Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich 10
Mathematik und
Informatik

Kubische Komplexe, Kazhdans Eigenschaft (T) und Eigenschaft $\mathrm{F^sC_*}$

Phil Steinhorst
p.st@wwu.de

Seminar zur Gruppentheorie und Geometrie:
Kazhdan- und Haagerup-Eigenschaften von Gruppen

Sommersemester 2015

Einleitung

In den bisherigen Vorträgen des Seminars wurde der Begriff des $\mathrm{CAT}(0)$-Raumes sowie die Kazhdan-Eigenschaft (T) für Gruppen vorgestellt. Dieser Vortrag beschäftigt sich mit einem Resultat über Gruppen, die die Eigenschaft (T) erfüllen und ihre Wirkung auf spezielle kubische Komplexe.

Theorem
Sei X ein vollständiger $\mathrm{CAT}(0)$ kubischer Komplex und G eine endlich erzeugte Gruppe, die die Kazhdan-Eigenschaft (T) erfüllt. Dann hat jede simpliziale Wirkung Φ von G auf X einen globalen Fixpunkt, das heißt es existiert ein $x \in X$, sodass $\Phi(g)(x) = x$ für alle $g \in G$.

1 Kubische Komplexe

Wir beginnen mit einer Einführung des Begriffs des kubischen Komplexes. Dabei richten wir uns im Wesentlichen nach [Sch13].

Definition 1.1 (Würfel, Seite)
Eine **Seite** des n-Würfels $C = [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 1$, ist eine Teilmenge $F \subseteq C$ gegeben durch

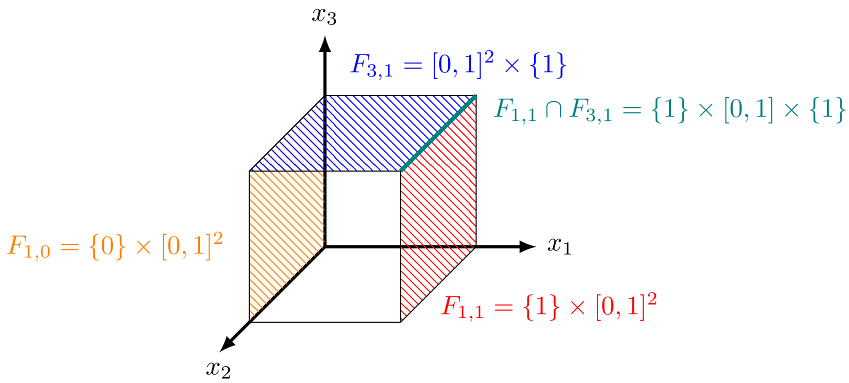
$$F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n \text{ mit } F_i \in \{\{0\}, \{1\}, [0,1]\}.$$

Nach Definition ist auch C eine Seite von C. Die auf C eingeschränkte euklidische Metrik des $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit d_C. Den 0-Würfel definieren wir als $[0,1]^0 := \{0\}$. Wir nennen $\dim(C) := n$ die Dimension von C.

Bemerkung
Offensichtlich sind nichtleere Schnitte von Seiten eines n-Würfels C wieder Seiten von C. Daher können wir Seiten der Kodimension 1 von C auch wie folgt definieren:

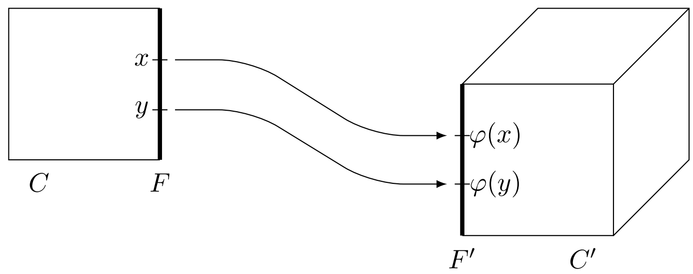
$$\begin{aligned} F_{i,e} &:= \{x \in C : x_i = e\} \text{ mit } e \in \{0,1\} \text{ und } i \in \{1,\dots n\} \\ &= [0,1]^{i-1} \times \{e\} \times [0,1]^{n-i} \end{aligned}$$

Seiten von höherer Kodimension sind dann nichtleere Schnitte von Seiten mit Kodimension 1.



