

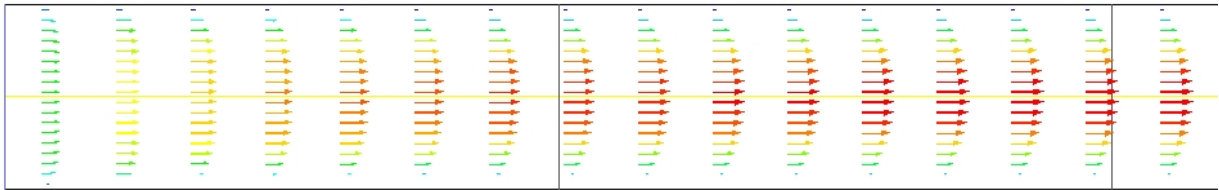
Rapport écrit d'expérience numérique

---

# Ecoulement laminaire en conduite

---

1ère année département MF2E



 Robin  
Tran Ugo

28 mars 2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Etude théorique</b>	<b>2</b>
2.1	Présentation du problème . . . . .	2
2.2	Régime d'écoulement . . . . .	2
2.3	Profil de vitesse . . . . .	3
2.4	Coefficient de perte de charge linéique . . . . .	4
2.5	Erreur . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Matériel et méthodes</b>	<b>5</b>
3.1	Géométrie . . . . .	5
3.2	Maillage . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Résultats</b>	<b>5</b>
4.1	Erreur . . . . .	6
4.2	Influence du Reynolds . . . . .	7
4.3	Coefficient de perte de charge . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>10</b>

# 1 Introduction

Lors de cette expérience numérique, nous allons nous intéresser à l'expérience de Poiseuille, et simuler l'écoulement associé à cette expérience. Réalisée au XIXe siècle par le physicien français Jean Léonard Marie Poiseuille, cette expérience fut une avancée majeure dans la compréhension de l'écoulement des fluides, en établissant la relation entre le débit d'un fluide visqueux dans une conduite et le gradient de pression appliqué.

Nous allons dans un premier temps aborder la théorie de cet écoulement et les différents résultats attendus en sortie de simulation. Nous expliquerons ensuite le matériel et les méthodes de notre simulation et nous finirons par une analyse de nos résultats.

## 2 Etude théorique

### 2.1 Présentation du problème

On considère le système suivant : une conduite circulaire de section constante. Le diamètre de la conduite est  $D = 20 \text{ cm}$  et sa longueur est  $L = 8 \text{ m}$ .

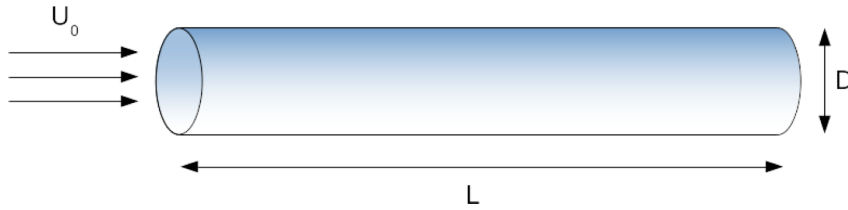


FIGURE 1 – Schéma du problème

On impose en entrée une vitesse uniforme  $U_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$ . La conduite débouche à son autre extrémité dans une enceinte à pression atmosphérique  $P = 1 \text{ atm}$ . La densité et la viscosité dynamique du gaz qui s'écoule dans la conduite sont constantes avec  $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\mu = 2.10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ .

### 2.2 Régime d'écoulement

On peut dans un premier temps calculer le nombre de Reynolds pour caractériser le régime de l'écoulement du gaz au sein de la conduite avec la formule suivante :

$$R_e = \frac{\rho U_0 D}{\mu} \quad (1)$$

On trouve par la suite un Reynolds  $R_e = 100$ , ce qui caractérise un écoulement laminaire du gaz au sein de la conduite.

