Ecuaciones no lineales

Problema:

Dada $f(x)=0$ ecuación no lineal con $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ encontrar $x^*\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(x^*)=0$$

x^* se llama raíz/cero de f y nos interesa al menos una x^* que satisfaga lo anterior.

Ejemplos a) $e^x+1=0$. b) $e^{-x}-x=0$. c) $x^2-4\,\mathrm{sen}(x)=0$.

d) $x^3+6x^2+11x-6=0$. e) $\mathrm{sen}(x)=0$.

Comentarios *) A diferencia de las ecuaciones lineales en las que cierta forma de coeficientes conducen a determinar si la ecuación lineal tiene una, dos, ..., infinitas soluciones o no existe solución, en el caso no lineal no se tienen resultados que determinen esto último.

*) Para resolver el problema anterior, tenemos métodos iterativos que se pueden dividir en 2 tipos:

*) cerrados *) abiertos.

Los cerrados utilizan intervalos que encierran a la raíz; éstos intervalos se generan a partir de subdivisiones de un intervalo inicial y la longitud de ellos se reduce conforme avanzan las iteraciones.

Los abiertos no requieren encerrar a la raíz y en general tienen mejor desempeño en cuanto un menor número de iteraciones pero no siempre funcionan.

Métodos cerrados

Método de bisección

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ entonces $\exists x^* \in [a,b]$ tal que $f(x^*) = 0$.

Método:

Sean x_i, x_s límites inferior, superior tales que $x^* \in [x_i, x_s]$ y $f(x_i)f(x_s) < 0$ entonces:

Paso 1: $x_m = \dfrac{x_i + x_s}{2}$

Paso 2: a) Si $f(x_i)f(x_m) < 0$ entonces x^* está en $[x_i, x_m]$ $\therefore$ hacer $x_s = x_m$ y hacer paso 1.

b) Si $f(x_i)f(x_m) > 0$ entonces x^* está en $[x_m, x_s]$ $\therefore$ hacer $x_i = x_m$ y hacer paso 1.

c) Si $f(x_i)f(x_m) = 0$ entonces $x^* = x_m$; termina búsqueda.

Comentario

1) Este método hace uso del teorema del valor intermedio.

Criterios de paro para métodos iterativos

Si conocemos x^* entonces un criterio de paro es repetir el método hasta que el error relativo esté por debajo de una tolerancia dada. En la práctica no conocemos x^* por lo que una alternativa es detener el método hasta que el error relativo entre iteraciones esté por debajo de una tolerancia dada:

$$ErrR(x^{(k)}, x^{(k+1)}) = \frac{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|}{|x^{(k)}|} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

donde: $x^{(k)}$ es el valor de x en la k-ésima iteración, $x^{(0)}$ es valor inicial.

Obs: para $x^* = 0$ es preferible un error absoluto y en general una condición del tipo:

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < tol\,(|x^{(k)}| + 1)$$

Otros criterios de paro son:

- Número de iteraciones menor a un máximo de iteraciones.
- Norma de f sea menor a una tolerancia dada.

Ej.- Utiliza el método de bisección para encontrar la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$ en el intervalo $[0, 2]$ con una tolerancia de 10^{-2} realiza una tabla de la forma:

Iteración	$x_i^{(k)}$	$x_s^{(k)}$	$x_m^{(k)}$	$ErrR(x_m^{(k)})$

, $x^* = 0.56714329$

Comentarios

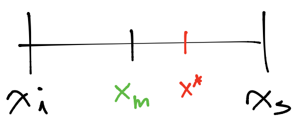
*) En el método de bisección se cumple: $ErrR(x_m^{(k)}, x_m^{(k+1)}) \geq ErrR(x_m^{(k)})$

por lo que al terminar el método podemos decir que $x_m^{(k)}$ es

al menos tan exacto como la tolerancia dada.