Beispiele für Seiten eines 3-Würfels

Definition 1.2 (Klebung)
Seien C, C' zwei Würfel mit zugehörigen Seiten $F \subseteq C, F' \subseteq C'$. Eine bijektive Isometrie $\varphi\colon F \to F'$ heißt **Klebung** von C und C'.



Die Klebung φ ist eine Isometrie, d.h. es gilt $d(x,y) = d'(\varphi(x), \varphi(y))$.

Definition 1.3 (Kubischer Komplex)
Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Würfeln (i. A. verschiedener Dimensionen) und $\mathcal{S}$ eine Familie von Klebungen von Würfeln in $\mathcal{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Kein Würfel ist mit sich selbst verklebt.

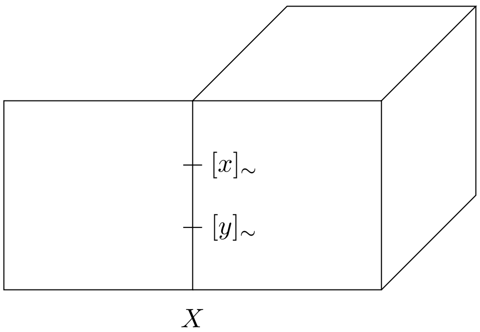
(ii) Je zwei Würfel aus $\mathcal{C}$ sind höchstens einmal miteinander verklebt.

Sei $\sim$ die durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow \text{ es existiert ein } \varphi \in \mathcal{S} \text{ mit } x \in \mathrm{dom}(\varphi) \text{ und } \varphi(x) = y$$

erzeugte Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung $\sqcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Dann definieren $\mathcal{C}$ und $\mathcal{S}$ den **kubischen Komplex** X durch

$$X := \left(\bigsqcup_{C \in \mathcal{C}} C \right) \big/ \sim .$$



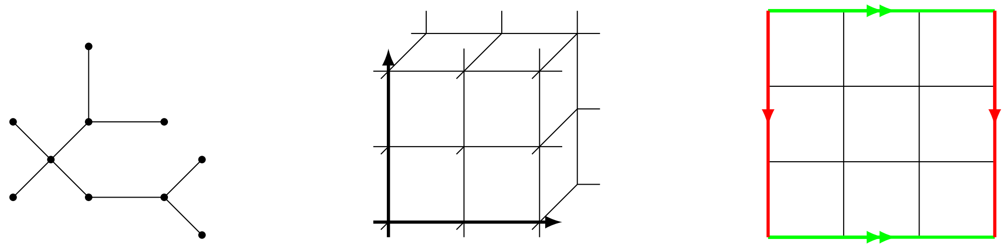
Der kubische Komplex, der durch $\mathcal{C} = \{C, C'\}$ und $\mathcal{S} = \{\varphi\}$ aus der vorigen Grafik definiert wird.

Es folgen Beispiele für kubische Komplexe.

(1) Bäume sind kubische Komplexe bestehend aus 0- und 1-Würfeln.

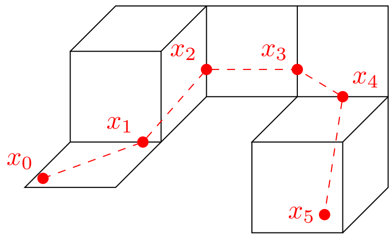
(2) $\mathbb{R}^n$ lässt sich auf kanonische Weise mit Einheitswürfeln $C_i \simeq [0,1]^n$ überdecken ("kubulieren") und kann daher als kubischer Komplex aufgefasst werden.

(3) Der Torus ist ebenfalls als kubischer Komplex auffassbar.



Beispiele für kubische Komplexe.

