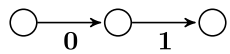
Theoretische Informatik: Selbststudium - Blatt 2

Abgabe bis 20. November 2015
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

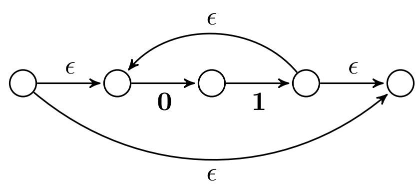
Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe S4

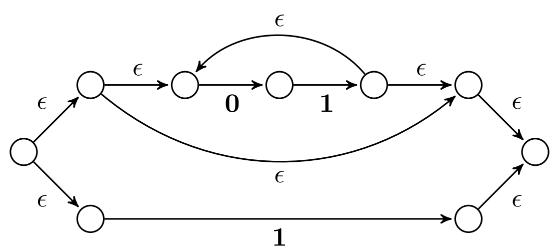
Für die Konstruktion des äquivalenten EA werden wir folgendermassen vorgehen. Zuerst erstellen wir analog zu 3.2.3 einen ϵ-NEA und wandeln ihn dann nach 2.5.5 in einen EA um, der die gleiche Sprache wie der ϵ-NEA akzeptiert.
Für den regulären Ausdruck $E = ((\mathbf{01})^* + \mathbf{1})\mathbf{0}$ konstruieren wir zuerst einen ϵ-NEA für $\mathbf{01}$:



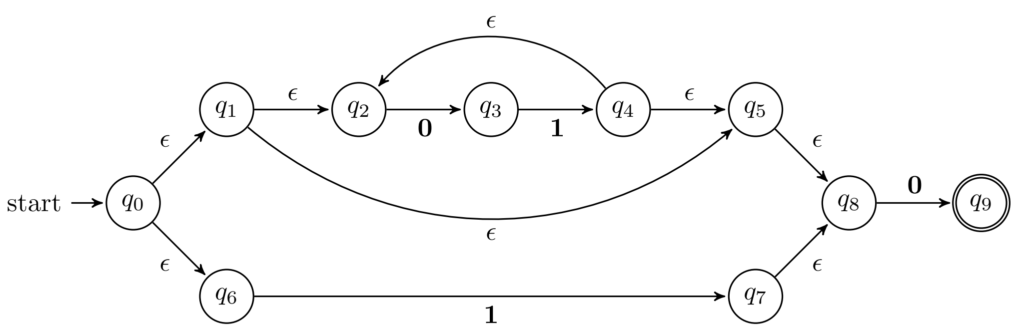
Nun erweitern wir ihn für $(\mathbf{01})^*$:



Für $(\mathbf{01})^* + \mathbf{1}$:



Und noch für $\big((\mathbf{01})^* + \mathbf{1}\big)\mathbf{0}$:



Nun erstellen wir aus dem oben dargestellten ϵ-NEA A einen EA B. Zuerst fassen wir $\textsc{eclose}(q)$ für $q \in \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9\}$ in einer Tabelle zusammen, weil wir sie häufig brauchen werden.

q	$\textsc{eclose}(q)$
q_0	$\{q_0, q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}$
q_1	$\{q_1, q_2, q_5, q_8\}$
q_2	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_3\}$
q_4	$\{q_2, q_4, q_5, q_8\}$
q_5	$\{q_5, q_8\}$
q_6	$\{q_6\}$
q_7	$\{q_7, q_8\}$
q_8	$\{q_8\}$
q_9	$\{q_9\}$

Der Startzustand in A ist q_0, also ist der Startzustand von B $\textsc{eclose}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}$. Jetzt suchen wir die Nachfolger der Elemente in $\{q_0, q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}$ für die Eingaben 0 und 1. Wir berechnen dafür zwei Übergänge und gehen dabei direkt rekursiv weiter:

1. $\delta_B(\{q_0, q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}, 0)$. Die beiden Zustände $q_2, q_8 \in \{q_0, q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}$ gehen auf Eingabe 0 einen Zustand weiter:

   $\delta_B(q_2, 0) = \{q_3\}$
   $\delta_B(q_8, 0) = \{q_9\}$

   Also ϵ-schliessen wir q_3 und q_9:

   $\textsc{eclose}(q_3) = \{q_3\}$
   $\textsc{eclose}(q_9) = \{q_9\}$

   Das ergibt einen neuen Zustand $\{q_3, q_9\}$.

