Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Aut(F_3) und Kazhdans Eigenschaft (T)

Bachelorarbeit

Autor:
Phil Steinhorst
`p.st@wwu.de`
Matr.-Nr. 382 837

Betreuer:
Prof. Dr. Linus Kramer
Dr. Olga Varghese

Münster, 28. Oktober 2015

Vorwort

In den 1960er-Jahren definierte David Kazhdan die Eigenschaft (T) für topologische Gruppen:

Definition
Eine topologische Gruppe G besitzt die Eigenschaft (T), wenn eine kompakte Teilmenge $Q \subseteq G$ und ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass gilt: Ist π eine stetige unitäre Darstellung von G auf einen Hilbertraum $\mathcal{H}$, die einen Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ mit $\|\xi\| = 1$ und $\sup_{q \in Q} \|\pi(q)\xi - \xi\| < \varepsilon$ besitzt, dann existiert ein Vektor $\eta \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ mit $\pi(g)\eta = \eta$ für alle $g \in G$. [BHV08, S. 1]

Ursprünglich wurde diese von Kazhdan als Hilfsmittel für die Arbeit mit Gittern verwendet. Gitter sind diskrete Untergruppen $\Gamma \subseteq G$ einer lokalkompakten Gruppe G, deren Quotient $G \diagup \Gamma$ ein G-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß besitzt. Mittlerweile hat sich die Eigenschaft (T) zu einem bedeutenden Bestandteil vieler mathematischer Teilgebiete entwickelt, darunter die Gruppentheorie, die Differentialgeometrie, die Theorie der Operatoralgebren und die Algorithmentheorie. Eine große Menge an Anwendungen und Konsequenzen der Eigenschaft (T) findet man in dem umfassenden Werk [BHV08].
In dieser Arbeit möchten wir beweisen, dass die Automorphismengruppe der freien Gruppe vom Rang 3 nicht zu denjenigen Gruppen gehört, die Kazhdans Eigenschaft (T) innehaben. Bereits im Jahr 1989 konnte McCool zeigen, dass dies der Fall ist [McC97]. Wir stellen im vierten Kapitel einen Beweis von Grunewald und Lubotzky vor, der einige Vorarbeit benötigt:
Wir betrachten vorwiegend Gruppenwirkungen von endlich erzeugten Gruppen G auf Mengen X, das heißt Homomorphismen $\Phi\colon G \to \mathrm{Sym}(X)$, wobei $\mathrm{Sym}(X)$ die Symmetriegruppe von X bezeichnet. Im Falle von metrischen Räumen (X, d) verlangen wir zusätzlich, dass die Gruppenwirkung isometrisch ist, das heißt Φ bildet hier in die Gruppe der surjektiven Isometrien $\mathrm{Isom}(X)$ von X ab. Konkrete Beispiele für metrische Räume, die wir betrachten, sind affine Hilberträume in Kapitel 2 sowie $\mathrm{CAT}(0)$ kubische Komplexe in Kapitel 3. Wir werden sehen, dass Kazhdans Eigenschaft (T) eng verbunden ist mit der Existenz globaler Fixpunkte von Gruppenwirkungen, genauer gesagt mit folgenden Fixpunkteigenschaften für eine endlich erzeugte Gruppe G:

- G besitzt **Eigenschaft (FH)**, wenn jede affine isometrische Wirkung von G auf einen reellen Hilbertraum einen globalen Fixpunkt besitzt.

- G besitzt **Eigenschaft (FC)**, wenn jede zelluläre Wirkung von G auf einen vollständigen $\mathrm{CAT}(0)$ kubischen Komplex einen globalen Fixpunkt besitzt.
- G besitzt **Eigenschaft (FA)**, wenn jede zelluläre Wirkung von G auf einen simplizialen Baum einen globalen Fixpunkt besitzt.

Benötigte Kenntnisse und Begrifflichkeiten werden zu Beginn jedes Kapitels vorgestellt; zusätzlich liefert das erste Kapitel eine Einführung in $\mathrm{CAT}(0)$-Räume und Hilberträume. Zum Verständnis dieser Arbeit sind somit nur Grundkenntnisse über Gruppen notwendig, wie sie zum Beispiel in der Vorlesung *Einführung in die Algebra* vermittelt werden.
Wir nutzen im Laufe dieser Arbeit viele Resultate aus der Literatur, die ursprünglich für topologische Gruppen formuliert sind. Das sind Gruppen, die mit einer Topologie versehen sind, sodass die Gruppenverknüpfung und Inversenbildung stetig sind. Da wir vorwiegend endlich erzeugte Gruppen betrachten, sind die zitierten Sätze problemlos anwendbar, da wir bei endlich erzeugten Gruppen die diskrete Topologie zugrunde legen.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

Zu Beginn wollen wir die mathematischen Grundbegriffe einführen, die für die gesamte Arbeit essenziell sind. Zum einen werden wir CAT(0)-Räume definieren und einen bekannten Satz zitieren, der uns in einigen Situationen die Existenz von Fixpunkten von Gruppenwirkungen liefern wird. Zum anderen definieren wir den Begriff des komplexen Hilbertraumes und zeigen erste Eigenschaften von Isometrien und affinen Abbildungen auf diesen, die besonders für das folgende Kapitel relevant sind. Mit einer Definition von Kazhdans Eigenschaft (T) schließen wir letztlich dieses einführende Kapitel ab.

1.1 CAT(0)-Räume

Die folgenden Definitionen sind zusammengefasst entnommen aus [Sch13, Kap. 1].

Definition 1.1 (Geodäte, geodätischer Raum)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Eine **Geodäte** von x nach y ist eine Abbildung $\gamma\colon [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ sowie $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ für alle $s, t \in [a, b]$. Wir schreiben kurz $\gamma\colon x \rightsquigarrow y$.
Der Raum (X, d) heißt **geodätisch**, wenn für alle $p, q \in X$ eine Geodäte $\gamma : p \rightsquigarrow q$ existiert.

Definition 1.2 (geodätisches Dreieck)
Sei (X, d) ein geodätischer Raum. Ein **geodätisches Dreieck** in X ist ein Tupel $\Delta = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ mit $x, y, z \in X$ und $\alpha\colon x \rightsquigarrow y, \beta\colon y \rightsquigarrow z, \gamma\colon z \rightsquigarrow x$. Die Geodäten α, β, γ heißen **Seiten** von Δ.

Ist $\Delta = (p, q, r, \alpha, \beta, \gamma)$ ein geodätisches Dreieck in (X, d), so findet man unter Zuhilfenahme der Dreiecksungleichung stets drei Punkte $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ und entsprechende Geodäten $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_2)$, sodass gilt:

$$d(p, q) = d_2(\tilde{p}, \tilde{q}), \qquad d(q, r) = d_2(\tilde{q}, \tilde{r}), \qquad d(r, p) = d_2(\tilde{r}, \tilde{p}).$$

Das geodätische Dreieck $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ heißt **Vergleichsdreieck** zu Δ. Ist $v = \gamma(s) \in X$ für ein s, so heißt $\tilde{v} = \tilde{\gamma}(s) \in \mathbb{R}^2$ **Vergleichspunkt** von v.

Definition 1.3 (CAT(0)-Raum)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein geodätisches Dreieck Δ in X hat die **CAT(0)-Eigenschaft**, wenn für alle Punkte n, m auf den Seiten von Δ und ihre Vergleichspunkte $\tilde{n}, \tilde{m}$ auf den Seiten von $\tilde{\Delta}$ gilt:

$$d(n, m) \leq d_2(\tilde{n}, \tilde{m}).$$

Ein geodätischer Raum (X, d) heißt **CAT(0)-Raum**, wenn alle Dreiecke in X die CAT(0)-Eigenschaft besitzen.

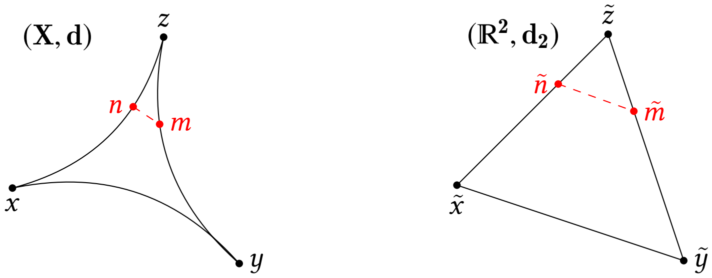

Abbildung 1.1: Anschaulich gesprochen sind Dreiecke in CAT(0)-Räumen „mindestens so dünn“ wie ihre Vergleichsdreiecke im euklidischen Raum.

Beispiel

(i) Der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, d_2)$ sowie jeder Hilbertraum ist CAT(0), da sich die geodätischen Dreiecke isomorph in den $(\mathbb{R}^2, d_2)$ abbilden lassen.

(ii) Der Raum $(\mathbb{R}^2, d_1)$ mit $d_1(x, y) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ ist nicht CAT(0): In der folgenden Grafik ist $d_1(n, m) = 2$, aber $d_2(\tilde{n}, \tilde{m}) = \sqrt{3}$.

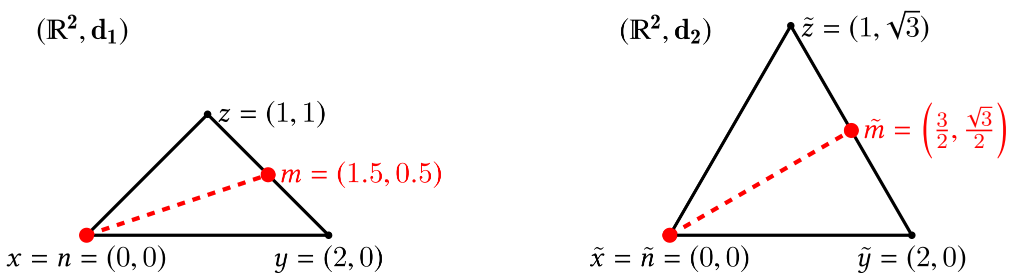

Abbildung 1.2: Der Raum $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist nicht CAT(0).

Ein für uns wesentliches Hilfsmittel ist der folgende Fixpunktsatz von Bruhat und Tits. Dieser sichert uns unter gewissen Bedingungen die Existenz eines globalen Fixpunktes, wenn eine Gruppe auf einen vollständigen $\mathrm{CAT}(0)$-Raum wirkt.

Satz 1.4 (Bruhat-Tits-Fixpunktsatz, vgl. [BH99, Kor. II 2.8])
Sei X ein vollständiger $\mathrm{CAT}(0)$-Raum, G eine Gruppe und $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Gruppenwirkung von G auf X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Φ hat einen globalen Fixpunkt, das heißt es existiert ein $x \in X$ mit $\Phi(g)(x) = x$ für alle $g \in G$.

(ii) Es existiert ein $x \in X$ mit beschränktem Orbit, das heißt $\Phi(G)(x) \subseteq X$ ist beschränkt.

(iii) Jeder Orbit von Φ ist beschränkt.

1.2 Hilberträume und Kazhdans Eigenschaft (T)

Definition 1.5 (Hilbertraum)
Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ein **Skalarprodukt**, das heißt eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist sesquilinear, das heißt

$$\langle \lambda x + y, z\rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$
$$\langle x, \lambda y + z\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x, y, z \in \mathcal{H}$.