Definition 1.4 (Weg, wegzusammenhängend)
Sei X ein kubischer Komplex. Ein **Weg** von $x \in X$ nach $y \in X$ ist eine Folge $\sigma = (x_0, \ldots x_m)$ von Punkten $x_i \in X$ mit $x_0 = x$, $x_m = y$, sodass für alle i mit $0 \leq i \leq m-1$ ein Würfel $C_i \in \mathcal{C}$ existiert mit $x_i, x_{i+1} \in C_i$. X heißt **wegzusammenhängend**, falls für alle $x, y \in X$ ein Weg von x nach y existiert.



Die Punkte $x_1, \dots x_4$ des Weges $(x_0, \dots, x_5)$ liegen auf den "Klebestellen" der einzelnen Würfel.

Wir betrachten im folgenden, sofern nichts anderes gesagt wird, ausschließlich wegzusammenhängende kubische Komplexe. Sei $\sigma = (x_0, \dots, x_m)$ ein Weg von $x \in X$ nach $y \in X$. Da für alle i die Punkte x_i, x_{i+1} in einem $C_i \simeq [0,1]^{n_i} \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ enthalten sind, können wir diesem Punktepaar den Abstand $d_{C_i}(x_i, x_{i+1})$ zuordnen. Die Summe

$$\ell(\sigma) := \sum_{i=0}^{m-1} d_{C_i}(x_i, x_{i+1})$$

bezeichnen wir als **Länge** des Weges σ. Dies ermöglicht uns, X mit einer Metrik zu versehen:

Lemma 1.5 (Längenmetrik)
Sei X ein wegzusammenhängender kubischer Komplex. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \inf\{\ell(\sigma) : \sigma \text{ ist Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } X\} \end{aligned}$$

eine Metrik auf X und heißt **Längenmetrik**. Wir nutzen daher die Bezeichnung kubischer Komplex auch für den metrischen Raum (X, d).

Beweis
Symmetrie und $d(x,y) \geq 0$ ist klar, da die d_{C_i} Metriken sind. Die Dreiecksungleichung folgt leicht aus der Tatsache, dass für zwei Wege $\sigma = (x, x_1, \dots, x_n, y)$ von x nach y und $\tau = (y, y_1, \dots, y_m, z)$ von y nach z ein Weg $\tau \circ \sigma := (x, x_1, \dots, x_n, y, y_1, \dots, y_m, z)$ von x nach z gegeben ist. Zur Definitheit: Seien $x, y \in X$ beliebig. Ist $x = y$, dann existiert ein C_i mit $x, y \in C_i$ und $\sigma = (x, y)$ ist ein Weg von x nach y mit $\ell(\sigma) = d_{C_i}(x,y) = 0$. Also ist $d(x,y) = 0$. Sei umgekehrt $d(x,y) = 0$ gegeben, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Weg $\sigma_\varepsilon = (x_{\varepsilon,0}, \dots, x_{\varepsilon,n})$ von x nach y mit $\ell(\sigma_\varepsilon) < \varepsilon$. Dann ist aber auch $d_{C_{\varepsilon,i}}(x_{\varepsilon,i}, x_{\varepsilon,i+1}) < \varepsilon$ für alle $0 \leq i \leq n-1$. Da ε beliebig ist, folgt $d_{C_{\varepsilon,i}}(x_{\varepsilon,i}, x_{\varepsilon,i+1}) \to 0$ und somit $x_{\varepsilon,i} \to x_{\varepsilon,i+1}$ für $\varepsilon \to 0$. Also ist $x = y$. $\square$

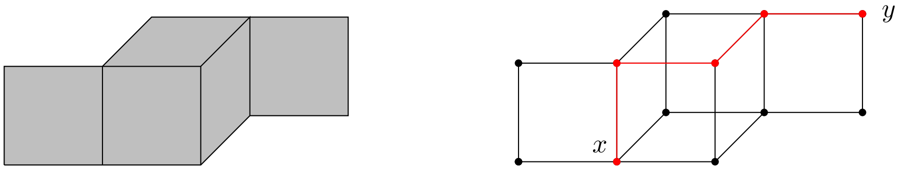
Für einen kubischen Komplex (X, d) betrachten wir das 1-Skelett $X^{(1)}$, bestehend aus den Ecken und Kanten der einzelnen Würfel von X (das heißt aus den Seiten der Dimension 0 und 1), sowie das 0-Skelett $X^{(0)}$, welches aus den Eckpunkten der Würfel besteht. $X^{(1)}$ kann selbst als kubischer Komplex der Dimension 1 aufgefasst werden.

