Ag 1, V, 18.01.2019

$X, X' \in Sch/S$, $X' \xrightarrow{f} X$ Morph in Sch/S

$$\begin{tikzcd} Z' = X' \times_S Y \arrow[r, "g = f \times id"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z = X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "f"] & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Da $q \circ g = q'$ Proj. auf Y ist, ist das große und damit auch das beide Diagrame/bzw und alle Diagrame katesisch (Prop 10)

Prop 14: f induziert Homöo von X' auf $f(X')$ und:

(I) $f^\sharp_{x'} : \mathcal{O}_{X, f(x')} \longrightarrow \mathcal{O}_{X', x'}$ sei surj. $\forall x' \in X'$ und

es ex. offene affine Umgebung U' von $f(x')$, sd.

$f^{-1}(U')$ quas-kompakt

oder

(II) $f^\sharp_{x'}$ bij. $\forall x' \in X'$

Dann gilt: (1) g ein Homöomorph von Z' auf $g(Z') = p^{-1}(f(X'))$

(2) $\forall z' \in Z'$ haben wir für das induzierte Diagramm lokal Ringe:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Z', z'} \arrow[d] & \mathcal{O}_{Z, g(z')} \arrow[l, "g^\sharp_{z'}"'] \arrow[d, "p^\sharp_{g(z)}"] \\ \mathcal{O}_{X', p'(z')} & \mathcal{O}_{X, p(g(z'))} \arrow[l, "f_{p'(z')}"'] \end{tikzcd}$$

- $g^\sharp_{z'}$ ist surj

- Kern$(g^\sharp_{z'})$ und von $p^\sharp_{g(z)}$ (Kern $f^\sharp_{p'(z')}$) erzeugt

Bew: (1), (2) lassen sich lokal bzgl. S, Y, X verifizieren
OE $S = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ affin, X' q.c.

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, leftrightarrow] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) & R\text{-Algebren} \\ & & A/\ker\varphi \arrow[u, hook, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd}$$

f faktorisiert sich als $X' \xrightarrow{f_1} \operatorname{Spec}(A/_{\ker\varphi}) \xrightarrow{f_2} \operatorname{Spec}(A) = X$
abg. Immersion
- $(f_1)_2$ surj
- Homöomorph auf TM in Y

Im Situation I erfüllt daher mit f auch f_1 Vor. I. Daher reicht
zz. die folgenden 2 Fälle zu beweisen.
1.) f ist abg. Immer. ($\Leftarrow f_2$ Voraus. I)
2) $f^{\#}_{x'}$ ist bij $\forall x' \in X'$ ($\Leftarrow f_1$, Vor. I + Vor. II)

denn Lemma: $A \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, X' quasi-kom.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \\ X' \arrow[r, "f"] & \operatorname{Spec}(A) \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f^{\#}_{x'}$ inj $\forall x \in X'$

<u>Vorüberlegung</u>: Z Schema $t \in \mathcal{O}_Z(Z)$, $Z_t := \{ z \mid t(z) \neq 0\} \subset Z$ offen

$$\begin{tikzcd} \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(Z_t, \mathcal{O}_Z) \\ \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_t \arrow[ur, dashed, "f_t"'] & \end{tikzcd}$$

inj, falls Z qc, <u>denn</u> $Z = \bigcup \mathcal{U}_i$

endl. offene affine Überdeckung. $C_i = \mathcal{O}_Z(\mathcal{U}_i)$, $t_i = t_{|\mathcal{U}_i}$

$\Rightarrow \left(\prod_{\text{endl!}} C_i\right)_t = \prod_i (C_i)_t$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_t \arrow[r, "\gamma_t"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \Gamma(Z_t, \mathcal{O}_Z) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ \prod C_i \arrow[r] & \prod (C_i)_{t_i} \arrow[r, "\cong"] & \Gamma(D(t_i), \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}) \end{tikzcd}$$

Garben (links), Garbe (rechts)

AG1, V, 18.01.2019

Bew (Lemma): ~~$\mathfrak{p}\subset A$~~ $\mathfrak{p}\subset A \cong f(X')$

$s\in A\setminus\mathfrak{p}$: $\varphi_s: A_s \to \Gamma(X', \mathcal{O}_X)$ inj ~~und lokal~~.

ebenf. wohl von φ

$\Rightarrow \psi_s: A_s \xrightarrow{\varphi_s} \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}|_{\varphi(s)}) \xrightarrow{\rho_{\varphi(s)}} \Gamma(X'_{\varphi(s)}, \mathcal{O}_{X'})$

