

Bsp 35. S beliebiges Schema, $n \in \mathbb{N}$. Dann A_S^n separiert über S , ebenso jedes offene Unterschema, denn

$$A_S^n = A_{\mathbb{A}^n}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S$$

und Separiertheit ist stabil unter Basiswechsel (Prop 34)

Prop 36. Sei $S = \text{Spec } R$ aff-in und X ein Schema

Dann sind äquiv:

(i) X separiert

(ii) Für je zwei offene affine $U, V \subseteq X$ ist $U \cap V$ affin und

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}: \mathcal{O}_X(U) \otimes_R \mathcal{O}_X(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U \cap V) \\ s \otimes t & \longmapsto & s|_{U \cap V} \cdot t|_{U \cap V} \end{array}$$

(iii) \exists offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, so dass

$$\forall i, j \in I: \rho_{U_i, U_j} \text{ surj}$$

Bew: Für alle offene affine $U, V \subseteq X$ gilt

$$U \cap V = \Delta_{X/S}^{-1}(U \times_S V)$$

"abg Imm." ist lokal auf dem Ziel, daher

$\Delta_{X/S}$ ist abg. Imm \Leftrightarrow für alle $U, V \subseteq X$ offene affine ist

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{\Delta_{X/S}} & U \times_S V \\ & \rho_{U \cap V} & \\ & \text{abg Immersion} & \end{array}$$

\Leftrightarrow Für jede offene affine Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ und alle } i, j \in I \text{ ist}$$

$$U_i \cap U_j \xrightarrow{\Delta_{X/S}} U_i \times_S U_j \text{ abg Immersion}$$

Sind $U = \text{Spec } A$, $V = \text{Spec } B$ affin, so ist auch

$U \times_S V = \text{Spec } (A \otimes_R B)$ affin

Daher:

$U \times V \rightarrow U \times_S V$ ist abg. Immersion

$\Leftrightarrow \rho_{U,V}$ surjektiv ist □

Bsp 37: Für jedes Schema S und $n \in \mathbb{N}$ mit \mathbb{P}_S^n sep. über S , denn

„sep.“ lokal auf dem Ziel (Prop 34 (2)), daher $\mathcal{O}_S = \text{Spec } R$ affin.

$$\mathbb{P}_R^n = \bigcup_{i=0}^n U_i \quad \text{mit } U_i = \text{Spec } R \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_j}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right]$$

und

$$\begin{aligned} \rho_{U_i, U_j} : R \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_j}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] \otimes_R R \left[\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_j}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right] \\ \longrightarrow R \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] \left[\frac{x_i}{x_j} \right] \end{aligned}$$

ist surj.

Bsp 38: Sei k alg. bsg Körper, X Prävarietät ü. k , d.h. ganz Schema v.e. T. ü. k . X heißt Varietät, wenn X sep. ist.

Affine Prävarietäten sind Varietäten, \mathbb{P}_k^n Var. quiprojektive Prävarietäten (= Unterschemata in \mathbb{P}_k^n) sind Varietäten.

14. Eigentliche Morphismen

(eng proper)

Ist $f: X \rightarrow Y$ stetige Abb. zwischen top. Räume, dann heißt f eigentlich, wenn Urbild kompakter Mengen kompakt sind.

Sei X hausdorffsch, Y lokal kompakt

Dann ist f eigentlich $\Leftrightarrow f$ universell abg.

(Bourbaki, Topologie gemäß Gen. I § 10 no. 3 Prop 7)

Def 39 Ein Morph $f: X \rightarrow Y$ von Schemata heißt eigentlich, wenn:

- (i) f v.e.T.
- (ii) f separiert
- (iii) f universell abg.

Ein Y -Schemata heißt eigentlich, wenn der Strukturmorph. eigentlich ist. Eigentlichkeit ist Ideal auf dem Ziel!

$f: X \rightarrow Y$ heißt v.e.T., wenn $V \subseteq Y$ offen eine Überdeckung.

$f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n V_i$ existiert, sodass

$V_i: \mathcal{O}_X(V_i)$ ist endl. erg. $\mathcal{O}_Y(U)$ -Algebra

Def 40 Ein Morph. $f: X \rightarrow Y$ heißt projektiv, wenn es sich faktorisieren lässt als:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{abg lmm} & \searrow \downarrow \text{proj} & \nearrow \text{kan Morph} \\ & Y & \end{array}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$

Prop 1, Sei P eine Eigenschaft

I v.e.T II endlich III projektiv IV separiert

Dann: (i) abg. Imm. erfüllen P

(ii) P ist stabil unter Komposition

(iii) P ——— " ——— Basiswechsel

(iv) Falls $X \xrightarrow{f} Z$, $Y \xrightarrow{g} Z$ P erfüllen, dann auch

$$X \times_Z Y \longrightarrow Z$$

(v) Erfüllt $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ P , so auch f , falls

• f quasi-kompakt (d.h. Y hat offene offene Überdeckung, deren Urbilder komp. quasi-komp. sind)

• g sep, im Falle II, III

~~• g sep, im Falle IV~~

vgl: Lin, "Algebraic Geometry and Arithmetic courses",
Prop 24, 3.16, 3.32, (3.9)

Bew: Skizze (iv) folgt aus (ii), (iii)

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{g} Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

(v) für II, III, IV folgt aus (i) – (iii) und Bem 33

I, \mathcal{O}_X affin sei $V \subset X$ offen affin

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^r U_i, \quad U_i \subseteq X \text{ offen affin}$$

