Theoretische Informatik: Blatt 9

Abgabe bis 9. Oktober 2015
Assistent: Sacha Krug, CHN D 42

Linus Fessler, Markus Hauptner, Philipp Schimmelfennig

Aufgabe 22

(a) Wir wollen zeigen, dass NTIME(f) unter Vereinigung abgeschlossen ist.
Seien $L_1, L_2 \in \text{NTIME}(f)$, dann gibt es nichtdeterministische MTMs M_1, M_2 mit

$$L(M_1) = L_1, \;\; L(M_2) = L_2 \quad \text{und} \quad \text{Time}_{M_1}(n) \in \mathcal{O}(f(n)), \;\; \text{Time}_{M_2}(n) \in \mathcal{O}(f(n))$$

Wir konstruieren nun eine neue MTM M mit $L(M) = L := L_1 \cup L_2$.
M simuliert dazu M_1 und M_2 gleichzeitig. Sobald eine von beiden akzeptiert, akzeptiert M ihre Eingabe. Falls beide verwerfen, verwirft auch M.

Falls nun also ein x in L_1 oder L_2 ist, wird M akzeptieren, da $x \in L$.
Für die Berechnung braucht M das Minimum der Rechenzeit beider MTMs.

$$\text{Time}_M(x) = \min\{\text{Time}_{M_1}(x), \text{Time}_{M_2}(x)\} \quad \text{für alle x.}$$

Daher:

$$\text{Time}_M(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \quad \text{und} \quad L(M) = L \in \text{NTIME}(f)$$

(b) Wir wissen $L \in \text{NTIME}(f)$ und $L' \in \text{TIME}(f)$.
Es gibt also eine N-MTM M_1 mit $L(M_1) = L$ und eine MTM M_2 mit $L(M_2) = L'$.
Um zu zeigen, dass $L - L' \in \text{NTIME}(f)$ konstruieren wir eine N-MTM M, die folgendermaßen funktioniert:
M simuliert M_1 auf der Eingabe. Falls M_1 nicht akzeptiert, akzeptiert auch M nicht. Akzeptiert M_1 doch, dann simulieren wir die Eingabe auch auf M_2. Akzeptiert M_2 verwerfen wir, verwirft M_2 akzeptieren wir.

Offensichtlich ist $L(M) = L - L'$.
Mit Hilfe von *Lemma 6.5* folgt: Das Simulieren von M_1 und M_2 liegt in $\mathcal{O}(f(n))$.
Damit liegt auch die Summe der Laufzeiten in $\mathcal{O}(n)$ und $L(M) = L - L' \in \text{NTIME}(f)$.