

Rapport écrit d'expérience numérique

---

## Couche limite laminaire

---

1ère année département MF2E

 Robin  
Tran Ugo

12 avril 2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Définiton . . . . .	2
1.2	Objectifs . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Etude théorique</b>	<b>2</b>
2.1	Système . . . . .	2
2.2	Efforts . . . . .	3
2.2.1	Analyse dimensionnelle de la force de frottement . . . . .	3
2.2.2	Formule de Blasius . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Matériels et méthodes</b>	<b>3</b>
3.1	Géométrie et maillage . . . . .	3
3.2	Simulation . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Analyse des résultats</b>	<b>5</b>
4.1	Force de frottement . . . . .	5
4.2	Coefficient de frottement . . . . .	6
4.2.1	1ère simulation . . . . .	6
4.2.2	2ème simulation . . . . .	7
4.3	Problème à petits et hauts Reynolds . . . . .	8
4.3.1	Petits Reynolds . . . . .	8
4.3.2	Hauts Reynolds . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>10</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Définition

Lors de cette expérience numérique, nous allons nous intéresser à l'étude de la couche limite laminaire d'un fluide sur une plaque plane. C'est en 1908 que Heinrich Blasius à partir de la théorie de Prandtl révolutionne l'étude du comportement des fluides visqueux près des parois solides. Certains résultats fondamentaux établies par Blasius seront explicités au cours de ce rapport.

## 1.2 Objectifs

Nous calculerons les différents paramètres de cet écoulement au cours de ce TD. Nous établirons les matériels et méthodes qui nous serviront à effectuer l'étude numérique. Puis, nous étudierons numériquement et théoriquement l'évolution de la couche limite le long de la plaque et les efforts exercés par le fluide sur celle-ci. Enfin nous comparerons les résultats numériques avec la théorie.

# 2 Etude théorique

## 2.1 Système

On considère le système suivant : un écoulement de vapeur d'eau au dessus d'une plaque plane de longueur  $L = 1\text{ m}$  et de largeur infinie. C'est pourquoi on considérera le problème comme 2D dans la suite du rapport. L'écoulement en amont est uniforme et la vitesse est  $U_0 = 0.242\text{ m.s}^{-1}$ . La densité et la viscosité dynamique de la vapeur d'eau sont constantes avec  $\rho = 0.55\text{ kg.m}^{-3}$  et  $\mu = 1.34.10^{-5}\text{ kg.m}^{-1}.s^{-1}$ . Le nombre de Reynolds de cet écoulement est  $Re_L = \frac{U_0 L \rho}{\mu} = 9933$ . Pour des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à  $10^5$  on considérera que la couche limite est laminaire.



FIGURE 1 – Schéma du système étudié

## 2.2 Efforts

On note  $F_p$  la force de frottement linéique exercée par le fluide sur la plaque plane, cette force est linéique car le problème est 2D.

$$F_p = \int_0^L \tau_p(x) dx \quad (1)$$

Avec  $x$  la position horizontale au niveau de la plaque,  $L$  la longueur de la plaque et  $\tau_p$  la contrainte de cisaillement à la paroi.

On note  $C_f$  le coefficient de frottement local, et

$$C_f(x) = \frac{2\tau_p(x)}{\rho U_0^2} \quad (2)$$

Avec  $\rho$  la densité de l'eau et  $U_0$  la vitesse de la vapeur d'eau à l'infini.

