Matemática Numérica III

Pedro H A Konzen

17 de dezembro de 2024

Konzen, Pedro Henrique de Almeida

Matemática numérica avançada / Pedro Henrique de Almeida Konzen. –2024. Porto Alegre.- 2024.

Versão: 17 de dezembro de 2024.

"Esta obra é uma edição independente feita pelo próprio autor."

1. Métodos numéricos. 2. Análise numérica. 3. Linguagem Python.

Licença CC-BY-SA 4.0.

Licença

Este texto é disponibilizado sob a Licença Atribuição-Compartilha Igual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite

http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR

ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

O site notaspedrok.com.br é uma plataforma que construí para o compartilhamento de minhas notas de aula. Essas anotações feitas como preparação de aulas é uma prática comum de professoras/es. Muitas vezes feitas a rabiscos em rascunhos com validade tão curta quanto o momento em que são concebidas, outras vezes, com capricho de um diário guardado a sete chaves. Notas de aula também são feitas por estudantes - são anotações, fotos, prints, entre outras formas de registros de partes dessas mesmas aulas. Essa dispersão de material didático sempre me intrigou e foi o que me motivou a iniciar o site.

Com início em 2018, o site contava com apenas três notas incipientes. De lá para cá, conforme fui expandido e revisando os materiais, o site foi ganhando acessos de vários locais do mundo, em especial, de países de língua portuguesa. No momento, conta com 13 notas de aula, além de minicursos e uma coleção de vídeos e áudios.

As notas de **Matemática Numérica III** abordam tópicos sobre sistemas lineares de médio/grande porte, sistemas não-lineares, problemas de otimização, problemas de autovalores e integração auto-adaptativa. Códigos exemplos são apresentados em linguagem Python.

Aproveito para agradecer a todas/os que de forma assídua ou esporádica contribuem com correções, sugestões e críticas! ;)

Pedro H A Konzen

https://www.notaspedrok.com.br

Conteúdo

Licença Prefácio					
					Conteúdo
1	Sist	emas i	Lineares	1	
	1.1	Matri	zes Esparsas	1	
		1.1.1	Sistemas Tridiagonais	3	
		1.1.2	Matrizes Banda	6	
		1.1.3	Esquemas de Armazenamento	11	
	1.2	Métod	dos Iterativos	18	
		1.2.1	GMRES	18	
		1.2.2	Método do Gradiente Conjugado	25	
		1.2.3	Precondicionamento	31	
2	Sist	emas i	Não Lineares e Otimização	34	
	2.1	Sisten	nas Não-Lineares	34	
		2.1.1	Método de Newton	35	
		2.1.2	Método Tipo Newton	38	
	2.2	Proble	emas de Minimização	39	
		2.2.1	Métodos de Declive	40	
		2.2.2	Método do Gradiente	41	
		2.2.3	Método de Newton	45	
		2.2.4	Método do Gradiente Conjugado	51	
3	Aut	ovalor	res e Autovetores	56	

${\bf notaspedrok.com.br}$

3.1	Método da Potência	56			
	3.1.1 Autovalor dominante	56			
	3.1.2 Método da Potência Inversa	59			
	3.1.3 Métodos de Deflação	61			
3.2	Iteração QR	61			
4 Int	Integração				
4.1	Integração Autoadaptativa	64			
4.2	Integrais múltiplas	67			
	4.2.1 Regras de Newton-Cotes	67			
	4.2.2 Regras Compostas de Newton-Cotes	70			
Notas					
Referências					
Índice de Comandos					

Capítulo 1

Sistemas Lineares

Em revisão

Neste capítulo, estudamos métodos numéricos para a resolução de sistemas lineares de médio e grande porte. Salvo explicitado ao contrário, assume-se que os sistemas são quadrados e têm solução única.

1.1 Matrizes Esparsas

Em revisão

Uma matriz é dita ser **esparsa** quando ela tem apenas poucos elementos não nulos. A ideia é que os elementos não nulos não precisam ser guardados na memória do computador, gerando um grande benefício na redução da demanda de armazenamento de dados. O desafio está no desenvolvimento de estruturas de dados para a alocação eficiente de tais matrizes, i.e. que sejam suficientemente adequadas para os métodos numéricos conhecidos.

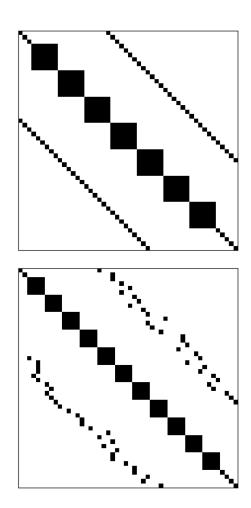


Figura 1.1: Em cima: exemplo de uma matriz esparsa estruturada. Em baixo: exemplo de uma matriz esparsa não-estruturada.

Matrizes esparsas podem ser classificadas como estruturadas ou não-estruturadas. Uma matriz estruturada é aquela em que as entradas não-nulas formam um padrão regular. Por exemplo, estão dispostas em poucas diagonais ou formam blocos (submatrizes densas) ao longo de sua diagonal principal. No caso de não haver um padrão regular das entradas não-nulas, a matriz esparsa é dita ser não-estruturada. Consulte a Figura 1.1 para exemplos.

A esparsidade de uma matriz é a porcentagem de elementos nulos que ela

tem, i.e. para uma matriz quadrada $n \times n$ tem-se que a esparsidade é

$$e := \frac{n_{\text{nulos}}}{n^2} \times 100\%.$$
 (1.1)

Por exemplo, a matriz identidade de tamanho n = 100 tem esparsidade

$$e = \frac{100^2 - 100}{100^2} \times 100\% = 99\%. \tag{1.2}$$

1.1.1 Sistemas Tridiagonais

Em revisão

Um sistema tridiagonal tem a seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & & & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & & & \\ & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$
 (1.3)

Ou seja, é um sistema cuja a matriz dos coeficientes é tridiagonal.

