AlgGeo I, V, 25.01.~~2018~~

Bsp 27: In Kategorie C = Sets gilt für

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f{,}g"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ & S \end{tikzcd}$$

$\Delta_u : X \longrightarrow X \times_S X = \{(x, x') \in X \times X : u(x) = u(x')\}$
$x \longmapsto (x, x)$

$\Gamma_f : X \longrightarrow X \times_S Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid u(x) = v(y)\}$

$\ker(f,g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$

Da $p \circ \Gamma_f = id_X$, sind Γ_f und $\Delta_{X/S} = \Gamma_{id_X}$ Monomorph.

Prop 26: $X \xrightarrow{f,g} Y$ S-Morph.

(1) $\Delta_{X/S} = \Gamma_{id_X}$, $\Gamma_f = \text{Kern}(X \times_S Y \underset{f \circ p}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y) \to X \times_S Y$ kanonisch

(2) Alle Rechtecke des kommutative Diagram sind kartesisch

$$\begin{tikzcd} \text{Kern}(f,g) \arrow[r, "can"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Gamma_f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\Delta_{Y/S}"] \\ X \arrow[r, "\Gamma_g"] & X \times_S Y \arrow[r, "f \times id_S"] & Y \times_S Y \end{tikzcd}$$

(3) Sei $s : S \to X$ ein Schnitt zu u ($u \circ s = id_S$)

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} S \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\Gamma_{s \circ u}"] \\ X \arrow[r, "\Delta_{X/S}"] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

Bew: Nach Yoneda-Lemma reicht, den Fall $\hat{C} = \underline{Set}$ zu verifizieren, dies ist elementar aufgrund der Beschreibung in Bsp 25 $\square$

Insbesondere existiert $Eq(f,g)$ stets

12 Diagonal für Schemata

Prop 27: Für affine S-Schemata

$X = Spec(B) \xrightarrow{u} S = Spec(R)$

$Y = Spec(A) \xrightarrow{v} S = \cancel{Spec(R)}$

und $X \xrightarrow{f = Spec\,\varphi} Y$ S-Morph, $\varphi: A \to B$ entsprechen $\Delta_{X/S}$, Γ_f den surjektiven Ringhom

$$\Delta_{B/R}: B \otimes_R B \to B, \quad b \otimes b' \mapsto bb', \qquad \Gamma_\varphi: A \otimes_R B \to B, \quad a \otimes b \mapsto \varphi(a) \cdot b$$

Insbesondere sind $\Delta_{X/S}$, Γ_f abg. Immersionen!

Im allgemeinen $\Delta_{X/S}$, Γ_f Einbettung (nicht notwendig abgeschlossen!):

$Z, Z' \subset X$ Unterschemata

$\Rightarrow Z \times_S Z' \subset X \times_S X$ Unterschemata (Immersionen und stabil unter Basiswechsel + "$\circ$") und

$Z \cap Z' = \Delta_{X/S}^{-1}(Z \times_S Z')$ $(*)$

Prop 28 $X, Y \in Sch/S$, $X \overset{f,g}{\rightrightarrows} Y$ S-Morph. $\Rightarrow \Delta_{X/S}$, Γ_f, $Eq(f,g) \to X$ sind Imersionen

Bew: nicht zz. $\Delta_{X/S}$ Imm (+ (2) in Prop 26, da Immersion stabil unter Basiswechsel) lokal bzgl Ziel $\overset{zz}{}$ s
OE S affin

AG 1, V, 25.1.2019

$X = \bigcup \mathcal{U}_i$ offene Überdeckung $\Rightarrow \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathcal{U}_i \times_S \mathcal{U}_i$

$\Delta_{X/S} | \Delta_{X/S}^{-1}(\mathcal{U}_i \times_S \mathcal{U}_i)$

überdeck $\Delta_{X/S}(X)$ offen

$$X \xrightarrow[\text{abg. Imm.}]{} \bigcup (\mathcal{U}_i \times_S \mathcal{U}_i) \underset{\text{offen Im}}{\subseteq} X \times_S X$$

(*) $\Rightarrow$ $\mathcal{I}$ X affin + Prop 27 $\square$

Das Unterschema

- $X \cong \Delta_{X/S}(X) \subset X \times_S X$ heißt die Diagonale von $X \times_S X$
- $\Gamma_f(X) \subset X \times_S Y$ heißt der Graph von f

Bem 29: (i) Ein Unterschema $\Gamma \subset X \times_S Y$ ist der Graph eines S-Morph $X \xrightarrow{f} Y$
$\Leftrightarrow$ $p|_\Gamma \circ \Gamma \to X \times_S Y \xrightarrow{p} X$ ein Iso., denn

$f := q \circ (p|_\Gamma)^{-1}$

(ii) Im allgemeinen ist die Mengentheoretisch Inklusion
$\Delta_{X/S}(X) \subset \{ z \in X \times_S X \mid p(z) = q(z) \}$ kein "=" !

