AG 1, V, 11.01.2018

Beweis: Umkehrabb $F(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, F)$

$$\xi \longmapsto \alpha_\xi = (\alpha_\xi(Y))_{Y \in Sch/S_0}$$

mit $\alpha_\xi(Y) : \underset{\mathrm{Hom}(Y,X)}{\overset{\shortparallel}{h_X(Y)}} \longrightarrow F(Y)$

$$f \longmapsto \underset{\mathrm{Hom}(F(X),F(Y))}{\overset{\in}{F(f)}}(\xi)$$

3. Faserprodukte in bel. Kat.

$\mathcal{C}$ Kat., $S \in Ob(\mathcal{C})$, $X \xrightarrow{f} S$, $Y \xrightarrow{g} S$ Morph.

Def 6: Ein Tupel (Z,p,q) mit $Z \in Ob(\mathcal{C})$ ~~und Y, über~~ S und Morph $Z \xrightarrow{p} X$, $Z \xrightarrow{q} Y$, $f\circ p = g \circ q$, heißt Faserprodukt von X und Y über S (bzw von f,g), falls für jedes $T \in Obj(\mathcal{C})$ und Paare $(u: T \to X, v: T \to Y)$, von Morph mit $f\circ u = g \circ v$ genau einen Morph $w: T \to Z$ ex mit $p \circ w = u$, $q \circ w = v$

Notation $X \times_S Y$ oder $X \times_{f,S,g} Y := Z$, $(u,v)_S := w$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\exists_1"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & S
\end{tikzcd}$$

Ist S ein finales Obj in $\mathcal{C}$, so ist $X \times_S Y = X \times Y$ das katem. Prod

Bsp 7: 1) $\mathcal{C} = Sets$ $X \times_S Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$

2) $\mathcal{C} = Top$ top Räume f,g stetig

$\{(x,y) \mid f(x) = g(y)\} \subset X \times Y$ def $X \times_S Y$

induz. Top Produkttop ein Top.

AG1, V, 16.01.2019

Ab jetzt: Alle Faserprodukte mögen existieren!

$T \xrightarrow{h} S$ (kurz T) mit Strukturmorph ist ein S-Objekt

$X \xrightarrow{f} S$

$\mathrm{Hom}_S(T,X) =: X_S(T)$ Morphismen $T \xrightarrow{w} X$ mit $f \circ w = h$

T-wertige Punkte von X (über S)

das def. Kat $\mathcal{C}/S$ mit finales Objekt id_S

Faserprodukt in $\mathcal{C}$: $X \times_S Y$ = Produkt von S-Ob, f, g in $\mathcal{C}/S$

(UAE) $(X \times_S Y)(T) = \mathrm{Hom}_S(T, X \times_S Y) \xrightarrow{\sim} \underbrace{\mathrm{Hom}_S(T,X) \times \mathrm{Hom}_S(T,Y)}_{X_S(T) \times Y_S(T)}$

$w \longmapsto (p \circ w, q \circ w)$

für alle $h: T \to S$

Funktorialität

$X, Y, X', Y' \in \mathcal{C}/S$, $u: X \to X'$, $v: Y \to Y'$ S-Morph

$\Rightarrow \exists!$ Morph $u \times_S v$ (oder $u \times v$): $X \times_S Y \to X' \times_S Y'$, d.h. Diagramm unten kommutiert, nämlich $u \times v = (u \circ p, v \circ q)_S$ (UE von $X' \times_S Y'$)

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "u \times v"] \arrow[dd, "q"'] & & X \arrow[dr, "u"] & \\
& X' \times_S Y' \arrow[rr, "p'"] \arrow[dd, "q'"] & & X' \arrow[dd] \\
Y \arrow[dr, "v"] & & & \\
& Y' \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}$$

Yoneda Lemma:

$X \xrightarrow{f} Y \longleftrightarrow (X_S(T) \xrightarrow{f(T)} Y_S(T))$ Morph in $\mathcal{C}/S$ funktoriell

in T $T \in \mathcal{C}/S$

AG 1, V, 16.1.2018

Prop 8 (Eigenschaft des Faserprodukt) $X, Y, Z \in \mathcal{C}/_S$ $\exists$ kanonische Isomorphismen über S.