Uma matriz tridiagonal é uma matriz esparsa estruturada. Mais especificamente, é um caso particular de uma matriz banda, em que os elementos não nulos estão dispostos apenas em algumas de suas diagonais. Para armazenarmos tal matriz precisamos alocar apenas os seguintes três vetores

$$d_1 = (0, a_{1,2}, \dots, a_{n-1,n}), \tag{1.4}$$

$$d_0 = (a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}), (1.5)$$

$$d_{-1} = (a_{2,1}, \dots, a_{n,n-1}, 0). \tag{1.6}$$

Ou seja, precisamos armazenar 3n pontos flutuantes em vez de n^2 , como seria o caso se a matriz dos coeficientes fosse densa. Com isso, podemos alocar a matriz do sistema da seguinte forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} * & a_{1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{n,n-1} & * \end{bmatrix}.$$

$$(1.7)$$

Ou seja, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{i,j}]_{i,j=1}^{3,n}$, sendo

$$\tilde{a}_{1+i-j,j} = a_{i,j}. (1.8)$$

Exemplo 1.1.1. Seja o seguinte sistema linear

$$2x_1 - x_2 = 0 (1.9)$$

$$x_{i-1} - 6x_i + 4x_{i+1} = \operatorname{sen}\left(i\frac{\pi}{2(n-1)}\right)$$
 (1.10)

$$x_{n-1} + x_n = 1 (1.11)$$

O seguinte código Python faz a alocação de seu vetor dos termos constantes b e de sua matriz de coeficientes no formato compacto de \tilde{A} .

Código 1.1: diagSis.py

```
1 import numpy as np
2 n = 100000
4 # alocação
5 # vetor dos termos constantes
6b = np.empty(n)
7 b [0] = 0.
8 \text{ for i in range}(1,n-1):
   b[i] = np.sin(i*np.pi/(2*(n-1)))
10 b[n-1] = 1.
11 print(b)
12 print(f"b size: {b.size*b.itemsize/1024} Kbytes")
14 # matriz compacta
tA = np.zeros((3,n))
17 # indexação
18 def ind(i,j):
19 return 1+i-j,j
20
21 tA[ind(0,0)] = 2.
22 tA[ind(0,1)] = -1.
```

```
23 for i in range(1,n-1):
24    tA[ind(i,i-1)] = 1.
25    tA[ind(i,i)] = -3.
26    tA[ind(i,i+1)] = 4.
27 tA[ind(n-1,n-2)] = 1.
28 tA[ind(n-1,n-1)] = 1.
29 print(tA)
30 print(f"tA size: {tA.size*tA.itemsize/1024**2:1.1f}
} Mbytes")
```

 \triangle

Algoritmo de Thomas (TDMA)

Em revisão

O algoritmo de Thomas⁵ ou TDMA (do inglês, *Tridiagonal Matrix Algorithm*) é uma forma otimizada do método de eliminação gaussiana⁶ aplicada a sistemas tridiagonais. Enquanto este requer $O(n^3)$ operações, esse demanda apenas O(n).

Eliminando os termos abaixo da diagonal em (1.3), obtemos o sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & 0 & | & b_1 \\ & \tilde{a}_{2,2} & a_{2,3} & & | & \tilde{b}_2 \\ & & \tilde{a}_{3,3} & \ddots & | & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} & | & \tilde{b}_{n-1} \\ 0 & & & \tilde{a}_{n,n} & | & \tilde{b}_n \end{bmatrix}$$

$$(1.12)$$

Este é obtido pela seguinte iteração

$$w \leftarrow \frac{a_{i+1,i}}{a_{i,i}} \tag{1.13}$$

$$a_{i,i} \leftarrow a_{i,i} - w \cdot a_{i-1,i} \tag{1.14}$$

$$b_i \leftarrow b_i - w \cdot b_{i-1} \tag{1.15}$$

onde, o ~ foi esquecido de propósito, indicando a reutilização da matriz \tilde{A} e

do vetor b. A solução do sistema é, então, obtida de baixo para cima, i.e.

$$x_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{n,n}} \tag{1.16}$$

$$x_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_i \leftarrow \frac{b_i - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{i,i}},$$

$$(1.16)$$

com $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$.

Código 1.2: tdma.py

```
1 def tdma(ta, b):
    a = ta.copy()
   x = b.copy()
   # eliminação
   for i in range(1,n):
    w = a[2,i-1]/a[1,i-1]
    a[1,i] -= w * a[0,i]
7
     x[i] -= w * x[i-1]
8
    # resolve
9
   x[n-1] = x[n-1]/a[1,n-1]
10
    for i in range(n-2,-1,-1):
      x[i] = (x[i] - a[0,i+1]*x[i+1])/a[1,i]
12
    return x
13
```

Matrizes Banda 1.1.2

Em revisão

Uma matriz banda é aquela em que os elementos não nulos estão dispostos em apenas algumas de suas diagonais. Consulte a Figura 1.2.

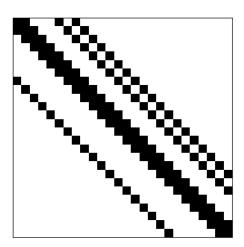


Figura 1.2: Exemplo de uma matriz banda.

Exemplo 1.1.2. Consideramos o seguinte problema de Poisson⁷

$$-\Delta u = f(x, y), \ (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), \tag{1.18}$$

$$u(0,y) = 0, \ y \in [0,\pi], \tag{1.19}$$

$$u(\pi, y) = 0, \ y \in [0, \pi],$$
 (1.20)

$$u(x,0) = 0, \ x \in [0,\pi],$$
 (1.21)

$$u(x,\pi) = 0, \ x \in [0,\pi],$$
 (1.22)

onde, $\Delta:=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ é o operador laplaciano⁸. Para fixarmos as ideias, vamos assumir

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \tag{1.23}$$

Vamos empregar o **método de diferenças finitas** para computar uma aproximação para a sua solução. Começamos assumindo uma malha uniforme de n^2 nodos

$$x_i = (i-1)h \tag{1.24}$$

$$y_j = (j-1)h (1.25)$$

com tamanho de malha $h = \pi/(n-1)$, i = 1, 2, ..., n e j = 1, 2, ..., n. Empregando a fórmula de diferenças central, encontramos o seguinte problema

discreto associado

$$u_{i,1} = u_{1,j} = 0 (1.26)$$

$$-\frac{1}{h^2}u_{i-1,j} - \frac{1}{h^2}u_{i,j-1} + \frac{4}{h^2}u_{i,j} - \frac{1}{h^2}u_{i+1,j} - \frac{1}{h^2}u_{i,j+1} = f(x_i, y_j)$$
(1.27)

$$u_{i,n} = u_{n,j} = 0 (1.28)$$

Este é um sistema linear $n^2 \times n^2$. Tomando em conta as condições de contorno, ele pode ser reduzido a um sistema $(n-2)^2 \times (n-2)^2$

$$Aw = b \tag{1.29}$$

usando a enumeração das incógnitas

$$(i,j) \to k = i - 1 + (j-2)(n-2),$$
 (1.30)

i.e.

$$u_{i,j} = w_{k=i-1+(j-2)(n-2)} (1.31)$$

para i, j = 2, ..., n-2. Consulte a Figura 1.3 para uma representação da enumeração em relação a malha.