Definition 1.6 (simpliziale Metrik)
Die Abbildung

$$\begin{aligned} D\colon X^{(0)} \times X^{(0)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \inf\{\ell(\sigma) : \sigma \text{ ist Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } X^{(1)}\} \end{aligned}$$

heißt die **simpliziale Metrik** auf X.

Bemerkung
Die simpliziale Metrik ordnet zwei Eckpunkten x und y von X die Länge des kürzesten Pfades zwischen x und y über die Kanten von X zu. Offensichtlich ist D eine Metrik, da D mit der Längenmetrik auf dem kubischen Komplex $X^{(1)}$ (eingeschränkt auf $X^{(0)}$) übereinstimmt. Insbesondere gilt $d(x,y) \leq D(x,y)$ für alle $x,y \in X^{(0)}$, da jeder Weg in $X^{(1)}$ auch ein Weg in X ist.

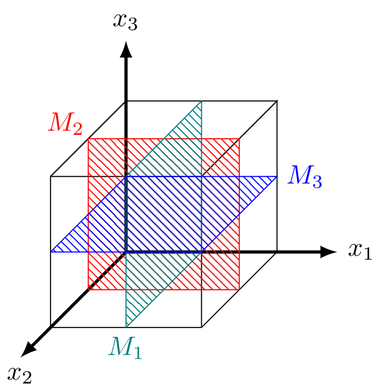


Ein kubischer Komplex und sein 1-Skelett. Es gilt $D(x,y) = 4$.

Die nun folgenden Begriffe werden im nächsten Abschnitt hilfreich sein, um einen geschlossenen Ausdruck für die simpliziale Metrik zu finden.

Definition 1.7 (Mittelwürfel)
Der i-te **Mittelwürfel** von $C := [0,1]^n$ für $\leq i \leq n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M_i &:= \left\{ x \in C : x_i = \frac{1}{2} \right\} \\ &= [0,1]^{i-1} \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times [0,1]^{n-i} \end{aligned}$$

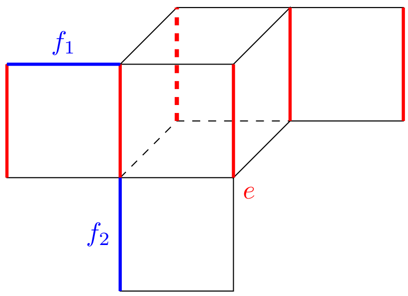


Mittelwürfel eines 3-Würfels

Definition 1.8 (quadratäquivalent, transversal)
Sei X ein kubischer Komplex. Betrachte die durch

$$e \parallel e' \quad :\Leftrightarrow \quad e \text{ liegt gegenüber } e' \text{ in einem 2-Würfel von } X$$

erzeugte Äquivalenzrelation auf der Menge der Kanten (1-Würfel) von X. Zwei Kanten e, e' heißen **quadratäquivalent**, wenn $e \parallel e'$ gilt.
Ein Mittelwürfel M in X heißt **transversal** zu $[e]_{\parallel}$ bzw. e, wenn $M \cap X^{(1)}$ aus Mittelpunkten von Kanten in $[e]_{\parallel}$ bzw. e besteht. In diesem Fall schreiben wir $M \pitchfork [e]_{\parallel}$ bzw. $M \pitchfork e$.