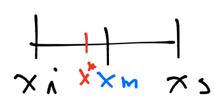
La desigualdad anterior se cumple pues:

K:



$\therefore$ Para K grande $|x^{(k)}| \approx |x^*|$ (I)

K+1:



Por otro lado:

$\rightarrow x_m^{(k)} = x_i^{(k+1)}$ considerando los 2 diagramas anteriores

$$x_m^{(k+1)} - x_m^{(k)} = \frac{x_s^{(k+1)} + x_i^{(k+1)}}{2} - x_i^{(k+1)} = \frac{x_s^{(k+1)} - x_i^{(k+1)}}{2}$$

entonces:

$$|x_m^{(k)} - x^*| = \left| x_m^{(k+1)} - \frac{x_s^{(k+1)} - x_i^{(k+1)}}{2} - x^* \right| = \left| x_m^{(k+1)} - x^* - \frac{\Delta_x^{(k+1)}}{2} \right|$$

$$\leq |x^* - x_m^{(k+1)}| + \frac{\Delta x^{(k+1)}}{2} < \frac{\Delta x^{(k+1)}}{2} + \frac{\Delta x^{(k+1)}}{2} = \Delta x^{(k+1)}$$

$$\text{con } \Delta_x^{(k+1)} = x_s^{(k+1)} - x_i^{(k+1)} > 0$$

Como $x_m^{(k)} = \dfrac{x_s^{(k)} + x_i^{(k)}}{2}$ se tiene:

$$ErrR(x_m^{(k)}, x_m^{(k+1)}) = \frac{|x_m^{(k+1)} - x_m^{(k)}|}{|x_m^{(k)}|} = \frac{|x_s^{(k+1)} - x_i^{(k+1)}|}{|x_s^{(k)} + x_i^{(k)}|} \quad k=0,1,\ldots$$

y por (1) para k grande : $ErrR(x_m^{(k)}) = \frac{|x_m^{(k)} - x^*|}{|x^*|} < ErrR(x_m^{(k)}, x_m^{(k+1)})$

*) $ErrA(x_m^{(k)}) \leq \frac{ErrA(x_m^{(k-1)})}{2} \leq \ldots \leq \frac{ErrA(x_m^{(0)})}{2^k} \leq \frac{b-a}{2^k}$

nos ayuda a calcular el número de iteraciones necesarias para una precisión dada.

*) El método de bisección también se le conoce como búsqueda binaria.

*) Este método siempre converge y lo hace de manera lineal, gana una cantidad constante de dígitos por cada iteración, de hecho 1 dígito binario de precisión por cada iteración ($\approx \frac{1}{3}$ dígito decimal).

*) Criterios de paro para el método de bisección:

- $|x_i - x_s| < \text{tolerancia}_1 (1 + |x_i| + |x_s|)$.
- número de iteraciones < máximo de iteraciones.
- $|f(x_m)| < \text{tolerancia}_2$

tolerancias y máximo de iteraciones son valores definidos en un script.

*) Consideraciones en la implementación del método de bisección para lidiar con SPF:

- El punto medio calcularlo como $x_m^{(k)} = x_i^{(k)} + \frac{x_s^{(k)} - x_i^{(k)}}{2}$.
- La revisión de $f(x_i^{(k)}) f(x_m^{(k)}) < 0$ se realiza revisando signos en lugar de la multiplicación.

Métodos abiertos

Punto fijo

Este método consiste en considerar la ecuación del punto fijo:

$$g(x) = x ,$$

donde $g \in C^1[a,b]$, $x \in [a,b]$

para tener una fórmula recursiva entre $x^{(k+1)}$ y $x^{(k)}$ de la forma:

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \rightarrow \text{iteración del punto fijo}$$

Comentarios

*) La ecuación del problema inicial $f(x) = 0$ se puede llevar a una forma de punto fijo despejando x o sumando x.

