Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

21 de novembro de 2024

Konzen, Pedro Henrique de Almeida

Geometria analítica: notas de aula / Pedro Henrique de Almeida Konzen. –2024. Porto Alegre.- 2024.

"Esta obra é uma edição independente feita pelo próprio autor."

1. Geometria analítica. 2. Sistemas de coordenadas. 3. Retas e planos. 4. Cônicas. 5. Superfícies quadráticas.

Licença

Prefácio

O site notaspedrok.com.br é uma plataforma que construí para o compartilhamento de minhas notas de aula. Essas anotações feitas como preparação de aulas é uma prática comum de professoras/es. Muitas vezes feitas a rabiscos em rascunhos com validade tão curta quanto o momento em que são concebidas, outras vezes, com capricho de um diário guardado a sete chaves. Notas de aula também são feitas por estudantes - são anotações, fotos, prints, entre outras formas de registros de partes dessas mesmas aulas. Essa dispersão de material didático sempre me intrigou e foi o que me motivou a iniciar o site.

Com início em 2018, o site contava com apenas três notas incipientes. De lá para cá, conforme fui expandido e revisando os materais, o site foi ganhando acessos de vários locais do mundo, em especial, de países de língua portugusa. No momento, conta com 13 notas de aula, além de minicursos e uma coleção de vídeos e áudios.

As notas de **Geometria Analítica** abordam tópicos introdutórios sobre geometria analítica no espaço euclidiano tridimensional. Mais especificamente, sobre sistemas de coordenadas, estudo de retas, planos e cônicas.

Aproveito para agradecer a todas/os que de forma assídua ou esporádica contribuem com correções, sugestões e críticas! ;)

Pedro H A Konzen

`https://www.notaspedrok.com.br`

Conteúdo

Capítulo 1

Retas e Planos

Em revisão

A geometria analítica é uma área interdisciplinar da matemática que faz o estudo de objetos da geometria através de estruturas algébricas (equações e inequações algébricas). Para tanto, o primeiro passo é a construção (definição) de um sistema de coordenadas, no qual os objetos geométricos serão referenciados.

Dado um sistema de coordenadas podemos fazer o equacionamento de elementos geométricos como retas e planos.

1.1 Sistema de coordenadas no espaço

Em revisão

https://youtu.be/aZZ1OmEj4T0

Um sistema de coordenadas (cartesianas[1]) no espaço é constituído de um ponto O e uma base de vetores $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto P determina de forma única um vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto P tem coordenadas

(x, y, z). Veja a figura abaixo.

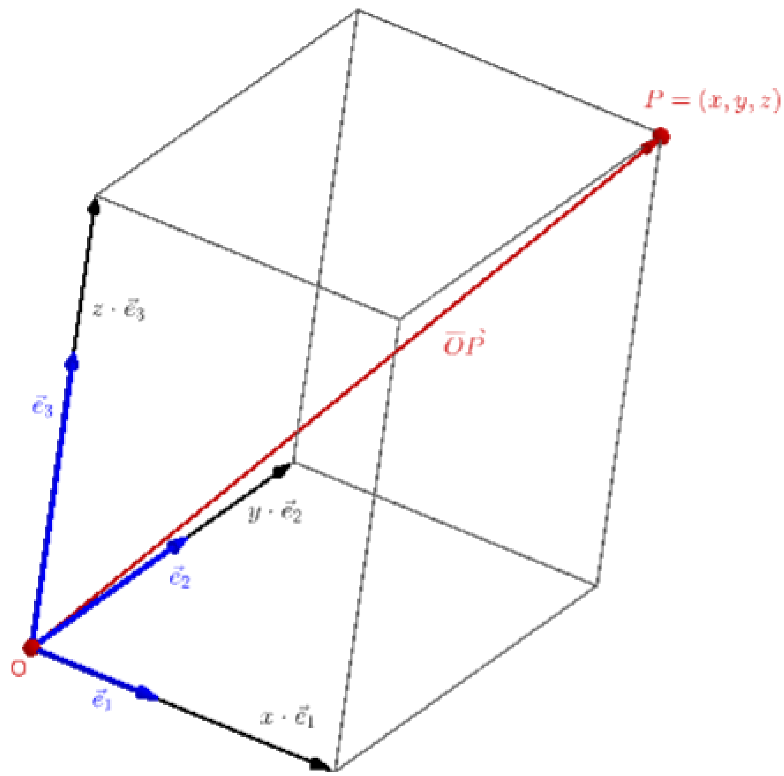


Figura 1.1: Ilustração de um sistema de coordenadas no espaço.

O ponto O é chamado de **origem** (do sistema de coordenadas) e tem coordenadas $O = (0, 0, 0)$. Dado um ponto $P = (x, y, z)$, chama-se x de sua **abscissa**, y de sua **ordenada** e z de sua **cota**. As retas que passam por O e têm, respectivamente, as mesmas direções de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contém O e representantes de dois vetores da base B são chamados de **planos coordenados**.

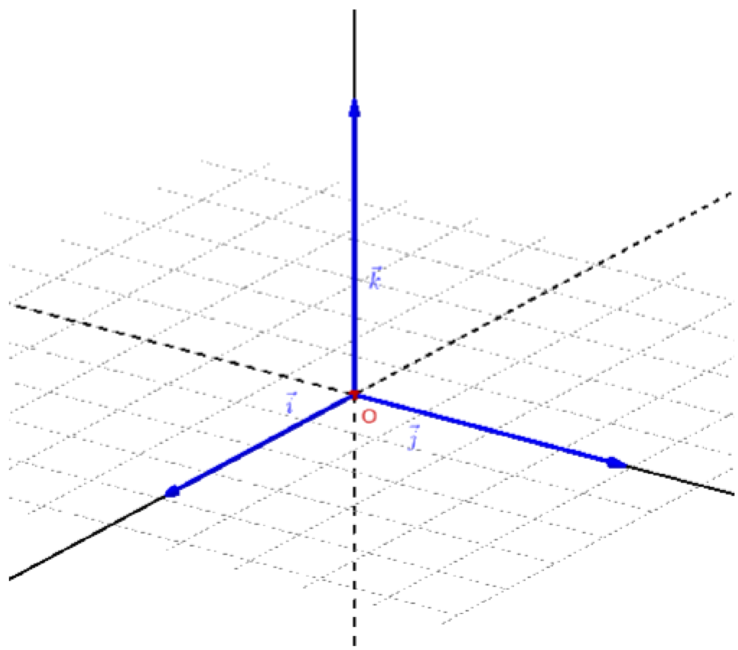


Figura 1.2: Ilustração de um sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado diferente, trabalharemos com um **sistema de coordenadas ortonormal**, i.e. sistema cuja base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura 1.2.

1.1.1 Pontos e Vetores

https://youtu.be/NBi-Ku86pGE

Seja dado um vetor $\overrightarrow{AB}$. Sabendo as coordenadas dos pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, temos que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} && (1.1)\\
&= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} && (1.2)\\
&= -(x_A, y_A, z_A) + (x_B, y_B, z_B) && (1.3)\\
&= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). && (1.4)
\end{aligned}$$

Em uma linguagem menos formal, podemos dizer que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$

é a resultante das coordenadas do ponto final menos as coordenadas do ponto de partida. Veja a figura abaixo.

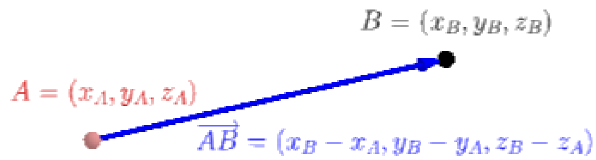


Figura 1.3: Relação entre as coordenadas dos pontos de partida e de chegada de um vetor.

Exemplo 1.1.1. Dados os pontos $A = (-1, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$, temos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -1 - 1, 0 - 2) = (4, -2, -2). \tag{1.5}$$

1.1.2 Ponto Médio de um Segmento

https://youtu.be/Yu0usAcwx5w

Dados os pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, podemos calcular as coordenadas do ponto médio $M = (x_M, y_M, z_M)$ do segmento AB. Veja a figura abaixo.

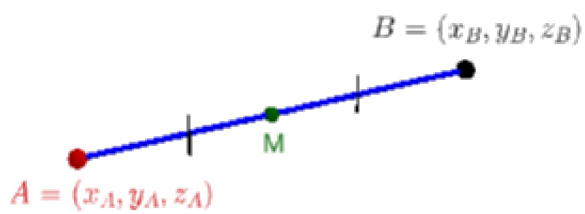


Figura 1.4: Coordenadas do ponto médio de um segmento.

Do fato de que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, temos

$$(x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M), \tag{1.6}$$

Logo, segue que

$$x_M - x_A = x_B - x_M \tag{1.7}$$
$$y_M - y_A = y_B - y_M \tag{1.8}$$
$$z_M - z_A = z_B - z_M \tag{1.9}$$

ou, equivalentemente,

$$2x_M = x_A + x_B \tag{1.10}$$
$$2y_M = y_A + y_B \tag{1.11}$$
$$2z_M = z_A + z_B \tag{1.12}$$

Portanto, concluímos que

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \tag{1.13}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \tag{1.14}$$
$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \tag{1.15}$$

Logo, temos

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) \tag{1.16}$$

Exemplo 1.1.2. Dados os pontos $A = (-1, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$, temos que o ponto médio do segmento AB tem coordenadas:

$$M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \tag{1.17}$$
$$= (1, 0, 1). \tag{1.18}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Sejam $A = (-1, 2, 1)$, $B = (1, -2, 0)$ e $C = (x, 2, 2)$ vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados AC e BC são congruentes. Determine o valor de x.

Solução. Sendo os lados AC e BC congruentes, temos $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. As coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são

$$\overrightarrow{AC} = (x - (-1), 2 - 2, 2 - 1) = (x + 1, 0, 1) \tag{1.19}$$

e as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ são

$$\overrightarrow{BC} = (x - 1, 2 - (-2), 2 - 0) = (x - 1, 4, 2). \tag{1.20}$$

Então, temos

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4^2 + 2^2} \tag{1.21}$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 + 0^2 + 1^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 2^2 \tag{1.22}$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16 + 4 \tag{1.23}$$
$$\Rightarrow 4x = 19 \tag{1.24}$$
$$\Rightarrow x = \frac{19}{4}. \tag{1.25}$$

◊

ER 1.1.2. Sejam $A = (-1, 2, 1)$, $B = (1, -2, 0)$ e M o ponto médio do intervalo AB. Determine as coordenadas do ponto P de forma que $2AP = AM$.

Solução. As coordenadas do ponto médio são

$$M = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+(-2)}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right). \tag{1.26}$$

Agora, denotando $P = (x_P, y_P, z_P)$, temos

$$2AP = AM \Rightarrow 2(x_P - (-1), y_P - 2, z_P - 1) = \left(0 - (-1), 0 - 2, \frac{1}{2} - 1\right) \tag{1.27}$$
$$\Rightarrow (2x_p + 2, 2y_P - 4, 2z_P - 2) = \left(1, -2, -\frac{1}{2}\right). \tag{1.28}$$

Portanto

$$2x_P + 2 = 1 \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} \tag{1.29}$$

$$2y_P - 4 = -2 \Rightarrow y_P = 1 \tag{1.30}$$
$$2z_P - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. \tag{1.31}$$

Logo, $P = (-1/2, 1, 3/4)$.

◊

Exercícios

E.1.1.1. Sejam dados os pontos $A = (1, -1, 2)$ e $B = (0, 1, -2)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

E.1.1.2. Sejam dados os pontos $E = (-1, 2, 0)$ e $F = (2, -1, 1)$. Calcule o ponto médio do segmento EF.

E.1.1.3. Sejam dados os pontos $A = (-1, 1, -1)$ e $M = (0, 1, 3)$. Determine o ponto B tal que M seja o ponto médio do segmento AB.

E.1.1.4. Sejam dados os pontos $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (x, 2, 1)$. Determine x tal que ABC forme um triângulo retângulo com hipotenusa BC.

E.1.1.5. Determine a distância entre os pontos $C = (2, -1, 0)$ e $D = (1, 1, 1)$.

1.2 Equações da reta

`Em revisão`

Nesta seção, vamos desenvolver equações para a representação de retas no espaço tridimensional.

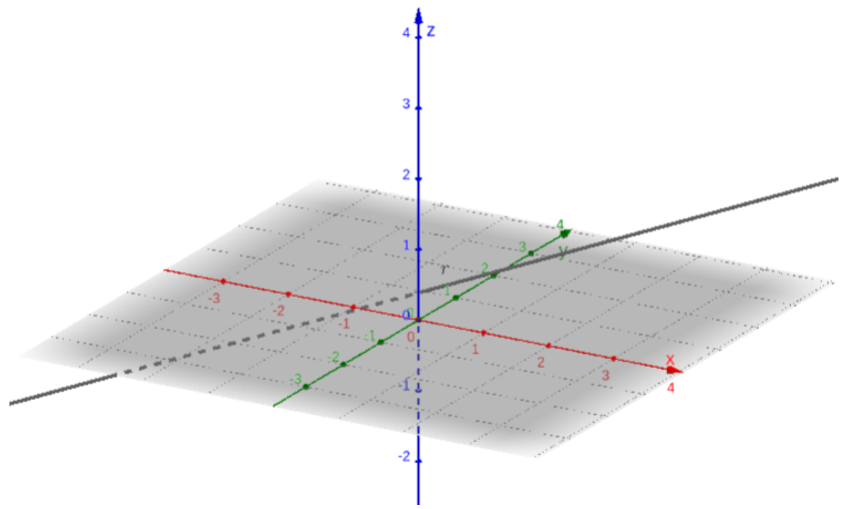


Figura 1.5: Ilustração de uma reta r em um sistema de coordenadas ortonormal.

