Spieltheorie II:

Bargaining - Verhandlungstheorien

von

Prof. Dr. Wolfgang Leininger

WS 2006/07

Lehrstuhl Wirtschaftstheorie
Universität Dortmund
Postfach 500500
D-44221 Dortmund

To be literate in the modern age, you need to have a general understanding of game theory.

Paul Samuelson

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Bargaining - Verhandlungstheorie

'Bargaining' oder 'Verhandlungstheorie' beschäftigt sich mit der Analyse eines ökonomischen Grundproblems: zwei Agenten können durch Kooperation einen 'Zugewinn' erwirtschaften, werden aber erst zur Kooperation bereit sein, wenn sie sich zuvor auf die *Aufteilung* des Kooperationsgewinnes geeinigt haben.
Sie haben also gleichgerichtete Interessen (vorteilhafte Kooperation) und entgegengerichtete Interessen (Aufteilung des Zugewinnes) *zugleich*.

Beispiele:

- Kombination der Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital in einer Firma

- Tausch Käufer / Verkäufer zum Preis p

Um einen Effizienzgewinn (Realisierung des Zugewinnes) erzielen zu können, muss zuvor ein (Verteilungs-) *Konflikt* gelöst werden. Kann dieser nicht (befriedigend, fair, "angebracht") gelöst werden, entsteht der Zugewinn erst gar nicht. Ausgehend von der Grundprämisse, dass keiner zu einer kooperativen Vereinbarung *gezwungen* werden kann, untersucht 'Verhandlungstheorie' daher, wie der Konflikt *welche* Kooperationsvereinbarung - gegeben dass beide ein Interesse daran haben, überhaupt eine zu treffen - zwischen rationalen Individuen zustande kommen (können) lässt. Verhandlungstheorie *ist* Spieltheorie - und nicht nur Anwendung derselben - weil sie eine eigenständige Klasse von Problemen repräsentiert, die Schelling (1960) "mixed-motive" Spiele genannt hat.

1.1 Die Nash-Verhandlungslösung (1950)

[J. Nash (1950), The Bargaining Problem, Econometrica 18, 155-162]

Nash formulierte eine sehr allgemeingültige Formalisierung des Verhandlungsproblems.

Sei N die Anzahl der möglichen Spieler; im Folgenden wird in der Regel $N = 2$ gelten und auf Erweiterungen $N > 3$ wird partiell immer wieder eingegangen.

Sei A die Menge möglicher (Kooperations-) Vereinbarungen und D der 'status quo', d.h. die "Vereinbarung" im Nichteinigungsfalle.

Spieler i hat Präferenzen über die Menge $A \cup \{D\}$, $\succ_i$; genauer gesagt repräsentiert $\succ_i$ Präferenzen über 'Mischungen' resp. 'Lotterien' über $A \cup \{D\}$, da 'Risikoeinstellungen' der Spieler in Verhandlungen von großer Bedeutung sein werden.
'Unsicherheit' besteht dabei nur in Bezug auf das Verhalten der Verhandlungspartner, nicht intrinsisch in Bezug auf das Verhandlungsproblem.
D.h. nach der von-Neumann-Morgenstern-Theorie über die Repräsentation solcher Präferenzen gibt es eine Nutzenfunktion $U_i : A \cup \{D\} \to \mathbb{R}$, derart, dass eine 'Lotterie' 1 einer 'Lotterie' 2 genau dann von i vorgezogen wird, wenn der *mit diesem* U ermittelte Erwartungswert von 'Lotterie' 1 größer ist als der von 'Lotterie' 2.

Aber: Wenn U_i die Präferenzen $\succ_i$ darstellt, so auch $\tilde{U_i} = \alpha \cdot U_i + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$. (monotone affine Transformation)

Von Bedeutung für die Formulierung des Verhandlungsproblems nach Nash sind jetzt jedoch *nur* die aus N, A, D und $\succ_i$ (resp. U_i) resultierenden möglichen *Nutzenallokationen*:

$$S' := \{(U_1(a)\,,\, U_2(a)) \mid a \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$d := (U_1(D)\,,\, U_2(D))$$

Definition:

i) Ein Verhandlungs*problem* (mit 2 Verhandlungspartnern) ist ein Paar $(S,\, d)$, mit $S \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und konvex, $d \in S$, so dass ein $s \in S$ existiert mit $s_1 > d_1$ und

$s_2 > d_2$.

ii) Eine Verhandlungs*lösung* ist eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$, die jedem Verhandlungsproblem $(S, d) \in V$ ein eindeutiges Element $s \in S$ zuordnet (als "Lösung").

Nash's Ansatz ist axiomatischer Natur: er stellt nun Forderungen auf, die eine "vernünftige" Verhandlungslösung erfüllen sollte, in der Hoffnung, dass mehr und mehr solcher - widerspruchsfreier - Forderungen eine Lösung (Zuordnungs*funktion* f) *eindeutig* festlegen. Diese gälte es dann zu interpretieren.

1.1.1 Nash's Axiome

1. Invarianzaxiom (bzgl. Nutzendarstellung)

Problem: $\succ_i$ kann sowohl durch U_i als auch durch $\alpha \cdot U_i + \beta$ repräsentiert werden

Forderung: Dies soll für die Lösung keinen Unterschied machen

Klar: (S, d) und (S', d') sind eigentlich *identische* Probleme, falls gilt
$d_i' = \alpha_i \cdot d_i + \beta_i$ und $S' = \{(\alpha_1 \cdot s_1 + \beta_1,\ \alpha_2 \cdot s_2 + \beta_2) \mid (s_1, s_2) \in S\}$
d.h. (S', d') ist "affine Transformation" von (S, d) vermittels der Abbildungen $s_i' = \alpha_i \cdot s_i + \beta_i,\ i = 1, 2.$

Axiom: Sei (S', d') "affine Transformation" von (S, d) vermittels
$s_i' = \alpha_i \cdot s_i + \beta_i\ ,\ i = 1, 2$. Dann gilt:

$$(f_1(S', d'),\ f_2(S', d')) = (\alpha_1 \cdot f_1(S, d) + \beta_1,\ \alpha_2 \cdot f_2(S, d) + \beta_2)\ , \text{ wobei} f = (f_1, f_2).$$

D.h. von *welchen* von-Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen U_i die Menge S erzeugt ist, ist irrelevant für die Lösung. Wichtig ist nur, dass verschiedene $\succ_i$ repräsentierende U_i's - wegen der *selben* durch sie repräsentierten Präferenzrelation - auf das gleiche Bargaining Problem führen müssen.
D.h. wenn $U_i,\ i = 1, 2$ auf $A \cup \{D\}$ angewandt S erzeugt, so erzeugt $\bar{U}_i = \alpha_i \cdot U_i + \beta_i\ ,\ i = 1, 2$, angewandt auf $A \cup \{D\}$ S', *ohne* dass sich damit am dargestellten Problem irgendetwas geändert hätte. Folglich soll sich auch nichts an der Lösung ändern.

2. Symmetrieaxiom

Nash beschreibt einen Spieler uniform durch seinen Namen i ; d.h. z.B. unterschiedliche Charakteristiken, die für das Verhandlungsproblem wichtig sein können, werden *in der Beschreibung* der Spieler unterdrückt; (sie könnten sich wohl in der Form von S niederschlagen !)
Ein Verhandlungsproblem heißt daher *symmetrisch*, wenn die Spieler in ihren Rollen austauschbar sind; d.h. die Menge S in folgendem Sinne symmetrisch ist:

$$(s_1,\, s_2) \in S \Longleftrightarrow (s_2,\, s_1) \in S$$

$$\text{und} \quad d_1 = d_2$$

Axiom: Falls $(S,\, d)$ symmetrisch ist, so gilt: $f_1(S,\, d) = f_2(S,\, d)$.

3. Unabhängigkeitsaxiom (von 'irrelevanten Alternativen')

Dieses Axiom vergleicht die Lösungen über wirklich *verschiedene* Bargaining-Probleme $(S,\, d)$ und $(S',\, d')$:
genauer sei $d = d'$ und $S' \subset S$: eine Verhandlungslösung f bestimmt also $f(S,\, d)$ und $f(S',\, d)$

Axiom: Seien $(S,\, d)$ und $(S',\, d)$ zwei Bargainingprobleme mit $S' \subset S$.
Falls $f(S,\, d) \in S'$, dann folgt $f(S',\, d) = f(S,\, d)$

d.h. wird bei 'großer Wahlmenge' S als Lösung schon etwas aus der 'kleineren' Wahlmenge S' ausgewählt, so sind für die Lösung alle Wahlmöglichkeiten aus $S \backslash S'$ offensichtlich 'irrelevant'. Dann sollte aber auch dasselbe Element aus der 'kleinen' Wahlmenge gewählt werden, wenn *nur* diese zur Verfügung steht.
($\rightarrow$ Rationalitätspostulat 'Konsistenz' $\rightarrow$ gilt bei Maximierung einer Funktion !)
Letzteres ist eine Forderung an den nicht explizit formalisierten Verhandlungs*prozess* : nach und nach ausgeschiedene Vereinbarungen beeinflussen das Endergebnis *nicht*.

4. Effizienzaxiom

Hier verlangt Nash, dass keine unausgeschöpften Verhandlungsgewinne 'auf dem Tisch' liegen bleiben; d.h. die Bargaining-Lösung muss im effizienten Rand von S liegen.

Axiom: Sei $(S,\, d)$ ein Verhandlungsproblem. Dann ist $f(S,\, d)$ pareto-optimal; d.h. es gibt keine $(s_1,\, s_2) \in S$ mit $s_i \;>\; f_i(S,\, d)\,,\; i = 1, 2$.

Auch dies ist eine Forderung an den nicht modellierten Verhandlungs*prozess* (der also das 'Gefangenen-Dilemma'-Problem überwinden sollte !).

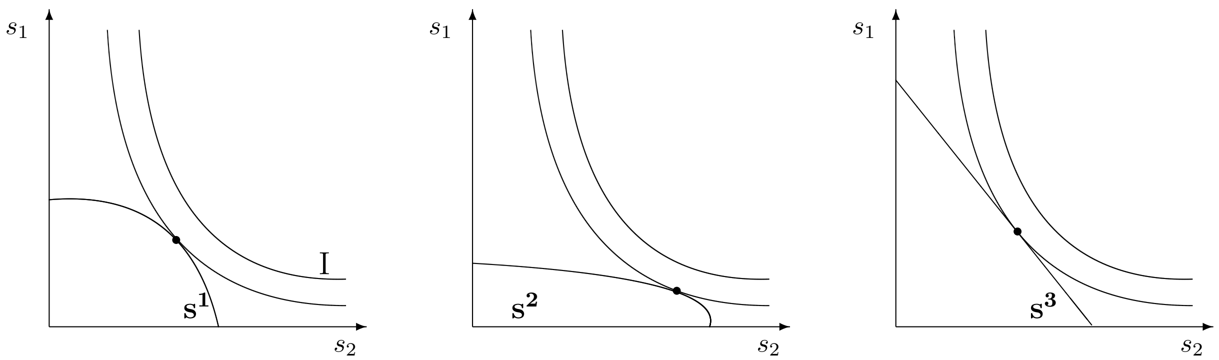
Nash's erstaunliches Theorem besagt nun, dass diese vier Forderungen nur von *einer* Verhandlungslösung f erfüllt werden, deren Form er auch anzugeben in der Lage ist:

1.1.2 Nash's Theorem

Theorem : Es gibt genau eine Verhandlungslösung $f^N \,:\, V \;\rightarrow\; I\!R^2$, die alle vier Axiome erfüllt. Sie hat die Form

$$f^N(S,\, d) \;\;=\;\; \underset{(d_1,d_2)\,\leq\,(s_1,s_2)\,\in\, S}{argmax} \quad (s_1 - d_1)\cdot(s_2 - d_2)$$

Als Lösung ergibt sich also genau dasjenige *Nutzenpaar* $(s_1^*,\, s_2^*)$, das das Produkt der *Nutzengewinne* über den 'status quo' hinaus maximiert !



$$I = \{(s_1,\, s_2)\,|\,(s_1 - d_1)\cdot(s_2 - d_2) \;=\; const\}$$

Beweis :

i) $\mathbf{f^N}$ **ist wohldefiniert**, d.h. ein Maximierer existiert, da S kompakt und $H(s_1,\, s_2) = (s_1 - d_1)\cdot(s_2 - d_2)$ stetig. Der Maximierer ist auch eindeutig, da H quasi-konkav (d.h. I's strikt konvex).

ii) (Übung !) $\mathbf{f^N}$ **erfüllt die vier Axiome !**

1.) <u>z.z.</u> (s_1^*, s_2^*) maximiert $(s_1 - d_1) \cdot (s_2 - d_2) \Longleftrightarrow$
$(\alpha_1 \cdot s_1^* + \beta_1,\ \alpha_2 \cdot s_2^* + \beta_2$ maximiert $(s_1^{'} - d_1^{'}) \cdot (s_2^{'} - d_2^{'})$

2.) Eindeutigkeit des Maximierers gibt : $s_1^* = s_2^*$

3.) klar !

4.) Monotonie von $H(s_1, s_2)$ in (s_1, s_2) !

iii) Eindeutigkeit von $\mathbf{f^N}$

Annahme: Sei f eine Verhandlungslösung, die Axiome 1 - 4 erfüllt.
<u>z.z.</u> $f = f^N$!
(S, d) sei ein beliebiges Verhandlungsproblem.

1. Schritt: Sei $f^N(S, d) = z \in S \Rightarrow z_i > d_i, \quad i = 1, 2$

transformiere (S, d) vermittels $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z_i - d_i} = \alpha_i > 0$ und $-\frac{1}{2} \cdot \frac{d_i}{z_i - d_i} = \beta_i$,

d.h. $d_i^{'} = \alpha_i \cdot d_i + \beta_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z_i - d_i} \cdot d_i - \frac{1}{2} \cdot \frac{d_i}{z_i - d_i} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f_i^N(S^{'}, d^{'}) &= \alpha_i \cdot f_i^N(S, d) + \beta_i = \alpha_i \cdot z_i + \beta_i \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z_i}{z_i - d_i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d_i}{z_i - d_i} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_i - d_i}{z_i - d_i}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d.h. der ‘status quo’-Punkt der Nichteinigung ist nunmehr $d^{'} = (0, 0)$ und die Verhandlungslösung f^N ist durch $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gegeben !

Sowohl f^N als auch f genügen dem Invarianzaxiom, d.h.

$$f_i(S^{'}, (0, 0)) = \alpha_i \cdot f_i(S, d) + \beta_i \qquad \text{und}$$

$$f_i^N(S^{'}, (0, 0)) = \alpha_i \cdot f_i^N(S, d) + \beta_i \qquad i = 1, 2$$

$\Rightarrow f(S, d) = f^N(S, d) \Leftrightarrow f(S^{'}, (0, 0)) = f^N(S^{'}, (0, 0))$

Da $f^N(S^{'}, (0, 0)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ folgt:

$$f(S,\,d) \;=\; f^N(S,\,d) \quad\Leftrightarrow\quad f(S',\,(0,\,0)) \;=\; (\frac{1}{2},\,\frac{1}{2})$$

Wir haben bisher nur eine Nutzenskala *gewählt*, die zur Folge hatte, dass der 'status quo' in den Nullpunkt fällt, und die Nutzeneinheit so wählt, dass die Nash-Verhandlungslösung den Wert $\frac{1}{2}$ hat. In *dieser* 'Nutzenskala' vereinfacht sich unser Problem:

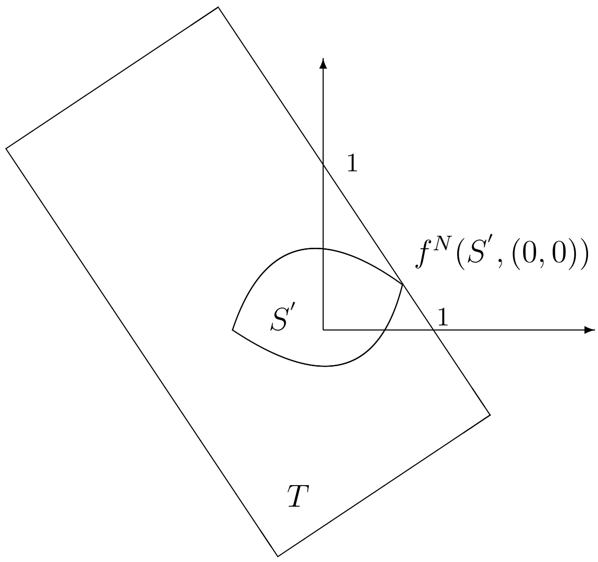
2. Schritt : Wie sieht nun $S' \;=\; \alpha_i \cdot S + \beta_i$ aus ?

Behauptung: $(s_1',\, s_2') \in S' \quad\Rightarrow\quad s_1' + s_2' \;\le\; 1$

Angenommen: $(s_1',\, s_2') \in S' \quad$ mit $\quad s_1' + s_2' \;>\; 1$

definiere $(t_1,\, t_2) = ((1-\epsilon)\cdot\frac{1}{2} + \epsilon\cdot s_1',\, (1-\epsilon)\cdot\frac{1}{2} + \epsilon\cdot s_2')$ mit $0 < \epsilon < 1$.
Da S' konvex gilt $(t_1,\, t_2) \in S'$, da $(s_1',\, s_2')$ und $(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}) \in S'$. Letzteres gilt *per def.* da $(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}) = f^N(S',\, (0,\, 0))$.
Kann *nicht* sein, da $(t_1 - 0)\cdot(t_2 - 0) \;>\; \frac{1}{4}$ für ϵ genügend klein. Dies ist ein Widerspruch zu $f^N(S',\, (0,\, 0)) \;=\; (\frac{1}{2},\, \frac{1}{2})$, da $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3. Schritt: Bisher wissen wir, dass S' *unterhalb* der Geraden $s_1 + s_2 = 1$ liegt:



Folglich gibt es T der eingezeichneten Form, das S' enthält (welches als beschränkt angenommen ist, da S beschränkt):
T ist *symmetrisch* in Bezug auf die 45^o-Linie; d.h.

$$(s_1,\, s_2) \in T \Leftrightarrow (s_2,\, s_1) \in T$$

4. Schritt: Da $(T,\, (0,\, 0))$ ein *symmetrisches* Verhandlungsproblem ist, gilt wegen des *Symmetrieaxiomes* $f_1(T,\, (0,\, 0)) \;=\; f_2(T,\, (0,\, 0))$ und wegen des *Effizienzaxiomes* somit $f_1(T,\, (0,\, 0)) \;=\; f_2(T,\, (0,\, 0)) \;=\; \frac{1}{2}$ d.h. $f(T,\, (0,\, 0)) \;=\; (\frac{1}{2},\, \frac{1}{2})$

5. Schritt: Da $S^{'} \subset T$ und $f(T,\, (0,\,0)) \;=\; (\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}) \in S^{'}$ folgt wegen des *Unabhängigkeits-axiomes*

$$f(S^{'},\, (0,\,0)) \;=\; (\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}) \quad !$$

Damit gilt (Schritt 1 !), dass $f(S,\, d) = f^N(S,\, d)$ erfüllt ist !!! **q.e.d.**

Beweisstruktur: Ausgehend von einem *beliebigen* Problem $(S,\, d)$ wurde dies zunächst so vermittels einer 'affinen Transformation' umgeformt, dass $d^{'} = (d_1^{'},\, d_2^{'}) = (0,\, 0)$ und $f^N(S^{'},\, d^{'}) \;=\; (\frac{1}{2},\, \frac{1}{2})$ galt. (Schritt 1);
d.h. d und $f^N(S,\, d)$ werden zu Punkten auf der Diagonalen (45^o-Linie)!
Dann wurde dieses $S^{'}$ in eine *symmetrische* Menge T eingeschlossen, deren Verhandlungslösung $f(T,\, (0,\,0))$ ebenfalls $(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2})$ ist, falls $(0,\, 0)$ der 'status quo' ist. Aus dem Unabhängigkeitsaxiom folgt dann, dass $(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2})$ auch die Verhandlungslösung $f(S^{'},\, (0,\,0))$ sein muss, welches aber auch schon der Nash-Verhandlungslösung entspricht!

D.h. der Beweis macht sich zunutze (bzw. zeigt), dass eine Verhandlungslösung f, die dem Symmetrieaxiom und dem Effizienzaxiom genügt (Schritt 4), schon mit der Nash-Verhandlungslösung f^N für *symmetrische* Verhandlungsprobleme übereinstimmen muss.

1.1.3 Eigenschaften der Nash-Verhandlungslösung

Risiko-Aversion seitens eines Spielers ist *nicht* von Vorteil:

i) zunehmende Risiko-Aversion reduziert Nutzen eines Spielers in der Lösung

ii) ein weniger risiko-averser Spieler schneidet besser ab als der mehr risiko-averse

Beispiel: 'Divide the Dollar' : (Käufer / Verkäufer)

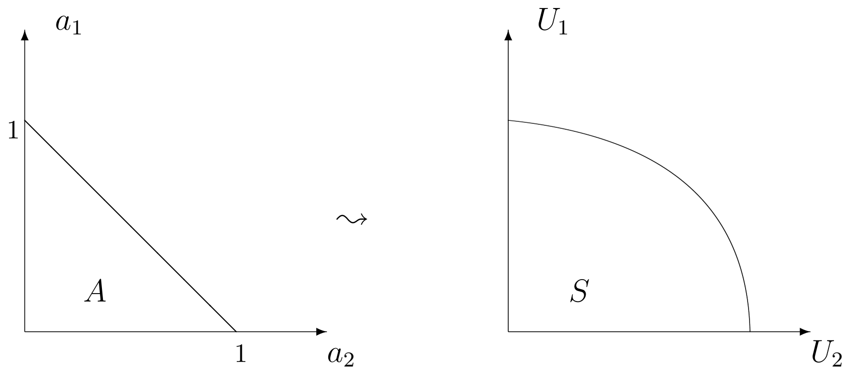
Zwei Spieler sollen sich über die Aufteilung eines Dollars untereinander einigen. *Ohne* Einigung gibt es auch keinen Dollar ! D.h.

$$D = (0,\,0) \quad \text{und} \quad A \;=\; \{(a_1,\,a_2) \in I\!R^2 \mid a_1 + a_2 \;\le\; 1,\; a_1, a_2 \;\ge\; 0\}$$

Jeder Spieler präferiert natürlich mehr Geld über weniger. Die von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktionen $U_i,\ i = 1, 2$ sind also auf $[0, 1]$ definiert. Wir nehmen sie als konkav an mit $U_i(0) = 0$.

$$\Rightarrow \quad S \;=\; \{(s_1,\,s_2) \in I\!R^2 \mid (s_1,\,s_2) \;=\; (U_1(a_1),\, U_2(a_2)) \text{ für ein } (a_1,\,a_2) \in A\}$$

$$\wedge d = (0, 0)$$



S konvex, da U_i konkav
$d \geq (0, 0) \in S$

Es resultiert also das Verhandlungsproblem $(S,\,(0,\,0))$.
Die Nash-Lösung maximiert (über z)

$$(U_1(z) - 0) \cdot (U_2(1 - z) - 0) \text{ oder } \max_{z \in [0,1]} U_1(z) \cdot U_2(1 - z)$$

Bedingung 1. Ordnung: $U_1'(z) \cdot U_2(1 - z) - U_1(z) \cdot U_2'(1 - z) \;=\; 0$

$$\frac{U_1'(z)}{U_1(z)} = \frac{U_2'(1 - z)}{U_2(1 - z)} \tag{1.1}$$

Klar: Haben beide Spieler *dieselben* Präferenzen, so kann dies mit $U = U_1 = U_2$ dargestellt werden und $(S,\,(0,\,0))$ ist ein *symmetrisches* Verhandlungsproblem. Dann folgt aus (1.1) sofort, dass $U(z) = U(1 - z) = U(\frac{1}{2})$ und somit $f^N(S,\,(0,\,0)) \;=\; (U(\frac{1}{2}),\, U(\frac{1}{2}))$. Die Lösungs*aufteilung* ist daher durch $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gegeben.

Wird Spieler 2 nun risiko-averser; d.h. $\tilde{U}_2 = f \circ U_2$ mit $f : I\!R \to I\!R$ konkave Transformation mit $f(0) = 0$, so wird (1.1) zu

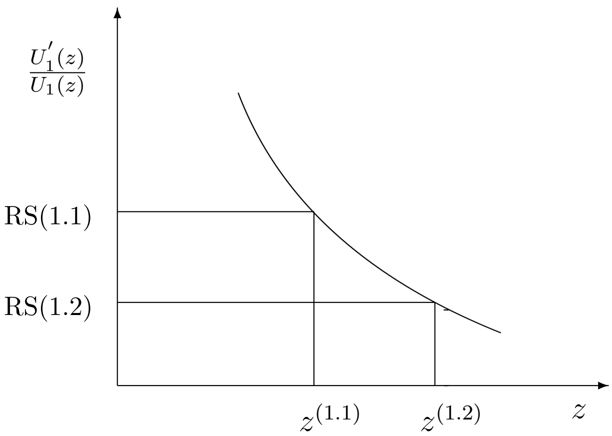
$$\frac{U_1'(z)}{U_1(z)} = \frac{\tilde{U}_2'(1-z)}{\tilde{U}_2(1-z)} = \frac{f'(U_2(1-z)) \cdot U_2'(1-z)}{f(U_2(1-z))} \tag{1.2}$$

Da f konkav, gilt $f'(x) \leq \frac{f(x)}{x}$ bzw. $\frac{f'(x)}{f(x)} \leq \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{f'\big(U_2(1-z)\big)}{f\big(U_2(1-z)\big)} \cdot U_2'(1-z)}_{\textbf{RS (1.2)}} \quad \leq \quad \underbrace{\frac{1}{U_2(1-z)} \cdot U_2'(1-z)}_{\textbf{RS (1.1)}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{z^{(1.1)} \leq z^{(1.2)}}$, da $\frac{U_1'(z)}{U_1(z)}$ *abnehmend* in z, da U konkav ist.

