Theoretische Informatik: Blatt 7

Abgabe bis 13. November 2015
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 19

Sei A eine k-Band-TM. Wir konstruieren nun nach und nach eine 1-Band-TM B. Die Vorgehensweise ist analog zum Beweis von *Lemma 4.2*

1. Zu jedem Band i von A bis auf das Eingabeband fügen wir ein zweites Band i' direkt darunter ein. Dieses soll nur die Symbole $\{¢, ␣, \uparrow\}$ beinhalten und $\uparrow$ soll nur einmal auf diesem Band vorkommen. Der Pfeil indiziert die Position des Kopfes, der in A auf Band i zeigt. Die Anzahl an Arbeitsbändern verdoppelt sich.

2. Jetzt fassen wir sämtliche Arbeitsbänder i und i', $i \in \{1, 2, ..., k\}$ zu einem Band zusammen. Der j-te Eintrag auf den Arbeitsband von B muss also die Infos über dem j-ten Eintrag sämtlicher Arbeitsbänder i und i' beinhalten. Das Eingabeband von A lassen wir unangetastet. Dadurch vergrößert sich unser Arbeitsalphabet.
$$\Gamma_B = \underbrace{\Sigma_A \cup \{¢, \$\}}_{(1)} \underbrace{\cup}_{(2)} \Big(\underbrace{\{\Sigma_A \cup \{¢, ␣\}\}}_{(3)} \times \underbrace{\{␣, \uparrow\}}_{(4)} \Big)^k$$
   (1) Alle Zeichen, die im Eingabealphabet stehen können.
   (2) wir lesen entweder ein Zeichen auf dem Eingabeband oder auf dem Arbeitsband.
   (3) Zeichen auf dem i-ten Arbeitsband von A.
   (4) Zeichen auf dem i'-ten Arbeitsband (siehe oben).

3. (a) B liest einmal den Inhalt des Eingabebandes von links nach rechts, bis alle k Kopfpositionen von A gefunden wurden und speichert dabei in ihrem Zustand die k Symbole, die sie bei den k Köpfen von A gelesen hat. (Das sind die Symbole, die auf der Spur über '$\uparrow$' stehen.) Die Anzahl Zustände in B ist also grösser als die in A.
   (b) Jetzt kennt B das ganze Argument (B hat den zu A passenden Zustand.) der Transitfuntionen von A und kann entsprechend die Köpfe bewegen (= Symbole auf der $2i$-ten Spur ersetzen). Diese Änderung kann B in einem Lauf von rechts nach links ausführen.

$\text{Space}_B(n)$ ist so groß, wie die Längste Konfigutation von allen Berechnungsschritten von B auf allen Wörtern über Σ der Länge n auf dem Arbeitsband. Das Arbeitsband hat nach der genannten Konstruktion die beschriebene Länge des Maximums der beschriebenen Längen aller k Arbeitsbänder von A, für alle n. Daher folgt $\text{Space}_B(n) \leq \text{Space}_A(n) \quad$, für alle n.

In jedem Simulationsschritt muss das Arbeitsband ein Mal von links nach rechts und wieder zurück gelesen werden. $\Rightarrow$ Für den i-ten Schritt sind $\text{Space}_B(C_i)$ Schritte notwendig.

$\text{Time}_B(n)$ im Verhältnis zu $\text{Time}_A(n)$:

$$\text{Time}_B(n) \;\leq\; \text{Time}_A(n) \cdot \text{Space}_B(n) \;\leq\; \text{Time}_A(n) \cdot \text{Space}_A(n)$$

Aufgabe 20

(a) $e(n) = 2^n$

Wir konstruieren eine 2-Band Turingmaschine M, wobei *Band 0* das Eingabeband und *Bänder 1–2* die Arbeitsbänder sind. M bekommt als Eingabe das Wort 0^n auf *Band 0*. Zu Beginn schreibt M eine 0 auf *Band 1*. Solange der Lesekopf des Eingabebandes nicht \$ liest:

1. Gehe auf *Band 1* nach links bis ¢.
2. Gehe auf *Band 2* nach links bis ¢
3. Lies Zeichen auf *Band 1*. Schreibe für jede gelesene 0 auf *Band 1* 00 auf *Band 2*. Für ein ␣ schreibe ein ␣.
4. Gehe auf beiden Bändern nach links und kopiere Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* einschließlich bis Zeichen ␣.
5. Rücke mit Lesekopf nach rechts.

Das Ergebnis steht dann auf *Band 2* bis zum ersten ␣.

Auf diese Art generieren wir 2^n Nullen. Für n Nullen der Eingabe lesen wir pro Schritt 2^i Nullen. Das Schreiben geschieht jeweils in $\mathcal{O}(1)$.

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2 \in \mathcal{O}(2^n)$$

Folglich ist $e(n)$ zeitkonstruierbar.