(ii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist hermitesch, das heißt $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$.

(iii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist positiv definit, das heißt $\langle x, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ und $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dann induziert $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Norm und eine Metrik auf $\mathcal{H}$ vermöge $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ und $d(x, y) := \|x - y\|$ für $x, y \in \mathcal{H}$. Ist $(\mathcal{H}, d)$ vollständig, so heißt $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ **Hilbertraum**.

Definition 1.6 (Isometrie)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung $\varphi\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt **Isometrie**, wenn für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y).$$

Wie auch für metrische Räume bezeichnen wir mit $\mathrm{Isom}(\mathcal{H}) := \{\varphi\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H} : f \text{ ist isometrisch und bijektiv}\}$ die **Isometriegruppe** von $\mathcal{H}$.

Bemerkung
Für eine Isometrie $\varphi\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ gelten die Identitäten $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ und $\langle \varphi(x) - \varphi(y), \varphi(x) - \varphi(y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$.

Als weiteres Hilfsmittel für die Arbeit mit Isometrien führen wir den Begriff der affinen Abbildung ein und zitieren den Satz von Mazur und Ulam über surjektive Isometrien. Aus letzterem folgt eine Aussage über die Struktur der Fixpunktmenge einer bijektiven Isometrie.

Definition 1.7 (affine Abbildung)
Sei V ein reeller normierter Vektorraum. Eine Abbildung $f\colon V \to V$ heißt **affin**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) Die Abbildung $x \mapsto f(x) - f(0)$ ist linear.

(ii) Für alle $x, y \in V$ gilt $f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

(iii) Für alle $x, y \in V$ und $t \in [0,1]$ gilt $f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y)$.

(iv) Sind $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, so gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i).$$

Beweis: Zur Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) siehe [Väi03]. Die Implikation (iv) $\Rightarrow$ (iii) ist klar (Fall $n = 2$). Wir zeigen mittels Induktion, dass auch (iv) aus (iii) folgt: Der Induktionsanfang $n = 2$ entspricht gerade der Aussage (iii). Gelte also (iv) für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $v_1, \dots, v_{n+1} \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ und ohne Einschränkung $\lambda_{n+1} \neq 1$:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i\right) &= f\left((1-\lambda_{n+1}) \cdot \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \lambda_{n+1} v_{n+1}\right) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} (1-\lambda_{n+1}) \cdot f\left(\frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) + \lambda_{n+1} f(v_{n+1}) \\
&= (1-\lambda_{n+1}) \cdot f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} v_i\right) + \lambda_{n+1} f(v_{n+1})
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k} = 1,$$

also ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar und wir erhalten weiter:

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda_{n+1})\cdot f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}v_i\right)+\lambda_{n+1}f(v_{n+1})\\
\overset{\text{I.V.}}{=}\ &(1-\lambda_{n+1})\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}f(v_i)+\lambda_{n+1}f(v_{n+1})\\
=\ &\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(v_i).
\end{aligned}$$

Somit gilt (iv) für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 1.8 (Mazur-Ulam, [Väi03])
Sei $f: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine bijektive Isometrie auf einem reellen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist f affin.

Korollar 1.9
Sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum und $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$. Ist die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(\varphi) := \{x \in \mathcal{H} : \varphi(x) = x\}$ von φ nicht leer, so ist $\mathrm{Fix}(\varphi)$ ein affiner Unterraum von $\mathcal{H}$.

Beweis: Sei $\xi \in \mathrm{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$. Nach Satz 1.8 ist $\varphi(x) = L(x) + b$ für alle $x \in \mathcal{H}$ mit $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linear und $b \in \mathcal{H}$. Also gilt $\varphi(\xi) = L(\xi) + b = \xi$ bzw. $L(\xi) = \xi - b$.
Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Fix}(\varphi) = \xi + \mathrm{Eig}(1, L)$ gilt, wobei $\mathrm{Eig}(1, L)$ der Eigenraum von L zum Eigenwert 1 ist.

"$\subseteq$": Sei $x \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, also $\varphi(x) = L(x) + b = x$. Dann ist

$$L(x-\xi) = L(x) - L(\xi) = (x-b) - (\xi - b) = x - \xi.$$

Also ist $x - \xi \in \mathrm{Eig}(1, L)$ und somit $x \in \xi + \mathrm{Eig}(1, L)$.

"$\supseteq$": Sei $x \in \xi + \mathrm{Eig}(1, L)$, das heißt $x = \xi + v$ mit $L(v) = v$. Dann ist

$$\varphi(x) = L(x) + b = L(\xi) + L(v) + b = \xi - b + v + b = \xi + v = x.$$

Also ist $x \in \mathrm{Fix}(\varphi)$. □

Obschon wir in den folgenden Kapiteln äquivalente Formulierungen nutzen werden, möchten wir der Vollständigkeit halber die ursprüliche Definition der Kazhdan-Eigenschaft (T) nach [BHV08, Def. 1.1.3] angeben. Diese ist definiert mit Hilfe von unitären Darstellungen topologischer Gruppen auf komplexen Hilberträumen.

Definition 1.10 (unitäre Gruppe)
Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum. Eine lineare Abbildung $f\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt **unitär**, falls $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt. Wir nennen

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) := \{f\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H} : f \text{ ist unitär und bijektiv}\}$$

die **unitäre Gruppe** von $\mathcal{H}$.

Definition 1.11 (unitäre Darstellung)
Sei G eine topologische Gruppe. Eine **unitäre Darstellung** $(\pi, \mathcal{H})$ von G auf einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\pi\colon G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, sodass die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{H} \\ g &\longmapsto \pi(g)(x) \end{aligned}$$

stetig ist für alle $x \in \mathcal{H}$.

Definition 1.12
Sei G eine topologische Gruppe und $(\pi, \mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung.

(i) Sei $Q \subseteq G$ und $\varepsilon > 0$. Ein Vektor $x \in \mathcal{H}$ heißt **(Q, ε)-invariant**, wenn gilt

$$\sup_{g \in Q} \|\pi(g)(x) - x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|.$$

(ii) Wir sagen, $(\pi, \mathcal{H})$ hat **invariante Vektoren**, falls ein $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ existiert, sodass für alle $g \in G$ gilt: $\pi(g)(x) = x$.

Definition 1.13 (Kazhdans Eigenschaft (T))
Eine topologische Gruppe G hat **Kazhdans Eigenschaft (T)**, wenn eine kompakte Menge $Q \subseteq G$ und ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass gilt: Jede unitäre Darstellung von G, die einen (Q, ε)-invarianten Vektor besitzt, hat auch einen invarianten Vektor.

2 Untergruppen mit endlichem Index

Ziel dieses Kapitels ist zu zeigen, dass eine endlich erzeugte Gruppe genau dann die Kazhdan-Eigeschaft (T) hat, wenn dies für jede ihrer Untergruppen mit endlichem Index der Fall ist. Dafür werden wir zum einen die Eigenschaft (FH) über Gruppenwirkungen auf affinen Hilberträumen einführen und zum anderen Wirkungen von Untergruppen mit endlichem Index betrachten. Wir geben zunächst eine Definition des Untergruppenindex an und zeigen, dass Untergruppen mit endlichem Index stets einen Normalteiler mit endlichem Index enthalten.

Definition 2.1 (Index)
Sei G eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe. Der **Index** von U in G ist gegeben durch

$$[G : U] := \#G \diagup U.$$

Im Fall $[G : U] \leq \infty$ sprechen wir von einer **Untergruppe mit endlichem Index** und schreiben dafür kurz $U \sqsubseteq G$.

Beispiel

- Klarerweise ist der Index jeder Untergruppe einer endlichen Gruppe endlich.
- Jede nichttriviale Untergruppe von $\mathbb{Z}$ hat endlichen Index: Die Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind gerade von der Gestalt $m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, und es ist $[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m$.
- Der Index von $\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{R}, +)$ ist nicht endlich, da die eingeschränkte Nebenklassenprojektion $[0, 1) \to \mathbb{R} \diagup \mathbb{Z}$ bijektiv ist.

Proposition 2.2
Sei G eine Gruppe.

(i) Sind $U_1, U_2 \sqsubseteq G$, so gilt $[G : U_1 \cap U_2] \leq [G : U_1] \cdot [G : U_2]$.

(ii) Ist $U \sqsubseteq G$, so existiert ein Normalteiler $N \sqsubseteq G$ mit $N \leq U \leq G$.

Beweis:

(i) Setze $U := U_1 \cap U_2$ und definiere

$$\varphi\colon G/U \longrightarrow G/U_1 \times G/U_2$$
$$gU \longmapsto (gU_1, gU_2)$$

Die Abbildung ist wohldefiniert: Angenommen, es gilt $\varphi(gU) \neq \varphi(hU)$ für $gU = hU$, dann ist ohne Einschränkung $gU_1 \neq hU_1$ und, da verschiedene Nebenklassen disjunkt sind, $g \notin hU_1$. Dann ist aber $g \neq hu$ für alle $u \in U \subseteq U_1$, also $gU \neq hU$, was ein Widerspruch ist.

Wir zeigen nun, dass φ injektiv ist. Da φ offensichtlich ein Homomorphismus ist, genügt es, $\ker(\varphi) = \{U\}$ zu zeigen. Sei also $gU \in \ker(\varphi)$, dann ist $(gU_1, gU_2) = (U_1, U_2)$. Also ist $g \in U_1 \cap U_2 = U$ und $gU = U$. Damit folgt:

$$[G : U_1 \cap U_2] = \#G/U \leq \#(G/U_1 \times G/U_2) = \#G/U_1 \cdot \#G/U_2 = [G : U_1] \cdot [G : U_2].$$

(ii) Setze

$$N := \bigcap_{g \in G} gUg^{-1}$$

Offensichtlich ist $N \leq U$ und N ein Normalteiler von G. Es bleibt zu zeigen, dass N endlichen Index in G hat. Dafür zeigen wir, dass nur endlich viele zu U konjugierte Untergruppen in G existieren:

Für festes $g \in G$ betrachte $U' := gUg^{-1}$. Ist $\{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq G$ ein vollständiges Repräsentantensystem von U in G, so gilt $gU = g_iU$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und damit $gUg^{-1} = g_iUg^{-1}$. Sei $ghg^{-1} \in U'$, dann existieren $x \in U$ mit $gh = g_ix$ und $y \in U$ mit $gx^{-1} = g_iy^{-1}$. Dann ist

$$ghg^{-1} = g_ixg^{-1} = g_i(gx^{-1})^{-1} = g_i(g_iy^{-1})^{-1} = g_iyg_i^{-1} \in g_iUg_i^{-1}.$$

Somit ist $U' \subseteq g_iUg_i^{-1}$. Analog zeigt man die andere Teilmengeninklusion. Also stimmt jede zu U konjugierte Untergruppe gUg^{-1} überein mit eine der Gruppen $g_iUg_i^{-1}, 1 \leq i \leq n$. Insbesondere ist der Schnitt, der N definiert, endlich und die Behauptung folgt mit (i). □

2.1 Affine isometrische Wirkungen

Im Folgenden führen wir den Begriff des affinen Hilbertraumes ein und betrachten isometrische Wirkungen von Gruppen auf diesen. Wir werden zunächst sehen, dass die Fixpunktmenge einer solchen Wirkung wiederum einen affinen Hilbertraum liefert. Im Anschluss konstruieren wir aus einer gegebenen Wirkung einer Untergruppe $U \sqsubseteq G$ mit endlichem Index eine weitere isometrische Wirkung von G auf dem affinen Hilbertraum der so genannten äquivarianten Abbildungen, welche für einen Beweis im nächsten Abschnitt wesentlich ist. Die folgenden Definitionen und die Konstruktion der induzierten Wirkung sind entnommen aus [BHV08, S. 74 f., 91 f.].