a) $X \times_S S \xrightarrow{\cong} X$ | auf T-wert Pkt, $(x, h) \mapsto x$, $X_S(T) \times S_S(T) \to X_S(T)$

b) $X \times_S Y \xrightarrow{\cong} Y \times_S X$ | $(x,y) \mapsto (y,x)$

c) $(X \times_S Y) \times_S Z \xrightarrow{\cong} X \times_S (Y \times_S Z)$ | $((x,y), z) \mapsto (x, (y,z))$

Ein komm Diagramm in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

heißt kartesisch, falls $(u,v)_S : Z \to X \times_S Y$ ein Isomorph. in $\mathcal{C}$ ist (und damit automatisch in $\mathcal{C}/_S$)

Nach dem Yoneda-Lem ist dies äquivalent dazu, dass das folg. Diagram kartesisch für alle $T \in \mathcal{C}$ (Bsp 4.7) ist.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(T,Z) \arrow[r, "u(T)"] \arrow[d, "v(T)"'] & \mathrm{Hom}(T,X) \arrow[d, "f(T)"] \\ \mathrm{Hom}(T,Y) \arrow[r, "g(T)"'] & \mathrm{Hom}(T,S) \end{tikzcd}$$

Prop 10 (Transitivität des Faserprodukt)

Sei
$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & X' \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ S'' \arrow[r] & S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$
kommutativ + recht kartesisch

Dann gilt
$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ S'' \arrow[r] & S \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[d] \\ S'' \arrow[r] & S' \end{tikzcd}$$

Bew In Kat der Mengen + Yoneda-Lemma $\square$

4. Faserprodukte von Schemata

Ziel $X, Y \in Sch/_S \implies X \times_S Y$ ex. $\boxed{\text{zunächst } X, Y, S \text{ affin}}$

Prop 11

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A \otimes_R B \end{tikzcd} \longleftrightarrow \begin{tikzcd} Z := \operatorname{Spec}(A \otimes_R B) \arrow[r] \arrow[d] & Y = \operatorname{Spec} B \arrow[d] \\ X = \operatorname{Spec} A \arrow[r] & S = \operatorname{Spec} R \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow (Z, p, q) = X \times_S Y$

Bew: Wg $\operatorname{Hom}_{Sch}(T, \operatorname{Spec} C) = \operatorname{Hom}_{Ring}(C, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$

Für alle $T \in Sch$ erhalten wir funktoriell Isom von T

$\operatorname{Hom}_{Sch/S}(T, Z) \cong \operatorname{Hom}_{R\text{-}Alg}(A \otimes_R B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$

"$\otimes$" = prod. in kat Ring $\cong \operatorname{Hom}_{R\text{-}Alg}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \times \operatorname{Hom}_{R\text{-}A}(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$

$\cong \operatorname{Hom}_{Sch/S}(T, X) \times \operatorname{Hom}_{Sch}(T, Y)$ $\square$

Theorem 12: $S \in Sch$, $X, Y \in Sch/_S \Rightarrow X \times_S Y \in Sch$ ex

Zusatz: Das Faserprodukt ex. sogar (mehr Testobjekt) in der kat. lokal ger. Räume, und dies ist ein Schema.

Kor 13: $X \times_S Y = \bigcup_i \bigcup_{\substack{j \in J_i \\ \xi \in K_i}} X_{ij} \times_{S_i} Y_{i\xi}$ ist affine Überdeckung

wobei $S = \bigcup_i S_i$ offene Überdeck., $X_i = p^{-1}(S_i)$, $Y_i = q^{-1}(S_i)$

$X_i = \bigcup_{j \in J_i} X_{ij}$, $Y_i = \bigcup_{\xi \in K_i} Y_{i\xi}$ offene Überdeckung

Ag 1.1,

Bew: Idee: Überdecke S, X, Y (mit $X \to S$, $Y \to S$) jeweils durch offene affine Unterschemata + verklebe die affinen Faserprodukte