Der Anteil z von Spieler 1 ist unter (1.1) kleiner als unter (1.2); d.h. zunehmende Risiko-Aversion von Spieler 2 *begünstigt* ihn.



1.2 Anwendung und Interpretation:

1.2.1 Lohnverhandlungen

i) Mc Donald / Solow: Wage Bargaining and Employment, AER, 1981

ii) Oswald: The Economic Theory of Trade Unions: A Survey, Scand. J. of Econ., 1985

Wie kommen Lohnkontrakte zustande?

Spieler: Unternehmen, Gewerkschaft

1.2.2 Machttheorie:

Gewerkschaft als "Monopolist"
Lohnkontrakte (Tarifverträge) spezifizieren in aller Regel Löhne (und Arbeitsbedingungen), nicht aber die Beschäftigungshöhe.

Alle "Verhandlungsmacht" bei der Gewerkschaft:
Gegeben den Kapitalstock und den Outputpreis p setzt die Gewerkschaft den Lohnsatz w und damit den *Reallohn* $\frac{w}{p}$ fest.

Die Firmen (Unternehmen) reagieren durch optimale Anpassung der Arbeitsnachfrage.

"Monopol": Die Gewerkschaft wählt den für sie besten Punkt auf der Arbeitsnachfragefunktion.

<u>Gewerkschaft :</u>

i) Präferenzen

$$U(w,\, L) \;=\; EU \;=\; \frac{L}{N} \cdot u(w) + (1 - \frac{L}{N}) \cdot u(\underline{w})$$

wobei N - Zahl der Arbeiter / Gewerkschaftsmitglieder

L - Beschäftigungsniveau der Mitglieder

u - konkave Nutzenfunktion

$\underline{w}$ - "Lohnsatz" der Arbeitslosigkeit / Löhne anderer Branchen Wettbewerbslohn / 'Reservationslohn'

klar: $L \leq N$

Die Gewerkschaft vertritt also die Interessen des "durchschnittlichen" Mitgliedes, dessen erwarteten Nutzen sie 'maximieren' will.

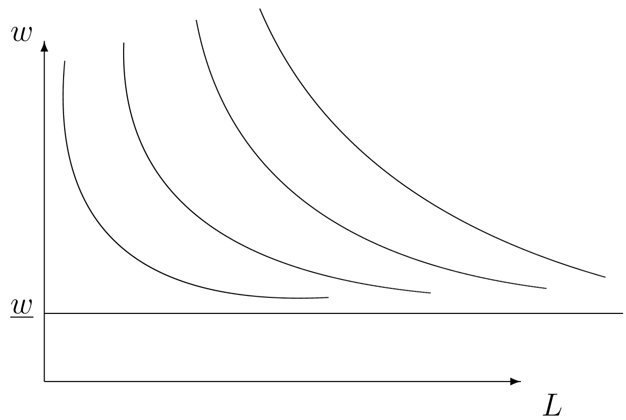
Alternativ: $E\bar{U} \; = \; L \cdot u(w) + (N - L) \cdot u(\underline{w})$

Die Gewerkschaft hat eine utilitaristische Zielfunktion, die alle ihre Mitglieder gleich gewichtet.

Indifferenzkurven: $\frac{L}{N} \cdot u(w) + (1 - \frac{L}{N}) \cdot u(\underline{w}) \; = \; \text{const}$

$$\frac{1}{N} \cdot u(w)dL + \frac{L}{N} \cdot u^{'}(w)dw - \frac{1}{N} \cdot u(\underline{w})dL \; = \; 0$$

$$\boxed{\frac{dw}{dL} \; = \; \frac{u(\underline{w}) - u(w)}{L \cdot u^{'}(w)} \; < \; 0}$$



ii) Wahlmenge

Arbeitsnachfragefunktion: Firma maximiert über L

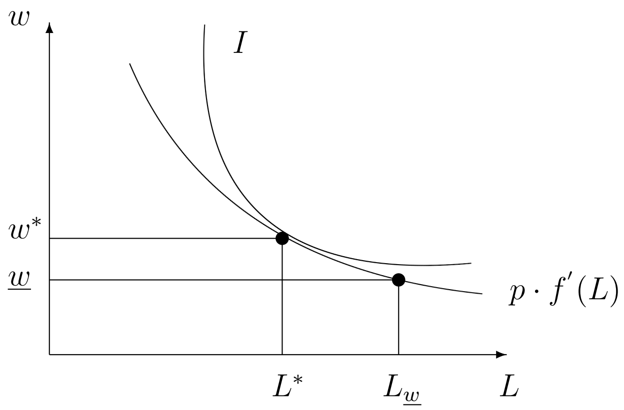
$p \cdot f(L) - w \cdot L \;=\; \Pi(w, L)$ Gewinnfunktion

$f(\cdot) \;=\;$ Produktionsfunktion bei gegebenem Kapitalstock

$$p \cdot f^{'}(L) - w \;=\; 0 \quad \text{bzw.} \quad w \;=\; p \cdot f^{'}(L)$$

$$\text{resp.} \; \boxed{L \;=\; f^{'-1}(\tfrac{w}{p})} \quad \text{Arbeitsnachfrage}$$

im (w, L) - Diagramm veranschaulichen wir uns die inverse Arbeitsnachfrage $w \;=\; p \cdot f^{'}(L)$:



(w^*, L^*) ist Lösung des Gewerkschaftsproblemes $\max_{(w,L)} \left(\frac{L}{N} \cdot u(w) + (1 - \frac{L}{N}) \cdot u(\underline{w}) \right)$ unter NB : $w \;=\; p \cdot f^{'}(L)$

In $(w^*,\, L^*)$ gilt:

$$\underbrace{\frac{u(\underline{w}) - u(w^*)}{L^* \cdot u^{'}(w^*)}}_{\text{Steigung } I} \;=\; \underbrace{p \cdot f^{''}(L^*)}_{\text{Steigung } p \cdot f^{'}(L)} \;<\; 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{w^* \;>\; \underline{w}} \quad \text{und daher} \quad \boxed{L^* \;<\; L_{\underline{w}}}$$

Satz 1: w^* ist höher, die Beschäftigung L^* geringer als in der Wettbewerbslösung $(\underline{w},\, L_{\underline{w}})$.

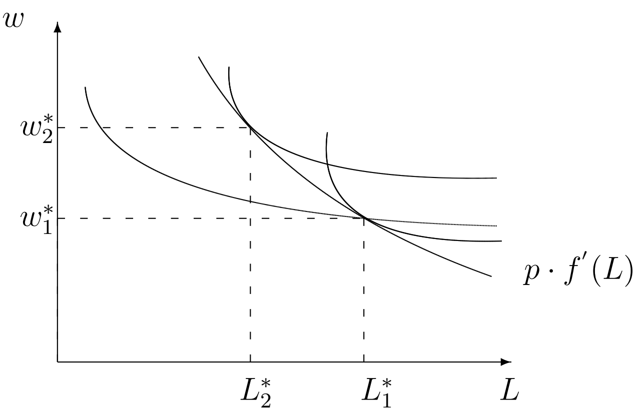
Beachte: Arbeit wird nach ihrem Grenzprodukt in $(w^*,\, L^*)$ entlohnt, doch ist dies durch den Machteinsatz der Gewerkschaft, die die Arbeitsnachfrage zwangsweise senkte, höher als in der Wettbewerbslösung.

Klar: Da $\underline{w} < \left(\frac{L^*}{N} \cdot w^* + (1 - \frac{L^*}{N}) \cdot \underline{w}\right)$, ist somit die Lohnsumme (Einkommensteil des Faktors Arbeit) *höher* als in der Wettbewerbslösung:

$$\underline{w} \cdot N < L^* \cdot w^* + (N - L^*) \cdot \underline{w}$$

Satz 2: Eine Erhöhung von $\underline{w}$ führt zu einer Erhöhung von w^* und damit zu einer *Abnahme* von L^*.

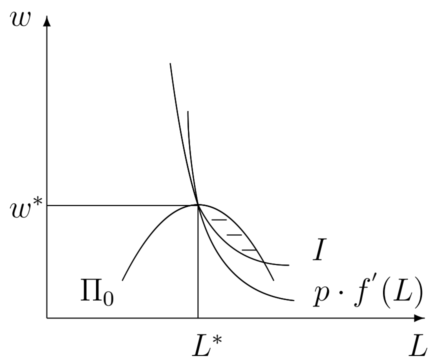
Grund: Steigung der Indifferenzkurven wird überall flacher $\frac{u(\underline{w})-u(w)}{L \cdot u'(w)} = \frac{dw}{dL}$



$\underline{w} : (w_1^*, L_1^*)$

$\underline{w} + \Delta : (w_2^*, L_2^*)$

Kritik: (w^*, L^*) ist ineffizient!



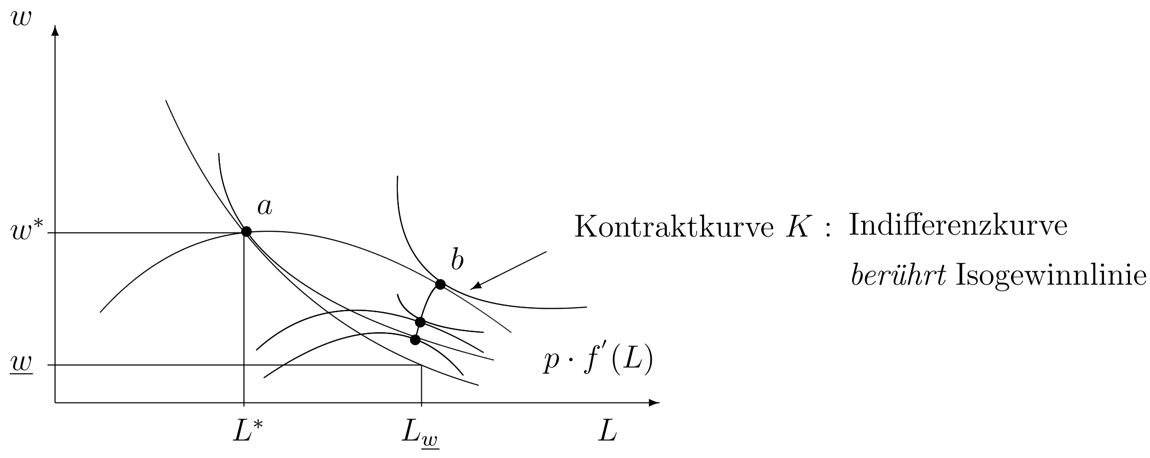
Isogewinnlinie Unternehmen:

$p \cdot f(L) - w \cdot L = \Pi(w,\, L)$

$p \cdot f'(L)dL - w \cdot dL - L \cdot dw = 0$

$$\boxed{\frac{dw}{dL} = \frac{p \cdot f'(L) - w}{L}}$$

Welche (w, L) sind pareto-optimal (effizient) ?



$$\frac{p \cdot f'(L) - w}{L} \quad = \quad \frac{u(w) - u(\underline{w})}{L \cdot u'(w)}$$

Steigung Π_0 Steigung I

$\Rightarrow$ Effizienzbedingung $\boxed{p \cdot f'(L) \;=\; w + \frac{u(w) - u(\underline{w})}{u'(w)}}$ (PO)

In einer effizienten Lösung mit $w > \underline{w}$ ist der Lohnsatz höher als das Wertgrenzprodukt der Arbeit (der Reallohn höher als die Grenzproduktivität).
Für $w = \underline{w}$ gilt natürlich $\underline{w} = p \cdot f'(L_w)$ und dies erfüllt auch (PO)!
D.h. die Wettbewerbslösung ist einziger effizienter Punkt *auf der Arbeitsnachfragefunktion* !
Aus der Zeichnung ist auch klar: bei $(\underline{w},\ L_{\underline{w}})$ beginnt die Kontraktkurve und hat dann steigenden Verlauf; d.h. in einem effizienten Punkt $(w^e,\ L^e)$ ist $L^e > L_{\underline{w}}$ und $w^e > \underline{w}$!
Aber (natürlich !) gilt $w^e < w^*$ und $L^e > L^*$.
Wie kann in einer *Verhandlungslösung* $(w,\ L)$ simultan und 'kooperativ' bestimmt werden, so dass $(w,\ L)$ effizient ist?

1.2.3 Verhandlungstheorie

Welche Lösung würde die Nash-Verhandlungslösung ergeben? D.h. die Anwendung einer Verhandlungslösung, die die wünschenswerten Axiome 1) - 4) erfüllt.

Wie kann das vorliegende Problem in ein Verhandlungsproblem $(S,\, d)$ transformiert werden?

$$A := K = \Big\{(w, L) \,|\, w \,\geq\, \underline{w},\; L \,\leq\, N \quad \text{und} \quad (w,\, L) \quad \text{erfüllt} \quad \text{(PO)}\Big\}$$

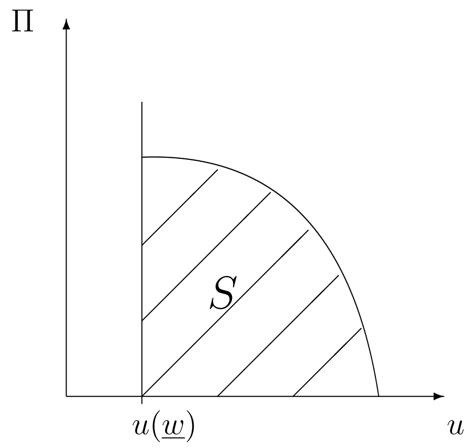
$$\Rightarrow S := PH\,\Big(\{(U(w,\, L),\, \Pi(w,\, L)) \,|\, (w,\, L) \in K\}\Big)$$

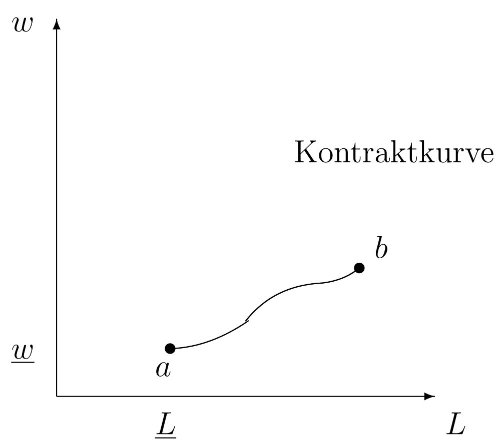
$PH(B) =$ 'positive Hülle' von $B \subseteq I\!R^2$; d.h.
$PH(B) = \Big\{y \in I\!R^2_+ \,|\, y \,\leq\, x \text{ für ein } x \in B\Big\}$

$$S := \Big\{(U,\, \pi) \in I\!R^2_+ \,|\, \text{es gibt } (w,\, L) \in K \text{ mit } (U(w,\, L),\, \Pi(w,\, L)) \,\geq\, (U,\, \pi)\Big\}$$

Was ist d ?

$$d \;=\; (d_1,\, d_2) \;=\; (U(\underline{w},\, 0),\, \Pi(\underline{w},\, 0)) \;=\; (u(\underline{w}),\, 0)$$





S ist kompakt, konvex und $d \in S$ (mit: es gibt $s \in S$ mit $s > d$)

Nash-Verhandlungslösung $f^N(S, d)$ erhält man durch Lösung von

$\max_{(U,\,\pi)\in S}\, (U - d_1) \cdot (\pi - d_2)$ d.h.

$\max_{(w,\,L)}\; (U(w,\, L) - u(\underline{w})) \cdot (\Pi(w,\, L) - 0)$ d.h.

$\max_{(w,\,L)}\; \frac{L}{N}(u(w) - u(\underline{w})) \cdot (p \cdot f(L) - w \cdot L)$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial P}{\partial w} = \frac{L}{N} \cdot u^{'}(w)(p \cdot f(L) - w \cdot L) + \frac{L}{N}(u(w) - u(\underline{w})) \cdot (-L) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u(w)-u(\underline{w})}{u^{'}(w)} = \frac{p \cdot f(L) - w \cdot L}{L}} \qquad (*)$$

Da die Lösung per Definition pareto-optimal ist, muss gelten

$$-\frac{u(w) - u(\underline{w})}{u^{'}(w)} = p \cdot f^{'}(L) - w$$

Einsetzen in (*) ergibt

$$-(p \cdot f^{'}(L) - w) = \frac{p \cdot f(L) - w \cdot L}{L} = \frac{p \cdot f(L)}{L} - w$$

$$\Rightarrow \quad 2w = \frac{p \cdot f(L)}{L} + p \cdot f^{'}(L) \qquad \text{und somit}$$

$$\boxed{w = \frac{\frac{p \cdot f(L)}{L} + p \cdot f^{'}(L)}{2}}$$

d.h. die Nash-Verhandlungslösung produziert das Ergebnis, dass der Lohnsatz genau dem arithmetischen Mittel aus *durchschnittlicher* und *marginaler* Produktivität der Arbeit entspricht!

Interpretation: Ziemlich guter 'Kompromiss' (perfekter?) zwischen Fairness-Vorstellung der Gewerkschaft
($w = \frac{p \cdot f(L)}{L}$ d.h. $w \cdot L = p \cdot f(L)$ und somit $\Pi = 0$)
und dem Gewinnmaximum des Unternehmens ($w = p \cdot f^{'}(L)$)!

Problem: Woher kommt dieser erstaunliche Vorschlag? Wie hat man sich Lohnverhandlungen, die zu diesem Ergebnis führen, vorzustellen?

1.3 Verallgemeinerungen der Nash-Bargaininglösung

1.3.1 Nash-Bargaininglösung für n > 2

Ein n-Personen-Bargaining-Problem ist ein Tupel (S, d) mit $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, $d \in S$ (und es gibt $s \in S'$ mit $s_i > d_i$, $i = 1, ..., n$)

Alle 4 Axiome können direkt auf den Fall von n Spielern verallgemeinert werden ($\rightarrow$ Übung !) und man erhält folgende Verallgemeinerung von Nash's Theorem:
Bezeichne V^n nun die Menge aller n-Spieler-Bargaining-Probleme (S, d).

Theorem (Roth, 1977): Es gibt genau eine Verhandlungslösung $f_n^N : V^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die alle vier Axiome erfüllt. Sie hat die Form

$$f_n^N(S, d) \quad = \quad \underset{d \leq s \in S}{argmax} \quad (s_1 - d_1)(s_2 - d_2) \cdots (s_n - d_n)$$

Bemerkung: $\Pi_{i=1}^n (s_i - d_i)$ heißt auch (symmetrisches) Nash-Produkt.

1.3.2 Asymmetrische Nash-Verhandlungslösung:

(Generalized Nash-Product)

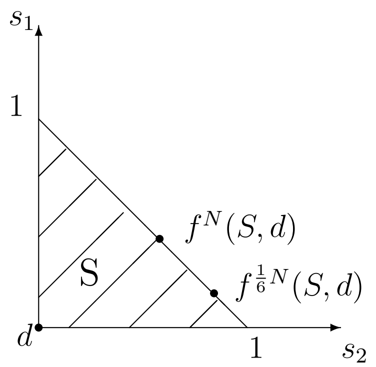
Das Symmetrieaxiom der Nash-Verhandlungslösung wird problematisiert. Man möchte auch Ausgangssituationen analysieren, in denen Spieler unterschiedliche "Verhandlungsmacht" haben, so dass also auch symmetrische Verhandlungsprobleme nicht zu einer symmetrischen Lösung führen müssen. Wir betrachten nun wieder $n = 2$.
Wir wissen, dass die Axiome 1) - 4) *nur* von der Nash-Verhandlungslösung erfüllt werden. Lassen wir das *Symmetrieaxiom* fallen, so ist zu fragen, gibt es möglicherweise weitere Verhandlungslösungen, die das Invarianzaxiom, das Unabhängigkeitsaxiom und das Effizienzaxiom erfüllen?
Und wenn ja, wie sehen diese aus?
Das Symmetrieaxiom - wie übrigens alle anderen Axiome auch - ist tatsächlich *notwendig* zur Charakterisierung von f^N. Verlangt man nur die Axiome 1, 3 und 4 so ergibt sich folgender Satz:

Theorem (Harsanyi / Selten (1972)): Jede Verhandlungslösung $f^{\alpha N}: V \to I\!R^2$, die die Axiome 1, 3 und 4 erfüllt, ist von der Form

$$f^{\alpha N}(S, d) \quad = \quad \underset{d \le s \in S}{argmax} \quad (s_1 - d_1)^{\alpha} \cdot (s_2 - d_2)^{1-\alpha} \quad \text{mit } \alpha \in (0,1)$$

Die relative Verhandlungsmacht eines Spielers wird also gemessen durch den Parameter α. Je größer α desto größer ist die Verhandlungsmacht von Spieler 1. Für $\alpha = \frac{1}{2} = 1 - \alpha$ ergibt sich offensichtlich der *symmetrische* Fall der Nash-Verhandlungslösung f^N, da Maximierung von $(s_1 - d_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (s_2 - d_2)^{\frac{1}{2}} \; = \; [(s_1 - d_1) \cdot (s_2 - d_2)]^{\frac{1}{2}}$ *äquivalent* zur Maximierung von $(s_1 - d_1) \cdot (s_2 - d_2)$ ist.

Beispiel:



(S, d) ist symmetrisches Verhandlungsproblem

Klar: $f^N(S, (0, 0)) \; = \; (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$f^{\alpha}(S, (0, 0)) \; = \; (\alpha, 1 - \alpha)$

$\max\,(s_1 - 0)^{\alpha} \cdot (s_2 - 0)^{1-\alpha} \quad$ u.d.N. $\quad s_1 + s_2 \; = \; 1$

$s_1^{\alpha} \cdot s_2^{1-\alpha} \;\mapsto\; s_1^{\alpha} \cdot (1 - s_1)^{1-\alpha} \;\mapsto\; \alpha \cdot s_1^{\alpha-1}(1 - s_1)^{1-\alpha} \; + \; s_1^{\alpha}(1 - s_1)^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) \cdot (-1) \; = \; 0$

$\alpha \cdot s_1^{\alpha-1}(1 - s_1)^{1-\alpha} \; = \; s_1^{\alpha}(1 - \alpha)(1 - s_1)^{-\alpha}$

$\Rightarrow \quad \boxed{s_1 = \alpha}$

Der Ausdruck $(s_1 - d_1)^{\alpha} \cdot (s_2 - d_2)^{1-\alpha}$ heißt auch *verallgemeinertes* Nash-Produkt (generalized Nash-Product).

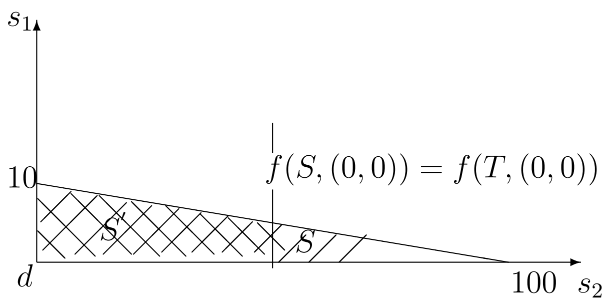
1.4 Variationen des Axiomensystems 1. - 4.

Ein auch in anderem Kontext auftretendes - und kritisch gewürdigtes Axiom - ist das *Unabhängigkeitsaxiom* (von irrelevanten Alternativen).

Nash begründete das Unabhängigkeitsaxiom im Bargaining-Kontext damit, dass er ein Verhandlungsproblem (S', d) als "weniger restriktiv" (*of lesser restrictiveness*) interpretierte als ein Verhandlungsproblem (S, d) , falls $S' \subset S$. Wenn sich die Spieler bei Vorliegen der größeren Einigungsmenge S auf ein $s \in S' \subset S$ als Lösung "einigen" können, so sollte es ihnen *leichter* fallen, eine Einigung auf s bei Vorliegen der kleineren Menge S' zu finden. Im zweiten Falle muss sich s schließlich nicht mehr gegen (nunmehr "irrelevante") Alternativen aus $S \backslash S'$ durchsetzen (wie das im ersten Falle gilt).