Definition 2.3 (transitive und reguläre Gruppenwirkung)
Sei $\Phi\colon G \to \mathrm{Sym}(X)$ eine Gruppenwirkung. Φ heißt **transitiv**, wenn für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ existiert, sodass $\Phi(g)(x) = y$. Ist dieses $g \in G$ eindeutig bestimmt, so heißt Φ **regulär**.

Beispiel

- Jede Gruppe G wirkt durch Linkstranslation $\Phi(g)(x) := gx$ auf sich selbst. Diese Wirkung ist regulär: Für je zwei $x, y \in G$ ist das eindeutige $g \in G$ mit $\Phi(g)(x) = y$ gegeben durch $g = yx^{-1}$.
- Jede Gruppe G wirkt auch durch Konjugation $\Phi(g)(x) := gxg^{-1}$ auf sich selbst; diese Wirkung ist jedoch im Allgemeinen nicht regulär, wie man im Falle einer abelschen Gruppe G erkennt.

Eine Gruppenwirkung $\Phi\colon G \to \mathrm{Sym}(X)$ ist genau dann transitiv, wenn für jedes $x \in X$ der Orbit $x^G := \Phi(G)(x) = \{\Phi(g)(x) : g \in G\}$ mit X übereinstimmt. In diesem Fall ist Φ genau dann regulär, wenn für jedes $x \in X$ der Stabilisator $G_x := \{g \in G : \Phi(g)(x) = x\}$ die triviale Gruppe ist. Ganz allgemein gilt, dass der für jedes $x \in X$ der Quotient G/G_x gleichmächtig zum Orbit x^G ist, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma 2.4 (Bahnensatz)
Sei $\Phi\colon G \to \mathrm{Sym}(X)$ eine Gruppenwirkung. Dann ist für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi\colon G/G_x &\longrightarrow x^G \\ g \cdot G_x &\longmapsto \Phi(g)(x) \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis:

wohldefiniert: Sei $gG_x = hG_x$, dann existiert ein $z \in G_x$ mit $hz \in gG_x$. Somit ist $g^{-1}h \in G_x$ und es folgt $\pi(gG_x) = \pi(gg^{-1}hG_x) = \pi(hG_x)$.

surjektiv: Klar, da $x^G = \{\Phi(g)(x) : g \in G\}$ nach Defintion.

injektiv: Seien $gG_x, hG_x \in G/G_x$ mit $\pi(gG_x) = \pi(hG_x)$. Dann gilt

$$\pi(g^{-1}hG_x) = \Phi(g^{-1}h)(x) = \Phi(g^{-1})(\Phi(h)(x)) = \Phi(g^{-1})(\Phi(g)(x)) = x = \pi(G_x),$$

also ist $g^{-1}h \in G_x$. Damit ist $gG_x = hG_x$. □

Definition 2.5 (Affiner Hilbertraum)
Sei X eine Menge und $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. X heißt (reeller) **affiner Hilbertraum**, wenn $(\mathcal{H}, +)$ regulär auf X wirkt vermöge

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{H} &\longrightarrow \mathrm{Sym}(X) \\ \xi &\longmapsto T_\xi. \end{aligned}$$

T_ξ heißt Translation. Für ein $x \in X$ schreiben wir $x + \xi$ für $T_\xi(x)$ und entsprechend $y - x$ für das eindeutige $\xi \in \mathcal{H}$ mit $x + \xi = T_\xi(x) = y$.

Bemerkung
Offensichtlich ist jeder Hilbertraum als affiner Hilbertraum auffassbar, da $(\mathcal{H}, +)$ auf $\mathcal{H}$ wirkt vermöge $T_\xi(x) := x + \xi$ für $x \in \mathcal{H}$.

Definition 2.6 (affine isometrische Wirkung)
Eine **affine isometrische Wirkung** einer endlich erzeugten Gruppe G auf einem affinen Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein Homomorphismus $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{Fix}(\Phi) := \{x \in \mathcal{H} : \Phi(g)(x) = x \text{ für alle } g \in G\}$$

die Menge der globalen Fixpunkte von Φ.

Proposition 2.7
Sei $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ eine affine isometrische Wirkung, die einen globalen Fixpunkt besitzt. Dann ist $\mathrm{Fix}(\Phi)$ ein affiner Hilbertraum und insbesondere $\mathrm{CAT}(0)$.

Beweis: Sei $x \in \mathrm{Fix}(\Phi)$ globaler Fixpunkt von Φ. Nach Korollar 1.9 ist $\mathrm{Fix}(\Phi(g))$ für jedes $g \in G$ ein affiner Unterraum von $\mathcal{H}$, da x ein Fixpunkt der Isometrie $\Phi(g)$ ist. Offensichtlich gilt $\mathrm{Fix}(\Phi) = \bigcap_{g\in G} \mathrm{Fix}(\Phi(g))$ und da ein nichtleerer Schnitt von affinen Unterräumen wieder ein affiner Unterraum ist und Fixpunktmengen abgeschlossen sind, folgt die Behauptung. □

Als weiteres Hilfsmittel betrachten wir nun Abbildungen von einer endlich erzeugten Gruppe in einen affinen Hilbertraum, die eine bestimmte Identität erfüllen. Im Folgenden sei dazu G eine endlich erzeugte Gruppe, $U \sqsubseteq G$, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbertraum und Φ eine affine isometrische Wirkung von U auf $\mathcal{H}$.

Definition 2.8 (äquivariante Abbildung)
Eine Abbildung $\varphi\colon G \to \mathcal{H}$ heißt **äquivariant**, wenn für alle $g \in G$ und $h \in U$ gilt:

$$\varphi(gh) = \Phi(h^{-1})(\varphi(g))$$

Wir setzen $\mathcal{M} := \{\varphi\colon G \to \mathcal{H} : \varphi \text{ ist äquivariant}\} \subseteq \mathcal{H}^G$.

Bemerkung
Der Begriff der äquivarianten Abbildung findet man in der Literatur oft auch in anderen Zusammenhängen, wobei dann zwischen Links- und Rechtswirkungen von Gruppen unterschieden wird. Im Fall einer Linkswirkung einer Gruppe G auf zwei Mengen X und Y heißt eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ äquivariant, falls für alle $g \in G$ und $x \in X$ gilt:

$$\varphi(g.x) = g.\varphi(x),$$

das heißt die Abbildung kommutiert mit der Gruppenwirkung. Im Fall einer Rechtswirkung heißt die Abbildung φ äquivariant, falls die Identität

$$\varphi(x.g) = \varphi(x).g^{-1}$$

erfüllt ist. Die oben genannte Definition einer äquivarianten Abbildung erhält man dadurch, dass man die Multiplikation $g \cdot h$ als Rechtswirkung der Untergruppe U auf die Gruppe G auffasst.

Als nächstes werden wir sehen, dass $\mathcal{M}$ ein affiner Hilbertraum ist und die affine isometrische Wirkung auf der Untergruppe U eine affine isometrische Wirkung auf $\mathcal{M}$ induziert. Da $U \sqsubseteq G$, ist G die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Nebenklassen $g_1U, \ldots g_nU$, wobei $n = [G : U]$. Jedes $g \in G$ ist somit auf eindeutige Art und Weise schreibbar als $g = g_i h_g$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und ein $h_g \in U$. Wir stellen zunächst fest, dass $\mathcal{M}$ nicht leer ist, indem wir ein $\xi \in \mathcal{H}$ fixieren und folgende Abbildung betrachten:

$$\begin{aligned} \varphi_\xi\colon G &\longrightarrow \mathcal{H} \\ g_i h_g &\longmapsto \Phi(h_g^{-1})(\xi) \end{aligned}$$

In der Tat ist diese Abbildung äquivariant, denn für beliebiges $g \in G$ und $h \in U$ gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_\xi(gh) = \varphi_\xi(g_i h_g h) &= \Phi(h^{-1}h_g^{-1})(\xi) = \Phi(h^{-1})(\Phi(h_g^{-1})(\xi)) \\ &= \Phi(h^{-1})(\varphi_\xi(g_i h_g)) = \Phi(h^{-1})(\varphi_\xi(g))\end{aligned}$$

Somit ist $\varphi_\xi \in \mathcal{M}$.

Proposition 2.9
$\mathcal{M}$ ist ein affiner Untervektorraum von $\mathcal{H}^G$.

Beweis: Wir zeigen, dass $\mathcal{M}^0 := \mathcal{M} - \varphi_\xi$ ein Untervektorraum von $\mathcal{H}^G$ ist: Seien $\alpha - \varphi_\xi, \beta - \varphi_\xi \in \mathcal{M}^0$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $\lambda_1(\alpha - \varphi_\xi) + \lambda_2(\beta - \varphi_\xi) = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\varphi_\xi - \varphi_\xi \in \mathcal{M}^0$. Für $g \in G$ und $h \in U$ beliebig ist:

$$\begin{aligned}&(\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\varphi_\xi)(gh) \\ &= \lambda_1 \cdot \Phi(h^{-1})(\alpha(g)) + \lambda_2 \cdot \Phi(h^{-1})(\beta(g)) + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot \Phi(h^{-1})(\varphi_\xi(g))\end{aligned}$$

Da $\Phi(h^{-1}) \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ nach Satz 1.8 affin ist, folgt mit Definition 1.7 (iv):

$$\begin{aligned}&= \Phi(h^{-1})(\lambda_1\alpha(g) + \lambda_2\beta(g) + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\varphi_\xi(g)) \\ &= \Phi(h^{-1})(\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\varphi_\xi)(g)\end{aligned}$$

Somit ist $\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\varphi_\xi$ äquivariant und damit $\lambda_1(\alpha - \varphi_\xi) + \lambda_2(\beta - \varphi_\xi) \in \mathcal{M}^0$. □

Für zwei feste Abbildungen $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ betrachte nun die Abbildung

$$\begin{aligned}\kappa := \kappa_{\alpha,\beta} \colon G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \langle \alpha(g) - \varphi_\xi(g), \beta(g) - \varphi_\xi(g) \rangle.\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist U-rechtsinvariant, das heißt für alle $g \in G, h \in U$ gilt $\kappa(gh) = \kappa(g)$, wie aus der Isometrieeigenschaft von Φ folgt (vgl. Bemerkung nach Definition 1.6):

$$\begin{aligned}\kappa(gh) &= \langle \alpha(gh) - \varphi_\xi(gh), \beta(gh) - \varphi_\xi(gh) \rangle \\ &= \langle \Phi(h^{-1})(\alpha(g)) - \Phi(h^{-1})(\varphi_\xi(g)), \Phi(h^{-1})(\beta(g)) - \Phi(h^{-1})(\varphi_\xi(g)) \rangle \\ &= \langle \alpha(g) - \varphi_\xi(g), \beta(g) - \varphi_\xi(g) \rangle = \kappa(g)\end{aligned}$$

Somit folgt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa} := \tilde{\kappa}_{\alpha,\beta}\colon G/U &\longrightarrow \mathbb{R}\\ g\cdot U &\longmapsto \kappa(g)\end{aligned}$$

repräsentantenunabhängig und wohldefiniert ist. Dadurch können wir den reellen Vektorraum $\mathcal{M}^0 = \{\varphi - \varphi_\xi : \varphi \in \mathcal{M}\}$ aus dem Beweis zu Prop. 2.9 mit dem Skalarprodukt

$$\langle \alpha - \varphi_\xi, \beta - \varphi_\xi\rangle := \sum_{g\in G/U} \tilde{\kappa}_{\alpha,\beta}(g), \quad \alpha,\beta \in \mathcal{M}$$

versehen, welches wohldefiniert ist, da U endlichen Index in G hat. Auf diese Weise wird $\mathcal{M}^0$ zu einem Hilbertraum und $\mathcal{M}$ zu einem affinen Hilbertraum: Die Vollständigkeit von M^0 folgt dadurch, dass das Skalarprodukt definiert ist als endliche Summe von Skalarprodukten auf $\mathcal{H}$.