### 2.2.1 Analyse dimensionnelle de la force de frottement

Il y a 4 paramètres qui interviennent dans notre problème :  $U_0, \rho, \mu$  et  $L$ . On associe  $\rho$  à la dimension liée à la masse (M),  $L$  à la longueur (L) et  $U_0$  au temps (T). D'après le Théorème de Vaschy-Buckingham :

$$\frac{F_p}{\rho^\alpha L^\beta U_0^\gamma} = \Pi\left(\frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} L^{\beta_1} U_0^{\gamma_1}}\right) \quad (3)$$

On prend  $[F_p] = N.m^{-1}$  car le problème est 2D. On trouve en résolvant le système que :

$$\begin{cases} \alpha = \beta = 1, \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

De même on a :  $\begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \beta_1 = \gamma_1 = 1 \end{cases}$ . Ainsi on peut écrire que :

$$F_p = \rho L U_0^2 \cdot f\left(\frac{\mu}{\rho L U_0}\right) = \rho L U_0^2 \cdot f\left(\frac{1}{Re_L}\right) \quad (4)$$

### 2.2.2 Formule de Blasius

La solution de Blasius, d'après la théorie de Prandtl donne :

$$C_f(x) = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (5)$$

Avec  $Re_x$  le Reynolds local au niveau de l'abscisse  $x$  de la plaque plane soit  $Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}$ .

## 3 Matériels et méthodes

### 3.1 Géométrie et maillage

Nous allons tout d'abord créer la géométrie et le maillage en utilisant IcemCFD. Nous avons effectué 2 maillages différents, le premier régulier et uniforme le long de la plaque et le deuxième raffiné au niveau de la couche limite pour pouvoir observer plus finement le comportement de la vapeur dans la couche limite.

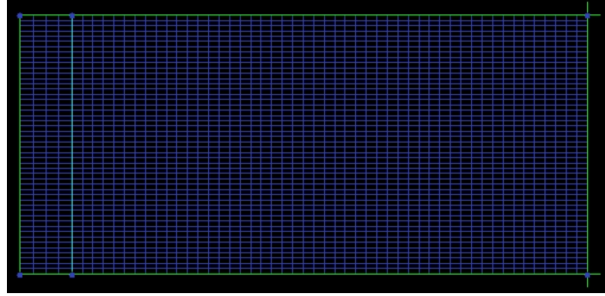


FIGURE 2 – Maillage régulier

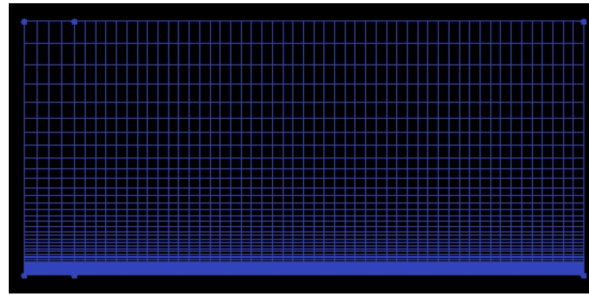


FIGURE 3 – Maillage raffiné au niveau de la plaque

### 3.2 Simulation

Nous allons utiliser le logiciel FLUENT pour lire le maillage et effectuer des simulations. Grâce aux simulations sur FLUENT, on peut récupérer les données tels que la variation du champ de vitesse...

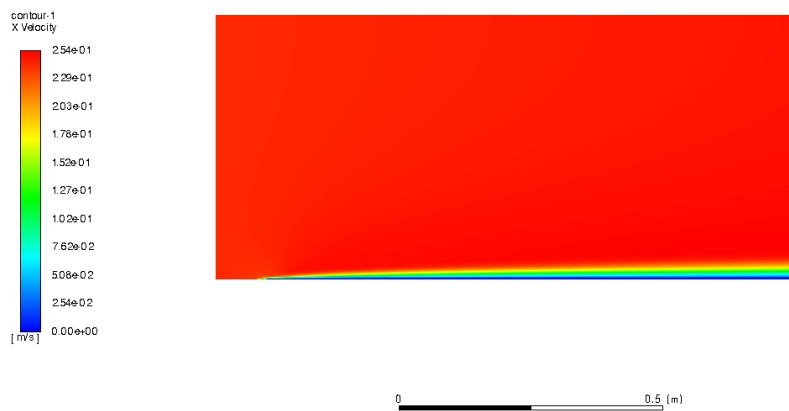


FIGURE 4 – Champ de vitesse le long de la plaque

...ou encore le profil de vitesse le long de la plaque plane.

