AG 1, V, ~~3~~ 11.01.2019

Kapitel: **IV. Faserprodukte**

1. Der "Punkte-Funktor"

(kontravar.) Funktor, $\forall X \in Sch$, ~~B~~

$$
\begin{array}{ccccc}
h_X : & (Sch)^{op} & \longrightarrow & Sets & \\
 & S & \longmapsto & h_X(S) := Hom_{Sch}(S,X) & g \\
 & \uparrow f & & \downarrow f^* = h_X(f) & \downarrow \\
 & T & & h_X(T) & g \circ f
\end{array}
$$

~~Ex~~ $h_X(S)$ heißen S-wertige Punkte von X,

Notation $X(S)$, $X(R)$, falls $S = Spec\, R$

Relative Version: $X \in Sch/_{S_0}$, S_0 fixes Schema

$$
\begin{array}{ccc}
Sch/_{S_0} & \longrightarrow & Sets \\
S & \longmapsto & Hom_{S_0}(S,X)
\end{array}
$$

Notation: $X_{S_0}(S)$, $X_{R_0}(S)$, $X_{S_0}(R)$, $X_{R_0}(R)$

Beispiele: 1) k alg. abg. $X/_k$ von endl. Type.

$x \in X_k(k)$. Dann ist $Im(Spec\, k \xrightarrow{x} X) \in X$ abg. Punkt

$x \longmapsto Im(x)$ ~~k~~ liefert Bijektion

$X_k(k) \longrightarrow |X|$ Menge der abg. Punkte

2) $X = \mathbb{A}^n = Spec(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]) \Rightarrow$ ~~$\mathbb{A}^n(S)$~~ $=$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{A}^n(S) = Hom_{Sch}(S, \mathbb{A}^n) = Hom_{Ring}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n], \mathcal{O}_S(S)) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^n$$

3) $X = Spec\left(R[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_m) \right)$, S ein R-Schema

$$X_R(S) = Hom_{R\text{-}Alg}\left(R[T]/(f), \mathcal{O}_S(S) \right) = \{ s \in \mathcal{O}_S(S)^n \mid f_1(s) = \dots = f_m(s) = 0 \}$$

4) $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$, $X(S) = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[T,T^{-1}], \mathcal{O}_S(S)) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$

hier sogar h_X : Sch $\to$ Gruppen

X ist eine abelsche Gruppe

2. Yoneda-Lemma

Ziel: h_X beschreibt X eindeutig.

Erinnerung: $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren, natürliche Transformation

$f \in \operatorname{Hom}(F, G)$,

$f = (f(x) : F(x) \to G(x))_{x \in \mathcal{A}}$

Wir erhalten Kategorien: $\operatorname{Funk}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$,

hier: $\mathcal{C} = Sch/_{S_0}$, $\hat{\mathcal{C}} = \operatorname{Funk}(\mathcal{C}^{op}, Sets)$

Wir erhalten einen Funktor

$$\mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$$
$$X \longmapsto h_X$$
$$f \longmapsto \text{Pullback } f^*$$

Prop 5: $X \in \mathcal{C}$, $F \in \hat{\mathcal{C}}$, Dann ist die Abb.

$$\operatorname{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \longrightarrow F(X)$$
$$\alpha \longmapsto \alpha(X)(id_X)$$

$\in \operatorname{Hom}(h_X(X), F(X))$

$h_X(X) = \operatorname{Hom}(X, X) \ni id_X$

bijektiv + Funktoriell.

Insbesondere ist der obige Funktor $\mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ volltreu (wähle $F = h_Y$!)

AG 1, V, 11.01.2018

Beweis: Umkehrabb $F(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h_X, F)$

$$\xi \longmapsto \alpha_\xi = (\alpha_\xi(Y))_{Y \in Sch/S_0}$$

mit $\alpha_\xi(Y) : \underset{\mathrm{Hom}(Y,X)}{\overset{\|}{h_X(Y)}} \longrightarrow F(Y)$

$$f \longmapsto \underset{\mathrm{Hom}(F(X),F(Y))}{\overset{\in}{F(f)}}(\xi)$$

3. Faserprodukte in bel. Kat.

$\mathcal{C}$ Kat., $S \in Ob(\mathcal{C})$, $X \xrightarrow{f} S$, $Y \xrightarrow{g} S$ Morph.

Def 6: Ein Tupel (Z,p,q) mit $Z \in Ob(\mathcal{C})$ ~~und Y, über~~ S und Morph $Z \xrightarrow{p} X$, $Z \xrightarrow{q} Y$, $f \circ p = g \circ q$ heißt Faserprodukt von X und Y über S (bzw von f, g), falls für jedes $T \in Obj(\mathcal{C})$ und Paare $(u: T \to X, v: T \to Y)$, von Morph mit $f \circ u = g \circ v$ genau einen Morph $w: T \to Z$ ex mit $p \circ w = u$, $q \circ w = v$

Notation $X \times_S Y$ oder $X \times_{f,S,g} Y := Z$, $(u,v)_S := w$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\exists_1"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & S
\end{tikzcd}$$

Ist S ein finales Obj in $\mathcal{C}$, so ist $X \times_S Y = X \times Y$ das Kat.-Produkt

Bsp 7: 1) $\mathcal{C} = Sets$ $X \times_S Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$

2) $\mathcal{C} = Top$ top Räume f,g stetig

$\{(x,y) \mid f(x) = g(y)\} \subset X \times Y$ def $X \times_S Y$

induzierte Top Produkttop ein Top.