Definition 2.10 (induzierte affine isometrische Wirkung)
Die Wirkung $\mathrm{Ind} := \mathrm{Ind}_U^G \Phi\colon G \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathcal{M})$ definiert durch

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_U^G \Phi(g)\colon \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M}\\ \varphi &\longmapsto \left[x \mapsto \varphi(g^{-1}x)\right]\end{aligned}$$

für $g \in G$ heißt die von Φ **induzierte affine isometrische Wirkung** auf $\mathcal{M}$.

Dass Ind tatsächlich eine Gruppenwirkung ist, ist leicht zu erkennen: Für beliebige $g, h \in G$ und $\varphi \in \mathcal{M}$ gilt

$$(\mathrm{Ind}(g)\circ \mathrm{Ind}(h))(\varphi) = \mathrm{Ind}(g)(x \mapsto \varphi(h^{-1}x)) = (x \mapsto \varphi(h^{-1}g^{-1}x)) = \mathrm{Ind}(gh)(\varphi),$$

also ist Ind ein Homomorphismus. Ferner ist Ind isometrisch, denn für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ und $g \in G$ gilt

$$\|\mathrm{Ind}(g)(\varphi) - \mathrm{Ind}(g)(\psi)\|^2 = \sum_{x\in G/U} \|\varphi(g^{-1}x) - \psi(g^{-1}x)\|^2 = \sum_{x\in G/U} \|\varphi(x) - \psi(x)\|^2 = \|\varphi - \psi\|^2.$$

2.2 Eigenschaft (FH)

Wir führen nun, wie bereits angekündigt, die Eigenschaft (FH) für endlich erzeugte Gruppen ein und beweisen, dass eine endlich erzeugte Gruppe genau dann diese Eigenschaft besitzt, wenn das für jede ihrer Untergruppen mit endlichem Index der Fall ist. Für die eine Implikation nutzen wir das Resultat aus dem letzten Abschnitt, dass die Fixpunktmenge einer affinen isometrischen

Wirkung ein Hilbertraum ist, sowie den Fixpunktsatz von Bruhat und Tits. Die andere Implikation folgt unter Zuhilfenahme der induzierten affinen isometrischen Wirkung: Besitzt diese einen globalen Fixpunkt, liefert sie uns auch einen globalen Fixpunkt der Untergruppenwirkung.

Definition 2.11 (Eigenschaft (FH))
Eine endlich erzeugte Gruppe G hat **Eigenschaft (FH)**, wenn jede affine isometrische Wirkung von G auf einen reellen Hilbertraum einen globalen Fixpunkt besitzt.

Satz 2.12
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und $U \sqsubseteq G$ eine Untergruppe mit endlichem Index und Eigenschaft (FH). Dann besitzt auch G die Eigenschaft (FH).

Beweis (vgl. [Var14, Kor. 1.2.9]): Sei $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ eine beliebige affine isometrische Wirkung auf einen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wir zeigen, dass Φ einen globalen Fixpunkt besitzt.
Nach Proposition 2.2 existiert ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit endlichem Index in G und $N \leq U \leq G$. Da U die Eigenschaft (FH) hat, besitzt $\Phi\big|_U : U \to \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ einen globalen Fixpunkt $\xi \in \mathcal{H}$, das heißt $\Phi(g)(\xi) = \xi$ für alle $g \in U$. Wegen $N \leq U$ ist ξ auch globaler Fixpunkt von $\Phi\big|_N : N \to \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$, das heißt die Menge $\mathrm{Fix}(\Phi\big|_N)$ ist nichtleer und nach Proposition 2.7 ein affiner Hilbertraum.
Betrachte nun die Wirkung

$$\begin{aligned} \Psi\colon G/N &\longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathrm{Fix}(\Phi\big|_N)) \\ gN &\longmapsto \Phi(g). \end{aligned}$$

Ψ ist repräsentantenunabhängig, denn: Gilt $gN = hN$, so ist $h = gn$ für ein $n \in N$. Damit ist

$$\Psi(hN)(x) = \Phi(gn)(x) = \Phi(g)(\underbrace{\Phi(n)(x)}_{=x}) = \Phi(g)(x) = \Psi(gN)(x)$$

für alle Fixpunkte $x \in \mathrm{Fix}(\Phi\big|_N)$. Ferner ist Ψ wohldefiniert, denn für alle $x \in \mathrm{Fix}(\Phi\big|_N)$ ist $\Psi(gN)(x) = \Phi(g)(x) =: y$ wieder ein Fixpunkt von $\Phi\big|_N$. Genauer: Da N Normalteiler in G, existiert für alle $n \in N$ und $g \in G$ ein $n' \in N$, sodass $ng = gn'$. Somit folgt:

$$\Phi(n)(y) = \Phi(n)(\Phi(g)(x)) = \Phi(g)(\underbrace{\Phi(n')(x)}_{=x}) = \Phi(g)(x) = y,$$

also ist $\Psi(gN) \in \mathrm{Isom}(\mathrm{Fix}(\Phi\big|_N))$.

Da $G \diagup N$ endlich ist, ist jeder Orbit von Ψ endlich und beschränkt. Nach Satz 1.4 besitzt Ψ somit einen globalen Fixpunkt $\overline{x} \in \mathrm{Fix}(\Phi|_N) \subseteq \mathcal{H}$ mit $\Psi(gN)(\overline{x}) = \overline{x}$ für alle $gN \in G \diagup N$. Dann ist $\overline{x}$ auch ein globaler Fixpunkt von Φ, denn es gilt

$$\Phi(g)(\overline{x}) = \Psi(gN)(\overline{x}) = \overline{x}$$

für alle $g \in G$. Da Φ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 2.13 ([BHV08, Prop. 2.5.7])
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe mit Eigenschaft (FH) und $U \sqsubseteq G$ eine Untergruppe mit endlichem Index. Dann besitzt U ebenfalls die Eigenschaft (FH).

Beweis: Sei $\Phi\colon U \to \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ eine beliebige affine isometrische Wirkung auf einen reellen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Da G die Eigenschaft (FH) besitzt, hat die induzierte affine isometrische Wirkung $\mathrm{Ind} := \mathrm{Ind}_U^G \Phi$ von G einen globalen Fixpunkt $\pi \in \mathcal{M}$, das heißt es gilt $\mathrm{Ind}(g)(\pi) = \pi$ für alle $g \in G$. Somit folgt für alle $g, x \in G$

$$\mathrm{Ind}(g)(\pi)(x) = \pi(g^{-1}x) = \pi(x),$$

also insbesondere $\mathrm{Ind}(h)(\pi)(e_G) = \pi(e_G)$ für alle $h \in U$. Da $\pi \in \mathcal{M}$ äquivariant ist, gilt

$$\pi(e_G) = \pi(h^{-1}) = \Phi(h)(\pi(e_G))$$

für alle $h \in U$. Somit besitzt Φ den globalen Fixpunkt $\pi(e_G)$. Da Φ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz liefert uns die Äquivalenz der beiden Eigenschaften (T) und (FH). In seiner ursprünglichen Form ist dieser für lokalkompakte und σ-kompakte Gruppen formuliert. Für die von uns betrachteten endlich erzeugten Gruppen sind diese beiden Eigenschaften aber gegeben.

Satz 2.14 (Delorme-Guichardet, [BHV08, Theorem 2.12.4])
Eine endlich erzeugte Gruppe besitzt genau dann Kazhdans Eigenschaft (T), wenn sie die Eigenschaft (FH) besitzt.

Der Beweis dieses Satzes benötigt weitere Erkenntnisse über affine isometrische Wirkungen und Darstellungen auf Hilberträumen und kann im Rahmen dieser Arbeit nicht geführt werden. Zusammen mit den Sätzen 2.12 und 2.13 erhalten wir unser Hauptergebnis dieses Kapitels:

Theorem A

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) G besitzt Eigenschaft (FH).

(ii) G besitzt Kazhdans Eigenschaft (T).

(iii) G besitzt eine Untergruppe mit endlichem Index und Eigenschaft (T) bzw. Eigenschaft (FH).

(iv) Jede Untergruppe von G mit endlichem Index besitzt Kazhdans Eigenschaft (T) bzw. Eigenschaft (FH).

3 Gruppenwirkungen auf kubischen Komplexen

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass endlich erzeugte Gruppen, die Kazhdans Eigenschaft (T) innehaben, eine weitere Fixpunkteigenschaft besitzen. Dazu betrachten wir kubische Komplexe und anschließend isometrische Wirkungen von Gruppen auf diesen. Abgeschlossen wird dieses Kapitel durch eine Einführung der Eigenschaften (FC) und (FA), die die Eigenschaft (T) impliziert.

3.1 Eine Einführung in kubische Komplexe

Wir beginnen mit einer Einführung des Begriffs des kubischen Komplexes. Dabei richten wir uns im Wesentlichen nach den Ausführung in [Sch13, S. 7 ff.].

Definition 3.1 (Würfel, Seite)
Eine **Seite** des n-Würfels $C = [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 1$, ist eine Teilmenge $F \subseteq C$ gegeben durch

$$F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n \text{ mit } F_i \in \{\{0\}, \{1\}, [0,1]\}.$$

Die auf C eingeschränkte euklidische Metrik des $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit d_C. Den 0-Würfel definieren wir als $[0,1]^0 := \{0\}$. Wir nennen $\dim(C) := n$ die **Dimension** von C. Offensichtlich sind nichtleere Schnitte von Seiten ebenfalls eine Seite von C.

Definition 3.2 (Kubischer Komplex)
Seien C, C' zwei Würfel mit zugehörigen Seiten $F \subseteq C, F' \subseteq C'$. Eine bijektive Isometrie $\varphi\colon F \to F'$ heißt **Klebung** von C und C'.
Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Würfeln (i. A. verschiedener Dimensionen) und $\mathcal{S}$ eine Familie von Klebungen von Würfeln in $\mathcal{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Kein Würfel ist mit sich selbst verklebt.