1.2.1 Equação vetorial de uma reta

Seja r uma reta dada, $\vec{v}$ um vetor paralelo a r e A um ponto de r (veja a Figura 1.6). Assim sendo, $P = (x, y, z)$ é um ponto de r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$. i.e. existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.32}$$

Esta é chamada **equação vetorial da reta** r.

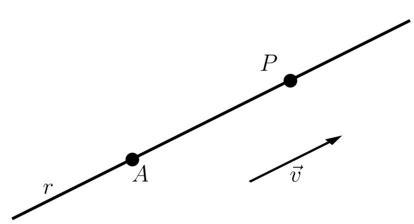


Figura 1.6: Equação vetorial de uma reta.

Observe que para obtermos uma equação vetorial de uma dada reta, podemos escolher qualquer ponto $A \in r$ e qualquer vetor $\vec{v} \parallel r$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. O vetor $\vec{v}$ escolhido é chamado de **vetor diretor**.

Exemplo 1.2.1. Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (-1, -1, -2)$ e $B = (2, 1, 3)$ (veja a Figura 1.7). O vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 1 - (-1), 3 - (-2)) = (3, 2, 5) \tag{1.33}$$

é um vetor diretor de r. Desta forma, uma equação vetorial da reta r é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.34}$$

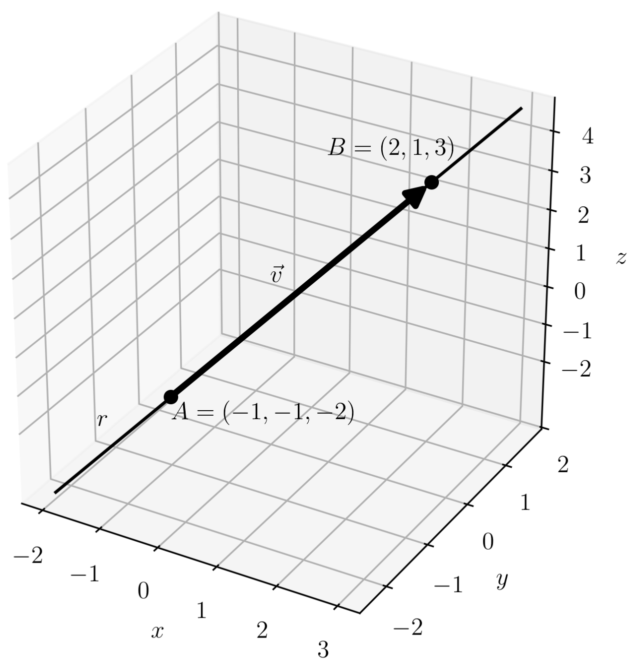


Figura 1.7: Esboço da reta discutida no Exemplo 1.2.1.

1.2.2 Equações paramétricas de uma reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e tenha vetor diretor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Da equação vetorial, temos que $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.35}$$

Equivalentemente,

$$\underbrace{(x - x_A, y - y_A, z - z_A)}_{\overrightarrow{AP}} = \lambda\underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{\vec{v}}. \tag{1.36}$$

Então,

$$x - x_A = \lambda v_1, \tag{1.37}$$
$$y - y_A = \lambda v_2, \tag{1.38}$$
$$z - z_A = \lambda v_3, \tag{1.39}$$

donde

$$x = x_A + \lambda v_1, \tag{1.40}$$
$$y = y_A + \lambda v_2, \tag{1.41}$$
$$z = z_A + \lambda v_3, \tag{1.42}$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas** da reta r.

Exemplo 1.2.2. A reta r discutida no Exemplo 1.2.1 tem equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \tag{1.43}$$
$$y = -1 + 2\lambda, \tag{1.44}$$
$$z = -2 + 5\lambda. \tag{1.45}$$

De fato, tomando $\lambda = 0$, temos $(x, y, z) = (-1, -1, -2) = A \in r$. E, tomado $\lambda = 1$, temos $(x, y, z) = (-1+3, -1+2, -2+5) = (2, 1, 3) = B \in r$. Ou seja, as equações paramétricas acima representam a reta que passa pelos pontos A e B.

Com o `Sympy`, podemos plotar o gráfico de r usando o seguinte código:

```
var('lbda',real=True)
plot3d_parametric_line(-1+3*lbda,-1+2*lbda,-2+5*lbda,(lbda,-1,2))
```

1.2.3 Equações da reta na forma simétrica

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e tem $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ como vetor diretor. Então, r tem as equações paramétricas

$$x = x_A + v_1\lambda, \tag{1.46}$$
$$y = y_A + v_2\lambda, \tag{1.47}$$
$$z = z_A + v_3\lambda. \tag{1.48}$$

Isolando λ em cada uma das equações, obtemos

$$\lambda = \frac{x - x_A}{v_1}, \tag{1.49}$$
$$\lambda = \frac{y - y_A}{v_2}, \tag{1.50}$$
$$\lambda = \frac{z - z_A}{v_3}. \tag{1.51}$$

Daí, temos

$$\frac{x - x_A}{v_1} = \frac{y - y_A}{v_2} = \frac{z - z_A}{v_3}, \tag{1.52}$$

as quais são as **equações da reta na forma simétrica**.

Exemplo 1.2.3. No Exemplo 1.2.2, consideramos a reta r de equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \tag{1.53}$$
$$y = -1 + 2\lambda, \tag{1.54}$$
$$z = -2 + 5\lambda. \tag{1.55}$$

Para obtermos as equações de r na forma simétrica, basta isolarmos λ em cada equação. Com isso, obtemos

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 2}{5}. \tag{1.56}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (-1, -1, -2)$ e tem $\vec{v} = (3, 2, 5)$ como vetor diretor. Determine o valor de x de forma que $P = \left(x, 0, \frac{1}{2}\right)$ seja um ponto de r.

Solução. Da equação vetorial da reta r, temos que $P = \left(x, 0, \frac{1}{2}\right)$ é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.57}$$

Ou seja,

$$\left(x - (-1), 0 - (-1), \frac{1}{2} - (-2)\right) = \lambda(3, 2, 5). \tag{1.58}$$

Ou, equivalentemente,

$$\left(x + 1, 1, \frac{5}{2}\right) = \lambda(3, 2, 5). \tag{1.59}$$

Usando a segunda coordenada destes vetores, temos

$$1 = \lambda \cdot 2 \tag{1.60}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}. \tag{1.61}$$

Assim, da primeira coordenada dos vetores, temos

$$x + 1 = \lambda \cdot 3 \tag{1.62}$$

$$x + 1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \tag{1.63}$$

$$x = \frac{3}{2} - 1 \tag{1.64}$$

$$x = \frac{1}{2}. \tag{1.65}$$

◊

ER 1.2.2. Seja r a reta de equações paramétricas

$$x = 1 - \lambda, \tag{1.66}$$

$$y = \lambda, \tag{1.67}$$

$$z = -3. \tag{1.68}$$

Determine uma equação vetorial de r.

Solução. Nas equações paramétricas de uma reta, temos que os coeficientes constantes estão associados a um ponto da reta. Os coeficientes do parâmetro λ estão associados a um vetor diretor. Assim sendo, das equações paramétricas da reta r, temos que

$$A = (1, 0, -3) \in r \tag{1.69}$$

e

$$\vec{v} = (-1, 1, 0) \tag{1.70}$$

é um vetor diretor. Logo, temos que a reta r tem equação vetorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}, \tag{1.71}$$

com $A = (1, 0, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

◊

ER 1.2.3. Sabendo que r é uma reta que passa pelos pontos $A = (2, -3, 1)$ e $B = (-1, 1, 0)$, determine o valor de t tal que

$$x = 2 + t\lambda, \tag{1.72}$$
$$y = -2 + 4\lambda, \tag{1.73}$$
$$z = 1 - \lambda, \tag{1.74}$$

sejam equações paramétricas de r.

Solução. Para que estas sejam equações paramétricas de r, é necessário que $\vec{v} = (t, 4, -1)$ seja um vetor diretor de r. Em particular, $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$. Logo, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{v} = \beta\overrightarrow{AB} \tag{1.75}$$
$$(t, 4, -1) = \beta(-1 - 2, 1 - (-3), 0 - 1) \tag{1.76}$$
$$(t, 4, -1) = \beta(-3, 4, -1). \tag{1.77}$$

Das segunda e terceira coordenadas, temos $\beta = 1$. Daí, comparando pela primeira coordenada, temos

$$t = -3\beta \tag{1.78}$$
$$t = -3. \tag{1.79}$$

◊

ER 1.2.4. Seja r uma reta de equações na forma simétrica

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{1-z}{2}. \tag{1.80}$$

Determine equações paramétricas para esta reta e faça um esboço de seu gráfico.

Solução. Podemos obter equações paramétricas desta reta a partir de suas equações na forma simétrica. Para tanto, basta tomar o parâmetro λ tal que

$$\lambda = \frac{x+1}{2}, \tag{1.81}$$
$$\lambda = \frac{y-2}{3}, \tag{1.82}$$
$$\lambda = \frac{1-z}{2}. \tag{1.83}$$

Daí, isolando x, y e z em cada uma destas equações, obtemos

$$x = -1 + 2\lambda, \tag{1.84}$$
$$y = 2 + 3\lambda, \tag{1.85}$$
$$z = 1 - 2\lambda. \tag{1.86}$$

Para fazermos um esboço do gráfico desta reta, basta traçarmos a reta que passa por dois de seus pontos. Por exemplo, tomando $\lambda = 0$, temos $A = (-1, 2, 1) \in r$. Agora, tomando $\lambda = 1$, temos $B = (1, 5, -1) \in r$. Desta forma, obtemos o esboço dado na Figura 1.8.

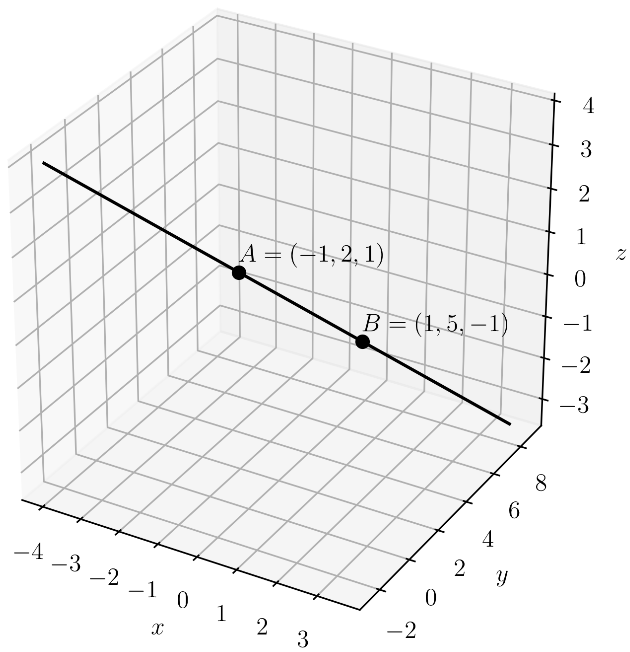


Figura 1.8: Esboço do gráfico da reta r do Exercício Resolvido 1.2.4.

◊

Exercícios

E.1.2.1. Seja a reta que passa pelos pontos $A = (1, -2, 0)$ e $B = (-1, -1, 1)$. Determine:

a) sua equação vetorial.

b) suas equações paramétricas.

c) suas equações na forma simétrica.

E.1.2.2. Seja a reta que passa pelo ponto $A = (0, 1, -1)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Determine x tal que $B = (1, x, -\frac{1}{2})$.

E.1.2.3. Considere a reta de equações na forma simétrica

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = z - 1. \tag{1.87}$$

Encontre um ponto e um vetor diretor desta reta.

E.1.2.4. Seja a reta r de equações paramétricas

$$x = \lambda \tag{1.88}$$
$$y = 2 - \lambda \tag{1.89}$$
$$z = -1 + \lambda \tag{1.90}$$

Determine as equações na forma simétrica da reta que passa pelo ponto $A = (1, -1, 0)$ e é paralela a reta r.

E.1.2.5. Seja a reta r de equações paramétricas

$$x = \lambda \tag{1.91}$$
$$y = 2 - \lambda \tag{1.92}$$
$$z = -1 + \lambda \tag{1.93}$$

Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (1, -1, 0)$ e é perpendicular a reta r.

1.3 Equações do plano

Em revisão

Um plano π fica unicamente determinado por um ponto $A \in \pi$ e dois vetores linearmente independentes $\vec{u}, \vec{v} \in \pi$[1]. Veja a Figura 1.9.

[1] No sentido que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm representantes no plano π.