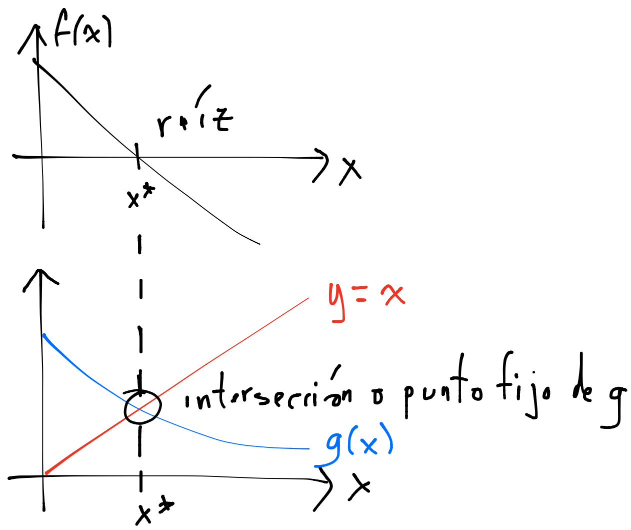
Ej: 1) $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightsquigarrow x = \dfrac{3 - x^2}{2}$.

2) $\operatorname{sen}(x) = 0 \rightsquigarrow x = x + \operatorname{sen}(x)$.

*) x^* se llama punto fijo de $g(x)$ si satisface la ecuación del punto fijo.

*) La similitud entre resolver la ecuación $f(x)=0$ y encontrar los puntos fijos de la función $g(x)$ podemos observarla en el siguiente dibujo:

Encontrar raíces de f equivale a encontrar puntos fijos de g:



Ej.

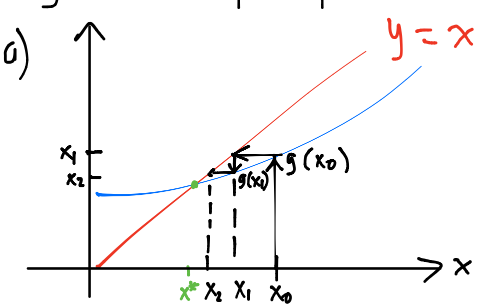
Con el método del punto fijo encontrar la raíz de $f(x)=e^{-x}-x$ tomando como $x^{(0)}=0$. Realizar 10 iteraciones y hacer una tabla de la forma:

Iteración	$x^{(k)}$	$ErrR(x^{(k)},x^{(k+1)})$	$ErrR(x^{(k)})$

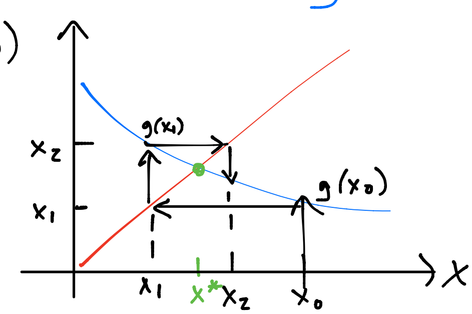
Convergencia/Divergencia

En el siguiente dibujo se presentan 4 casos de una función $g(x)$:

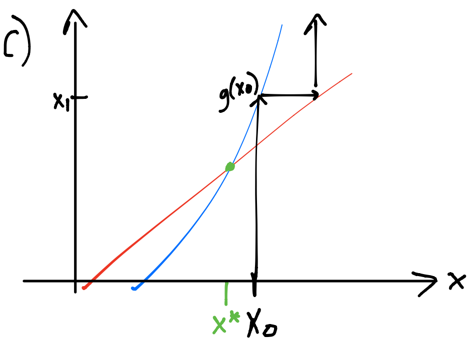
a)



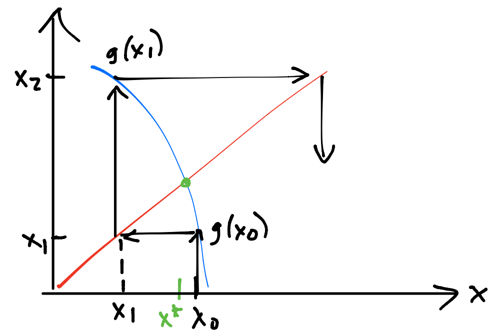
b)



c)



d)



Los casos a),b) presentan iteraciones de punto fijo convergentes mientras que c),d) son divergentes. Observa que el comportamiento de a),c) es monótono y el de b),d) es en espiral.