(ii) Je zwei Würfel aus $\mathcal{C}$ sind höchstens einmal miteinander verklebt.

Sei $\sim$ die durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow \text{ es existiert ein } \varphi \in \mathcal{S} \text{ mit } x \in \operatorname{dom}(\varphi) \text{ und } \varphi(x) = y$$

erzeugte Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung $\sqcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Dann definieren $\mathcal{C}$ und $\mathcal{S}$ den **kubischen Komplex** X durch

$$X := \left(\bigsqcup_{C \in \mathcal{C}} C \right) \Big/ \sim .$$

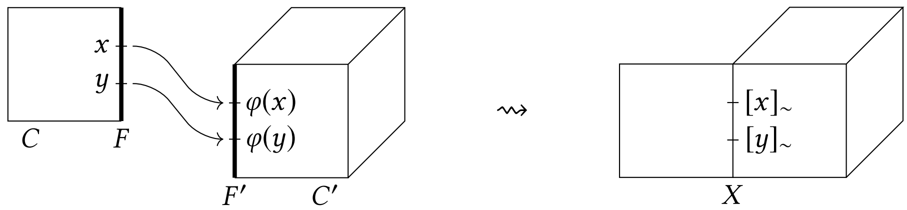

Abbildung 3.1: Konstruktion eines kubischen Komplexes durch Verklebung zweier Würfel.

Beispiel

- Simpliziale Bäume sind kubische Komplexe bestehend aus 0- und 1-Würfeln.
- $\mathbb{R}^n$ lässt sich auf kanonische Weise mit Einheitswürfeln $C_i \simeq [0,1]^n$ überdecken und kann daher als kubischer Komplex aufgefasst werden.
- Der Torus ist ebenfalls als kubischer Komplex auffassbar.

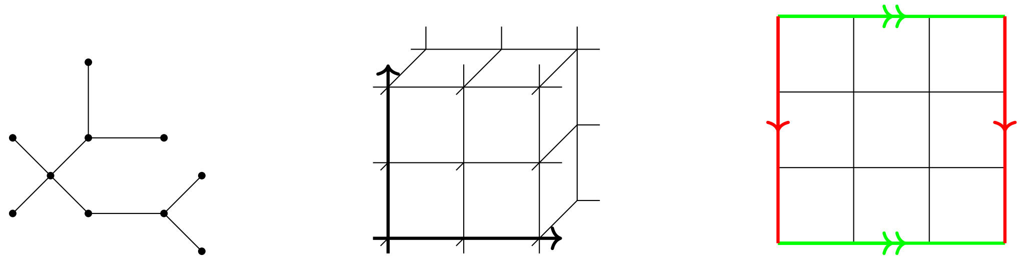

Abbildung 3.2: Beispiele für kubische Komplexe.

Ein kubischer Komplex X besitzt auf natürliche Weise zwei Metriken: Für zwei Punkte $x, y \in X$ nennen wir eine endliche Folge $\sigma = (x_0, \ldots, x_m)$ von Punkten $x_i \in X$ mit $x_0 = x, x_m = y$ einen **Weg** von x nach y, wenn für alle i mit $0 \leq i \leq m-1$ ein Würfel C_i von X existiert mit $x_i, x_{i+1} \in C_i$.

Die Länge des Weges definieren wir als

$$\ell(\sigma) := \sum_{i=0}^{m-1} d_{C_i}(x_i, x_{i+1})$$

Finden wir für je zwei Punkte $x, y \in X$ stets einen solchen Weg, nennen wir X **wegzusammenhängend**. In diesem Fall können wir X mit der **Längenmetrik** versehen:

$$\begin{aligned} d_\ell \colon X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \inf\{\ell(\sigma) : \sigma \text{ ist Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } X\} \end{aligned}$$

Wir betrachten im Folgenden ausschließlich wegzusammenhängende, CAT(0) vollständige kubische Komplexe, das heißt kubische Komplexe, für die der metrische Raum (X, d_ℓ) CAT(0) und vollständig ist.

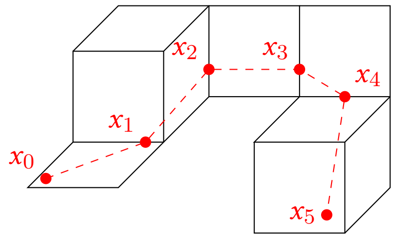

Abbildung 3.3: Ein Weg von x_0 nach x_5.

Für dei zweite Metrik eines kubischen Komplexes (X, d_ℓ) betrachten wir das 1-Skelett $X^{(1)}$, bestehend aus den Ecken und Kanten der einzelnen Würfel von X (das heißt aus den Seiten der Dimension 0 und 1), sowie das 0-Skelett $X^{(0)}$, welches aus den Eckpunkten der Würfel besteht. $X^{(1)}$ kann selbst als kubischer Komplex der Dimension 1 aufgefasst werden. Die **simpliziale Metrik** von X ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} D \colon X^{(0)} \times X^{(0)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \inf\{\ell(\sigma) : \sigma \text{ ist Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } X^{(1)}\} \end{aligned}$$

Die simpliziale Metrik ordnet zwei Eckpunkten x und y von X die Länge des kürzesten Pfades zwischen x und y über die Kanten von X zu.

Bemerkung

Offensichtlich ist D eine Metrik, da D mit der Längenmetrik auf dem kubischen Komplex $X^{(1)}$ (eingeschränkt auf $X^{(0)}$) übereinstimmt. Insbesondere gilt $d_\ell(x,y) \leq D(x,y)$ für alle $x, y \in X^{(0)}$, da jeder Weg in $X^{(1)}$ auch ein Weg in X ist.

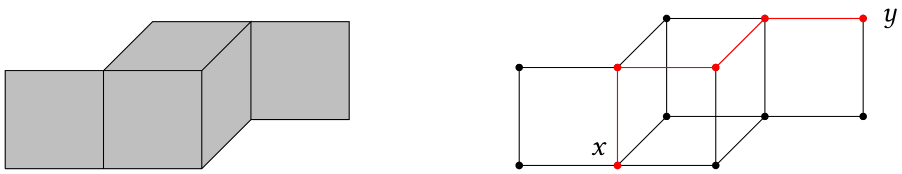

Abbildung 3.4: Ein kubischer Komplex und sein 1-Skelett. Es gilt $D(x, y) = 4$.

Definition 3.3 (Hyperebenen in kubischen Komplexen)
Sei X ein kubischer Komplex. Betrachte die durch

$$e \parallel e' \quad :\Leftrightarrow \quad e \text{ liegt gegenüber } e' \text{ in einem 2-Würfel von } X$$

erzeugte Äquivalenzrelation auf der Menge der Kanten (1-Würfel) von X. Zwei Kanten e, e' heißen **quadratäquivalent**, wenn $e \parallel e'$ gilt.
Der i-te **Mittelwürfel** von $C := [0,1]^n$ für $1 \leq i \leq n$ ist gegeben durch

$$M_i := \left\{ x \in C : x_i = \frac{1}{2} \right\} = [0,1]^{i-1} \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times [0,1]^{n-i}.$$

Ein Mittelwürfel M in X heißt **transversal** zu e, wenn $M \cap X^{(1)}$ aus Mittelpunkten von zu e quadratäquivalenten Kanten besteht. In diesem Fall schreiben wir $M \pitchfork e$.
Die Vereinigung $H(e)$ aller zu e transversalen Mittelwürfel heißt **Hyperebene** zu e.

$$H(e) := \bigcup_{M \pitchfork e} M$$

Eine Hyperebene H in einem vollständigen CAT(0) kubischen Komplex X partitioniert X in die drei disjunkten Teilmengen H, U^+ und U^-, wie im Bild unten zu sehen ist (vgl. auch [Sch13, Prop. 3.4] und [Sag95, Prop. 4.10]). U^+ und U^- bezeichnen wir als **Halbräume** zu H.

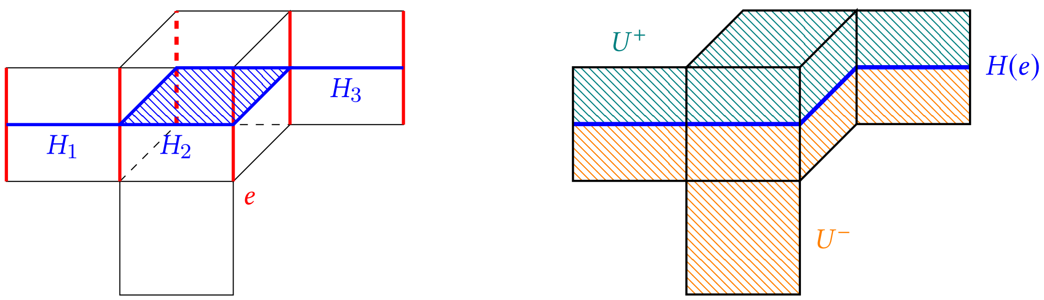

Abbildung 3.5: Die Hyperebene zu e ist gegeben durch $H(e) = H_1 \cup H_2 \cup H_3$.
Es gilt $X = U^+ \cup H(e) \cup U^-$.

Beispiel

- In einem Baum sind Mittelwürfel gerade die Mittelpunkte der Kanten. Da in einem Baum keine 2-Würfel existieren, gibt es zu einer Kante e keine weiteren quadratäquivalenten Kanten. Demzufolge ist der Mittelpunkt von e die Hyperebene zu e.

- Im $\mathbb{R}^n$ sind die Hyperebenen achsenparallele Ebenen der Kodimension 1, also affine Untervektorräume der Form $H_{i,k} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = k - 0.5\}$ mit $1 \leq i \leq n$ und $k \in \mathbb{Z}$.

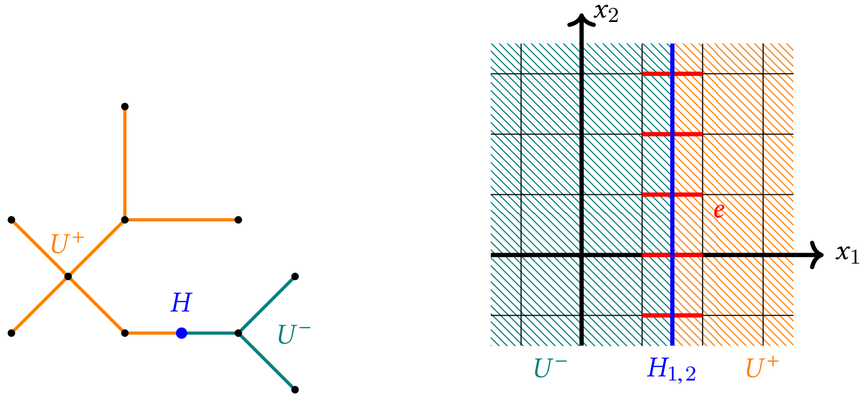

Abbildung 3.6: Beispiele für Hyperebenen in Bäumen und im $\mathbb{R}^2$.

3.2 Eigenschaft (FC)

In diesem Abschnitt möchten wir auf das von Niblo und Reeves formulierte Resultat über Gruppenwirkungen von Gruppen mit Eigenschaft (T) auf vollständige CAT(0) kubische Komplexe eingehen. Wir orientieren uns dabei an dem Vorgehen in [NR97], wofür wir unter anderem den Begriff des bedingt negativen Kerns und eine weitere äquivalente Charakterisierung der Eigenschaft (T) verwenden.