### 2.3 Profil de vitesse

On peut par la suite établir le profil de vitesse du gaz dans la conduite. Par symétrie, la vitesse ne varie ni en  $x$  ( $x$  étant la direction de l'axe horizontale le long de la conduite), ni en  $\theta$  et ne dépend pas du temps en régime stationnaire.

$$U(r, \theta, x, t) = U(r) \quad (2)$$

On considère donc une conduite cylindrique avec une pression uniforme, un gaz homogène et incompressible. D'après l'équation de Navier-Stokes avec les hypothèses suivantes : fluide incompressible, effet de la gravité sur le système négligé et régime permanent, on a :  $\vec{g} \text{rad} P = \mu \Delta U$

En développant le laplacien en cylindrique, en utilisant le fait que la vitesse ne dépend que de  $r$ , et en projetant selon l'axe  $x$  on a :  $\frac{dP}{dx} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial U}{\partial r})$  Le terme de gauche ne dépend que de  $x$ , celui de droite que de  $r$ , on peut alors écrire :

$$\frac{dP}{dx} = K \quad (3)$$

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial U}{\partial r}) = K \quad (4)$$

Avec  $K$  une constante quelconque.

En résolvant l'équation (4) on trouve :

$$U(r) = \frac{K}{4\mu} r^2 + K' \ln(r) + K''$$

Avec  $K'$  et  $K''$  des constantes d'intégration.

Il y a adhérence en  $r=R=D/2$  et la vitesse étant finie, il n'y a pas de divergence de la vitesse en  $r=0$ . Donc :  $K' = 0$  et  $K'' = \frac{-KR^2}{4\mu}$ .

En résolvant l'équation (3), on trouve :

$$P(x) = \frac{P_2 - P_1}{L} x + P_1$$

Avec  $P_2$  la pression en  $x=L$  et  $P_1$  la pression en  $x=0$ .

Finalement en injectant l'expression de la pression dans celle de la vitesse on trouve :

$$U(r) = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\mu L} \quad (5)$$

On pose  $U(r=0) = U_{max} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\mu L}$ . Ainsi, on a :

$$\boxed{U(r) = U_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \quad (6)$$

De plus, par conservation du débit on a :

$$\begin{aligned} Q_{entree} &= Q_{conduite} \\ U_0 S_{entree} &= \int_0^R U(r) r 2\pi dr \\ U_0 \pi R^2 &= U_{max} \pi R^2 / 2 \end{aligned}$$

Ainsi on trouve que :

$$\boxed{U_{max} = 2U_0} \quad (7)$$

on

## 2.4 Coefficient de perte de charge linéique

En appliquant la relation de Bernoulli généralisé le long d'une ligne de courant on a :  $H_1 = H_2 + \Delta H_{12}$ . Avec  $\Delta H_{12} = \frac{fLV^2}{D2g}$ ,  $H_i = \frac{P_i}{\rho g}$  et  $f$  le coefficient de perte de charge. Ainsi on reconnaît l'équation de Darcy-Weisbach :

$$\Delta P = \frac{\rho U^2 f L}{2D} \quad (8)$$

De plus à partir de la conservation du débit de la partie précédente et à partir de la relation de  $U_{max}$  en (6) on a  $Q_{conduite} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu L}$ . D'où :  $\Delta P = \frac{\rho U^2 L}{2D} \frac{64\mu}{\rho D U}$ .

Finalement :

$$\Delta P = \frac{\rho U^2 L}{2D} \frac{64}{Re} \quad (9)$$

Par identification entre (8) et (9) on trouve la relation entre le nombre de Reynolds et le coefficient de perte de charge pour un régime d'écoulement laminaire i.e.  $Re < 2000$  :

$$\boxed{f = \frac{64}{Re}}.$$

## 2.5 Erreur

On définit l'erreur sur la vitesse axiale par  $\epsilon = |U_C - U_{exact}|$ . Avec  $U_c$  la valeur numérique calculé par fluent et  $U_{exact}$  la valeur théorique. Ici,  $U_{exact} = 2U_0$ , on cherchera par la suite à déterminer comment évolue cette erreur avec la taille de la maille selon la direction radiale  $\Delta r$ , en estimant les valeurs de  $K$  et de  $p$  :  $\epsilon = K \Delta r^p$ .

### 3 Matériel et méthodes

#### 3.1 Géométrie

Lors de ce travail dirigé sur ordinateur, nous avons utilisé le logiciel de simulation des fluides Ansys Fluent. La première étape a été de créer une géométrie via le logiciel IcemCFD. L'étude d'un écoulement dans une conduite étant axisymétrique, nous optons pour étudier l'écoulement uniquement sur la moitié supérieure de la conduite. Ainsi, notre géométrie est un rectangle de longueur  $L$ , et de largeur  $D/2$ .