13. Seperierte Morphismen

Erinnerung: Äq sind für einen ~~topo to~~ Top. Raum X:

(i) X ist Hausdorff

(ii) $\Delta \subset X \times X$ ist abg bzgl Produkttop

(iii) Für jedes Paar stetig Abb $Y \xrightarrow{f,g} X$ ist
$Eq(f,g) \subset Y$

(iv) Für jedes stetige Abb $Y \xrightarrow{f} X$ ist
$\Gamma_f \subset X \times Y$ abg

Für schema X ist unter liegende top Raum selten Hausdorffs, aber (ii) - (iv) geben ~~ihm~~ sinvolle Konzepte für Schema (da ist Produkttop $\neq$ Faserproduktop)

Def Ein Morph $Y \xrightarrow{\nu} S$ von Schemata heißt seperiert, falls äquivalent Bed erfüllt sind

(i) $\Delta_{Y/S}$ ist abg Immersion

(ii) Für jeden Paar $f,g : X \to Y$ ist der $\ker(f,g) \subset X$ ~~$\to X$~~ eine Einbettung

(iii) Für jeden S-Morph. $X \xrightarrow{f} Y$ ist $\Gamma_f(X)$ ein abg. Unterschemata

~~Dann~~ Dann heißt auch ~~X~~ Y separiert über S.

Ein Schema heißt separiert, falls ~~es~~ es als $\mathbb{Z}$-Schema separiert.

Bem: Äqva.: Prop 26, "abg Immers" stabiel unter Basiswechsel.

Nach Prop 27 ist jeder Morph zwischen affinen Schemata seperiert, insbesondere ist jedes affine Schema seperiert.

Prop 31: X, Y Sch$/_S$, Y sep$/_S$, $U \subset X$ offen dicht $X \xrightarrow{f,g} Y$, S-Morph mit $f|_U = g|_U \Rightarrow f|_{X_{red}} = g|_{X_{red}}$

Beweis: $U \subseteq Eq(f,g)$ n.V. , $U \underset{\text{dicht}}{\subset} X$, $Eq(f,g)$ abg Y/S sep. $\Big| \Rightarrow Eq(f,g) = X$ Top Raum von

$\Rightarrow X_{red} \subset \ker(f,g)$ als Schem $\square$

Alg Geo 1, Vorlesung 25.01.2019

Bsp 32 $\underset{2}{\text{---}}\colon\text{---}$ affine Gerade mit doppel Punkt (s Bsp 11. III .5) ist nicht separiert: $V \subset U$ off, nicht abg.

$$U \xrightarrow{j, j'} U \cup_V U \Rightarrow Eq(j, j') = V \subsetneq X \subset_0 X$$

nicht abg $\Rightarrow$ nicht separiert

Bem: IP sei Eig. von Morph, sd. gilt:

- Stabil, unter "$\circ$" + Basiswechsel
- jede (abg) Immersion erfüllt IP

Für jedes kommut Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ & S \end{tikzcd}$$

mit u erfüllt IP (+ v ist separiert), folgt das f IP erfüllt, da:

$f: X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times_S Y \xrightarrow{q} Y$ erfüllt IP, wg. "$\circ$"

(abg) Immersion erfüllt IP; q Basiswechsel erfüllt IP wg Basis

Prop 34: (1) Jeder Monomorph von Schemata (überjedes Immersion) ist seperatif

(2) "Seperiert" ist stabil unter "$\circ$", Basiswechsel + lokal bzgl Ziel

(3) Ist Komp. $X \to Y \to Z$ seperiert $X \to Y$

(4) $X \xrightarrow{f} Y$ ist seperatif $\Leftrightarrow$ $f_{red}: X_{red} \to Y_{red}$ ist separiert

Bew: (1) f Mono, d.h. inj auf all T-wertigen Punkte $\forall T \in Sch \Rightarrow \Delta_f$ Iso, d.h. Injektive — " —

$X \to X \times_Y X = \{(x,x) \mid f(x) = f(x)\} = \Delta_f$

insbesondere ist Δ_f abg Immersion.

(2) a) $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \to Z$, sep Morp, $p,q: X \times_Y X \to X$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_f", "\text{abg Im.}"'] \arrow[dr, "\Delta_{g\circ f}"'] & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d, "(p,q)_Z", "\text{abg Imm.}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\Delta_g"] \\ & X \times_Z X \arrow[r, "f\times f"] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

Vertigizion in kat der Mengen

$\Rightarrow g \circ f$ separt.

b) $X \xrightarrow{f} S$ sep, $S' \to S$ Morp

$(\Delta_f)_{(S')} = \Delta_{f(S')} : X \times_S S' \to (X \times_S S') \times_{S'} (X \times_S S')$

$= (X \times_S X) \times_S S'$

Δ_f abg Imm $\Rightarrow \Delta_{f(S')}$ ~~ugt~~ abg Imm. ✓

c) "abg Im" lokal im Ziel $\Rightarrow$ auch Seperiertheit

(3) folgt aus (1), (2) nach Bem 33

(4) $X_{red} \xrightarrow{i} X$, $X \xrightarrow{f} S$ $\qquad$ i surj Immersion $\Rightarrow$ i universeller Homöomorph

wegen $\Delta_f \circ i = (i \times_S i) \circ \Delta_{f_{red}}$

gilt, da i univ. Homöo, Δ_f abg Imm $\Leftrightarrow$ $\Delta_{f_{red}}$ ~~abg~~ abg Immersion

$\square$