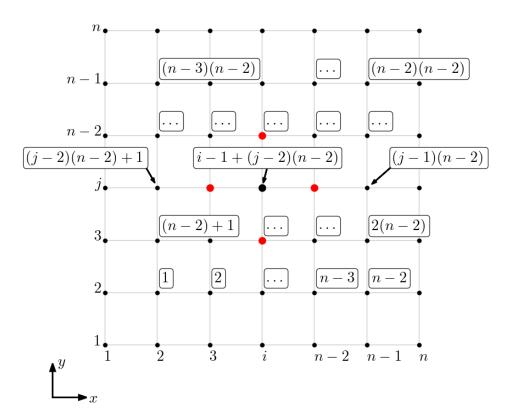


Figura 1.3: Representação da enumeração das incógnitas referente ao problema discutido no Exemplo 1.1.2.

Afim de obtermos uma matriz diagonal dominante, vamos ordenar as equações do sistema discreto como segue

•
$$j = 2, i = 2$$
:

$$4w_k - w_{k+1} - w_{k+n-2} = h^2 f_{i,j}$$
(1.32)

•
$$j = 2, i = 3, ..., n - 2$$
:
$$-w_{k-1} + 4w_k - w_{k+1} - w_{k+n-2} = h^2 f_{i,j}$$
(1.33)

• j = 2, i = n - 1:

$$-w_{k-1} + 4w_k - w_{k+n-2} = h^2 f_{i,j}$$
 (1.34)

• $j = 3, \dots, n-2, i = 2$:

$$-w_{k-(n-2)} + 4w_k - w_{k+1} - w_{k+n-2} = h^2 f_{i,j}$$
 (1.35)

• $j = 3, \dots, n-2, i = 3, \dots, n-2$:

$$-w_{k-1} - w_{k-(n-2)} + 4w_k - w_{k+1} - w_{k+n-2} = h^2 f_{i,j}$$
 (1.36)

• $j = 3, \dots, n-2, i = n-1$:

$$-w_{k-1} - w_{k-(n-2)} + 4w_k - w_{k+n-2} = h^2 f_{i,i}$$
 (1.37)

• j = n - 1, i = 2:

$$-w_{k-(n-2)} + 4w_k - w_{k+1} = h^2 f_{i,j}$$
 (1.38)

• $j = n - 1, i = 3, \dots, n - 2$:

$$-w_{k-1} - w_{k-(n-2)} + 4w_k - w_{k+1} = h^2 f_{i,j}$$
 (1.39)

• j = n - 1, i = n - 1:

$$-w_{k-1} - w_{k-(n-2)} + 4w_k = h^2 f_{i,j}$$
 (1.40)

Com isso, temos um sistema com matriz com 5 bandas, consulte a Figura 1.4.

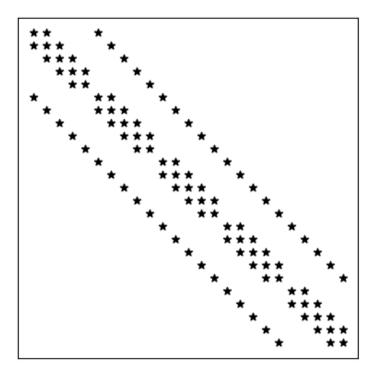


Figura 1.4: Representação da matriz do sistema discreto construído no Exemplo 1.1.2.

 \triangle

1.1.3 Esquemas de Armazenamento

Em revisão

A ideia é armazenar apenas os elementos não-nulos de uma matriz esparsa, de forma a economizar a demanda de armazenamento computacional. Cuidados devem ser tomados para que a estrutura de armazenamento utilizada seja adequada para a computação das operações matriciais mais comuns.

Formato COO

Em revisão

O formato COO (do inglês, *COOrdinate format*) é o esquema de armazenamento simples de matrizes esparsas. As estrutura de dados consiste em três arranjos:

- 1. um arranjo contendo as entradas não-nulas da matriz;
- 2. um arranjo contendo seus índices de linha;
- 3. um arranjo contendo seus índices de coluna.

O método scipy.sparse.coo_array permite a alocação de matrizes no formato COO.

Exemplo 1.1.3. O seguinte código armazena a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 3. & 2. & -1. \\ 0 & -1 & -2. & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1. \end{bmatrix}$$
 (1.41)

no formato COO.

```
import numpy as np
from scipy.sparse import coo_array

data = np.array([2.,1.,3.,2.,-1.,-1.,-2.,1.])
row = np.array([0,0,1,1,1,2,2,3])

col = np.array([0,2,1,2,3,1,2,3])
Acoo = coo_array((data, (row, col)), shape=(4,4))
print("Acoo = \n", Acoo)
print("A = \n", Acoo.toarray())
```

Δ

Vantagens do formato COO

- Permite a entrada de dados duplicados (simplicidade).
- Conversão rápida para os formatos CSR e CSC⁹.

Desavantagens do formato COO

- complexidade em operações aritméticas.
- complexidade na extração de submatrizes.

Observação 1.1.1. (Entradas Duplicadas.) O formato COO permite a entrada duplicada de elementos da matriz. Na conversão para outros formatos (por exemplo, CSR ou CSC), as entradas duplicadas são somadas.

Formato CSR

Em revisão

O formato CSR (do inglês, Compressed Sparse Row) é uma variação do COO que busca diminuir a alocação de dados repetidos. Assim como o COO, o formato conta com três arranjos d, c, p:

- d é o arranjo contendo os elementos não-nulos da matriz, ordenados por linhas (i.e., da esquerda para direita, de cima para baixo);
- c é o arranjo contendo o índice das colunas das entradas não-nulas da matriz (como no formato COO);
- p é um arranjo cujos elementos são a posição no arranjo c em que cada linha da matriz começa a ser representada. O número de elementos de i-ésima linha da matriz dado por $p_{j+1} p_j$.

O método scipy.sparse.csr_array permite a alocação de matrizes no formato CSR.

Exemplo 1.1.4. No Exemplo 1.1.3, alocamos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 3. & 2. & -1. \\ 0 & -1 & -2. & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1. \end{bmatrix}$$
 (1.42)

no formato COO. Aqui, vamos converter a alocação para o formato CSR e, então, verificar seus atributos.

```
1 from scipy.sparse import csr_array
2 Acsr = Acoo.tocsr()
```

```
3 print(f'd = {Acsr.data}')
4 print(f'c = {Acsr.indices}')
5 print(f'p = {Acsr.indptr}')

d = [ 2.  1.  3.  2. -1. -1. -2.  1.]
c = [0 2 1 2 3 1 2 3]
p = [0 2 5 7 8]
```

Por exemplo, o elemento p[i=2] = 5 aponta para o c[k=5] = 1, o que fornece A[i=2,j=1] = d[k] = -1. Verifique!

