Examen Final 177508 175904

177508 - Uriel Miranda Miñón

175904 - Jorge III Altamirano Astorga

3.1 Bootstrap paramétrico.

- Escribe la función de verosimilitud y calcula el estimador de máxima verosimilitud para σ^2. Supongamos que observamos los datos x (en la carpeta datos), ¿Cuál es tu estimación de la varianza?

Dada la verosimilitud:

$$\mathcal{L}(\sigma^2|x_0, x_1, ..., x_n) = \Pi_0^n p(\sigma^2) = \Pi_{k=0}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_k)^2\right)\right]$$

Log Verosimilitud sería:

$$\updownarrow(\sigma^2) = \log \mathcal{L}(\sigma^2) = \sum \log p(\sigma^2)$$

$$= log\left\{\Pi\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_k)^2\right)\right]\right\} = \sum_{k=0}^n log\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_k)^2\right)\right]\right\}$$

por leyes de los logaritmos…

$$= \sum_{k=0}^n \left[log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \left(\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_k)^2\right)\right] = -n\ log\sqrt{2\pi\sigma^2} - \sum_{k=0}^n\left[\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_k)^2\right] = -n\ log\sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^n (x-x_k)^2$$

$$= -\frac{n}{2}\ \left(log\ 2\pi + log\ \sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^n (x-x_k)^2$$

Si lo derivamos…

$$\frac{\partial \updownarrow}{\partial \sigma^2} = -n\ \sigma^2 + \sum_{k=0}^n (x-x_k)^2 = 0$$

Despejando…

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=0}^n (x-x_k)^2}{n} = \frac{\sum_{k=0}^n (-x_k)^2}{n}$$

Función de máxima verosimilitud

```
load("data_est_comp/x.RData")
load("data_est_comp/rabbits.RData")
sigma_mv <-function(n,x) sum(x^2)/n
n <- length(x)
paste0("n=",n)
```

```
## [1] "n=150"
```

Estimación de varianza

$$\sigma^2 = 131.291$$

```
varianza <- sigma_mv(n,x)
varianza
```

```
## [1] 131.291
```

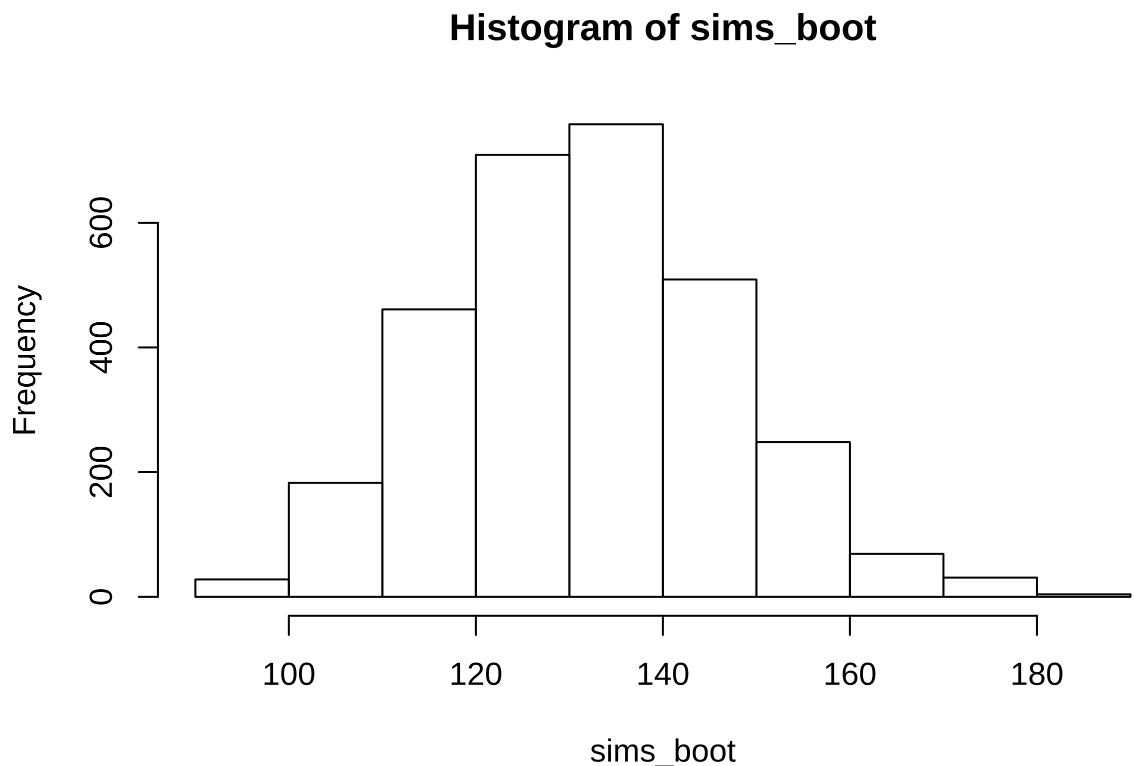
- Aproxima el error estándar de la estimación usando bootstrap paramétrico y realiza un histograma de las replicaciones bootstrap.

error = 0.6480146

```
sigma_hat <- varianza
mu <- 0

set.seed(175904)
thetaBoot <- function(){
    # Simular X_1*,...X_N* con distribución N(mu_hat, sigma_hat^2)
    x_boot <- rnorm(n, mean = 0, sd = sqrt(sigma_hat))
    # Calcular sigma*
    mu_boot <- mu
    (1 / n * sum((x_boot - mu_boot)^2))
}

sims_boot <- rerun(3000, thetaBoot()) %>% flatten_dbl()
ERR <- sqrt(1 / 2999 * sum((sims_boot - mean(sigma_hat)) ^ 2))
ERR
```

```
## [1] 15.11619
```

```
hist(sims_boot)
```



3.2 Análisis bayesiano

- Continuamos con el problema de hacer inferencia de σ^2. Comienza especificando una inicial Gamma Inversa, justifica tu elección de los parámetros de la distribución inicial y grafica la función de densidad.

Justificamos que utilizamos los parámetros $\alpha = 800, \beta = 14$ *debido a la gráfica del punto anterior. Dado que deseamos tener una función Gamma que aproxime dicha forma.*

```
x_gamma <- rgamma(2000, shape = 800, rate = 14)
x_igamma <- (1 / x_gamma) %>% as.data.frame()
x_gamma %>% summary
```

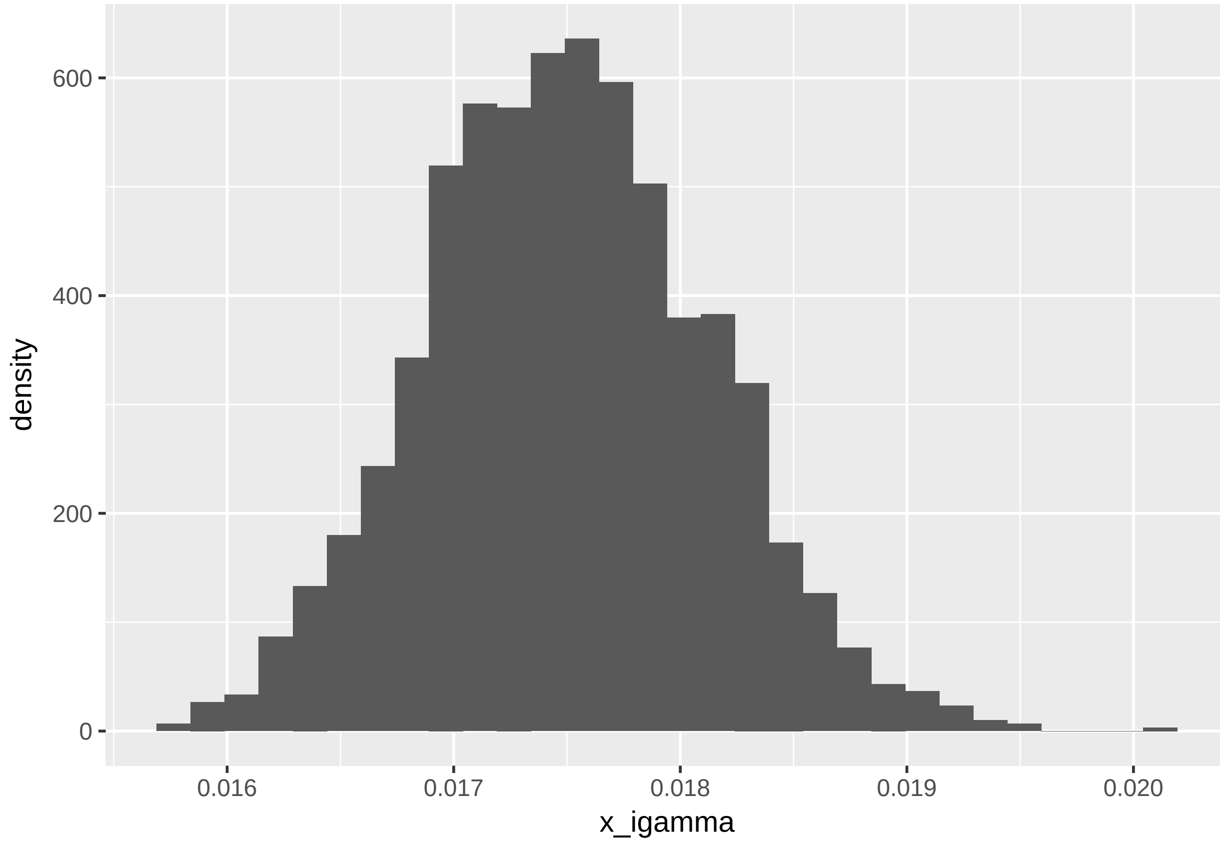
```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   49.77   55.82   57.18   57.22   58.57   63.53
```

```
x_igamma %>% summary
```

```
##         .
##  Min.   :0.01574
##  1st Qu.:0.01707
##  Median :0.01749
##  Mean   :0.01750
##  3rd Qu.:0.01792
##  Max.   :0.02009
```

```
ggplot(x_igamma, aes(x = x_igamma)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..))
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type data.frame. Defaulting to continuous.
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



- Calcula analíticamente la distribución posterior.

$$p(\theta|x) \propto p(x|\theta)p(\theta) = \frac{1}{(\sigma^2)^{N/2}} exp\left(- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \right) exp\left(- \frac{1}{2\tau^2} (\mu - m)^2) \right) \frac{1}{(\sigma^2)^{\alpha+1}} exp\left(- \frac{\beta}{\sigma^2} \right)$$

i.e.

$$\sigma^2|\mu, x \sim GI\left(\frac{N}{2} + \alpha, \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2} + \beta \right)$$

$$(11.45823|0, x) \sim GI\left(\frac{150}{2} + 800, \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - 0)^2}{2} + 14 \right)$$

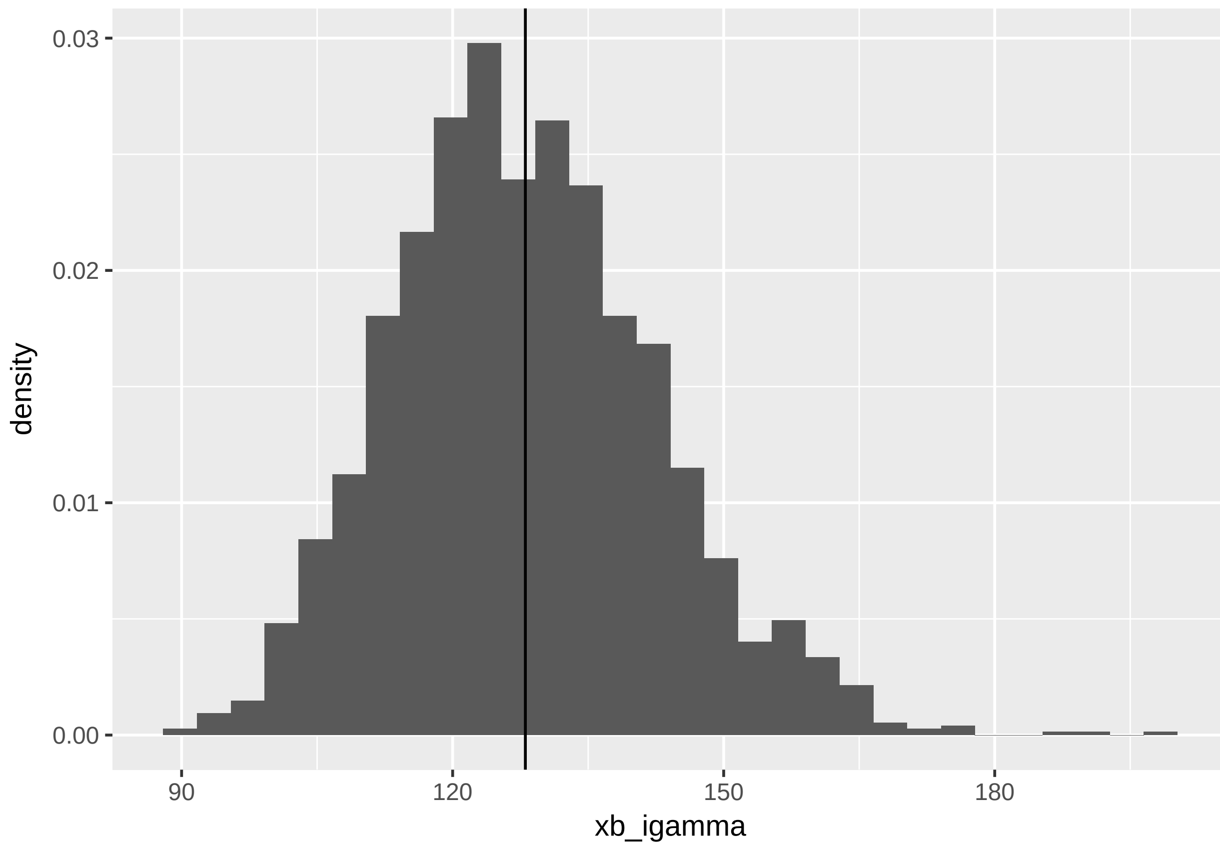
- Realiza un histograma de simulaciones de la distribución posterior y calcula el error estándar de la distribución.

$error_{std} = 14.86156$