   Der einzige Zustand in $\{q_3, q_9\}$, der ausgehende Pfeile mit 0 oder 1 hat, ist q_3:
   $\delta_B(q_3, 1) = \{q_4\}$
   Also ϵ-schliessen wir q_4:
   $\textsc{eclose}(q_4) = \{q_2, q_5, q_8\}$.
   Das ergibt einen neuen Zustand $\{q_2, q_5, q_8\}$.
   Die Zustände q_2 und $q_8\}$ haben ausgehende Pfeile mit 0:
   $\delta_B(q_2, 0) = \{q_3\}$
   $\delta_B(q_8, 0) = \{q_9\}$
   Also ϵ-schliessen wir q_3 und $\{q_9\}$:
   $\textsc{eclose}(q_3) = \{q_3\}$.
   $\textsc{eclose}(q_9) = \{q_9\}$.
   Der Zustand $\{q_3, q_9\}$ existiert bereits und damit ist der Pfad zu Ende.

2. $\delta_B(\{q_0, q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}, 1)$. Die beiden Zustände $q_3 \notin \{q_0, q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}$ und $q_6 \in \{q_0, q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}$ gehen auf Eingabe 1 einen Zustand weiter:

   $\delta_B(q_6, 1) = \{q_7\}$

   Also ϵ-schliessen wir q_7:

$\text{ECLOSE}(q_7) = \{q_7, q_8\}$

Das ergibt einen neuen Zustand $\{q_7, q_8\}$.

Der einzige Zustand in $\{q_7, q_8\}$, der ausgehende Pfeile mit 0 oder 1 hat, ist q_8:

$\delta_B(q_8, 0) = \{q_9\}$

Also ϵ-schliessen wir q_9:

$\text{ECLOSE}(q_9) = \{q_9\}$.

Das ergibt einen neuen Zustand $\{q_9\}$. Der Pfad ist zu Ende, weil keine ausgehenden Pfeile mit 0 oder 1 mehr vorkommen.

Daraus konstruieren wir nun den EA. Wir definieren:

$p_0 := \{q_0, q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}$

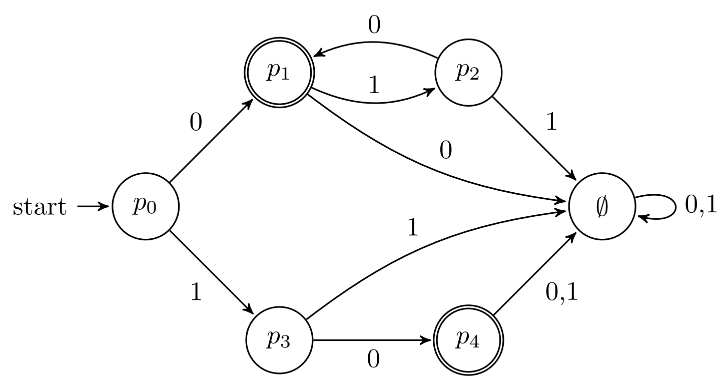
$p_1 := \{q_3, q_9\}$

$p_2 := \{q_2, q_5, q_8\}$

$p_3 := \{q_7, q_8\}$

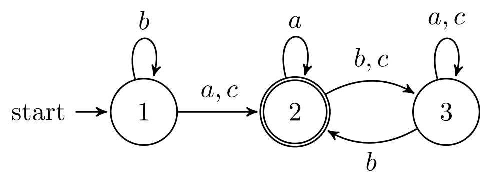
$p_4 := \{q_9\}$

Die akzeptierten Zustände sind alle, die q_9 enthalten, also p_1 und p_4. Zusätzlich erstellen wir den toten Zustand $\emptyset$, zu dem alle übrigen Pfeile (alle, die wir nicht wie oben konstruiert haben) führen, inkl. eines Loops auf sich selbst. Also erhalten wir den folgenden EA:

