AlgGeo I, Vorlesung, 30.01.2019

Bsp 35. S beliebiges Schema, $n \in \mathbb{N}$. Dann $\mathbb{A}^n_S$ separiert über S, ebenso jedes ~~offene~~ Unterschema, denn

$$\mathbb{A}^n_S = \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} S$$

und Separiertheit ist stabiel unter Basiswechsel (Prop 34)

Prop 36. Sei $S = \operatorname{Spec} R$ affin und X ein S-Schema

Dann sind äquiv.

(i) X separiert

(ii) Für je zwei offene affine $U, V \subseteq X$ ist $U \cap V$ affin und

$$\begin{aligned} \rho_{U,V} : \mathcal{O}_X(U) \otimes_R \mathcal{O}_X(V) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V) \\ s \otimes t &\longmapsto s|_{U\cap V} \cdot t|_{V \cap U} \end{aligned}$$

(iii) $\exists$ offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, sodass

$$\forall i,j \in I : \rho_{U,V} \text{ surj}$$

Bem: Für alle offenen affine $U, V \subseteq X$ gilt

$$U \cap V = \Delta_{X/S}^{-1}(U \times_S V)$$

„abg Imm." ist lokal auf dem Ziel, daher

$\Delta_{X/S}$ ist abg. Imm $\Leftrightarrow$ für alle $U, V \subseteq X$ offene affine ist

$$U \cap V \xrightarrow[\Delta_{X/S}|_{U\cap V}]{} U \times_S V$$

abg Immersion

$\Leftrightarrow$ Für jede offene affine Überdeckung

$X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und alle $i,j \in I$ ist

$$U_i \cap U_j \longrightarrow U_i \times_S U_j \quad \text{abg Immersion}$$

Sind $\mathcal{U} = \operatorname{Spec} A$, $V = \operatorname{Spec} B$ affin, so ist auch

$\mathcal{U} \times_S V = \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ affin

Daher:

$$\mathcal{U} \cap V \longrightarrow \mathcal{U} \times_S V \text{ ist abg. Immersion}$$

$\iff \rho_{u,v}$ surjektiv ist $\square$

Bsp 37: Für jedes Schema S und $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{P}^n_S$ sep. über S, denn

„sep." lokal auf dem Ziel (Prop 34 (3)), daher OE $S = \operatorname{Spec} R$ affin.

$$\mathbb{P}^n_R = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i \quad \text{mit } \mathcal{U}_i = \operatorname{Spec} R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$$

und

$$\rho_{u_i,u_j}: R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right] \otimes_R R\left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \widehat{\frac{X_j}{X_j}}, \dots, \frac{X_n}{X_j}\right]$$

$$\longrightarrow R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]\left[\frac{X_i}{X_j}\right]$$

ist surj.

Bsp 38: Sei k alg. abg. Körper, X Prävarietät ü. k, d.h. ganz Schema v.e.T ü. k. X heißt Varietät, wenn X sep. ist.

Affine Prävarietäten sind Varietäten, $\mathbb{P}^n_k$ Var. quasiprojektive Prävarietäten ($=$ Unterschemata in $\mathbb{P}^n_k$) sind Varietäten.

AG Geo 1, V, 30.01.2019

14. Eigentliche Morphismen

(eng proper)

Ist $f: X \to Y$ stetige Abb. zwischen top. Räume, dann heißt f eigentlich, wenn Urbilder kompakte Mengen kompakt sind.

Sei X hausdorffsch, Y lokal kompakt

Dann ist f eigentlich $\Leftrightarrow$ f universel abg.

(Bourbaki, Topologie ~~general~~ Gen. I § 10 no. 3 Prop 7)

Def 39 Ein Morph $f: X \to Y$ von Schemata heißt eigentlich, wenn:

(i) f v.e.T.

(ii) f separiert

(iii) f universell abg.

Ein Y-Schema heißt eigentlich, wenn der Strukturmorph. eigentlich ist. Eigentlichkeit ist lokal auf dem Ziel!

$f: X \to Y$ heißt v.e.T, wenn $\forall\, U \subset Y$ offen eine Überdeckung $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n V_i$ existiert, sodass $\forall i: \mathcal{O}_X(V_i)$ ist endl. erz. $\mathcal{O}_Y(U)$-Algebra

Def 40 Ein Morph. $f: X \to Y$ heißt projektiv, wenn es sich faktorisieren lässt als:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g", "\text{abg Imm}"'] & Y \\ \mathbb{P}^n_Y \arrow[ur, "\text{kan Morph}"'] & \end{tikzcd}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$

Prop 41: Sei $\mathbb{P}$ eine Eigenschaft unter

I v.e.T II eigentlich III projektiv IV separiert

Dann: (i) abg. Imm. erfüllen $\mathbb{P}$

(ii) $\mathbb{P}$ ist stabil unter komposition

(iii) $\mathbb{P}$ ——— " — Basis wechsel

(iv) Falls $X \xrightarrow{f} Z$, $Y \xrightarrow{g} Z$ $\mathbb{P}$ erfüllen, dann auch