```
xb_gamma <- rgamma(2000,shape = (n/2)+3,rate = sum(x^2)/2+3)
xb_igamma <- (1 / xb_gamma) %>% as.data.frame()
```

```r
ggplot(xb_igamma, aes(x = xb_igamma)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..)) +
  geom_vline(xintercept = mean(xb_igamma$., na.rm = T))
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type data.frame. Defaulting to continuous.
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```




```r
ERR_2 <- sqrt(1 / 2000 * sum((xb_igamma - sigma_hat) ^ 2))
ERR_2
```

```
## [1] 14.86156
```

Ajuste con una cadena de Markov.

```r
modelo_normal.txt <-
  '
model{
  for(i in 1:N){
    x[i] ~ dnorm(0, nu)
  }
  # iniciales
  sigma ~ dunif(.1, 300)
  nu <- 1 / sigma
  mu <-0
}
'
cat(modelo_normal.txt, file = 'modelo_normal.bugs')
```

```r
# Ajustamos el Modelo (Generamos una Cadena de Markov)
jags_fit <- jags(
  model.file = "modelo_normal.bugs",    # modelo de JAGS
 # inits = jags.inits,valores iniciales
  data = list(x = x, N = n),    # lista con los datos
  parameters.to.save = c("mu", "sigma", "nu"),  # parámetros por guardar
  n.chains = 1,   # número de cadenas
  n.iter = 10000,    # número de pasos
  n.burnin = 1000,   # calentamiento de la cadena
  n.thin = 1
)
```

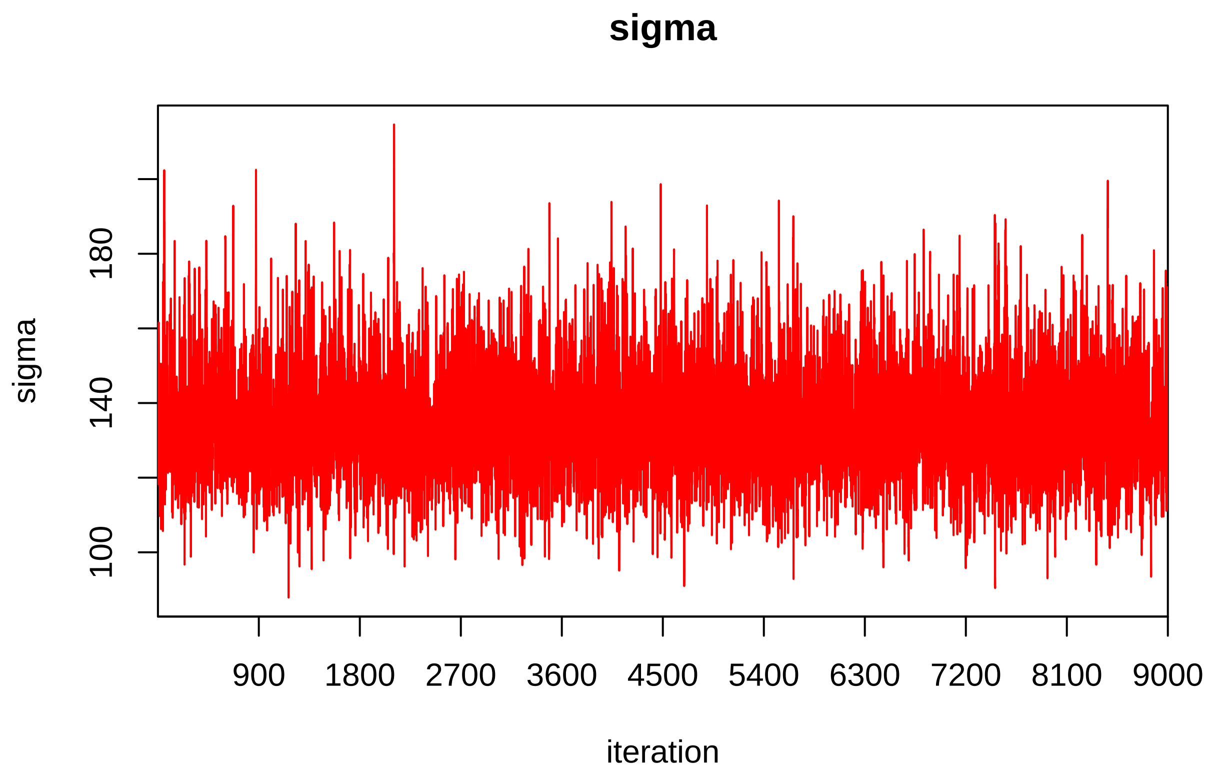
```
## module glm loaded
```

```
## Compiling model graph
##    Resolving undeclared variables
##    Allocating nodes
## Graph information:
##    Observed stochastic nodes: 150
##    Unobserved stochastic nodes: 1
##    Total graph size: 458
##
## Initializing model
```

```r
jags_fit
```

```
## Inference for Bugs model at "modelo_normal.bugs", fit using jags,
##  1 chains, each with 10000 iterations (first 1000 discarded)
##  n.sims = 9000 iterations saved
##          mu.vect sd.vect    2.5%     25%     50%     75%   97.5%
## mu         0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000   0.000
## nu         0.007   0.001   0.006   0.007   0.007   0.008   0.009
## sigma    135.342  15.573 107.844 124.375 134.391 145.361 169.014
## deviance 1158.297   1.406 1157.295 1157.398 1157.756 1158.623 1162.268
##
## DIC info (using the rule, pD = var(deviance)/2)
## pD = 1.0 and DIC = 1159.3
## DIC is an estimate of expected predictive error (lower deviance is better).
```

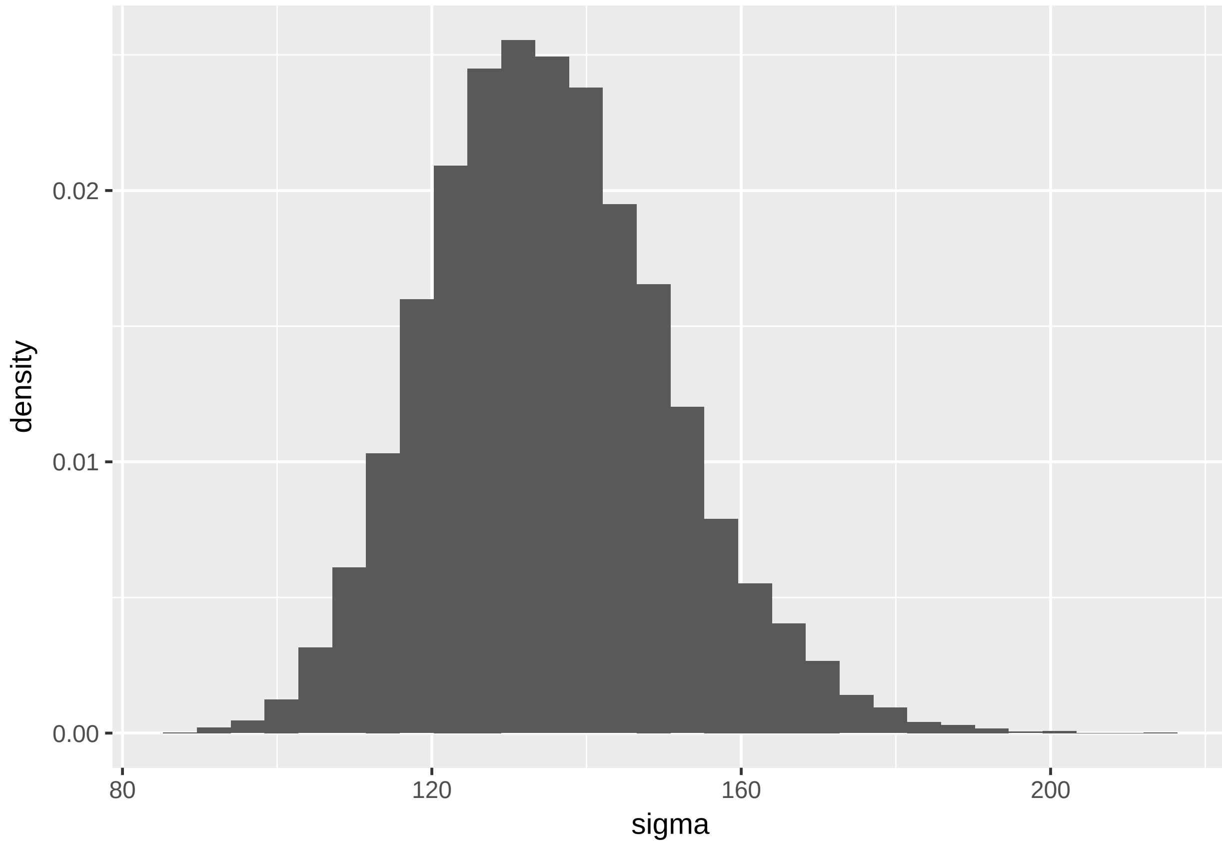
```r
traceplot(jags_fit, varname = c("sigma"), ask = F)
```




```
sigma <- jags_fit$BUGSoutput$sims.matrix[, 4] %>% data.frame
ggplot(sigma, aes(x = sigma)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..))
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type data.frame. Defaulting to continuous.
```

```
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```




```r
ERR_3 <- sqrt(1 / 9000 * sum((sigma - sigma_hat) ^ 2))
ERR_3
```

```
## [1] 16.09043
```

3.3 Supongamos que ahora buscamos hacer inferencia del parámetro $\tau = log(\sigma)$, ¿cuál es el estimador de máxima verosimilitud?

$$\tau = 4.877416$$

```r
T <- log(sqrt(sigma_hat))
T
```

```
## [1] 2.438708
```

- Utiliza bootstrap paramétrico para generar un intervalo de confianza del 95% para el parámetro τ y realiza un histograma de las replicaciones bootstrap.

2.5% es 2.31689

97.5% es 2.542669

```r
mu <-0
sigma_hat <- sqrt(1 / n * sum((x - mu) ^ 2))
mu
```

```
## [1] 0
```

```r
sigma_hat
```

```
## [1] 11.45823
```

```r
thetaBoot_log <- function(){
    # Simular X_1*,...X_N* con distribución N(mu_hat, sigma_hat^2)
    x_boot <- rnorm(n, mean = mu, sd = sigma_hat)
    # Calcular sigma*
    mu_boot <- mean(x_boot)
    sigma_boot <- sqrt(1 / n * sum((x_boot - mu_boot) ^ 2))
    log(sigma_boot)
}

sims_boot_log <- rerun(3000, thetaBoot_log()) %>% flatten_dbl()
log_inf <- quantile(sims_boot_log, 0.025)
log_sup <- quantile(sims_boot_log, 0.975)
log_inf
```

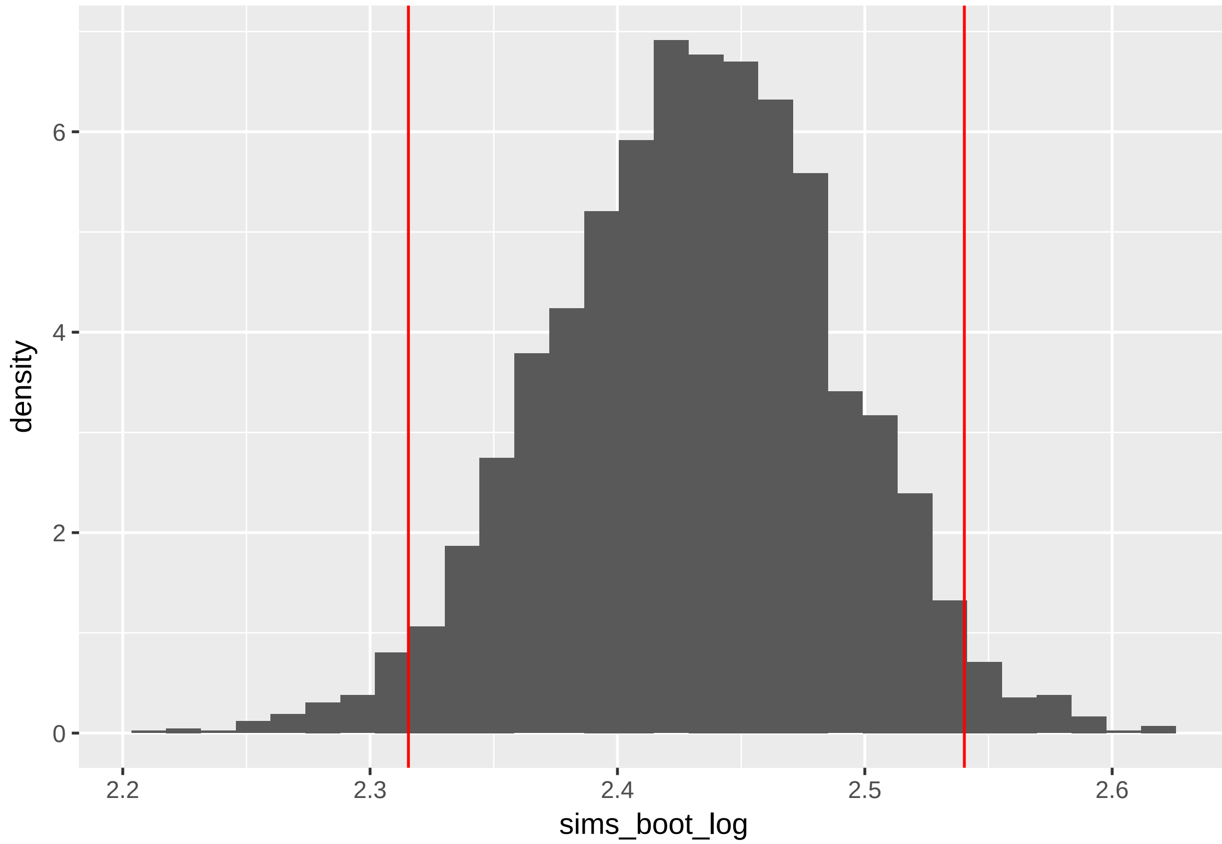
```
##     2.5%
## 2.315491
```

```r
log_sup
```

```
##    97.5%
## 2.540246
```

```r
sims_boot_log <- sims_boot_log %>% data.frame
ggplot(sims_boot_log, aes(x = sims_boot_log)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..)) +
  geom_vline(xintercept = log_inf, color = "red") +
  geom_vline(xintercept = log_sup, color = "red")
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type data.frame. Defaulting to continuous.

## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



- Ahora volvamos a inferencia bayesiana, calcula un intervalo de confianza para τ y un histograma de la distribución posterior de τ utilizando la inicial uniforme (para σ^2).

```
modelo_teta.txt <-
  '
model{
  for(i in 1:N){
    x[i] ~ dnorm(0, nu)
  }
  # iniciales
  sigma ~ dunif(.1, 300)
  nu <- 1 / sigma
  mu <-0
  teta <- log(sqrt(sigma))
}
'
cat(modelo_teta.txt, file = 'modelo_normal_log.bugs')

# Ajustamos el Modelo (Generamos una Cadena de Markov)
jags_fit_teta <- jags(
  model.file = "modelo_normal_log.bugs",    # modelo de JAGS
 # inits = jags.inits,   # valores iniciales
  data = list(x = x, N = n),    # lista con los datos
  parameters.to.save = c("mu", "sigma", "teta"),  # parámetros por guardar
  n.chains = 1,   # número de cadenas
  n.iter = 10000,    # número de pasos
  n.burnin = 1000,   # calentamiento de la cadena
```

```r
  n.thin = 1
)
```

```
## Compiling model graph
##    Resolving undeclared variables
##    Allocating nodes
## Graph information:
##    Observed stochastic nodes: 150
##    Unobserved stochastic nodes: 1
##    Total graph size: 460
##
## Initializing model
```

```r
jags_fit_teta
```

```
## Inference for Bugs model at "modelo_normal_log.bugs", fit using jags,
##  1 chains, each with 10000 iterations (first 1000 discarded)
##  n.sims = 9000 iterations saved
##           mu.vect sd.vect     2.5%      25%      50%      75%    97.5%
## mu          0.000   0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000
## sigma     134.414  15.717  106.895  123.368  133.271  144.050  168.860
## teta        2.447   0.058    2.336    2.408    2.446    2.485    2.565
## deviance 1158.304   1.416 1157.295 1157.395 1157.742 1158.646 1162.410
##
## DIC info (using the rule, pD = var(deviance)/2)
## pD = 1.0 and DIC = 1159.3
## DIC is an estimate of expected predictive error (lower deviance is better).
```

```r
teta_mc <- jags_fit_teta$BUGSoutput$sims.matrix[,4]
teta_inf <- quantile(teta_mc, 0.025)
teta_sup <- quantile(teta_mc, 0.975)
teta_inf
```

```
##     2.5%
## 2.335924
```

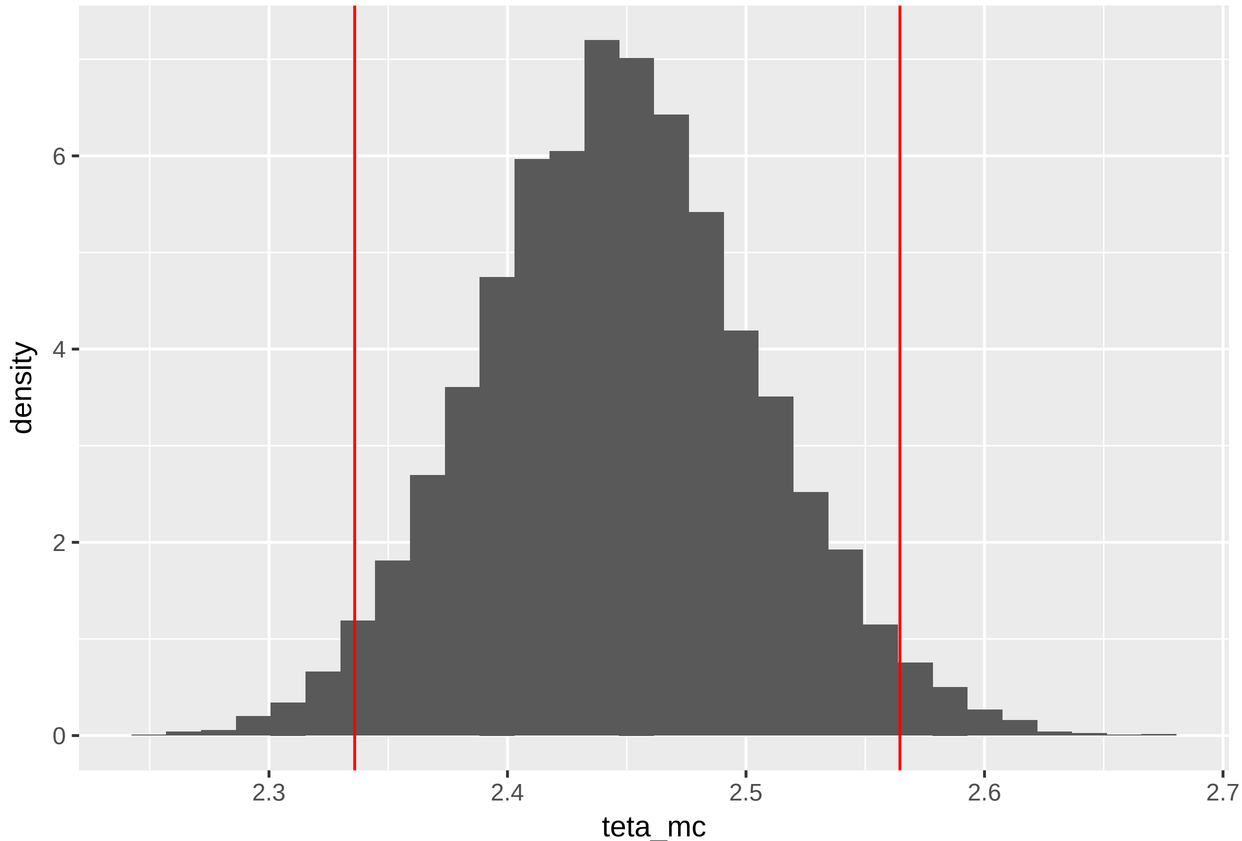
```r
teta_sup
```

```
##    97.5%
## 2.564535
```

```r
teta_mc <- teta_mc %>% data.frame
ggplot(teta_mc, aes(x = teta_mc)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..)) +
  geom_vline(xintercept = teta_inf, color = "red") +
  geom_vline(xintercept = teta_sup, color = "red")
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type data.frame. Defaulting to continuous.
```

```
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



4. Metrópolis

En la tarea de Análisis Bayesiano (respuestas aquí programaste un algoritmo de Metropolis para el caso Normal con varianza conocida. En el ejercicio de la tarea los saltos se proponían de acuerdo a una distribución normal: N(0, 5). Para este ejercicio modifica el código con el fin de calcular el porcentaje de valores rechazados y considera las siguientes distribuciones propuesta: a) N(0,0.2), b) N(0,5) y c) N(0,20).

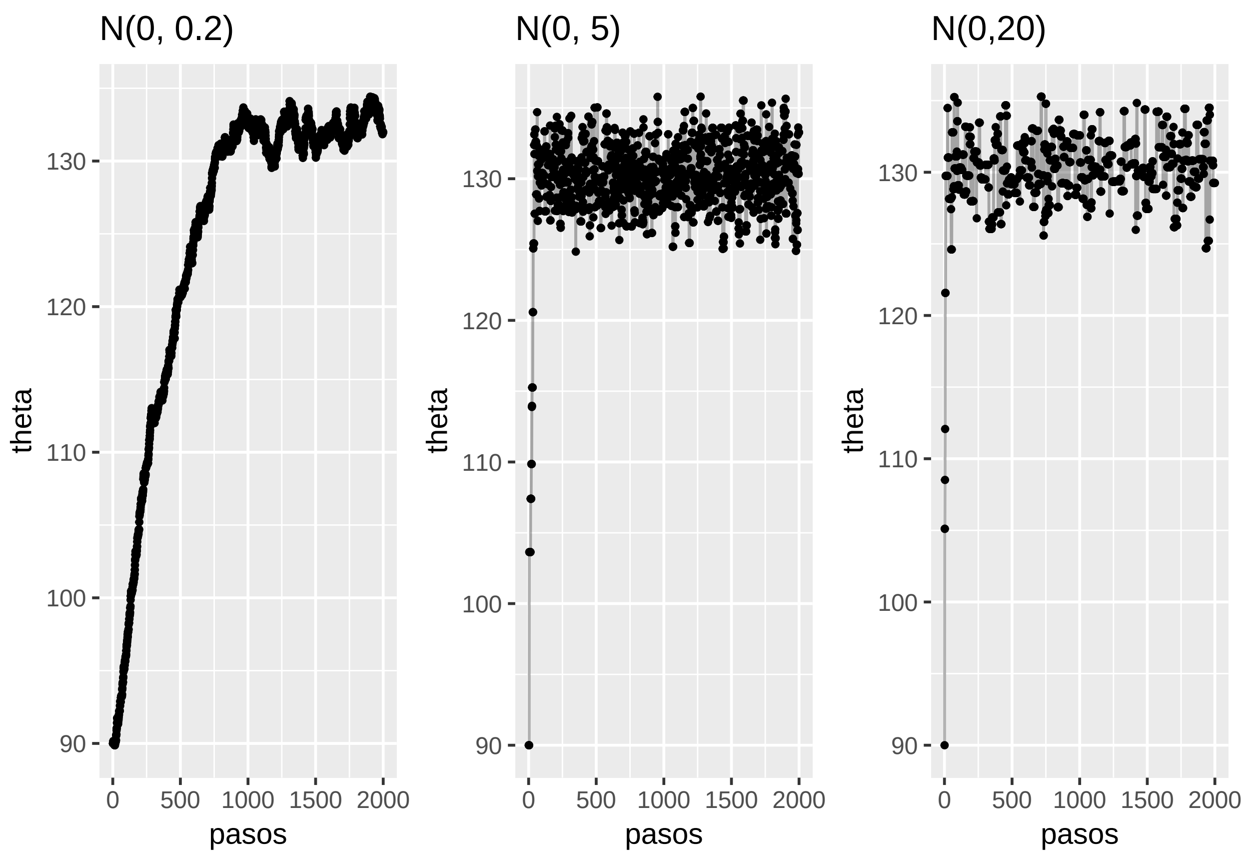
- 4.1 Genera valores de la distribución posterior usando cada una de las distribuciones propuesta, utiliza la misma distribución inicial y datos observados que utilizaste en la tarea (realiza 6000 pasos). Grafica los primeros 2000 pasos de la cadena. Comenta acerca de las similitudes/diferencias entre las gráficas.

Claramente entre el segundo parámetro de N sea más grande, en el código `sd_prop` hay más distancia (varianza) entre los pasos. Por lo que se ven mucho más espaciados entre paso y paso. 0.2 se ve casí como una "mancha", mientra 5 y 20 se ven distanciados.