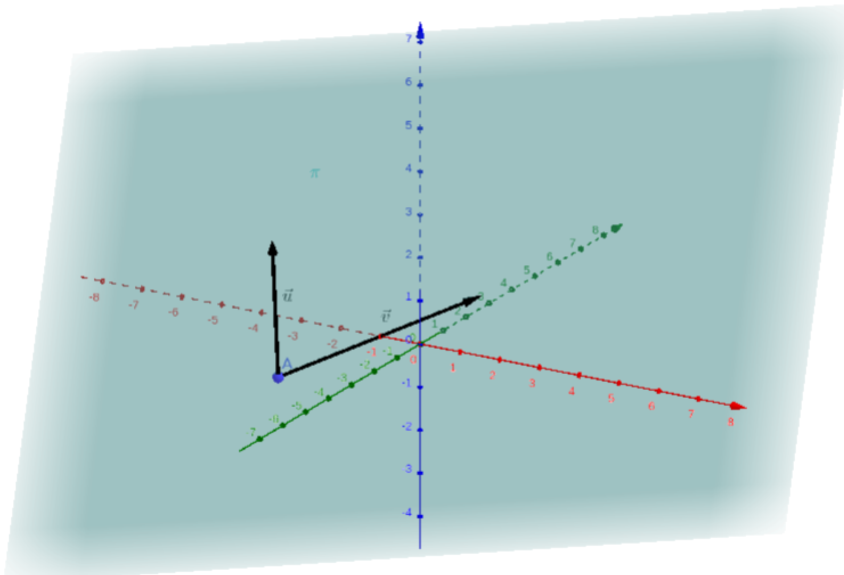


Figura 1.9: Ilustração de um plano no espaço tridimensional.

Os chamados **vetores diretores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinam infinitos planos paralelos entre si. O chamado **ponto de ancoragem** A fixa um destes planos.

1.3.1 Equação vetorial do plano

Consideremos um plano π determinado pelo ponto de ancoragem A e os vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (veja a Figura 1.10). Então, um ponto $P \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ é coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, i.e. $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes. Ou seja, $P \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Isto nos fornece a chamada **equação vetorial do plano**

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.94}$$

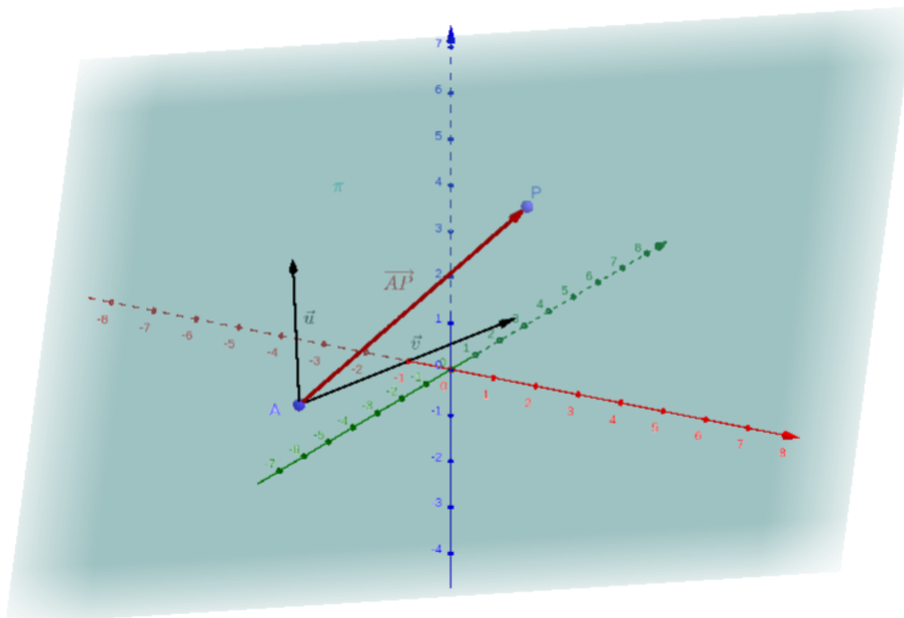


Figura 1.10: Ilustração sobre a equação vetorial de um plano.

Exemplo 1.3.1. Consideremos o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e pelos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$ (Veja a Figura 1.11. Desta forma, uma equação vetorial para este plano é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{1.95}$$

para $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

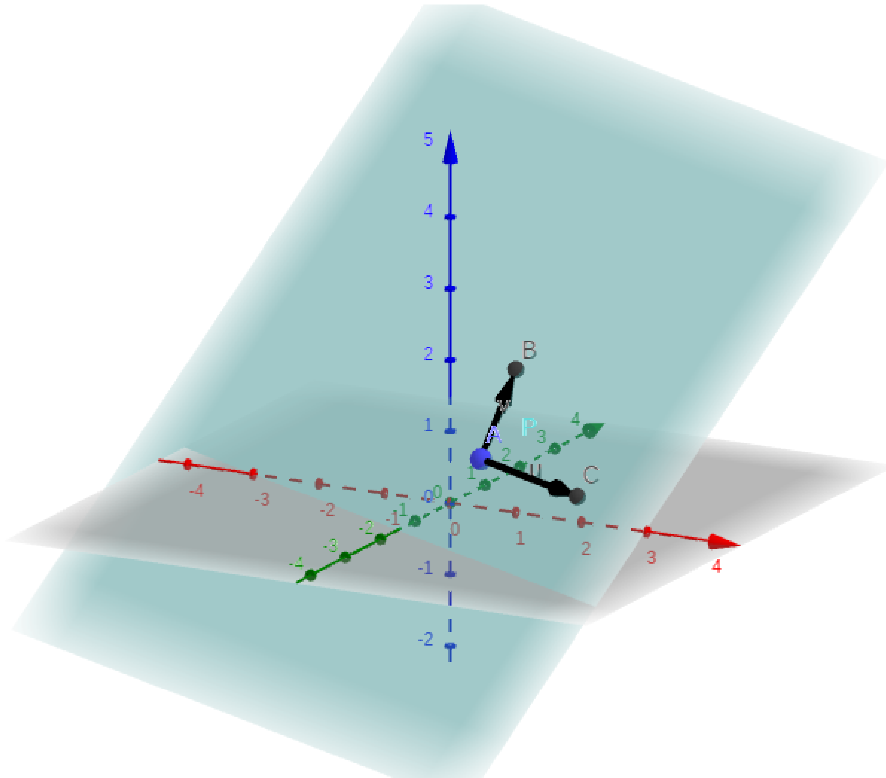


Figura 1.11: Esboço do plano π discutido no Exemplo 1.3.1.

Tomando, por exemplo, $\lambda = -1$ e $\beta = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} && (1.96)\\
&= -(2, -1, 0) + (0, 1, 1) && (1.97)\\
&= (-2, 2, 1). && (1.98)
\end{aligned}$$

Observando que as coordenadas do ponto P são iguais as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} && (1.99)\\
&= (1, -1, 1) + (-2, 2, 1) && (1.100)\\
&= (-1, 1, 2). && (1.101)
\end{aligned}$$

Ou seja, $P = (-1, 1, 2) \in \pi$.

1.3.2 Equações paramétricas do plano

Seja um plano π com ponto de ancoragem $A = (x_A, y_A, z_A) \in \pi$ e vetores diretores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Então, todo o ponto $P = (x, y, z)$ neste plano π satisfaz a equação vetorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{1.102}$$

para dados parâmetros $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}(x - x_A, y - y_A, z - z_A) &= \lambda(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) && (1.103)\\ &= (\lambda u_1 + \beta v_1, \lambda u_2 + \beta v_2, \lambda u_3 + \beta v_3). && (1.104)\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}x - x_A &= \lambda u_1 + \beta v_1, && (1.105)\\ y - y_A &= \lambda u_2 + \beta v_2, && (1.106)\\ z - z_A &= \lambda u_3 + \beta v_3. && (1.107)\end{aligned}$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}x &= x_A + \lambda u_1 + \beta v_1, && (1.108)\\ y &= y_A + \lambda u_2 + \beta v_2, && (1.109)\\ z &= z_A + \lambda u_3 + \beta v_3, && (1.110)\end{aligned}$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas do plano**.

Exemplo 1.3.2. No Exemplo 1.3.1, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e os vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Do que vimos acima, temos que

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2\lambda, && (1.111)\\ y &= -1 - \lambda + \beta, && (1.112)\\ z &= 1 + \beta, && (1.113)\end{aligned}$$

são equações paramétricas deste plano.

