Algdgeol, Vorlesung 01.02.2019

Theorem 45: $\mathcal{O}_K$ Bewertungsring, $K = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_K)$

$X/\mathcal{O}_K$ eigentlich

$\Rightarrow \quad X_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K) \xrightarrow{\cong} X_K(K)$ ist bijektiv

<u>Bewertungskriterium</u> (vgl. Hartshorne, Liu 3.26)

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists!"] & Y
\end{tikzcd}$$

f eigentlich $\Longleftrightarrow$ $\cancel{X(\mathcal{O}_K) \xrightarrow{\cong} X(K)}$ UE oben erfüllt

$$\left(\text{Thm auf } \begin{array}{c} X \times_Y \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \end{array} \right)$$

Theorem 46 (Liu III 3.30) Jeder projektive Morphismus ist eigentlich.

zum Beispiel: abelsche Varietäten, etwa elliptische Kurven.

$\overset{\text{Thm 46}}{\Longrightarrow} \quad E(\mathbb{Q}_p) = E(\mathbb{Z}_p)$

IV Dimensionen

1. Allgemeine Schemata

Def 1: Für einen top. Raum X ist die (Krull) Dimension das Supremum der Länge aller Ketten
$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \subseteq X$$
irreduzibler abg. TM Z_i

X ist rein von Dim n, falls alle irred Komponenten von X der Dim n haben $\dim \emptyset = -\infty$, andernfalls $\dim X \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Die Dimension eines Schema ist per def des Unterliegende top Räume also $\dim X = \dim X_{red}$

Bsp 2 (i) $X = \operatorname{Spec}(A) \Rightarrow \dim X = \dim_{Krull} A$ $= \sup_{m \in \operatorname{Spec} m A} \dim A_m = (*)$

da irred. abg TM genau die Primidealen von A entsprechend.

$(*) = \sup_{p \in \operatorname{Spec} A} \{ ht\, p \}$

$ht\, p = \sup \{$ Länge von strikt aufsteigend Primideal kett in $p \}$

$ht\, I = \inf \{ ht\, p \mid p \supset I \}$
$I \subset A$ Ideal bel.

ii) $\dim A^n_A \geq \dim A + n$, "=" falls A noeth.
denn $\dim A[X] \geq \dim A + 1$, "=" falls A neoth.

Def 3. Sei X top Raum, $x \in X$
$$\dim_x X := \inf \{ \dim U \mid x \in U \subset X \text{ offen} \}$$
heißt Dimension von X bei x.

Alg Geo I, V, 8 1.2.2018

Bsp k: $\mathcal{O}$ DBR, $y = (0)$, $s = m \in \operatorname{Spec} \mathcal{O} = X$

$\{s\} \subset X$ max Länge (X irred, da $\mathcal{O}$ integer)

$\Rightarrow$ $1 = \dim X = \dim_s X$

$\dim \{y\} = \dim_y X$, da $\{y\}$ offen.

Lemma 5: X top Raum:

(1) $Y \subset X$ TM $\Rightarrow \dim Y \leq \dim X$

Ist X irred + $\dim X < \infty$, Y abg, dann $Y = X \Leftrightarrow \dim X = \dim Y$

(2) Dim ist lokal $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ offene Überdeckung

$\Rightarrow \dim X = \sup_\alpha \dim U_\alpha$

(3) I: Menge der irred. Komponenten von X

$\Rightarrow \dim X = \sup_{Y \in I} \dim Y$

(4) X Schema: $\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X = \sup_{x \in X} \dim \mathcal{O}_{X,x}$

Bew: (1) $Z \subset Y$ abg. irred $\Rightarrow \bar{Z} \subset X$ abg. irred

mit $\bar{Z} \cap Y = Z$

Zusatz „$\Rightarrow$" ✓, „$\Leftarrow$" Wähle $Y \subsetneq X$ könnte in Y, zu einer strikt längeren Kette in X erweitert werden da X irred. ↯

(2) „$\geq$" nach (1) „$\leq$" Sei $Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_\ell \subset X$ irred abg.

$\Rightarrow \exists\, U_\alpha$ mit $U_\alpha \cap Z_0 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \emptyset \neq U_\alpha \cap Z_i \subset Z_i$ offen $\Rightarrow U_\alpha \cap Z_i \subset U_\alpha$ irred

abg. Da $\overline{U_\alpha \cap Z_i}^X = Z_i$ bilden $(U_\alpha \cap Z_i)_i$ Kette der Länge ℓ in U_α ✓

(3) klar da jede längste Kette mit irreduzibler Kompon. enden muss.

(k) ~~Ⓔ~~ $X = \operatorname{Spec} A$ ~~aff.~~ wg (2)

$\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim A_{\mathfrak{p}_x} = \sup\{\text{Länge von Kett } \subseteq \mathfrak{p}_x\}$

$\updownarrow$

$V(\mathfrak{p}_x) = Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \subset X$

wie oben $U \cap Z_i$ Kette der Länge n in U

$\Rightarrow \dim \mathcal{O}_{X,x} \leq \dim_x X \leq \dim X$

$\Rightarrow$ Beh nach Bsp 2 $\square$

z.B. $\dim \mathbb{P}^n_k = n$

Def 6 (i) $Y \subset X$ irred. abg. Unter der **kodimension** von Y in X, $\operatorname{codim}_X Y$, versteht man das Supremum von Längen aller Ketten abg. irred. TM von X, die Y enthält

$$Y = Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \subseteq X$$

(ii) $Y \subset X$ abg.

$$\operatorname{codim}_X Y = \inf_{\substack{Z \text{ irred komp} \\ \text{in } Y}} \operatorname{codim}_X Z$$

Bem 7: (i) Z abg. irred.: $\operatorname{codim}_X Z + \dim Z \leq \dim X$ (i.a. $\neq$)

(ii) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$: $\dim A_{\mathfrak{p}} = ht(\mathfrak{p}) = \operatorname{codim}_{\operatorname{Spec} A} V(\mathfrak{p})$

(2) Ganze Morphismen

Lemma 8: (Going up): $\varphi: A \to B$ ganz, inj Ringhom $\Rightarrow \operatorname{Spec} B \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Spec} A$ ist surj + $\dim A = \dim B$

Kor 9: $A \xrightarrow{\varphi} B$ ganz $\longleftrightarrow X \xrightarrow{f} Y$

$Z = V(\mathfrak{b}) \subset X$ abg, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal $\Rightarrow f(Z) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) \subset Y$ abg $+ \dim f(Z) \leq \dim Z$.

AlgGeo 1, V, ~~3~~ 01.02.2019

Bew: früher: $f(V(\mathfrak{b})) \subset V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ dicht

$$A/\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \hookrightarrow B/\mathfrak{b} \quad \text{ganz}$$

$\xrightarrow{\text{Lem 8}}$ $\quad Z \xrightarrow{\bar{f}} V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ surj + ~~ch~~ gl. Dim

$\square$