Einwände gegen das Unabhängigkeitsaxiom:

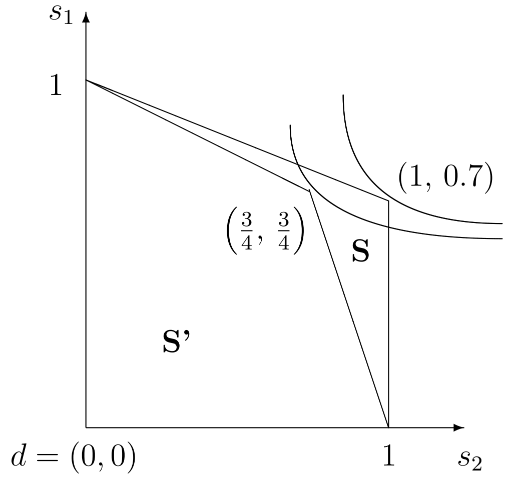
i) Luce und Raiffa (1957) : Sei f eine Verhandlungslösung:



$$\begin{array}{lrcl} \text{Sei} & f(S,\,(0,\,0)) & = & (5,\,50) \\ \underset{\text{UA}}{\Rightarrow} & f(S',\,(0,\,0)) & = & (5,\,50) \\ & \text{da } S' & \subset & S \end{array}$$

Spieler 1 würde das als nicht "fair" empfinden. In $f(S,\,(0,\,0))$ liegt ein Kompromiss in dem Sinne vor, dass Spieler 1 den "mittleren" Nutzen $5 \in [0, 10]$ und Spieler 2 den "mittleren" Nutzen $50 \in [0, 100]$ erhält.
In $f(S,\,(0,\,0))$ erhält er aber weiterhin seinen "mittleren" Wert, während Spieler 2 das nunmehr für ihn maximal mögliche (in S') Nutzenniveau 50 erhält.
Welche Art von Verhandlungs*prozess* würde dieses Ergebnis tatsächlich hervorbringen?

ii) Kalai und Smorodinsky (1975) :



$f^N\,(S', (0,0)) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$
Klar: $S' \subset S$
$f^N\,(S, (0,0)) = (1, 0.7)$

Der Anteil von Spieler 1 *verschlechtert* sich von 0.75 auf 0.7, obwohl sein *maximal* möglicher Nutzen - gegeben irgendein s_2 - *angestiegen* ist. Das ist eine zumindest unintuitive Eigenschaft der Nash-Verhandlungslösung.

Beispiel ii) kann als dramatische Version von i) interpretiert werden. Während Spieler 2 in i) keine "Konzessionen" beim Übergang von S nach S' zu machen hat, gewinnt er hier sogar auf Kosten von Spieler 1. Welche Art von "Verhandlung", die das hervorbringen könnte, wird somit *im Ergebnis* von f^N beschrieben?

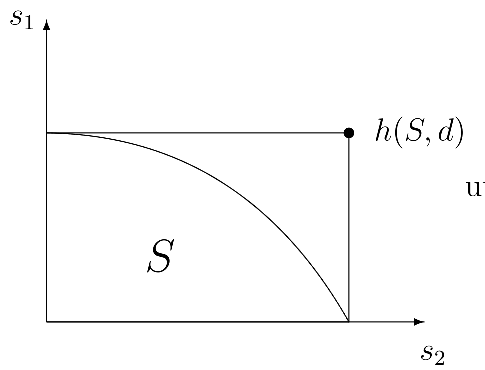
Kalai und Smorodinski (1975) fordern an Stelle des Unabhängigkeitsaxioms ein neues Axiom, das sie 'individuelle Monotonie' nennen:

5. Monotonieaxiom:

Sei $(S,\, d)$ ein Verhandlungsproblem, bezeichne mit $h(S,\, d)$ den *'Utopiepunkt'* des Problems, wobei

$$h(S,\, d) \;=\; \Big(h_1(S,\, d),\, h_2(S,\, d)\Big) \quad \text{mit}$$

$$h_i(S,\, d) \;=\; \max\Big\{s_i \mid s \in S\,,\; s \,\geq\, d\Big\}\,,\; i = 1, 2$$



utopia point: “jeder realisiert sein Maximum”

Individuelle Monotonie: Sei f Verhandlungslösung.

Axiom : Seien $(S,\, d)$ und $(S^{'},\, d)$ zwei Verhandlungsprobleme mit $S^{'} \subset S$ und $h_i(S,\, d) = h_i(S^{'},\, d)$ für ein $i \in 1, 2$. Dann gilt

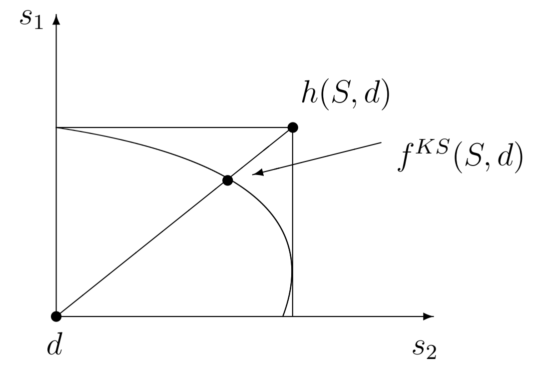
$$f_j(S^{'},\, d) \;\leq\; f_j(S,\, d) \quad \text{für } j \neq i.$$

D.h. also eine “Verkleinerung” von S, die einem Spieler i seinen Utopiewert $h_i(S,\, d)$ belässt, kann sich *nicht* zum Vorteil des *anderen* Spielers auswirken. Genau das passiert aber in Beispiel ii), da der Utopiepunkt sowohl für $(S,\, d)$ als auch $(S^{'},\, d)$ durch $(1,\, 1)$ gegeben ist!

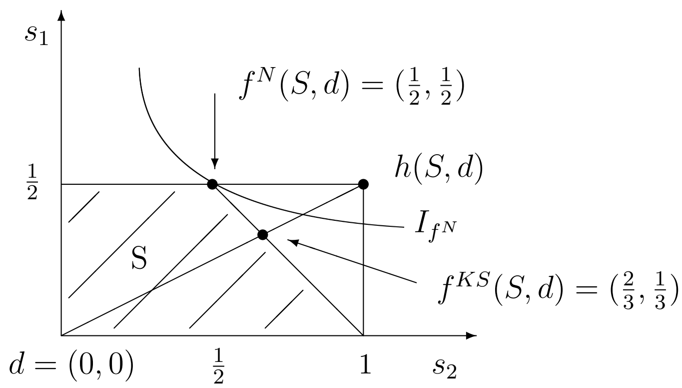
Klar : $f^N(S,\, d)$ erfüllt das Monotonieaxiom *nicht*.

Kalai und Smorodinsky (1975) zeigen nun:

Theorem : Es gibt genau eine Verhandlungslösung $f : V \to I\!R^2$, die die Axiome 1, 2, 4 und 5 erfüllt.
Diese (Kalai-Smorodinsky-) Verhandlungslösung $f^{KS}\,(S,\, d)$ wählt jeweils den eindeutigen pareto-optimalen Punkt auf der Verbindungslinie von d und $h(S,\, d)$ aus!



Unterschied zu f^N :



Die Kalai-Smorodinsky-Lösung orientiert ihre "Kompromissbildung" (= Lösung des Verhandlungskonflikts) offensichtlich am Utopiepunkt (Spieler 2 erhält höheren Nutzen als Spieler 1 im Verhältnis zum Nutzen im Utopiepunkt).
D.h. jeder hat Konzessionen in Bezug auf seine Position im Utopiepunkt zu machen.
Die Nash-Lösung hingegen orientiert sich am 'status-quo'-Punkt, wie dies das Nash-Produkt ausweist.
D.h. jeder Spieler erhält Verbesserungen gemessen zum 'Nichteinigungs'-Ergebnis.

Bemerkung : Die Kalai-Smorodinsky-Lösung kann *nicht* auf den Fall $n > 2$ verallgemeinert werden ! Für $n > 2$ gilt schon:

Satz (Peters (1992)) : Es gibt keine Verhandlungslösung $f : V^n \to \mathbb{R}^n$, $n > 2$, die die Axiome 4 und 5 erfüllt.

Bei mehr als zwei Spielern können also das Effizienzaxiom und das 'individuelle Monotonieaxiom' miteinander in Konflikt geraten, für manche Verhandlungsprobleme tun sie dies sogar mit Sicherheit!

Kehren wir noch einmal zum Fall $n = 2$ zurück und dem Vergleich von f^N und f^{KS}: Formal ist $f^{KS}(S,d) \in S$ definiert als Lösung des Problems

$$\max_{d \leq s \in S} \quad \min_{i \in \{1,2\}} \quad \left\{ \left| \frac{s_i - d_i}{h_i(S,d) - d_i} \right| \right\}$$

d.h.

$$f^{KS}(S,d) := arg \quad \max_{d \leq s \in S} \quad \min_{i \in \{1,2\}} \quad \left\{ \left| \frac{s_i - d_i}{h_i(S,d) - d_i} \right| \right\}$$

In dieser Darstellung wird der Unterschied zur Nash-Lösung, die das Nash-Produkt maximiert, besonders deutlich. Die beiden Lösungen verhalten sich zueinander wie die utilitarische Wohlfahrtsfunktion (Summe der Einzelnutzen) zur Rawls'schen Wohlfahrtsfunktion (maximaler minimaler Einzelnutzen). Normieren wir nämlich die Präferenzen u_i eines Spielers i, $i = 1,2$, so dass $d_i = 0$ und $h_i(S,d) = 1$, was nach dem Invarianzaxiom problemlos möglich ist, so reduziert sich obige Zielfunktion zu,

$$\min_{i \in \{1,2\}} \{s_i\}$$

d.h.

$$\max_{d \leq s \in S} \quad \min_{i \in \{1,2\}} \{s_i\}$$

ist das zu lösende Problem. Dies ist aber gerade die Rawls'sche Wohlfahrtsmaximierung!

Kapitel 2

Strategische Theorien

2.1 Das Nash-Programm

Die bisherigen Analysen stellen auf die Implikationen des Vorliegens individueller *Präferenzen* in einer Verhandlungssituation ab. D.h. gefragt wurde, wie sinnvolle Verhandlungslösungen - gegeben die Interessenlage der beteiligten Parteien - aussehen könnten und weniger, wie - d.h. durch welche *Strategien* in einem Verhandlungs*verfahren* - sie tatsächlich zustande kommen können.
Die Vorstellung, die zur Implementierung der Nash-Verhandlungslösung in einem Verhandlungsproblem (S, d) führt, ist *kooperativ* in dem Sinne, dass die Beteiligten die Axiome der Lösung akzeptieren, um dann einen *verbindlichen* Vertrag über $f^N(S, d)$ einzugehen. Kooperative Spieltheorie fragt daher nach möglichen Verträgen, die Verhandlungspartner mit unterschiedlichen Präferenzen eingehen könnten, welche *per se* als bindend angesehen werden. Ein Verhandlungsverfahren, in dessen Rahmen die Beteiligten ihre Präferenzen durch (strategisches) Verhalten zum Ausdruck bringen, wird in diesem Ansatz nicht benötigt. Dies ist seine Stärke und Schwäche zugleich. Dies sah auch schon Nash so. Er schlug daher einen zweiten, sozusagen komplementären, Ansatz vor, der darin bestehen sollte, strategische Modelle von Verhandlungsprozessen (step-by-step negotiations etc.) zu studieren, deren nicht-kooperative Gleichgewichte mit den Ergebnissen der axiomatischen Theorien zu vergleichen wären. Dieser "Test" der den verschiedenen Verhandlungslösungen zugrunde liegenden Axiome, sollte über deren Sinnhaftigkeit entscheiden. Diese frühe Variante des - später allgemeiner formulierten - Forschungsprogrammes "nicht-kooperative Fundierung kooperativer Lösungskonzepte"

wurde unter dem Namen ‘Nash-Programm’ bekannt.

2.2 Verhandlungsspiele

2.2.1 Ultimatum Bargaining

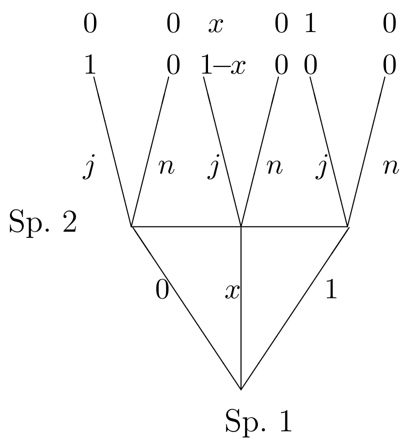
Das Ultimatumspiel hat eine denkbar einfache Struktur. Wir stellen uns vor, zwei Spieler verhandeln über die Aufteilung eines Dollars, ihre Präferenzen seien jeweils durch $U_i(x) = U(x) = x \in [0,1]$ gegeben. Das Spiel, das die Verhandlungsprozedur vorgibt, hat zwei Stufen:

Stufe I: Spieler 1 macht einen Aufteilungsvorschlag $(x, 1-x)$, $x \in [0,1]$.

Stufe II: Spieler 2 akzeptiert den Vorschlag (dann ist das Spiel zu Ende und $(x, 1-x)$ wird implementiert) oder lehnt ihn ab (dann ist das Spiel auch zu Ende, aber mit Auszahlungen (0, 0)).

Dieses ‘take-it-or-leave-it’-Angebotsverfahren ist nicht so unrealistisch wie es zunächst scheinen mag: es findet in jedem Supermarkt statt, entweder der Käufer zahlt den verlangten Warenpreis (Aufteilungsvorschlag des ‘trade-surplus’ seitens des Supermarktes oder er kauft die Ware nicht, dann wird auch der surplus nicht realisiert).

Spielbaum:



Beh.: Jede Aufteilung $(x, 1-x)$ ist als Ergebnis eines Nash-GG realisierbar!

Strategie Spieler 1: $x \in [0,1]$

Strategie Spieler 2: $s : [0,1] \to \{j, n\}$, $x \mapsto s(x)$

GG-Strategie: Spieler 1 : x_0

$$\text{Spieler 2} : s(x) = \begin{cases} n & x > x_0 \\ j & x \leq x_0 \end{cases}$$

Extrem:

$$\text{Spieler 2} : s(x) = \begin{cases} n & x > 0 \\ j & x = 0 \end{cases}$$

Spieler 1 : $x_0 = 0$

Es ist also sogar ein Nash-GG, dass Spieler 1 *alles* Spieler 2 offeriert!

Problem: Viele dieser Nash-GGe sind nicht *teilspielperfekt*, d.h. sie ignorieren die sequentielle Struktur des Spieles.

Die *Drohung* von Spieler 2, alle Angebote, in denen Spieler 1 mehr als x_0 erhält *abzulehnen*, ist nicht glaubwürdig.
Ist nämlich z.B. das *Teilspiel* $x_0 + \vartriangle$ *erreicht*, so hat Spieler 2 nur noch die Wahl zwischen einer Auszahlung von $1 - (x_0 + \vartriangle)$, falls er 'ja' sagt, und 0, falls er ablehnt. Falls $1 - (x_0 + \vartriangle) > 0$ (negativ kann es nicht sein), muss er rationalerweise annehmen!

Wie sehen die teilspielperfekten Nash-GGe aus?
Es gibt nur eines:
Spieler 2 muss sicherlich jeden Vorschlag $(x_0, 1 - x_0)$ mit $x_0 < 1$ akzeptieren.
Für (1, 0) ist er indifferent zwischen 'ja' und 'nein'.
$\Rightarrow$ einziges TSP-GG: $\boxed{x_0 = 1 \quad s(x) = j \text{ für alle } x}$

Im TSP-GG erhält Spieler 1 also alles, er besitzt sozusagen *alle* Verhandlungsmacht: $(1, 0)$ ist GG-Aufteilung.
Falls wir den Dollar in 100 Cents "diskretisieren" und das diskrete Spiel mit $x \in [0, 1, \cdots, 100]$ analysieren, ergibt sich als eindeutiges GG,

$$x_0 = 99 \text{ und } s(x) = \begin{cases} j & x \leq 99 \\ n & x = 100 \end{cases} ;$$

bzw. $(0.99, 0.01)$ ist nun die GG-Aufteilung.
Bei immer "feinerer" Diskretisierung ($\frac{1}{10}$ - Cents, etc.) konvergiert diese Lösung natürlich

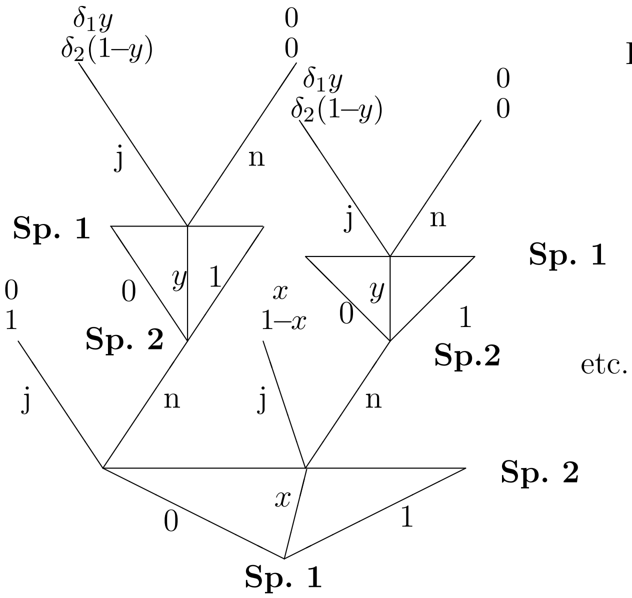
gegen (1, 0).

Die Verhandlungsmacht von Spieler 1, der den Vorschlag machen darf, wird nun eingeschränkt, indem das (zweistufige) Verhandlungsverfahren *selbst* auf zwei Stufen erweitert wird:

Runde 1: { Stufe I: 1 schlägt (x, 1 - x) vor
Stufe II: 2 akzeptiert oder lehnt ab. Lehnt er ab wird Runde 2 erreicht

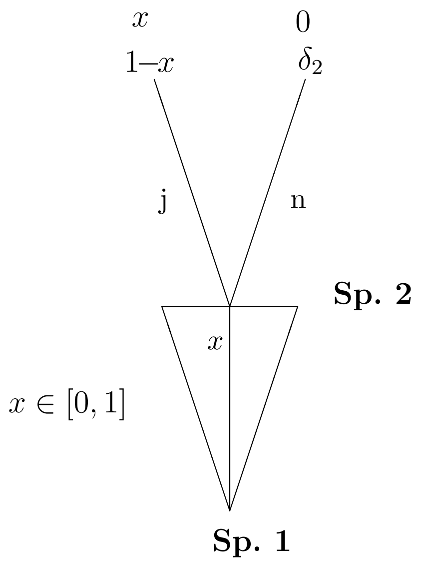
Runde 2: { Stufe I: 2 schlägt (y, 1 - y) vor
Stufe II: 1 akzeptiert oder lehnt ab.

Beide Spieler werden dabei als “ungeduldig” angesehen; d.h. sich in der ersten Runde zu einigen bringt tatsächlich Auszahlungen $(x, 1-x)$, sich erst in der zweiten Runde darauf zu einigen bringt jedoch nur $(\delta_1 \cdot x, \delta_2 \cdot (1-x))$ mit $\delta_1, \delta_2 \in (0,1)$. Würden die Spieler nicht diskontieren, bedeutete dies, es wäre ihnen egal, wann sie sich einigen; d.h. man könnte die Analyse gleich wieder auf die letzte Runde beschränken. (Hat man *viele* Stufen und würden die Spieler nicht diskontieren, so wäre Indifferenz darüber, wann sie sich einigen fast gleichbedeutend mit Indifferenz darüber, *ob* sie sich einigen. Das würde allerdings nicht mehr das eigentliche Bargaining-Problem modellieren!).



Klar: Wird die zweite Runde erreicht, so ergibt sich die Lösung des zuvor analysierten Spieles:
Spieler 2 wird $(0,1)$ vorschlagen und Spieler 1 wird akzeptieren. Dies führt zu Auszahlungen $(0, \delta_2)$.

Dies ist die Lösung *jedes* Teilspieles, das in Runde 2 beginnt!. D.h. per Rückwärtsinduktion stellt sich der Spielbaum in Runde 1 verkürzt wie folgt dar:



$\Rightarrow$ GG:

Spieler 1: $x = 1 - \delta_2$

Spieler 2: $s(x) = \begin{cases} j & x \leq 1 - \delta_2 \\ n & x > 1 - \delta_2 \end{cases}$

GG-Auszahlung : $(1 - \delta_2, \delta_2)$

Spieler 1 bekommt nun nicht mehr alles, da Spieler 2 glaubwürdig in bestimmten Fällen, Ablehnung des Vorschlages androhen kann! Der First-mover-advantage von Spieler 1 wird durch *Alternieren* des Vorschlagsrechtes also geringer.

Klar:

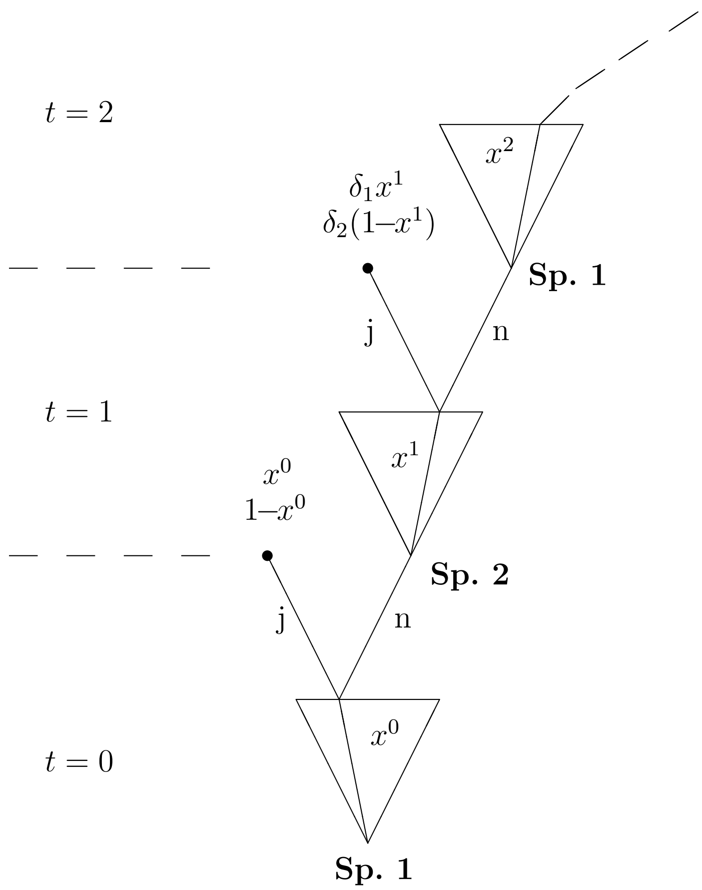
i) Je geduldiger Spieler 2 ist; d.h. je größer δ_2, desto weniger kann sich Spieler 1 sichern. Ist Spieler 2 jedoch sehr ungeduldig, erhält Spieler 1 wiederum fast alles.

ii) Abdiskontieren mit δ_2 resp.δ_1 normiert die Länge des Rundenintervalles zu 1: $\delta_i = \delta_i^1$. Variiert man die Intervall-Länge θ, so variiert entsprechend der Diskontfaktor: δ_i^θ. Verhandeln die Spieler also *schnell* (kurze Intervall-Länge pro Runde), so folgt $\lim_{\theta \to 0} \delta_i^\theta = 1$ und Spieler 2 würde sich fast alles aneignen können, falls θ hinreichend klein.

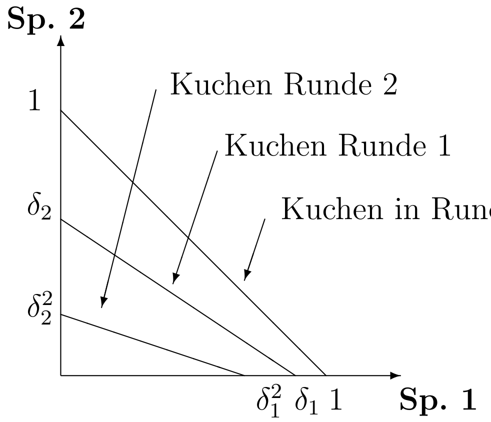
2.2.2 Das Rubinstein-Spiel

Rubinstein (1982) analysierte eine 'infinite-horizon'-Version des 'alternating-offers'-Spiels; d.h. die Rundenzahl des Verhandlungsspieles wird als nicht begrenzt angenommen. Konsequenz dieser Modellierung ist, dass die Spieler nun nicht wissen können, wer den letzten Zug machen kann. Die Rückwärtsinduktionslösung scheint dadurch unmöglich. Dennoch wird man auch in diesem Spiel ein teilspielperfektes GG ermitteln können, ja Rubinstein zeigt sogar, dass dies *eindeutig* ist! Diese nicht-kooperative Modellierung des Verhandlungsproblems führt somit zu einer eindeutigen Lösung! Dies war ein großer Durchbruch, umso mehr als man zeigen kann, dass dieses GG in enger Beziehung zu der Lösung steht, die die (nicht-kooperative) Nash-Verhandlungslösung vorschlagen würde.

Spielbaum

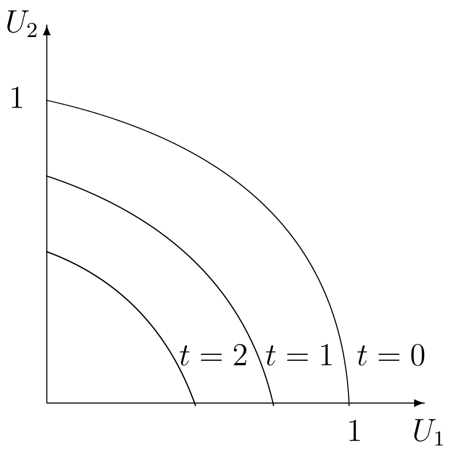


Ungeduld bzw. Abdiskontieren kann auch als "Schrumpfen" des Dollars interpretiert werden. Sei z.B. $\delta_1 = 0.9 = \delta_2$, dann ist die Situation der beiden Spieler in der Runde 2 *identisch* mit einer Erstrundensituation, in der es um die Aufteilung von 0.9 Dollar geht! Dies macht deutlich, dass das Schrumpfen des Verhandlungskuchens den Einigungsdruck auf die beiden Spieler erhöht. Genau dies treibt in der Tat das Resultat im teilspielperfekten Gleichgewicht.