```
prior <- function(mu = 100, tau = 10){
  mu <- mu
  tau <- tau
  function(theta){
    dnorm(theta, mu, tau)
  }
}
mu <- 150
tau <- 15
mi_prior <- prior(mu, tau)
# mu
```

```r
# tau
# mi_prior(5)
# S: sum x_i, S2: sum x_i^2, N: número obs., sigma: desviación estándar (conocida)
S <- 13000
S2 <- 1700000
N <- 100
sigma <- 20
likeNorm <- function(S, S2, N, sigma = sigma){
  # quitamos constantes
  sigma2 <-  sigma ^ 2
  function(theta){
    exp(-1 / (2 * sigma2) * (S2 - 2 * theta * S +
        N * theta ^ 2))
  }
}
mi_like <- likeNorm(S = S, S2 = S2, N = N, sigma = sigma)
# mi_like(130)
postRelProb <- function(theta){
  mi_like(theta) * mi_prior(theta)
}
caminaAleat <- function(theta, sd_prop = .2){ # theta: valor actual
  salto_prop <- rnorm(n = 1, sd = sd_prop) # salto propuesto
  theta_prop <- theta + salto_prop # theta propuesta
  u <- runif(1)
  p_move = min(postRelProb(theta_prop) / postRelProb(theta), 1) # prob mover
  if(p_move  > u){
    return(theta_prop) # aceptar valor propuesto
  }
  else{
    return(theta) # rechazar
  }
}

### 0.2
# Generamos la caminata aleatoria
pasos <- 6000
camino <- numeric(pasos) # vector que guardará las simulaciones
camino[1] <- 90 # valor inicial
rechazo = 0

for (j in 2:pasos){
  camino[j] <- caminaAleat(camino[j - 1])
  rechazo <- rechazo + 1 * (camino[j] == camino[j - 1])
}

rp0.2 <- rechazo / pasos
caminata0.2 <- data.frame(pasos = 1:pasos, theta = camino)
g1 <- ggplot(caminata0.2[1:2000, ], aes(x = pasos, y = theta)) +
  geom_point(size = 0.8) +
  geom_path(alpha = 0.3) +
  ggtitle("N(0, 0.2)")

#### 5
```

```r
# Generamos la caminata aleatoria
pasos <- 6000
camino <- numeric(pasos) # vector que guardará las simulaciones
camino[1] <- 90 # valor inicial
rechazo = 0

for (j in 2:pasos){
  camino[j] <- caminaAleat(camino[j - 1], sd_prop = 5)
  rechazo <- rechazo + 1 * (camino[j] == camino[j - 1])
}

rp5 <- rechazo / pasos
caminata5 <- data.frame(pasos = 1:pasos, theta = camino)
g2 <- ggplot(caminata5[1:2000, ], aes(x = pasos, y = theta)) +
  geom_point(size = 0.8) +
  geom_path(alpha = 0.3) +
  ggtitle("N(0, 5)")

#### 20
# Generamos la caminata aleatoria
pasos <- 6000
camino <- numeric(pasos) # vector que guardará las simulaciones
camino[1] <- 90 # valor inicial
rechazo = 0

for (j in 2:pasos){
  camino[j] <- caminaAleat(camino[j - 1], sd_prop = 20)
  rechazo <- rechazo + 1 * (camino[j] == camino[j - 1])
}

rp20 <- rechazo / pasos
caminata20 <- data.frame(pasos = 1:pasos, theta = camino)
g3 <- ggplot(caminata20[1:2000, ], aes(x = pasos, y = theta)) +
  geom_point(size = 0.8) +
  geom_path(alpha = 0.3) +
  ggtitle("N(0,20)")
grid.arrange(g1,g2,g3,ncol=3)
```



- 4.2 Calcula el porcentaje de valores rechazados, compara los resultados y explica a que se deben las diferencias.

A las mencionadas “varianzas” entre pasos. σ | rechazo — | — 0.2 | 5.56% 5 | 57.30% 20 | 86.91%

```
rechazo <- data.frame(sd = c(0.2,5,20), rechazo_paso =c(rp0.2,rp5,rp20))
rechazo
```

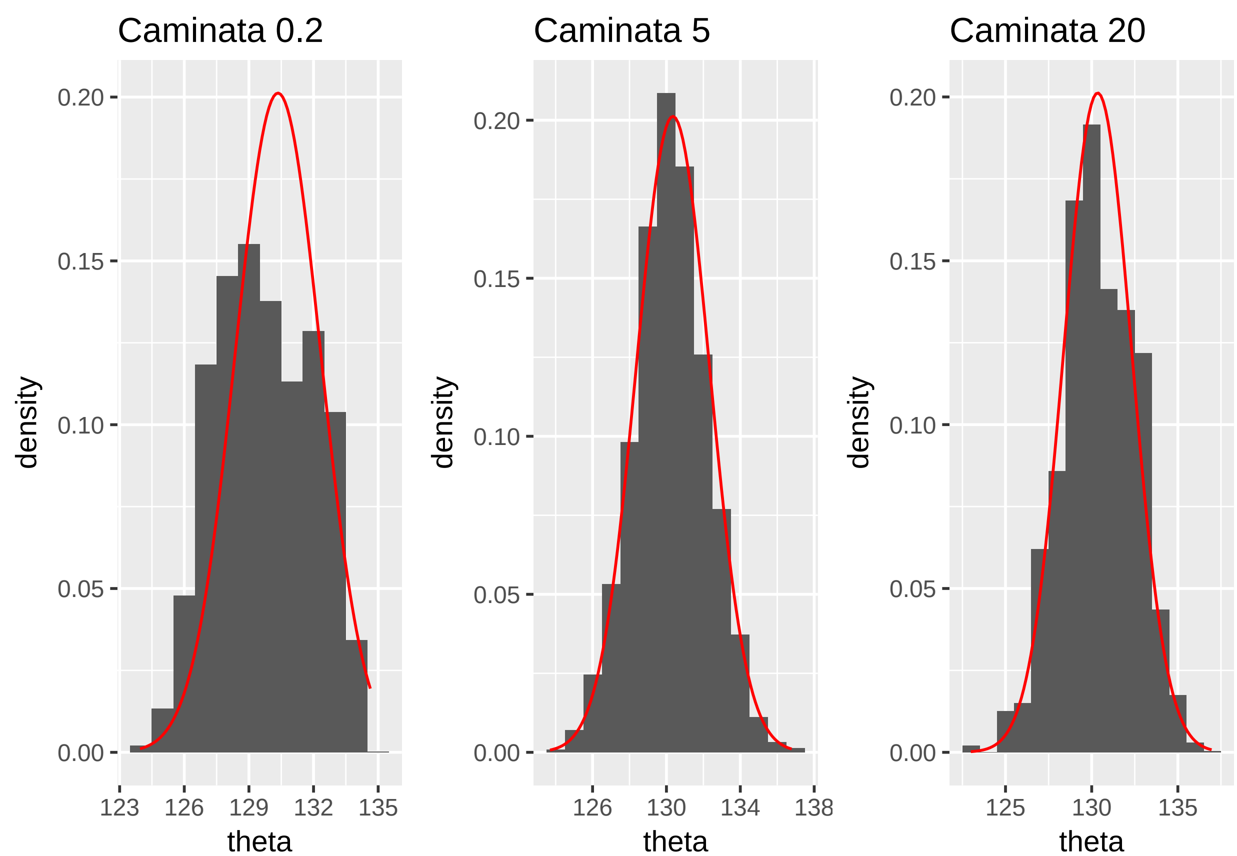
```
##     sd rechazo_paso
## 1  0.2   0.05566667
## 2  5.0   0.57300000
## 3 20.0   0.86916667
```

- 4.3 Elimina las primeras 1000 simulaciones y genera histogramas de la distribución posterior para cada caso, ¿que distribución propuesta nos da la representación más cercana a la verdadera distribución posterior? (compara las simulaciones de los tres escenarios de distribución propuesta con la distribución posterior calculada de manera analítica)

Es mucho más aproximado $N(0,5)$

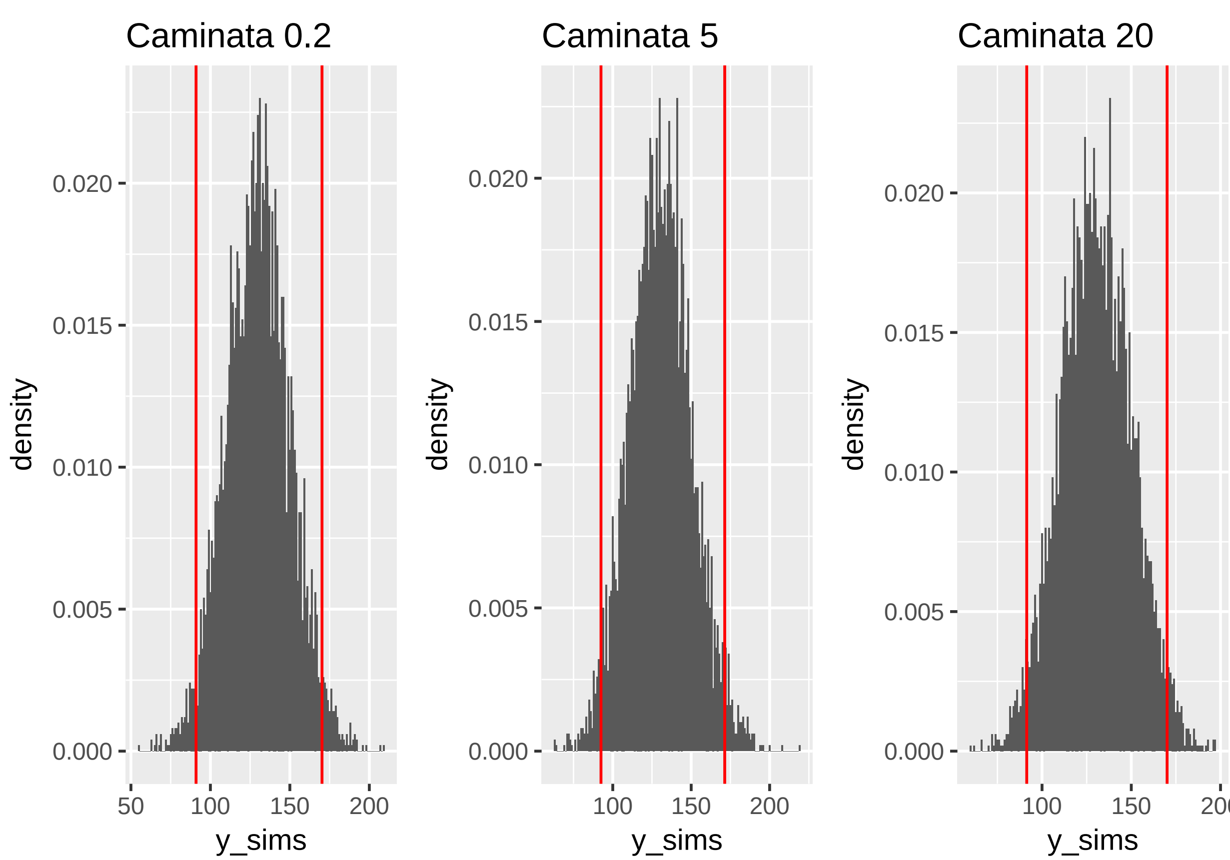
```
caminata0.2 <- filter(caminata0.2, pasos > 1000)
caminata5 <- filter(caminata5, pasos > 1000)
caminata20 <- filter(caminata20, pasos > 1000)
media_calc <- 20 ^ 2 * 150 / (20 ^ 2 + 100 * 15 ^ 2) + 15 ^ 2 * 13000 / (20^2  + 100 * 15^2)
sd_calc <- sigma ^ 2 * tau ^ 2 / (sigma ^ 2 + N * tau ^ 2)
sd_calc<- sqrt(sd_calc)
g1 <- ggplot(caminata0.2, aes(x = theta)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), binwidth = 1)+
  stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = media_calc, sd = sd_calc), color = "red") +
```

```
  ggtitle("Caminata 0.2")
g2 <- ggplot(caminata5, aes(x = theta)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), binwidth = 1)+
  stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = media_calc, sd = sd_calc), color = "red") +
  ggtitle("Caminata 5")
g3 <- ggplot(caminata20, aes(x = theta)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), binwidth = 1)+
  stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = media_calc, sd = sd_calc), color = "red") +
  ggtitle("Caminata 20")
grid.arrange(g1,g2,g3, ncol=3)
```




```
caminata0.2f<- data.frame(pasos = 1:nrow(caminata0.2), mu = caminata0.2[1:nrow(caminata0.2), 2],
  sigma = sigma)
caminata0.2f$y_sims <- rnorm(1:nrow(caminata0.2f), caminata0.2f$mu, caminata0.2f$sigma)

teta_inf0.2 <- quantile(caminata0.2f$y_sims, 0.025, na.rm = TRUE)
teta_sup0.2 <- quantile(caminata0.2f$y_sims, 0.975, na.rm = TRUE)

g1 <- ggplot(caminata0.2f, aes(x = y_sims)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), binwidth = 1) +
  geom_vline(xintercept = teta_inf0.2, color = "red") +
  geom_vline(xintercept = teta_sup0.2, color = "red") +
  ggtitle("Caminata 0.2")
caminata5f<- data.frame(pasos = 1:nrow(caminata5), mu = caminata5[1:nrow(caminata5), 2],
  sigma = sigma)
```

```r
caminata5f$y_sims <- rnorm(1:nrow(caminata5f), caminata5f$mu, caminata5f$sigma)

teta_inf5 <- quantile(caminata5f$y_sims, 0.025, na.rm = TRUE)
teta_sup5 <- quantile(caminata5f$y_sims, 0.975, na.rm = TRUE)

g2 <- ggplot(caminata5f, aes(x = y_sims)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), binwidth = 1) +
  geom_vline(xintercept = teta_inf5, color = "red") +
  geom_vline(xintercept = teta_sup5, color = "red") +
  ggtitle("Caminata 5")
caminata20f<- data.frame(pasos = 1:nrow(caminata20), mu = caminata20[1:nrow(caminata20), 2],
  sigma = sigma)

caminata20f$y_sims <- rnorm(1:nrow(caminata20f), caminata20f$mu, caminata20f$sigma)

teta_inf20 <- quantile(caminata20f$y_sims, 0.025, na.rm = TRUE)
teta_sup20 <- quantile(caminata20f$y_sims, 0.975, na.rm = TRUE)

g3 <- ggplot(caminata20f, aes(x = y_sims)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), binwidth = 1)+
  geom_vline(xintercept = teta_inf20, color = "red") +
  geom_vline(xintercept = teta_sup20, color = "red") +
  ggtitle("Caminata 20")
grid.arrange(g1,g2,g3,ncol=3)
```



```
rm(g1,g2,g3)

data.frame(N=c(0.2,5,20),
           inf=c(teta_inf0.2, teta_inf5, teta_inf20),
           sup=c(teta_sup0.2, teta_sup5, teta_sup20))
```

```
##      N      inf      sup
## 1  0.2 90.97914 170.2313
## 2  5.0 92.49306 171.3730
## 3 20.0 91.41690 170.0727
```

5. Modelos jerárquicos

- 5.1 Si piensas en este problema como un lanzamiento de monedas, ¿a qué corresponden las monedas y los lanzamientos?

Las monedas corresponden a los conejos y los lanzamientos a los experimentos. Donde θ_1 *en el caso de los lanzamientos corresponde a la probabilidad de sacar águila o sol; en el caso de los conejos, es la probabilidad de desarrollar o no un tumor.*

- 5.2 La base de datos rabbits contiene las observaciones de los 71 experimentos, cada renglón corresponde a una observación.