Definition 3.4 (Zelluläre Gruppenwirkung)
Seien X, Y zwei kubische Komplexe. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ heißt **zellulär**, wenn für jeden Würfel $C \subseteq X$ mit $\dim(C) = n$ das Bild $\varphi(C)$ ein Würfel in Y ist mit $\dim(\varphi(C)) \leq n$.
Eine Gruppenwirkung $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ einer Gruppe G heißt **zellulär**, wenn die Abbildung $\Phi(g)$ zellulär ist für alle $g \in G$. Insbesondere gilt dann $\Phi(g)(x_0) \in X^{(0)}$ für alle $x_0 \in X^{(0)}$.

Definition 3.5 (Eigenschaft (FC))
Eine Gruppe G hat **Eigenschaft (FC)**, wenn jede zelluläre Wirkung $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ von G auf einen vollständigen $\mathrm{CAT}(0)$ kubischen Komplex X einen globalen Fixpunkt besitzt.

Definition 3.6 (bedingt negativ definiter Kern)
Sei X eine Menge. Ein **bedingt negativ definiter Kern** auf X ist eine Abbildung $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $x \in X$ ist $f(x, x) = 0$.

(2) Für alle $x, y \in X$ ist $f(x, y) = f(y, x)$.

(3) Für jede endliche Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ gilt

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_i \lambda_j f(x_i, x_j) \leq 0$$

Ein bedingt negativ definiter Kern f auf einer Gruppe G ist zusätzlich linksinvariant, das heißt er erfüllt die folgende Eigenschaft:

(4) Für alle $g, h, k \in G$ gilt $f(gh, gk) = f(h, k)$.

Satz 3.7 ([BHV08, Theorem 2.10.4])
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. G hat genau dann die Eigenschaft (T), wenn jeder bedingt negativ definite Kern auf G beschränkt ist.

Die Aussage ist in [BHV08] ursprünglich für allgemeine topologische Gruppen und die Eigenschaft (FH) anstelle der Eigenschaft (T) formuliert. Zusammen mit Theorem A folgt aber die für uns relevante Aussage über die von uns betrachteten endlich erzeugten Gruppen.
Sei nun (X, d_ℓ) ein vollständiger $\mathrm{CAT}(0)$ kubischer Komplex und G eine endlich erzeugte Gruppe, die zellulär auf X wirkt. Wir halten nun einige Eigenschaften der simplizialen Metrik fest, die wir für den Beweis des Hauptresultats dieses Kapitels benötigen.

Lemma 3.8 (Eigenschaften der simplizialen Metrik)

(i) Es gilt $D(x, y) = \sum\limits_{U} \chi_U(x) \cdot (1 - \chi_U(y))$, wobei U über alle Halbräume von X läuft und χ_U die charakteristische Funktion von U ist.

(ii) D ist ein bedingt negativ definiter Kern auf $X^{(0)}$.

(iii) D ist invariant bezüglich jeder Wirkung Φ von G auf $X^{(0)}$, das heißt

$$D(\Phi(g)(x), \Phi(g)(y)) = D(x, y) \quad \forall g \in G, x, y \in X^{(0)}$$

Beweis (vgl. [NR97, Technical Lemma]):

(i) Seien $x, y \in X^{(0)}$ beliebig. Sageev hat in [Sag95] gezeigt, dass jeder kürzeste Weg σ von x nach y in $X^{(1)}$ jede Hyperebene von X höchstens einmal schneidet. Da die geschnittenen Hyperebenen gerade aus Mittelwürfeln bestehen, die transversal zu den zu σ gehörenden Kanten sind, folgt, dass jede Kante von σ genau eine Hyperebene schneidet. Demzufolge ist die Länge von σ gegeben durch die endliche Anzahl an Hyperebenen zwischen x und y. Diese Hyperebenen liefern genau diejenigen Halbräume von X die entweder x oder y enthalten (x und y liegen nicht auf einer Hyperebene, da diese die Kanten nur in ihren Mittelpunkten schneiden und nicht in Punkten aus $X^{(0)}$). Jede Hyperebene liefert zwei Halbräume: Einen Halbraum $U^+ \subseteq X$ mit $x \in U^+, y \notin U^+$, und einen Halbraum $U^- \subseteq X$ mit $x \notin U^-, y \in U^-$.

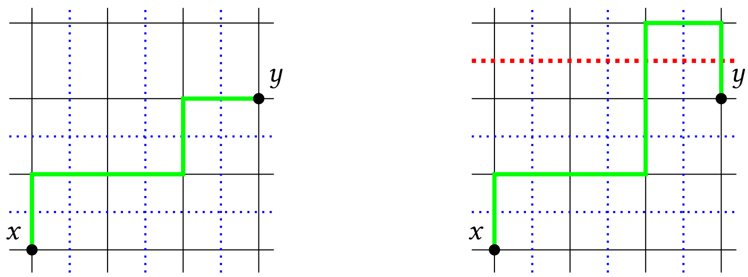

Abbildung 3.7: Links: Ein kürzester Weg zwischen x und y. Rechts: Ein längerer Weg, der eine Hyperebene zwei Mal schneidet.

Somit stimmt die Anzahl der Hyperebenen zwischen x und y überein mit der Anzahl der Halbräume von X, die x enthalten und y nicht. Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \inf\{\ell(\sigma) : \sigma \text{ ist Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } X^{(1)}\} \\ &= \#\{H \subseteq X : H \text{ ist Hyperebene zwischen } x \text{ und } y\} \\ &= \#\{U \subseteq X \text{ Halbraum} : x \in U, y \notin U\} \\ &= \sum_{\substack{U \subseteq X \\ \text{Halbraum}}} \underbrace{\chi_U(x) \cdot (1 - \chi_U(y))}_{=1 \Leftrightarrow x \in U \wedge y \notin U} \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen sind die Eigenschaften (1), (2) und (3) aus Definition 3.6.
(1) und (2) sind klarerweise erfüllt, da D eine Metrik ist. Sei also $V := \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X^{(0)}$ endlich sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Dann ist

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_i \lambda_j D(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sum_U \chi_U(x_i)(1 - \chi_U(x_j))$$

Da für jedes Paar $(x_i, x_j) \in V \times V$ höchstens endlich viele Hyperebenen zwischen x_i und x_j verlaufen, existieren insgesamt nur endlich viele Halbräume $U \subseteq X$, für die der Ausdruck $\chi_U(x_i) \cdot (1 - \chi_U(x_j))$ in der hinteren Summe nicht verschwindet. Insbesondere ist die hintere Summe endlich. Bezeichnen wir jene Halbräume mit $U_1, \dots, U_m$, ermöglicht dies folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\sum_{k=1}^{m}\chi_{U_k}(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\sum_{k=1}^{m}\chi_{U_k}(x_i)\cdot\chi_{U_k}(x_j)\\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j}_{=0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{k=1}^{m}\chi_{U_k}(x_i) - \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\chi_{U_k}(x_i)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\chi_{U_k}(x_j)\\
&= 0 - \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\chi_{U_k}(x_i)\right)^2 \le 0
\end{aligned}$$

(iii) Wie oben zur Definition bemerkt, stimmt die simpliziale Metrik D auf $X^{(0)}$ mit der Längenmetrik $d_{X^{(1)}}$ von $X^{(1)}$ eingeschränkt auf $X^{(0)}$ überein. Da $(X^{(1)}, d_{X^{(1)}})$ ein kubischer Komplex ist, vermittelt Φ auch eine zelluläre (und damit isometrische) Wirkung $\widetilde{\Phi}$ auf $X^{(1)}$ vermöge $\widetilde{\Phi}(g) := \Phi(g)\big|_{X^{(1)}}$, das heißt für alle $x, y \in X^{(0)} \subseteq X^{(1)}$ und $g \in G$ gilt

$$D(\Phi(g)(x), \Phi(g)(y)) = d_{X^{(1)}}(\widetilde{\Phi}(g)(x), \widetilde{\Phi}(g)(y)) = d_{X^{(1)}}(x, y) = D(x, y) \qquad \square$$

Bevor wir zum Theorem kommen, das diesen Abschnitt abschließt, erwähnen wir ein Resultat von Gerasimov. Dieses ist ein Korollar aus dem Bruhat-Tits-Fixpunktsatz und wird uns im folgenden Beweis die Existenz eines Fixpunktes liefern.

Satz 3.9 (Gerasimov [Cor13, Lemma 5.18])
Sei $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine zelluläre Wirkung einer Gruppe G auf einen $\mathrm{CAT}(0)$ kubischen Komplex X. Existiert ein $x \in X$ mit beschränktem Orbit, so hat Φ einen globalen Fixpunkt.

Theorem B
Sei X ein vollständiger $\mathrm{CAT}(0)$ kubischer Komplex und G eine endlich erzeugte Gruppe, die die Kazhdan-Eigenschaft (T) erfüllt. Dann hat jede zelluläre Wirkung von G auf X einen globalen Fixpunkt. Mit anderen Worten: Besitzt G die Eigenschaft (T), dann ebenfalls die Eigenschaft (FC).

Beweis (vgl. [NR97, Theorem B]): Sei $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine beliebige zelluläre Wirkung von G auf X. Dann ist $\Phi\big|_{X^{(0)}}\colon G \to \mathrm{Isom}(X^{(0)})$ eine zelluläre Wirkung auf dem 0-Skelett von X. Wir fixieren ein $v \in X^{(0)}$ beliebig und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f_v\colon G \times G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (g,h) &\longmapsto D(\Phi(g)(v), \Phi(h)(v)) \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass f_v ein bedingt negativ definiter Kern auf G ist. Die Eigenschaften (1), (2) und (3) sind klarerweise erfüllt, da D ein bedingt negativ definiter Kern ist. Die Linksinvarianz von f_v folgt aus der Invarianz von D: Für beliebige $g, h, k \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} f_v(gh, gk) &= D(\Phi(gh)(v), \Phi(gk)(v)) \\ &= D(\Phi(g)(\Phi(h)(v)), \Phi(g)(\Phi(k)(v))) \\ &= D(\Phi(h)(v), \Phi(k)(v)) \\ &= f_v(h,k) \end{aligned}$$

Die Gruppe G hat Eigenschaft (T), also ist f_v beschränkt, das heißt die Menge $f_v(G \times G) = D(\Phi(G)(v) \times \Phi(G)(v))$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$. Damit ist der Orbit $\Phi(G)(v)$ von v beschränkt bezüglich D und wegen $d_\ell \leq D$ auch bezüglich d_ℓ. Nach Voraussetzung ist (X, d_ℓ) $\mathrm{CAT}(0)$. Nach Satz 3.9 folgt somit die Existenz eines globalen Fixpunktes. □

Aus dem Theorem folgt unmittelbar, dass jede Gruppe mit Kazhdan-Eigenschaft (T) eine weitere Fixpunkteigenschaft besitzt: Da simpliziale Bäume ebenfalls vollständige $\mathrm{CAT}(0)$ kubische Komplexe sind, folgt aus der Eigenschaft (T) somit auch die von Serre formulierte Eigenschaft (FA):

Korollar 3.10 (Eigenschaft (FA))
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, die die Eigenschaft (T) besitzt. Dann besitzt G auch die Eigenschaft (FA), das heißt jede zelluläre Wirkung von G auf einen simplizialen Baum besitzt einen globalen Fixpunkt (in der geometrischen Realisierung).