(b) $f(n) = fib_n$

Wir konstruieren eine 3-Band Turingmaschine M, wobei *Band 0* das Eingabeband und *Bänder 1–3* die Arbeitsbänder sind. M bekommt als Eingabe das Wort $w = 0^n$ auf *Band 0*. Wir unterscheiden drei Eingaben w.

Fall 1: $w = \lambda$.
In diesem Fall ist $n = 0$. M schreibt $0^{fib_0} = \lambda$ auf

Fall 2: $w = 0$.
In diesem Fall ist $n = 1$. M schreibt $0^{fib_1} = 0$ auf *Band 1* und hält.

Fall 3: $|w| = n, n \geq 2$. Der Lesekopf auf *Band 0* liegt auf der zweiten 0 und M liest auf *Band 0* von links nach rechts. Für die erste gelesene 0 schreibt M eine 0 auf *Band 2*. Für jede weitere gelesene 0 führt M Schritte 1.–3. aus, bis \$ gelesen wird. Dann ist auf *Band 1* das Ergebnis 0^{fib_n} (und auf *Band 2* $0^{fib_{n-1}}$ und auf *Band 3* $0^{fib_{n-2}}$).

1. M überschreibt *Band 3* mit dem Inhalt von *Band 2* ($fib_{i-2} \leftarrow fib_{i-1}$).
2. M überschreibt *Band 2* mit dem Inhalt von *Band 1* ($fib_{i-1} \leftarrow fib_i$).
3. M schreibt den Inhalt von *Band 3* in *Band 1* (konkateniert also die Nullen auf *Band 1* mit den Nullen von *Band 3*) ($fib_i \leftarrow fib_{i-1} + fib_{i-2}$).

In den Fällen 1 und 2 ist die Laufzeit konstant, also ist $f(n) \in \mathcal{O}(1)$. Im Fall 3 schreiben wir bei der $i - ten$ Ausführung, $i \leq n - 2$ (weil wir auf der zweiten 0 starten), fib_{i-2} Nullen auf *Band 3*, fib_{i-1} Nullen auf *Band 2* und fib_{i-2} Nullen auf *Band 1*, also pro Schritt $2fib_{i-2} + fib_{i-1} \leq 3fib_{i-1}$ Nullen. Insgesamt ergibt das also

$$\begin{aligned}
3\sum_{i=2}^{n} fib_{i-1} &= 3\sum_{i=1}^{n-1} fib_i && \text{(Indexverschiebung)} \\
&= 3\sum_{i=0}^{n-1} fib_i && (fib_0 = 0) \\
&= 3(fib_{n+1} - 1). && \Big(\sum_{i=0}^{n} fib_i = fib_{n+2} - 1\Big) \\
&= 3(fib_n + fib_{n-1} - 1) && \text{(Definition } fib_n\text{)} \\
&\leq 3(2fib_n - 1)
\end{aligned}$$

$3(2fib_n - 1) = 6fib_n - 2 \in \mathcal{O}(fib_n)$. Damit ist $f(n)$ zeitkonstruierbar.

Aufgabe 21

Wir wissen: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \;\; g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und f und g sind beide platzkonstruierbar.

$\Rightarrow$ Es gibt 1-Band-Turingmaschinen F und G, so dass $\begin{matrix} \text{Space}_F(n_1) \leq f(n_1) \\ \text{Space}_G(n_2) \leq g(n_2) \end{matrix} \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

und für jede Eingabe $\begin{matrix} 0^{n_1} \text{ generiert } F \text{ das Wort } 0^{f(n_1)} \\ 0^{n_2} \text{ generiert } G \text{ das Wort } 0^{g(n_2)} \end{matrix}$ auf ihrem Arbeitsband und hält in Zustand q_{accept}.

Wir konstruieren eine 5-Band-Turingmaschine H. H bekommt als Inpt 0^n auf sein Eingabeband. H kopiert die Eingabe auf *Band 2* und auf *Band 4* und simuliert F, dann G. Dabei sind *Band 2, 3* das Eingabe- und Arbeitsband von F und *Band 4, 5* Eingabe- und Arbeitsband von G.
Auf *Band 3* steht nun $0^{f(n)}$ und auf *Band 5* steht $0^{g(n)}$. H geht nach an den Anfang von *Band 3* und geht für jede gelesene 0 eins nach rechts und hängt den gesamten Inhalt von *Band 5* an *Band 1* an. Hat H alle 0en auf *Band 3* gelesen steht auf *Band 1* nun $0^{f(n) \cdot g(n)}$. H akzeptiert.
Die längte Konfiguration über alle Bänder und Schritte hat H am Ende, wenn das Ergebnis steht. Damit ist

$$\text{Space}_H = f(n) \cdot g(n) =: h(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \textit{(nach Def. 6.2)}$$

und H hält immer in q_{accept}.
Nach *Lemma 6.1* gibt es eine äquivalente 1-Band-Turingmaschine H' mit $\text{Space}_{H'} \leq \text{Space}_H \leq h(n)$. Folglich ist $h(n)$ platzkonstruierbar.