Bisher haben wir angenommen $U(x) = x$; d.h. 1 Dollar = 1 Nutzeneinheit. Nun unterstellen wir eine beliebige stetige konkave Nutzenfunktion $U_i(x)$, $x \in (0,\ 1)$, für die wir o.B.d.A. $U_i(1) = 1$ annehmen können. Der Nutzen einer Einigung in Runde t auf $(x,\ 1-x)$ beträgt also $\delta_1^t \cdot U_1(x)$ für Spieler 1 und $\delta_2^t \cdot U_2(1-x)$ für Spieler 2.
Einigen sich die Spieler *nicht*, d.h. endet das Spiel nicht, so erhalten beide (0, 0), da der 'Kuchen' dann auf 0 zusammenschrumpft.

Im bekannten *Nutzen*-Diagramm stellt sich das Verhandlungsproblem nun so dar:



Wir zeigen zunächst, dass es ein teilspielperfektes GG in *einfachen* Strategien gibt.

Danach zeigen wir, dass dieses das *einzige* teilspielperfekte Gleichgewicht ist.

Stationarität von Strategien

Ein Spieler schlägt in jeder Runde *dieselbe* Aufteilung $(\bar{x}_1,\ 1-\bar{x}_1)$ (Spieler 1) resp. $(\bar{x}_2,\ 1-\bar{x}_2)$ (Spieler 2) vor. Als 'responder' wird er jedes Angebot des anderen Spielers ablehnen, das $x_2 < \bar{x}_2$ vorsieht (Spieler 1) resp. $1-x_1 < 1-\bar{x}_1$ (Spieler 2). Ebenso wird Spieler 1 jedes Angebot mit $x_2 \geq \bar{x}_2$ annehmen, und Spieler 2 wird jedes Angebot mit $1-x_1 \geq 1-\bar{x}_1$.
D.h. wir betrachten ein Strategienpaar $(\sigma_1^t,\ \sigma_2^t)$ mit

$$\sigma_1^t = \begin{cases} (\bar{x}_1,\ 1-\bar{x}_1) & \text{falls } t = 0,2,4,... \\ \begin{array}{l} j \text{ falls } x_2 \geq \bar{x}_2 \\ n \text{ falls } x_2 < \bar{x}_2 \end{array} & \text{falls } t = 1,3,5,... \end{cases}$$

und

$$\sigma_2^t = \begin{cases} (\bar{x}_2,\ 1-\bar{x}_2) & \text{falls } t = 1,3,5,... \\ \begin{array}{l} j \text{ falls } 1-x_1 \geq 1-\bar{x}_1 \\ n \text{ falls } 1-x_1 < 1-\bar{x}_1 \end{array} & \text{falls } t = 0,2,4,... \end{cases}$$

Können $(\sigma_1^t,\ \sigma_2^t)$ ein teilspielperfektes GG sein?

i) Wann ist die Drohung von Spieler 2, jedes Angebot von Spieler 1 mit $1-x_1 < 1-\bar{x}_1$ abzulehnen, glaubwürdig?
Angenommen, Spieler 1 schlägt $(x_1,\ 1-x_1)$ in Periode 0 vor.
Auszahlungen bei Annahme durch Spieler 2: $U_1(x_1),\ U_2(1-x_1)$
Auszahlungen bei Ablehnung durch Spieler 2: $\delta_1 \cdot U_1(\bar{x_2}), \delta_2 \cdot U_2(1-\bar{x_2})$ (da Spieler 1 annimmt!!)
Ablehnung glaubwürdig, falls

$$U_2(1-x_1)\ <\ U_2(1-\bar{x_2}) \cdot \delta_2 \ \text{ für alle } \ x_1 > \bar{x_1}$$

aus Stetigkeit von U_2 folgt daher:

$$\boxed{U_2(1-\bar{x_1})\ \leq\ U_2(1-\bar{x_2}) \cdot \delta_2}$$

ii) Damit die von σ_2^0 vorgesehene Annahme von $(\bar{x_1},\ 1-\bar{x_1})$ rational ist, muss aber auch gelten:

$$\boxed{U_2(1-\bar{x_1}) \ \geq \ U_2(1-\bar{x_2})\cdot\delta_2}$$

und somit

$$(1) \quad \boxed{U_2(1-\bar{x_1}) \ = \ U_2(1-\bar{x_2})\cdot\delta_2}$$

iii) Da Spieler 1 in Periode 1 in *genau derselben* Situation ist wie Spieler 2 in Periode 0, folgt mit denselben beiden Argumentationsschritten, dass

$$U_1(\bar{x_2})\cdot\delta_1 \ = \ U_1(\bar{x_1})\cdot\delta_1^2$$

gelten muss; d.h.

$$(2) \quad \boxed{U_1(\bar{x_2}) \ = \ U_1(\bar{x_1})\cdot\delta_1}$$

Bem.: Die Gleichungen (1) und (2) haben genau eine Lösung in $(\bar{x_1},\ \bar{x_2})$!
D.h. wenn dieser Typ von Strategien überhaupt ein teilspielperfektes GG zulässt, dann genau das eine mit $(\bar{x}_1^*,\ \bar{x}_2^*)$ Lösung von (1), (2).

Theorem (Rubinstein 1982): Das 'alternating-offers'-Spiel besitzt genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht $(\sigma_1^*,\ \sigma_2^*)$. Darin schlägt Spieler 1 immer $(\bar{x}_1^*,\ 1-\bar{x}_1^*)$ vor, wenn er das Vorschlagsrecht besitzt und er akzeptiert immer jedes Angebot mit $x_2 \geq \bar{x}_2^*$, falls Spieler 2 den Vorschlag macht;
Spieler 2 schlägt immer $(\bar{x}_2^*,\ 1-\bar{x}_2^*)$ vor und akzeptiert jedes Angebot mit $1-x_1 \ \geq \ 1-\bar{x}_1^*$. Als Gleichgewichts*pfad* ergibt sich, dass Spieler 1 in Periode 0 $(\bar{x}_1^*,\ 1-\bar{x}_1^*)$ vorschlägt und Spieler 2 dies *sofort* akzeptiert.
$(\bar{x}_1^*,\ \bar{x}_2^*)$ ist die eindeutige Lösung von (1) und (2).

Beweis:

i) Übung! Zeigen Sie, dass $(\sigma_1^*,\ \sigma_2^*)$ für jedes Teilspiel ein Nash-GG erzeugt!

ii) Eindeutigkeit von $(\sigma_1^*,\ \sigma_2^*)$:

Wir beweisen dies nur für den Spezialfall des 'Divide-the-Dollar'-

Problems; d.h. wir nehmen nun (wieder) an, dass $U_1(x) = x$ und $U_2(1-x) = 1-x$.

Wie lauten nun die Gleichungen (1) und (2)?

$$(1') \quad 1 - \bar{x_1} \quad = \quad (1 - \bar{x_2}) \cdot \delta_2$$

$$(2') \quad \bar{x_2} \quad = \quad \bar{x_1} \cdot \delta_1$$

$\Rightarrow (2')$ in $(1')$: $\quad 1 - \bar{x_1} = (1 - \bar{x_1} \cdot \delta_1) \cdot \delta_2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{x}_1^* = \tfrac{1-\delta_2}{1-\delta_1 \cdot \delta_2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{x}_2^* = \tfrac{\delta_1 \cdot (1-\delta_2)}{1-\delta_1 \cdot \delta_2}}$$

Als GG-Aufteilung in Periode 0 ergibt sich also

$$(\bar{x}_1^*,\ 1 - \bar{x}_1^*) \ = \ \Big(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1 \cdot \delta_2},\ \frac{\delta_2 \cdot (1-\delta_1)}{1-\delta_1 \cdot \delta_2}\Big)$$

a) Gilt $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, so folgt $(\bar{x}_1^*,\ 1 - \bar{x}_1^*) = (\frac{1}{1+\delta},\ \frac{\delta}{1+\delta})$. Es verbleibt also ein First-mover-advantage, da $1 > \delta$; dieser ist umso geringer, je geduldiger die Spieler (d.h. dann insbesondere Spieler 2) und verschwindet für $\delta \to 1$, was zu $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ als Aufteilung führt.

b) Im Falle $0 < \delta_1 \neq \delta_2 < 1$ sieht man, dass für $\delta_1 \to 1$ (Spieler 1 "hat Zeit", Spieler 2 weniger) die Lösung gegen (1, 0) strebt; d.h. Spieler 1 erhält alles. Umgekehrt gilt auch für $\delta_2 \to 1$ (Spieler 2 "hat Zeit", Spieler 1 weniger), dass der Geduldigere alles erhält.

Eindeutigkeit von $(\bar{x}_1^*,\ 1-\bar{x}_1^*) = (\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\cdot\delta_2},\ \frac{\delta_2\cdot(1-\delta_1)}{1-\delta_1\cdot\delta_2})$:

Angenommen, es gibt viele TSP-Gleichgewichte. Sei $\bar{x}^1_{max}$ der höchste Anteil, den Spieler 1 in einem TSP-GG erhalten kann, und $\bar{x}^1_{min}$ der niedrigste.

Sei ebenso $\bar{x}^2_{max}$ die höchste GG-Auszahlung, die Spieler 2 erzielen kann, wenn er den 1. Zug hat, und $\bar{x}^2_{min}$ die niedrigste. (Dieses Spiel mit sozusagen "vertauschten Rollen" tritt als Teilspiel des ersten Spieles auf, wenn Spieler 2 den ersten Vorschlag abgelehnt hat!)

Wenn wir nun zeigen können, dass

$$\bar{x}^1_{max} = \bar{x}^1_{min} \quad \text{und} \quad \bar{x}^2_{max} = \bar{x}^2_{min}$$

ist die Eindeutigkeit offensichtlich bewiesen.

1.Schritt: Spieler 2 kann in einem TSP-GG nicht *weniger* erhalten als $\delta_2 \cdot \bar{x}^2_{min}$, da er sonst das Angebot von Spieler 1 in Periode 0 ablehnen würde, um im Spiel von Periode 1 an mindestens $\bar{x}^2_{min}$ zu erhalten.
Da Spieler 2 mindestens $\delta_2 \cdot \bar{x}^2_{min}$ erhält, kann Spieler 1 höchstens $1-\bar{x}^2_{min}\cdot\delta_2$ erhalten, d.h.

$$(3) \qquad \bar{x}^1_{max} \ \leq\ 1-\bar{x}^2_{min}\cdot\delta_2$$

2.Schritt: Angenommen, $x < 1-\bar{x}^2_{max}\cdot\delta_2$.
Beh.: $(x, 1-x)$ kann *kein* TSP-GG sein.
Sei $x < y < 1-\bar{x}^2_{max}\cdot\delta_2$ (ein solches y gibt es!).
Da $1-y > \bar{x}^2_{max}\cdot\delta_2$, würde Spieler 2 $(y, 1-y)$ sicherlich annehmen, da es mehr bringt als das *beste* TSP-GG im Spiel nach einer Ablehnung. Dann ist es aber nicht rational für Spieler 1 nur x zu verlangen, wenn er sogar y kriegen kann; d.h. $(x, 1-x)$ kann kein TSP-GG sein!
Da dies für *alle* $x < 1-\bar{x}^2_{max}\cdot\delta_2$ gilt, muss gelten

$$(4) \qquad \bar{x}^1_{min} \ \geq\ 1-\bar{x}^2_{max}\cdot\delta_2$$

Vertauscht man die Rollen der beiden Spieler (d.h. argumentiert man von $t = 1$ an), so erhält man aufgrund *derselben* Argumentation, dass auch

$$(5) \qquad \bar{x}^2_{max} \leq 1 - \bar{x}^1_{min} \cdot \delta_1$$

$$(6) \qquad \bar{x}^2_{min} \geq 1 - \bar{x}^1_{max} \cdot \delta_1$$

gelten muss.
(6) in (3) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1_{max} \leq 1 - \bar{x}^2_{min} \cdot \delta_2 \quad &\leq 1 - \delta_2 \cdot (1 - \bar{x}^1_{max} \cdot \delta_1) \\ &= 1 - \delta_2 + \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \bar{x}^1_{max} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{x}^1_{max} \leq \tfrac{1-\delta_2}{1-\delta_1 \cdot \delta_2}}$$

Ebenso ergibt (5) in (4) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1_{min} \geq 1 - \bar{x}^2_{max} \cdot \delta_2 \quad &\geq 1 - \delta_2 \cdot (1 - \bar{x}^1_{min} \cdot \delta_1) \\ &= 1 - \delta_2 + \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \bar{x}^1_{min} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{x}^1_{min} \geq \tfrac{1-\delta_2}{1-\delta_1 \cdot \delta_2}}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}^1_{max} = \bar{x}^1_{min} = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1 \cdot \delta_2} \quad \text{und} \quad \bar{x}^2_{max} = \bar{x}^2_{min} = \frac{(1-\delta_1) \cdot \delta_2}{1-\delta_1 \cdot \delta_2} \quad \text{q.e.d.}$$

2.2.3 'Alternating-offers'-Gleichgewichte und Nash-Verhandlungslösung

Da die Nash-Bargaining-Lösung von symmetrischen Spielern ausgeht sei $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ angenommen. Die Lösung des Rubinstein-Spieles ist dann

$$(x_1^*,\, 1 - x_1^*) = (\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta})$$

Für immer kleinere Periodenlänge wird $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ durch $\delta_1^\tau = \delta_2^\tau = \delta^\tau$ ersetzt und da $\lim_{\tau \to 0} \delta^\tau = 1$, folgt $(x^*_{lim},\, 1 - x^*_{lim}) = (\frac{1}{2},\, \frac{1}{2})$.
Dies ist aber genau $f^N(S,d)$ mit $S = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 \,|\, x_1 + x_2 \leq 1,\, x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0\}$ und $d = (0,0)$!

D.h. bei 'zügigem', d.h. verzögerungs- oder friktionsfreiem, Alternieren von Forderung und Gegenforderung ist die teilspielperfekte GG-Lösung des Rubinstein-Spieles annähernd gleich der (nicht-kooperativen) axiomatisch begründeten Nash-Verhandlungslösung!

Allgemeiner; d.h. für $0 < \delta_1 \neq \delta_2 < 1$, gilt:

Satz: Sei $\big(x^*(\tau),\, 1 - x^*(\tau)\big)$ das eindeutige TSP-GG im 'alternating-offer'-Spiel mit Periodenlänge τ. Dann gilt

$$\lim_{\tau \to 0} \big(x^*(\tau),\, 1 - x^*(\tau)\big) = f^{\alpha N}(S,d) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{1 + \frac{ln\,\delta_1}{ln\,\delta_2}}.$$

Die Gleichgewichtslösung des Rubinstein-Spieles konvergiert also für $\tau \to 0$ gegen die *verallgemeinerte* Nash-Verhandlungslösung $f^{\alpha N}(S,d)$, wobei die Verhandlungsstärken $(\alpha, 1-\alpha)$ durch $(\frac{1}{1+\frac{ln\delta_1}{ln\delta_2}},\, \frac{1}{1+\frac{ln\delta_2}{ln\delta_1}})$ gegeben sind!

Die Verhandlungsmacht α eines Spielers in der verallgemeinerten Nash-Verhandlungslösung kann also als seine 'Geduld' interpretiert werden: je höher bei Spieler 1 δ_1 liegt, desto größer α, für $\delta_1 = 1$ gilt $\alpha = 1$, da $ln 1 = 0$!
Je weniger 'kurzfristig' die Präferenzen eines Spielers ausgerichtet sind, desto größer seine Verhandlungsmacht.

Bemerkungen:

i) Man beachte jedoch, dass die 'verallgemeinerte Nash-Verhandlungslösung' über ihre Setzung der Verhandlungsstärken $(\alpha, 1-\alpha)$ *jede* Aufteilung (!) des Verhandlungskuchens (für entsprechend "gewähltes" α) erzeugen kann. Die Aufteilung eines Kuchens der Größe 1 im Verhältnis $x : (1-x)$ unter zwei Spielern würde - wie gezeigt - gerade durch die Verhandlungsstärken $(\alpha,\, 1-\alpha) = (x,\, 1-x)$ erklärbar werden!

ii) Dies bedeutet, dass beim Grenzübergang $\delta_1 \to 1$ *und* $\delta_2 \to 1$ mit keinem einheitlichen Limes gerechnet werden kann, sondern vom *Konvergenzpfad* abhängig ist, welcher Grenzwert sich ergibt.
Sei z.B. $\delta_1 = \delta$ und $\delta_2 = \delta^2$. Dann folgt

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{ln\delta}{ln\delta^2}} = \frac{1}{1 + \frac{ln\delta}{2 \cdot ln\delta}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Konvergieren δ_1 und δ_2 nun gegen 1, so dass das Verhältnis $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \delta^{-1}$ *erhalten* bleibt, so gilt auch im Grenzfall $\delta_1 = \delta_2 = 1$, dass die 'verallgemeinerte Nash-Lösung' $(\alpha, 1-\alpha) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ relevant ist (und *nicht*, wie man zunächst meinen könnte, die symmetrische Lösung $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$!). Eine friktions*lose* Welt ($\delta_1 = \delta_2 = 1$) kann auf vielerlei Arten durch Welten mit "geringeren" Friktionen ($\delta_1 \approx 1, \delta_2 \approx 1$) approximiert werden, so dass immer nachgewiesen werden muss, dass die gewählte Approximation für das Ergebnis unerheblich ist. Für den *symmetrischen* friktionslosen Grenzfall $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ergibt sich die symmetrische Nash-Lösung als Limes des 'kontinuierlichen' ($\tau \to 0$) alternating-offers-Gleichgewichts *nur*, wenn der Grenzfall "in symmetrischer Weise" (entweder "$\delta_1 = \delta_2 = \delta$ und $\delta \to 1$" oder "$\delta_1 \neq \delta_2$ und $lim \frac{\delta_1}{\delta_2} = 1$") erreicht wird.

2.2.4 Zur grundlegenden Bedeutung des Bargaining-Problems und der Bargaining Theorie

Das von Nash formulierte Verhandlungsproblem stellt (in höchst abstrakter Weise) das einfachste Grundmuster dar, das in jeder Situation, in der zwei Individuen durch Kooperation untereinander Erträge realisieren können, *vorausgesetzt* sie einigen sich vorab über ihre Aufteilung, vorhanden ist.

i) Fasst man Ökonomie als die 'Wissenschaft von der Arbeitsteilung' auf - und dies kann man seit Adam Smith's Zeiten - ,so ist klar, dass das Verhandlungsproblem für die Ökonomie grundlegend ist. Arbeitsteilung bedeutet 'Kooperation unter Spezialisten', die Skalenerträge in den Produktionsprozessen auszubeuten erlaubt. Die durch Arbeitsteilung zusätzlich erzielten Erträge müssen aber in einer für die Arbeitsteilung 'anreizverträglichen' Weise verteilt werden, worauf man sich vorab zu einigen hat.

ii) Auch liberale Staatstheorien implizieren das Verhandlungsproblem. Nach Hobbes erlaubt der freiwillige Zusammenschluss von Individuen zu einem Staatswesen, dessen Eigentums- und Rechtsordnung sie sich unterwerfen, die Vorzüge friedlichen Zusammenlebens zu realisieren. Der *kooperative* Akt der Staatsgründung wird jedoch vom Konfliktpotential der Frage, *welcher* Staat (mit welcher Eigentumsverfassung, etc.) gegründet werden soll, überlagert. Erst die Einigung darüber wird eine Staatsgründung tatsächlich ermöglichen.

Die Überlagerung von Kooperations- und Konfliktpotential ist also das für eine Verhandlungssituation - wie wir sie definiert haben - typische Element. Dieses Grundmuster wird bereits von einem einfachen Spiel erfasst, das ob seiner Einfachheit eine ähnlich prominente Stellung einnimmt wie das 'Gefangenen-Dilemma', welches vielleicht das "berühmteste" Spiel der Spieltheorie ist. Es ist dies das 2x2-Spiel 'chicken' oder 'hawk-dove'. Die Bezeichnung 'hawk-dove' entstammt dem politischen Sprachgebrauch der

Sp.1 \ Sp.2	A	K
A (hawk)	0, 0	90, 10
K (dove)	10, 90	50, 50

'Falken' (Hardliner) und 'Tauben' (Friedwillige, Kompromissbereite). Stellen wir uns vor, zwei Spaziergänger finden (gemeinsam) 100 Euro , die sie nun untereinander aufteilen wollen. Sind beide aggressiv (A, 'Ich hab den Schein zuerst gesehen!'), so wird er im Verlauf der Auseinandersetzung buchstäblich zerfetzt! Sind beide kooperativ (K, 'Klar, wir machen 50:50!') erhält jeder 50. Ist einer aggressiv ('Aber klar hab *ich* ihn zuerst gesehen') und der andere kooperativ, so erfolgt eine Aufteilung von 10:90 resp. 90:10. Die beiden Spieler können also den Ertrag von 100 Euro nur realisieren, wenn sie den Konfliktfall (A, A) vermeiden. Das ist der Kooperationsanreiz. *Wie* sie diesen Konflikt vermeiden, darüber bestehen unterschiedliche Interessen, da drei *individuell* jeweils unterschiedlich vorteilhafte Aufteilungen des Ertrages möglich sind. Dies ist der Konfliktanreiz. Das Chicken-Spiel hat zwei Nash-Gleichgewichte (A, K) und (K, A), insbesondere der 'kollektiv vernünftig' erscheinende Kompromiss (K, K) ist *kein* nicht-kooperatives Gleichgewicht. Es wird daher auch oft als klassisches, wichtiges und "überraschendes" Beispiel für das Problem der Nichteindeutigkeit des (Nash-)Gleichgewichtes verwandt. Insofern scheint es stark darauf hinzudeuten, dass das Verhandlungsproblem im allgemeinen *nicht* eindeutig gelöst werden kann. Genau dies tun jedoch die Nash-Verhandlungslösung und das Rubinstein-Spiel! Dies ist der eine Aspekt, der diese Theorien so bedeutsam macht. Der andere Aspekt ist der, dass Nash-Verhandlungslösung und nicht-kooperatives Rubinstein-Spiel zur *selben* Lösung gelangen! Da der kooperative Ansatz *per Annahme* von

Institutionen (wie z.B. dem Staat) ausgeht, die Vereinbarungen *erzwingen* können, die Existenz eben dieser aber die nicht-kooperative Lösung eines Verhandlungsproblemes (*welche* Institution schaffen wir?) erfordern, erscheint der Beitrag des strategischen Ansatzes sehr bedeutend. Er besagt, dass *rationale* Individuen mit anderen rationalen Individuen so interagieren werden, dass Ineffizienz und Konflikt vermieden werden können.
Wie man Erträge aus arbeitsteiliger oder - allgemeiner - sozialer Interaktion aufteilen sollte, muss also nicht moralphilosophischen Betrachtungen überlassen bleiben, sondern kann von rationalen Individuen - aus ihrer Rationalität heraus - "gerecht" (im Sinne der Nash-Bargaininglösung) entschieden werden. Die axiomatische Methode steht über die 'Rechtfertigung' der Axiome, welche Forderungen an moralische wie soziale Institutionen darstellen können, moralphilosophischen Überlegungen sehr zugänglich gegenüber, was beim strategischen Ansatz weit weniger der Fall scheint. Die nicht-kooperative Spieltheorie ist daher auch im letzten Jahrzehnt stark auf ihre philosophischen Grundlagen und Implikationen untersucht worden.

Die Eindeutigkeit der Lösung des Verhandlungsproblems besagt letztlich, *dass echter Konflikt zwischen rational interagierenden Individuen nicht möglich ist.* Das ist vielleicht noch nicht einmal so überraschend; die empirische Relevanz dieser Aussage führt aber sofort auf die kritische Bedeutung der Rationalitätsannahme.

2.3 Verhandlungsspiele mit unvollkommener Information

Obwohl es auch axiomatische Theorien zum Bargaining-Problem unter unvollkommener Information gibt (z.B. Harsanyi und Selten (1972)), wollen wir uns hier nur mit *strategischen* Analysen zu diesem Problem befassen.

Beginnen wollen wir mit dem Fall *asymmetrisch* unvollkommener Information; d.h. ein Spieler sei vollständig über alle strategisch relevanten Aspekte des Verhandlungsproblems informiert, der andere hingegen nicht. Ist eine Einigung unter diesen Umständen überhaupt *sofort* möglich, und wenn überhaupt wie sieht sie aus? D.h. wie beeinflusst die Informations*verteilung* das Ergebnis in der Verhandlungsprozedur 'alternating-offers-game', die wir bisher zur Analyse benutzt haben?

Danach wollen wir uns - von einer etwas allgemeineren Warte aus - mit dem Fall beschäftigen, dass *beide* Verhandlungspartner über das Verhandlungsproblem nur unvollkommen informiert sind. Der dabei auftretende 'Unmöglichkeitssatz' von Myerson und Satterthwaite (1983) besagt, dass in diesem Falle kein Verhandlungsverfahren existiert, das immer zur Einigung führt, wenn Einigung auch sinnvoll wäre (d.h. für beide einen Nutzengewinn und daher insgesamt einen *Effizienz*gewinn bringen würde).