Vantagens do formato CSR

- operações aritméticas eficientes;
- fatiamento por linhas eficiente;
- multiplicação matriz vetor eficiente.

Desvantagens do formato CSR

- fatiamento por colunas não eficiente;
- custo elevado de realocamento com alteração da esparsidade da matriz.

Formato CSC

Em revisão

O formato CSC (do inglês, Compressed Sparse Column) é uma variação análoga do CSR, mas para armazenamento por colunas. O formato conta com três arranjos d, l, p:

- d é o arranjo contendo os elementos não-nulos da matriz, ordenados por colunas (i.e., de cima para baixo, da esquerda para direita);
- l é o arranjo contendo o índice das linhas das entradas não-nulas da matriz;
- p é um arranjo cujos elementos são a posição no arranjo l em que cada

coluna da matriz começa a ser representada. O número de elementos de j-ésima coluna da matriz dado por $p_{j+1} - p_j$.

O método scipy.sparse.csc_array permite a alocação de matrizes no formato CSC.

Exemplo 1.1.5. No Exemplo 1.1.3, alocamos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 3. & 2. & -1. \\ 0 & -1 & -2. & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1. \end{bmatrix}$$
 (1.43)

no formato COO. Aqui, vamos converter a alocação para o formato CSC e, então, verificar seus atributos.

```
from scipy.sparse import csc_array
Acsc = Acoo.tocsc()

l = Acsc.indices
p = Acsc.indptr
print(f'd = {Acsc.date}')
print(f'l = {Acsc.indices}')
print(f'p = {Acsc.indptr}')

d = [2. 3. -1. 1. 2. -2. -1. 1.]
l = [0 1 2 0 1 2 1 3]
p = [0 1 3 6 8]
```

Assim sendo, o elemento p[j=2] = 3 aponta para o 1[k=3] = 0, o que informa que A[i=0, j=2]=d[k]=1.. Verifique!

Vantagens do formato CSC

- fatiamento por colunas eficiente;
- operações aritméticas eficientes;
- multiplicação matriz vetor eficiente¹.

Desvantagens do formato CSC

¹CSR é mais eficiente em muitos casos.

- fatiamento por linhas não eficiente;
- custo elevado de realocamento com alteração da esparsidade da matriz.

Observação 1.1.2. Além dos formatos COO, CSR e CSC, exitem ainda vários outros que podem empregados e que são mais eficientes em determinadas aplicações. Recomendamos a leitura de [9, Seção 3.4] e da documentação do scipy.sparse.

Exercícios

Em revisão

E.1.1.1. Considere o problema de Poisson dado no Exemplo 1.1.2.

- a) Armazene a matriz do problema discreto associado usando o formato COO.
- b) Converta a matriz armazenada para o formato CSR². Então, compute a solução do problema discreto com o método spsolve³.
- c) Converta a matriz armazenada para o formato CSC⁴. Então, compute a solução do problema discreto com o método spsolve.
- d) Compare a eficiência da computação entre os itens b) e c) para tamanhos de malha $h=10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

E.1.1.2. Considere o seguinte sistema linear

$$2x_1 - x_2 = 0 (1.44)$$

$$x_{i-1} - 6x_i + 4x_{i+1} = \operatorname{sen}\left(i\frac{\pi}{2(n-1)}\right)$$
 (1.45)

$$x_{n-1} + x_n = 1 (1.46)$$

²Use o método coo matrix.tocsr().

 $^{^3 \}texttt{scipy.sparse.linalg.spsolve}$ é uma implementação do Método LU otimizado para matrizes esparsas.

⁴Use o método coo_matrix.tocsc().

- a) Compute sua solução usando o Algoritmo de Thomas para n=3.
- b) Compare a solução obtida no item anterior com a gerada pela função scipy.linalg.solve.
- c) Compare a solução com a obtida no item anterior com a gerada pela função scipy.linalg.solve banded.
- d) Use o módulo Python datetime para comprar a demanda de tempo computacional de cada um dos métodos acima. Compute para n = 10, 100, 1000, 10000.

E.1.1.3. Considere que o problema de valor de contorno (PVC)

$$-u'' = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1, \tag{1.47}$$

$$u(0) = 0, (1.48)$$

$$u(1) = 0 \tag{1.49}$$

seja simulado com o Método das Diferenças Finitas⁵. Vamos assumir uma discretização espacial uniforme com n nodos e tamanho de malha

$$h = \frac{1}{n-1}. (1.50)$$

Com isso, temos os nodos $x_i = (i-1)h$, i = 1, 2, ..., n. Nos nodos internos, aplicamos a fórmula de diferenças central

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2},\tag{1.51}$$

onde, $u_i \approx u(x_i)$. Com isso, a discretização da EDO fornece

$$-\frac{1}{h^2}u_{i-1} + \frac{2}{h^2}u_i - \frac{1}{h^2}u_{i+1} = \operatorname{sen}\pi x_i \tag{1.52}$$

para $i=2,3,\ldots,n-1$. Das condições de contorno temos $u_1=u_n=0$. Logo, o problema discreto lê-se: encontrar $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$u_1 = 0 (1.53)$$

$$u_1 = 0 (1.53)$$

$$-\frac{1}{h^2}u_{i-1} + \frac{2}{h^2}u_i - \frac{1}{h^2}u_{i+1} = \operatorname{sen} \pi x_i (1.54)$$

$$u_n = 0 (1.55)$$

⁵Consulte mais em Notas de Aula: Matemática Numérica.

- a) Calcule a solução analítica do PVC.
- b) Use a função scipy.linalg.solve_banded para computar a solução do problema discreto associado para diferentes tamanhos de malha $h=10^{-1},10^{-2},10^{-3},10^{-4}$. Compute o erro da solução discreta em relação à solução analítica.
- c) Compare a demanda de tempo computacional se a função scipy.linalg .solve for empregada na computação da solução discreta.

E.1.1.4. Consideremos o problema trabalho no Exemplo 1.1.2.

a) Use a função scipy.linalg.solve para computar a solução do problema discreto associado para diferentes tamanhos de malha $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$. Compute o erro da solução discreta em relação à solução analítica. Compare as aproximações com a solução analítica

$$u(x,y) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y).$$
 (1.56)

- b) Compare a demanda de tempo e memória computacional se a função scipy.linalg.solve_banded for empregada na computação da solução discreta.
- c) Baseado no Algoritmo de Thomas, implemente o Método de Eliminação Gaussiana otimizado para a matriz banda deste problema. Compare com as abordagens dos itens a) e b).

1.2 Métodos Iterativos

Em revisão

1.2.1 GMRES

Em revisão

O GMRES (do inglês, Generalized Minimal Residual Method¹⁰) é um método de subespaço de Krylov¹¹ e é considerado uma das mais eficientes

técnicas para a resolução de sistemas lineares gerais e de grande porte (esparsos).