Podemos usar as equações paramétricas do plano para plotá-lo usando o SymPy. Para tanto, podemos usar os seguintes comandos:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface
var('r,s',real=True)
plot3d_parametric_surface(1+2*r,-1-r+s,1+s,
                          (r,-2,2),(s,-2,2),show=True,
                          xlabel='$x$',ylabel='$y$')
```

1.3.3 Equação geral do plano

Seja π o plano determinado pelo ponto de ancoragem $A = (x_A, y_A, z_A)$ e pelos vetores diretores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Sabemos que $P = (x, y, z) \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes. Ou, equivalentemente, o produto misto $[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$. Logo,

$$
\begin{align}
0 &= [\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \tag{1.114}\\
&= \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{1.115}\\
&= -u_1v_2z_A + u_1v_3y_A + u_2v_1z_A \tag{1.116}\\
&- u_2v_3x_A - u_3v_1y_A + u_3v_2x_A \tag{1.117}\\
&+ x(u_2v_3 - u_3v_2) + y(-u_1v_3 + u_3v_1) + z(u_1v_2 - u_2v_1). \tag{1.118}
\end{align}
$$

Observamos que a equação acima tem a forma geral

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1.119}$$

com a, b, c, d não todos nulos ou, equivalentemente, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Esta última é chamada **equação geral do plano**.

Exemplo 1.3.3. No Exemplo 1.3.1, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e os vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Para encontrarmos a equação geral deste plano, tomamos $P = (x, y, z)$ e calculamos

$$
\begin{align}
0 &= [\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \tag{1.120}\\
&= \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.121}
\end{align}
$$

$$= -x - 2y + 2z - 3. \tag{1.122}$$

Ou seja, a equação geral deste plano é

$$-x - 2y + 2z - 3 = 0. \tag{1.123}$$

1.3.4 Exercícios resolvidos

ER 1.3.1. Seja π um plano tal que $A = (2, 0, -1) \in \pi$, $P = (0, 1, -1) \in \pi$ e $\vec{u} = (1, 0, 1) \in \pi$. Determine uma equação vetorial para π.

Solução. Para obtermos uma equação vetorial do plano π, precisamos de um ponto e dois vetores l.i. em π. Do enunciado, temos o ponto $A = (2, 0, -1) \in \pi$ e o vetor $\vec{u}$. Portanto, precisamos encontrar um vetor $\vec{v} \in \pi$ tal que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam l.i.. Por sorte, temos $P = (0, 1, -1) \in \pi$ e, portanto $\overrightarrow{AP} \in \pi$. Podemos tomar

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} \tag{1.124}$$

$$= (-2, 1, 0), \tag{1.125}$$

pois $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são l.i.. Logo, uma equação vetorial do plano π é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{1.126}$$

$$= \lambda(1, 0, 1) + \beta(-2, 1, 0), \tag{1.127}$$

com $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$\diamondsuit$

ER 1.3.2. Seja π o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda, \tag{1.128}$$

$$y = \beta, \tag{1.129}$$

$$z = 1 - \lambda + \beta. \tag{1.130}$$

Determine o valor de z_P de forma que $P = (-1, 2, z_P) \in \pi$.

Solução. Para que $P = (-1, 2, z_P)$ pertença ao plano, devemos ter

$$-1 = -1 + \lambda, \tag{1.131}$$

$$2 = \beta, \tag{1.132}$$
$$z_P = 1 - \lambda + \beta. \tag{1.133}$$

Das duas primeiras equações, obtemos $\lambda = 0$ e $\beta = 2$. Daí, da terceira equação, temos

$$z_P = 1 - 0 + 2 = 3. \tag{1.134}$$

$\Diamond$

Exercícios

E.1.3.1. Determine a equação vetorial do plano com ponto de ancoragem $A = (-1, 0, 2)$ e vetores diretores $\vec{u} = (2, -1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

E.1.3.2. Seja o plano de equação vetorial $\overrightarrow{AP} = \lambda(2, -1, 1) + \beta(-1, 1, 2)$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, com ponto de ancoragem $A = (-1, 0, 2)$. Determine x tal que $P = (x, 3, 0)$ pertença a este plano.

E.1.3.3. Determine as equações paramétricas do plano com ponto de ancoragem $A = (-1, 0, 2)$ e vetores diretores $\vec{u} = (2, -1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

E.1.3.4. Considere o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + 2\lambda - \beta, \tag{1.135}$$
$$y = -\lambda + \beta, \tag{1.136}$$
$$z = 2 + \lambda + 2\beta. \tag{1.137}$$

Determine y tal que $P = (-6, y, 2)$ pertença a este plano.

E.1.3.5. Determine a equação geral do plano com ponto de ancoragem $A = (-1, 0, 2)$ e vetores diretores $\vec{u} = (2, -1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

E.1.3.6. Considere o plano de equação geral $-3x - 5y + z - 5 = 0$. Determine z tal que o ponto $P = (0, 0, z)$ pertença a este plano.

E.1.3.7. Considere o plano π de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda \tag{1.138}$$
$$y = \beta \tag{1.139}$$
$$z = = 1 - \lambda + \beta \tag{1.140}$$

A reta r de equação paramétricas

$$x = 2 \tag{1.141}$$
$$y = -1 + 2\lambda \tag{1.142}$$
$$z = 2\lambda \tag{1.143}$$

é paralela ao plano π? Justifique sua resposta.

E.1.3.8. Considere o plano π de equação geral

$$6x - 7y - 5z = -6. \tag{1.144}$$

Determine uma equação paramétrica para a reta r que é perpendicular ao plano π e passa pelo ponto $A = (2, -1, 0)$.

Capítulo 2

Outros sistemas de coordenadas

Neste capítulo, vamos introduzir outros sistemas de coordenadas no plano e no espaço tridimensional.

2.1 Sistema de coordenadas polares

No plano, o sistema de coordenadas polares é definido por um ponto de origem (chamado de **polo**) e um eixo orientado Ox (chamado de **eixo polar**). Veja a Figura 2.1.

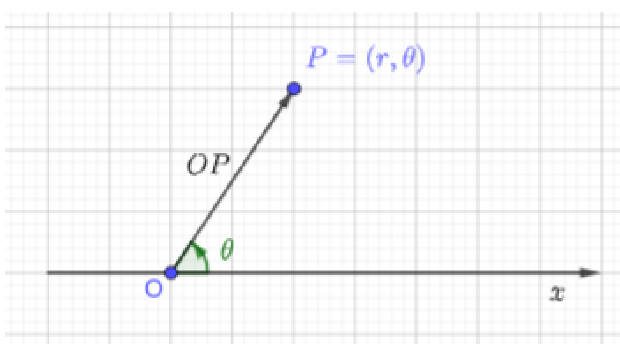


Figura 2.1: Sistema de coordenadas polares.

Neste sistema, um ponto P de coordenadas polares $P = (r, \theta)$ é tal que

$|OP| = r$ (i.e. a distância do polo ao ponto é r) e θ é o ângulo de Ox com OP, medido positivamente no sentido anti-horário.

Exemplo 2.1.1. Na Figura 2.2, temos a representação dos pontos $P = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, $A = (2, \frac{2\pi}{3})$ e $B = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ no sistema de coordenadas polares.

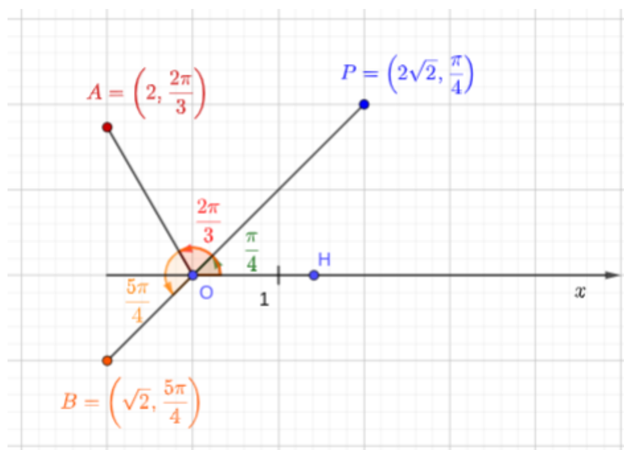


Figura 2.2: Sistema de coordenadas polares.

Observação 2.1.1. Por convenção, as coordenadas polares $(r, \pi + \theta) = (-r, \theta)$, $r > 0$. Por exemplo, $B = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}) = (-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. Veja na Figura 2.2.

2.1.1 Coordenadas cartesianas x polares

Aqui, vamos estudar como podemos converter as coordenadas de um ponto P de coordenadas cartesianas para coordenadas polares e vice-versa. Vamos denotar as coordenadas cartesianas do ponto P por $P = (x_P, y_P)$ e suas coordenadas polares por $P = (r, \theta)$. Veja a Figura 2.3.

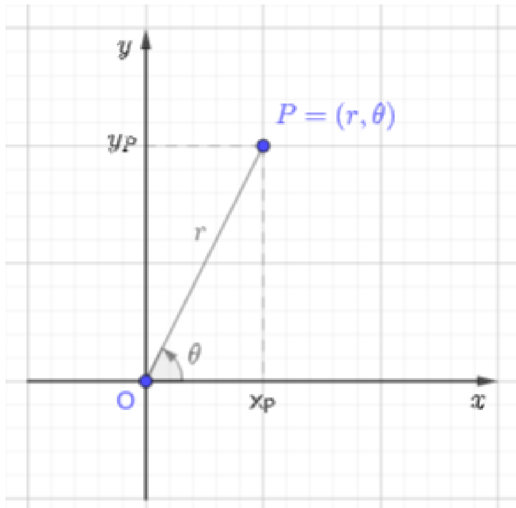


Figura 2.3: Sistema de coordenadas polares.

Na Figura 2.3, vamos nos concentrar no triângulo retângulo de vértices O, $(x_P, 0)$ e P. Das relações trigonométricas e do teorema de Pitágoras, temos que

$$\cos\theta = \frac{x_P}{r} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y_P}{r} \tag{2.2}$$

$$r^2 = x_P^2 + y_P^2 \tag{2.3}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_P}{x_P} \tag{2.4}$$

ou, equivalentemente,

$$x_P = r\cos\theta \tag{2.5}$$

$$y_P = r\operatorname{sen}\theta \tag{2.6}$$

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \tag{2.7}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y_P}{x_P}\right) \tag{2.8}$$

Exemplo 2.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) Conversão de $P = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ em coordenadas polares para coordenadas cartesianas.

No caso de $P = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$ temos $r = 2\sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$. Desta forma, as coordenadas cartesianas de $P = (x, y)$ são dadas por