```
rabbits
```

```
##      tumor experiment
## 1        1          1
## 2        0          1
## 3        0          1
## 4        0          1
## 5        0          1
## 6        0          1
## 7        0          1
## 8        0          1
## 9        0          1
## 10       0          1
## 11       0          1
## 12       0          1
## 13       0          1
## 14       0          1
## 15       0          1
## 16       0          1
## 17       0          1
## 18       0          1
## 19       0          1
## 20       0          1
## 21       0          1
## 22       1          2
## 23       0          2
## 24       0          2
## 25       0          2
## 26       0          2
## 27       0          2
## 28       0          2
## 29       0          2
```

```
## 30          0             2
## 31          0             2
## 32          0             2
## 33          0             2
## 34          0             2
## 35          0             2
## 36          0             2
## 37          0             2
## 38          0             2
## 39          0             2
## 40          0             2
## 41          0             2
## 42          0             2
## 43          1             3
## 44          0             3
## 45          0             3
## 46          0             3
## 47          0             3
## 48          0             3
## 49          0             3
## 50          0             3
## 51          0             3
## 52          0             3
## 53          0             3
## 54          0             3
## 55          0             3
## 56          0             3
## 57          0             3
## 58          0             3
## 59          0             3
## 60          0             3
## 61          0             3
## 62          0             3
## 63          0             3
## 64          1             4
## 65          0             4
## 66          0             4
## 67          0             4
## 68          0             4
## 69          0             4
## 70          0             4
## 71          0             4
## 72          0             4
## 73          0             4
## 74          0             4
## 75          0             4
## 76          0             4
## 77          0             4
## 78          0             4
## 79          0             4
## 80          0             4
## 81          0             4
## 82          0             4
## 83          0             4
```

```
## 84         0              4
## 85         1              5
## 86         0              5
## 87         0              5
## 88         0              5
## 89         0              5
## 90         0              5
## 91         0              5
## 92         0              5
## 93         0              5
## 94         0              5
## 95         0              5
## 96         0              5
## 97         0              5
## 98         0              5
## 99         0              5
## 100        0              5
## 101        0              5
## 102        0              5
## 103        0              5
## 104        0              5
## 105        0              5
## 106        1              6
## 107        0              6
## 108        0              6
## 109        0              6
## 110        0              6
## 111        0              6
## 112        0              6
## 113        0              6
## 114        0              6
## 115        0              6
## 116        0              6
## 117        0              6
## 118        0              6
## 119        0              6
## 120        0              6
## 121        0              6
## 122        0              6
## 123        0              6
## 124        0              6
## 125        0              6
## 126        0              6
## 127        1              7
## 128        0              7
## 129        0              7
## 130        0              7
## 131        0              7
## 132        0              7
## 133        0              7
## 134        0              7
## 135        0              7
## 136        0              7
## 137        0              7
```

```
## 138        0           7
## 139        0           7
## 140        0           7
## 141        0           7
## 142        0           7
## 143        0           7
## 144        0           7
## 145        0           7
## 146        0           7
## 147        0           7
## 148        1           8
## 149        0           8
## 150        0           8
## 151        0           8
## 152        0           8
## 153        0           8
## 154        0           8
## 155        0           8
## 156        0           8
## 157        0           8
## 158        0           8
## 159        0           8
## 160        0           8
## 161        0           8
## 162        0           8
## 163        0           8
## 164        0           8
## 165        0           8
## 166        0           8
## 167        0           8
## 168        1           9
## 169        0           9
## 170        0           9
## 171        0           9
## 172        0           9
## 173        0           9
## 174        0           9
## 175        0           9
## 176        0           9
## 177        0           9
## 178        0           9
## 179        0           9
## 180        0           9
## 181        0           9
## 182        0           9
## 183        0           9
## 184        0           9
## 185        0           9
## 186        0           9
## 187        0           9
## 188        1          10
## 189        0          10
## 190        0          10
## 191        0          10
```

```
## 192         0            10
## 193         0            10
## 194         0            10
## 195         0            10
## 196         0            10
## 197         0            10
## 198         0            10
## 199         0            10
## 200         0            10
## 201         0            10
## 202         0            10
## 203         0            10
## 204         0            10
## 205         0            10
## 206         0            10
## 207         0            10
## 208         1            11
## 209         0            11
## 210         0            11
## 211         0            11
## 212         0            11
## 213         0            11
## 214         0            11
## 215         0            11
## 216         0            11
## 217         0            11
## 218         0            11
## 219         0            11
## 220         0            11
## 221         0            11
## 222         0            11
## 223         0            11
## 224         0            11
## 225         0            11
## 226         0            11
## 227         0            11
## 228         1            12
## 229         0            12
## 230         0            12
## 231         0            12
## 232         0            12
## 233         0            12
## 234         0            12
## 235         0            12
## 236         0            12
## 237         0            12
## 238         0            12
## 239         0            12
## 240         0            12
## 241         0            12
## 242         0            12
## 243         0            12
## 244         0            12
## 245         0            12
```

```
## 246          0              12
## 247          1              13
## 248          0              13
## 249          0              13
## 250          0              13
## 251          0              13
## 252          0              13
## 253          0              13
## 254          0              13
## 255          0              13
## 256          0              13
## 257          0              13
## 258          0              13
## 259          0              13
## 260          0              13
## 261          0              13
## 262          0              13
## 263          0              13
## 264          0              13
## 265          0              13
## 266          1              14
## 267          0              14
## 268          0              14
## 269          0              14
## 270          0              14
## 271          0              14
## 272          0              14
## 273          0              14
## 274          0              14
## 275          0              14
## 276          0              14
## 277          0              14
## 278          0              14
## 279          0              14
## 280          0              14
## 281          0              14
## 282          0              14
## 283          0              14
## 284          1              15
## 285          1              15
## 286          0              15
## 287          0              15
## 288          0              15
## 289          0              15
## 290          0              15
## 291          0              15
## 292          0              15
## 293          0              15
## 294          0              15
## 295          0              15
## 296          0              15
## 297          0              15
## 298          0              15
## 299          0              15
```

```
## 300          0           15
## 301          0           15
## 302          0           15
## 303          0           15
## 304          0           15
## 305          1           16
## 306          1           16
## 307          0           16
## 308          0           16
## 309          0           16
## 310          0           16
## 311          0           16
## 312          0           16
## 313          0           16
## 314          0           16
## 315          0           16
## 316          0           16
## 317          0           16
## 318          0           16
## 319          0           16
## 320          0           16
## 321          0           16
## 322          0           16
## 323          0           16
## 324          0           16
## 325          0           16
## 326          1           17
## 327          1           17
## 328          0           17
## 329          0           17
## 330          0           17
## 331          0           17
## 332          0           17
## 333          0           17
## 334          0           17
## 335          0           17
## 336          0           17
## 337          0           17
## 338          0           17
## 339          0           17
## 340          0           17
## 341          0           17
## 342          0           17
## 343          0           17
## 344          0           17
## 345          0           17
## 346          0           17
## 347          1           18
## 348          1           18
## 349          0           18
## 350          0           18
## 351          0           18
## 352          0           18
## 353          0           18
```

```
## 354          0            18
## 355          0            18
## 356          0            18
## 357          0            18
## 358          0            18
## 359          0            18
## 360          0            18
## 361          0            18
## 362          0            18
## 363          0            18
## 364          0            18
## 365          0            18
## 366          0            18
## 367          0            18
## 368          1            19
## 369          1            19
## 370          0            19
## 371          0            19
## 372          0            19
## 373          0            19
## 374          0            19
## 375          0            19
## 376          0            19
## 377          0            19
## 378          0            19
## 379          0            19
## 380          0            19
## 381          0            19
## 382          0            19
## 383          0            19
## 384          0            19
## 385          0            19
## 386          0            19
## 387          0            19
## 388          1            20
## 389          1            20
## 390          0            20
## 391          0            20
## 392          0            20
## 393          0            20
## 394          0            20
## 395          0            20
## 396          0            20
## 397          0            20
## 398          0            20
## 399          0            20
## 400          0            20
## 401          0            20
## 402          0            20
## 403          0            20
## 404          0            20
## 405          0            20
## 406          0            20
## 407          0            20
```

```
## 408         1            21
## 409         1            21
## 410         0            21
## 411         0            21
## 412         0            21
## 413         0            21
## 414         0            21
## 415         0            21
## 416         0            21
## 417         0            21
## 418         0            21
## 419         0            21
## 420         0            21
## 421         0            21
## 422         0            21
## 423         0            21
## 424         0            21
## 425         0            21
## 426         0            21
## 427         1            22
## 428         1            22
## 429         0            22
## 430         0            22
## 431         0            22
## 432         0            22
## 433         0            22
## 434         0            22
## 435         0            22
## 436         0            22
## 437         0            22
## 438         0            22
## 439         0            22
## 440         0            22
## 441         0            22
## 442         0            22
## 443         0            22
## 444         0            22
## 445         0            22
## 446         1            23
## 447         1            23
## 448         1            23
## 449         1            23
## 450         0            23
## 451         0            23
## 452         0            23
## 453         0            23
## 454         0            23
## 455         0            23
## 456         0            23
## 457         0            23
## 458         0            23
## 459         0            23
## 460         0            23
## 461         0            23
```

```
## 462         0            23
## 463         0            23
## 464         0            23
## 465         0            23
## 466         0            23
## 467         0            23
## 468         0            23
## 469         0            23
## 470         0            23
## 471         0            23
## 472         0            23
## 473         0            23
## 474         1            24
## 475         1            24
## 476         1            24
## 477         0            24
## 478         0            24
## 479         0            24
## 480         0            24
## 481         0            24
## 482         0            24
## 483         0            24
## 484         0            24
## 485         0            24
## 486         0            24
## 487         0            24
## 488         0            24
## 489         0            24
## 490         0            24
## 491         0            24
## 492         0            24
## 493         0            24
## 494         0            24
## 495         0            24
## 496         0            24
## 497         0            24
## 498         0            24
## 499         0            24
## 500         1            25
## 501         1            25
## 502         1            25
## 503         0            25
## 504         0            25
## 505         0            25
## 506         0            25
## 507         0            25
## 508         0            25
## 509         0            25
## 510         0            25
## 511         0            25
## 512         0            25
## 513         0            25
## 514         0            25
## 515         0            25
```

```
## 516        0          25
## 517        0          25
## 518        0          25
## 519        0          25
## 520        0          25
## 521        0          25
## 522        0          25
## 523        0          25
## 524        0          25
## 525        1          26
## 526        1          26
## 527        1          26
## 528        0          26
## 529        0          26
## 530        0          26
## 531        0          26
## 532        0          26
## 533        0          26
## 534        0          26
## 535        0          26
## 536        0          26
## 537        0          26
## 538        0          26
## 539        0          26
## 540        0          26
## 541        0          26
## 542        0          26
## 543        0          26
## 544        0          26
## 545        0          26
## 546        0          26
## 547        0          26
## 548        0          26
## 549        1          27
## 550        1          27
## 551        1          27
## 552        0          27
## 553        0          27
## 554        0          27
## 555        0          27
## 556        0          27
## 557        0          27
## 558        0          27
## 559        0          27
## 560        0          27
## 561        0          27
## 562        0          27
## 563        0          27
## 564        0          27
## 565        0          27
## 566        0          27
## 567        0          27
## 568        0          27
## 569        0          27
```

```
## 570         1           28
## 571         1           28
## 572         1           28
## 573         0           28
## 574         0           28
## 575         0           28
## 576         0           28
## 577         0           28
## 578         0           28
## 579         0           28
## 580         0           28
## 581         0           28
## 582         0           28
## 583         0           28
## 584         0           28
## 585         0           28
## 586         0           28
## 587         0           28
## 588         0           28
## 589         0           28
## 590         0           28
## 591         1           29
## 592         1           29
## 593         1           29
## 594         0           29
## 595         0           29
## 596         0           29
## 597         0           29
## 598         0           29
## 599         0           29
## 600         0           29
## 601         0           29
## 602         0           29
## 603         0           29
## 604         0           29
## 605         0           29
## 606         0           29
## 607         0           29
## 608         0           29
## 609         0           29
## 610         0           29
## 611         0           29
## 612         1           30
## 613         1           30
## 614         1           30
## 615         0           30
## 616         0           30
## 617         0           30
## 618         0           30
## 619         0           30
## 620         0           30
## 621         0           30
## 622         0           30
## 623         0           30
```