2.3.1 Das 'Alternating-offers'-Spiel mit einem unvollkommen informierten Spieler

Zwei Spieler verhandeln wiederum über die Aufteilung eines Dollars; d.h. alle Aufteilungen aus

$$X = \left\{(x_1, x_2) \in I\!R^2_+ \mid x_1 + x_2 = 1\right\}$$

sind möglich.

Die beiden Spieler bedienen sich des 'alternating-offers'-Spieles, d.h. *abwechselnd* machen die Spieler Aufteilungsvorschläge gefolgt von der Annahme/Ablehnung-Entscheidung des jeweils anderen Spielers. Im Unterschied zur Situation von früher sind Spieler 1, der wiederum beginnen möge, die *Präferenzen* von Spieler 2 (und damit dessen Identität) nicht genau bekannt. Spieler 2 weiß hingegen genau über die Präferenzen von Spieler 1 (wie natürlich auch seine eigenen) Bescheid.

Präferenzen: Wird ein Vorschlag $(x_1, x_2) = (x, 1 - x)$ in Periode t angenommen, so stiftet dies Nutzen

$$U_1(x_1, x_2, t) = x_1 - c_1 \cdot t = x - c_1 \cdot t$$

$$U_2(x_1, x_2, t) = x_2 - c_2 \cdot t = (1 - x) - c_2 \cdot t$$

für die beiden Spieler. Beide sind also 'ungeduldig' in dem Sinne, dass spätere Einigung mit niedrigerem Nutzen einhergeht. Hier ist dies nicht in Diskontierungsform dargestellt, sondern durch Verhandlungskosten c_1 und c_2, die *konstant* pro Verhandlungsrunde entstehen. Dies macht die Analyseetwas einfacher, ist jedoch einer Darstellung mit Diskontfaktoren δ_1 resp. δ_2 qualitativ äquivalent:

$$U_1(x_1, x_2, t) = x_1 - c_1 \cdot t \approx \delta_1^t \cdot \bar{U}_1(x_1)$$

$$U_2(x_1, x_2, t) = x_2 - c_2 \cdot t \approx \delta_2^t \cdot \bar{U}_2(x_2)$$

wobei allerdings die $\bar{U}_i(x_i)$ keine *linearen* Funktionen mehr sein können.
Ebenso müssen wir nun als 'Nichteinigungspunkt' $d = (-\infty, -\infty)$ annehmen, um weiterhin sicherzustellen, dass jede Einigung - erfolgt sie auch noch so spät - besser ist als Nichteinigung. Dies ist problemlos und macht nur deutlich, dass wir die Verhandlungskosten c_i in Nutzeneinheiten und nicht in Dollar messen!

Informationsstruktur: Form von U_1, U_2 common knowledge, *aber*

c_1 : beiden Spielern bekannt

c_2 : nur Spieler 2, aber nicht Spieler 1 bekannt

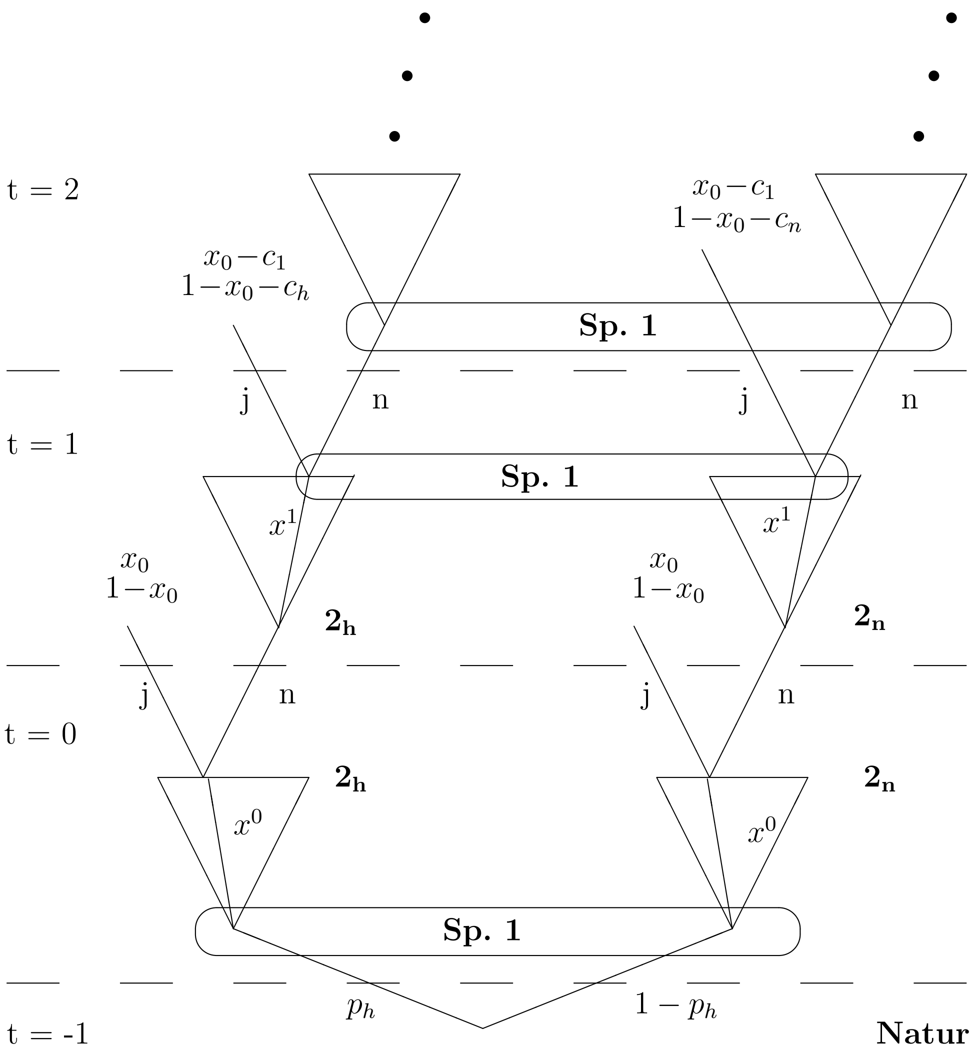
Spieler 1 weiß nur, dass c_2 einen von zwei Werten c_n ($n =$ niedrig) oder c_h ($h =$ hoch) annehmen kann:

$$c_2 = \begin{cases} c_h & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_h \\ c_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_n = 1 - p_h \end{cases}$$

wobei pikanterweise gilt, dass $0 < c_n < c_1 < c_h$;
d.h. Spieler 1 weiß auch nicht, ob er die *höheren* ($c_2 = c_n$) oder *niedrigeren* ($c_2 = c_h$) Verhandlungskosten hat! Dies ist insofern misslich als er bei $c_2 = c_h$ *wüsste*, dass er der geduldigere Spieler ist, der dies zudem mit seinem 1.Zug auch noch ausnützen könnte. Er wäre dann in einer *sehr* starken Position. Allerdings würde $c_2 = c_n$ bedeuten, dass *er* der ungeduldigere Spieler ist, der dies mit seinem 1. Zug-Vorteil nur etwas ausgleichen könnte. Klar ist (ihm) jedenfalls, dass Spieler 2 ein Interesse daran haben muss, Spieler 1 glauben zu machen, dass $c_2 = c_n$ (selbst *dann* wenn in Wirklichkeit $c_2 = c_h$) gilt.

Da - aus Sicht des Spielers 1 - Spieler 2 in zwei Inkarnationen im Spiel auftreten kann (als 2_h und 2_n), ist es zweckmäßig, das Spiel auch mit diesen beiden Spielern als Typen(vertreter) von Spieler 2 zu formulieren.

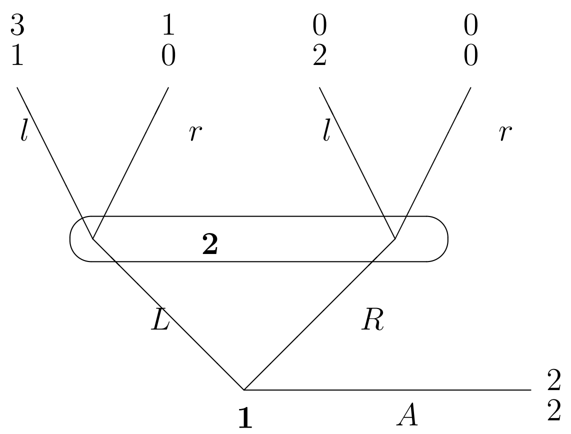
Dies führt auf folgenden Spielbaum der extensiven Form:
Zuerst "zieht" der (dummy) Spieler 'Natur', indem er Spieler 2 seine wahre Identität (Verhandlungskosten) zuweist. Dies ist ein Zufallszug, der mit Wahrscheinlichkeit p_h das Ergebnis $c_2 = c_h$ ergibt und mit Wahrscheinlichkeit $p_n = 1 - p_h$ das Ergebnis $c_2 = c_n$ liefert.



Es fällt auf, dass dieses Spiel aufgrund der Informationsstruktur keine echten Teilspiele besitzt. Das teilspielperfekte Lösungskonzept, das zur *Eindeutigkeit* des Gleichgewichtes im Rubinstein-Spiel bei *vollkommener* Information führte, wird hier also nicht weiterhelfen können. Die Übertragung des "Teilspielperfektheitsgedanken" von Spielen mit vollkommener Information auf Spiele mit unvollkommener Information (und 'perfect recall') in Form des sog. "sequentiellen Gleichgewichtes" (Kreps und Wilson (1982) führt allerdings weiter.

2.3.2 Sequentielles Gleichgewicht als 'refinement' für Nash-Gleichgewichte bzw. teilspielperfektes GG: Idee

Zur Illustration sei folgendes einfache Spiel betrachtet:



Spieler 1 kann entweder A spielen und das Spiel mit Auszahlungen $(2, 2)$ beenden (z.B. im Verhandlungsspiel einen vorher gemachten Aufteilungsvorschlag annehmen) oder Spieler 2 ans Spiel bringen, der dann allerdings nicht weiß, ob er am linken oder rechten Entscheidungsknoten zum Zuge kommt (entspricht etwa der Situation, dass der Spieler 1 im Verhandlungsspiel nicht weiß, ob ihm der Zug von Spieler 2_h (linker Knoten) oder 2_n (rechter Knoten) gegeben wurde).
Dieses Spiel hat kein Teilspiel und somit sind die beiden Nash-Gleichgewichte (L, l) und (A, r) auch teilspielperfekte Gleichgewichte. Nur (L, l) ist jedoch ein sequentielles (bzw. sequentiell *rationales*) Gleichgewicht, nicht aber (A, r).
Rückwärtsinduktion verlangt zunächst eine Entscheidungsanalyse der Situation von Spieler 2. Wie sollte Spieler 2 an seiner Informationsmenge entscheiden?
Da er nicht *weiß*, wo er sich in ihr befindet, kommt dies darauf an, wo er *glaubt* sich zu

befinden. Einen solchen "Glauben" (englisch: belief) wollen wir als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die beiden Knoten modellieren:
'belief' für Spieler 2: $(x, 1-x) \quad x \geq 0.$

Gegeben einen 'belief' ist auch das Entscheidungsproblem für Spieler 2 wohldefiniert, da er nun jeder Entscheidung eine *erwartete* Auszahlung zuordnen kann:
ist der 'belief' $(x, 1-x)$, so führt die Wahl von l zur Auszahlung $1 \cdot x + 2 \cdot (1-x) = 2-x$ und die Wahl von r zu $0 \cdot x + 0 \cdot (1-x) = 0$. D.h. l ist *immer* seine beste Entscheidung und somit gibt es *keinen* 'belief' für Spieler 2, der r zur besten Entscheidung machen könnte.
Kann Spieler 2 seinen 'belief' *beliebig* wählen?
Die Antwort auf diese Frage ist entscheidend: sie lautet 'Nein', zulässig sind nur solche 'beliefs', die mit optimalem Verhalten von Spieler 1 konsistent sind!
Da Spieler 1 weiß, dass l für Spieler 2 *immer* optimal ist, wird er davon ausgehen können, dass Spieler 2 l spielen wird, wenn er ihn ans Spiel bringt. Folglich wird er selbst L wählen. Das aber heißt, dass Spieler 2 *rationalerweise* nie einen 'belief' $(x, 1-x)$ mit $x < 1$ stützen kann. Denn wie soll die positive Wahrscheinlichkeit für den Knoten rechts zustande kommen, wenn Spieler 1 doch immer L spielt? Also kann Spieler 2 nur den 'belief' (1, 0) haben, falls seine Informationsmenge erreicht wird und muss daraufhin l spielen.
D.h. das Nash-GG (L, l) ist in dem Sinne *sequentiell* rational, dass die optimale Entscheidung von Spieler 2 auf 'beliefs' beruht, die mit dem optimalen Kalkül von Spieler 1 in dem Sinne konsistent sind, dass sie von einer Verhaltensweise, die die auf den 'beliefs' beruhende optimale Entscheidung von Spieler 2 miteinbezieht, gerade 'erzeugt' bzw. bestätigt werden. Die 'beliefs' von Spieler 2 erweisen sich als 'rational' oder selbstbestätigend.

Das Gleichgewicht (A, r) hat diese Eigenschaft nicht:
ein 'belief' $(x, 1-x)$ mit $1-x > 0$ ist mit dem optimalen Entscheidungsverhalten von Spieler 1 nie vereinbar und kann somit auch nicht bestätigt werden!
Hier könnte man sich zunächst fragen, wie soll Spieler 2 denn 'beliefs' bilden, wenn er davon ausgeht, dass Spieler 1 A spielt? D.h. wie soll er sich verhalten, wenn er davon ausgeht, dass Spieler 1 A spielt und dann aber doch wider Erwarten ans Spiel kommt?
Dazu stelle er sich vor, dass Spieler 1 nur vollständig gemischte Strategien über (L, R, A)

spielen kann. Will er also A spielen, so kann er das nur mit Hilfe einer 'Strategie', die auch geringe Wahrscheinlichkeit ϵ_1 auf L und ϵ_2 auf R legt. Vollständig gemischte Strategien *garantieren*, dass jeder Knoten in einer Informationsmenge mit *positiver* Wahrscheinlichkeit erreicht wird. Wird z.B. L mit Wahrscheinlichkeit ϵ_1 gespielt und R mit Wahrscheinlichkeit ϵ_2, so wird die Informationsmenge von Spieler 2 mit Wahrscheinlichkeit $\epsilon_1 + \epsilon_2$ erreicht, so dass Spieler 2 durch Anwendung der sog. *Bayes'schen Regel* zu dem 'belief'

$$\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\right)$$

kommen muss. In Bezug auf diese wohldefinierten 'beliefs' kann er nun seinen *erwarteten* Nutzen maximieren. Zugelassen für Spieler 2 sind dann in der Situation, in der er eigentlich A von Spieler 1 erwartete, nur solche 'beliefs', die sich als Limes für $\epsilon_1 \to 0$, $\epsilon_2 \to 0$ an seiner Informationsmenge erzeugen lassen. Solche 'beliefs' heißen *konsistent* (englisch: consistent). So wäre z.B. der 'belief' $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ konsistent, da für $\epsilon_1^n = \frac{1}{n}$ und $\epsilon_2^n = \frac{2}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{2}{n}}, \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{2}{n}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

In diesem Beispiel stellt Konsistenz *keine* Einschränkung an die 'beliefs' von Spieler 2 dar, da jeder 'belief' konsistent ist. Im allgemeinen - vor allem in Spielen mit vielen Informationsmengen - ist dies jedoch nicht so.

Zur Bayes'schen Regel:

Thomas Bayes (1763) ("An essay towards solving a problem in the doctrine of chances") beschäftigte sich mit der Berechnung sog. "bedingter Wahrscheinlichkeit" wie sie im obigen Spiel typisch auftritt: Spieler 2 muss sich fragen: "Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ich mich am linken/rechten Knoten befinde, *gegeben* (bzw. *bedingt* auf das Ereignis) dass ich mich an meiner Informationsmenge befinde?"

$$\begin{aligned} P(\text{Informationsmenge wird erreicht}) &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ P(\text{linker Knoten / I erreicht}) &= \tfrac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2} \\ P(\text{rechter Knoten / I erreicht}) &= \tfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} \end{aligned}$$

$(Bayes' Formel)$ $\boxed{P(A|B) = \frac{P(B\cap A)}{P(B)}}$

A = Ereignis 'linker Knoten'

B = " 'I erreicht'

$A \cap B$ = " 'I *und* linker Knoten erreicht

D = " ' rechter Knoten

Bem.: Offensichtlich setzt die Anwendbarkeit von Bayes' Regel voraus, dass $P(B) \neq 0$. (Das ist genau das Problem bei der Berechnung von 'beliefs', die das GG (A, r) stützen könnten (denn gegeben A von Spieler 1, muss $P(B) = 0$ gelten! *Konsistenz* dehnt die Anwendbarkeit der Bayesianischen Regel also auch auf solche Fälle aus!)

Die Anwendung der Bayesianischen Formel nennt man auch Bayesianisches 'Updating' (bayesian updating): a priori - bevor 2's Informationsmenge erreicht ist, ist - gegeben die Strategie $(\epsilon_1, \epsilon_2, 1-\epsilon_1-\epsilon_2)$ von Spieler 1 - die Wahrscheinlichkeit, dass der linke Knoten erreicht wird, ϵ_1 ; d.h. $P(A) = \epsilon_1$. Nun wird *zusätzliche* Information offenbart, nämlich das Ereignis B, I ist erreicht worden. Wie muss Spieler 2 dieses Ereignis berücksichtigen in der Berechnung von $P(A|B)$?
Nun, genau nach Bayes Formel: die Wahrscheinlichkeit von A *nachdem* I erreicht worden ist, ist nunmehr $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2}$.

Da $P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$ und
$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|D) \cdot P(D)$
lautet Bayes Formel allgemein:

$$\boxed{P(A|B) \;=\; \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A)+P(B|D)\cdot P(D)}}$$

wobei $A \cup D = B$.

Typische Anwendung der Bayesianischen Regel:
(Medizinische) Testergebnisse und ihre Interpretation

Beispiel: Es sei bekannt, dass 1% der Studierenden an der Krankheit AKDS (Acquired Klausur Deficiency Syndrome) leiden, die verhindert, dass sie je ihre Diplomklausuren erfolgreich bestehen können. Es gibt jedoch einen ganz hervorragenden Test - die Mikro-Vordiplomsklausur (!) - , der bereits 100000 Mal angewendet wurde. Er ist zu 99% korrekt; d.h. 99 von 100 AKDS-Kranken identifiziert er positiv (indem er sie durchfallen lässt!) und 99 von 100 Nicht-AKDS-Kranken identifiziert er negativ (indem sie 'durchkommen'). Sie sind nun in der Mikro-Klausur leider hängengeblieben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie unter AKDS leiden?

Da der Test 'Mikroklausur' immer zu 99% korrekt ist, möchte man meinen, dass die Wahrscheinlichkeit - leider - bei 99% liegt. Dies ist jedoch völlig irreführend und darauf hat Bayes schon sehr früh hingewiesen!

Von 100000 getesteten Studierenden haben 1000 AKDS. Von diesen 1000 testen 990 in der Mikroklausur 'positiv' (fallen durch). *Andererseits* testen auch 1% der 99000 Gesunden, also 990, in der Mikro-Klausur 'positiv'; d.h. von 1980 positiven Tests sind nur 980 AKDS-Kranke! D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass sie *nach* positivem Test AKDS haben ist $\frac{990}{1980} = 0.5$!!

Diese Argumentation folgt genau Bayes' Formel:

$$
\begin{aligned}
P(AKDS|'positiv') &= \frac{P(AKDS\ und\ 'positiv')}{P(\text{'positiv'})} \\
&= \frac{P('positiv'|AKDS)\cdot P(AKDS)}{P('positiv'|AKDS)\cdot P(AKDS)+P('positiv'|\neg AKDS)\cdot P(\neg AKDS)} \\
&= \frac{0.99\cdot 0.01}{0.99\cdot 0.01+0.01\cdot 0.99} = 0.5
\end{aligned}
$$

'Beliefs' sind also *bedingte* Wahrscheinlichkeiten über Knoten in Informationsmengen eines Spielers. Sie geben die Einschätzung der Spielsituation durch den Spieler *gegeben*, dass diese Informationsmenge erreicht wurde, wieder.

Ein *System* von 'beliefs' ordnet jeder Informationsmenge (jedes Spielers) einen 'belief' zu:

$$\begin{array}{rccl} \mu \ : & H & \rightarrow & \Delta \\ & h & \mapsto & \mu(h) \\ & x \in h & \rightarrow & \mu(h(x)) = \mu(x) \end{array}$$

Eine *Strategienkombination* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ ordnet jeder Informationsmenge (jedes Spielers) eine dort zulässige Entscheidung zu:

$$\begin{array}{rcccl} \sigma \ : & H & \rightarrow & A & \\ & h & \mapsto & \sigma_i(h) & i = 1, 2, \text{ je nachdem ob} \\ & & & & h \in H_1 \text{ oder } h \in H_2. \end{array}$$

Ein Paar (σ, μ) heißt auch *assessment*. Ein assessment lässt die eindeutige Berechnung eines erwarteten Nutzens für jeden Spieler an *jeder* Informationsmenge zu:

$$h \in H \quad \text{und} \quad h \in H_i \ : \ i(h)$$

$$U_{i(h)}\Big(\sigma \mid h, \mu(h)\Big)$$

Ein *sequentielles Gleichgewicht* ist nunmehr definiert als ein assessment, das bestimmten Forderungen genügt. Ein sequentielles Gleichgewicht ist also nicht nur - wie von Gleichgewichtsbegriffen sonst gewohnt - durch ein Strategientupel gegeben, sondern *zusätzlich* auch durch ein System von 'beliefs'. Die Rolle von 'beliefs' *explizit* zu machen ist das Hauptverdienst dieser Definition und der durch sie möglichen Analysetechnik. (Eine fast genau äquivalente Formulierung, in der 'beliefs' nur *implizit* vorkommen, ist Selten's (1975) *trembling-hand*-Verfeinerung des Nash-Gleichgewichtes).

1. Forderung: Sequentielle Rationalität

Ein assessment (σ, μ) heißt *sequentiell rational*, falls für jede Informationsmenge h gilt:

$$U_{i(h)}\Big(\sigma \mid h, \mu(h)\Big) \geq U_{i(h)}\Big((\sigma'_{i(h)}, \sigma_{-i(h)}) \mid h, \mu(h)\Big) \text{ für alle } \sigma'_{i(h)} \in A_h$$

d.h. jeder Spieler i maximiert an jeder Informationsmenge $i(h)$ seinen erwarteten Nutzen gegeben seine 'beliefs'.

2. Forderung: Konsistenz (der 'beliefs')

Ein assessment (σ, μ) heißt *konsistent*, falls $(\mu, \sigma) = \lim_{n\to\infty}(\sigma^n, \mu^n)$, wobei für alle n, σ^n vollständig gemischte Strategien sind; d.h. $\sigma_i^n(a_i|h) > 0$ für alle $a_i \in A_h$ und somit die Wahrscheinlichkeit $P^{\sigma^n}(x) > 0$ für jeden Knoten x. Damit ergeben sich *sämtliche* 'beliefs' nach Bayes' Regel zu $\mu^n(x) = \frac{P^{\sigma^n}(x)}{P^{\sigma^n}(h(x))}$, da $P^{\sigma^n}(h(x)) \neq 0$ für alle $h \in H$.

Definition: Ein sequentielles Gleichgewicht ist ein assessment (σ, μ), das sequentiell rational und konsistent ist.

Bemerkung: $(\sigma,\ \mu)$ selbst muss nicht unbedingt ein vollständig gemischtes σ enthalten! Der Limes kann für einige Informationsmengen 0 sein. Die Bedingung sagt nur, dass ein konsistentes assessment zumindest als *Grenzwert* vollständig gemischter Strategien und zugehöriger beliefs gewonnen werden kann.

2.3.3 Sequentielle Gleichgewichte des 'Alternating-offers'-Spieles

Wir benötigen:

i) Strategien für Spieler 1, 2_h, 2_n und

ii) beliefs von Spieler 1 über den *Typ* von Spieler 2 (2_h oder 2_n)

Definition: Eine *'Vorgeschichte'* (history) ist eine Folge von Vorschlägen und Antworten; z.B.

$h = (x^0, N, x^1, N, \cdots, x^T, N)$ oder $h' = (x^0, N, x^1, N, \cdots, x^T, N, x^{T+1})$

Definition: Ein *System von beliefs* ist eine Funktion

$$\begin{array}{rcccl} P_h : & H_1 & \rightarrow & [0,1] & \\ & h & \mapsto & P_h(h) & \approx \text{Wahrscheinlichkeit für Spieler 1,} \\ & & & & \text{es nach } h \text{ mit } 2_h \text{ zu tun zu haben.} \end{array}$$

H_1 = Menge der Vorgeschichten (Informationsmengen), nach denen Spieler 1 am Zug ist.