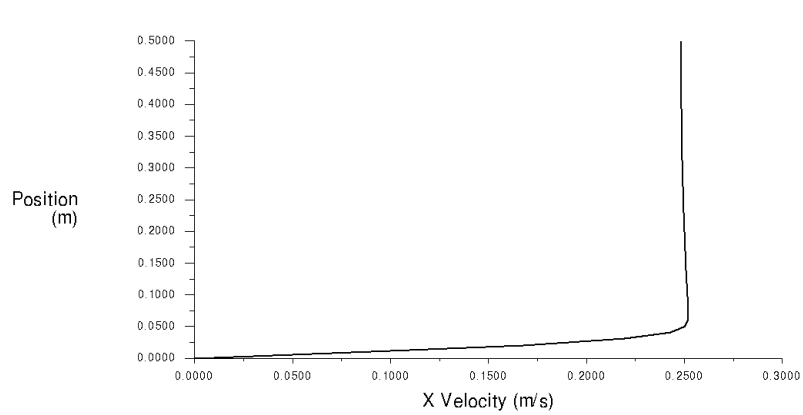


FIGURE 5 – Profil de vitesse le long de la plaque

De plus on peut tracer l'évolution du profil de vitesse à différentes abscisses pour comparer l'épaisseur de la couche limite, la vitesse à l'infini en fonction de l'abscisse.

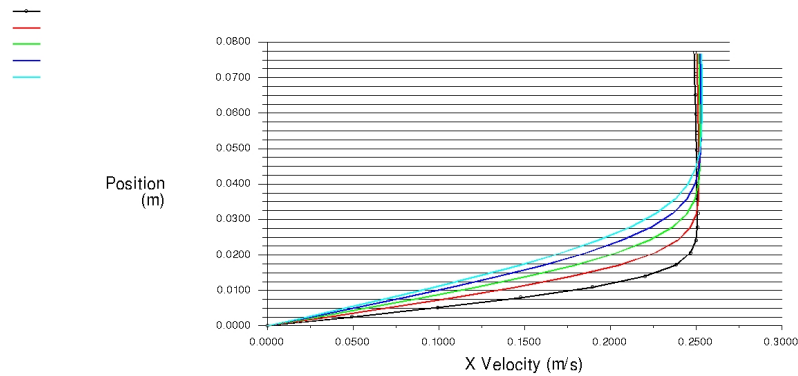


FIGURE 6 – Profils de vitesse pour différentes abscisses

## 4 Analyse des résultats

### 4.1 Force de frottement

A partir des simulations numériques réalisées sur Fluent et du raffinement du maillage on peut compléter le tableau suivant :

Re	U0	Fp	Tp(L)	Cf(L)
10	0,0002436	3,10E-08	2,47E-08	1,5
100	0,002436	4,30E-07	2,96E-07	0,18
1000	0,02436	9,00E-06	4,44E-06	0,027
10000	0,2436	2,40E-04	1,23E-04	0,0075
100000	2,436	7,10E-03	3,29E-03	0,002
1000000	24,36	2,15E-01	1,64E-01	0,001

FIGURE 7 – Paramètres du problème en fonction du Reynolds

On peut en déduire la forme de la force de frottement théorique en  $x = L$ , à partir des données du problème et de la formule de Blasius (équation (1), (2) et (5)) :

$$F_p = \frac{0,664\rho U_0^2 L}{2\sqrt{Re_L}} \quad (6)$$

Enfin on peut comparer les valeurs de  $F_p$  calculées numériquement aux valeurs théoriques :

Fp_numérique	Fp_théorique
3,10E-08	3,43E-09
4,30E-07	1,08E-07
9,00E-06	3,43E-06
2,40E-04	1,08E-04
7,10E-03	3,43E-03
2,15E-01	1,08E-01

FIGURE 8 – Comparaison des valeurs théoriques et numériques de force de frottement linéique

On remarque des valeurs proches entre théorie et pratique, les erreurs peuvent provenir des lectures graphique sur les simulations numériques de Fluent. Cependant, l'ordre de grandeur est toujours respecté.