```
## 624          0            30
## 625          0            30
## 626          0            30
## 627          0            30
## 628          0            30
## 629          0            30
## 630          0            30
## 631          0            30
## 632          0            30
## 633          1            31
## 634          1            31
## 635          1            31
## 636          0            31
## 637          0            31
## 638          0            31
## 639          0            31
## 640          0            31
## 641          0            31
## 642          0            31
## 643          0            31
## 644          0            31
## 645          0            31
## 646          0            31
## 647          0            31
## 648          0            31
## 649          0            31
## 650          0            31
## 651          0            31
## 652          0            31
## 653          0            31
## 654          1            32
## 655          1            32
## 656          1            32
## 657          0            32
## 658          0            32
## 659          0            32
## 660          0            32
## 661          0            32
## 662          0            32
## 663          0            32
## 664          0            32
## 665          0            32
## 666          0            32
## 667          0            32
## 668          0            32
## 669          0            32
## 670          0            32
## 671          0            32
## 672          0            32
## 673          0            32
## 674          0            32
## 675          1            33
## 676          1            33
## 677          0            33
```

```
## 678        0          33
## 679        0          33
## 680        0          33
## 681        0          33
## 682        0          33
## 683        0          33
## 684        0          33
## 685        0          33
## 686        1          34
## 687        1          34
## 688        1          34
## 689        1          34
## 690        1          34
## 691        1          34
## 692        0          34
## 693        0          34
## 694        0          34
## 695        0          34
## 696        0          34
## 697        0          34
## 698        0          34
## 699        0          34
## 700        0          34
## 701        0          34
## 702        0          34
## 703        0          34
## 704        0          34
## 705        0          34
## 706        0          34
## 707        0          34
## 708        0          34
## 709        0          34
## 710        0          34
## 711        0          34
## 712        0          34
## 713        0          34
## 714        0          34
## 715        0          34
## 716        0          34
## 717        0          34
## 718        0          34
## 719        0          34
## 720        0          34
## 721        0          34
## 722        0          34
## 723        0          34
## 724        0          34
## 725        0          34
## 726        0          34
## 727        0          34
## 728        0          34
## 729        0          34
## 730        0          34
## 731        0          34
```

```
## 732     0     34
## 733     0     34
## 734     0     34
## 735     0     34
## 736     1     35
## 737     1     35
## 738     1     35
## 739     0     35
## 740     0     35
## 741     0     35
## 742     0     35
## 743     0     35
## 744     0     35
## 745     0     35
## 746     0     35
## 747     0     35
## 748     0     35
## 749     0     35
## 750     0     35
## 751     0     35
## 752     0     35
## 753     0     35
## 754     0     35
## 755     0     35
## 756     1     36
## 757     1     36
## 758     1     36
## 759     1     36
## 760     1     36
## 761     1     36
## 762     0     36
## 763     0     36
## 764     0     36
## 765     0     36
## 766     0     36
## 767     0     36
## 768     0     36
## 769     0     36
## 770     0     36
## 771     0     36
## 772     0     36
## 773     0     36
## 774     0     36
## 775     0     36
## 776     0     36
## 777     0     36
## 778     0     36
## 779     0     36
## 780     0     36
## 781     0     36
## 782     0     36
## 783     0     36
## 784     0     36
## 785     0     36
```

```
## 786        0         36
## 787        0         36
## 788        0         36
## 789        0         36
## 790        0         36
## 791        0         36
## 792        0         36
## 793        0         36
## 794        0         36
## 795        0         36
## 796        0         36
## 797        0         36
## 798        0         36
## 799        0         36
## 800        0         36
## 801        0         36
## 802        0         36
## 803        1         37
## 804        1         37
## 805        1         37
## 806        0         37
## 807        0         37
## 808        0         37
## 809        0         37
## 810        0         37
## 811        0         37
## 812        0         37
## 813        0         37
## 814        0         37
## 815        0         37
## 816        0         37
## 817        0         37
## 818        0         37
## 819        0         37
## 820        0         37
## 821        1         38
## 822        1         38
## 823        1         38
## 824        1         38
## 825        1         38
## 826        1         38
## 827        1         38
## 828        1         38
## 829        0         38
## 830        0         38
## 831        0         38
## 832        0         38
## 833        0         38
## 834        0         38
## 835        0         38
## 836        0         38
## 837        0         38
## 838        0         38
## 839        0         38
```

```
## 840         0           38
## 841         0           38
## 842         0           38
## 843         0           38
## 844         0           38
## 845         0           38
## 846         0           38
## 847         0           38
## 848         0           38
## 849         0           38
## 850         0           38
## 851         0           38
## 852         0           38
## 853         0           38
## 854         0           38
## 855         0           38
## 856         0           38
## 857         0           38
## 858         0           38
## 859         0           38
## 860         0           38
## 861         0           38
## 862         0           38
## 863         0           38
## 864         0           38
## 865         0           38
## 866         0           38
## 867         0           38
## 868         0           38
## 869         0           38
## 870         0           38
## 871         1           39
## 872         1           39
## 873         1           39
## 874         1           39
## 875         1           39
## 876         1           39
## 877         1           39
## 878         1           39
## 879         0           39
## 880         0           39
## 881         0           39
## 882         0           39
## 883         0           39
## 884         0           39
## 885         0           39
## 886         0           39
## 887         0           39
## 888         0           39
## 889         0           39
## 890         0           39
## 891         0           39
## 892         0           39
## 893         0           39
```

```
## 894          0                39
## 895          0                39
## 896          0                39
## 897          0                39
## 898          0                39
## 899          0                39
## 900          0                39
## 901          0                39
## 902          0                39
## 903          0                39
## 904          0                39
## 905          0                39
## 906          0                39
## 907          0                39
## 908          0                39
## 909          0                39
## 910          0                39
## 911          0                39
## 912          0                39
## 913          0                39
## 914          0                39
## 915          0                39
## 916          0                39
## 917          0                39
## 918          0                39
## 919          1                40
## 920          1                40
## 921          1                40
## 922          1                40
## 923          0                40
## 924          0                40
## 925          0                40
## 926          0                40
## 927          0                40
## 928          0                40
## 929          0                40
## 930          0                40
## 931          0                40
## 932          0                40
## 933          0                40
## 934          0                40
## 935          0                40
## 936          0                40
## 937          0                40
## 938          0                40
## 939          0                40
## 940          1                41
## 941          1                41
## 942          1                41
## 943          1                41
## 944          0                41
## 945          0                41
## 946          0                41
## 947          0                41
```

```
## 948        0          41
## 949        0          41
## 950        0          41
## 951        0          41
## 952        0          41
## 953        0          41
## 954        0          41
## 955        0          41
## 956        0          41
## 957        0          41
## 958        0          41
## 959        0          41
## 960        0          41
## 961        1          42
## 962        1          42
## 963        1          42
## 964        0          42
## 965        0          42
## 966        0          42
## 967        0          42
## 968        0          42
## 969        0          42
## 970        0          42
## 971        0          42
## 972        0          42
## 973        0          42
## 974        0          42
## 975        1          43
## 976        1          43
## 977        1          43
## 978        1          43
## 979        1          43
## 980        1          43
## 981        1          43
## 982        1          43
## 983        1          43
## 984        1          43
## 985        0          43
## 986        0          43
## 987        0          43
## 988        0          43
## 989        0          43
## 990        0          43
## 991        0          43
## 992        0          43
## 993        0          43
## 994        0          43
## 995        0          43
## 996        0          43
## 997        0          43
## 998        0          43
## 999        0          43
## 1000       0          43
## 1001       0          43
```

```
## 1002      0          43
## 1003      0          43
## 1004      0          43
## 1005      0          43
## 1006      0          43
## 1007      0          43
## 1008      0          43
## 1009      0          43
## 1010      0          43
## 1011      0          43
## 1012      0          43
## 1013      0          43
## 1014      0          43
## 1015      0          43
## 1016      0          43
## 1017      0          43
## 1018      0          43
## 1019      0          43
## 1020      0          43
## 1021      0          43
## 1022      0          43
## 1023      0          43
## 1024      1          44
## 1025      1          44
## 1026      1          44
## 1027      1          44
## 1028      1          44
## 1029      1          44
## 1030      1          44
## 1031      1          44
## 1032      1          44
## 1033      1          44
## 1034      1          44
## 1035      0          44
## 1036      0          44
## 1037      0          44
## 1038      0          44
## 1039      0          44
## 1040      0          44
## 1041      0          44
## 1042      0          44
## 1043      0          44
## 1044      0          44
## 1045      0          44
## 1046      0          44
## 1047      0          44
## 1048      0          44
## 1049      0          44
## 1050      0          44
## 1051      0          44
## 1052      0          44
## 1053      0          44
## 1054      0          44
## 1055      0          44
```

```
## 1056       0            44
## 1057       0            44
## 1058       0            44
## 1059       0            44
## 1060       0            44
## 1061       0            44
## 1062       0            44
## 1063       0            44
## 1064       0            44
## 1065       0            44
## 1066       0            44
## 1067       0            44
## 1068       0            44
## 1069       0            44
## 1070       0            44
## 1071       0            44
## 1072       0            44
## 1073       0            44
## 1074       0            44
## 1075       1            45
## 1076       1            45
## 1077       1            45
## 1078       1            45
## 1079       1            45
## 1080       0            45
## 1081       0            45
## 1082       0            45
## 1083       0            45
## 1084       0            45
## 1085       0            45
## 1086       0            45
## 1087       0            45
## 1088       0            45
## 1089       0            45
## 1090       0            45
## 1091       0            45
## 1092       0            45
## 1093       0            45
## 1094       0            45
## 1095       0            45
## 1096       1            46
## 1097       1            46
## 1098       1            46
## 1099       1            46
## 1100       1            46
## 1101       0            46
## 1102       0            46
## 1103       0            46
## 1104       0            46
## 1105       0            46
## 1106       0            46
## 1107       0            46
## 1108       0            46
## 1109       0            46
```

```
## 1110      0          46
## 1111      0          46
## 1112      0          46
## 1113      0          46
## 1114      0          46
## 1115      0          46
## 1116      0          46
## 1117      1          47
## 1118      1          47
## 1119      1          47
## 1120      1          47
## 1121      1          47
## 1122      0          47
## 1123      0          47
## 1124      0          47
## 1125      0          47
## 1126      0          47
## 1127      0          47
## 1128      0          47
## 1129      0          47
## 1130      0          47
## 1131      0          47
## 1132      0          47
## 1133      0          47
## 1134      0          47
## 1135      0          47
## 1136      0          47
## 1137      0          47
## 1138      1          48
## 1139      1          48
## 1140      1          48
## 1141      1          48
## 1142      1          48
## 1143      0          48
## 1144      0          48
## 1145      0          48
## 1146      0          48
## 1147      0          48
## 1148      0          48
## 1149      0          48
## 1150      0          48
## 1151      0          48
## 1152      0          48
## 1153      0          48
## 1154      0          48
## 1155      0          48
## 1156      0          48
## 1157      0          48
## 1158      0          48
## 1159      1          49
## 1160      1          49
## 1161      1          49
## 1162      1          49
## 1163      1          49
```

```
## 1164       0           49
## 1165       0           49
## 1166       0           49
## 1167       0           49
## 1168       0           49
## 1169       0           49
## 1170       0           49
## 1171       0           49
## 1172       0           49
## 1173       0           49
## 1174       0           49
## 1175       0           49
## 1176       0           49
## 1177       0           49
## 1178       0           49
## 1179       0           49
## 1180       1           50
## 1181       1           50
## 1182       1           50
## 1183       1           50
## 1184       1           50
## 1185       0           50
## 1186       0           50
## 1187       0           50
## 1188       0           50
## 1189       0           50
## 1190       0           50
## 1191       0           50
## 1192       0           50
## 1193       0           50
## 1194       0           50
## 1195       0           50
## 1196       0           50
## 1197       0           50
## 1198       0           50
## 1199       0           50
## 1200       0           50
## 1201       1           51
## 1202       1           51
## 1203       1           51
## 1204       1           51
## 1205       1           51
## 1206       0           51
## 1207       0           51
## 1208       0           51
## 1209       0           51
## 1210       0           51
## 1211       0           51
## 1212       0           51
## 1213       0           51
## 1214       0           51
## 1215       0           51
## 1216       0           51
## 1217       0           51
```

```
## 1218       0             51
## 1219       0             51
## 1220       0             51
## 1221       0             51
## 1222       1             52
## 1223       1             52
## 1224       1             52
## 1225       1             52
## 1226       1             52
## 1227       1             52
## 1228       1             52
## 1229       1             52
## 1230       1             52
## 1231       1             52
## 1232       1             52
## 1233       0             52
## 1234       0             52
## 1235       0             52
## 1236       0             52
## 1237       0             52
## 1238       0             52
## 1239       0             52
## 1240       0             52
## 1241       0             52
## 1242       0             52
## 1243       0             52
## 1244       0             52
## 1245       0             52
## 1246       0             52
## 1247       0             52
## 1248       0             52
## 1249       0             52
## 1250       0             52
## 1251       0             52
## 1252       0             52
## 1253       0             52
## 1254       0             52
## 1255       0             52
## 1256       0             52
## 1257       0             52
## 1258       0             52
## 1259       0             52
## 1260       0             52
## 1261       0             52
## 1262       0             52
## 1263       0             52
## 1264       0             52
## 1265       0             52
## 1266       0             52
## 1267       0             52
## 1268       0             52
## 1269       0             52
## 1270       0             52
## 1271       1             53
```