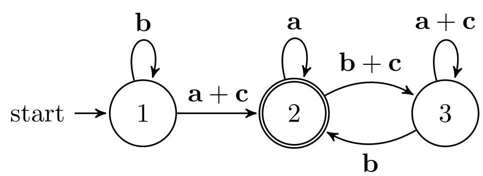


Aufgabe S5

Wir wenden das Verfahren ,,Converting DFA's to Regular Expressions by Eliminating States" aus dem Buch *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben, an. Zuerst wandeln wir den EA



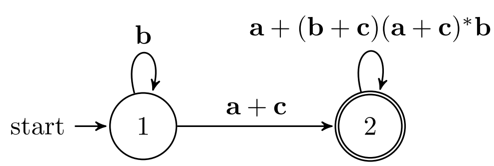
in einen EA mit regulären Ausdrücken als Beschriftungen um:



Der einzige Zustand, den wir eliminieren wollen, ist der Zustand 3. Zustand 3 hat einen Vorgänger, 2, und einen Nachfolger, ebenfalls 2. In den regulären Ausdrücken von Fig. 3.7 im Buch ausgedrückt bedeutet das: $Q_1 = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (der Pfeil von Zustand 2 zu 3), $P_1 = \mathbf{b}$ (der Pfeil von Zustand 3 zu 2), $R_{11} = \mathbf{a}$ (der Pfeil von Zustand 2 zu 2, also der Loop auf Zustand 2) und $S = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ (der Loop auf Zustand 3).
Der entstehende Pfeil von Zustand 2 zu 2, also ein Loop auf Zustand 2, berechnet sich mit $R_{11} + Q_1 S^* P_1$ (entweder gehen wir direkt über R_{11} zu 2 oder über $Q_1 S^* P_1$). Es gilt:

$$R_{11} + Q_1 S^* P_1 = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} + \mathbf{c})^* \mathbf{b}.$$

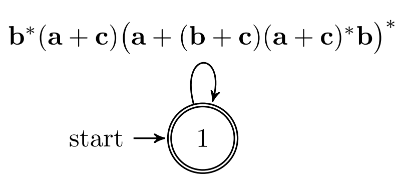
Der Ausdruck kann nicht vereinfacht werden. Nun haben wir einen EA mit zwei Zuständen erstellt:



Die regulären Ausdrücke des Automaten sind nach dem generischen Zwei-Zustand-Automaten aus Fig. 3.9: $R = \mathbf{b}$, $S = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, $T = \emptyset$ und $U = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} + \mathbf{c})^* \mathbf{b}$. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
(R + SU^*T)^*SU^* &= \Big(\mathbf{b} + (\mathbf{a} + \mathbf{c})\big(\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} + \mathbf{c})^*\mathbf{b}\big)^*\emptyset\Big)^*(\mathbf{a} + \mathbf{c})\big(\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} + \mathbf{c})^*\mathbf{b}\big)^* \\
&= (\mathbf{b} + \emptyset)^*(\mathbf{a} + \mathbf{c})\big(\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} + \mathbf{c})^*\mathbf{b}\big)^* && (\forall \mathbf{k} : \mathbf{k}\emptyset = \emptyset) \\
&= \mathbf{b}^*(\mathbf{a} + \mathbf{c})\big(\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} + \mathbf{c})^*\mathbf{b}\big)^* && (\forall \mathbf{k} : \mathbf{k} + \emptyset = \mathbf{k}).
\end{aligned}$$

Das ergibt den folgenden Ein-Zustand-Automaten:



Damit ist der gesuchte reguläre Ausdruck $\mathbf{b}^*(\mathbf{a} + \mathbf{c})\big(\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} + \mathbf{c})^*\mathbf{b}\big)^*$.