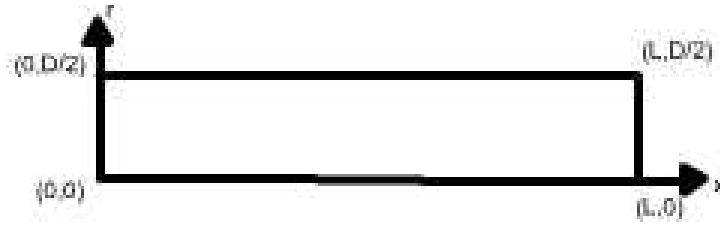


FIGURE 2 – Géométrie de la simulation

#### 3.2 Maillage

Le rectangle est toujours divisé en 100 noeuds (99 mailles), selon l'axe longitudinal (direction  $x$ ). En revanche, radialement, le nombre de noeuds va lui varier entre les valeurs 5, 7, 10, 15 et 20.

### 4 Résultats

Nous avons tracé le profil de vitesse simulé par le logiciel 3. Comme expliqué dans la partie géométrie, nous n'avons simulé les vitesses que sur un rayon de la conduite. Le profil obtenu ressemble donc bel et bien au profil prédit par la théorie d'un écoulement de Poiseuille.

Cependant, on peut remarquer que la vitesse axiale en  $r=0$ , c'est à dire la vitesse  $U_{max}$  n'atteint pas la vitesse théorique prédite de  $U_{max} = 2 \text{ m.s}^{-1}$  mais une valeur légèrement inférieure. La raison de cette différence est due au maillage élaboré pour la résolution de l'écoulement. En effet, un maillage plus fin va permettre de s'approcher de plus en plus du profil théorique.

La figure 4 compare justement les profils obtenus pour 2 maillages dans le sens radial différents. On remarque ainsi qu'en raffinant le maillage, la vitesse  $U_{max}$  se rapproche de  $2 \text{ m.s}^{-1}$ . On peut introduire la notion d'erreur, notée  $\epsilon$  pour analyser l'influence du maillage sur les résultats.