```
## 1272       1            53
## 1273       1            53
## 1274       1            53
## 1275       1            53
## 1276       0            53
## 1277       0            53
## 1278       0            53
## 1279       0            53
## 1280       0            53
## 1281       0            53
## 1282       0            53
## 1283       0            53
## 1284       0            53
## 1285       0            53
## 1286       0            53
## 1287       0            53
## 1288       0            53
## 1289       0            53
## 1290       0            53
## 1291       1            54
## 1292       1            54
## 1293       1            54
## 1294       1            54
## 1295       1            54
## 1296       0            54
## 1297       0            54
## 1298       0            54
## 1299       0            54
## 1300       0            54
## 1301       0            54
## 1302       0            54
## 1303       0            54
## 1304       0            54
## 1305       0            54
## 1306       0            54
## 1307       0            54
## 1308       0            54
## 1309       0            54
## 1310       0            54
## 1311       1            55
## 1312       1            55
## 1313       1            55
## 1314       1            55
## 1315       1            55
## 1316       0            55
## 1317       0            55
## 1318       0            55
## 1319       0            55
## 1320       0            55
## 1321       0            55
## 1322       0            55
## 1323       0            55
## 1324       0            55
## 1325       0            55
```

```
## 1326       0            55
## 1327       0            55
## 1328       0            55
## 1329       0            55
## 1330       0            55
## 1331       1            56
## 1332       1            56
## 1333       1            56
## 1334       1            56
## 1335       1            56
## 1336       1            56
## 1337       0            56
## 1338       0            56
## 1339       0            56
## 1340       0            56
## 1341       0            56
## 1342       0            56
## 1343       0            56
## 1344       0            56
## 1345       0            56
## 1346       0            56
## 1347       0            56
## 1348       0            56
## 1349       0            56
## 1350       0            56
## 1351       0            56
## 1352       0            56
## 1353       0            56
## 1354       1            57
## 1355       1            57
## 1356       1            57
## 1357       1            57
## 1358       1            57
## 1359       1            57
## 1360       1            57
## 1361       1            57
## 1362       1            57
## 1363       1            57
## 1364       1            57
## 1365       1            57
## 1366       0            57
## 1367       0            57
## 1368       0            57
## 1369       0            57
## 1370       0            57
## 1371       0            57
## 1372       0            57
## 1373       0            57
## 1374       0            57
## 1375       0            57
## 1376       0            57
## 1377       0            57
## 1378       0            57
## 1379       0            57
```

```
## 1380       0             57
## 1381       0             57
## 1382       0             57
## 1383       0             57
## 1384       0             57
## 1385       0             57
## 1386       0             57
## 1387       0             57
## 1388       0             57
## 1389       0             57
## 1390       0             57
## 1391       0             57
## 1392       0             57
## 1393       0             57
## 1394       0             57
## 1395       0             57
## 1396       0             57
## 1397       0             57
## 1398       0             57
## 1399       0             57
## 1400       0             57
## 1401       1             58
## 1402       1             58
## 1403       1             58
## 1404       1             58
## 1405       1             58
## 1406       1             58
## 1407       1             58
## 1408       1             58
## 1409       1             58
## 1410       1             58
## 1411       1             58
## 1412       1             58
## 1413       1             58
## 1414       0             58
## 1415       0             58
## 1416       0             58
## 1417       0             58
## 1418       0             58
## 1419       0             58
## 1420       0             58
## 1421       0             58
## 1422       0             58
## 1423       0             58
## 1424       0             58
## 1425       0             58
## 1426       0             58
## 1427       0             58
## 1428       0             58
## 1429       0             58
## 1430       0             58
## 1431       0             58
## 1432       0             58
## 1433       0             58
```

```
## 1434      0          58
## 1435      0          58
## 1436      0          58
## 1437      0          58
## 1438      0          58
## 1439      0          58
## 1440      0          58
## 1441      0          58
## 1442      0          58
## 1443      0          58
## 1444      0          58
## 1445      0          58
## 1446      0          58
## 1447      0          58
## 1448      0          58
## 1449      0          58
## 1450      0          58
## 1451      1          59
## 1452      1          59
## 1453      1          59
## 1454      1          59
## 1455      1          59
## 1456      1          59
## 1457      0          59
## 1458      0          59
## 1459      0          59
## 1460      0          59
## 1461      0          59
## 1462      0          59
## 1463      0          59
## 1464      0          59
## 1465      0          59
## 1466      0          59
## 1467      0          59
## 1468      0          59
## 1469      0          59
## 1470      0          59
## 1471      0          59
## 1472      1          60
## 1473      1          60
## 1474      1          60
## 1475      1          60
## 1476      1          60
## 1477      1          60
## 1478      0          60
## 1479      0          60
## 1480      0          60
## 1481      0          60
## 1482      0          60
## 1483      0          60
## 1484      0          60
## 1485      0          60
## 1486      0          60
## 1487      0          60
```

```
## 1488      0         60
## 1489      0         60
## 1490      0         60
## 1491      0         60
## 1492      0         60
## 1493      1         61
## 1494      1         61
## 1495      1         61
## 1496      1         61
## 1497      1         61
## 1498      1         61
## 1499      1         61
## 1500      0         61
## 1501      0         61
## 1502      0         61
## 1503      0         61
## 1504      0         61
## 1505      0         61
## 1506      0         61
## 1507      0         61
## 1508      0         61
## 1509      0         61
## 1510      0         61
## 1511      0         61
## 1512      0         61
## 1513      0         61
## 1514      0         61
## 1515      0         61
## 1516      0         61
## 1517      1         62
## 1518      1         62
## 1519      1         62
## 1520      1         62
## 1521      1         62
## 1522      1         62
## 1523      0         62
## 1524      0         62
## 1525      0         62
## 1526      0         62
## 1527      0         62
## 1528      0         62
## 1529      0         62
## 1530      0         62
## 1531      0         62
## 1532      0         62
## 1533      0         62
## 1534      0         62
## 1535      0         62
## 1536      0         62
## 1537      1         63
## 1538      1         63
## 1539      1         63
## 1540      1         63
## 1541      1         63
```

```
## 1542      1          63
## 1543      1          63
## 1544      0          63
## 1545      0          63
## 1546      0          63
## 1547      0          63
## 1548      0          63
## 1549      0          63
## 1550      0          63
## 1551      0          63
## 1552      0          63
## 1553      0          63
## 1554      0          63
## 1555      0          63
## 1556      0          63
## 1557      0          63
## 1558      0          63
## 1559      0          63
## 1560      1          64
## 1561      1          64
## 1562      1          64
## 1563      1          64
## 1564      1          64
## 1565      1          64
## 1566      1          64
## 1567      0          64
## 1568      0          64
## 1569      0          64
## 1570      0          64
## 1571      0          64
## 1572      0          64
## 1573      0          64
## 1574      0          64
## 1575      0          64
## 1576      0          64
## 1577      0          64
## 1578      0          64
## 1579      0          64
## 1580      0          64
## 1581      1          65
## 1582      1          65
## 1583      1          65
## 1584      1          65
## 1585      1          65
## 1586      1          65
## 1587      1          65
## 1588      0          65
## 1589      0          65
## 1590      0          65
## 1591      0          65
## 1592      0          65
## 1593      0          65
## 1594      0          65
## 1595      0          65
```

```
## 1596      0          65
## 1597      0          65
## 1598      0          65
## 1599      0          65
## 1600      0          65
## 1601      0          65
## 1602      1          66
## 1603      1          66
## 1604      1          66
## 1605      1          66
## 1606      1          66
## 1607      1          66
## 1608      1          66
## 1609      0          66
## 1610      0          66
## 1611      0          66
## 1612      0          66
## 1613      0          66
## 1614      0          66
## 1615      0          66
## 1616      0          66
## 1617      0          66
## 1618      0          66
## 1619      0          66
## 1620      0          66
## 1621      0          66
## 1622      0          66
## 1623      1          67
## 1624      1          67
## 1625      1          67
## 1626      1          67
## 1627      1          67
## 1628      1          67
## 1629      1          67
## 1630      1          67
## 1631      1          67
## 1632      1          67
## 1633      1          67
## 1634      1          67
## 1635      1          67
## 1636      1          67
## 1637      1          67
## 1638      1          67
## 1639      1          67
## 1640      0          67
## 1641      0          67
## 1642      0          67
## 1643      0          67
## 1644      0          67
## 1645      0          67
## 1646      0          67
## 1647      0          67
## 1648      0          67
## 1649      0          67
```

```
## 1650    0    67
## 1651    0    67
## 1652    0    67
## 1653    0    67
## 1654    0    67
## 1655    0    67
## 1656    0    67
## 1657    0    67
## 1658    0    67
## 1659    0    67
## 1660    0    67
## 1661    0    67
## 1662    0    67
## 1663    0    67
## 1664    0    67
## 1665    0    67
## 1666    0    67
## 1667    0    67
## 1668    0    67
## 1669    0    67
## 1670    0    67
## 1671    0    67
## 1672    0    67
## 1673    0    67
## 1674    0    67
## 1675    0    67
## 1676    1    68
## 1677    1    68
## 1678    1    68
## 1679    1    68
## 1680    1    68
## 1681    1    68
## 1682    1    68
## 1683    1    68
## 1684    1    68
## 1685    1    68
## 1686    1    68
## 1687    1    68
## 1688    1    68
## 1689    1    68
## 1690    1    68
## 1691    1    68
## 1692    0    68
## 1693    0    68
## 1694    0    68
## 1695    0    68
## 1696    0    68
## 1697    0    68
## 1698    0    68
## 1699    0    68
## 1700    0    68
## 1701    0    68
## 1702    0    68
## 1703    0    68
```

```
## 1704      0          68
## 1705      0          68
## 1706      0          68
## 1707      0          68
## 1708      0          68
## 1709      0          68
## 1710      0          68
## 1711      0          68
## 1712      0          68
## 1713      0          68
## 1714      0          68
## 1715      0          68
## 1716      0          68
## 1717      0          68
## 1718      0          68
## 1719      0          68
## 1720      0          68
## 1721      0          68
## 1722      0          68
## 1723      1          69
## 1724      1          69
## 1725      1          69
## 1726      1          69
## 1727      1          69
## 1728      1          69
## 1729      1          69
## 1730      1          69
## 1731      1          69
## 1732      1          69
## 1733      1          69
## 1734      1          69
## 1735      1          69
## 1736      1          69
## 1737      1          69
## 1738      1          69
## 1739      0          69
## 1740      0          69
## 1741      0          69
## 1742      0          69
## 1743      0          69
## 1744      0          69
## 1745      0          69
## 1746      0          69
## 1747      0          69
## 1748      0          69
## 1749      0          69
## 1750      0          69
## 1751      0          69
## 1752      0          69
## 1753      0          69
## 1754      0          69
## 1755      0          69
## 1756      0          69
## 1757      0          69
```

```
## 1758      0          69
## 1759      0          69
## 1760      0          69
## 1761      0          69
## 1762      0          69
## 1763      0          69
## 1764      0          69
## 1765      0          69
## 1766      0          69
## 1767      0          69
## 1768      0          69
## 1769      0          69
## 1770      0          69
## 1771      1          70
## 1772      1          70
## 1773      1          70
## 1774      1          70
## 1775      1          70
## 1776      1          70
## 1777      1          70
## 1778      1          70
## 1779      1          70
## 1780      1          70
## 1781      0          70
## 1782      0          70
## 1783      0          70
## 1784      0          70
## 1785      0          70
## 1786      0          70
## 1787      0          70
## 1788      0          70
## 1789      0          70
## 1790      0          70
## 1791      0          70
## 1792      0          70
## 1793      0          70
## 1794      0          70
## 1795      0          70
## 1796      1          71
## 1797      1          71
## 1798      1          71
## 1799      1          71
## 1800      1          71
## 1801      0          71
## 1802      0          71
## 1803      0          71
## 1804      0          71
## 1805      0          71
## 1806      0          71
## 1807      0          71
## 1808      0          71
## 1809      0          71
## 1810      0          71
```

```r
summary(rabbits)
```

```
##      tumor          experiment
##  Min.   :0.0000   Min.   : 1.00
##  1st Qu.:0.0000   1st Qu.:23.00
##  Median :0.0000   Median :39.00
##  Mean   :0.1867   Mean   :38.76
##  3rd Qu.:0.0000   3rd Qu.:57.00
##  Max.   :1.0000   Max.   :71.00
```

```r
summary(rabbits$tumor %>% as.factor())
```

```
##    0    1
## 1472  338
```

- Utiliza JAGS ~o Stan~ para ajustar un modelo jerárquico como el descrito arriba y usando una inicial $Beta(1, 1)$ y una $Gamma(1, 0.1)$ para μ y κ respectivamente.

