AG1, V , 21.12.2018

14. Prävarietäten als Schemata

$k = \bar{k}$: $\mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec}(k[X,Y])$ besteht aus

$\mathbb{A}^2(k) \triangleq$ max. Ideale, 0-dim TM

irred. Kurve $f(x,y)=0 \ \underset{k}{\triangleq}$ 1 Primideale, 1-dim-TM

generische Punkt 0 , 2-dim TM

Wie können wir die zusätzliche Pkte für den Funktor $Prävar_{/k} \longrightarrow Sch_{/k}$ präzisieren?

X top. Raum, in der alle Punkte abg sind.

$t(X) = \{ Z \subset X \mid Z \text{ irred. abg.} \}$ mit Top:

$t(X) \supset t(Z)$, $Z \subseteq_{abg} X$ bild der abg Menge.

Überprüfe: $Z_1, Z_2, Z_i \subset X$ abg $\Rightarrow t(\cap Z_i) = \cap t(Z_i)$

$t(Z_1 \cup Z_2) = t(Z_1) \cup t(Z_2)$

Ist $X \xrightarrow{f} Y$ stetig, so auch $t(f): t(X) \longrightarrow t(Y)$

$Z \longmapsto \overline{f(Z)}$

denn 1) $\overline{f(Z)}$ irred: A $\overline{f(Z)} = A_1 \cup A_2$, $A_i \neq \emptyset$ Dann ex.

$\exists\ z_1, z_2 \in Z$ mit $f(z_i) \in A_i$ (sonst $f(Z) \subseteq A_1$)

$(Z \subseteq f^{-1}(\overline{f(Z)})$ abg.) $Z = \underbrace{(f^{-1}(A_1) \cap Z)}_{\ni z_1} \cup \underbrace{(f^{-1}(A_2) \cap Z)}_{\ni z_2}$ ↯

2.) stetig. $t(f)^{-1}(t(Y')) = \{ Z \in t(X) \mid \overline{f(Z)} \in t(Y') \}$

„$\subseteq$" $\overline{f(Z)} \subset Y' \Rightarrow Z \subseteq f^{-1}(\overline{f(Z)}) \subset f^{-1}(Y') = t(f^{-1}(Y'))$

„$\supseteq$" $z \in f^{-1}(Y')$ abg $\Rightarrow f(z) \in \overline{f(z)} \subset \overline{Y'} \subset Y'$

Wir erhalten Funktor,

$t: \mathrm{TopAP} \longrightarrow \mathrm{Top}$

Die irred. Mengen von $t(X)$ sind gerade die $t(X)$, $Z \subseteq X$ irred

$Z \in t(Z)$ ist dann eind. generischer Punkt. Sei $\alpha_X: X \to t(X)$

$x \longmapsto \{x\}$ irred, abg

So ist

$$\{\text{abg. Teilmengen von } t(X)\} \longrightarrow \{\text{abg TM von } X\}$$
$$\underset{t(Z)}{\overset{\shortparallel}{A}} \longmapsto \alpha_X^{-1}(A) \overset{\shortparallel}{} \{x \in X : \{x\} \in t(Z)\} = Z$$

eine Bijektion

$\Rightarrow \alpha_\wedge$ ist Homöomorphismus von X auf die Abgeschlossenen Punkte $|t(X)|$ von $t(X)$ [irred. abg. TM Z von X, die in $t(X)$ abg.]

$\{Z\} = t(Z')$ für ein $Z' \subset_{abg} X \Rightarrow$ nur ein Punkt $x \in X$ in Z, sonst $\{x\} \subsetneq Z \subset Z'$ bzw. in $t(Z')$

$|t(X)| \subset t(X)$ sehr dicht (Bijektion oben)

Theorem 3.2: Der Funktor $X \longmapsto (t(X), (\alpha_X)_* \mathcal{O}_X)$ induziert eine Äquivalenz von Kategorien.

$$t : \{\text{Prävar}/_k\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{integren } k\text{-Schemata v.e.T}\}$$
$$\cup$$
$$\{\text{affine Var}/_k\} \xrightarrow{1:1} \{\text{affine} \text{ ——— } '' \text{ ——— }\}$$

Bew: Ist X affine Var$/_k$ mit $\Gamma(X) = A$, so ist $X = \operatorname{MaxSpec}(A)$

$\Rightarrow t(X) = \operatorname{Spec} A$ (vgl. Kor 2.?, Kapitel I) / $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$, $f \in A$

$\Rightarrow$ Beh im affinen Fall.

Ist $X \xrightarrow{f} Y$ Morph von Prävar, so enthalten wir $t(X) \xrightarrow{t(f)} t(Y)$

$(\alpha_Y)_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow t(f)_* ((\alpha_X)_* \mathcal{O}_X)$ Morphismus lokal geringter Räume, da Morph von Garben auf X ~~und~~ und Y durch Komposition von Abb gegeben!