La convergencia ocurre si el valor absoluto de $g'(x)$ es <u>menor</u> al valor absoluto de la pendiente de la recta $y=x$, es decir:

tenemos convergencia si $|g'(x)| < 1$ en la región de interés.

Lo anterior lo podemos verificar como sigue:

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \quad \ldots \ldots \text{(1)}, \quad x^* = g(x^*) \quad \ldots \ldots \text{(2)}$$

$$\text{(1)} - \text{(2)}: \quad x^{(k+1)} - x^* = g(x^{(k)}) - g(x^*).$$

Como $g \in C^1[a,b]$ entonces por el teorema del valor medio

$$g'(\xi) = \frac{g(x^{(k)}) - g(x^*)}{x^{(k)} - x^*} \quad \text{con } \xi \in [x^*, x^{(k)}]$$

$\therefore \; g(x^{(k)}) - g(x^*) = g'(\xi)(x^{(k)} - x^*)$ y por ① - ②

$$x^{(k+1)} - x^* = g'(\xi)(x^{(k)} - x^*) .$$

$$\therefore \; Err\,A(x^{(k+1)}) = |g'(\xi)|\, Err\,A(x^{(k)}) .$$

Entonces los errores decrecen si $|g'(x)| < 1$, $x \in [a,b]$.

Comentarios

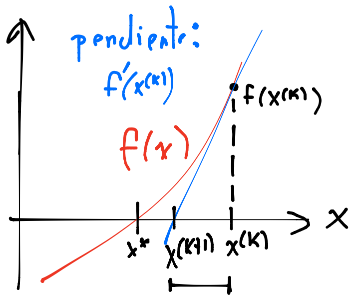
*) La ecuación: $x^{(k+1)} - x^* = g'(\xi)(x^{(k)} - x^*)$

implica que si la derivada es positiva tenemos un comportamiento monótono (casos a,c) y si es negativa tenemos un comportamiento oscilatorio o en espiral (casos b,d).

*) La ecuación: $Err\,A(x^{(k+1)}) = |g'(\xi)|\, Err\,A(x^{(k)})$

implica que el error para la iteración $k+1$ es proporcional al error en la iteración k ∴ si existe convergencia entonces la convergencia es lineal.

Método de Newton



$$f'(x^{(k)}) = \frac{f(x^{(k)}) - 0}{x^{(k)} - x^{(k+1)}}$$

$$\therefore\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$k = 0, 1, \ldots$

Otra forma de obtener el método de Newton:

Si $f \in C^2[a,b]$ y $x^{(k)}, x \in [a,b]$ entonces por teorema de Taylor:

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + f''(\xi_x)\frac{(x - x^{(k)})^2}{2}, \quad \xi_x \in [x^{(k)}, x]$$

Si $x = x^{(k+1)}$ y $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < 1$ entonces

$$(x^{(k+1)} - x^{(k)})^2 < |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$$

$$\therefore\ f(x^{(k+1)}) \approx f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}).$$

El método de Newton resulta de igualar a cero el lado derecho

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\therefore\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad \text{si } f'(x^{(k)}) \neq 0.$$

Aprovechamos el desarrollo por Taylor anterior para determinar la relación entre errores en las iteraciones en el método de Newton:

Si $x = x^*$ entonces

$$f(x^*) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^* - x^{(k)}) + f''(\xi_{x^*}) \frac{(x^* - x^{(k)})^2}{2}$$

con $\xi_{x^*} \in [x^{(k)}, x^*]$

como x^* es raíz de f:

$$0 = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^* - x^{(k)}) + f''(\xi_{x^*}) \frac{(x^* - x^{(k)})^2}{2} \quad \ldots (2)$$

$$(2) - (1): \ f'(x^{(k)})(x^* - x^{(k+1)}) + f''(\xi_{x^*}) \frac{(x^* - x^{(k)})^2}{2} = 0$$