Método de Subespaço de Krylov

Em revisão

A ideia básica é resolver o sistema linear

$$Ax = b \tag{1.57}$$

por um **método de projeção**. Mais especificamente, busca-se uma solução aproximada $x_m \in \mathbb{R}^n$ no subespaço afim $x_0 + \mathcal{K}_m$ de dimensão m, impondo-se a **condição de Petrov**¹²-Galerkin¹³

$$b - Ax_m \perp \mathcal{L}_m, \tag{1.58}$$

onde \mathcal{L}_m também é um subespaço de dimensão m. Quando \mathcal{K}_m é um subespaço de Krylov, i.e.

$$\mathcal{K}_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{m-1}r_0\},$$
 (1.59)

temos o **método de subespaço de Krylov**. Aqui, temos o **resíduo**

$$r_0 = b - Ax_0, (1.60)$$

sendo x_0 uma aproximação inicial para a solução do sistema. Notamos que com isso, temos que a aproximação calculada é tal que

$$A^{-1}b \approx x_m = x_0 + q_{m-1}(A)r_0, \tag{1.61}$$

onde q_{m-1} é um dado polinômio de grau m-1. No caso particular de $x_0=0$, temos

$$A^{-1}b \approx q_{m-1}(A)b. (1.62)$$

Diferentes versões deste método são obtidas pelas escolhas do subespaço \mathcal{L}_m e formas de precondicionamento do sistema.

GMRES

Em revisão

O GMRES é um método de subespaço de Krylov assumindo $\mathcal{L}_m = A\mathcal{K}_m$, com

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_m(A, v_1) = \text{span}\{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\},$$
 (1.63)

onde $v_1 = r_0/||r_0||$ é o vetor unitário do resíduo $r_0 = b - Ax_0$ para uma dada aproximação inicial x_0 da solução do sistema Ax = b.

Vamos derivar o método observando que qualquer vetor x em $x_0 + \mathcal{K}_m$ pode ser escrito como segue

$$x = x_0 + V_m y \tag{1.64}$$

onde, $V_m = [v_1, \ldots, v_m]$ é a matriz $n \times m$ cujas colunas formam uma base ortogonal $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de \mathcal{K}_m e $y \in R^m$. Aqui, V_m é computada usandose o seguinte **método de Arnoldi**¹⁴- **Gram**¹⁵-Schmidt¹⁶ **modificado** [9, Subseção 6.3]:

- 1. Dado v_1 de norma 1
- 2. Para j = 1, ..., m:
 - (a) $w_i \leftarrow Av_i$
 - (b) Para i = 1, ..., j:

i.
$$h_{i,j} \leftarrow (w_j, v_i)$$

ii.
$$w_i \leftarrow w_i - h_{i,i}v_i$$

- (c) $h_{i+1,j} \leftarrow ||w_i||$
- (d) Se $h_{j+1,j} \leftarrow 0$, então pare.
- (e) $v_{j+1} \leftarrow w_j / h_{j+1,j}$

Seja, então, $\bar{H}_m = [h_{i,j}]_{i,j=1}^{m+1,m}$ a **matriz de Hessenberg**¹⁷ cujas entradas não nulas são computadas pelo algoritmo acima (Passos 2(a)i-ii). Pode-se

mostrar que [9, Proposição 6.5]

$$J(y) = ||b - Ax|| \tag{1.65}$$

$$= ||b - A(x_0 + V_m y)|| \tag{1.66}$$

$$= \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\| \tag{1.67}$$

onde, $\beta = ||r_0||$.

A aproximação GMRES x_m é então computada como

$$x_m = x_0 + V_m y_m, (1.68)$$

$$y_m = \min_{y} \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\| \tag{1.69}$$

Observamos que este último é um pequeno problema de minimização, sendo que requer a solução de um sistema $(m+1) \times m$ de mínimos quadrados, sendo m normalmente pequeno.

Em resumo, a solução GMRES x_m é computada seguindo os seguintes passos:

- 1. Escolhemos uma aproximação inicial x_0 para a solução de Ax = b.
- 2. Computamos o resíduo $r_0 = b Ax_0$.
- 3. Computamos o vetor unitário $v_1 = r_0/\|r_0\|$.
- 4. Usamos o método de Arnoldi-Gram-Schmidt modificado para calculamos uma base ortogonal V_m de \mathcal{K}_m e a matriz de Hessenberg \bar{H}_m associada.
- 5. Computamos $y_m = \min_y \|\beta e_1 \hat{H}_m y\|$.
- 6. Computamos $x_m = x_0 + V_m y$.

Observação 1.2.1 (Convergência). Pode-se mostrar que o GMRES converge em ao menos n passos.

Observação 1.2.2 (GMRES com a ortogonalização de Householder). No algoritmo acima, o método modificado de Gram-Schmidt é utilizado no processo de Arnoldi. Uma versão numericamente mais eficiente é obtida quando a transformação de Householder¹⁸ é utilizada. Consulte mais em [9, Subsetion 6.5.2].

Observação 1.2.3 (GMRES com Reinicialização). O restarted GM-RES é uma variação do método para sistemas que requerem uma aproximação GMRES x_m com m grande. Nestes casos, o método original pode demandar um custo muito alto de memória computacional. A ideia consiste em assumir m pequeno e, caso não suficiente, recalcular a aproximação GMRES com $x_0 = x_m$. Este algoritmo pode ser descrito como segue.

- 1. Computamos $r_0 = b Ax_0$, $\beta = ||r_0|| e v_1 = r_0/\beta$
- 2. Computamos V_m e \hat{H}_m pelo método de Arnoldi
- 3. Computamos

$$y_m = \min_{y} \|\beta e_1 - \hat{H}_m y\| \tag{1.70}$$

$$x_m = x_0 + V_m y_m \tag{1.71}$$

4. Se $||b - Ax_m||$ é satisfatória, paramos. Caso contrário, setamos $x_0 := x_m$ e voltamos ao passo 1.

A convergência do restarted GMRES não é garantida para matrizes que não sejam positiva-definidas. △

Exercícios

Em revisão

- **E.1.2.1.** Considere o problema discreto do Exercício 1.1.3.
- a) Compute a solução com a implementação restarted GMRES

scipy.sparse.linalg.gmres.

- b) Por padrão, o intervalo de iterações entre as inicializações é restart=20. Compare o desempenho para diferentes intervalos de reinicialização.
- c) Compare o desempenho entre as abordagens dos ítens a) e b) frente a implementação do método de eliminação gaussiana disponível em

scypi.sparse.linalg.spsolve.