Schritt 1: Sei $U \subset X$ offenes Unterschema und existiere $(X \times_S Y, p, q)$ $\overset{!}{\Longrightarrow}$ $p^{-1}(U) \subset X \times_S Y$ ist $U \times_S Y$ $(p|_{p^{-1}(U)}, q|_{p^{-1}(U)})$

denn: Für $h: T \to p^{-1}(U)$ erhalten wir

$f = p \circ h: T \to U$, $g = q \circ h: T \to Y$ mit $x|_U \circ f = y \circ g$

zu $T \xrightarrow{f} U$ mit $x_{|U} \circ f = y \circ g$ $\overset{UE}{\Longrightarrow}$ $\exists!\, h': T \to X \times_S Y$ mit

$T \xrightarrow{g} Y$

$p \circ h' = j \circ f$
$q \circ h = g$ $\Longrightarrow$ "$p \circ h \in U$"

$\Longrightarrow$ h' faktorisiert durch $p^{-1}(U)$, d.h. reduziert

$h: T \longrightarrow p^{-1}(U)$, d.d. $f = p \circ h$, $g = q \circ h$

Schritt 2: $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ offene Überdeckung

Beh: Falls $Z_i := U_i \times_S Y$ ex für alle i, so auch $X \times_S Y$

$$\begin{tikzcd} & Z_i \arrow[dl] \arrow[d, "pr_2"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

dazu $p_i: Z_i \xrightarrow{pr_1} U_i$, $Z_{ij} = p_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subset Z_j$

$p_{ij} = p_i|_{Z_{ij}}: Z_{ij} \longrightarrow U_i \cap U_j$

$\overset{\text{Schritt 1}}{\Longrightarrow}$ $Z_{ij} \cong (U_i \cap U_j) \times_S Y \cong Z_{ji}$

$\Longrightarrow$ $\exists!\, Z_{ij} \xrightarrow[\varphi_{ji}]{} Z_{ji}$ mit $p_{ji} \circ \varphi_{ji} = p_{ij}$

$Z :=$ Verkleben von Z_i entlang Z_{ij} via φ_{ij}

$Z_i \xrightarrow{pr_2} Y$ verkleben zu $Z \xrightarrow{q} Y$, $Z \xrightarrow{p} X$ ebenso aus p_i

Beh: (Z, p, q) ist Faserprodukt

$T \xrightarrow{f} X$, $T \xrightarrow{g} Y$ mit $x \circ f = y \circ g$

Definiere $f_i : T_i = f^{-1}(U) \longrightarrow U_i$ $(f|_{T_i})$

$\Rightarrow \exists!\ h_i : T_i \longrightarrow Z_i$ mit $p_i \circ h_i = f_i$

$q \circ h_i = g|_{T_i}$

verkleben zu $h : T \to Z$ mit $p \circ h = f$

$y \circ h = g$ ✓

Schritt 3 Sei $W \subseteq S$ offen.

Falls $(X \times_S Y, p, q)$ ex. gilt:

$((x \circ p)^{-1}(W) = (y \circ q)^{-1}(W), p|, q|) = x^{-1}(W) \times_W y^{-1}(W)$

denn wie unter Schritt 1 nachrechnen.

Schritt 4 $S = \bigcup S_i$ offen Überdeckung, $X_i = x^{-1}(S_i)$

$Y_i = y^{-1}(S_i)$

Falls $X_i \times_{S_i} Y_i$ ex. $\forall i$, so auch $X \times_S Y$ (mit offen Überdeckung $(X_i \times_{S_i} Y_i)$)

denn wie Schritt 2 mit Schritt 3 statt mit Schritt 1

Schritt 5 X, Y, S bel ~~Schematik~~ Schema $\Rightarrow X \quad X \times_S Y$ ex:

dazu OE S affin (wg (4), sonst überdecke S durch offen affin)

OE X —"— (wegen (2) ——"—— X ——"——)

OE Y —"— (wg wie für X aus Symmetrie grund)

Zusatz: analog, benutzt Analogon von III, Prop 3.4 für Abb. von lokal geringt Raum (statt in), ins offen Schemata (Bew EGA)

Konvention: $X \times_R Y := X \times_{\mathrm{Spec}(R)} Y$ $\quad R, B$ Ring

$X \otimes B := X \times_S \mathrm{Spec}(B)$