```r
modelo_conejos.txt <-
'
model{
  for(i in 1 : N) {
    y[i] ~ dbern(p[expr[i]])
  }
  for(j in 1 : nExp) {
    p[j] ~ dbeta(a, b)
  }
  a <- mu*k
  b <- (1-mu)*k
  mu ~ dbeta(1, 1)
  k ~ dgamma(1, 0.1)
}
'
cat(modelo_conejos.txt, file = 'modelo_conejos.txt')
jags_fit_conejos <- jags(
  model.file = "modelo_conejos.txt",    # modelo de JAGS
# inits = jags.inits,   # valores iniciales
  data = list(y = rabbits$tumor, expr = rabbits$experiment,
              nExp = length(unique(rabbits$experiment)),
              N = length(rabbits$tumor)),    # lista con los datos
  parameters.to.save = c("mu", "k", "p"),  # parámetros por guardar
  n.chains = 3,   # número de cadenas
  n.iter = 6000,    # número de pasos
  n.burnin = 1000   # calentamiento de la cadena
  )
```

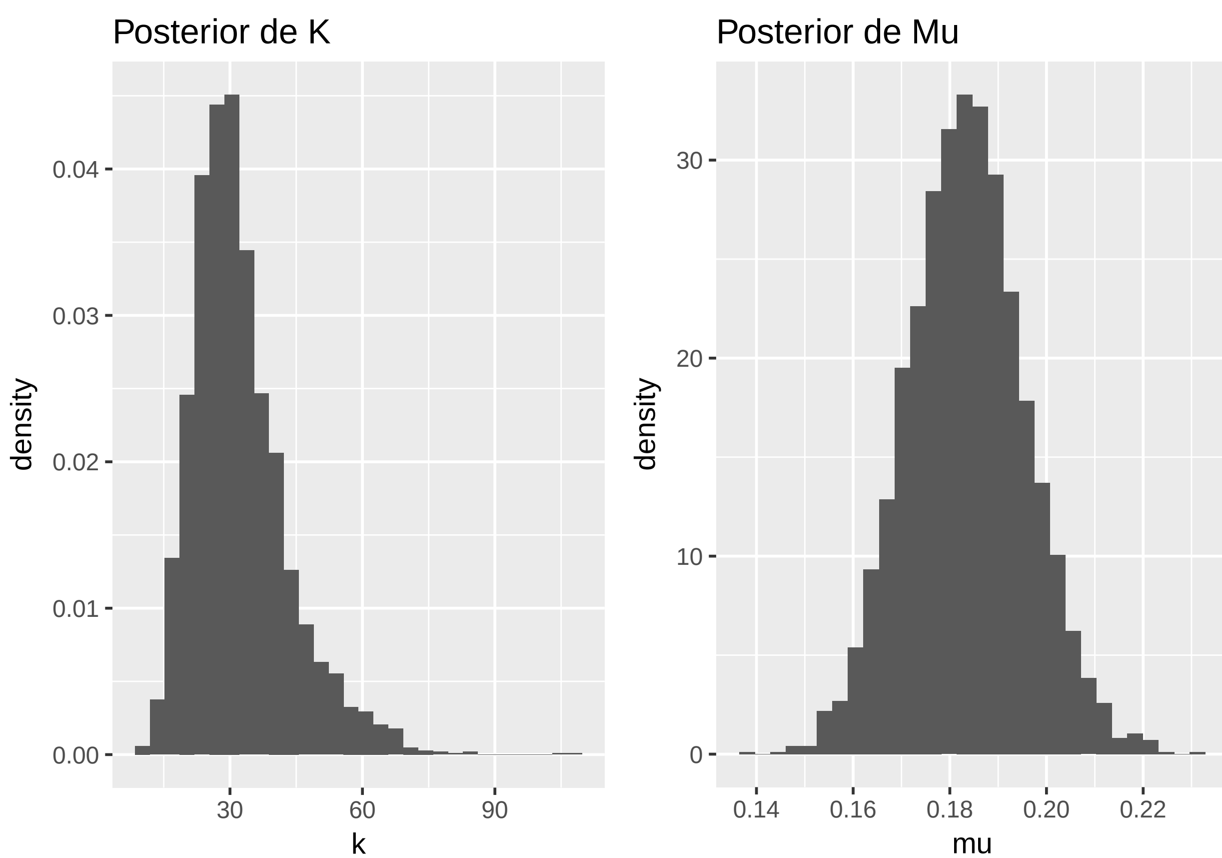
```
## Compiling model graph
##    Resolving undeclared variables
##    Allocating nodes
## Graph information:
##    Observed stochastic nodes: 1810
##    Unobserved stochastic nodes: 73
##    Total graph size: 3703
##
## Initializing model
```

```
#jags_fit_conejos
```

- Realiza un histograma de la distribución posterior de μ, κ. Comenta tus resultados.

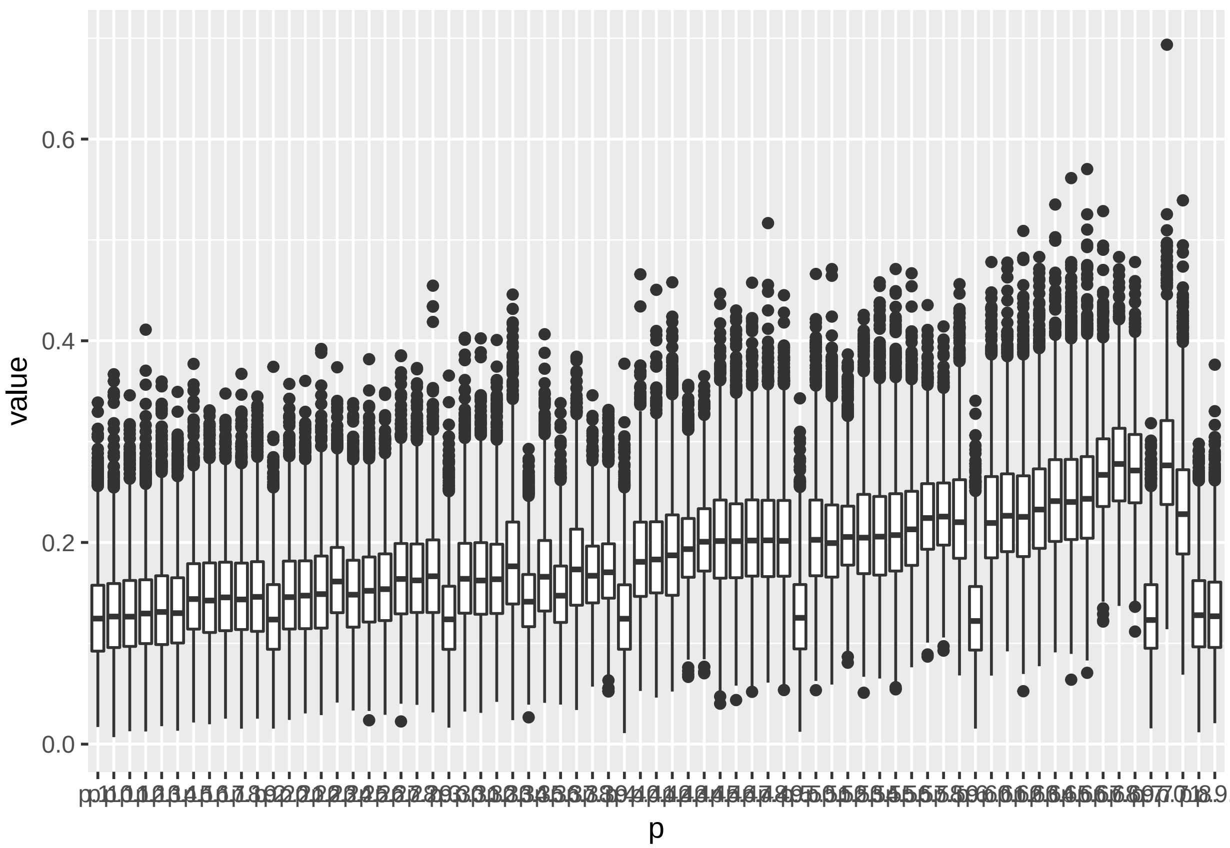
```
k_pasos <- jags_fit_conejos$BUGSoutput$sims.matrix[,2]
k_pasos <- data.frame(k = k_pasos)
mu_pasos <- jags_fit_conejos$BUGSoutput$sims.matrix[,3]
mu_pasos <- data.frame(mu = mu_pasos)

g1 <- ggplot(k_pasos, aes(x = k)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..)) +
  ggtitle("Posterior de K")
g2 <- ggplot(mu_pasos, aes(x = mu)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..)) +
  ggtitle("Posterior de Mu")
grid.arrange(g1,g2,ncol=2)
```

```
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



- 5.3 Realiza una gráfica de boxplots con las simulaciones de cada parámetro θ_j, la gráfica será similar a la realizda en la clase de modelos probabilísticos (clase 9). Comenta tus resultados

```
p <- jags_fit_conejos$BUGSoutput$sims.matrix[,-c(1:3)] %>% data.frame
med_p_52 <- colMeans(p)
q <- gather(p,key = p)
ggplot(q, aes(p, value)) + geom_boxplot()
```



- 5.4 Ajusta un nuevo modelo utilizando una iniciales Beta(10,10) y Gamma(0.51,0.01)G para μ y κ (lo demás quedará igual). Realiza una gráfica con las medias posteriores de los parámetros θ_j bajo los dos escenarios de distribuciones iniciales. En el eje horizontal grafica las medias posteriores del modelo ajustado en 6.2 y en el eje vertical las medias posteriores del modelo modelo en 6.4. ¿Cómo se comparan?

No importan la "a priori", pues debido a los 1000 puntos de prueba de calentamiento se comporta aproximando a la posterior. Por lo que no hay mucha diferencia.

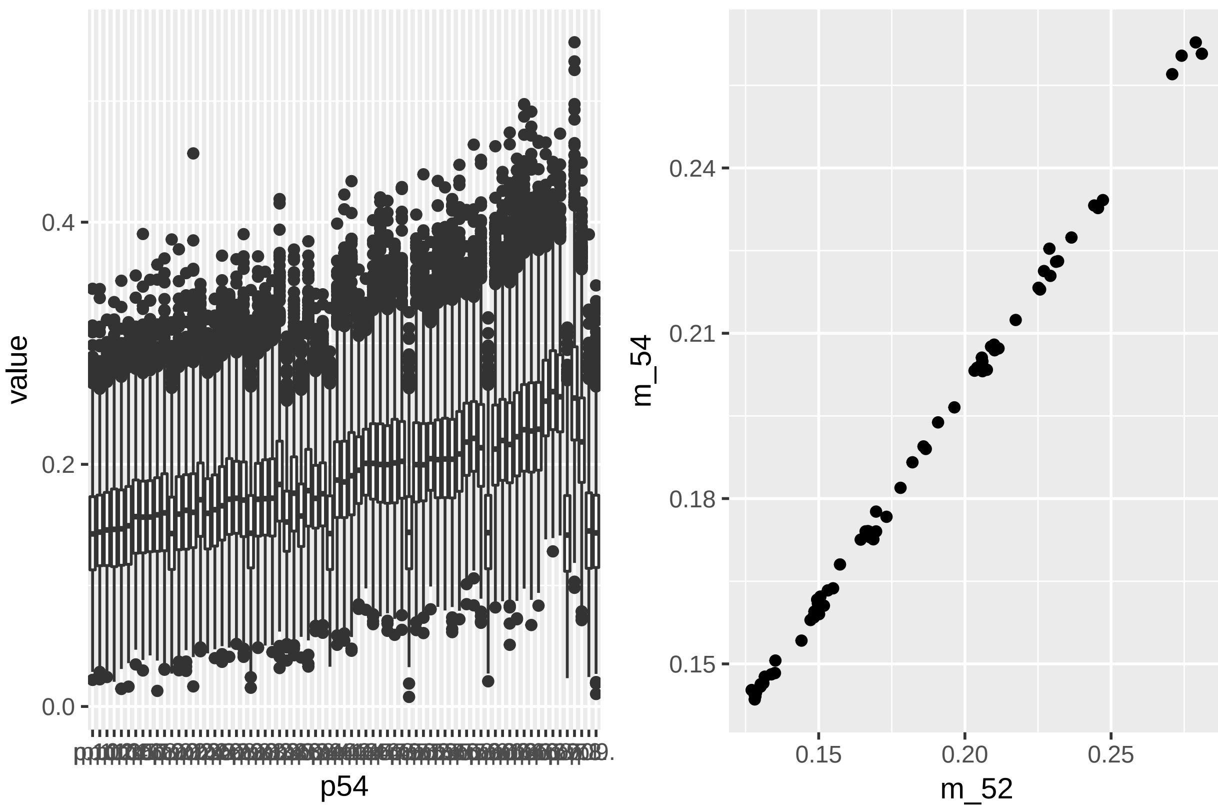
```
modelo_conejos54.txt <-
'
model{
  for(i in 1 : N) {
    y[i] ~ dbern(p[expr[i]])
  }
  for(j in 1 : nExp) {
    p[j] ~ dbeta(a, b)
  }
  a <- mu*k
  b <- (1-mu)*k
  mu ~ dbeta(10, 10)
  k ~ dgamma(.51, 0.01)
}
'
cat(modelo_conejos54.txt, file = 'modelo_conejos54.txt')
jags_fit_conejos54 <- jags(
  model.file = "modelo_conejos54.txt",    # modelo de JAGS
```

```r
# inits = jags.inits,   # valores iniciales
  data = list(y = rabbits$tumor, expr = rabbits$experiment,
              nExp = length(unique(rabbits$experiment)),
              N = length(rabbits$tumor)),    # lista con los datos
  parameters.to.save = c("mu", "k", "p"),  # parámetros por guardar
  n.chains = 3,   # número de cadenas
  n.iter = 6000,    # número de pasos
  n.burnin = 1000   # calentamiento de la cadena
  )
```

```
## Compiling model graph
##    Resolving undeclared variables
##    Allocating nodes
## Graph information:
##    Observed stochastic nodes: 1810
##    Unobserved stochastic nodes: 73
##    Total graph size: 3703
##
## Initializing model
```

```r
# jags_fit_conejos54
```

```r
p54 <- jags_fit_conejos54$BUGSoutput$sims.matrix[,-c(1:3)] %>% data.frame
med_p_54 <- colMeans(p54)
q54 <- gather(p54,key = p54)
g1 <- ggplot(q54, aes(p54, value)) +
  geom_boxplot() +
  ggtitle("")
media_5254 <- data.frame(m_52 = med_p_52, m_54 = med_p_54)
g2 <- ggplot(media_5254, aes(x = m_52, y = m_54)) +
  geom_point() +
  ggtitle("")
grid.arrange(g1,g2,ncol=2)
```


value
0.4
0.2
0.0
p54
m_54
0.24
0.21
0.18
0.15
0.15
0.20
0.25
m_52