E.1.2.2. Considere o problema discreto trabalhado no Exemplo 1.1.2.

a) Compute a solução com a implementação restarted GMRES

scipy.sparse.linalg.gmres.

- b) Por padrão, o intervalo de iterações entre as inicializações é restart=20. Compare o desempenho para diferentes intervalos de reinicialização.
- c) Compare o desempenho entre as abordagens dos ítens a) e b) frente a implementação do método de eliminação gaussiana disponível em

scypi.sparse.linalg.spsolve.

E.1.2.3. Considere o seguinte problema de Poisson¹⁹ com condições de contorno não homogêneas.

$$-\Delta u = f(x, y), \ (x, y) \in D, \tag{1.72}$$

$$u = g, \quad \text{em } \partial D$$
 (1.73)

Para fixarmos as ideias, vamos assumir o domínio $D = (0,1) \times (0,1)$, a fonte

$$f(x,y) = 2\pi^2 \sin \pi (x+y)$$
 (1.74)

e os valores no contorno

$$g = \operatorname{sen} \pi(x+y), \quad (x,y) \in \partial D. \tag{1.75}$$

Observamos que a solução analítica deste problema é

$$u(x,y) = \operatorname{sen} \pi(x+y). \tag{1.76}$$

Empregue o método de diferenças finitas para computar uma aproximação para a solução. Assumimos uma malha uniforme de n^2 nodos

$$x_i = (i-1)h (1.77)$$

$$y_i = (j-1)h (1.78)$$

com tamanho de malha $h=1/(n-1), i=1,2,\ldots,n$ e $j=1,2,\ldots,n$. Empregando a fórmula de diferenças central encontramos o seguinte problema discreto associado

$$u_{i,1} = g(x_i, 0) (1.79)$$

$$u_{1,j} = g(0, y_j) (1.80)$$

$$-\frac{1}{h^2}u_{i-1,j} - \frac{1}{h^2}u_{i,j-1} + \frac{4}{h^2}u_{i,j}$$

$$-\frac{1}{h^2}u_{i+1,j} - \frac{1}{h^2}u_{i,j+1} = f(x_i, y_j)$$
(1.81)

$$u_{i,n} = g(x_i, 1) (1.82)$$

$$u_{n,j} = g(1, y_j) (1.83)$$

Este pode ser escrito na forma matricial

$$Aw = b (1.84)$$

onde, A é $(n-2)^2\times (n-2)^2$ e assumindo a enumeração

$$u_{i,j} = w_{k=i-1+(j-2)(n-2)}, \quad i, j = 2, \dots, n-2.$$
 (1.85)

Consulte a Figura 1.4.

1. Compute a solução do problema discreto associado usando a seguinte implementação Python do GMRES

scipy.sparse.linalg.gmres

2. Compare o desempenho com a aplicação do método LU implemento em

scipy.sparse.linalg.spsolve

E.1.2.4. Faça sua própria implementação do método GMRES. Valide-a e compare-a com a resolução do exercício anterior (Exercício 1.2.3).

1.2.2 Método do Gradiente Conjugado

Em revisão

O <mark>método do gradiente conjugado</mark> é uma das mais eficientes técnicas iterativas para a resolução de sistema linear com matriz esparsa, simétrica e definida positiva. Vamos assumir que o sistema

$$Ax = b \tag{1.86}$$

onde, a A é simétrica e definida positiva.

O método pode ser derivado a partir do método de Arnoldi²⁰ [9, Seção 6.7] ou como uma variação do método do gradiente. Este é caminho que será adotado aqui.

Método do Gradiente

Em revisão

A ideia é reformular o sistema Ax = b como um problema de minimização. Vamos começar definindo o funcional

$$J(y) = \frac{1}{2}y^{T}Ay - y^{T}b. (1.87)$$

O vetor y que minimiza J é a solução de Ax = b. De fato, denotando x a solução de Ax = b, temos

$$J(y) = \frac{1}{2}y^{T}Ay - y^{T}b + \frac{1}{2}x^{T}Ax - \frac{1}{2}x^{T}Ax$$
 (1.88)

$$= \frac{1}{2}(y-x)^{T}A(y-x) - \frac{1}{2}x^{T}Ax$$
 (1.89)

O último termo é independente de y e, portanto, J é mínimo quando

$$\frac{1}{2}(y-x)^T A(y-x)$$
 (1.90)

é minimizado. Agora, como A é definida positiva²¹, o menor valor deste termo ocorre quando y-x=0, i.e. y=x.

Observamos, também, que o gradiente de J é

$$\nabla J = Ay - b \tag{1.91}$$

i.e., é o oposto do resíduo r=b-Ay. Com isso, temos que y=x é a única escolha tal que $\nabla J=0$. Ainda, temos que ∇J é o vetor que aponta na direção e sentido de maior crescimento de J. Isso nos motiva a aplicarmos a seguinte iteração 22

$$x^{(0)} = \text{aprox. inicial} \tag{1.92}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla J(x^{(k)})$$
(1.93)

onde, $\alpha_k > 0$ é um escalar que regula o tamanho do passo a cada iteração. Lembrando que $-\nabla J = r$, temos que a iteração é equivalente a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}. (1.94)$$

Notamos que $x^{(k+1)}$ é um ponto na reta $\{x^{(k)} + \alpha r^{(k)} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ que tem a mesma direção de $\nabla J(x^{(k)})$ e passa pelo ponto $x^{(k)}$. O procedimento de escolher um $\alpha^{(k)}$ entre todos os possíveis, é conhecido como pesquisa linear (em inglês, $line\ search$).

A cada iteração, queremos escolher α_k de forma que $J\left(x^{(k+1)}\right) \leq J\left(x^{(k)}\right)$. Isso pode ser garantido fazendo a seguinte escolha⁶

$$J\left(x^{(k+1)}\right) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} J\left(x^{(k)} + \alpha r^{(k)}\right) \tag{1.95}$$

A fim de resolver este problema de minimização, vamos denotar

$$g(\alpha) = J\left(x^{(k)} + \alpha r^{(k)}\right). \tag{1.96}$$

Então, observamos que

$$g(\alpha) = \frac{1}{2} \left(x^{(k)} + \alpha r^{(k)} \right)^T A \left(x^{(k)} + \alpha r^{(k)} \right) - \left(x^{(k)} + \alpha r^{(k)} \right)^T b$$
$$= \frac{1}{2} x^{(k)T} A x^{(k)} + \frac{\alpha}{2} x^{(k)T} A r^{(k)} + \frac{\alpha}{2} r^{(k)T} A x^{(k)}$$

 $^{^6 {\}rm Chamada}$ de pesquisa linear exata. Qualquer outra escolha para α é conhecida como pesquisa linear não exata.