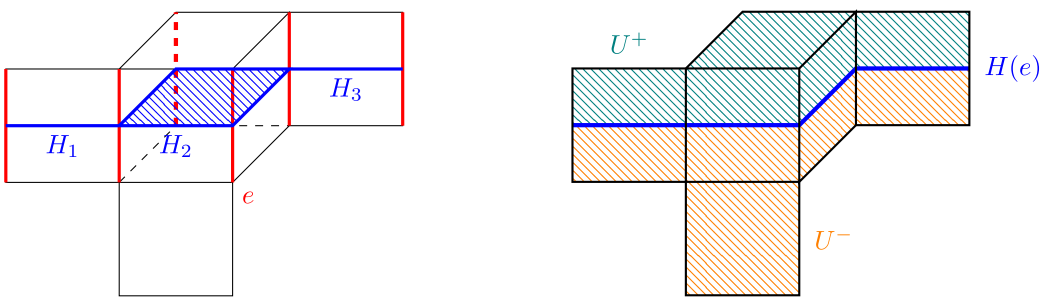


Rot markiert: Alle Kanten in $[e]_{\|}$. Die Kanten f_1 und f_2 sind nicht quadratäquivalent zu e.

Definition 1.9 (Hyperebene, Halbräume)
Sei e eine Kante in einem kubischen Komplex X. Die Vereinigung $H(e)$ aller zu $[e]_{\|}$ transversalen Mittelwürfel heißt **Hyperebene** zu e.

$$H(e) := \bigcup_{M \pitchfork [e]_{\|}} M$$

Eine Hyperebene H in einem vollständigen $\mathrm{CAT}(0)$ kubischen Komplex X partitioniert X in die drei disjunkten Teilmengen H, U^+ und U^-, wie im Bild unten zu sehen ist (vgl. auch [Sch13], Prop. 3.4 und [Sag93], Prop. 4.10). U^+ und U^- bezeichnen wir als **Halbräume** zu H.

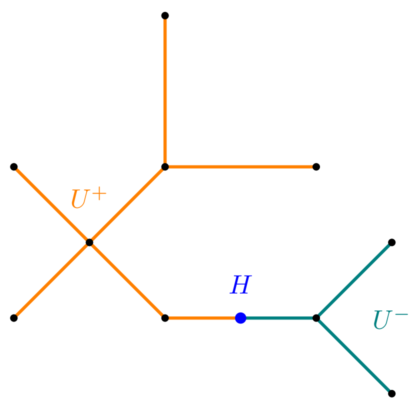


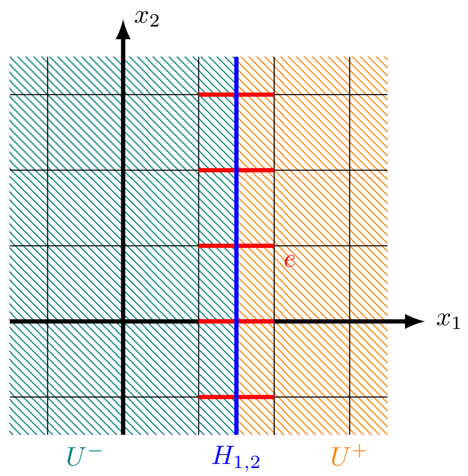
Die Hyperebene zu e ist gegeben durch $H(e) = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. Es gilt $X = U^+ \cup H(e) \cup U^-$

Abschließend betrachten wir zwei bereits eingeführte Beispiele:

(1) In einem Baum sind Mittelwürfel gerade die Mittelpunkte der Kanten. Da in einem Baum keine 2-Würfel existieren, gibt es zu einer Kante e keine weiteren quadratäquivalenten Kanten. Demzufolge ist der Mittelpunkt von e die Hyperebene zu e.

(2) Im $\mathbb{R}^n$ sind die Hyperebenen achsenparallele Ebenen der Kodimension 1, also affine Untervektorräume der Form $H_{i,k} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = k - 0.5\}$ mit $1 \leq i \leq n$ und $k \in \mathbb{Z}$.