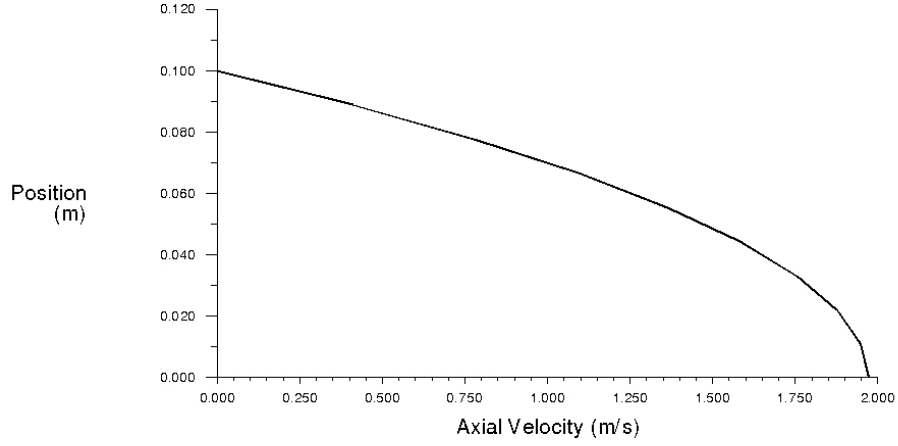


FIGURE 3 – Profil de vitesse

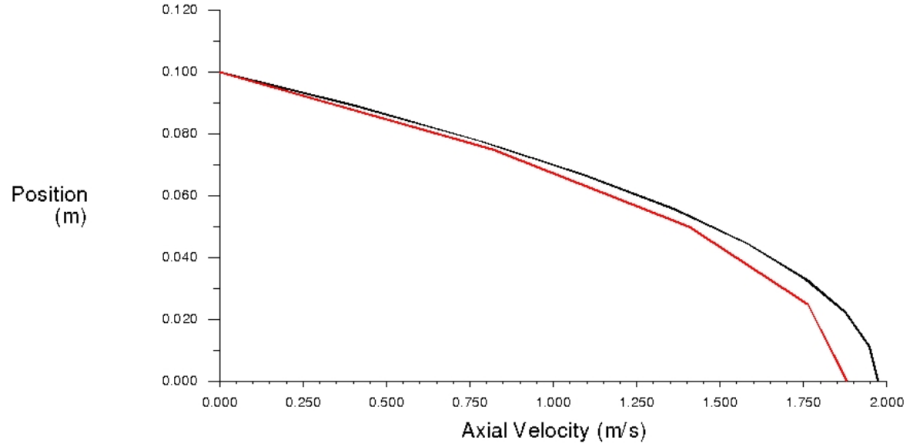


FIGURE 4 – Profil de vitesse pour un maillage à 5 noeuds (rouge) ou 10 noeuds (noir).

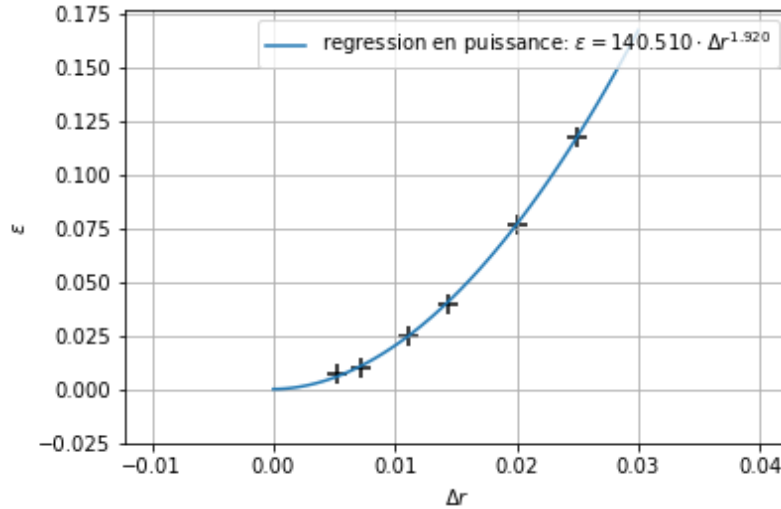
#### 4.1 Erreur

Comme définit dans la section théorique, l'erreur sur la vitesse axiale est  $\epsilon = |U_C - U_{exact}|$  ou encore  $\epsilon = K \Delta r^p$ . Dans cette partie on cherche à déterminer les coefficients K et p.

Nous avons tracé sur Fluent pour 6 différentes valeurs de maillage verticale (5,6,8,10,15,20), la vitesse axiale. Par la suite on calcul  $\epsilon$  avec  $U_{exact} = 2U_O = 2 \text{ m.s}^{-1}$  Et on trace nos 6 valeurs de  $\epsilon$  en fonction de  $\Delta r = \frac{D}{2(n-1)}$ , avec n le nombre de maille verticale. Avec la fonction curvefit sur python on interpole les points obtenue par rapport à une fonction puissance. On trace et on écrit cette loi sur la figure suivante 5 :

On trouve un coefficient  $p=1,92$  et un coefficient  $K=140,51$ .

Ainsi, si l'on souhaite par la suite obtenir une précision de l'ordre de 1% i.e.  $\epsilon = 1\%$ , on peut trouver  $\Delta r = \frac{D}{2(n-1)} = (\epsilon/K)^{1/p}$  et donc en déduire le nombre n de mailles. On trouve

FIGURE 5 –  $\epsilon$  en fonction de  $\Delta r$ , et sa régression en puissance

qu'il faut  $n=11$  mailles verticales et 100 mailles horizontales (ce nombre de maille étant constant) pour obtenir une précision de l'ordre de 1%.

## 4.2 Influence du Reynolds

On souhaite dans cette partie observer l'influence du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse axiale de l'écoulement et sur la pression statique au sein de la conduite.