Pedro H A Konzen

$$+\frac{\alpha^2}{2}r^{(k)T}Ar^{(k)} - x^{(k)T}b - \alpha r^{(k)T}b$$
 (1.97)

Agora, usando o fato de A ser simétrica, obtemos

$$g(\alpha) = J(x^{(k)}) + \alpha r^{(k)T} A x^{(k)} + \frac{\alpha^2}{2} r^{(k)T} A r^{(k)} - \alpha r^{(k)T} b$$
 (1.98)

$$= J(x^{(k)}) - \alpha r^{(k)T} r^{(k)} + \frac{\alpha^2}{2} r^{(k)T} A r^{(k)}$$
(1.99)

a qual, é uma função quadrática. Seu único mínimo, ocorre quando

$$0 = g'(\alpha) \tag{1.100}$$

$$= -r^{(k)^T} r^{(k)} + \alpha r^{(k)^T} b. \tag{1.101}$$

Logo, encontramos

$$\alpha = \frac{r^{(k)^T} r^{(k)}}{r^{(k)^T} A r^{(k)}} \tag{1.102}$$

Com isso, temos a iteração do Método do Gradiente

$$x^{(0)} = \text{aprox. inicial} \tag{1.103}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}, \tag{1.104}$$

$$\alpha_k = \frac{r^{(k)^T} r^{(k)}}{r^{(k)^T} A r^{(k)}} \tag{1.105}$$

Observação 1.2.4 (Detalhe de Implementação). Observamos que, a cada iteração, precisamos computar $Ar^{(k)}$ (no cálculo de α_k) e $Ax^{(k)}$ (no cálculo do resíduo). Essas multiplicações matriz-vetor são os passos computacionais mais custosos do método. Podemos otimizar isso usando o fato de que

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A r^{(k)}. (1.106)$$

 \triangle

Exercícios

Em revisão

E.1.2.5. Faça sua implementação do método do gradiente.

E.1.2.6. Use a implementação feita no Exercício 1.2.5 nos seguintes itens.

- a) Compute a solução do problema discreto do Exemplo 1.1.2 pelo Método do Gradiente. Quantas iterações são necessárias para obter um resíduo com norma $\leq 10^{-14}$?
- b) Compute a solução do problema discreto do Exercício 1.2.3 pelo Método do Gradiente. Quantas iterações são necessárias para obter um resíduo com norma $\leq 10^{-14}$?
- c) Compare a aplicação do método GMRES 23 e do método LU 24 nos itens anteriores.

E.1.2.7. Considere o Exercício 1.2.3.

- a) Use sua implementação do método do gradiente para computar uma solução aproximada, cuja norma do resíduo $\leq 10^{-14}$.
- b) Compare o desempenho com a aplicação da implementação GMRES

scipy.sparse.linalg.gmres

Método do Gradiente Conjugado

Em revisão

O método do gradiente consiste em uma iteração da forma

$$x_0 = \text{aprox. inicial},$$
 (1.107)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}, (1.108)$$

com $p^{(k)}=r^{(k)}$. Ou seja, a nova aproximação $x^{(k+1)}$ é buscada na direção de $p^{(k)}$. Aqui, a ideia é usar uma melhor direção para buscar a solução.

O **método do gradiente conjugado** é um método de gradiente que busca encontrar a solução de Ax = b pela computação do mínimo do seguinte

funcional²⁵

$$J(y) = \frac{1}{2} \langle y, y \rangle_A - \langle b, y \rangle, \qquad (1.109)$$

onde, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno padrão e

$$\langle x, y \rangle_A := x^T A y \tag{1.110}$$

é o **produto interno induzido por** A, lembrando que A é positiva definida²⁶. Associada a este produto interno, temos a norma

$$||x||_A := \sqrt{\langle x, x \rangle_A},\tag{1.111}$$

chamada de **norma da energia**. O produto interno associado é também conhecido como **produto interno da energia**. Com isso, definimos que dois vetores x e y são **conjugados**, quando eles são ortogonais com respeito ao produto interno da energia, i.e. quando

$$\langle x, y \rangle_A = 0. \tag{1.112}$$

Aqui, a ideia é desenvolver um método iterativo em que o erro a cada passo seja conjugado a todas as direções de busca anteriores. Consulte o desenvolvimento detalhado do método em [11, Seção 7.7].

Código 1.3: Algoritmo do gradiente conjugado

```
1 import numpy as np
2 import scipy as sp
3 from scipy.linalg import norm
5 \operatorname{def} \operatorname{mgc}(A, b, x, \operatorname{tol}=1e-14):
    n, = b.shape
    r = b - A*x
7
8
    p = r
    nu = np.dot(r,r)
    for it in np.arange(n):
10
       q = A * p
11
       mu = np.dot(p,q)
12
       alpha = nu/mu
13
       x = x + alpha*p
14
   r = r - alpha*q
15
```

```
nu0 = np.dot(r,r)
16
      beta = nu0/nu
17
      p = r + beta*p
18
      nu = nu0
19
      if (norm(r) < tol):
20
        print(it)
21
        return x
22
    raise ValueError("Falha de convergencia.")
23
```

Exercícios

```
Em revisão
```

E.1.2.8. Use o Código 1.3 na resolução dos seguintes itens.

- 1. Compute a solução do problema discreto do Exemplo 1.1.2 pelo método do gradiente conjugado. Quantas iterações são necessárias para obter um resíduo com norma $< 10^{-14}$?
- 2. Compute a solução do problema discreto do Exercício 1.2.3 pelo método do gradiente conjugado. Quantas iterações são necessárias para obter um resíduo com norma $\leq 10^{-14}$?
- 3. Compare a aplicação do método GMRES²⁷ e da implementação SciPy do método do gradiente conjugado²⁸

E.1.2.9. Considere o Exercício 1.2.3.

- a) Use sua implementação do método do gradiente conjugado Código ?? para computar uma solução aproximada, cuja norma do resíduo $\leq 10^{-14}$.
- b) Compare o desempenho com a aplicação de sua implementação do método do gradiente (Exercício 1.2.5).
- c) Compare o desempenho com a aplicação da implementação GMRES

scipy.sparse.linalg.gmres

1.2.3 Precondicionamento

Em revisão

Precondicionamento refere-se a modificar o sistema linear original de forma que a computação de sua solução possa ser feita de forma mais eficiente. No lugar do sistema original

$$Ax = b \tag{1.113}$$

resolvemos o sistema equivalente

$$MAx = Mb, (1.114)$$

onde $M=P^{-1}$ e a matriz P é chamada de **precondicionador** do sistema. De forma geral, a escolha do precondicionador é tal que $P\approx A$, mas com inversa fácil de ser computada. Além disso, uma característica esperada é que MA tenha esparsidade parecida com A.