2 Eigenschaft $\mathrm{F^sC_*}$

In diesem Abschnitt möchten wir nun wie angekündigt auf das von Niblo und Reeves formulierte Resultat über Gruppenwirkungen von Gruppen mit Eigenschaft (T) auf vollständige $\mathrm{CAT}(0)$ kubische Komplexe eingehen. Der Beweis dieses Theorems benötigt einige Vorarbeit. Wir orientieren uns dabei an dem Vorgehen in [NR97] und formulieren zunächst die Eigenschaft $\mathrm{F^sC_*}$ für Gruppen.

Definition 2.1 (Simpliziale Abbildung)
Seien X, Y zwei kubische Komplexe. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ heißt **simplizial**, wenn für jeden Würfel $C \subseteq X$ mit $\dim(C) = n$ das Bild $\varphi(C)$ ein Würfel in Y ist mit $\dim(\varphi(C)) \leq n$.
Eine Wirkung $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ heißt simplizial, wenn die Abbildung $\Phi(g)$ simplizial ist für alle $g \in G$. Insbesondere gilt dann $\Phi(g)(x_0) \in X^{(0)}$ für alle $x_0 \in X^{(0)}$.

Definition 2.2 (Eigenschaft $\mathbf{F^sC_*}$)
Eine Gruppe G hat Eigenschaft $\mathrm{F^sC_*}$, wenn gilt: Jede simpliziale Wirkung $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ von G auf einen vollständigen $\mathrm{CAT}(0)$ kubischen Komplex X hat einen globalen Fixpunkt, das heißt es existiert ein $x \in X$ mit $\Phi(g)(x) = x$ für alle $g \in G$.

Wir halten zunächst ein Resultat fest, welches uns eine Charakterisierung für endlich erzeugte Gruppen liefert, die die Kazhdan-Eigenschaft (T) erfüllen. Dieses Kriterium nutzen wir, um das oben genannte Hauptresultat zu beweisen. Einen Beweis des folgenden Satzes findet man in [BHV08].

Definition 2.3 (bedingt negativ definiter Kern)
Sei M eine Menge. Ein bedingt negativ definiter Kern (engl. *conditionally negative kernel*) auf M ist eine Abbildung $f\colon M \times M \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $x \in M$ ist $f(x, x) = 0$.

(2) Für alle $x, y \in M$ ist $f(x, y) = f(y, x)$.

(3) Für jede endliche Teilmenge $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ gilt

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_i \lambda_j f(x_i, x_j) \leq 0$$

Ein bedingt negativ definiter Kern auf einer Gruppe G ist zusätzlich linksinvariant, d.h. er erfüllt die folgende Eigenschaft:

(4) Für alle $g, h, k \in G$ gilt $f(gh, gk) = f(h, k)$.

Satz 2.4 (Eigenschaft (T) für endlich erzeugte Gruppen)
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. G hat genau dann die Eigenschaft (T), wenn jeder bedingt negativ definite Kern auf G beschränkt ist.

Im Folgenden sei X ein vollständiger $\mathrm{CAT}(0)$ kubischer Komplex und G eine endlich erzeugte Gruppe, die simplizial auf X wirkt.

Lemma 2.5 (Eigenschaften der simplizialen Metrik)

(i) Es gilt $D(x, y) = \sum_U \chi_U(x) \cdot (1 - \chi_U(y))$, wobei U über alle Halbräume von X läuft und χ_U die charakteristische Funktion von U ist.

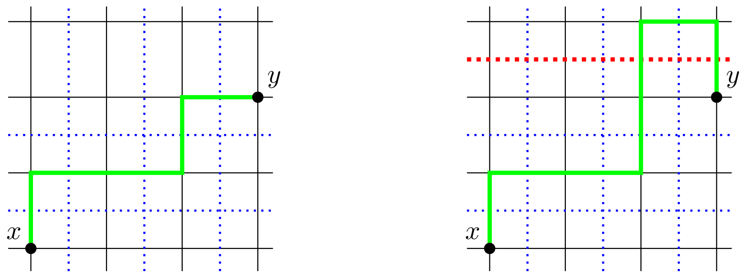
(ii) D ist ein bedingt negativ definiter Kern auf $X^{(0)}$.