Forderung: Ein *sequentielles Gleichgewicht* $\big((\sigma_1, P_h), \sigma_{2_h}, \sigma_{2_n}\big)$ muss folgenden Forderungen genügen:

Sequentielle Rationalitätsforderung:

i) $\sigma_1(h)$ ist optimale Entscheidung von 1 an $h \in H_1$, gegeben σ_{2_h} und σ_{2_n} und P_h.

ii) $\sigma_{2_h}(h)$ resp. $\sigma_{2_n}(h)$ ist optimale Entscheidung von 2_h resp. 2_n an $h \in H_{2_h}$ resp. H_{2_n} gegeben σ_1

Konsistenz:

Sei $h = (x^0, N, x^1, N, \cdots, x^T, N)$, T ungerade und $h' = (x^0, N, x^1, N, \cdots, x^{T+1}, N, x^{T+2})$

i) Falls $\sigma_{2_h}(h, x^{T+1}) = \sigma_{2_n}(h, x^{T+1}) = N$ und $\sigma_{2_h}(h, x^{T+1}, N) = \sigma_{2_n}(h, x^{T+1}, N) = x^{T+2}$, dann muss gelten $P_h(h') = P_h(h)$; d.h. Spieler 1 kann nichts dazulernen.

ii) Falls $\sigma_{2_h}(h, x^{T+1}) = N$ und $\sigma_{2_h}(h, x^{T+1}, N) = x^{T+2}$ *und* $\sigma_{2_h} \neq \sigma_{2_n}$
oder
$\sigma_{2_n}(h, x^{T+1}) = N$ und $\sigma_{2_n}(h, x^{T+1}, N) = x^{T+2}$ *und* $\sigma_{2_n} \neq \sigma_{2_h}$
dann gilt $P_h(h') \in \{0, 1\}$

iii) Falls $\sigma_{2_h}(h, \sigma_1(h)) = \sigma_{2_n}(h, \sigma_1(h)) = J$ und x^{T+2} wird (dennoch) beobachtet, so kann sich 1 seinen belief frei wählen.

iv) $P_h(h) = 0$ für $h \in H_1 \;\Rightarrow\; P_h(h') = 0$ für alle Fortsetzungen von h
$P_h(h) = 1$ für $h \in H_1 \;\Rightarrow\; P_h(h') = 1$ für alle Fortsetzungen von h

iv) besagt, dass 1 eine einmal vorgenommene “Identifizierung” des Gegenspielers nie mehr ändert; d.h. nach “Identifikation” wird ein Teilspiel mit *vollkommener* Information erreicht, in dem 1 entweder gegen 2_n oder 2_h spielt. Dies ist ein Rubinstein-Spiel im Sinne des vorigen Kapitels und motiviert folgende

Zwischenbemerkung: Das Gleichgewicht im Spiel mit vollkommener Information zwischen 1 und 2_h (resp. 2_n) ist das relevante Teilspiel, wenn Spieler 1 Spieler 2 "identifiziert" hat bzw. zu einem belief $P_h(h) = 1$ resp. $P_h(h) = 0$ gekommen ist. Es gelten dieselben Überlegungen wie im früheren Abschnitt bei der Analyse des Rubinstein-Spieles.

Im Gleichgewicht schlägt Spieler 1 immer $(\bar{x_1}, 1 - \bar{x_1})$ vor und 2_h schlägt immer $(\bar{x_2}, 1 - \bar{x_2})$ vor, wobei für die Vorschläge wiederum gelten muss, dass Spieler 1 zwischen $\bar{x_2}$ und $\bar{x_1} - c_1$ indifferent sein muss und 2_h zwischen $1 - \bar{x_2} - c_h$ und $1 - \bar{x_1}$.

Da die Nutzenfunktionen nun aber $U_1(x_1, t) = x_1 - c_1 \cdot t$ und $U_{2_h}(1 - x_1, t) = 1 - x_1 - c_h \cdot t$ sind, bedeutet dies $(t = 1)$, dass $\bar{x_2} = \bar{x_1} - c_1$ (falls $\bar{x_1} \geq c_1$!) gelten muss und $1 - \bar{x_1} = 1 - \bar{x_2} - c_h$ (falls $1 - \bar{x_2} \geq c_h$!).

Falls $\bar{x_1} < c_1$ oder $1 - \bar{x_2} < c_h$, so ist $\bar{x_2} = 0$ resp. $1 - \bar{x_1} = 0$ zu setzen.

Klar: Die Qualifikationen $\bar{x_1} \geq c_1$ resp. $1 - \bar{x_2} \geq c_h$ sind bindend, da ohne sie die Gleichungen für $c_1 < c_h$ *nicht* lösbar sind:
$\bar{x_2} = \bar{x_1} - c_1$ und $\bar{x_2} = \bar{x_1} - c_h$ kann nicht *gleichzeitig* gelten!.

Das System hat aber mit den Qualifikationen eine *eindeutige* Lösung, diese ist

$(\bar{x_1}, 1 - \bar{x_1}) = (1, 0)$; d.h. 1 verlangt alles!

$(\bar{x_2}, 1 - \bar{x_2}) = (1 - c_1, c_1)$; d.h. 2_h verlangt gerade, was 1 bei Ablehnung an Kosten *verlieren* würde, um anschließend 'alles' zu bekommen.

Es gilt $\bar{x_2} = \bar{x_1} - c_1$ zu erfüllen, da $\bar{x_1} = 1 > c_1$:

$$1 - c_1 = 1 - c_1$$

Und da $1 - \bar{x_2} = c_1 < c_h$, muss auch $1 - \bar{x_1} = 0$ gelten.

Im Spiel zwischen 1 und 2_n ergibt sich analog:

$$\left.\begin{array}{l} (\bar{x_1}, 1 - \bar{x_1}) = (c_n, 1 - c_n) \\ (\bar{x_2}, 1 - \bar{x_2}) = (0, 1) \end{array}\right. \quad \text{da } c_1 > c_n$$

Für das Gleichgewicht gilt:

Lemma 1: In einem SGG gilt für alle h mit $0 < P_h(h) < 1$

i) $\sigma^*_{2_h}(h) = \sigma^*_{2_n}(h) = N \quad \Rightarrow \quad \sigma^*_{2_h}(h, N) = x = \sigma^*_{2_n}(h, N)$

ii) $\sigma^*_{2_n}(h) = J \quad \Rightarrow \quad \sigma^*_{2_h}(h) = J$
(folglich gilt auch: $\sigma^*_{2_h}(h) = N \quad \Rightarrow \quad \sigma^*_{2_n}(h) = N$)

iii) $\sigma^*_{2_h}(h) = J$ und $\sigma^*_{2_n}(h) = N$ für $h = (x^0, N, \cdot\cdot\cdot, x^T)$
$\Rightarrow \quad \sigma_1(h, N, \sigma_{2_n}(h, N)) = J$ und $x^T_1 - c_h \leq \sigma_{2_n}(h, N)_1 \leq x^T_1 - c_n$

Bew.: i) Angenommen, $\sigma^*_{2_h}(h, N) = y$ und $\sigma^*_{2_n}(h, N) = z$ mit $z \neq y$.

$$\Rightarrow \text{(Konsistenz)} \;\; P_h(h, N, x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ \\ 0 & \text{falls } x = z \end{cases}$$

und dieser belief ändert sich nach Vorgeschichte $h' = (h, N, x)$ *nie* mehr!
$\Rightarrow$ Falls $x = y$ und $\sigma_1(h') = N$ folgt (für das nunmehrige Spiel mit vollkommener Information zwischen 1 und 2_h), dass Spieler 1 mit (1, 0) antworten wird, was Spieler 2_h annehmen muss. (1 hat Wahl zwischen y_1 (Annahme) und $1 - c_1$ (Ablehnung))
Falls $x = z$ und $\sigma_1(h') = N$ folgt (für das nunmehrige Spiel mit vollkommener Information zwischen Spieler 1 und 2_n), dass Spieler 1 $(c_n, 1 - c_n)$ vorschlägt und Spieler 2_n dies sofort annimmt. (Spieler 2_n ist gerade indifferent zwischen Annahme und Ablehnung, da Ablehnung ihn in die Lage versetzen würde (0, 1) zu fordern, allerdings unter zusätzlichen Kosten von c_n !).
Da $\underbrace{c_n - c_1}_{\text{Nettoauszahlung für Spieler 1 bei Annahme von } (c_n, 1-c_n) \text{ eine Periode später}} < 0 \leq z_1$ wird Spieler 1 z akzeptieren!

d.h. falls $x = z$ muss $\sigma_1(h') = J$ gelten.
Würde 1 nun auch y im Falle $x = y$ akzeptieren, so würde einer der beiden Typen des Spielers 2 profitabel von seiner Strategie abweichen können, indem er auch auf denjenigen Vorschlag umschwenkt, der ihm einen höheren Anteil bietet (2_h falls $y_2 < z_2$ und 2_n falls $y_2 > z_2$), da 1 ja immer animmt!

$\Rightarrow$ 1 muss $x = y$ ablehnen: $\sigma_1(h') = N$ für $x = y$.
Dann erhält Spieler 2_h aber 0 (eine Periode später). Da $0 \leq z_2$ (was 2_h

erhält, wenn er 2_n imitiert und z vorschlägt, das von Spieler 1 akzeptiert wird!), kann es nicht optimal sein, für 2_h y vorzuschlagen. Widerspruch!

ii) Angenommen, $\sigma^*_{2_n}(h) = J$ und $\sigma^*_{2_h}(h) = N$
$\Rightarrow$ Spieler 1 schließt auf Spieler 2_h: $P_h(h, N) = 1$
$\Rightarrow$ Lösung $(1 - c_1, c_1)$, was 2_h *netto* $c_1 - c_h < 0$ bringt.
Würde er $\sigma^*_{2_h}(h) = J$ spielen, würde er aber zumindest 0 bekommen (was immer der Vorschlag war).

iii) Dies ist eine 'Sortierbedingung', die besagt, dass wenn 2_h annimmt und 2_n ablehnt, dann *muss* 1 das nächste Angebot von 2_n annehmen und es kann weder einen Anreiz für 2_h geben, 2_n zu imitieren, noch umgekehrt:
Falls 2 ablehnt und das Angebot $\sigma_2(h, N)$ macht, so schließt Spieler 1 auf 2_n, was bedeutet, dass er $\sigma_2(h, N)$ annehmen muss (weil er sonst im Fortsetzungsspiel mit vollkommener Information gegen 2_n 0 erhält!); d.h.

$$\sigma_1(h, N, \sigma_{2_n}(h, N)) = J.$$

(a) Würde 2_h das Angebot von 2_n kopieren (und vorher abweichend von seiner Strategie auch ablehnen), so würde er (eine Periode später) $1-\sigma_{2_n}(h, N)_1$ erhalten bzw. *netto* $1-\sigma_{2_n}(h, N)_1 - c_h$. Dies muss folglich weniger sein als $1 - x_1^T$, was er erhält, wenn er den Vorschlag von 1 annimmt; d.h.

$$1 - x_1^T \;\geq\; 1 - \sigma_{2_n}(h, N)_1 - c_h \quad\Leftrightarrow\quad x_1^T - c_h \;\leq\; \sigma_{2_n}(h, N)_1$$

(b) Ebenso muss $1 - x_1^T \;\leq\; 1 - \sigma_{2_n}(h, N)_1 - c_n$ gelten, damit 2_n tatsächlich besser fährt mit seiner Ablehnung. Letzteres ist äquivalent zu

$$\sigma_{2_n}(h, N)_1 \;\leq\; x_1^T - c_n. \qquad\qquad \textbf{q.e.d.}$$

Lemma 1 gilt für *alle* sequentiellen Gleichgewichte des Spieles und solche gibt es - leider - viele. Dies liegt vor allem an der Tatsache, dass Spieler 1's beliefs nach einer Abweichung von GG-Strategien keinerlei Beschränkung unterliegen. 1 kann sich in einer solchen Situation, den ihm 'genehmsten' belief aussuchen, der z.B. in der 'optimistischen ' Annahme besteht, es nach einer Abweichung *immer* mit 2_h zu tun zu haben (und deshalb bei $P_h(h) = 1$ zu bleiben), was ihm das 'Recht' gibt, im weiteren Verlauf (1, 0) zu verlangen.

Es gilt: (sei $c_1 + c_n + c_h < 1$)

Satz 2: i) Falls $P_h > \frac{2c_1}{c_1+c_h}$, so ist die erwartete Auszahlung für Spieler 1 in einem sequentiellen Gleichgewicht mindestens $P_h + (1 - P_h)(1 - c_h - c_1)$.

ii) Falls $P_h \leq \frac{2c_1}{c_1+c_h}$, so gibt es für jedes $x^* \in [c_1,\ 1 - c_1 + c_h]$ ein sequentielles Gleichgewicht, in dem Spieler 1 $(x^*,\ 1 - x^*)$ in Periode 0 vorschlägt und 2_h und 2_n dies sofort annehmen. ('Pooling-Gleichgewicht', die Typen werden nicht offenbart).

iii) Falls $\frac{c_1+c_n}{c_1+c_h} \leq P_h \leq \frac{2c_1}{c_1+c_h}$, so gibt es für jedes $x^* \geq c_h$ ein sequentielles Gleichgewicht, in dem 1 $(x^*,\ 1-x^*)$ in Periode 0 vorschlägt, was 2_h akzeptiert und 2_n ablehnt. 2_n macht dann den Vorschlag $(x^* - c_h,\ 1 - x^* + c_h)$, den 1 akzeptiert. ('Trenn-Gleichgewicht', die beiden Typen handeln unterschiedlich.)

Auf den Beweis (siehe Osborne/Rubinstein S. 99-104) verzichten wir hier im Detail. Der Beweis von Teil i) folgt der Argumentation des Eindeutigkeitsbeweises für das Spiel mit vollkommener Information:
Bezeichne M_1 das Infimum des Gleichgewichtsauszahlungen für Spieler 1 und M_{2_h} das Supremum der GG-Auszahlungen für Spieler 2_h im *'Teilspiel'* (x^0, N), in dem 2 als erster ein Angebot macht und 1 (nach wie vor) den belief $P_h(x^0, N) = P_h$ hat.

a) Dann muss gelten:

$$M_1 \ \geq\ P_h \cdot (1 - \max\{M_{2_h} - c_h,\ 0\}) \ +\ (1 - p_h) \cdot (1 - c_h - c_1 - \max\{M_{2_h} - c_h,\ 0\})$$

Angenommen, 1 schlägt $(x,\ 1 - x)$ vor mit $(1 - x) > \max\{M_{2_h} - c_h,\ 0\}$. Lehnt 2_h ab, so auch 2_n (Lemma 1, ii)) und beide Typen machen dasselbe Gegenangebot (Lemma 1, i)). In diesem Spiel kann 2_h höchstens M_{2_h} erhalten, so dass er $(x, 1 - x)$ unter der gemachten Annahme akzeptieren muss.

Lehnt nur 2_n ab, so macht er ein Gegengebot $(y, 1 - y)$ mit $y \geq x - c_h$, das 1 annimmt (Lemma 1, iii)).

$\Rightarrow$ Macht 1 ein Angebot $(x, 1-x)$ mit $(1-x)$ beliebig nahe an $\max\{M_{2_h} - c_h, 0\}$, so kann er sicher sein, dass 2_h annimmt (2_h hat aber die Wahrscheinlichkeit P_h) und er somit $1 - \max\{M_{2_h} - c_h,\ 0\}$ erhält. Falls aber (mit WS $1 - P_h$) 2_n sein Widerpart ist und ablehnt, so erhält er mindestens $\underbrace{1 - \max\{M_{2_h} - c_h,\ 0\} - c_h}_{y} - c_1$ eine Periode später.

b) Es muss gelten $M_{2_h} \leq 1 - (M_1 - c_1)$

Angenommen 1's Vorschlag in 0 ist von 2 (beide Typen) abgelehnt worden, so dass 2 am Zug ist. Lemma 1 i) sagt, dass 2_h und 2_n dasselbe Angebot machen. In diesem 'Teilspiel' kann sich 1 mindestens $M_1 - c_1$ sichern, nämlich dann, wenn er ablehnt (was seinen belief nicht ändern kann) und sich anschließend (definitionsgemäß) mindestens M_1 sichert. Daraus folgt

$$M_{2-h} \ \leq \ 1 - (M_1 - c_1).$$

c) Falls $P_h > \frac{2c_1}{c_h + c_1}$ implizieren obige beide Ungleichungen, dass $M_1 = P_h + (1 - P_h)(1 - c_h - c_1)$. Zunächst folgt aus $P_h > \frac{2c_1}{c_h + c_1}$, dass $\max\{M_{2_h} - c_h,\ 0\} = 0$ gelten muss, da sonst a) und b) nicht gleichzeitig gelten können. Das heißt aber nach a), dass

$$M_1 \ \geq \ P_h + (1 - P_h)(1 - c_h - c_1)$$

Die Gleichheit weist man nach, indem man zeigt, dass es ein sequentielles GG mit erwarteter Auszahlung $P_h + (1 - P_h)(1 - c_h - c_1)$ tatsächlich gibt. (siehe Osborne/Rubinstein Table 5.1). Es ist dies das Trenn-Gleichgewicht aus Teil iii) der Behauptung des Satzes mit $x^* = 1$, da $(1, 0)$ von 2_h akzeptiert wird (erwartete Auszahlung $P_h \cdot 1$) und von 2_n abgelehnt wird, gefolgt vom Gegenvorschlag $(1 - c_h, c_h)$, den 1 annimmt (erwartete Auszahlung $(1 - P_h)(1 - c_h - c_1)$, welches *nur* von der Bedingung $\frac{c_1 + c_n}{c_1 + c_h} \leq P_h$ abhängt, *nicht* aber von $P_h \leq \frac{2c_1}{c_1 + c_h}$. **q.e.d.**

Diskussion:

- Wenn es also - gemessen an relativen Verhandlungskosten - hinreichend wahrscheinlich ist, einen schwachen Verhandlungspartner zu haben , d.h.

$$P_h > \frac{2}{\frac{c_h}{c_1} + 1}$$

so kann sich 1 umso mehr garantieren, je *kleiner* c_h ist:

$$M_1 \geq 1 - c_h - c_1$$

D.h. bei einem *sehr* schwachen Partner 2_h mit $c_h >> c_1$ kann 1 wenig oder gar nichts holen!
Dies folgt aus dem Umstand, dass je kleiner c_h ist, desto "teurer" ist es für den Typ c_n, sich von c_h in für diesen nicht profitabel imitierbarer Weise zu "trennen". Er muss 1 mehr bieten, damit 2_h nicht mitziehen kann!

- Ist P_h jedoch zu klein für obiges Argument; d.h.

$$P_h < \frac{2}{\frac{c_h}{c_1} + 1}$$

so kann insbesondere für niedrige Verhandlungskosten fast jede Aufteilung $(x, 1-x)$ mit $x \geq c_1$ ein GG-Ergebnis sein!
Selbst wenn P_h nahe 0, d.h. fast sicher ein starker Partner 2_h zu erwarten ist, kann 1 fast alles bekommen: z.B. $P_h = 10^{-20}$ und $c_1 - c_n = 0.99 \quad \Rightarrow (ii) \quad (0.99, 0.01)$ ist GG-Ergebnis oder
$P_h = 0.1$ und $\frac{c_1+c_n}{c_1+c_h} < 0.1 \quad \Rightarrow (iii) \quad (1, 0)$ ist GG-Ergebnis.
Dies liegt vor allem daran, dass die Gleichgewichte aus Teil (ii) und (iii) des Satzes 2 von Strategien gestützt werden, die 1 nach einer Abweichung vom GG *immer* den belief $P_h = 1$ wählen lassen; d.h. 1 nimmt dann an, den schwachen Typ von 2 zum Partner zu haben und danach (1, 0) zu fordern. Dies gibt ihm die Möglichkeit, glaubwürdig "hart" zu verhandeln.

- Im Spiel mit einseitig unvollkommener Information erfolgt eine Einigung im Gleichgewicht also nicht immer sofort, aber *spätestens* mit einer Periode Verzögerung (zumindest in den Gleichgewichten, die Satz 2 benennt).

- Es gibt auch sequentielle Gleichgewichte, in denen die Verzögerung noch größer ist, doch wirken sie etwas konstruiert, da sie sich einer "trigger-strategy"-ähnlichen Methode über die ersten Nichteinigungsphasen bedienen:
Sei $P_h < \frac{2c_1}{c_1+c_h} = \frac{2}{\frac{c_h}{c_1}+1}$ und seien $x < y < z$ drei Werte aus dem Intervall $[c_1, 1 - c_1 + c_h]$, die zusätzlich $z - y > c_1 - c_n$ erfüllen. Sei $\bar{t}$ *gerade* Zahl. Nach Satz 2 ii) gibt es jeweils ein sequentielles GG mit Auszahlungen $(x, 1-x)$, $(y, 1-y)$ und $(z, 1-z)$.
Spieler 1 verlangt nun bis einschließlich zu Periode $\bar{t}$ die Aufteilung (1, 0) und

lehnt jeden anderen Vorschlag ab. Die beiden Typen von Spieler 2 verlangen bis zu $\bar{t}$ ihrerseits (0, 1) und lehnen jede andere Aufteilung ab.
Von Periode $\bar{t}+1$ an benutzen die Spieler die Strategien, die das GG $(y, 1-y)$ ergeben, falls keinerlei Abweichungen aufgetreten sind.

Abweichungen werden wie folgt bestraft:

(a) Falls Spieler 1 in $t \leq \bar{t}$ $(w, 1-w) \neq (1, 0)$ vorschlägt, so wird von $t+1$ an das Gleichgewicht, das sofort zur Einigung auf $(x, 1-x)$ führt, gespielt.
Da $x < y$ ist dies "schlecht" für 1 und falls er überhaupt eine Abweichung erwägt, so solle er *gleich* in der 1. Periode abweichen und zwar mit dem bestmöglichen Vorschlag $(x, 1-x)$, der ihm x als Auszahlung bringt.
Aber wenn
$$x \;<\; y - c_1 \cdot \bar{t} \quad \text{d.h.} \quad \bar{t} \;\leq\; \frac{x-y}{c_1}$$
so ist eine solche Abweichung nicht profitabel.

(b) Falls Spieler 2 einen Vorschlag $(w, 1-w) = (0, 1)$ macht, so ändert Spieler 1 seinen belief *nicht*, und von der nächsten Periode an werden die Strategien, die sofort zur Einigung auf $(z, 1-z)$ führen aktiviert.

Da $1-z \;<\; 1-y$ ist dies "schlecht" für 2 und falls er überhaupt eine Abweichung erwägt, dann *gleich* beim ersten Vorschlag und zwar mit dem bestmöglichen Vorschlag $(z-c_1,\; 1-z-c_1)$, den 1 sofort annimmt. D.h. 2_h erhält $1-z+c_1-c_h$ und 2_n erhält $1-z+c_1-c_n$ (den 1. Vorschlag von 1 hatte 2 ja abgelehnt). Damit Abweichen für beide Typen nicht lohnt, muss gelten:
$$1-z-c_1+c_h \;<\; 1-y-\bar{t}\cdot c_h \quad \Leftrightarrow \quad \bar{t} \;<\; \frac{z-y-c_h-c_1}{c_h} \qquad (\text{Typ } 2_h)$$
und
$$1-z+c_1-c_n < 1-y-\bar{t}\cdot c_n \quad \Leftrightarrow \quad \bar{t} < \frac{z-y+c_n-c_1}{c_n} = \frac{(z-y)-(c_1-c_n)}{c_n}$$
Da $z-y \;>\; c_1-c_n$ existiert ein solches $\bar{t} > 0$, das bei geringen Verhandlungskosten c_n resp. c_h auch "groß" sein kann!!

Fazit: Es gibt also nicht nur "viele" verschiedene sequentielle Gleichgewichte, was die gleichgewichtige *Aufteilung* betrifft, sondern auch viele verschiedene Gleichgewichte, was den Zeitpunkt der Einigung betrifft.

2.3.4 Eine Verfeinerung des sequentiellen Gleichgewichtes

Hauptgrund für die Multiplizität sequentieller Gleichgewichte ist die Tatsache, dass beliefs abseits des GG's keinerlei Beschränkung unterliegen. Man ist daher das Nichteindeutigkeitsproblem angegangen, indem man "sinnvolle" Beschränkungen für die beliefs nach eigentlich nicht vorgesehenen Ereignissen formulierte. Dies hat Anlass zu vielerlei Verfeinerungskonzepten gegeben, deren Namensgebung von 'perfect sequential' bis 'divine' reicht.
Im gegenwärtigen Kontext ist es in bestimmten Fällen abseits des Gleichgewichtes unplausibel, dass 1 den belief $P_h = 1$ wählt (wie in *allen* Gleichgewichten von Satz 2 ii) und iii) geschieht!), nämlich dann, wenn 2 einen Vorschlag $(x, 1-x)$ von 1 ablehnt und anschließend $(y, 1-y)$ vorschlägt mit $1-y \in (1-x+c_n,\ 1-x+c_h)$. Spieler 1 sollte nun den belief $P_h = 0$ haben; d.h. mit Sicherheit von Typ 2_n ausgehen!

