivadas:

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 1 \\ f'''(0) &= 1 \\ f^{(iv)}(0) &= 1 \\ f^{(v)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Agora basta dividir os valores das derivadas pelos respectivos fatoriais. Substituindo os valores acima na fórmula de Taylor, e observando que $a = 0$, temos:

$P_5(x) = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5$

Como estamos aproximando $f(x)$ em torno de $x = 0$, podemos simplificar a expressão acima e encontrar:

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Exemplo:
Calcular o polinômio de Taylor $P_7(x)$ de $f(x) = \text{sen} x$ em torno de $x = 0$.
Neste exemplo precisamos dos valores das derivadas do seno até a sétima derivada ($f^{(vii)}(x)$). Felizmente, no caso do seno e do cosseno, não precisamos derivar tantas vezes!

Derivadas de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x \\
f''(x) &= -\text{sen} x \\
f'''(x) &= -\cos x \\
f^{(iv)}(x) &= \text{sen} x \\
f^{(v)}(x) &= \cos x \\
f^{(vi)}(x) &= -\text{sen} x \\
f^{(vii)}(x) &= -\cos x
\end{aligned}$$

Valores das derivadas:

$$\begin{array}{rcl}
f(0) & = \text{sen} 0 = & 0 \\
f'(0) & = & 1 \\
f''(0) & = & 0 \\
f'''(0) & = & \text{-}1 \\
f^{(iv)}(0) & = & 0 \\
f^{(v)}(0) & = & 1 \\
f^{(vi)}(0) & = & 0 \\
f^{(vii)}(0) & = & \text{-}1
\end{array}$$

Agora basta substituir os valores das derivadas na fórmula acima. Como $a = 0$, temos:
$P_7(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 + \frac{0}{6!}(x-0)^6 + \frac{-1}{7!}(x-0)^7$
Como estamos aproximando $f(x)$ em torno de $x = 0$, podemos simplificar a expressão acima e encontrar:

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Exercício:
Calcular o polinômio de Taylor $P_8(x)$ de $f(x) = \cos x$ em torno de $x = 0$.
Dica: use os mesmos valores do exemplo anterior, mas observe que ordem com que eles aparecem é diferente.
Resposta: $P_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$

Exercício:
Calcular o polinômio de Taylor $P_5(x)$ de $f(x) = e^x$, em torno de $x = 2$.
Resposta: $P_5(x) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \frac{e^2}{4!}(x-2)^4 + \frac{e^2}{5!}(x-2)^5$

Exercício:
Calcular o polinômio de Taylor $P_5(x)$ de $f(x) = e^{2x}$, em torno de $x = 0$.
Resposta: $P_5(x) = 1 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{16}{4!}x^4 + \frac{32}{5!}x^5$