$$\begin{align} x &= r\cos\theta \tag{2.9}\\ &= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \tag{2.10}\\ &= 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.11}\\ &= 2 \tag{2.12}\end{align}$$

$$\begin{align} y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.13}\\ &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} \tag{2.14}\\ &= 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.15}\\ &= 2 \tag{2.16}\end{align}$$

Logo, $P = (2, 2)$ em coordenadas cartesianas. Veja a Figura 2.2.

b) Conversão de $B = (-\sqrt{3}, -1)$ de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. Neste caso, temos $x = -\sqrt{3}$ e $y = -1$ e

$$\begin{align} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.17}\\ &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \tag{2.18}\\ &= \sqrt{4} \tag{2.19}\\ &= 2 \tag{2.20}\end{align}$$

$$\begin{align} \theta &= \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.21}\\ &= \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) \tag{2.22}\\ &= \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \tag{2.23}\end{align}$$

$$= \frac{7\pi}{6}. \tag{2.24}$$

Desta forma, temos que $P = (2, \frac{7\pi}{6})$ em coordenadas polares. Ou, equivalentemente, $P = (-2, \frac{\pi}{6})$.

Equação de reta que passa pela origem

Em coordenadas polares, uma reta que passa pela origem e tem ângulo de declividade θ_0 tem equação

$$\theta = \theta_0, \tag{2.25}$$

com $r \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.3. Seja a reta $y = x$ em coordenadas cartesianas. Em coordenadas polares, a equação desta reta é

$$\theta = \frac{\pi}{4}. \tag{2.26}$$

Equação de circunferência com centro na origem

Em coordenadas polares, a circunferência com centro na origem e raio r_0 tem equação

$$r = r_0. \tag{2.27}$$

Exemplo 2.1.4. Seja a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ em coordenadas cartesianas. Em coordenadas polares, a equação desta circunferência é

$$r = 2. \tag{2.28}$$

2.1.2 Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Obtenha duas representações em coordenadas polares do ponto $A = (-1, 0)$ dado em coordenadas cartesianas.

Solução. O ponto $A = (-1, 0)$ tem coordenadas cartesianas $x = -1$ e $y = 0$. Para converter em coordenadas polares $A = (r, \theta)$, podemos usar

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{2.29}$$

$$r^2 = 1^2 + 0^2 \tag{2.30}$$
$$r = \pm 1 \tag{2.31}$$

e

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.32}$$
$$= \operatorname{arc\,tg}(0) \tag{2.33}$$
$$= \pi \text{ ou } 0. \tag{2.34}$$

Ou seja, em coordenadas polares, temos as representações $A = (1, \pi)$ ou $A = (-1, 0)$.

♢

ER 2.1.2. Obtenha a representação em coordenadas cartesianas do ponto $B = (2, \frac{\pi}{2})$ dado em coordenadas polares.

Solução. O ponto $B = (2, \frac{\pi}{2})$ tem coordenadas polares $r = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Para converter em coordenadas cartesianas $B = (x, y)$, podemos usar

$$x = r\cos\theta \tag{2.35}$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{2} \tag{2.36}$$
$$= 0 \tag{2.37}$$

e

$$y = r\operatorname{sen}\theta \tag{2.38}$$
$$= 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \tag{2.39}$$
$$= 2 \tag{2.40}$$

Ou seja, em coordenadas cartesianas, temos a representação $B = (0, 2)$.

♢

Exercícios

E.2.1.1. Obtenha uma representação em coordenadas polares dos seguintes pontos dados em coordenadas cartesianas:

a) $A = (-3, 3)$

b) $B = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

c) $C = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

E.2.1.2. Obtenha uma representação em coordenadas cartesianas dos seguintes pontos dados em coordenadas polares:

a) $A = (2, \frac{\pi}{6})$

b) $B = (1, \frac{5\pi}{6})$

c) $C = (-2, \frac{3\pi}{4})$

E.2.1.3. Considere a reta de equação $x = 0$ em coordenadas cartesianas. Escreva a equação desta reta em coordenadas polares.

E.2.1.4. Considere a reta de equação $\theta = \frac{3\pi}{4}$ em coordenadas polares. Escreva a equação desta reta em coordenadas cartesianas.

E.2.1.5. Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ em coordenadas cartesianas. Escreva a equação desta circunferência em coordenadas polares.

E.2.1.6. Considere a circunferência de equação $r = \sqrt{2}$ em coordenadas polares. Escreva a equação desta circunferência em coordenadas cartesianas.

Capítulo 3

Cônicas

Neste capítulo, fazemos um estudo introdutório sobre cônicas no plano cartesiano. Mais precisamente, vamos estudar as equações de elipses, hipérboles e parábolas.

3.1 Elipse

Sejam F_1, F_2 pontos sobre um plano π, $c = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ e $a > c$. Chama-se **elipse** de **focos** F_1 e F_2 ao conjunto de pontos P tais que

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \tag{3.1}$$

Veja a Figura 3.1.

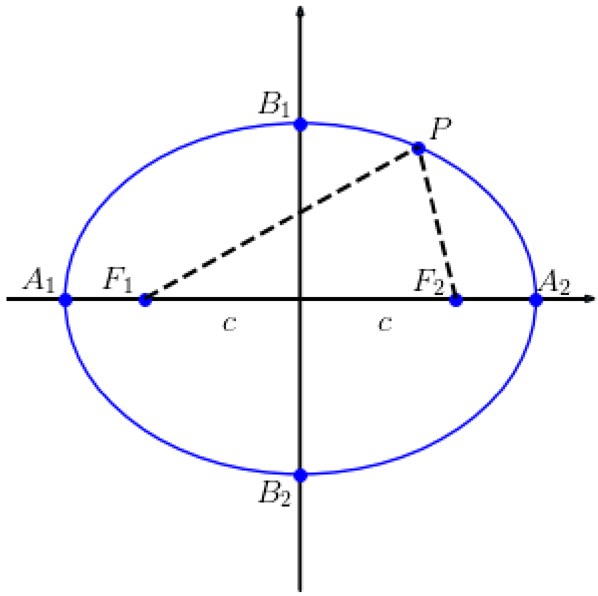


Figura 3.1: Ilustração de uma elipse de focos F_1 e F_2.

Dada uma tal elipse, identificamos $2c = |F_1F_2|$ como a **distância focal**. Os pontos A_1 e A_2 de interseção da elipse com a reta que passa pelos focos são chamados de **vértices** da elipse. O segmento A_1A_2 é chamado de **eixo maior** da elipse. Observamos que

$$|A_1A_2| = 2a. \tag{3.2}$$

O ponto médio do segmento F_1F_2 é chamado de **centro** da elipse. Sejam B_1 e B_2 os pontos de interseção da elipse com a reta que passa pelo centro da elipse e é perpendicular ao segmento A_1A_2. Assim sendo, o segmento B_1B_2 é chamado de **eixo menor** da elipse. Vamos denotar

$$2b = |B_1B_2|. \tag{3.3}$$

Chamamos de **excentricidade** da elipse o número

$$e = \frac{c}{a}. \tag{3.4}$$

Notemos que $0 \leq e < 1$. Para $e = 0$, temos $c = 0$ e, portanto $F_1 = F_2$. Neste caso, a elipse é a circunferência de centro em F_1 (ou F_2) e diâmetro $2a$. No que e tende a 1, a elipse tende ao segmento A_1A_2.

Por fim, notamos que o triângulo B_1OF_2 é retângulo, $|OF_2| = c$, $|F_2B_1| = a$ e $|OB_1| = b$. Do teorema de Pitágoras segue

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{3.5}$$

3.1.1 Equação reduzida da elipse

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas. Sejam $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, $c \geq 0$, os focos de uma dada elipse (veja a Figura 3.1). Se $P = (x, y)$ é um ponto da elipse, então

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \tag{3.6}$$

Como

$$|PF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \tag{3.7}$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \tag{3.8}$$

temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \tag{3.9}$$

ou, equivalentemente,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{3.10}$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2. \tag{3.11}$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{3.12}$$

Elevando novamente ao quadrado, temos

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \tag{3.13}$$

donde

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \tag{3.14}$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{3.15}$$

Como $a > c$, dividimos por $a^2 - c^2$ e depois por a^2 para obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{3.16}$$

Por fim, da equação (3.5), temos $a^2 - c^2 = b^2$, o que nos leva a **equação reduzida da elipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.17}$$

Exemplo 3.1.1. A Figura 3.2 é um esboço do gráfico da elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \tag{3.18}$$

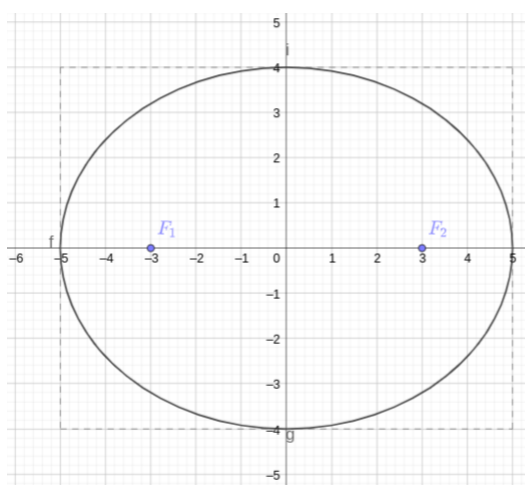


Figura 3.2: Esboço do gráfico da elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Exercícios resolvidos

ER 3.1.1. Determine a equação reduzida da elipse de focos $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$ e vértices $A_1 = (-5, 0)$ e $A_2 = (5, 0)$.

Solução. A equação reduzida tem a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.19}$$

onde

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{3.20}$$

Dos focos temos $c = 3$ e dos vértices temos $a = 5$. Logo,