Begründung: Hätte 2 akzeptiert, so hätte er $1-x$ erhalten. Nimmt Spieler 1 seinen Gegenvorschlag $(y,\ 1-y)$ an, so erhält er $1-y$ eine Periode später, also $1-y-c_h$, falls er 2_h ist, und $1-y-c_n$, falls er 2_n ist.
Da $1-y\ <\ 1-x+c_h$ bzw. $1-y-c_h\ <\ 1-x$ lohnt ein solcher Vorschlag für 2_h nicht, wohl aber für 2_n, da

$$1-y\ >\ 1-x+c_n \quad \text{bzw.} \quad 1-y-c_n\ >\ 1-x.$$

Wenn 1 also nach einer "Rationalisierung" (d.i. eine rationale Begründung) der Abweichung sucht, kann er also nur zu dem Schluss kommen, dass eine *solche* Abweichung nur für Typ 2_n Sinn macht.
Osborne und Rubinstein (1990, Kap. 5.5) nennen beliefs dementsprechend *rationalisierend* (rationalizing), falls sie folgender Bedingung genügen:

Def.: $P_h(h)$ (von Spieler 1) ist rationalisierend, falls für alle h mit $P_h(h) < 1$ gilt:

a) $\sigma_{2_h}(h,x) = \sigma_{2_n}(h,x) = N \quad$ und
$\sigma_{2_h}(h,x,N) = \sigma_{2_n}(h,x,N) = \bar{x} \quad$ mit $\bar{x}_2 \in (x_2 + c_n,\ x_2 + c_h)$
$\Rightarrow \quad P_h(h,x,N,\bar{x}) = 0$

b) $\sigma_{2_h}(h,x) = \sigma_{2_n}(h,x) = N \quad$ und
$\sigma_{2_h}(h,x,N) = \sigma_{2_n}(h,x,N) = \bar{x} \quad$ mit $\bar{x}_2 > x_2 + c_h$
$\Rightarrow \quad P_h(h,x,N,\bar{x}) = P_h(h)$

Die Bedingung b) ist motiviert von der Tatsache, dass im Falle $\bar{x}_2 > x_2 + c_h$ *beide* Typen von 2 besser dran wären, wenn ihr Gegenvorschlag $\bar{x}$ angenommen wird, im Vergleich zu ihrer eigenen Annahme von x. Die Situation ist nun also 'uninformativ' für Spieler 1 und er ändert daher seinen belief nicht (er ist genauso klug wie vor seinem Vorschlag x).

Ein *rationalisierendes* sequentielles Gleichgewicht ist nunmehr definiert als sequentielles Gleichgewicht mit rationalisierenden beliefs.

Diese zusätzliche Bedingung engt die Menge der Gleichgewichte in geradezu *drastischer* Weise ein. Es gibt nunmehr immer nur noch ein *einziges* (rationalisierendes) sequentielles Gleichgewichtsergebnis in unserem Modell!

Satz 3: Sei $0 < P_h < 1$. Dann existiert ein rationalisierendes sequentielles Gleichgewicht. In einem solchen Gleichgewicht gilt:

a) Falls $P_h > \frac{2c_1}{c_1+c_h}$, so findet Einigung in Periode 0 auf (1, 0) statt, falls 2 vom Typ 2_h ist, und Einigung in Periode 1 auf $(1 - c_h,\ c_h)$, falls 2 vom Typ 2_n ist.

b) Falls $\frac{c_1+c_n}{c_1+c_h} < P_h < \frac{2c_1}{c_1+c_h}$, findet Einigung in Periode 0 auf $(c_h,\ 1 - c_h)$ statt, falls 2 vom Typ 2_h ist, und Einigung in Periode 1 auf (0, 1), falls Spieler 2 vom Typ 2_n ist.

c) Falls $P_h < \frac{c_1+c_n}{c_1+c_h}$, so findet Einigung in Periode 0 auf $(c_n,\ 1 - c_n)$ statt.

Wir wollen diesen Satz nicht beweisen (siehe dazu Osborne/Rubinstein, p. 109ff.), sondern nur die erstaunliche 'cutting-power' dieser sehr partiellen Restriktion für beliefs hervorheben. Spieler 1 versucht nun, eine Abweichung von Spieler 2 zu "rationalisieren"; d.h. er befindet sich in der Situation, dass sein Vorschlag x abgelehnt wurde und er im Gegenzug mit $\bar{x}$ konfrontiert wurde, und fragt sich nun: Was hat $\bar{x}$ nach x zu bedeuten?
Falls $\bar{x}_2 \in (x_2 + c_n,\ x_2 + c_h)$ liest er dies als *Signal* von Spieler 2, dass jener 2_n sei (und konstruiert sich so eine konsistente 'story'). Doch ist dies wirklich besser, als *irgendeinen* belief zu wählen?
Wir befinden uns ja abseits des Gleichgewichtes und - gegeben die Gleichgewichtsstrategien - hatte 2 *keinen* Anreiz zu einer Abweichung! Die - natürlich zulässige - und

formal schön begründbare Restriktion ist also auch nicht so überzeugend. Sie unterstellt in gewisser Weise, dass wenn die Abweichung tatsächlich ein unvorhersehbarer 'Flüchtigkeitsfehler' war, dieser nur 2_n unterlaufen sein konnte, da er für 2_h zu kostspielig wäre (was jenen von 'Flüchtigkeit' in diesem Falle abhält).

Kapitel 3

Bargaining und Mechanism Design

3.1 Howard's Implementierung der Nash-Verhandlungslösung

Wir kehren zunächst noch einmal zur Nash-Verhandlungslösung und dem "Nash-Programm" zurück. Das Interesse am Rubinstein'schen 'Alternating-offers'-Spiel rührte von seiner eindeutigen Lösung des Verhandlungsproblems her und deren Beziehung zur Nash-Verhandlungslösung. Leider ist dieses Interesse nur im Falle vollkommen informierter Verhandlungspartner begründet, da - wie das letzte Kapitel zeigte - bei Vorliegen unvollständiger Informationen sowohl die Eindeutigkeit der Gleichgewichtslösung als auch deren Bezug zur Nash-Verhandlungslösung verloren geht.

Howard (1992, A Social Choice Rule and Its Implementation in Perfect Equilibrium, Journal of Economic Theory, 56, 142-159) hat durch einen anderen Zugang, dem sogenannten 'mechanism design', eine Verhandlungsprozedur gewonnen, die die Nash-Verhandlungslösung *exakt* (und nicht nur approximativ wie das Rubinstein-Spiel) umsetzt.

Er interpretierte die Nash-Verhandlungslösung $f^N(S, d)$ als eine "Social Choice Function"; d.h. als eine Funktion die jeder möglichen sozialen Gemeinschaft von Verhandlungspartner - in diesem Falle immer zwei - , die ein gegebenes Verhandlungsproblem haben könnte, genau eine Verhandlungslösung zuordnet.

Ursprünglich ist $f^N(S,\, d)$ definiert als Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f^N: & V & \to & I\!R^2 \\ & (S,\, d) & \mapsto & (s_1^*,\, s_2^*) \;=\; f^N(S,\, d) \end{array}$$

wobei S eine Menge von *Nutzen*allokationen darstellt, die durch Auswertung individueller Präferenzen über einer sozialen Alternativenmenge A, von denen genau eine zu implementieren ("wählen") ist, gewonnen wurde, z.B.

$$S \;=\; \Big\{(U_1(a),\, U_2(a)) \;\mid\; a \in A\Big\}$$

Im 'Divide-the-Dollar'-Problem war A durch $A = \Big\{(x, 1{-}x)|x \geq 0, 1{-}x \geq 0\Big\}$ gegeben.

Da ein S als Teil eines Verhandlungsproblems $(S,\, d)$ von *einem* Präferenztupel $(U_1,\, U_2)$ herrührt, *falls* A fix vorgegeben ist, kann man f^N auch als Abbildung auf einer Menge Υ von Präferenzprofilen $(U_1,\, U_2)$ auffassen:

$$(U_1,\, U_2) \xrightarrow{\sim} (S,\, d) \xrightarrow{f^N} (s_1^*,\, s_2^*) \;=\; \Big(U_1(a^*),\, U_2(a^*)\Big)$$

Howard begreift $f^N(S,\, d)$ als Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}^N: & \Upsilon & \to & A \\ & (U_1,\, U_2) & \mapsto & a^* \end{array}$$

wobei a^* der Bedingung $\Big(U_1(a^*),\, U_2(a^*)\Big) \;=\; f^N(S,\, d)$ genügt, d.h.
$\tilde{f}^N$ ordnet Paaren von Verhandlungspartnern (in Abhängigkeit von ihren Präferenzen) eine soziale Alternative a (z.B. eine Aufteilung des Dollars) als Verhandlungslösung oder - allgemeiner - soziale Entscheidung zu. Eine Abbildung, die dies tut, heißt auch 'Social Choice Function' (soziale Auswahlfunktion). Die Frage ist nun, ob es "Institutionen" gibt, die für jedes Paar von Individuen, die *innerhalb* der Institution rational miteinander interagieren, zur von der sozialen Auswahlfunktion als Ziel vorgegebenen Alternative *als Gleichgewicht* führen. Als Institution ist dabei ein Regelwerk zu verstehen, an das die Spieler gebunden sind, dem sie sozusagen von einem Planer unterworfen werden. Da der Planer die Präferenzen der Individuen nicht kennt, kann er ihnen kein

sozial sinnvolles Verhalten (dies ist natürlich von der Identität der Individuen abhängig) vorschreiben, sondern nur Regeln innerhalb derer sie zu agieren haben. Dieses 'Regelwerk' nimmt im folgenden die Gestalt einer *Spielform* (bzw. eines *Mechanismus*) an. Eine *Spielform* ist - grob gesprochen - die exakte Beschreibung eines Spieles *exklusive* der Auszahlungsfunktionen; d.h. eine Spielform beschreibt entweder in Normalform oder extensiver Form eine Spielstruktur, die durch die Angabe von Auszahlungen sofort zu einem vollständigen Spiel ergänzbar ist. Es handelt sich also im wesentlichen um die Angabe der Strategienräume (und Spielermenge). Dies - zusammen mit einem Gleichgewichts*konzept* - führt dann für das beliebige Präferenztupel aus Υ zur Bestimmung einer (oder mehrerer!) Gleichgewichtslösungen.
Howard (1992) gibt eine extensive Spielform vor, die er mit Hilfe des teilspielperfekten Gleichgewichtsbegriffes analysiert.

Spielform (Howard 1992):

Spielermenge: Spieler 1, 2 ; d.h. N = {1,2}

Strategienräume: $S_1 = A \times \{0,\ 1\}$ $\Big($z.B. $A = \Big\{(x,\ 1-x),\ x \geq 0,\ 1-x \geq 0\Big\}\Big)$

$S_2 = A \times [0,\ 1]$

extensive Form:

Stufe I: Spieler 1 wählt $a_1 \in A$

Stufe II: Spieler 2 wählt $a_2 \in A$ und $p \in [0,\ 1]$

Stufe III: 'Natur' beendet Spiel mit Nichteinigung mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$

Stufe IV: Spieler 1 wählt zwischen der Lotterie $p \cdot a_1$ und a_2. Das Ergebnis ist die Lösung.

Das teilspielperfekte Gleichgewicht führt für dieses Spiel, falls Spieler 1 die Nutzenfunktion $U_1(a)$ und Spieler 2 die Nutzenfunktion $U_2(a)$ besitzt, auf die Alternative a^*, die *identisch* mit der Nash-Verhandlungslösung ist; d.h.

$$\tilde{f}^N(U_1,\ U_2) \ = \ a^* \quad \text{und} \quad \Big(U_1(a^*),\ U_2(a^*)\Big) \ = \ (s_1^*,\ s_2^*)$$

$$\text{wobei} \ (s_1^*,\ s_2^*) \ = \ f^N(S,\ d) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} S = \Big\{\Big(U_1(a),\ U_2(a)\Big) \ \mid \ a \in A\Big\} \\ d = (0,\ 0) \end{array}$$

Zum Beweis:

a) Es ist klar, dass in einem GG auf Stufe *IV* $U_1(a_2) = p \cdot U_1(a_1)$ gelten muss; d.h. gegeben a_1 von Stufe *I* muss Spieler 2 $(a_2,\, p)$ so wählen, dass diese Indifferenz für 1 auf Stufe *IV* gilt.

b) Wählt Spieler 1 auf Stufe *I* a_1 so, dass $\big(U_1(a_1),\, U_2(a_1)\big) = (s_1^*,\, s_2^*) = f^N(S,\, d)$, so wählt Spieler 2 auf Stufe *II* $(a_2,\, p) = (a_1,\, 1)$ (als beste Antwort).

c) a_1 wie unter ii) zu wählen ist *beste* Wahl für Spieler 1 auf Stufe I. **q.e.d.**

Gegeben das Gleichgewichtskonzept (GGK) 'teilspielperfektes Gleichgewicht' liefert diese Spielform also für jedes Tupel $(U_1,\, U_2)$ eine Lösung a^* in Form der *gleichgewichtigen* Alternative; d.h. auch GGK kann aufgefasst werden als *Abbildung*

$$\begin{aligned} GGK : \quad \Upsilon \quad &\rightarrow \quad A \\ (U_1,\, U_2) \quad &\mapsto \quad a^* = GG(U_1,\, U_2) \end{aligned}$$

Die Spielform *implementiert* die social choice function $f^N(S,\, d)$ nun in dem Sinne, dass für alle $(U_1,\, U_2) \in \Upsilon$ gilt:

$$GG(U_1,\, U_2) = \tilde{f}^N(U_1,\, U_2) \,\Big(\cong f^N(S,\, d)\Big)$$

Zuvor schon hatte Moulin (1984, Implementing the Kalai-Smorodinsky Bargaining Solution, Journal of Economic Theory, 33, 32-45) eine Implementierung dieser Art von f^{KS}(S,d) gegeben.

In ihr wird zunächst das Recht, den ersten Vorschlag zu machen, "versteigert"; d.h. beide Spieler "bieten (benennen) eine Zahl $p_1, p_2 \in [0, 1]$. Der höhere Bieter i $(p_i \geq p_j)$ darf dann den ersten Vorschlag machen. Nimmt j an, so ist das Spiel zu Ende. Nimmt er jedoch nicht an, so kann er seinerseits einen Vorschlag machen. Lehnt i ihn ab, so ist das Spiel zu Ende und der status-quo d ist die Lösung. Nimmt i jedoch an, so wird zwischen dem Vorschlag von j und d mit Wahrscheinlichkeiten p_i und $(1-p_i)$ gelost. Die Realisation ist dann das Ergebnis und das Spiel zu Ende. Auf der letzten Stufe treten also die auf Stufe 1 bestimmten Gebote als Wahrscheinlichkeiten auf! Moulin zeigt, dass die Auszahlung im teilspielperfekten Gleichgewicht gerade der Kalai-Smorodinsky Lösung f^{KS}(S,d) entspricht.

Zum Beweis: Sei $u_i(d) = 0$ und $u_i(h(S,d)) = 1$ für $i = 1, 2$, d.h. $f^{KS}(S,d)$ maximiert die Rawls'sche Wohlfahrtsfunktion $min\{u_1, u_2\}$. Und sei A wiederum gegeben durch $A = \{(x, 1-x), x \geq 0, 1-x \geq 0\}$

a) Auf der letzten Stufe, nachdem j den Vorschlag von i abgelehnt hat, wird j natürlich $a_j := (h_j(S,d), 0) = (1, 0)$ vorschlagen, da i indifferent zwischen Annahme und Ablehnung ist; er erhält in beiden Fällen 0, da auch $d = (0, 0)$. j kann dann (i nimmt an) mit der Auszahlung p_i rechnen.

b) Um also zu verhindern, dass j seinen Vorschlag a_i ablehnt, muss i dem j mindestens p_i bieten. D.h. i's Vorschlag muss das Problem

$$\max u_i(a) \quad u.NB. \quad u_j(a) \geq p_i$$

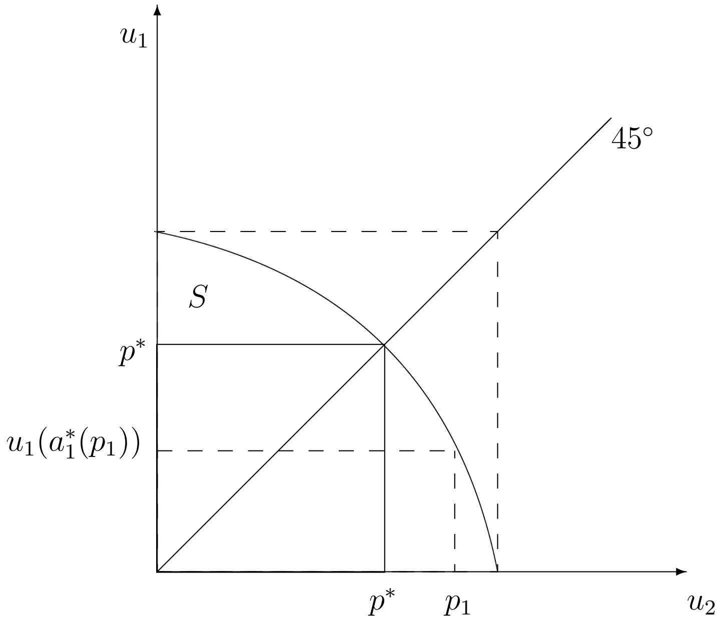
lösen. Bezeichne $a_i^*(p_i)$ die Lösung dieses Problems.

c) Auf Stufe 1 kann sich i (und vollkommen symmetrisch für j) nun überlegen, dass ein Gebot von p_i die Auszahlung

$$u_i = \begin{cases} (u_i(a_i^*(p_i)) & \text{falls } \; p_i > p_j \\ \\ p_j & \text{falls } \; p_i < p_j \end{cases}$$

zur Folge hat. D.h. er erhält mindestens $min\{u_i(a_i^*(p_i)), p_j\}$. Wählt er nun sein $p_i^* = p^*$ so, dass $a_i^*(p^*) = p^*$, so kann er sich sogar p^* garantieren. Dasselbe gilt offensichtlich für Spieler j. D.h. im teilspielperfekten Gleichgewicht bieten beide $p_1^* = p_2^* = p^*$, worauf einer der beiden - welcher ist egal - den Vorschlag a^*, der von den anderen angenommen wird, und zu den Auszahlungen (p^*, p^*) führt.

Es ist sofort einsichtig, dass $(p^*, p^*) = f^{KS}(S, d)$, wenn wir uns graphisch veranschaulichen, wie $u_i(a_i^*(p_i))$ zustande kommt:



Macht 1 das Anfangsgebot p_1 und gewinnt, so ist dem 2 bereits eine Auszahlung von p_1 garantiert (Schritt b). Die maximal mögliche Auszahlung für 1 ergibt sich dann also durch senkrechtes Hochloten von p_1 auf der u_2-Achse aus, bis zum Rand von S.
$u_1(a_1^*(p1))$ ist genau dann am größten, wenn p_1 auf der Diagonalen auf den Rand von S trifft (reduziert 1 sein p_1 noch mehr, so wird er - Symmetrieüberlegung! - durch ein $p_2 > p_1$ vom Erstvorschlagsrecht ausgeschlossen). Dies ist aber genau die Kalai-Smorodinsky-Lösung.

Bem.: Im Gegensatz zur axiomatischen Bestimmung von $f^{KS}(S, d)$, die ja nicht auf den Fall $n > 2$ verallgemeinert werden kann, kann dieses Implementierungsspiel problemlos auf den Fall $n > 2$ erweitert werden (Moulin, 1984). Übung: Wie?

3.2 Allgemeine Implementierung:

Sei $G = (N, S)$, $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, $N = \{1, \cdots, n\}$, eine Spielform und g eine Ergebnisfunktion (*outcome function):*

$$g : S \rightarrow Z \qquad Z \text{ - Ergebnisraum (z.B. } A \text{ von vorhin)}$$

Dann heißt $m = (G,\ g)$ ein *Mechanismus*.

Ein Mechanismus m zusammen mit Präferenzen $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ induziert ein *Spiel* $(N,\ S,\ \Pi)$ mit Auszahlungsfunktionen

$$\Pi_i\,(s_1, \cdots, s_n) \;=\; U_i\,\Big(g(s_1, \cdots, s_n)\Big) \quad i = 1, \cdots n\,.$$

Ein Gleichgewicht des Spieles $(N,\ S,\ \Pi)$ heißt auch ein Gleichgewicht des Mechanismus $m = (G,\ g)$.

Definition: Ein Mechanismus $m = (G,\ g)$ implementiert eine 'social choice function' $f(\cdot)$, falls es für alle $U = (U_1, \cdots U_n) \in\ \Upsilon$ ein Gleichgewicht $\Big(s_1^*(U), \cdots, s_n^*(U)\Big)$ des Spieles $(G,\ \Pi)$ gibt mit $g\Big(s_1^*(U), \cdots, s_n^*(U)\Big) \;=\; f(U_1, \cdots, U_n)$.

Bemerkung: Die *outcome function* g hat im Mechanismus von Howard die Form

$$g_H\,\Big((a_1,\ x),\ (a_2,\ p)\Big) \;=\; \begin{cases} (0,\ 0) & \text{mit WS} \quad (1-p) \\[2ex] a_1 & \text{falls } x = 0 \text{ mit WS } \ p^2 \\ (0,\ 0) & \text{falls } x = 0 \text{ mit WS } \ p(1-p) \\ a_2 & \text{falls } x = 1 \text{ mit WS } \ p \end{cases}$$

Bezeichnen wir die 4-stufige extensive Form (mit Zufallszug auf Stufe *III*) mit G_H, so ist es der Mechanismus $m_H = (G_H,\, g_H)$, der die Nash-Verhandlungslösung implementiert im Sinne obiger Definition. Ein 'outcome', der einem Tupel $(U_1,\ U_2)$ zugeordnet wird, besteht also eigentlich aus einer Alternativenzuordnung und einer *Wahrscheinlichkeitsfunktion*; die *outcome function* g_H hat also zwei Komponenten. Dies ist typisch für die Modellierung von allgemeinen *Verhandlungsmechanismen.*

3.3 Verhandlungsmechanismen für bilaterale Verhandlungen

Wir behandeln hier die 'Mechanismustheorie' soweit sie für das grundlegende 2-Personen-Verhandlungsproblem - dargestellt an der Interaktion Verkäufer-Käufer - relevant ist.

Wir beziehen uns dabei auf die bahnbrechende Arbeit von Myerson and Satterthwaite (1983) über “Efficient Mechanisms for Bilateral Trading”, die einen grundlegenden Unmöglichkeitssatz ableitet.
Zum Einstieg wählen wir die einfachere Analyse von Matsuo (1989) über “Incentive Compatible, Individually Rational, and Ex post Efficient Mechanisms for Bilateral Trading”.
Matsuo betrachtet den Fall von Verkaufsverhandlungen zwischen einem Käufer und einem Verkäufer, die beide unvollkommene Information über ihr Gegenüber besitzen. Der Käufer K hat entweder einen hohen Reservationspreis b_h oder einen niedrigen b_n ($b_h > b_n$), ebenso hat der Verkäufer entweder einen hohen Reservationspreis s_h oder einen niedrigen s_n $\;(s_h > s_n)$.

Annahme: $b_h \;>\; s_h \;>\; b_n \;>\; s_n$

Es gelte:

$$\begin{aligned} WS(b = b_n) &= \delta & \qquad WS(s = s_n) &= 1 - \epsilon \\ WS(b = b_h) &= 1 - \delta & \qquad WS(s = s_h) &= \epsilon \end{aligned}$$

Ein Mechanismus M ist in diesem Zusammenhang eine Abbildung, die jeder Realisation von $(s,\, b)$ ein Ergebnis zuordnet. Das Ergebnis sei ein Paar $(p,\, \Pi)$ von outcome-Funktionen, wobei p die erwartete Zahlung von Käufer an Verkäufer ist (=Kaufpreis, *falls* Tausch stattfindet), und Π die Tauschwahrscheinlichkeit angebe:

$$M \;=\; \big(p(s,\, b),\, \Pi(s,\, b)\big) \;:\; \begin{array}{ccc} \Upsilon & \rightarrow & I\!\!R^2 \\ (s,\, b) & \mapsto & \big(U_1(s),\, U_2(b)\big), \end{array}$$

wobei

$$\begin{aligned} U_1^M(s) \;&=\; E_\delta\Big(p(s,\, b) - \;\Pi(s,\, b)\cdot s\Big) \\ U_2^M(b) \;&=\; E_\epsilon\Big(\;\Pi(s,\, b)\cdot b - p(s,\, b)\Big) \end{aligned}$$

Beachte: Gegeben $(s,\, b)$ bestimmt also $p(s,\, b)$ eine Zahlung und $\Pi(s,\, b)$ die Wahrscheinlichkeit, dass mit dieser Zahlung auch ein Übergang des Objektes von

Verkäufer auf Käufer (=Tausch) stattfindet. Ein so spezifizierter Mechanismus könnte also auch eine (positive oder negative) Zahlung $p(\bar{s}, \bar{b}) \neq 0$ vorsehen, wenn gleichzeitig $\Pi(\bar{s},\ \bar{b}) = 0$ gilt.