(da f quasi-kompakt), und ~~da f v.e.T~~ da g v.e.T

$\forall i: \mathcal{O}_X(U_i)$ e.e. $\mathcal{O}_Z(Z)$ -Algebra \Rightarrow auch e.e. $\mathcal{O}_Y(V)$ -Algebra

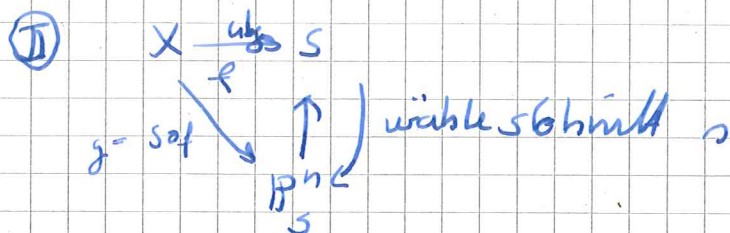
(da $\mathcal{O}_Y(U_i)$ eine $\mathcal{O}_Z(Z)$ -Algebra ist)

AG 1, V, 30.01.2019

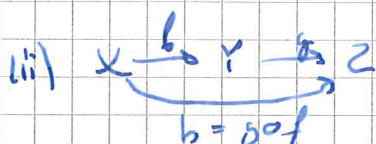
i) ① „abg Imm“ lokal bzgl. Ziel $\Rightarrow \exists j: Z \rightarrow X = \text{Spec } A$ abg Imm
 $\Rightarrow Z = \text{Spec } A/I$ für ein Ideal I

④ Prop 34

② folgt aus ①, ④ und dass „Abg Imm“ sind stabil unter Basiswechsel



(dies ist abg Immersion)



①: $V \subseteq Z$ offen, g. u. v. h. $= g^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^r U_i$, $U_i \subseteq Y$ offen, $\sigma_Y(U_i)$ ist e. l. $\sigma_Z(U_i)$ -Algebra.

$f \subseteq U_i$ $\Rightarrow V_i: f^{-1}(V) \cap U_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} W_{ij}$, $W_{ij} \subseteq X$ offen, affin

~~②~~

~~③~~ $\sigma_X(W_{ij})$ ist e. l. $\sigma_Y(U_i)$ -Alg.

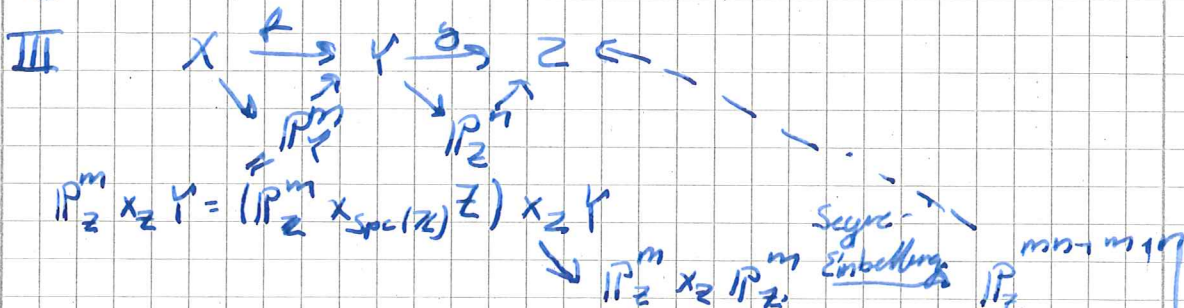
$\Rightarrow \sigma_X(W_{ij})$ e. l. $\sigma_Z(V)$ -Alg.

$\# h^{-1}(V) = \bigcup_{i,j} W_{ij} \Rightarrow \text{Beh}$

④ Prop 34

② folgt aus ④ und „universal abg.“ ist stabil unter

„O“



(iii) I gilt, da für affine Schemata Faserprodukte dem Tensorpr. entsprechen und daher „l.e.e. Alg“ erhalten.

IV Prop 34

II folgt aus I, IV und der Def von universell

III

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_Y Z & \xrightarrow{k} & Z & \xleftarrow{i_{X,Y}} & \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\
 X & \xrightarrow[\text{proj}]{f} & Y & \xrightarrow{i_{X,Y}} & \mathbb{P}_Y^n \times_Y Z = \mathbb{P}_Z^n \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & \mathbb{P}_Y^n & & &
 \end{array}$$

i abg. lmm $\Rightarrow i_{X,Y}$ abg. lmm □

Prop 42: Sei $f: X \rightarrow Y$ surj Morph von S -Schemata, Y sep v.e.T ü. S , X eig. $\Rightarrow Y$ eig.

Bew: f surj $\Rightarrow \forall T \rightarrow S$ ist $f_T: X_T \rightarrow Y_T$ surj

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} Y_T & \longrightarrow & T \\ \uparrow & \nearrow & \\ X_T & & \end{array} \quad \nearrow \text{ abg, da } X \text{ eigentlich}$$

$\Rightarrow Y_T \rightarrow T$ ist abg $\Leftrightarrow Y \rightarrow S$ universell abg □

Prop 43 X eigentlich. Schema über $S = \text{Spec } A \Leftrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ ganz über A . Ist $X = \text{Spec } B$, so ist B endl über A

Bew: Liu 3.17/3.18

Kor 44: X red. eig. Var. über einem abg. Körper k

$\Rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ endl. - dim k -VR.