## 4.2 Coefficient de frottement

### 4.2.1 1ère simulation

On sait théoriquement que  $Cf(L) = \alpha Re_L^\beta$ . Par conséquent, à partir des simulation numérique, on cherche à déterminer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ .

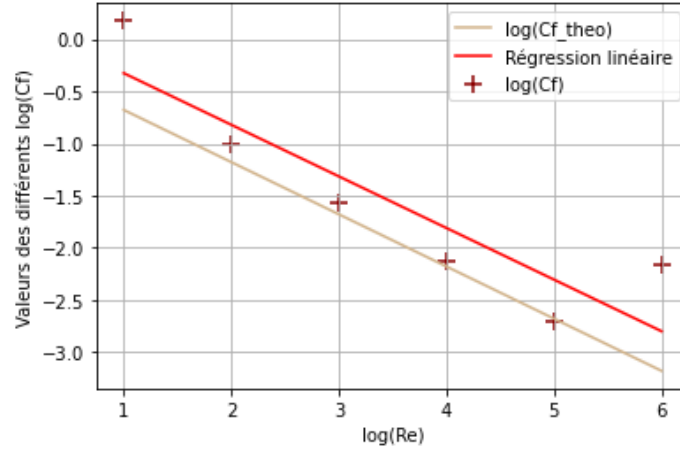


FIGURE 9 – Évolution logarithmique du coefficient de frottement en fonction du Reynolds

Par passage au logarithme, on obtient la relation :  $\log(Cf(L)) = \log(\alpha) + \beta \log(Re_L)$ . Ainsi, graphiquement à partir de la régression linéaire (Fig(9)), on trouve  $\beta = -0,49$  et  $\alpha = 0,562$ . Or la solution théorique de Blasius donne  $\beta = -0,5$  et  $\alpha = 0,664$ . Les valeurs de  $\beta$  sont très proches alors que les valeurs de  $\alpha$  sont du même ordre de grandeur mais plus éloignées. Cette erreur pourrait venir de la lecture graphique encore une fois, mais ici, on remarque un éloignement entre théorie et simulation pour des valeurs de Reynolds extrêmes.

La raison n'est pas la même pour les deux extrêmes. Pour des petites valeurs de Reynolds, l'épaisseur de la couche limite devient trop grande par rapport à la hauteur du domaine. Les dimensions du domaine sont non adaptées et donnent une valeur de coefficient de frottement faussée. Pour palier à ce problème, une solution est de doubler le *scaling factor* en Y sur Fluent, c'est à dire dilater le domaine verticalement. En opérant ainsi, nous supprimons l'influence des conditions limites et nous pouvons ainsi récupérer les véritables valeurs de coefficient de frottements.

Pour les hauts Reynolds, le problème vient du maillage. Ce dernier n'est pas encore assez fin verticalement près de la plaque et il n'y a donc pas assez de mailles au sein de la couche limite pour que la simulation s'effectue correctement. Ainsi, l'établissement de la couche limite n'est pas assuré en fin de simulation. Une solution est donc de raffiner encore le maillage. En parallèle, augmenter la longueur de la plaque permet des résultats encore meilleurs.