Definition:

i) M ist *individuell rational*, falls für alle s und b gilt:

$$U_1^M(s) \ \geq\ 0 \qquad \text{und} \qquad U_2^M(b)\ \geq 0$$

ii) M ist *anreizverträglich*, falls für alle s und b gilt:

$$U_1^M(s)\ \geq\ E_\delta\left(p(s',\ b) -\ \Pi(s',\ b)\cdot s\right)\ \ \textit{für alle } s' \neq s$$

$$U_2^M(b)\ \geq\ E_\epsilon\left(\Pi(s,\ b')\cdot b - p(s,\ b')\right)\ \ \textit{für alle } b' \neq b$$

d.h. jeder Spieler muss einen Anreiz haben, s bzw. b *wahrheitsgemäß* mitzuteilen. "Truthtelling" ist ein Nash-Gleichgewicht des Mechanismus!

iii) M ist *ex post effizient*, falls

$$\Pi(s,\ b)\ =\ \begin{cases} 1 & \text{falls } s < b \\ 0 & \text{falls } s > b \end{cases}$$

Problem: Gibt es einen individuell rationalen, anreizverträglichen *und* ex post effizienten Mechanismus?

Bemerkung: Warum ist $b_h > s_h > b_n > s_n$ der einzig interessante Fall?

a) $s_n > b_h$ ist uninteressant, da *nie* getauscht werden soll
$\big(\Pi(s, b) \equiv 0$ genügt!$\big)$
ebenso
$b_n > s_h$, da *immer* getauscht werden soll
$\big(\Pi(s, b) \equiv 1\big)$ $p(s, b) \in (s_h, b_n)$ genügt!$\big)$

b) $s_h > b_h > s_n > b_n$, d.h. nur bei $(s, b) = (s_n, b_h)$ soll getauscht werden

$$\rightarrow \quad p(s, b) \in (s_n, b_h) \quad \text{und} \quad \Pi(s, b) = \begin{cases} 1 & s = s_n \quad b = b_h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) $s_h > b_h > b_n > s_n$, d.h. bei $(s, b) = (s_n, b_h)$ und (s_n, b_n) soll getauscht werden:

$$\rightarrow \quad p(s, b) = p \in (s_n, b_n) \quad \text{und}$$

$$\Pi(s, b) = \begin{cases} 1 & (s, b) \in \big((s_n, b_h), (s_n, b_n)\big) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d) $b_h > s_h > s_n > b_n$, d.h. bei $(s, b) = (s_h, b_h)$ und (s_n, b_h) soll getauscht werden:

$$\rightarrow \quad p(s, b) = p \in (s_h, b_h) \quad \text{und } \Pi(s, b) \text{ analog oben}$$

(Im Falle von $\Pi(s, b) = 0$ gilt jeweils $p(s, b) = 0$!)

Nun: $b_h > s_h > b_n > s_n$; d.h.
bei $(s, b) \in \big\{(s_h, b_h), (s_n, b_n), (s_n, b_h)\big\}$ soll getauscht werden und nur bei $(s, b) = (s_h, b_n)$ soll nicht getauscht werden.

In diesem Fall hat aber b_h Anreiz b_n zu imitieren *und* s_n möchte als s_h erscheinen; was weder in a), b), c) noch d) der Fall war! Dieses Sortierproblem stellt für die Effizienzforderung das eigentliche Problem dar!

Darstellung von $(p, \Pi) = M$:

	s_h	s_n
b_h	Tausch zum Preis p_1	Tausch zum Preis p_2
b_n	kein Tausch bei Preis p_4	Tausch zum Preis p_3

klar: $p_1,\ p_2,\ p_3\ \geq\ 0$

aber: $p_4\ \in\ I\!R$

Individuelle Rationalität verlangt

(1) $\epsilon\,(b_h - p_1) + (1-\epsilon)(b_h - p_2)\ \geq\ 0$ Käufer b_h spielt mit

(2) $\epsilon\,(-p_4) + (1-\epsilon)(b_n - p_3)\ \geq\ 0$ Käufer b_n spielt mit

(3) $(1-\delta)(p_1 - s_h) + \delta\,(p_4)\ \geq\ 0$ Verkäufer s_h spielt mit

(4) $(1-\delta)(p_2 - s_n) + \delta\,(p_3 - s_n) \geq\ 0$ Verkäufer s_n spielt mit

Anreizverträglichkeit verlangt

(5) $\epsilon(b_h - p_1) + (1-\epsilon)(b_h - p_2)\ \geq \epsilon(-p_4) + (1-\epsilon)(b_h - p_3)$ Käufer b_h sagt Wahrheit

(6) $\epsilon(-p_4) + (1-\epsilon)(b_n - p_3)\ \geq \epsilon(b_n - p_1) + (1-\epsilon)(b_n - p_2)$ Käufer b_n sagt Wahrheit

(7) $(1-\delta)(p_1 - s_h) + \delta(p_4)\ \geq (1-\delta)(p_2 - s_h) + \delta(p_3 - s_h)$ Verkäufer s_h sagt Wahrheit

(8) $(1-\delta)(p_2 - s_n) + \delta(p_3 - s_n) \geq (1-\delta)(p_1 - s_n) + \delta(p_4)$ Verkäufer s_n sagt Wahrheit

Klar: Es gibt keine Lösung von (1)-(8) mit $p = p_1 = p_2 = p_3$; d.h. *ein* einheitlicher Preis kann keine Effizienz *unabhängig* vom Verhalten der Akteure garantieren. Der Preis muss mit deren Verhalten variieren!

Es gilt nun:

Satz (Matsuo): Sei $b_h > s_h > b_n > s_n$. Dann existiert ein anreizverträglicher, individuell-rationaler und ex post effizienter Mechanismus genau dann, wenn

$$(*) \quad \epsilon\,(1-\delta)\cdot b_h + (1-\epsilon)\cdot b_n \quad \geq \quad (1-\delta)\cdot s_h + \delta\,(1-\epsilon)\cdot s_n$$

Beweis: Falls (*) gilt, ist $\Pi(s,\, b) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } \;(s,\, b) = (s_h,\, b_n) \\ & \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

und $p(s,\, b)$ mit $p_1 = s_h$, $p_3 = b_n$, $p_4 = 0$ und $p_2 = \lambda \cdot s_h + (1-\lambda)\cdot b_n$ mit

$$\min\Big\{\frac{\epsilon\,(b_h - s_h)}{(1-\epsilon)(s_h - b_n)}\,,\; 1\Big\} \;\geq\; \lambda \;\geq\; \max\Big\{1 - \frac{\delta\,(b_n - s_n)}{(1-\delta)(s_h - b_n)}\,,\; 0\Big\}$$

ein gesuchter Mechanismus! **q.e.d.**

Beispiel: $b_h = 5 \quad s_n = 1 \quad \epsilon = \delta = \frac{1}{2}$

$b_n = \frac{3}{2} \quad s_h = 4$

geht nicht! Es gilt in $(*)$

$$\frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} \;=\; \frac{8}{4} \quad < \quad \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 1 \;=\; \frac{9}{4}$$

Nehmen wir nun an $\delta = \frac{3}{4}$ und $\epsilon = \frac{3}{4}$; d.h. die Information in Bezug auf b_h und s_n wird *ungenauer*, so gilt:

$$\frac{3}{16}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} \;=\; \frac{21}{16} \quad > \quad \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{3}{16}\cdot 1 \;=\; \frac{19}{16}$$

und ein effizienter Mechanismus existiert! D.h. je sicherer die Spieler sein können, dass der andere vom Typ b_h resp. s_n ist, der jeweils lieber als der andere Typ posieren möchte, desto schwieriger wird es (bis zur Unmöglichkeit), Effizienz zu sichern!

Korollar: Sei $0 < \epsilon < 1$ und $0 < \delta < 1$ gegeben. Dann gibt es $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$ derart, dass $0 < b_h - s_h < \beta_1$, $0 < b_n - s_n < \beta_2$ und $\beta_3 < s_h - b_n$ Nichtexistenz impliziert.

Die beschriebene Situation bedeutet, dass wenn s_h und b_h resp. s_n und b_n relativ nah beieinander liegen, s_h und b_n aber nicht, dass ein Käufer b_h, der b_n imitiert, nicht viel verliert, wenn sein Gegenüber ein Verkäufer mit s_h ist, und ein Tausch durch das "Täuschen" nicht zustande kommt. Umgekehrt riskiert ein Verkäufer s_n nicht viel, wenn er als s_h posiert, da b_n nahe bei s_n liegt und in einem Tausch mit einem Käufer mit b_n nicht viel verdient werden kann. Andererseits ist s_h von b_n hinreichend verschieden, um das "Täuschen" für beide Seiten hinreichend attraktiv erscheinen zu lassen. Dieses Argument gilt unabhängig von der Ausprägung der Unsicherheit via ϵ resp. δ.

Dieses Korollar deutet schon an, dass bei *stetiger* Verteilung der Reservationspreise, wenn es also *immer* Typen gibt, die beliebig nahe beieinander liegen, ernste Probleme auftreten können. Dem ist in der Tat so, wie der bedeutende Unmöglichkeitssatz von Myerson und Satterthwaite (1983) zeigt. (Efficient Mechanisms for Bilateral Trading, JET 29, p. 265-281).

Sei also der Reservationspreis des Verkäufers mit Dichte $f_1(s)$ auf $[a_1,\, b_1]$ verteilt und der des Käufers mit Dichte $f_2(b)$ auf $[a_2,\, b_2]$. Nach Realisierung von $(s,\, b)$ weiß der Verkäufer "sein" s, nicht aber das b des Käufers, und der Käufer weiß sein "wahres" b nicht aber das s des Verkäufers.

Ein Mechanismus M ist nun durch Funktionen

$$\begin{array}{llll} \Pi : [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] & \to & [0,\, 1] & \text{Tauschwahrscheinlichkeit} \\ p : [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] & \to & \mathbb{R} & \text{(erwarteter) Preis} \end{array}$$

beschrieben.

Wir können nun folgende Größen definieren

$$\begin{array}{lll} \bar{p_1}(s) = \int_{a_2}^{b_2} p(s,\, b)\, f_2(b)\, db & & \text{erwarteter Erlös des Verkäufers mit Reservationspreis } s \\ \bar{p_2}(b) = \int_{a_1}^{b_1} p(s,\, b)\, f_1(s)\, ds & & \text{erwartete Zahlung des Käufers mit Reservationspreis } b \\ \bar{\Pi}_1(s) = \int_{a_2}^{b_2} \Pi(s,\, b)\, f_2(b)\, db & & \text{erwartete Verkaufswahrscheinlichkeit für den Verkäufer } s \\ \bar{\Pi}_2(b) = \int_{a_1}^{b_1} \Pi(s,\, b)\, f_1(s)\, ds & & \text{erwartete Kaufwahrscheinlichkeit für Käufer } b \end{array}$$

d.h.

$U_1^M(s) = \bar{p_1}(s) - s \cdot \bar{\Pi}_1(s)$

$U_2^M(b) = b \cdot \bar{\Pi}_2(b) - \bar{p_2}(b)$

Folglich ist $M = (\Pi,\, p)$ *individuell-rational*, falls

$$U_1^M(s) \geq 0 \quad \text{und} \quad U_2^M(b) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad (s,\, b) \in [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2]$$

und *anreizverträglich* (in Bayesianischem Nash-Sinne), falls

$$U_1^M(s) \;\geq\; \bar{p_1}(s') - s \cdot \bar{\Pi}_1(s') \quad \text{und} \quad U_2^M(b) \;\geq\; b \cdot \bar{\Pi}_2(b') - \bar{p_2}(b')$$
$$\text{für alle} \quad s' \in [a_1,\, b_1] \;\; \text{und} \;\; b' \in [a_2,\, b_2]\,.$$

Ein Charakterisierungssatz für anreizverträgliche Mechanismen (Theorem 1 in Myerson/Satterthwaite) erlaubt nun sofort folgenden Schluss für ex post effiziente Mechanismen; d.h. Mechanismen, die

$$\Pi(s,\, b) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } s < b \\ 0 & \text{falls } s > b \end{cases} \qquad\qquad \text{genügen.}$$

Theorem (Myerson und Satterthwaite, 1983): Falls $[a_1, b_1]$ und $[a_2, b_2]$ sich überlappen, d.h. $b_1 > a_2$, dann gibt es *keinen* anreizverträglichen, individuell-rationalen Verhandlungsmechanismus, der ex post effizient ist.

Dieser Satz ist von großer Bedeutung, da die Einschränkung auf *anreizverträgliche* Mechanismen *keine* wirkliche Beschränkung darstellt: *jedes* Gleichgewicht eines (nur) individuell-rationalen Mechanismus ist *äquivalent* (in bezug auf Auszahlungen und Allokation) zu einem individuell-rationalen *und anreizverträglichen* Mechanismus des beschriebenen Typs. Dies ist der Inhalt des berühmten 'revelation principle' oder 'Offenbarungsprinzips'. Denn jede *Funktion* h, die für jedes $(s,\, b)$ ein Gleichgewicht des gegebenen (nur) individuell-rationalen Mechanismus auswählt, kann *selbst* als Mechanismus interpretiert werden. Der <u>muss</u> dann aber auch anreizverträglich sein! Wäre er es nicht, d.h. gäbe es ein s oder b, für den ein Anreiz bestünde, sich *nicht* als s bzw. b zu verhalten, so könnte die Funktion h in diesem Falle für $(s,\, b)$ kein *Gleichgewicht* des individuell-rationalen Mechanismus gewählt haben.

Dass ein abstrakter (Verhandlungs-) Mechanismus $M = (p,\, \Pi)$ nicht direkt von *praktischer* Bedeutung sein kann, ist jedoch ohne Belang für die grundsätzliche Relevanz des Unmöglichkeitsatzes:

> Er besagt (via *revelation principle*), dass es auch kein *praktisches* Verhandlungsverfahren (Spielform) geben kann, das bei beidseitiger Unsicherheit (jedoch voller Rationalität der Verhandlungspartner) immer zu einem effizienten Ergebnis führt.

Dies impliziert beispielsweise die *generelle* Ungültigkeit des sog. "Coase-Theorems" über die Möglichkeit effizienter Verhandlungsergebnisse im Falle beidseitig unvollständiger Information.

Gegeben die Unmöglichkeit zur Realisierung von (ex post) Effizienz, und damit des Erstbesten, stellt sich also die Frage nach einem Verhandlungsmechanismus, der optimal im Sinne eines Zweitbesten ist.

Als Evaluierung bietet sich hierfür das Konzept der *ex ante Effizienz* an:

Definition: Ein Mechanismus $M = (p^*, \Pi^*)$ ist *ex ante effizient*, falls er die Summe der *erwarteten* Gewinne von Tausch (über Käufer und Verkäufer) maximiert; d.h (p^*, Π^*) maximiert $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (b-s) \cdot \Pi(s, b) \cdot f_1(s) \cdot f_2(b) \; db \, ds$ über alle $(p, \Pi) \in M = \{m \mid m \text{ individuell-rational und anreizverträglich } \}$.

Bem.: $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (b-s) \cdot \Pi(s, b) \; db \, ds \; = \; \int_{a_1}^{b_1} U_1^M(s) f_1(s) \, ds \; + \; \int_{a_2}^{b_2} U_2^M(b) f_2(b) \, db$

Es gilt nun:

Satz: (Myerson/Satterthwaite) Ein individuell-rationaler und anreizverträglicher Mechanismus, der ex ante effizient ist, existiert (unter den Annahmen des Unmöglichkeitssatzes).

Die Charakterisierungen für ex ante effiziente Mechanismen führen für den Fall, dass $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [0, 1]$ und $f_1(s) \equiv 1 \equiv f_2(b)$, d.h. die 'Typen' beider Spieler sind gleichverteilt auf [0, 1], zu folgendem individuell-rationalen, anreizverträglichen und ex ante optimalen Mechanismus:

$$\Pi^*(s,\, b) \;=\; \begin{cases} 1 & ,\text{ falls } \; b - s \geq \frac{1}{4} \\[2ex] 0 & ,\text{ falls } \; b - s \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$p^*(s,\, b) \;=\; \begin{cases} \frac{s+b+\frac{1}{2}}{3} & ,\text{ falls } \; b - s \geq \frac{1}{4} \\[2ex] 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. Tausch kann nur gewährleistet werden, wenn die beiden wahren Bewertungen hinreichend verschieden sind: $b - s \geq \frac{1}{4}$

3.4 Die einfache 'doppelte' Auktion: der 'sealed-bid'-Mechansimus

Beide Spieler - Käufer und Verkäufer - geben in Kenntnis ihres Reservationspreises (verdeckt) ein Gebot ab. Ist das Käufergebot größer als die Verkäuferforderung, so findet Tausch statt zum Preis $p =$ Durchschnitt der Gebote; andernfalls findet kein Tausch statt.
Dieses einfache Bietverfahren bzw. diese *Spielform* besitzt für alle $(U_1,\, U_2)$ - Paare individueller (risiko-neutraler) Präferenzen ein (Bayesianisches Nash-) Gleichgewicht, das *genau* dem ex ante optimalen Mechanismus $(p^*,\, \Pi^*)$ entspricht!

Seien also b und s auf $[0,\, 1]$ unabhängig voneinander gleichverteilt.

Die Informationsstruktur ist wie folgt gegeben: *nach* Realisierung von b und s

- weiß der Käufer b (= seinen wahren Reservationspreis), jedoch nicht s (das für ihn - nach wie vor - über $[0,\, 1]$ gleichverteilt ist)
- weiß der Verkäufer s, jedoch nicht b

Eine *Bietstrategie* ist für beide Agenten gegeben durch eine Funktion α resp. β, die jedem möglichen Reservationspreis ein zugehöriges Gebot zuordnet:

$$\begin{array}{lcll} \text{Käufer} & : & \alpha & [0,\,1] \to [0,\,1] \\ & : & b & \mapsto \alpha(b) = g \\ \text{Verkäufer} & : & \beta & [0,\,1] \to [0,\,1] \\ & : & s & \mapsto \beta(s) = f \end{array}$$

Käufer wie Verkäufer versuchen ihre erwarteten Auszahlungen durch ihre Gebotsabgabe - gegeben das erwartete Bietverhalten des Anderen in Form seiner Bietstrategie - zu maximieren.
Zwei Bietstrategien, die in diesem Sinne beste Antworten aufeinander sind, bilden ein *Gleichgewicht* des Mechansimus bzw. Spieles, das entsteht, wenn die Auszahlungsfunktionen wie folgt definiert sind:

$$\begin{array}{ll} \text{Käufer} & : EU_b = \int_0^g (b - \frac{g+f}{2})\, dG(f) \\ \text{Verkäufer} & : EU_s = \int_f^1 (\frac{g+f}{2} - s)\, dF(g) \end{array}$$

wobei $G(f)$ resp. $F(g)$ die Gebotsverteilungen sind, die von den Strategien α resp. β erzeugt werden.

In einem Gleichgewicht muss dann immer gelten (Bedingung 1. Ordnung), dass

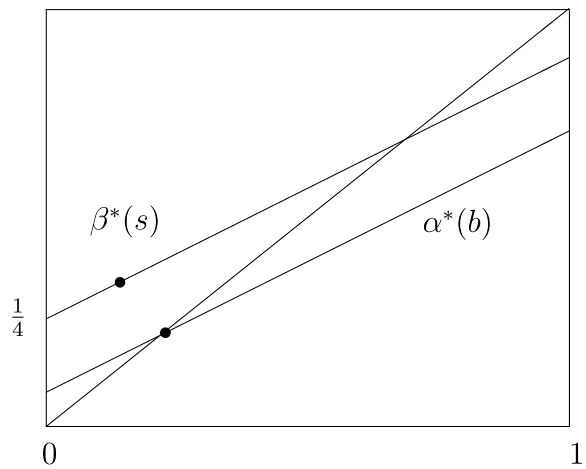
$$\begin{aligned} b &= g + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{G(g)}{G'(g)} \\ s &= f - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{(1-F(f))}{F'(f)} \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $b > g$ und $s < f$, d.h. im Gleichgewicht bietet der Käufer *weniger* als seinen Reservationspreis und der Verkäufer verlangt *mehr* als seinen Reservationspreis. Die beiden bieten also *nicht* wahrheitsgemäß.
Diese Spiel hat genau ein lineares Gleichgewicht (leider auch noch viele andere), welches

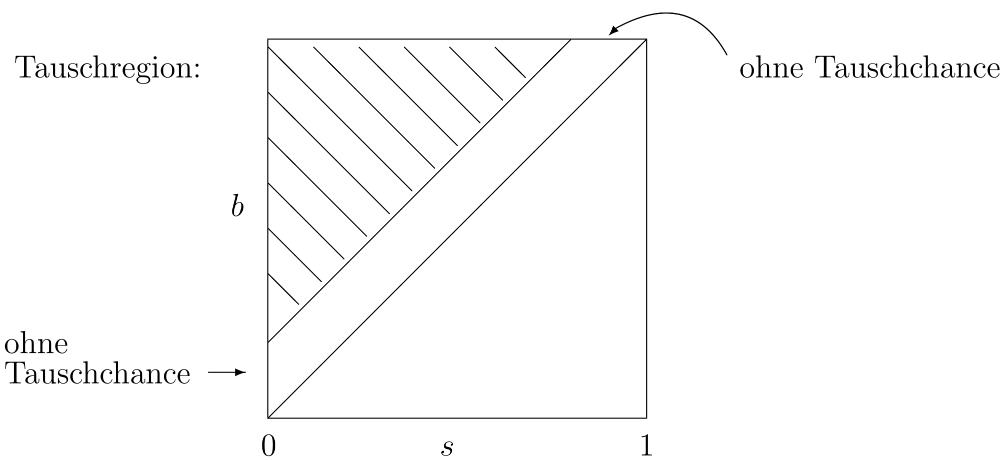
lautet

$$\alpha^*(b) \;=\; \begin{cases} b & \text{für } \; 0 \leq b \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3}b + \frac{1}{12} & \text{für } \; \frac{1}{4} \leq b \leq 1 \end{cases}$$

$$\beta^*(s) \;=\; \begin{cases} \frac{2}{3}s + \frac{1}{4} & \text{für } \; 0 \leq s \leq \frac{3}{4} \\ s & \text{für } \; \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Es gilt $\alpha^*(b) \;\geq\; \beta^*(s) \;\Leftrightarrow\; b - s \;\geq\; \frac{1}{4}$;
tauschen werden alle Paare (s, b) miteinander zum Preis $p = \frac{\alpha(b)+\beta(s)}{2}$, für die $b - s \geq \frac{1}{4}$ gilt. Tauschen *sollten* alle, für die $b - s \;\geq\; 0$ gilt (ex-post-Effizienz!)



Welchen Mechanismus $m = (\Pi,\ p)$ stellt dieses Gleichgewicht dar?

Nun, offensichtlich gilt, dass Tausch aufgrund miteinander kompatibler Gebote gerade stattfindet, wenn $b - s \ \geq \ \frac{1}{4}$; d.h. die Funktion der Tauschwahrscheinlichkeit Π ist gegeben als

$$\Pi(s,\ b) \ = \begin{cases} 1 & \text{falls } b - s \ \geq \ \frac{1}{4} \\ 0 & \text{falls } b - s \ < \ \frac{1}{4} \end{cases}$$

Die *Preisregel* des 'sealed-bid'-Verfahrens besagt

$$p(s,\ b) \ = \ \frac{\alpha^*(b)+\beta^*(s)}{2} \ = \ \frac{\frac{2}{3}b+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}s+\frac{1}{12}}{2}$$

$$= \ \frac{s+b+\frac{1}{2}}{3} \qquad ; \text{d.h.}$$

die p-Funktion des Mechanismus lautet

$$p(s,\ b) \ = \begin{cases} \frac{s+b+\frac{1}{2}}{3} & \text{falls } b - s \ \geq \ \frac{1}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist aber gerade der *ex ante* effiziente, individuell-rationale und anreizverträgliche Mechanismus!

Das 'sealed-bid'-Verfahren stellt eine einfache Implementierung dieses Mechanismus dar!!

Literaturverzeichnis

Kapitel I:

- Kalai, E. und M. Smorodinsky [1975], “Other Solutions to Nash’s Bargaining Problem”, *Econometrica*, 43, S.513-518.
- McDonald, I. M. und R. M. Solow [1981], “Wage Bargaining and Employment”, *American Economic Review*, 71, S.896-908.
- Nash, J. F. [1950], “The Bargaining Problem”, *Econometrica*, 18, S.155-162.
- Osborne, M und A. Rubinstein [1990], *Bargaining and Markets*, Academic Press.
- Oswald, A. [1985], “The Economic Theory of Trade Unions: a Survey”, *Scandinavian Journal of Economics*, 87, S.160-193.
- Peters, H. [1992], *Axiomatic Bargaining, Game Theory*, Kluwer Academic Publishers.

Kapitel II:

- Kreps, D. und R. Wilson [1982], “Sequential Equilibria”, *Econometrica*, 50, S.863-894.
- Osborne, M und A. Rubinstein [1990], *Bargaining and Markets*, Academic Press.

Kapitel III:

- Howard, J [1992], “A Social Choise Rule and its Implementation in Perfect Equilibrium”, *Journal of Economic Theory*, 56, S.142-159.
- Mas-Colell, A. und Whinston, M. D. und J. R. Green [1995], *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.
- Matsuo, T. [1989], “On Incentive Compatible, Individually Rational, and Ex Post Efficient Mechanism for Bilateral Trading”, *Journal of Economic Theory*, 49, S.189-194.
- Myerson, R. und M. Satterthwaite [1983], “Efficient Mechanisms for Bilateral Trading”, *Journal of Economic Theory*, 29, S.265-281.