4 Freie Gruppen und ihre Automorphismen

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(F_3)$ nicht Kazhdans Eigenschaft (T) besitzt. Dafür geben wir zunächst eine Einführung in freie Gruppen und erwähnen elementare Eigenschaften ihrer Untergruppen und Automorphismen. Im Anschluss konstruieren wir eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(F_3)$. Unter Zuhilfenahme der Erkenntnisse aus den vorigen Kapiteln zeigen wir schließlich das Hauptresultat dieser Arbeit.

4.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Definition 4.1 (freie Gruppe, [Bog08, Def. 3.1])
Sei F eine Gruppe und $B \subseteq F$. F heißt **frei** über B, wenn jedes $g \in F$ genau eine Darstellung der Form

$$g = b_1^{r_1} b_2^{r_2} \cdots b_n^{r_n} \tag{$*$}$$

besitzt mit $n \in \mathbb{N}_0, b_i \in B, r_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $b_i \neq b_{i+1}$. Eine solche Darstellung heißt **reduziert** über B und B heißt **Basis** oder **freies Erzeugendensystem** von F.

Bemerkung
Die reduzierte Darstellung des neutralen Elements von F ist das leere Produkt, das heißt es ist $n = 0$ in $(*)$.

Es ist ein bekanntes Resultat, dass alle Basen einer freien Gruppe dieselbe Kardinalität aufweisen (vgl. [Bog08, Theorem 3.8]). Ist F frei über B, so bezeichnen wir mit $\mathrm{rk}(F) := \#B$ den **Rang** von F. Ferner sind zwei freie Gruppen genau dann isomorph, wenn ihre Ränge übereinstimmen (vgl. [Bog08, Kor. 3.10]). Daher ist es sinnvoll, für $n \in \mathbb{N}$ von *der* freien Gruppe F_n vom Rang n zu sprechen.

Beispiel
Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist frei über $B = \{1\}$, da jedes $g \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ die eindeutige reduzierte Darstellung $g = r \cdot 1$ mit $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ besitzt. Also ist $F_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Gruppenhomomorphismen auf freien Gruppen lassen sich – analog zu linearen Abbildungen auf Vektorräumen – durch die Bilder der Basiselemente bereits eindeutig beschreiben, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 4.2
Sei F frei über B, G eine weitere Gruppe und $\varphi\colon F \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist φ durch das Bild von B bereits eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien $\varphi, \psi\colon F \to G$ Homomorphismen mit $\varphi\big|_B = \psi\big|_B$ sowie $x \in F$ beliebig. Ist $x = b_1^{r_1} \cdots b_n^{r_n}$ die reduzierte Darstellung von x, so gilt

$$\varphi(x) = \varphi(b_1)^{r_1} \cdots \varphi(b_n)^{r_n} = \psi(b_1)^{r_1} \cdots \psi(b_n)^{r_n} = \psi(x).$$

Also ist $\varphi = \psi$. □

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Arbeit mit freien Gruppen ist der folgende Satz von Nielsen und Schreier. Dieser besagt nicht nur, dass Untergruppen freier Gruppen ebenfalls frei sind, sondern liefert ebenfalls eine Formel, mit der man den Rang der Untergruppe bestimmen kann.

Satz 4.3 (Nielsen-Schreier, [LS01, Prop. 3.9])
Ist F_n die freie Gruppe vom Rang $n \in \mathbb{N}$ und $U \leq F_n$ eine Untergruppe, dann ist U ebenfalls frei. Ist U zusätzlich von endlichem Index, so ist U vom Rang $[F_n : U] \cdot (n-1) + 1$.

Aus diesem Satz folgt allgemein, dass Untergruppen mit endlichen Index von endlich erzeugten Gruppen ebenfalls endlich erzeugt sind:

Korollar 4.4
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und $U \sqsubseteq G$. Dann ist auch U endlich erzeugt.

Beweis: Sei $G := \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $U \sqsubseteq G$. Betrachte die freie Gruppe $F_n = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$. Offensichtlich ist die Abbildung $f\colon F_n \twoheadrightarrow G$ mit $f(b_i) = g_i$ ein Epimorphismus, somit existiert ein Isomorphismus $\varphi\colon F_n/\ker(f) \to G$. Daher existiert eine Untergruppe $H \leq F_n$ mit $H/\ker(f) = \varphi^{-1}(U)$, das heißt $H/\ker(f)$ ist isomorph zu U. Also existiert ein Epimorphismus $\eta\colon H \twoheadrightarrow U$. Ferner ist H von endlichem Index in F_n: Analog zum zweiten Isomorphiesatz existiert eine Bijektion

$$G/U \simeq {}^{(F_n/\ker(f))}\!/\!_{(H/\ker(f))} \longrightarrow F_n/H,$$

daher gilt $[F_n : H] = [G : U]$. Da H nach Satz 4.3 somit frei und endlich erzeugt ist, folgt $H = \langle h_1, \ldots, h_k \rangle$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und damit $U = \langle \eta(h_1), \ldots, \eta(h_k) \rangle$. □

Wir legen nun Augenmerk auf die Automorphismen von freien Gruppen mit endlichem Rang. Diese sind bijektive Homomorphismen einer freien Gruppe F_n auf sich und bilden eine Gruppe, die wir mit $\mathrm{Aut}(F_n)$ bezeichnen. Das Produkt zweier Automorphismen $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(F_n)$ ist definiert durch $\alpha\beta := \beta \circ \alpha$. Für den Kommutator nutzen wir die Notation $[\alpha, \beta] := \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$. Ein Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_n)$ heißt **innerer Automorphismus**, falls es ein $z \in F_n$ gibt, sodass α von der Gestalt $\alpha(x) = z^{-1}xz$ ist für alle $x \in F_n$. Offensichtlich bilden die inneren Automorphismen eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(F_n)$, die wir mit $\mathrm{Inn}(F_n)$ bezeichnen.

Definition 4.5
Sei F_n frei über der Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$. Wir definieren die Abbildung $\Psi_n\colon \mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ wie folgt: Für einen Automorphismus $f \in \mathrm{Aut}(F_n)$ sei $\Psi_n(f) := (a_{ij})_{i,j}$ diejenige Matrix, bei der a_{ij} die Summe der Exponenten von x_j in $f(x_i)$ ist.

Nach [Bog08, Theorem 1.7] ist Ψ_n ein Epimorphismus, der in der Literatur häufig als kanonischer Homomorphismus $\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ bezeichnet wird. Offenbar wird jeder innere Automorphismus von F_n durch Ψ_n auf die Einheitsmatrix $\mathrm{id} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ abgebildet, das heißt es ist $\mathrm{Inn}(F_n) \subseteq \ker(\Psi_n)$.

Beispiel
Sei $F_3 := \langle a, b, c \rangle$. Für $f \in \mathrm{Aut}(F_3)$ gegeben durch

$$f(a) = a^{-1} \qquad f(b) = ba \qquad f(c) = ca^2$$

gilt

$$\Psi_3(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Eine Untergruppe von Aut(F$_3$) mit endlichem Index

Im Folgenden betrachten wir die freie Gruppe F_3 und fixieren $\{a, b, c\}$ als Basis von F_3. Unser Ziel ist nun, eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(F_3)$ zu konstruieren, von der wir zeigen können, dass sie nicht die von Serre formulierte Eigenschaft (FA) hat. Daraus folgt unmittelbar mit den Resultaten aus den vorigen beiden Kapiteln, dass $\mathrm{Aut}(F_3)$ nicht die Eigenschaft (T) besitzen kann. Die folgende Konstruktion richtet sich im Wesentlichen nach [BV07, 2] und stammt aus einem Beweis von Grunewald und Lubotzky.

Wir bezeichnen die zweielementige Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ kurz mit $\mathbb{Z}_2$. Nach Lemma 4.2 existieren genau 7 nichttriviale (und damit surjektive) Homomorphismen $f_1, \dots, f_7 \colon F_3 \to \mathbb{Z}_2$. Da jeder Normalteiler der Kern eines Gruppenhomomorphismus und jede Untergruppe mit Index 2 ein Normalteiler ist, folgt mit dem Homomorphiesatz für Gruppen, dass genau 7 Untergruppen $U_1 = \ker(f_1), \dots, U_7 = \ker(f_7)$ von F_3 mit Index 2 existieren:

$$\begin{tikzcd} F_3 \arrow[rr, two heads, "f_i"] \arrow[dr] & & \mathbb{Z}_2 \\ & F_3/U_i \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

Mit Proposition 4.3 folgt, dass diese den Rang 5 haben, das heißt $U_i \simeq F_5$ für alle $1 \leq i \leq 7$. Wir betrachten nun eine dieser Untergruppen genauer: Die Untergruppe $U_1 := \langle a, b, c^2, c^{-1}ac, c^{-1}bc \rangle$ von F_3 ist der Kern des Homomorphismus $f_1 \colon F_3 \to \mathbb{Z}_2$ mit $f_1(a) = f_1(b) = 0$ und $f_1(c) = 1$, denn $\ker(f_1)$ besteht aus allen Wörtern über a, b, c, in denen c insgesamt mit geradem Exponenten vorkommt, und genau diese Wörter lassen sich mit der angegebenen Basis von U_1 erzeugen. Im Folgenden nutzen wir die Bezeichnung

$$\mathrm{St}(U_1) = \langle f \in \mathrm{Aut}(F_3) : f(U_1) = U_1 \rangle \leq \mathrm{Aut}(F_3)$$

für die Stabilisatorgruppe von U_1. Diese wird von allen Automorphismen von F_3 erzeugt, die sich zu einem Automorphismus auf U_1 einschränken lassen. Jedes Element von $\mathrm{St}(U_1)$ lässt sich also als Element von $\mathrm{Aut}(F_5)$ auffassen. Weiter bezeichnen wir mit $\tau_c \in \mathrm{Inn}(F_3)$ den inneren Automorphismus gegeben durch $x \mapsto c^{-1}xc$. Dieser lässt sich nicht einschränken zu einem inneren Automorphismus von U_1, da sonst $c \in U_1$ wäre. Für den Kommutator von τ_c und einer Abbildung aus $\mathrm{St}(U_1)$ ist dies jedoch möglich:

Proposition 4.6
Für jedes $\varphi \in \mathrm{St}(U_1)$ ist $[\tau_c, \varphi]\big|_{U_1}$ ein innerer Automorphismus von U_1.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass für jedes $\varphi \in \mathrm{St}(U_1)$ ein $\alpha \in U_1$ existiert, sodass $[\tau_c, \varphi]\big|_{U_1}(x) = \alpha^{-1}x\alpha$ für alle $x \in U_1$.
Sei $\varphi \in \mathrm{St}(U_1)$ beliebig. Setze $\alpha := c^{-1} \cdot \varphi(c)$. Dann gilt für beliebiges $x \in U_1$:

$$\begin{aligned} [\tau_c, \varphi]\big|_{U_1}(x) &= \varphi \circ \tau_c \circ \varphi^{-1} \circ \tau_c^{-1}(x) = \varphi \circ \tau_c \circ \varphi^{-1}(cxc^{-1}) = \varphi(c^{-1}\varphi^{-1}(cxc^{-1})c) \\ &= \varphi(c^{-1})cxc^{-1}\varphi(c) = (c^{-1}\varphi(c))^{-1}x(c^{-1}\varphi(c)) = \alpha^{-1}x\alpha \end{aligned}$$