#### 4.2.2 2ème simulation

Ainsi pour que la solution numérique se rapproche de la solution théorique on peut modifier les dimensions de définition du problème, la qualité du maillage ou encore la longueur de l'écoulement. En modifiant certains de ces paramètres nous approchons la solution numérique comme ceci :



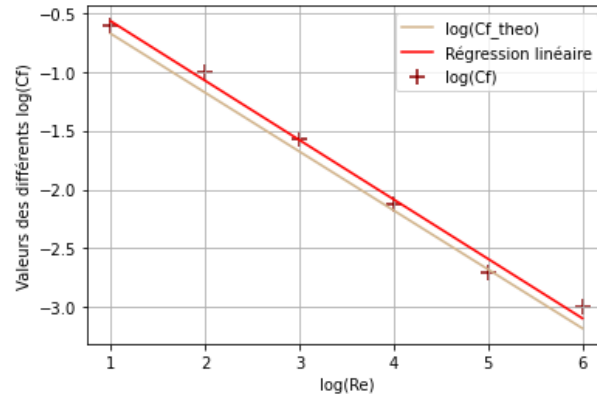


FIGURE 10 – Évolution logarithmique du coefficient de frottement en fonction du Reynolds avec les paramètres Fluent modifiés

La régression linéaire se rapproche de la solution théorique mais n'est toujours pas parfaite. Il pourrait être intéressant pour une prochain TD de trouver les paramètres exacts sous Fluent pour obtenir une solution numérique parfaite qui égal la solution théorique.

### 4.3 Problème à petits et hauts Reynolds

#### 4.3.1 Petits Reynolds

On trace en niveau de couleur le champ de vitesse horizontale, pour observer le problème explicité en partie 4.2.1 à bas Reynolds :

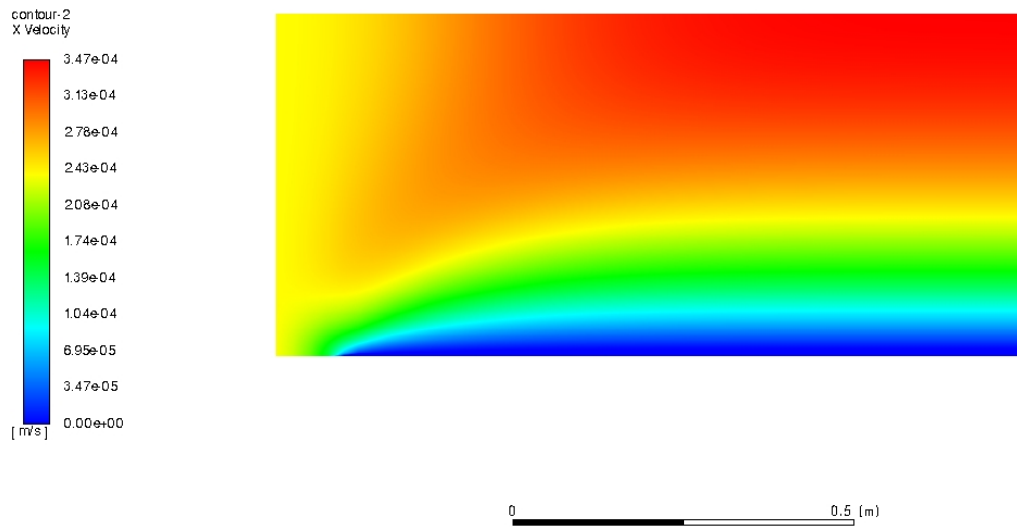


FIGURE 11 – Champ de vitesse  $U_x$ , pour  $Re=10$

On observe une épaisseur de couche limite importante avec une vitesse nulle proche paroi. De plus la vitesse tend vers une valeur supérieure à  $U_0$ . Ceci s'explique par le fait que quand nous avons défini les conditions aux limites et la géométrie de la simulation, nous n'avons pas pris une hauteur en Y assez grande pour représenter la totalité du domaine adapté à la simulation. En effet la vitesse diminue au niveau de la plaque et avec la conservation du débit, le fluide en sortant doit accélérer.