$X \times_Z Y \longrightarrow Z$

(v) Erfüllt $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ $\mathbb{P}$, so auch f, falls

- f qusi-kompakt (d.h. Y hat offene affine Überdeckung, deren Urbilder ~~komp.~~ qusi-komp. sind)

- g sep, im Falle II, III

~~• stb, im Fall IV~~

vgl: Liu, „Algebraic Geometry and Arithmetic curves",
Prop 24, 3.16, 3.32, (3.9)

Bew: Skizze (iv) folgt aus (ii), (iii)

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{f_Y} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow & & \downarrow g & & \\ X & \longrightarrow & Z & & \end{array}$$

(v) für II, III, IV folgt aus (i) – (iii) und Bem 33

I: OE Z affin sei $V \subset$ ~~Y~~ offen affin

$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $U_i \subseteq X$ offen affin

(da f quasikompakt), und ~~dagf v.e.T~~ da gf v.e.T ist

$\forall i$: $\mathcal{O}_X(U_i)$ e.e. $\mathcal{O}_Z(Z)$-Algebra $\Rightarrow$ auch e.e. $\mathcal{O}_Y(V)$-Algebra

(da $\mathcal{O}_Y(U)$ eine $\mathcal{O}_Z(Z)$-Algebra ist)

AG1, V, 30.01.2019

i) I „abg Imm" lokal bzgl Ziel ⇝ OE $j: Z \to X = \operatorname{Spec} A$ abg Imm

$\Rightarrow Z = \operatorname{Spec} A/I$ für ein Ideal I

IV Prop 34

II folgt aus I, IV und aus „Abg Imm" sind stabil unter Basiswechsel"

V

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{abg}", "f"'] \arrow[dr, "g = s\circ f"'] & S \arrow[d, bend left, "s"] \\ & \mathbb{P}^n_S \arrow[u] \end{tikzcd}$$

wähle Schnitt s

⇒ dies ist abg Immersion

ii)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h = g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

I : $V \subseteq Z$ offen affin $\overset{g \text{ v.e.T}}{\Rightarrow} g^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $U_i \subseteq Y$ offen affin, $\mathcal{O}_Y(U_i)$ ist e.e. $\mathcal{O}_Z(U)$-Algebra.

$\overset{f \text{ e.v.T}}{\Rightarrow}$ $\forall i$: $f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j=1}^{m_i} W_{ij}$, $W_{ij} \subseteq X$ affin offen,

⇒ $\mathcal{O}_X(W_{ij})$ ist e.e. $\mathcal{O}_Y(U_i)$-Alg.

⇒ $\mathcal{O}_X(W_{ij})$ e.e. $\mathcal{O}_Z(V)$-Alg.

$h^{-1}(V) = \bigcup_{i,j} W_{ij}$ ⇝ Beh

IV Prop 34

V folgt aus I, IV und „universal abg." ist stabil unter „∘"

III

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \\ \mathbb{P}^m_Y \arrow[ur] & \mathbb{P}^n_Z \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}^m_Z \times_Z Y = (\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} Z) \times_Z Y$

$\hookrightarrow \mathbb{P}^m_Z \times_Z \mathbb{P}^n_Z \xrightarrow{\text{Segre-Einbettung}} \mathbb{P}^{mn+m+n}_Z$

(iii) I gilt, da für affine Schemata Faserprodukte dem Tensorpr. entsprechen und dabei „e.e. Alg" erhalten.

IV Prop 34

II folgt aus I, IV und der Def von universell"

III

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Z \arrow[r, "pr"] \arrow[d] \arrow[drr, "i \times_Y Z"] & Z \arrow[d] & \\
X \arrow[r, "f", "proj"'] \arrow[d, "i"] & Y & \mathbb{P}^n_Y \times_Y Z = \mathbb{P}^n_Z \arrow[ul, bend right] \\
\mathbb{P}^n_Y \arrow[ur, "\pi"'] & &
\end{tikzcd}$$

i abg. Imm $\Rightarrow$ $i \times_Y Z$ abg. Imm □

Prop 42: Sei $f: X \to Y$ surj Morph von S-Schemata, Y sep v.e.T ü. S, X eig $\Rightarrow$ Y eig

Bew: f surj $\Rightarrow \forall T \to S$ ist $f_T: X_T \to Y_T$ surj

$$\Rightarrow \begin{tikzcd}
Y_T \arrow[r] & T \\
X_T \arrow[u, two heads] \arrow[ur, "\text{abg, da } X \text{ eigentlich.}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow Y_T \to T$ ist abg $\Rightarrow Y \to S$ universell abg □

Prop 43 X eigentlich. Schema über $S = \operatorname{Spec} A \Rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ ganz über A. Ist $X = \operatorname{Spec} B$, so ist B endl über A

Bew: Liu 3.17/3.18

Kor 44: X red. eig. Var. über einem alg abg. Körper k

$\Rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ endl.-dim k-VR.