$= f^{-1}(D(s))$ offen Umg. bei von x^0, da

inj

$D(s)$, $s\in A\setminus\mathfrak{p}$ off. Um. Ins von $f(x')$

+ f Homöom auf Bild

$\Rightarrow \varinjlim_s \Gamma(X'_{\varphi(s)}, \mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_{X',x'}$ und $\varinjlim_s \psi_s = f^\#_{x'} \Rightarrow f^\#_{x'}$ inj

$\square$ Lemma

zu 1.) $X' = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}(A) = X$, $\mathfrak{a}\subset A$ Ideal

$\overset{\text{Prop 11}}{\Rightarrow}$ Z, Z' affine und g entspricht R-Algebren

$$A\otimes_R B \xrightarrow{\text{"}g\text{"}} A/\mathfrak{a} \otimes_R B \quad \text{, d.h. Immersion}$$

$$\begin{array}{ccc} A\otimes_R B & \xrightarrow{\text{"}g\text{"}} & A/\mathfrak{a}\otimes_R B \\ \uparrow \text{"}p\text{"} & & \uparrow p' \\ A & \xrightarrow{\text{"}f\text{"}} & A/\mathfrak{a} \end{array}$$

und "p" (ker "f") $A\otimes_R B$ = ker "g" $\Rightarrow g$ ist Homöo auf $g(Z') = p^{-1}(f(X'))$ ✓

zu 2.) $f^\#: f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X'}$ ist Iso bzgl.

$(X', \mathcal{O}_{X'}) \cong (f(X'), \mathcal{O}_X|_{f(X')})$ Iso lokal geringte Räume

$\Rightarrow$ leicht zu verifizieren $(p^{-1}(f(x')), \mathcal{O}_{Z|p^{-1}(f(X'))})$ ist ein Faserprodukt von X' mit Z über X ein Kat lokal ger. Räume als ent spricht in Kat der Sch $\Rightarrow$. (vgl Zusatz in Thr (Existenz $X\times_S Y$))

$\Rightarrow$ wir g Iso: $(Z', \mathcal{O}_{Z'}) \xrightarrow{\sim} (p^{-1}(f(X')), \mathcal{O}_{Z|p^{-1}(f(X'))})$

$\square$

Bsp Prop 14 gilt in folgenden Situationen:

(1) f Immersion von Sch

(2) $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$

für ein $x \in X$ kan. Abb vgl (3.4), ~~(3.~~ (2.11)

(3) $\operatorname{Spec} \varkappa(x) \to X$

(4) für Kompositionen von Morph., die Prop 14 erfüllen (s. Prop 10)

3. Beispiele

Produkte affiner Räume: R Ring $\mathbb{A}^n_R$

$\Rightarrow \mathbb{A}^n_R \times_R \mathbb{A}^m_R \cong \mathbb{A}^{n+m}_R$, da

$R[T_1, \dots, T_n] \otimes_R R[T_1, \dots, T_m] = R[T_1, \dots, T_{n+m}]$

Produkt von Prävarietät

k alg. abg., X k-Schema l.v.e.T

(3.14) $X_k(k) = X_0$ (abg. Punkt von X)

$x : \operatorname{Spec} k \to X \longmapsto$ Bild

$\{$ Integ Sch l.v.e.T$/k$ $\} \longleftrightarrow \{$ Prävar$/k$ $\}$

$X \longmapsto (X_0, \mathcal{O}_X|_{X_0})$

Lem 15 X, Y integre k-Schemata $\Rightarrow$ $X \times_k Y$ integr. k-Sch.

Bew: später

X, Y integr. l.v.e.T$/k$ $\Rightarrow$ $X \times_k Y$ integr l.e.T.

($X = \bigcup^{\text{endl.}} X_i$ $Y = \bigcup_{\text{endl.}} Y_j$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{i,j} X_i \times_k Y_j$

A, B e.e. k-Alg $\Rightarrow$ $A \otimes_k B$ e.e. k-Alg.)

$X_0, Y_0, Z_0 = (X \times_k Y)_k(k) = X_k(k) \times Y_k(k) = X_0 \times Y_0$

d.h. das Faserprodukt von 2 Prävar. X_0, Y_0 ist wird ein Prävar. Z (als volle Unterkat. von Sch$/k$) mit $Z_0 = X_0 \times Y_0$ (als Mengen) Proj. $Z_0 \to X_0, Y_0$ sind stetig, aber i.a. ist Top Z_0 feiner als die Produkttopologie von X_0 und Y_0

Alg Geo 1, V, 18.01.2018.