Dans un premier temps pour augmenter le nombre de Reynolds nous avons joué sur l'augmentation de la vitesse pour atteindre différentes valeurs de  $Re$ , de 100 à 5000 (pour cela il suffisait de modifier le paramètre de la vitesse sous fluent). Par la suite on trace l'évolution de la vitesse axiale et on cherche quand le régime établi est atteint. On peut alors tracer des points et observer la loi que suit la longueur du régime établie au sein de la conduite en fonction du Reynolds :

On remarque que plus la vitesse augmente, plus la longueur du régime établie est grande. Cela s'applique même pour des valeurs de  $Re$  comprises entre 100 et 2000, là où le régime est réellement laminaire. L'augmentation de la longueur de la couche limite quand le Reynolds augmente est intuitive puisque un Reynolds plus élevé indique une inertie plus grande et donc la longueur nécessaire à l'établissement du régime est plus élevée. Mais nous n'avons cependant pas trouvé d'explications ni de relation dans la littérature qui expliqueraient cette évolution linéaire.

## 4.3 Coefficient de perte de charge

On peut calculer le coefficient de perte de charge théorique par la formule :  $f = \frac{64}{Re}$  [2]. On peut par la suite comparer ce coefficient de perte de charge théorique au coefficient de perte de charge numérique qui est défini par :



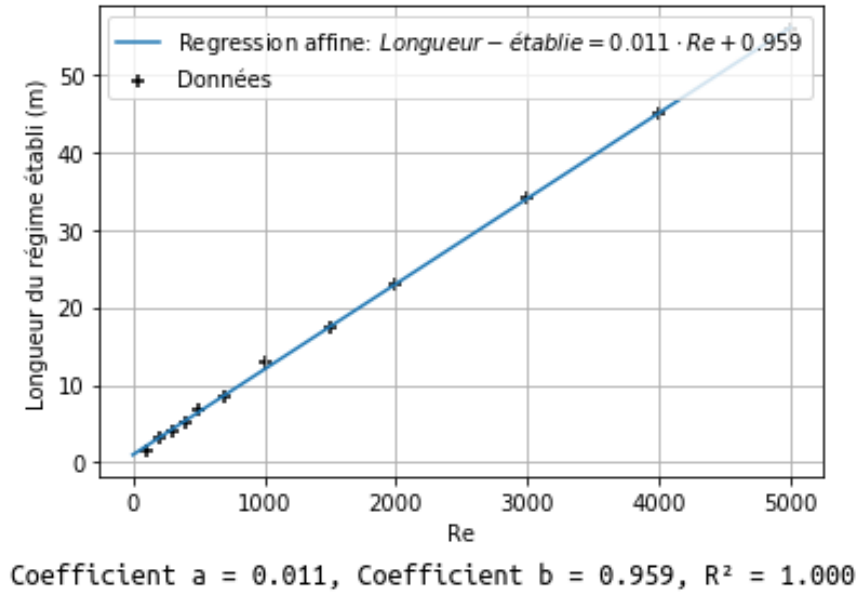


FIGURE 6 – Longueur du régime établie en fonction de Re, et sa régression affine.

$$f = \left| \frac{\Delta P D}{\frac{1}{2} \rho V^2 L} \right| \quad (10)$$

Pour trouver le coefficient  $\frac{\Delta P}{L}$  on utilise le graphe de la pression statique en fonction de la longueur de la conduite, comme le graphe suivant pour n=20 :

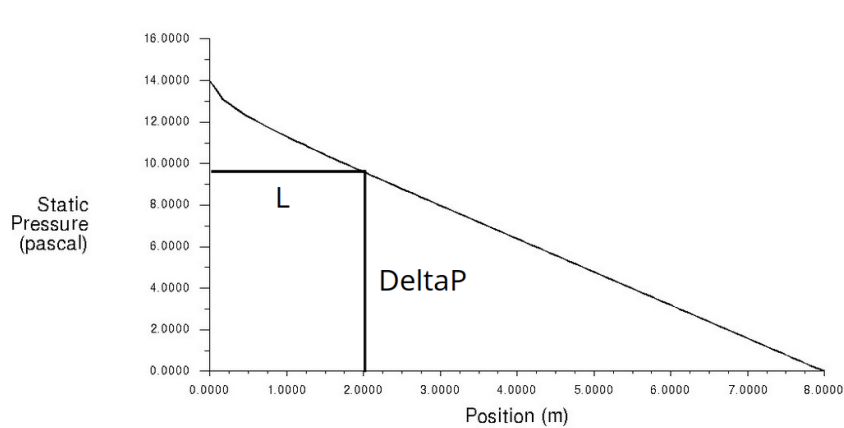


FIGURE 7 – Évolution de la pression en fonction de la longueur de la conduite, n=20, Re = 100

On regarde le début de la courbe qui correspond au régime établie et donc à notre coefficient  $\frac{\Delta P}{L}$  et on peut calculer le coefficient f car les autres paramètres sont connus.