$$\begin{align} b^2 &= a^2 - c^2 \tag{3.21}\\ &= 5^2 - 3^2 \tag{3.22}\\ &= 25 - 9 \tag{3.23}\\ &= 16. \tag{3.24}\end{align}$$

Concluímos que a elipse em questão tem equação

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \tag{3.25}$$

◊

ER 3.1.2. Determine os focos da elipse de equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1. \tag{3.26}$$

Solução. Começamos lembrando que os focos de uma elipse estão localizados sobre seu eixo maior. No caso deste exercício, temos $a = 4$ e $b = 5$, logo o eixo maior é B_1B_2, na mesma direção do eixo das ordenadas Oy. Do triângulo retângulo OA_2F_1 temos

$$b^2 = a^2 + c^2, \tag{3.27}$$

veja a Figura 3.3.

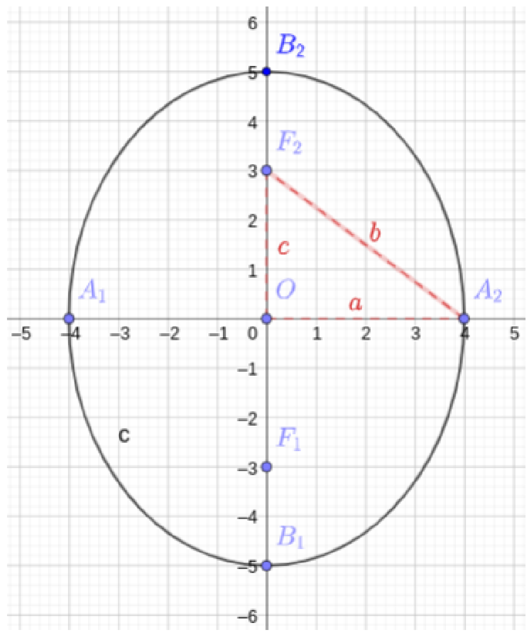


Figura 3.3: Esboço do gráfico de uma elipse com eixo maior sobre o eixo das ordenadas Oy.

Daí, temos

$$
\begin{align}
c^2 &= b^2 - a^2 \tag{3.28}\\
&= 25 - 16 \tag{3.29}\\
&= 9 \tag{3.30}\\
c &= 3. \tag{3.31}
\end{align}
$$

Concluímos que os focos são $F_1 = (0, -3)$ e $F_2 = (0, 3)$.

◊

Exercícios

E.3.1.1. Faça um esboço da elipse de equação reduzida

$$
\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \tag{3.32}
$$

E.3.1.2. Faça um esboço da elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1. \tag{3.33}$$

E.3.1.3. Determine os vértices (sobre o eixo maior) das seguintes elipses:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$

E.3.1.4. Determine os focos das seguintes elipses:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$

E.3.1.5. Forneça a equação reduzida da elipse de focos $F_1 = (-1, 0)$, $F_2 = (1, 0)$ e vértices $A_1 = (-\sqrt{2}, 0)$, $A_2 = (\sqrt{2}, 0)$.

E.3.1.6. Forneça a equação reduzida da elipse de focos $F_1 = (0, -2)$, $F_2 = (0, 2)$ e vértices $B_1 = (0, -\sqrt{5})$, $B_2 = (0, \sqrt{5})$.

3.2 Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 pontos sobre um plano π. Sejam, também, c tal que $|F_1F_2| = 2c$ e $a < c$. O lugar geométrico dos pontos P tais que

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a, \tag{3.34}$$

chama-se **hipérbole**. Veja Figura 3.4.

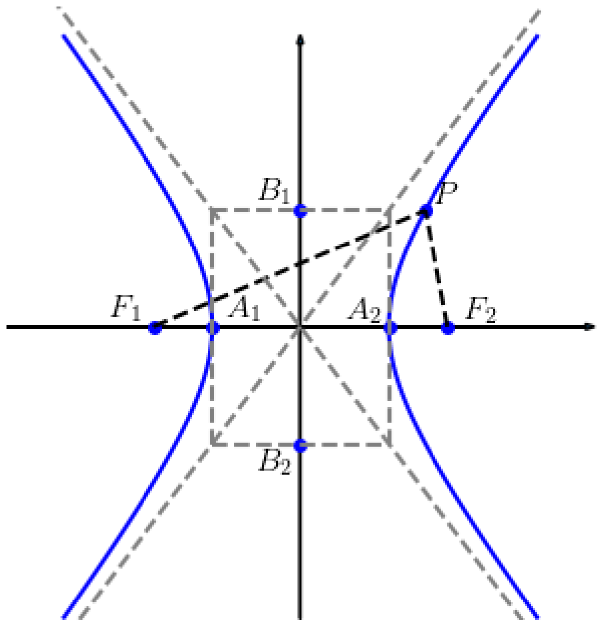


Figura 3.4: Ilustração de uma hipérbole de focos F_1 e F_2.

Os pontos F_1 e F_2 são chamados de **focos** da hipérbole e $2c = |F_1F_2|$ é chamada de **distância focal**. O ponto médio entre os pontos F_1 e F_2 é chamado de centro da hipérbole. São chamados **vértices** da hipérbole os pontos A_1 e A_2, sendo que o segmento A_1A_2 é chamado de **eixo real** (ou transverso) da hipérbole. O comprimento deste eixo é $|A_1A_2| = 2a$.

Sejam B_1 e B_2 pontos c distantes de A_1 e A_2 e pertencentes a reta que passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao seu eixo real. O segmento B_1B_2 é chamado de **eixo imaginário** (transverso ou conjugado). Denotando $2b = |B_1B_2|$, temos do triângulo retângulo B_1OA_1 que

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{3.35}$$

3.2.1 Equação reduzida da hipérbole

Assumimos um sistema de coordenadas cujo centro coincida com o centro de uma dada hipérbole e o eixo das abscissas seja coincidente com o eixo real da hipérbole. Desta forma, temos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Então, $P = (x, y)$ é um ponto da hipérbole quando

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a. \tag{3.36}$$

Daí, segue que

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a \tag{3.37}$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \tag{3.38}$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{3.39}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última equação, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{3.40}$$
$$+ (x-c)^2 + y^2 \tag{3.41}$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{3.42}$$
$$+ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \tag{3.43}$$

Simplificando e rearranjando os termos, temos

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}). \tag{3.44}$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \tag{3.45}$$

Simplificando e rearranjando os termos, obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{3.46}$$

Lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \tag{3.47}$$

Dividindo por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.48}$$

a qual é chamada de **equação reduzida da hipérbole**.

Exemplo 3.2.1. A Figura 3.5 é um esboço do gráfico da hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1. \tag{3.49}$$

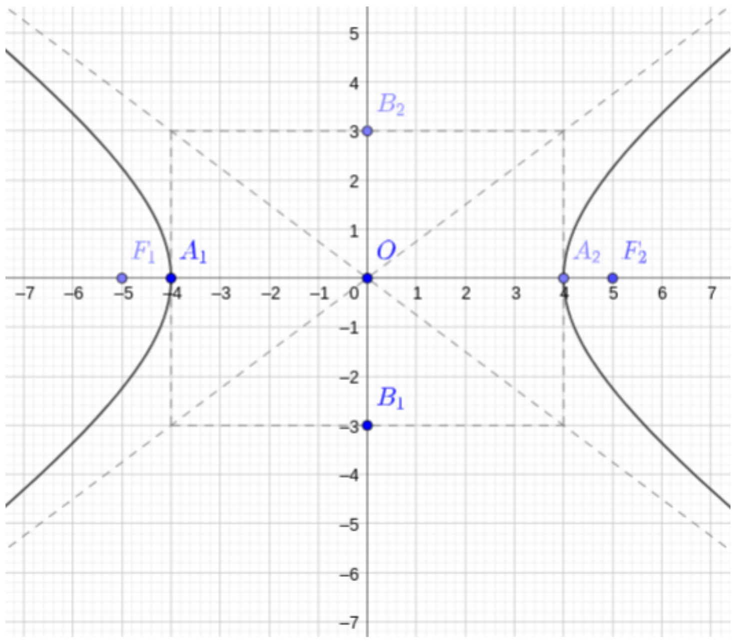


Figura 3.5: Esboço do gráfico da hipérbole de equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Exercícios resolvidos

ER 3.2.1. Obtenha a equação reduzida da hipérbole centrada na origem e de eixo real $|A_1A_2| = 8$ e eixo imaginário $|B_1B_2| = 4$.

Solução. A equação reduzida de uma hipérbole centrada na origem tem a forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.50}$$

onde $2a = |A_1A_2|$ e $2b = |B_1B_2|$. No caso deste exercício, temos

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \tag{3.51}$$

e

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2 \tag{3.52}$$

Logo, a equação buscada é

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \tag{3.53}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1. \tag{3.54}$$

$\Diamond$

ER 3.2.2. Faça o esboço da hipérbole de equação reduzida

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1. \tag{3.55}$$

Solução. Observe que nesta equação, o termo contendo x tem sinal negativo e o termo contendo y tem sinal positivo (compare com (3.48)). Isto nos indica que o eixo real desta hipérbole está na direção das ordenadas Oy e, consequentemente, o eixo imaginário na direção das abscissas Ox.

Da equação, temos $a^2 = 9$ e $b^2 = 16$, donde $a = 3$ e $b = 4$. Neste caso, os vértices que definem o eixo real são $A_1 = (0, -b) = (0, -4)$ e $A_2 = (0, b) = (0, 4)$. Os focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ são tais que

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{3.56}$$
$$= 9 + 16 \tag{3.57}$$
$$a = 25 \tag{3.58}$$
$$c = 5. \tag{3.59}$$

Com estas informações, traçamos o esboço dado na Figura 3.6.

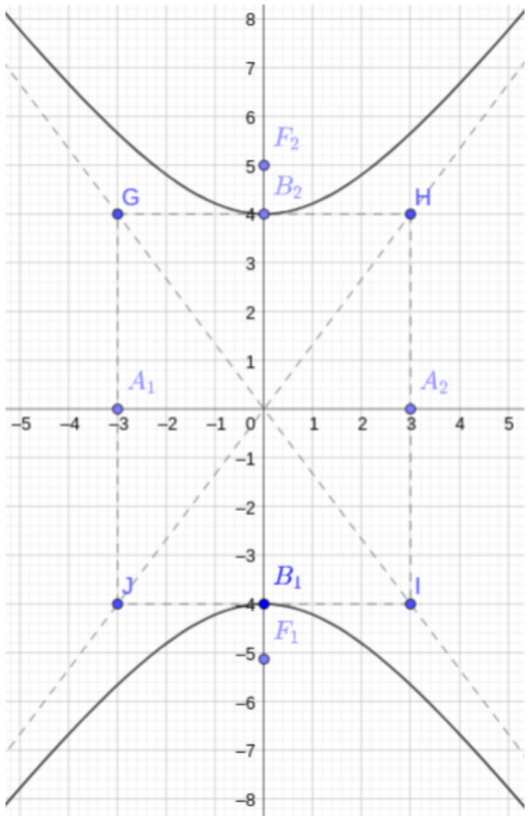


Figura 3.6: Esboço do gráfico da hipérbole de equação $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$.

◊

ER 3.2.3. Mostre que uma hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.60}$$

tem assíntotas

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{3.61}$$

Solução. De fato, ao isolarmos y na equação reduzida, obtemos

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} \tag{3.62}$$

Logo, para $x \to \infty$, temos

$$y \to \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2} \tag{3.63}$$

$$y \to \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}\sqrt{x^2} \tag{3.64}$$

$$y \to \pm\frac{b}{a}x \tag{3.65}$$

De forma análoga, quando $x \to -\infty$, temos

$$y \to \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2} \tag{3.66}$$

$$y \to \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}\sqrt{x^2} \tag{3.67}$$

$$y \to \mp\frac{b}{a}x \tag{3.68}$$

Ambos os resultados mostram que $y = \pm\frac{b}{a}x$ são assíntotas da hipérbole.

◊

Exercícios

E.3.2.1. Faça o esboço da hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \tag{3.69}$$

E.3.2.2. Faça o esboço da hipérbole de equação reduzida

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1 \tag{3.70}$$

E.3.2.3. Determine os vértices do eixo real das seguintes hipérboles:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $y^2 - \frac{x^2}{16} = 1$

E.3.2.4. Determine os focos das seguintes hipérboles:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $y^2 - \frac{x^2}{16} = 1$

E.3.2.5. Forneça a equação reduzida da hipérbole de focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e de vértices do eixo real $A_1 = (-1, 0)$ e $A_2 = (1, 0)$.