6. Basiswechsel

$\mathcal{C}$ bel. Kat. mit Faserprodukt $S' \longrightarrow S$ Morp in $\mathcal{C}$,
$X \longrightarrow S$ S-Objekt $\Longrightarrow X \times_S S' \longrightarrow S'$ S'-Obj, Bez.
$u^*(X)$ od. kurz Urbild/Basiswechsel von X bzg $X_{(S')}$
$X \xrightarrow{f} Y$ Morph. von S-Obj. $\Rightarrow f \times_S id_{S'} : X \times_S S' \longrightarrow Y \times_S S'$
Morph von S'-Obj.
$u^*(f) =: f_{(S')}$ Basiswechsel von f bzgl u,
$\parallel$
$f \times_S id_{S'}$

~~Kovar~~ F Kovarianter $u^* : \mathcal{C}/S \longrightarrow \mathcal{C}/S'$
„Basiswechsel bzgl u"
Transitivität ~~des~~ Basiswechsels $S'' \longrightarrow S'$
$(u \circ u')^* = u'^* \circ u^*$ Iso von Funktoren Prop 10.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[dr] & S' \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$
$\in \mathcal{C}/S$ wird von S-Obj via

Seien $p: X_{(S')} \longrightarrow X$ der erst Prop. Dann erhalten wir zueinander inversen Bijektion

$$\begin{array}{ccc} t & \longmapsto & p \circ t \\ \mathrm{Hom}_{S'}(T, X_{(S')}) & \rightleftarrows & \mathrm{Hom}_S(T, X) \\ (t, h)_{S'} & \longleftarrow\!\shortmid & t \end{array}$$

Def 16. $\mathbb{P}$ sei eine Eigenschaft von Morp in $\mathcal{C}$, sodaß id_X sie erfüllen für alle $X \in \mathcal{C}$
a) $\mathbb{P}$ heißt stabil
i) unter Komposition, wenn mit $X \xrightarrow{f} Y$ und $Y \xrightarrow{g} Z$ und $g \circ f$ $\mathbb{P}$ erhält
ii) unter Basiswechsel, wenn $X \xrightarrow{f} Y$ und $f_{(S')} : X_{(S')} \longrightarrow S'$
für alle $S' \longrightarrow S$ $\mathbb{P}$ erfüllen.

b) Wir sagen, dass $X \xrightarrow{f} S$, $\mathbb{P}$ universell erfüllt, falls $f_{(S')}$ $\mathbb{P}$ erfüllt für alle $S' \to S$

Bem 17. Sei $\mathbb{P}$ stabil unter "$\circ$". Dann sind äq.:

i) $\forall S \in \mathcal{C}$ $\forall$ S-Morph. $f: X' \to X$, $g: Y' \to Y$ die $\mathbb{P}$ erfüllen, erfüllt auch $f \times_S g$ $\mathbb{P}$

ii) $\mathbb{P}$ ist stabil unter ~~Basis~~ Basiswechsel

Bew (i) $\Rightarrow$ (ii): $f_{S'} = f \times_S id_{S'}$

f, g wie in (i) wegen $\mathbb{P}$ erfüllt $\mathbb{P}$, ~~$f \times_S id_Y : X' \times_S Y$~~

$f \times_S id_Y : X' \times_S Y = X \times_X (X' \times_S Y) \longrightarrow X \times_S Y$

$f_{(X \times_S Y)}$ erfüllt $\mathbb{P}$ $\square$

In Sch sind fast alle betrachteten Eigenschaften von Morph stabil unter "$\circ$", aber nicht unbedingt unter Basisw.; inj, abg.

Bsp: $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}(\zeta_p) \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} \mathbb{Q} = S$ Homöo, d.h. inj

$\quad\;\, S' \xrightarrow{u} \operatorname{Spec} \mathbb{Q} = S$

$f_{(S')} : X \times_S S' \longrightarrow S' = \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$

$\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}(\zeta_n) \otimes \mathbb{Q}_p)$ $\qquad$ 1 Punkt

$= \prod^{p-1} \mathbb{Q}(\zeta_p)$

$p-1$ Pkt $\qquad$ nicht inj

ζ_p primitive p-te EW

Warnung: Absolute Eig v. Schemata sind oft nicht kompatibel mit Basiswechsel

$k = \mathbb{F}_p(t)$

$K = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p^n}})$ perfekte Abschluss von k,

$A = K \otimes_k K$

~~Manzig~~ n Manzig nil(A) ist nicht e.l., d.h. Spec(A), A ist nicht red, nicht noeth.