Da $\varphi \in \mathrm{St}(U_1)$ und $c \notin U_1$, ist $\varphi(c) \notin U_1$. Also ist c im Wort $\varphi(c)$ mit insgesamt ungeradem Exponenten und in $\alpha = c^{-1}\varphi(c)$ mit insgesamt geradem Exponenten enthalten. Somit ist $\alpha \in U_1$ und $[\tau_c, \varphi]\big|_{U_1} \in \mathrm{Inn}(U_1)$. □

Wir haben nun

$$\tau_c(a) = c^{-1}ac, \quad \tau_c(b) = c^{-1}bc, \quad \tau_c(c^2) = c^2, \quad \tau_c(c^{-1}ac) = (c^2)^{-1}ac^2, \quad \tau_c(c^{-1}bc) = (c^2)^{-1}bc^2$$

und somit

$$\Psi_5(\tau_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt $\Psi_5(\tau_c))^2 = \mathrm{id}$. Somit gilt $V_+ \cap V_- = \{0\}$ für die beiden Eigenräume $V_+ := \ker(\Psi_5(\tau_c) + \mathrm{id})$ und $V_- := \ker(\Psi_5(\tau_c) - \mathrm{id})$ von $\mathbb{Z}^5$. Eine Basis von V_+ ist gegeben durch $\{b_1 := (1,0,0,-1,0)^T, b_2 := (0,1,0,0,-1)^T\}$.

Bemerkung

Die Eigenwerttheorie aus der linearen Algebra lässt sich im Wesentlichen auf freie Moduln über kommutative Ringe übertragen. Somit ist es sinnvoll, die Untermoduln V_+ und V_- als Eigenräume von $\Psi_5(\tau_c)$ zu bezeichnen, da $\mathbb{Z}^5$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist.

Proposition 4.7

V_+ ist ein $\Psi_5(\varphi)$-invarianter Untermodul für alle $\varphi \in \mathrm{St}(U_1)$.

Beweis: Seien $\varphi \in \mathrm{St}(U_1)$ und $v \in V_+$ beliebig. Dann gilt $\Psi_5(\tau_c)(v) = -v$.
Nach Proposition 4.6 ist $[\tau_c, \varphi]\big|_{U_1} \in \ker(\Psi_5)$, somit gilt

$$\begin{aligned} \Psi_5(\tau_c^{-1}\varphi^{-1}\tau_c\varphi) = \Psi_5(\varphi\tau_c)^{-1}\Psi_5(\tau_c\varphi) &= \mathrm{id} \\ \Leftrightarrow \quad \Psi_5(\tau_c\varphi) &= \Psi_5(\varphi\tau_c). \end{aligned}$$

Damit folgt nun, dass $w := \Psi_5(\varphi)(v)$ wieder ein Element von V_+ ist:

$$\Psi_5(\tau_c)(w) = \Psi_5(\tau_c\varphi)(v) = \Psi_5(\varphi\tau_c)(v) = \Psi_5(\varphi)(-v) = -\Psi_5(\varphi)(v) = -w$$ □

Somit lässt sich jedes $\Psi_5(\varphi) \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ – aufgefasst als $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung – einschränken zu einem Element aus $\mathrm{GL}(V_+) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, was uns einen Homomorphismus $\theta\colon \mathrm{St}(U_1) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ liefert.

Proposition 4.8
Der oben konstruierte Homomorphismus

$$\begin{aligned} \theta\colon \operatorname{St}(U_1) &\longrightarrow \operatorname{GL}(V_+) \simeq \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}) \\ \varphi &\longmapsto \Psi_5(\varphi)\big|_{V_+} \end{aligned}$$

ist surjektiv.

Beweis: Nach [Zie81, Theorem 23.1] wird $\operatorname{GL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugt durch folgende Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen, dass diese im Bild von θ liegen: Betrachte $\varphi_A \in \operatorname{Aut}(F_3)$ gegeben durch

$$\varphi_A(a) = b^{-1}, \quad \varphi_A(b) = a, \quad \varphi_A(c) = c.$$

Wir haben

$$\varphi_A(a) = b^{-1}, \quad \varphi_A(b) = a, \quad \varphi_A(c^2) = c^2, \quad \varphi_A(c^{-1}ac) = (c^{-1}bc)^{-1}, \quad \varphi(c^{-1}bc) = c^{-1}ac.$$

und somit $\varphi_A \in \operatorname{St}(U_1)$. Weiter folgt

$$\Psi_5(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Nachrechnen zeigt man $\Psi_5(\varphi_A)(b_1) = b_2$ und $\Psi_5(\varphi_A)(b_2) = -b_1$, also ist $\theta(\varphi_A) = A$. Analog zeigt man $\theta(\varphi_B) = B$ und $\theta(\varphi_C) = C$ für $\varphi_B, \varphi_C \in \operatorname{Aut}(F_3), \operatorname{St}(U_1)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &\varphi_B(a) = b, \quad \varphi_B(b) = a^{-1}b, \quad \varphi_B(c) = c \\ &\varphi_C(a) = b, \quad \varphi_C(b) = a, \qquad \varphi_C(c) = c. \end{aligned}$$

□

Abschließend wollen wir zeigen, dass die Gruppe $\operatorname{St}(U_1)$ nicht die Eigenschaft (FA) besitzt, woraus letztlich das Hauptresultat dieser Arbeit folgt. Dazu zitieren wir zunächst eine von Serre selbst beobachtete äquivalente Charakterisierung der Eigenschaft (FA) für endlich erzeugte Gruppen.

Satz 4.9 ([Ser80, Theorem 15])
Eine endlich erzeugte Gruppe G hat genau dann die Eigenschaft (FA), wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i) G ist nicht isomorph zu einem nichttrivialen amalgamierten Produkt, das heißt $G \not\simeq A *_B C$ mit $B \neq A, C$.

(ii) G besitzt keine Untergruppe U mit $G/U \simeq \mathbb{Z}$.

Theorem C
Für die Untergruppe $\mathrm{St}(U_1) \leq \mathrm{Aut}(F_3)$ gilt:

(i) $\mathrm{St}(U_1)$ hat endlichen Index in $\mathrm{Aut}(F_3)$ und ist endlich erzeugt.

(ii) $\mathrm{St}(U_1)$ besitzt nicht die Eigenschaft (FA).

Beweis:

(i) Die Gruppe $\mathrm{Aut}(F_3)$ wirkt transitiv auf die Menge der Untergruppen $\mathcal{U} := \{U_1, \dots, U_7\}$ vermöge $\Phi(f)(U_i) := f(U_i)$. Diesbezüglich ist $\mathrm{St}(U_1)$ der Stabilisator von $U_1 \in \mathcal{U}$ und mit Lemma 2.4 folgt $[\mathrm{Aut}(F_3) : \mathrm{St}(U_1)] = \#\mathcal{U} = 7$. Nach [Var14, Prop. 1.1.2] ist $\mathrm{Aut}(F_3)$ und damit auch $\mathrm{St}(U_1) \sqsubseteq \mathrm{Aut}(F_3)$ endlich erzeugt, vgl. Korollar 4.4.

(ii) Wie oben gezeigt haben wir einen Epimorphismus $\theta\colon \mathrm{St}(U_1) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Nach [Zie81, Theorem 23.1] ist $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ isomorph zum amagalmierten Produkt $D_4 *_{D_2} D_6$. Somit folgt mit Satz 4.9, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ nicht die Eigenschaft (FA) besitzt. Es existiert also ein simplizialer Baum T und eine zelluläre Wirkung $\Phi\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Isom}(T)$, die keinen globalen Fixpunkt hat, das heißt für alle $x \in T$ existiert ein $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\Phi(g)(x) \neq x$. Wegen der Surjektivität von θ besitzt dann auch die zelluläre Wirkung $\Phi \circ \theta\colon \mathrm{St}(U_1) \to \mathrm{Isom}(T)$ keinen globalen Fixpunkt. Somit besitzt auch $\mathrm{St}(U_1)$ nicht die Eigenschaft (FA). □

Bemerkung
Der Beweis zeigt ganz allgemein, dass eine Gruppe G nicht die Eigenschaft (FA) besitzt, wenn eine Gruppe H ohne Eigenschaft (FA) und ein Epimorphismus $G \twoheadrightarrow H$ existieren.

Korollar 4.10
$\mathrm{Aut}(F_3)$ besitzt nicht Kazhdans Eigenschaft (T).

Beweis: Angenommen, $\mathrm{Aut}(F_3)$ besäße Kazhdans Eigenschaft (T). Dann hat nach Theorem A auch die Untergruppe $\mathrm{St}(U_1) \sqsubseteq \mathrm{Aut}(F_3)$ die Eigenschaft (T). Nach Theorem B besitzt $\mathrm{St}(U_1)$ dann auch die Eigenschaft (FC) und insbesondere die Eigenschaft (FA). Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Theorem C. □

Literatur

[BH99] Martin R. Bridson, André Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature.* Springer-Verlag, 1999.

[BHV08] Mohammed El Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, Alain Valette. *Kazhdan's Property (T).* Cambridge Univ. Press, 2008.

[Bog08] Oleg Bogopolski. *Introduction to Group Theory.* European Mathematical Society, 2008.

[BV07] Oleg Bogopolski, Ruslan Vikentiev. „Subgroups of small index in Aut(F_n) and Kazhdan's property (T)". In: Trends Math. (2010), S. 1–17.

[Cor13] Yves Cornulier. „Group actions with commensurated subsets, wallings and cubings". In: *ArXiv e-prints* (2013). arXiv: `1302.5982 [math.GR]`.

[LS01] Roger C. Lyndon, Paul E. Schupp. *Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag, 2001.

[McC97] James McCool. „A faithful polynomial representation on Out(F_3)". In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 106 (1989), S. 207–213.

[NR97] Graham Niblo, Lawrence Reeves. „Groups acting on CAT(0) cube complexes". In: *Geometry and Topology* 1 (1997).

[Sag95] Michah Sageev. „Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes". In: *Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series* 71.3 (1995).

[Sch13] Petra Schwer. *Lecture Notes on CAT(0) Cubical Complexes.* Münster, 2013.

[Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees.* Springer-Verlag, 1980.

[Väi03] Jussi Väisälä. „A proof of the Mazur-Ulam theorem“. In: *The American Mathematical Monthly* 110.7 (2003), S. 633–635.

[Var14] Olga Varghese. „Actions of Aut(F_n)“. Diss. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2014.

[Zie81] Heiner Zieschang. *Finite groups of mapping classes of surfaces.* Bd. 875. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1981, S. viii+340.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit

Aut(F_3) und Kazhdans Eigenschaft (T)

selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Ort, Datum) (Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Ort, Datum) (Unterschrift)