E.3.2.6. Forneça a equação reduzida da hipérbole de distância focal $|F_1F_2| = 2\sqrt{6}$ e de vértices do eixo imaginário $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$.

3.3 Parábola

Em um plano, consideramos uma reta d e um ponto F não pertencente a d. Chamamos de **parábola** o conjunto de pontos P do plano que são equidistantes de F e de d, i.e.

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \tag{3.71}$$

Veja a Figura 3.7.

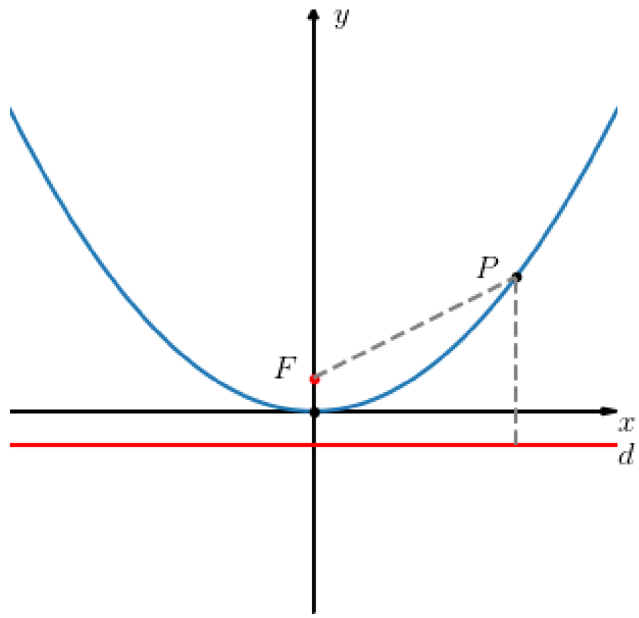


Figura 3.7: Ilustração de uma parábola.

O ponto F é chamado de **foco** da parábola. A reta d é chamada de **diretriz** da parábola. A reta perpendicular a d e que passa pelo ponto F é chamada de **eixo** da parábola. O ponto V de interseção entre a parábola e seu eixo é chamado de **vértice** da parábola.

3.3.1 Equação reduzida de uma parábola

Tomamos o sistema cartesiano de coordenadas com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas paralelo à diretriz. Seja p tal que

$$F = (0, p/2). \tag{3.72}$$

Logo, a diretriz tem equação $y = -p/2$. Da definição de parábola, $P = (x, y)$ pertence a parábola quando

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \tag{3.73}$$

Segue que

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}. \tag{3.74}$$

Elevando ao quadrado e expandindo, obtemos

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}. \tag{3.75}$$

Cancelando e rearranjando termos, obtemos

$$x^2 = 2py, \tag{3.76}$$

a chamada **equação reduzida da parábola**.

Exemplo 3.3.1. A Figura 3.8 é um esboço do gráfica da parábola de equação reduzida

$$x^2 = 4y. \tag{3.77}$$

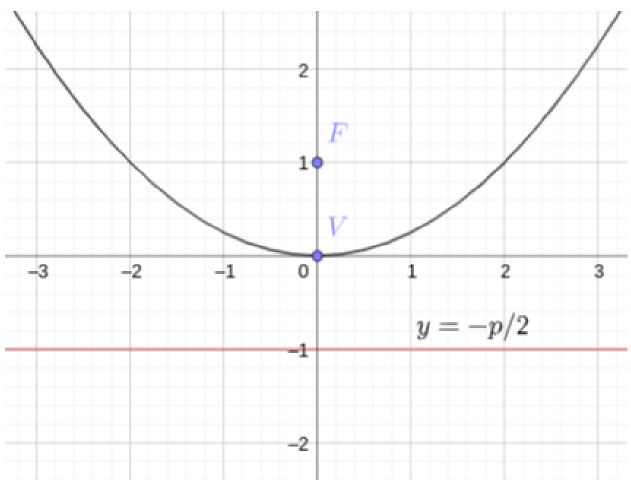


Figura 3.8: Esboço do gráfico da parábola de equação $y^2 = 4x$.

Observação 3.3.1. Uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano e foco $F = (p/2, 0)$, tem equação reduzida

$$y^2 = 2px. \tag{3.78}$$

Exercícios resolvidos

ER 3.3.1. Determine a equação reduzida da parábola de diretriz $y = 2$ e vértice na origem do sistema cartesiano. Por fim, faça o esboço de seu gráfico.

Solução. Uma parábola de equação reduzida

$$x^2 = 2py \tag{3.79}$$

tem diretriz $y = -\frac{p}{2}$. Logo, sabendo que a diretriz é $y = 2$, temos $p = -4$. Então, concluímos que a equação reduzida da parábola é

$$x^2 = -8y \tag{3.80}$$

A Figura 3.9 é o esboço do gráfico desta parábola.

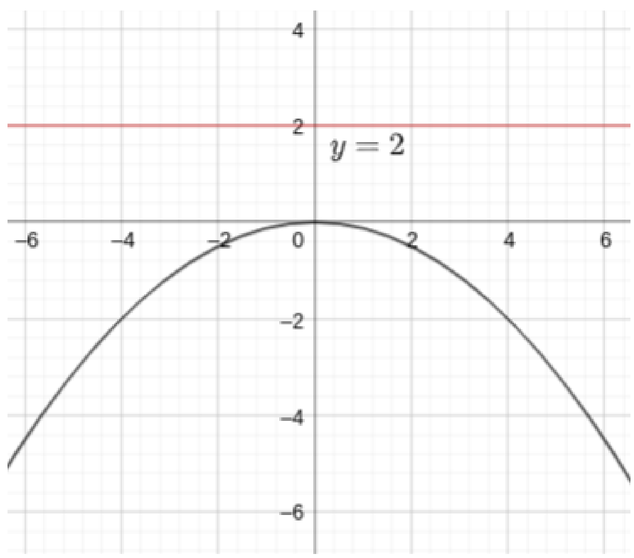


Figura 3.9: Esboço do gráfico da parábola de equação $y^2 = -8x$.

◊

ER 3.3.2. Determine a equação reduzida da parábola de diretriz $x = 2$ e vértice na origem do sistema cartesiano. Por fim, faça o esboço de seu gráfico.

Solução. Uma parábola de equação reduzida

$$y^2 = 2px \tag{3.81}$$

tem diretriz $x = -\frac{p}{2}$. Logo, sabendo que a diretriz é $x = 2$, temos $p = -4$. Então, concluímos que a equação reduzida da parábola é

$$y^2 = -8x \tag{3.82}$$

A Figura 3.10 é o esboço do gráfico desta parábola.

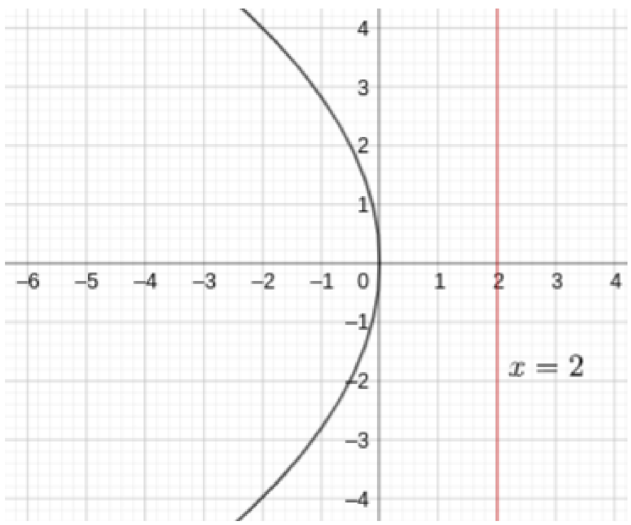


Figura 3.10: Esboço do gráfico da parábola de equação $y^2 = -8x$.

◊

Exercícios

E.3.3.1. Faça o esboço do gráfico da parábola de equação reduzida

$$x^2 = 2y. \tag{3.83}$$

Identifique no esboço a reta diretriz, o foco e o vértice da parábola.

E.3.3.2. Faça o esboço do gráfico da parábola de equação reduzida

$$x^2 = -2y. \tag{3.84}$$

Identifique no esboço a reta diretriz, o foco e o vértice da parábola.

E.3.3.3. Faça o esboço do gráfico da parábola de equação reduzida

$$y^2 = 2x. \tag{3.85}$$

Identifique no esboço a reta diretriz, o foco e o vértice da parábola.

E.3.3.4. Faça o esboço do gráfico da parábola de equação reduzida

$$y^2 = -2x. \tag{3.86}$$

Identifique no esboço a reta diretriz, o foco e o vértice da parábola.

E.3.3.5. Determine o foco de cada uma das seguintes parábolas:

a) $y = 2x^2$

b) $y + 2x^2 = 0$

c) $y^2 + 4x = 0$

d) $\frac{1}{4}y^2 = x$

Capítulo 4

Superfícies Quádricas

Neste capítulo, fazemos um estudo introdutório sobre superífices quádricas.

4.1 Introdução a superfícies quádricas

Superfícies no espaço que podem ser descritas por equações da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \quad (4.1)$$

são chamadas de **superfícies quádricas**, sendo a, b, c, d, e, f, m, n, p e q coeficientes dados.

4.1.1 Elipsoides

Um **elipsoide** centrado na origem é uma superfície quádrica de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.2)$$

Exemplo 4.1.1. A Figura 4.1 é um esboço do gráfico da elipsoide de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1. \quad (4.3)$$

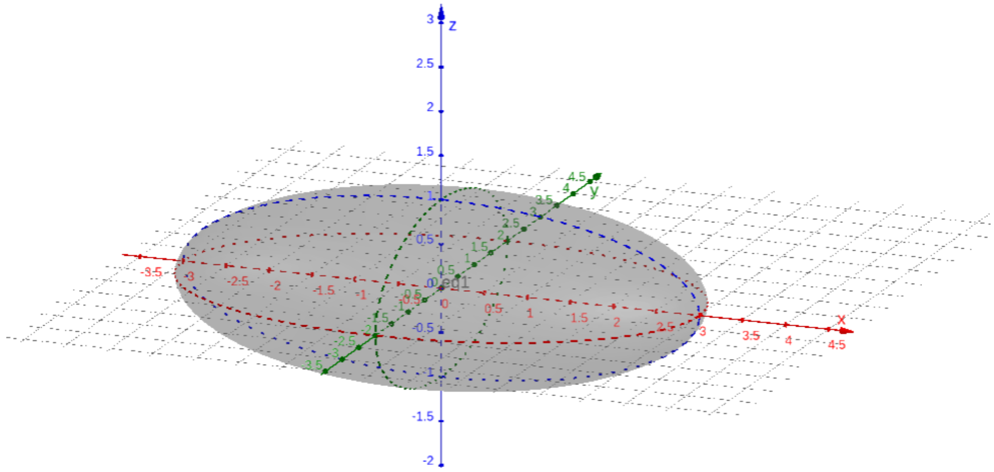


Figura 4.1: Esboço do elipsoide de equação (4.3).

Observamos que a interseção deste elipsoide com o plano $X-Y$ (z=0) é a elipse de equação

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1. \tag{4.4}$$

Ou seja, é a elipse de vértice sobre o eixo maior $A_1=(-3,0)$ e $A_2=(3,0)$ e vértices sobre o eixo menor $B_1=(-2,0)$ e $B_2=(2,0)$.

De forma análoga, temos que a interseção do elipsoide (4.3) com o plano $X-Z$ $(y=0)$ é a elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{9}+z^2=1. \tag{4.5}$$

Também, temos associada a elipse de equação reduzida

$$\frac{y^2}{4}+z^2=1 \tag{4.6}$$

que é obtida da interseção do elipsoide (4.3) com o plano $Y-Z$ $(x=0)$.

4.1.2 Hiperboloides

Hiperboloides de uma folha

Um hiperboloide de uma folha centrado na origem é uma superfície quádrica de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.7}$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.8}$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.9}$$

Exemplo 4.1.2. Vamos considerar o hiperboloide de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1. \tag{4.10}$$

Sua interseção com o plano $X - Y$ $(z = 0)$ é a elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \tag{4.11}$$

Sua interseção com o plano $X - Z$ (y=0) é a hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{9} - z^2 = 1. \tag{4.12}$$

E, a interseção do hiperboloide com o plano $Y - Z$ $(x = 0)$ é a hipérbole de equação

$$\frac{y^2}{4} - z^2 = 1. \tag{4.13}$$

A Figura 4.2 é o esboço do gráfico do hiperboloide de equação (4.10).

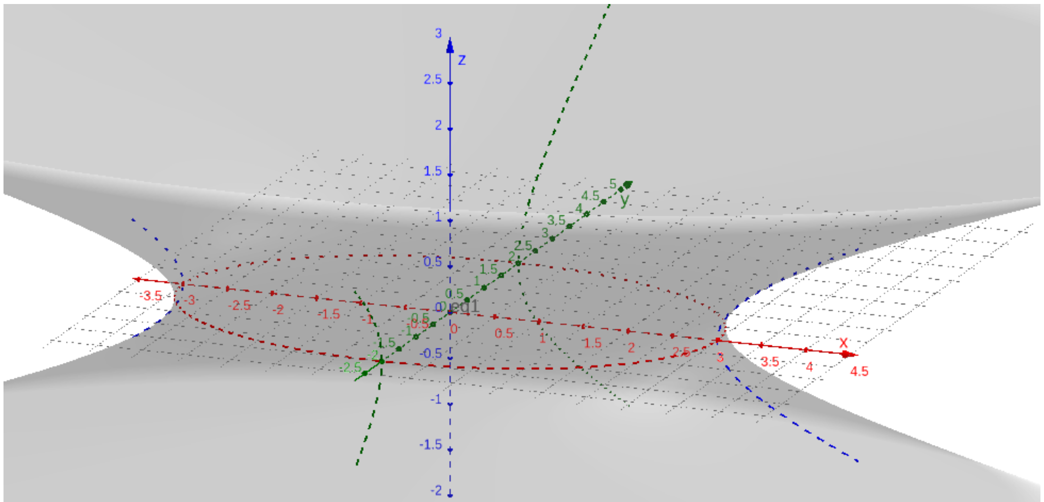


Figura 4.2: Esboço do hiperboloide de equação (4.10).

Exemplo 4.1.3. A Figura 4.3 é o esboço do gráfico do hiperboloide de equação

$$-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1. \tag{4.14}$$

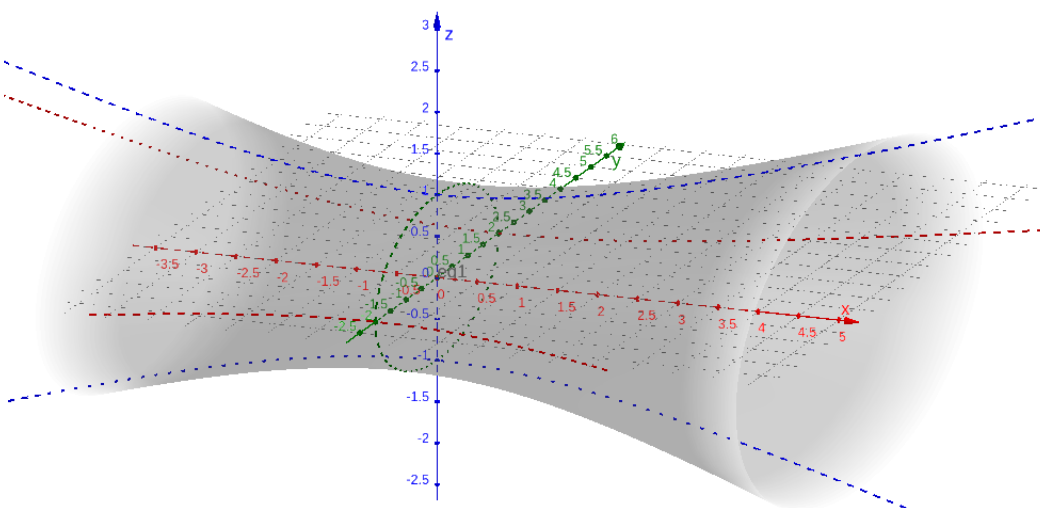


Figura 4.3: Esboço do hiperboloide de equação (4.14).

Sua interseção com o plano $X - Y$ $(z = 0)$ é a hipérbole

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \tag{4.15}$$

Sua interseção com o plano $X - Z$ (y=0) é a hipérbole de equação reduzida

$$-\frac{x^2}{9} + z^2 = 1. \tag{4.16}$$

E, a interseção do hiperboloide com o plano $Y - Z$ $(x = 0)$ é a elipse de equação

$$\frac{y^2}{4} + z^2 = 1. \tag{4.17}$$

Hiperboloides de duas folhas

Hiperboloides de duas folhas têm equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.18}$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.19}$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.20}$$

Exemplo 4.1.4. Vamos considerar o hiperboloide de equação

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1. \tag{4.21}$$

Sua interseção com o plano $X - Y$ $(z = 0)$ é a hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1. \tag{4.22}$$

Sua interseção com o plano $X - Z$ (y=0) é a hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{9} - z^2 = 1. \tag{4.23}$$

E, a interseção do hiperboloide com o plano $Y - Z$ $(x = 0)$ é vazia, pois não existem y e z que satisfazem a equação

$$-\frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \tag{4.24}$$

A Figura 4.4 é o esboço do gráfico do hiperboloide de equação (4.21).

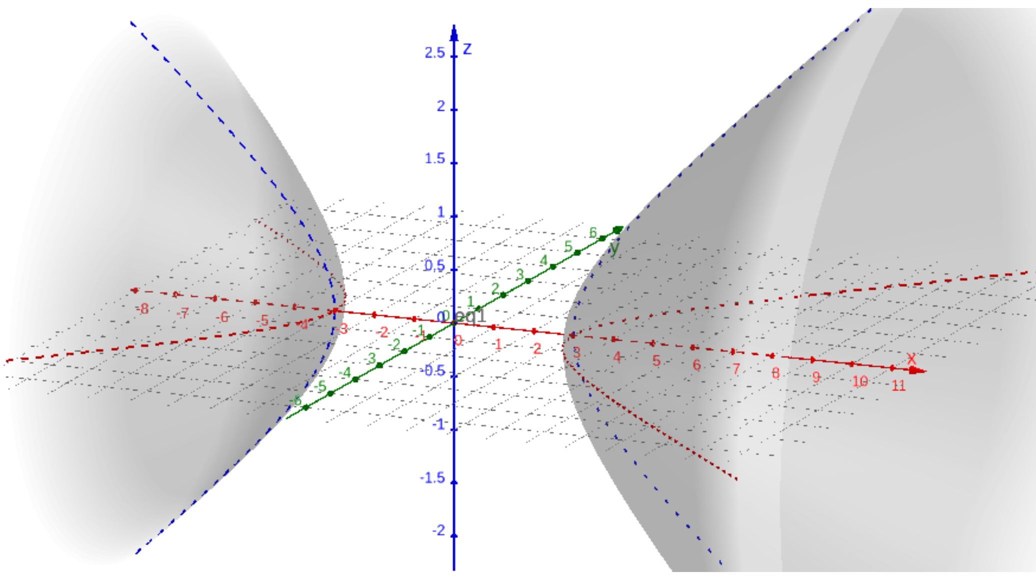


Figura 4.4: Esboço do hiperboloide de equação (4.21).

4.1.3 Paraboloide elíptico

Um paraboloide elíptico tem equação

$$\pm z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{4.25}$$

ou