(iii) D ist invariant bezüglich jeder Wirkung Φ von G auf $X^{(0)}$, das heißt

$$D(\Phi(g)(x), \Phi(g)(y)) = D(x, y) \quad \forall g \in G, x, y \in X^{(0)}$$

Beweis

(i) Seien $x, y \in X^{(0)}$ beliebig. Sageev hat in [Sag93] gezeigt, dass jeder kürzeste Weg σ von x nach y in $X^{(1)}$ jede Hyperebene von X höchstens einmal schneidet. Da die geschnittenen Hyperebenen gerade aus Mittelwürfeln bestehen, die transversal zu den zu σ gehörenden Kanten sind, folgt, dass jede Kante von σ genau eine Hyperebene schneidet. Demzufolge ist die Länge von σ gegeben durch die endliche Anzahl an Hyperebenen zwischen x und y. Diese Hyperebenen liefern genau



Links: Ein kürzester Weg zwischen x und y. Rechts: Ein längerer Weg, der eine Hyperebene zwei Mal schneidet.

diejenigen Halbräume von X die entweder x oder y enthalten (x und y liegen nicht auf einer Hyperebene, da diese die Kanten nur in ihren Mittelpunkten schneiden und nicht in Punkten aus $X^{(0)}$). Jede Hyperebene liefert zwei Halbräume: Einen Halbraum $U^+ \subseteq X$ mit $x \in U^+, y \notin U^+$, und einen Halbraum $U^- \subseteq X$ mit $x \notin U^-, y \in U^-$.

Somit stimmt die Anzahl der Hyperebenen zwischen x und y überein mit der Anzahl der Halbräume von X, die x enthalten und y nicht. Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \inf\{\ell(\sigma) : \sigma \text{ ist Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } X^{(1)}\} \\ &= \#\{H \subseteq X : H \text{ ist Hyperebene zwischen } x \text{ und } y\} \\ &= \#\{U \subseteq X \text{ Halbraum} : x \in U, y \notin U\} \\ &= \sum_{\substack{U \subseteq X \\ \text{Halbraum}}} \underbrace{\chi_U(x) \cdot (1 - \chi_U(y))}_{=1 \Leftrightarrow x \in U \wedge y \notin U} \end{aligned}$$

(ii) Zu zeigen sind die Eigenschaften (1), (2) und (3) aus Definition 2.3.
(1) und (2) sind klarerweise erfüllt, da D eine Metrik ist. Sei also $V := \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X^{(0)}$ endlich sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Dann ist

$$\sum_{1 \le i,j \le n} \lambda_i \lambda_j D(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sum_U \chi_U(x_i)(1 - \chi_U(x_j))$$

Da für jedes Paar $(x_i, x_j) \in V \times V$ höchstens endlich viele Hyperebenen zwischen x_i und x_j verlaufen, existieren insgesamt nur endlich viele Halbräume $U \subseteq X$, für die der Ausdruck $\chi_U(x_i) \cdot (1 - \chi_U(x_j))$ in der hinteren Summe nicht verschwindet. Insbesondere ist die hintere Summe endlich. Bezeichnen wir jene Halbräume mit $U_1, \ldots, U_m$, ermöglicht dies folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sum_{k=1}^m \chi_{U_k}(x_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sum_{k=1}^m \chi_{U_k}(x_i) \cdot \chi_{U_k}(x_j) \\ = &\underbrace{\sum_{j=1}^n \lambda_j}_{=0} \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{k=1}^m \chi_{U_k}(x_i) - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{U_k}(x_i) \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{U_k}(x_j) \\ = &\, 0 - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{U_k}(x_i) \right)^2 \le 0 \end{aligned}$$