#### 4.3.2 Hauts Reynolds

On trace ici le profil vertical de vitesse horizontale pour illustrer le problème à haut Reynolds explicité en 4.2.1 :

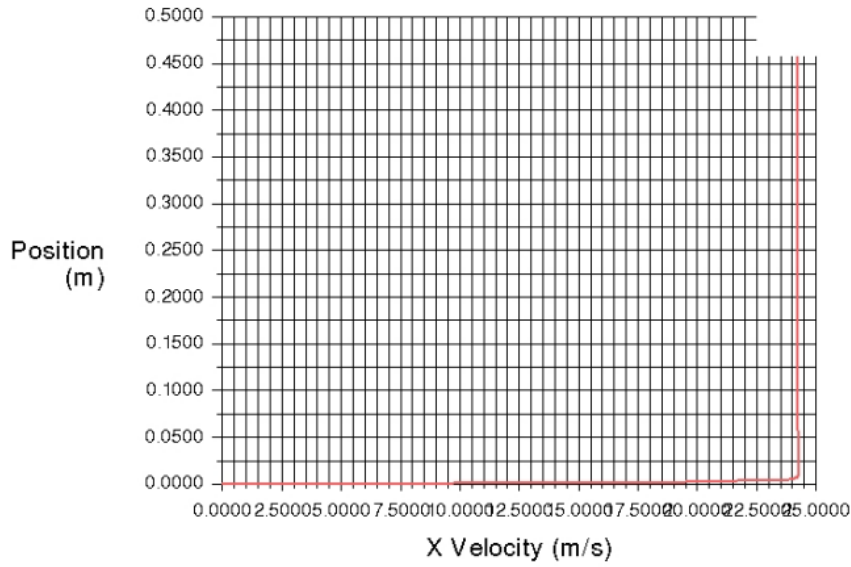


FIGURE 12 – Profil de vitesse  $U_x(y)$ , pour  $Re = 10^6$

On constate que la vitesse tend très rapidement vers la vitesse théorique  $U_0 = 24,36 \text{ m.s}^{-1}$ . De plus la maillage n'est pas assez fin pour encadrer toute la couche limite à cette vitesse, c'est pourquoi à haut Reynolds la solution numérique s'écarte de la solution de Blasius. Enfin nous sommes ici en écoulement turbulent i.e.  $Re = 10^6 > Re = 10^5$  et la solution de Blasius est déterminée pour des écoulements laminaire, ainsi le modèle numérique atteint ces limites et ne renvoie plus de valeurs cohérentes.

## 5 Conclusion

Au cours de ce TD intitulé "Couche limite laminaire sur plaque plane" nous avons pu continuer à prendre en main les logiciels Icem CFD et Ansys Fluent, le but étant d'étudier l'écoulement de la vapeur d'eau le long d'une plaque plane.

Ainsi, à travers nos simulations numériques, nous avons comparé la force de frottement et le coefficient de frottement attendus par la théorie aux valeurs simulées numériquement. Nous avons cependant remarqué un écart entre la solution numérique et théorique, surtout pour des petits et hauts Reynolds. Par la suite nous avons cherché à expliquer ces variations et les réduire en modifiant certains paramètres de simulations sur Fluent.

Enfin, nous avons compris que le problème numérique dépend de paramètres supplémentaires vis à vis du problème réel. Il est important de vérifier lors de nos simulations que notre maillage est cohérent avec l'écoulement simulé, d'analyser la taille du domaine, pour éviter que certaines limites influent sur le résultat là où elles ne devraient pas (domaine trop petit pour simuler l'infini). Les écarts entre la simulation et la théorie peuvent par conséquent provenir parfois des limites de la théorie, dues à des hypothèses trop fortes, ou bien à la simulation elle-même dans d'autres cas, si elle est mal réalisée.

C'est pourquoi il sera pertinent de prendre en compte l'existence de cette deuxième explication pour nos prochaines simulations.

## Références

- [1] Approximation de couche limite-Université Claude Bernard Lyon
- [2] INTRODUCTION A LA COUCHE LIMITE INTERACTIVE-Sorbonne Université
- [3] DYNAMIQUE DES ÉCOULEMENTS LAMINAIRES EXTERNES