$\therefore$ si $f'(x^{(k)}) \neq 0$ tenemos:

$$x^* - x^{(k+1)} = - \frac{f''(\xi_{x^*})(x^* - x^{(k)})^2}{2 f'(x^{(k)})}$$

$$Err_A(x^{(k+1)}) = \left| \frac{f''(\xi_{x^*})}{2 f'(x^{(k)})} \right| Err_A^2(x^{(k)}).$$

Lo anterior implica que el error de la iteración $k+1$ es proporcional al cuadrado del error de la iteración k y si existe convergencia entonces la convergencia es <u>cuadrática</u> y por cada iteración duplicamos el número de cifras correctas.

<u>Comentarios</u> *) Una estimación de $ErrA(x^{(k+1)})$ si conocemos x^* es: $\left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right| ErrA^2(x^{(k)})$ y es conveniente revisar que $f''(x^*)/f'(x^*)$ no sea demasiado grande para asegurar convergencia del método.

*) Si $f'(x^*) \neq 0$ y $x^{(0)}$ es cercano a x^* entonces el método tiene convergencia cuadrática.

*) El método de Newton es un caso particular de la iteración de punto fijo con $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

<u>Ej.</u>

Con el método de Newton encontrar la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$ tomando como $x^{(0)} = 0$. Considera una precisión de 10^{-8} y realiza una tabla de la forma:

Iteración	$x^{(k)}$	$ErrR(x^{(k)}, x^{(k+1)})$	$ErrR(x^{(k)})$

El método de Newton se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones no lineales:

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} n \text{ ecuaciones con } n \text{ incógnitas} \\ f_1,\dots,f_n \text{ no lineales.} \end{array}$$

Definimos $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

entonces las ecuaciones anteriores se plantean en el problema:

encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que: $f(x^*)=0$.

El método de Newton tiene convergencia cuadrática si $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ es una aproximación cercana a x^* y $J(x^*)$ es no singular

donde $J(x)$ es la jacobiana de $f(x)$:

$$(J(x))_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}.$$

Así, el método de Newton tiene la siguiente actualización:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}(x^{(k)})f(x^{(k)}).$$

Comentarios

*) En la implementación computacional de la actualización en el método de Newton no se calcula explícitamente $J^{-1}(x^{(k)})$, en lugar de ello, para realizar un menor número de operaciones resolvemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$J(x^{(k)})s^{(k)} = -f(x^{(k)})$$

y la actualización es: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$.

*) Para el caso unidimensional debe monitorearse que $f'(x^{(k)}) \neq 0$ para cada iteración. Para más dimensiones se monitorea que $J(x^{(k)})$ sea bien condicionada.

*) Los criterios de paro para el método de Newton que se utilizan son:

- $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < tol(|x^{(k)}| + 1)$.
- Número de iteraciones menor a un máximo de iteraciones.
- Norma de f sea menor a una tolerancia dada.

Ejercicio: realizar 3 iteraciones del método de Newton para resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2 = 10 \\ x_2 + 3x_1 x_2^2 = 57 \end{cases}$$

Usar $x_0 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$ como punto inicial, realizar una tabla de la forma:

Iteración	$x^{(k)}$	$ErrR(x^{(k)}, x^{(k+1)})$	$ErrR(x^{(k)})$

, $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>Aplicación</u>

Los métodos para resolver ecuaciones no lineales se utilizan para resolver problemas de optimización por ejemplo: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pues el problema anterior nos lleva a buscar puntos estacionarios de f, esto es, $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x^*) = 0$.

Lo anterior, en general es un sistema de ecuaciones no lineales.

<u>Pregunta</u>: ¿Cómo es la actualización o iteraciones del método de Newton en términos de f?