# Séries: Notas de Aula
# Séries Geométricas

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20151023

## 1 Objetivos de aprendizagem

Ao final desta aula o aluno deve saber reconhecer Séries Geométricas (tanto somatórios finitos e infinitos), e aplicá-las em problemas com somas incrementadas com razão constante.

## 2 Pré-requitos da aula

Se $|r| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

## 3 Conteúdo

O aluno deve consultar o livro texto na seção 9.1 para se aprofundar no conteúdo desta aula.

### 3.1 Formulário

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ onde } r \neq 1$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}, \text{ onde } |r| < 1$$

### 3.2 Problema

Suponha que você toma um medicamento na forma de cápsula ou comprimido. Todas as doses contém a mesma quantidade $Q$ de medicamento, mas conforme o tempo passa, seu corpo vai metabolizando ou excretando. Assim a quantidade presente no seu corpo vai diminuindo, e você precisa de uma nova dose, para manter sempre uma quantidade efetiva de medicamento no organismo. Como podemos descobrir qual é a quantidade de medicamento *presente* no seu corpo em cada instante de tempo?

Para fixar idéias, considere que você toma um comprimido de 100mg de medicamentol ©[1] a cada 8 horas. Vamos assumir que é conhecido, para este medicamento, que após o período de 8h, restam apenas 20% da dose de 100mg. Pergunta-se:

1. Qual é a quantidade $Q_4$ (mg) de medicamento após a ingestão da quarta dose? E quantidade $Q_{10}$ ou $Q_{18}$? E $Q_n$?
2. Após um número $n$ muito grande de doses, a quantidade $Q_n$ continua a crescer indefinidamente, ou estabiliza?
3. Nos casos em que ela estabiliza, o que é necessário para que isso ocorra?

[1] Medicamento extremamente fictício, usado na falta de conhecimento

## 3.3 Séries geométricas

Considere a seguinte soma infinita:

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

O que podemos observar sobre cada nova parcela nesta soma? Cada novo termo é a metade do anterior, certo?

Mas com infinitos termos, precisamos de uma maneira mais compacta para efetuar essa operação, digamos, em uma calculadora. Precisamos encontrar uma *fórmula fechada*. Como fazer isso?

Primeiro vamos tentar identificar alguma lógica que sirva para todos os termos. Para isto, basta observar que isto é o mesmo que multiplicar o termo anterior por $\frac{1}{2}$. Observe:

$$\begin{aligned}
& 4 \quad +2 \quad +1 \quad +\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{4} \quad +\frac{1}{8} \quad + \dots \\
= & \; 4 \quad +4 \times \left(\frac{1}{2}\right) \quad +4 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \quad +4 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \quad + \dots \\
= & \; 4 \quad +4 \times \left(\frac{1}{2}\right) \quad +4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad +4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad +4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad +4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad + \dots \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Pense um pouco sobre a fórmula do somatório acima. Substitua $n = 0$, $n = 1$, etc, e encontre os primeiros termos para ter certeza que você a entendeu.

### 3.3.1 Convergência de uma série geométrica infinita

Qualquer série geométrica com razão $r$ menor que 1 em módulo é convergente. Se a razão for maior que 1 (em módulo), ou igual a 1 ou -1, então ela é divergente.

### 3.3.2 Soma finita

No nosso exemplo $r = \frac{1}{2} \neq 1$, então podemos calcular qualquer soma finita com a fórmula da seção 3.1. Por exemplo, $S_{15}$:

$$S_{15} = \sum_{n=0}^{15} 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 7.9998$$

**Exercícios:** Com a série do exemplo acima, verifique na calculadora que $S_4 = 7.5$ e $S_{10} = 7.9922$.

### 3.3.3 Soma infinita

Observe que o módulo da razão $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, então podemos aplicar a fórmula da seção 3.1:

$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$