$$\pm y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \tag{4.26}$$

ou

$$\pm x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \tag{4.27}$$

Exemplo 4.1.5. Vamos considerar o paraboloide elíptico de equação

$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \tag{4.28}$$

Não há valor $z < 0$ que satisfaça a equação (4.28). Sua interseção com o plano $X - Y$ ($z = 0$) é o ponto $(0, 0, 0)$. Agora, sua interseção com cada plano paralelo ao plano $X - Y$ e com $z = z_0 > 0$ é a elipse de equação

$$z_0 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \tag{4.29}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x^2}{9z_0} + \frac{y^2}{4z_0} = 1. \tag{4.30}$$

A Figura 4.5 é o esboço do gráfico do paraboloide elíptico de equação (4.28).

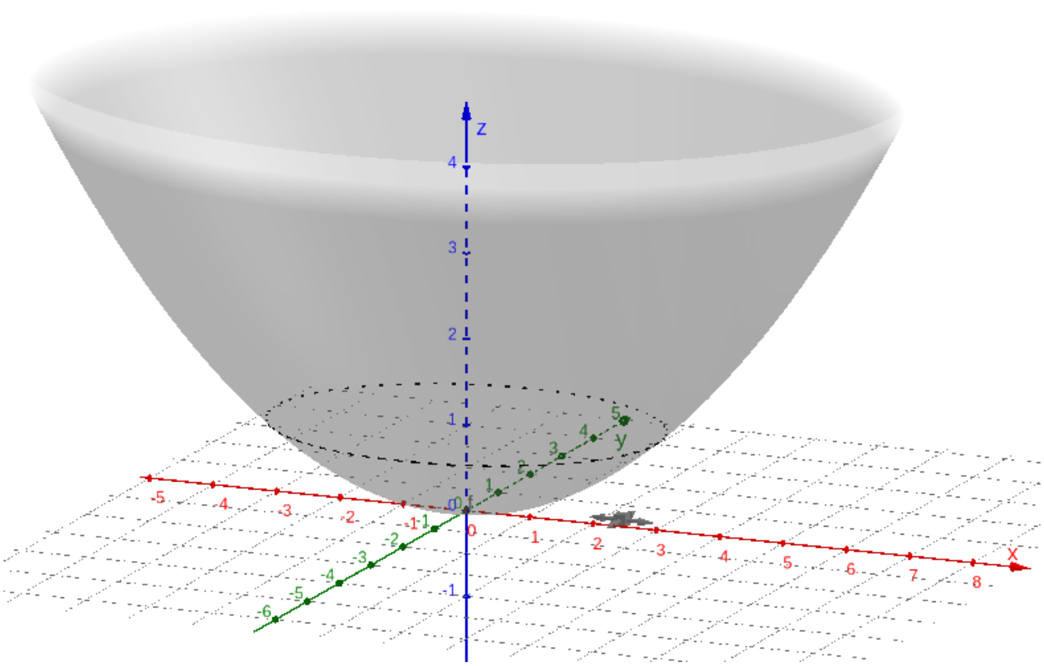


Figura 4.5: Esboço do paraboloide elíptico de equação (4.28).

Exemplo 4.1.6. O esboço do gráfico de paraboloide elíptico de equação

$$-x = \frac{y^2}{4} + z^2 \tag{4.31}$$

é dado na Figura 4.6. Verifique!

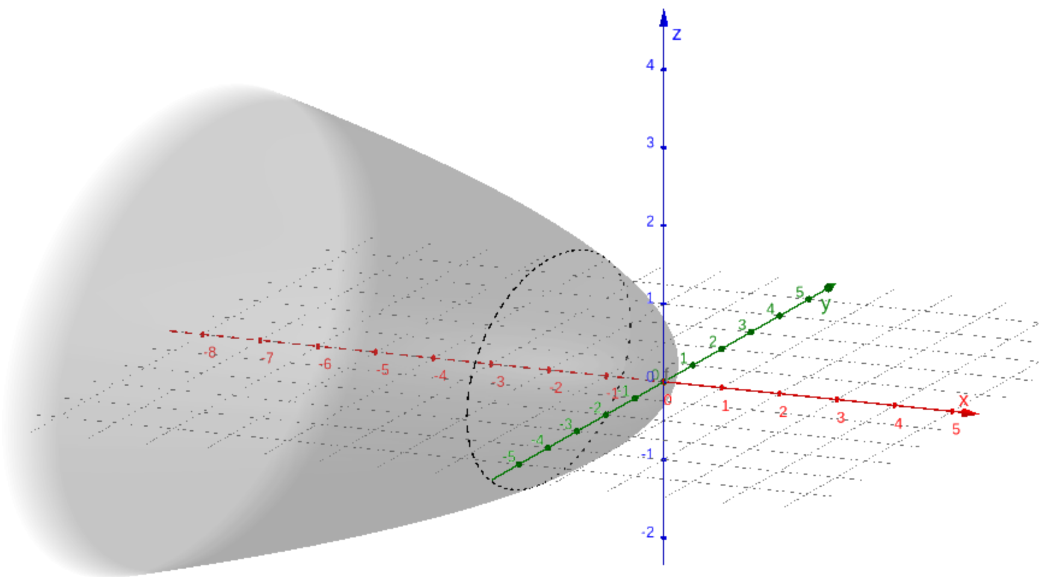


Figura 4.6: Esboço do paraboloide elíptico de equação (4.31).

4.1.4 Paraboloide hiperbólico

Um paraboloide elíptico tem equação

$$\pm z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{4.32}$$

ou

$$\pm y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \tag{4.33}$$

ou

$$\pm x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \tag{4.34}$$

Exemplo 4.1.7. Vamos considerar o paraboloide hiperbólico de equação

$$z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}. \tag{4.35}$$

Sua interseção com o plano $X-Y$ ($z=0$) são retas que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0. \tag{4.36}$$

De fato, isolando y, obtemos as equações destas retas

$$y = \pm\frac{2}{3}x. \tag{4.37}$$

Sua interseção com o plano $X-Z$ (y=0) é a parábola de equação

$$z = \frac{x^2}{9}. \tag{4.38}$$

E, a interseção do paraboloide hiperbólico com o plano $Y-Z$ ($x=0$) é a parábola de equação

$$z = -\frac{y^2}{4}. \tag{4.39}$$

A Figura 4.7 é o esboço do gráfico do paraboloide hiperbólico de equação (4.35).

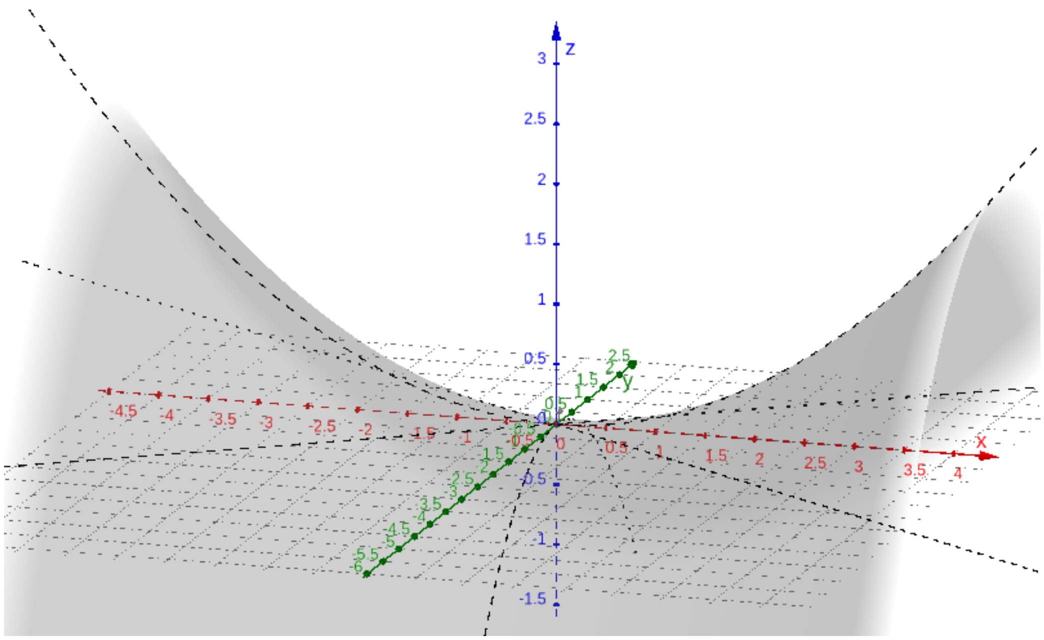


Figura 4.7: Esboço do paraboloide hiperbólico de equação (4.35).

Exercícios resolvidos

ER 4.1.1. Escreva a equação do elipsoide que tem como interseções

a) com o plano $z = 0$ a elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \tag{4.40}$$

b) com o plano $y = 0$ a elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \tag{4.41}$$

Solução. Um elipsoide tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.42}$$

Sua interseção com o plano $X-Y$ $(z=0)$ é a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.43}$$

Logo, do item a), temos $a^2=4$ e $b^2=16$.

Agora, a interseção com o plano $X-Z$ $(y=0)$ é a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4.44}$$

Assim, do item b), obtemos $c^2=9$.

Desta forma, concluímos que o elipsoide de equação

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1. \tag{4.45}$$

◊

ER 4.1.2. Encontre a equação do paraboloide elíptico que contem a circunferência

$$x^2+z^2=1, \quad y=-2. \tag{4.46}$$

Solução. Para que o paraboloide contenha a circunferência

$$x^2+z^2=1, \quad y=-2, \tag{4.47}$$

ele precisa abrir-se no sentido negativo na direção y. Logo, tem equação

$$-y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}. \tag{4.48}$$

Fixado $y=-2$, a equação fica restrita a

$$2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}. \tag{4.49}$$

Notamos que para esta equação coincida com a circunferência $x^2+z^2=1$, devemos escolher $a^2=b^2=1/2$. Logo, concluímos que o paraboloide elíptico tem equação

$$-y=\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{\frac{1}{2}}. \tag{4.50}$$

◊

Exercícios

E.4.1.1. Classifique cada uma das seguintes superfícies quádricas:

a) $\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$

b) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

c) $z = -x^2 - \frac{y^2}{9}$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

E.4.1.2. Forneça a equação do elipsoide que contem os pontos $P = (0, 2, 0)$, $Q = (-1, 0, 0)$ e $R = (0, 0, 1)$.

E.4.1.3. Forneça a equação do hiperboloide de duas folhas que tem interseções:

a) com o eixo $X - Y$ igual a hipérbole

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \tag{4.51}$$

b) com o eixo $Y - Z$ igual a hipérbole

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \tag{4.52}$$

E.4.1.4. Forneça a equação do paraboloide elíptico que contem a elipse

$$\frac{x^2}{2} + z^2 = 1, \quad y = 2. \tag{4.53}$$

E.4.1.5. Considere o hiperboloide de uma folha de equação

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1. \tag{4.54}$$

Classifique o lugar geométrico de sua interseção com cada um dos seguintes planos

1. $X - Y$
2. $X - Z$
3. $Y - Z$

Resposta dos Exercícios

E.1.1.1. $\vec{v} = (1, -2, 4)$

E.1.1.2. $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

E.1.1.3. $B = (1, 1, 7)$

E.1.1.4. $x = -5$

E.1.1.5. $|CD| = \sqrt{6}$

E.1.2.1. a) $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} = (-2, 1, 1)$; b) $x = 1 - 2\lambda$, $y = -2 + \lambda$, $z = \lambda$; c) $\frac{x-1}{-2} = y + 2 = z$

E.1.2.2. $x = \frac{1}{2}$

E.1.2.3. $A = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$

E.1.2.4. $x - 1 = \frac{y+1}{-1} = z$

E.1.2.5. $x = 1 - \lambda$, $y = -1 - 2\lambda$, $z = -\lambda$

E.1.3.1. $\overrightarrow{AP} = \lambda(2, -1, 1) + \beta(-1, 1, 2), \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$

E.1.3.2. $x = 5$

E.1.3.3. $x = -1 + 2\lambda - \beta$, $y = -\lambda + \beta$, $z = 2 + \lambda + 2\beta$

E.1.3.4. $y = 3$

E.1.3.5. $-3x - 5y + z - 5 = 0$

E.1.3.6. $z = 5$

E.1.3.7. sim

E.1.3.8. $x = 2 + 6\lambda$, $y = -1 - 7\lambda$, $z = -5\lambda$

E.2.1.1. a) $A = (3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$; b) $B = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$; c) $C = (\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6})$

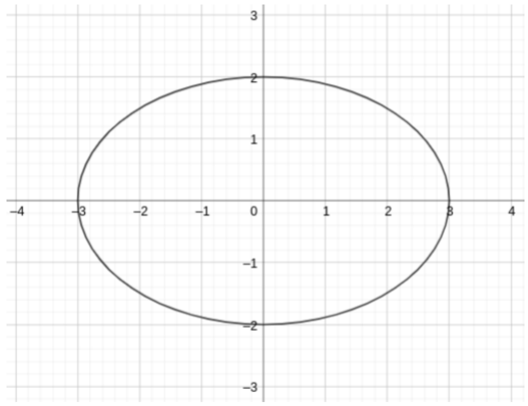
E.2.1.2. a) $A = (\sqrt{3}, 1)$; b) $B = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$; c) $C = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

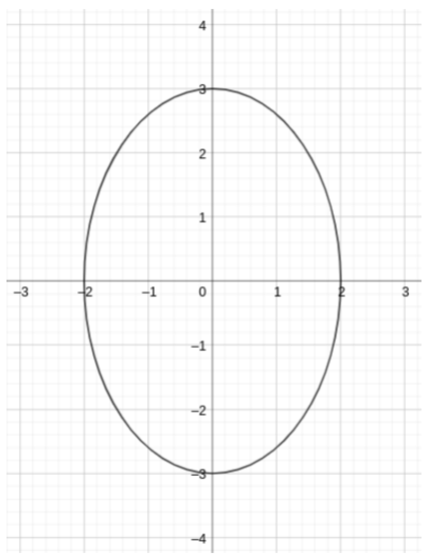
E.2.1.3. $\theta = \frac{\pi}{2}$

E.2.1.4. $y = -x$

E.2.1.5. $r = 1$

E.2.1.6. $x^2 + y^2 = 2$

E.3.1.1. 

E.3.1.2. 

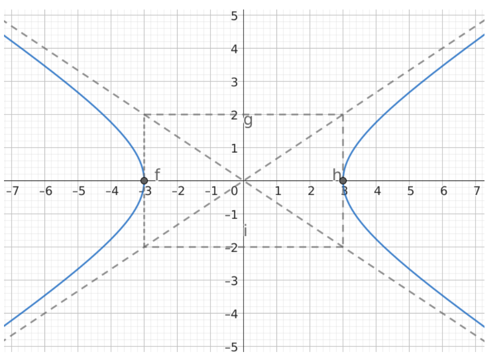
E.3.1.3. a) $(-3, 0)$, $(3, 0)$; b) $(0, -4)$, $(0, 4)$

E.3.1.4. a) $(-\sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, 0)$; b) $(0, \sqrt{15})$, $(0, \sqrt{15})$

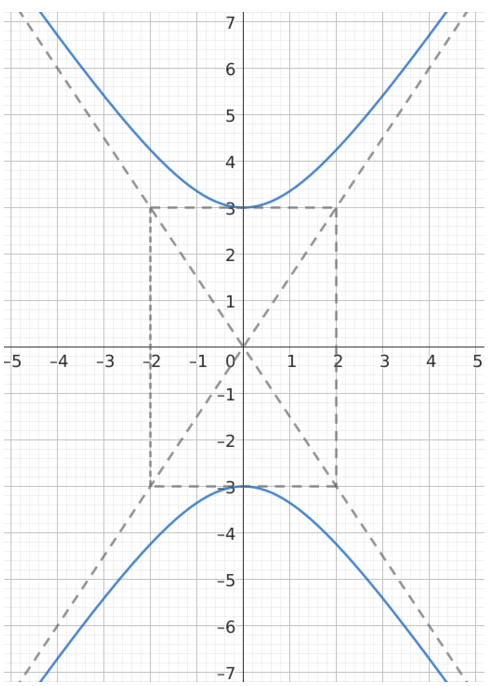
E.3.1.5. $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$

E.3.1.6. $x^2 + \dfrac{y^2}{5} = 1$

E.3.2.1.



E.3.2.2.

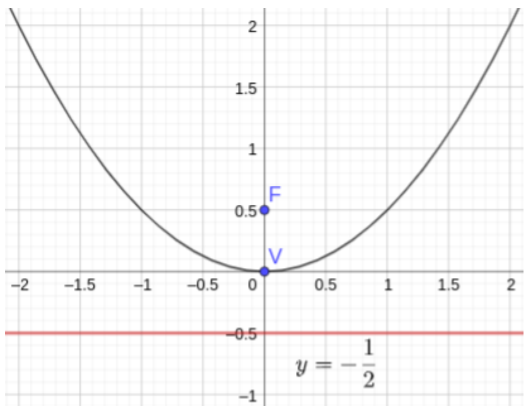


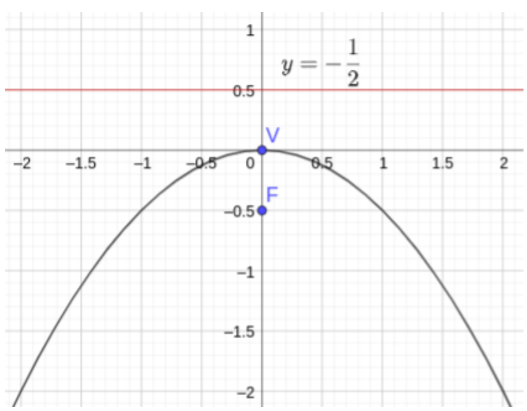
E.3.2.3. a) $A_1 = (-3, 0)$, $A_2 = (3, 0)$; b) $B_1 = (0, -1)$, $B_2 = (0, 1)$

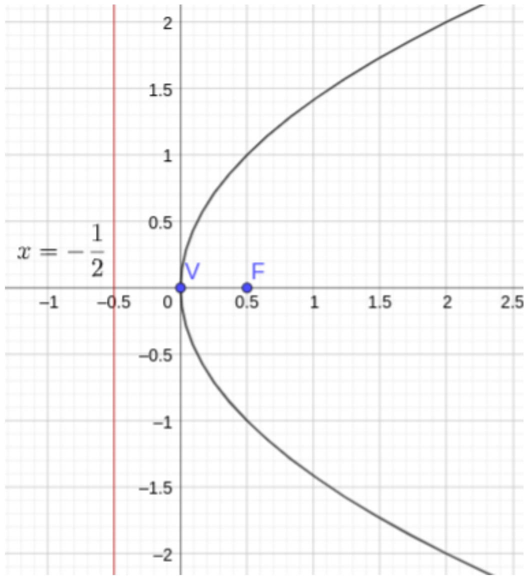
E.3.2.4. a) $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$; b) $F_1 = (0, -\sqrt{17})$, $F_2 = (0, \sqrt{17})$

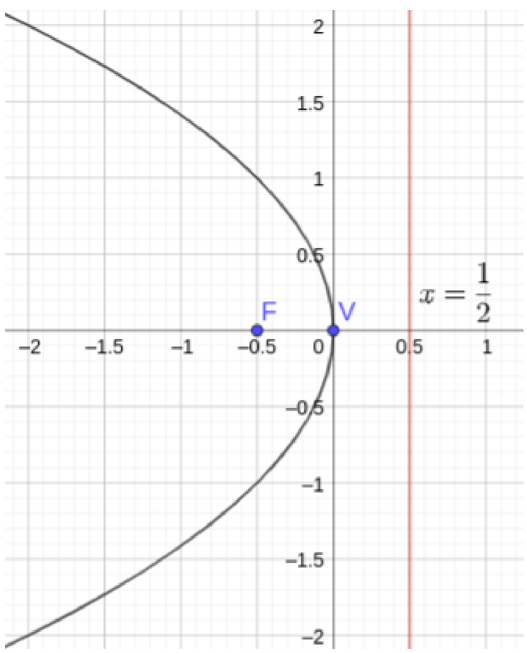
E.3.2.5. $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$

E.3.2.6. $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

E.3.3.1. 

E.3.3.2. 

E.3.3.3. 

E.3.3.4. 

E.3.3.5. a) $F = (0, \frac{1}{8})$; b) $F = (0, -\frac{1}{8})$; c) $F = (-1, 0)$; d) $F = (1, 0)$

E.4.1.1. a) hiperboloide de uma folha; b) elipsoide; c) paraboloide elíptico; d) ponto $(0,0,0)$

E.4.1.2. $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

E.4.1.3. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

E.4.1.4. $y = x^2 + \frac{z^2}{\frac{1}{2}}$

E.4.1.5. a) hipérbole; b) elipse; c) hipérbole

Notas

[1]René Descartes, 1596 - 1650, matemático e filósofo francês. Fonte: Wikipédia: René Descartes.

Referências

[1] Mello, D.A.; Watanabe, R.G.. Vetores e uma iniciação à geometria analítica, Livraria da Física, 2. ed., 2011.