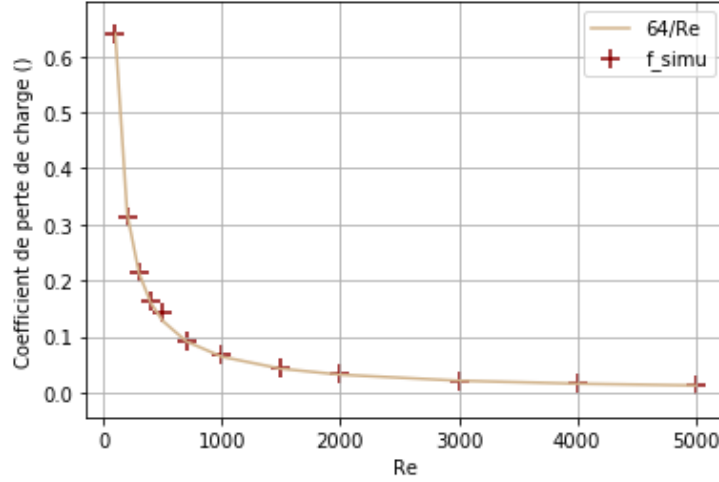


FIGURE 8 – Coefficient de perte de charge en fonction du Reynolds

Re	$\Delta P$ (Pa)	L (m)	$f = \frac{64}{Re}$	$f = \left  \frac{\Delta P D}{\frac{1}{2} \rho V^2 L} \right $
100	9.6	6	0.640	0.640
200	12.5	4	0.320	0.313
300	17	3.5	0.213	0.216
400	19.5	3	0.160	0.163
500	9	1	0.128	0.144
700	34	3	0.091	0.093
1000	50	3	0.064	0.067
1500	300	12	0.043	0.044
2000	260	8	0.032	0.033
3000	250	5	0.021	0.022
4000	750	11	0.016	0.017
5000	1500	18	0.013	0.013

TABLE 1 – Tableau des valeurs de  $\Delta P$  et L obtenues

Le tableau 1, et plus visuellement la figure 8 montrent que les valeurs du coefficient de perte de charge donnés par la simulation Fluent sont extrêmement proches de la courbe théorique  $f = 64/Re$ . Cela est tout à fait cohérent pour des valeurs de Reynolds faible ( $<2000$ ), cependant, pour des valeurs de Re plus élevées, le coefficient de perte de charge n'est plus censé obéir à cette loi. Une explication possible est que nous avons demandé au logiciel FLUENT de simuler une solution en régime laminaire. Ainsi, la relation normalement viable qu'à bas Reynolds, donc en régime laminaire, voit son domaine étendu jusqu'à des Reynolds plus élevés.

## 5 Conclusion

Au cours de ce TD intitulé "Écoulement laminaire en conduite" nous avons pu prendre en main les logiciels Icem CFD et Ansys Fluent. Le but étant d'étudier l'écoulement d'un gaz dans une conduite lisse autrement appelé "Écoulement de Poiseuille".

Ainsi, à travers nos simulations numériques, nous avons retrouvé la forme parabolique de l'écoulement prédit par la théorie. Nous avons cependant remarqué un écart entre la solution numérique et théorique, dépendant du raffinement du maillage. Enfin, nous avons pu analyser l'influence du Reynolds sur la couche limite et le coefficient de perte de charge de la conduite.

Cette expérience a montré l'importance de la géométrie pour réduire le nombre de calculs, et du maillage pour améliorer la précision de la solution calculée. La géométrie et le maillage furent très simples lors de cette expérience, mais nous allons en aborder des plus complexes lors des prochaines expériences.

## Références

- [1] Cours de Mécanique des Milieux continus
- [2] Cours d'Hydraulique en charge
- [3] Écoulement de Poiseuille d'un fluide visqueux