

# **Theoretische Informatik: Blatt 9**

Abgabe bis 27. November 2015  
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

**Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig**

## Aufgabe 22

- (a) Wir wollen zeigen, dass  $\text{NTIME}(f)$  unter Vereinigung abgeschlossen ist.

Seien  $L_1, L_2 \in \text{NTIME}(f)$ , dann gibt es nichtdeterministische MTMs  $M_1, M_2$  mit

$$L(M_1) = L_1, \quad L(M_2) = L_2 \quad \text{und} \quad \text{Time}_{M_1}(n) \in \mathcal{O}(f(n)), \quad \text{Time}_{M_2}(n) \in \mathcal{O}(f(n))$$

Wir konstruieren nun eine neue MTM  $M$  mit  $L(M) = L := L_1 \cup L_2$ .

$M$  simuliert dazu  $M_1$  und  $M_2$  gleichzeitig. Sobald eine von beiden akzeptiert, akzeptiert  $M$  ihre Eingabe. Falls beide verwerfen, verwirft auch  $M$ .

Falls nun also ein  $x$  in  $L_1$  oder  $L_2$  ist, wird  $M$  akzeptieren, da  $x \in L$ .

Für die Berechnung braucht  $M$  das Minimum der Rechenzeit beider MTMs.

$$\text{Time}_M(x) = \min\{\text{Time}_{M_1}(x), \text{Time}_{M_2}(x)\} \quad \text{für alle } x.$$

Daher:

$$\text{Time}_M(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \quad \text{und} \quad L(M) = L \in \text{NTIME}(f)$$

- (b) Wir wissen  $L \in \text{NTIME}(f)$  und  $L' \in \text{TIME}(f)$ .

Es gibt also eine N-MTM  $M_1$  mit  $L(M_1) = L$  und eine MTM  $M_2$  mit  $L(M_2) = L'$ .

Um zu zeigen, dass  $L - L' \in \text{NTIME}(f)$  konstruieren wir eine N-MTM  $M$ , die folgendermaßen funktioniert:

$M$  simuliert  $M_1$  auf der Eingabe. Falls  $M_1$  nicht akzeptiert, akzeptiert auch  $M$  nicht. Akzeptiert  $M_1$  doch, dann simulieren wir die Eingabe auch auf  $M_2$ . Akzeptiert  $M_2$  verwerfen wir, verwirft  $M_2$  akzeptieren wir.

Offensichtlich ist  $L(M) = L - L'$ .

Mit Hilfe von *Lemma 6.5* folgt: Das Simulieren von  $M_1$  und  $M_2$  liegt in  $\mathcal{O}(f(n))$ .

Damit liegt auch die Summe der Laufzeiten in  $\mathcal{O}(n)$  und  $L(M) = L - L' \in \text{NTIME}(f)$ .

## Aufgabe 23

## Aufgabe 24

Wir wissen, für jedes  $w \in L$  gibt es einen Zeugen  $x$ , mit  $|x| \leq \log_2 |w|$ .

Es folgt, für jedes  $w$  gibt es

$$\sum_{i=0}^{\log_2 |w|} = 2^{\log_2 |w|+1} - 1 = 2(2^{\log_2 |w|}) - 1 = 2|w| - 1$$

mögliche Kandidaten für einen Zeugen in  $\{0, 1\}^*$ , falls das leere Wort ein Zeuge sein kann.

Da  $A$  ein Polynomzeit-Verifizierer für  $L$  ist, kann  $A$  für gegebene  $w$  und  $x$  in  $\mathcal{O}(|w|^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  herausfinden, ob  $w \in L$ .

Wir testen einfach für alle möglichen  $2|w| - 1$  Zeugen  $x$  ob  $(w, x) \in L(A)$ . Das hat eine Laufzeit von  $\mathcal{O}((2|w| - 1) \cdot |w|^k) \subset \mathcal{O}(|w|^{k'})$ .

Da wir also für alle Wörter  $w$  in polynomieller Zeit feststellen können, ob  $w \in L$  ist, ist  $L \in P$ .