(iii) Wie in Definition 1.6 bemerkt, stimmt die simpliziale Metrik D auf $X^{(0)}$ mit der Längenmetrik $d_{X^{(1)}}$ von $X^{(1)}$ eingeschränkt auf $X^{(0)}$ überein. Da $(X^{(1)}, d_{X^{(1)}})$ ein kubischer Komplex ist, vermittelt Φ auch eine simpliziale (und damit isometrische) Wirkung $\widetilde{\Phi}$ auf $X^{(1)}$ vermöge $\widetilde{\Phi}(g) := \Phi(g)\big|_{X^{(1)}}$, das heißt für alle $x, y \in X^{(0)} \subseteq X^{(1)}$ und $g \in G$ gilt

$$D(\Phi(g)(x), \Phi(g)(y)) = d_{X^{(1)}}(\widetilde{\Phi}(g)(x), \widetilde{\Phi}(g)(y)) = d_{X^{(1)}}(x,y) = D(x,y) \qquad \square$$

Theorem (Niblo, Reeves)
Sei X ein vollständiger $\mathrm{CAT}(0)$ kubischer Komplex und G eine endlich erzeugte Gruppe, die die Kazhdan-Eigenschaft (T) erfüllt. Dann hat jede simpliziale Wirkung von G auf X einen globalen Fixpunkt. Mit anderen Worten:

$$G \text{ hat Eigenschaft } (\mathrm{T}) \quad \Rightarrow \quad G \text{ hat Eigenschaft } \mathrm{F^sC_*}$$

Bemerkung
Aus dem Theorem folgt unmittelbar, dass jede Gruppe mit Kazhdan-Eigenschaft (T) auch die Serre-Eigenschaft FA erfüllt, da jeder Baum ein vollständiger $\mathrm{CAT}(0)$ kubischer Komplex ist.

Beweis des Theorems

Sei $\Phi\colon G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine beliebige simpliziale Wirkung von G auf X. Dann ist $\Phi|_{X^{(0)}}\colon G \to \mathrm{Isom}(X^{(0)})$ eine simpliziale Wirkung auf dem 0-Skelett von X. Wir fixieren ein $v \in X^{(0)}$ beliebig und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f_v\colon G \times G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (g,h) &\longmapsto D(\Phi(g)(v), \Phi(h)(v)) \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass f_v ein bedingt negativ definiter Kern auf G ist. Die Eigenschaften (1), (2) und (3) sind klarerweise erfüllt, da D ein bedingt negativ definiter Kern ist. Die Linksinvarianz von f_v folgt aus der Invarianz von D: Für beliebige $g, h, k \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} f_v(gh, gk) &= D(\Phi(gh)(v), \Phi(gk)(v)) \\ &= D(\Phi(g)(\Phi(h)(v)), \Phi(g)(\Phi(k)(v))) \\ &= D(\Phi(h)(v), \Phi(k)(v)) \\ &= f_v(h,k) \end{aligned}$$

Die Gruppe G hat Eigenschaft (T), also ist f_v beschränkt, das heißt die Menge $f_v(G \times G) = D(\Phi(G)(v) \times \Phi(G)(v))$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$. Damit ist der Orbit $\Phi(G)(v)$ von v beschränkt bezüglich D und wegen $d \leq D$ (vgl. Bemerkung nach Def. 1.6) auch bezüglich d. Nach Voraussetzung ist (X,d) vollständig und $\mathrm{CAT}(0)$. Mit dem Fixpunktsatz von Bruhat-Tits folgt also die Existenz eines Fixpunktes. $\square$

Literatur

[BHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, Alain Valette. *Kazhdan's Property (T)*. 2007. URL: http://perso.univ-rennes1.fr/bachir.bekka/KazhdanTotal.pdf.

[NR97] Graham Niblo, Lawrence Reeves. *Groups acting on CAT(0) cube complexes*. 1997.

[Sag93] Michah Sageev. *Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes*. 1993.

[Sch13] Petra Schwer. *Lecture Notes on CAT(0) Cubical Complexes*. Münster, 2013.