

# **Theoretische Informatik: Blatt 7**

Abgabe bis 13. November 2015  
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

**Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig**

## Aufgabe 19

## Aufgabe 20

(a)  $e(n) = 2^n$

Wir konstruieren eine 2-Band Turingmaschine  $M$ , wobei *Band 0* das Eingabeband und *Bänder 1–2* die Arbeitsbänder sind.  $M$  bekommt als Eingabe das Wort  $0^n$  auf *Band 0*. Zu Beginn schreibt  $M$  eine 0 auf *Band 1*. Solange der Lesekopf des Eingabebandes nicht  $\$$  liest:

1. Gehe auf *Band 1* nach links bis  $\dagger$ .
2. Gehe auf *Band 2* nach links bis  $\dagger$
3. Lies Zeichen auf *Band 1*. Schreibe für jede gelesene 0 auf *Band 1* 00 auf *Band 2*. Für ein  $\sqcup$  schreibe ein  $\sqcup$ .
4. Gehe auf beiden Bändern nach links und kopiere Inhalt von *Band 2* auf *Band 1* einschließlich bis Zeichen  $\sqcup$ .
5. Rücke mit Lesekopf nach rechts.

Das Ergebnis steht dann auf *Band 2* bis zum ersten  $\sqcup$ .

Auf diese Art generieren wir  $2^n$  Nullen. Für  $n$  Nullen der Eingabe lesen wir pro Schritt  $2^i$  Nullen. Das Schreiben geschieht jeweils in  $\mathcal{O}(1)$ .

$$\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2 \in \mathcal{O}(2^n)$$

Folglich ist  $e(n)$  zeitkonstruierbar.

(b)  $f(n) = \text{fib}_n$

Wir konstruieren eine 3-Band Turingmaschine  $M$ , wobei *Band 0* das Eingabeband und *Bänder 1–3* die Arbeitsbänder sind.  $M$  bekommt als Eingabe das Wort  $w = 0^n$  auf *Band 0*. Wir unterscheiden drei Eingaben  $w$ .

Fall 1:  $w = \lambda$ .

In diesem Fall ist  $n = 0$ .  $M$  schreibt  $0^{\text{fib}_0} = \lambda$  auf

Fall 2:  $w = 0$ .

In diesem Fall ist  $n = 1$ .  $M$  schreibt  $0^{\text{fib}_1} = 0$  auf *Band 1* und hält.

Fall 3:  $|w| = n, n \geq 2$ . Der Lesekopf auf *Band 0* liegt auf der zweiten 0 und  $M$  liest auf *Band 0* von links nach rechts. Für die erste gelesene 0 schreibt  $M$  eine 0 auf *Band 2*. Für jede weitere gelesene 0 führt  $M$  Schritte 1.–3. aus, bis  $\$$  gelesen wird. Dann ist auf *Band 1* das Ergebnis  $0^{\text{fib}_n}$  (und auf *Band 2*  $0^{\text{fib}_{n-1}}$  und auf *Band 3*  $0^{\text{fib}_{n-2}}$ ).

1.  $M$  überschreibt *Band 3* mit dem Inhalt von *Band 2* ( $\text{fib}_{i-2} \leftarrow \text{fib}_{i-1}$ ).
2.  $M$  überschreibt *Band 2* mit dem Inhalt von *Band 1* ( $\text{fib}_{i-1} \leftarrow \text{fib}_i$ ).
3.  $M$  schreibt den Inhalt von *Band 3* in *Band 1* (konkateniert also die Nullen auf *Band 1* mit den Nullen von *Band 3*) ( $\text{fib}_i \leftarrow \text{fib}_{i-1} + \text{fib}_{i-2}$ ).

In den Fällen 1 und 2 ist die Laufzeit konstant, also ist  $f(n) \in \mathcal{O}(1)$ . Im Fall 3 schreiben wir bei der  $i$ -ten Ausführung,  $i \leq n - 2$  (weil wir auf der zweiten 0 starten),  $\text{fib}_{i-2}$  Nullen auf *Band 3*,  $\text{fib}_{i-1}$

Nullen auf *Band 2* und  $fib_{i-2}$  Nullen auf *Band 1*, also pro Schritt  $2fib_{i-2} + fib_{i-1} \leq 3fib_{i-1}$  Nullen. Insgesamt ergibt das also

$$\begin{aligned}
 3 \sum_{i=2}^n fib_{i-1} &= 3 \sum_{i=1}^{n-1} fib_i && \text{(Indexverschiebung)} \\
 &= 3 \sum_{i=0}^{n-1} fib_i && (fib_0 = 0) \\
 &= 3(fib_{n+1} - 1). && \left(\sum_{i=0}^n fib_i = fib_{n+2} - 1\right) \\
 &= 3(fib_n + fib_{n-1} - 1) && \text{(Definition } fib_n) \\
 &\leq 3(2fib_n - 1)
 \end{aligned}$$

$3(2fib_n - 1) = 6fib_n - 2 \in \mathcal{O}(fib_n)$ . Damit ist  $f(n)$  zeitkonstruierbar.

## Aufgabe 21

Wir wissen:  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $f$  und  $g$  sind beide platzkonstruierbar.

$\Rightarrow$  Es gibt 1-Band-Turingmaschinen  $F$  und  $G$ , so dass  $\text{Space}_F(n_1) \leq f(n_1)$   $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$   
 $\text{Space}_G(n_2) \leq g(n_2)$

und für jede Eingabe  $0^{n_1}$  generiert  $F$  das Wort  $0^{f(n_1)}$   
 $0^{n_2}$  generiert  $G$  das Wort  $0^{g(n_2)}$  auf ihrem Arbeitsband und hält in Zustand  $q_{accept}$ .

Wir konstruieren eine 5-Band-Turingmaschine  $H$ .  $H$  bekommt als Inpt  $0^n$  auf sein Eingabeband.  $H$  kopiert die Eingabe auf *Band 2* und auf *Band 4* und simuliert  $F$ , dann  $G$ . Dabei sind *Band 2, 3* das Eingabe- und Arbeitsband von  $F$  und *Band 4, 5* Eingabe- und Arbeitsband von  $G$ .

Auf *Band 3* steht nun  $0^{f(n)}$  und auf *Band 5* steht  $0^{g(n)}$ .  $H$  geht nach an den Anfang von *Band 3* und geht für jede gelesene 0 eins nach rechts und hängt den gesamten Inhalt von *Band 5* an *Band 1* an. Hat  $H$  alle 0en auf *Band 3* gelesen steht auf *Band 1* nun  $0^{f(n) \cdot g(n)}$ .  $H$  akzeptiert.

Die längste Konfiguration über alle Bänder und Schritte hat  $H$  am Ende, wenn das Ergebnis steht. Damit ist

$$\text{Space}_H = f(n) \cdot g(n) =: h(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{nach Def. 6.2})$$

und  $H$  hält immer in  $q_{accept}$ .

Nach *Lemma 6.1* gibt es eine äquivalente 1-Band-Turingmaschine  $H'$  mit  $\text{Space}_{H'} \leq \text{Space}_H \leq h(n)$ . Folglich ist  $h(n)$  platzkonstruierbar.