Quasi-inverser Funktor $(X, \mathcal{O}_X) \longmapsto (X(k), \mathcal{O}_{X(k)} = \alpha^{-1} \mathcal{O}_X)$ geringter Raum

(1) $\alpha^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap |X| \xleftrightarrow{1:1} \mathcal{U}$ offene TM

Bew

BAG1, V., 27.10.2018

Bew: Bild ist Raum mit Fkt: $V \subset U \subseteq X$ offen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X(k)}(U \cap X(k)) \arrow[r, "c(\partial)"] \arrow[d, "res"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/ \ (2)"] & \mathrm{Abb}(U \cap X(k), k) \arrow[d, "res"] \\ \mathcal{O}_{X(k)}(V \cap X(k)) \arrow[r, hook] & \mathrm{Abb}(V \cap X(k), k) \end{tikzcd}$$

dazu $f \in \mathcal{O}_{X(k)}(U \cap X(k)) \overset{(1)}{=} \mathcal{O}_X(U)$

gilt Anlass induziert der Abb

$$U \xrightarrow{f} k, \quad x \longmapsto f(x) = \pi_x(f)$$

$$\begin{tikzcd} \text{mit } \pi_x : \mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d, "res"] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r] & k(x) = k \\ \mathcal{O}_X(V) \arrow[ur] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow (2)$

(3) f, g mit derselben Fkt $U' \xrightarrow{f=g} k \Rightarrow f = g$

(3) $\underset{\text{Garbenaxiom}}{\Rightarrow}$ kann lokal überprüft werden $U = \mathrm{Spec} A$ und

$\pi_x(f) = \pi_x(g) \ \forall x \in \mathrm{Max\,Spec} \Rightarrow f - g \in \bigcap_{m \in \mathrm{MaxSpec}(A)} m$

$= \mathrm{nil}(A) \overset{\text{"}}{=} 0$, da A e.l. reduzierte k-Algebra.

Da sich X durch endl. viele affine Schemata der Form $\mathrm{Spec} A$, A integ e.e. k-Algebra, überdecken. affine Var, d.h. $X(k)$ ist Prävariant. Die Konstruktion ist funktoriell, da jede Menge von Schemata von endl. Typ ü. k abg. Pkte auf abg Pkte schickt nach Prop 28.

Um zu zeigen, dass beide Funktoren Quasi-Inverse zueinander sind, benutze die wohlverstanden affine (Variet./Schemata) Fall so wie Garbenaxiome □

Bem 32. $K(X) = K / X(\mathbb{R})$

$\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \longleftrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{Z})$

$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \longleftrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{Z})$

Unterschemata und Immersion (Einbettungen)

15 Offene / abgeschlossene Einbettung.

Def 33: Ein Morphismus $Y \xrightarrow{j} X$ von Schemata heißt **Offene Einbettung**, falls die unterliegende ~~~~ stetige Abb. ein Homöomorphismus von Y auf eine *offene* Menge $U \subset X$ ist sowie die Garbenhom. $\mathcal{O}_X \longrightarrow j_* \mathcal{O}_Y$ ~~ist~~ einen Iso $\mathcal{O}_{X|U} \xrightarrow{\cong} j_* \mathcal{O}_Y$ von Garben über U induziert " j induz Iso zw Y und off Unterschemata U"

Def 34: Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ geringter Raum. Eine Untergarbe $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ heißt Idealgarbe, falls $\mathcal{I}(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U)$ Ideale für alle $U \subset X$ offen $\mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ bez. die Quotientengarbe / assoz. von Prägarbe

$$U \longmapsto \mathcal{O}_X(U) / \mathcal{I}(U) \Big),$$

dies ist eine Prägarbe mit $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ surj. / ~~da Halme~~

(da auf Halme $\lim\limits_{x \in U} \big(\mathcal{O}_X(U) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(U) / \mathcal{I}(U) \big) = \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow (\mathcal{O}_X / \mathcal{I})_x$]

Def 35 Sei X ein Schema

(i) Ein <u>abg. Unterschema von X</u> ist gegeben durch eine abg. Menge $Z \subseteq X$ ($i: Z \to X$ inklusion), so wie eine Garbe $\mathcal{O}_Z$ auf Z, s.d. $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein Schema und $i_* \mathcal{O}_Z \underset{X}{\cong} \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$, für eine Idealgarbe $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$.

(ii) Ein Morphismus $i: Z \to X$ von Schemata heißt abg Einbettung, falls die unterliegende stetige Abb einen Homöomorphismus zwischen Z und eine abg. TM von X ist und die Garbenhom. $i^b: \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_X$ surj ist

AG1, V , 21.12.2018

Ist $Z \subseteq X$ ein abg. Unterschema wie in (i) so ist (i, i^b) eine abg Einbettung. Umgekehrt bestimmt jede abg. Einbettung einen Iso von seiner Quelle auf ein eindeutige abg. Unterschema seines Ziel

Warnung: Nicht für jedes Idealgarbe I ist

$$\left(Z = \operatorname{supp} \mathcal{O}_X/_{\mathcal{I}},\ \mathcal{O}_X/_{\mathcal{I}} \right)$$ ein Schema

Später gilt gdw. $\mathcal{I}$ quasi-kompakt

Theorem 36: $X = \operatorname{Spec} A$. Dann ist die Abb

$$\{\text{Ideale } A\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{abg. Unterschemata von } X\}$$

$$\mathfrak{a} \longmapsto V(\mathfrak{a}) \text{ (mit Schemata-Struktur) via}$$

$$V(\mathfrak{a}) \cong \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$$

eine Bijektion:

Insbesondere ist jedes abg. Unterschemata eine affines Schemata und ~~offen~~ ...