Precondicionamento ILU

Em revisão

A ideia é tomar P igual a uma fatoração LU incompleta (ILU, do inglês, $Incomplete\ LU$). Incompleta no sentido que entradas de L e de U sejam adequadamente removidas, buscando-se uma boa esparsidade e ao mesmo tempo uma boa aproximação LU para A.

ILU(0)

Em revisão

O precondicionamento ILU(0) impõe que as matrizes L e U tenham o mesmo padrão de esparsidade da matriz A.

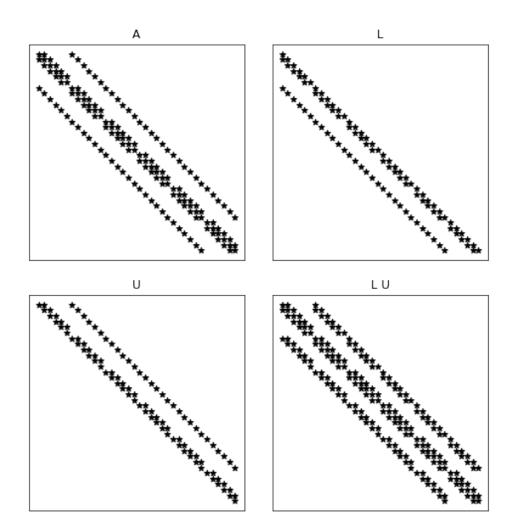


Figura 1.5: Representação das matrizes ILU(0).

Exemplo 1.2.1. ex:possoinDnhIlu0 Consideramos o sistema linear Ax = b associado ao problema discreto trabalhado no Exercício 1.2.3. Para uma malha $n \times n = 8 \times 8$, obtemos as matrizes representadas na Figura 1.5.

Observamos que a matriz LU contém duas diagonais com elementos não nulos a mais que a matriz original A. Estes elementos são chamados de fill-in. \triangle

import scipy.sparse as sp

Exercícios

Em revisão

E.1.2.10. Considere o problema discreto do Exercício 1.2.3.

- a) Compute a solução com o método GMRES com precondicionamento ILU(0).
- b) Compare com a resolução com o método GMRES sem precondicionamento.
- c) Compare com a resolução com o método CG sem precondicionamento.
- d) O precondicionamento ILU(0) é eficiente para o método CG?

Capítulo 2

Sistemas Não Lineares e Otimização

Em revisão

Neste capítulo, apresentam-se métodos numéricos para a resolução de sistemas não lineares e de problemas de otimização. Salvo explicitado ao contrário, assume-se que os problemas são bem definidos.

2.1 Sistemas Não-Lineares

Em revisão

Consideramos o seguinte problema: dada a função $F:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ encontrar $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$F(\mathbf{x}^*) = 0. (2.1)$$

Salvo explicitado ao contrário, assumiremos que $F \in C^1(D)$, i.e. F é uma função continuamente diferenciável no domínio computacional $D \subset \mathbb{R}^n$.

Vamos, denotar por $J_F(\boldsymbol{x}) = [j_{i,j}(\boldsymbol{x})]_{i,j=1}^{n,n}$ a matriz jacobiana²⁹ da F com

$$j_{i,j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j},\tag{2.2}$$

onde
$$F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \in \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

2.1.1 Método de Newton

Em revisão

A iteração básica do **método de Newton**³⁰ para sistemas de equações consiste em: dada uma aproximação inicial $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,

resolver
$$J_F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\boldsymbol{\delta}^{(k)} = -F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$$
 (2.3)

computar
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$$
 (2.4)

para $k=0,1,2,\ldots$ até que um critério de parada seja satisfeito.

Observação 2.1.1 (Convergência). Para $\mathbf{x}^{(0)}$ suficientemente próximo da solução \mathbf{x}^* , o método de Newton é quadraticamente convergente. Mais precisamente, este resultado de convergência local requer que $J_F^{-1}(\mathbf{x}^*)$ seja não singular e que J_F seja Lipschitz³¹ contínua. Consulte [8, Seção 7.1] para mais detalhes.

Exemplo 2.1.1. Consideramos a equação de Burgers³²

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

com $\nu > 0$, condição inicial

$$u(0,x) = -\operatorname{sen}(\pi x) \tag{2.6}$$

e condições de contorno de Dirichlet³³ homogêneas

$$u(t, -1) = u(t, 1) = 0.$$
 (2.7)

Aplicando o **método de Rothe** 34 com aproximação de Euler 35 implícita, obtemos

$$\frac{u(t+h_t, x) - u(t, x)}{h_t} + u(t+h_t, x)u_x(t+h_t, x) \approx \nu u_{xx}(t+h_t, x).$$
(2.8)

onde $h_t > 0$ é o passo no tempo. Agora, aplicamos diferenças finitas para obter

$$\frac{u(t+h_t,x_i) - u(t,x_i)}{h_t} + u(t+h_t,x_i) \frac{u(t+h_t,x_{i+1}) - u(t+h_t,x_{i-1})}{2h_x}$$

$$\approx \nu \frac{u(t+h_t,x_{i-1}) - 2u(t+h_t,x_i) + u(t+h_t,x_{i+1})}{h_r^2},$$
(2.9)

onde, $x_i = (i-1)h_x, i = 1, \dots, n_x$ e $h_x = 1/(n_x-1)$ é o tamanho da malha.

Rearranjando os termos e denotando $u_i^{(k)} \approx u(t_k, x_i), t_k = (k-1)h$, obtemos o seguinte **problema discreto**

$$\begin{split} u_1^{(k+1)} &= 0 & (2.10) \\ \frac{1}{h_t} u_i^{(k+1)} - \frac{1}{h_t} u_i^{(k)} + \frac{1}{2h_x} u_i^{(k+1)} u_{i+1}^{(k+1)} \\ &- \frac{1}{2h_x} u_i^{(k+1)} u_{i-1}^{(k+1)} - \frac{\nu}{h_x^2} u_{i-1}^{(k+1)} \\ &+ 2 \frac{\nu}{h_x^2} u_i^{(k+1)} - \frac{\nu}{h_x^2} u_{i+1}^{(k+1)} = 0, \end{split} \tag{2.11}$$

$$u_{n_{\pi}}^{(k+1)} = 0, (2.12)$$

sendo $u_i^{(0)} = -\operatorname{sen}(\pi x_i), i = 1, \dots, n_x \in k = 1, 2, \dots$

Este problema pode ser reescrito como segue: para cada $k=0,1,\ldots$, encontrar $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^{n_x}$, tal que

$$F\left(\boldsymbol{w};\boldsymbol{w}^{(0)}\right) = 0,\tag{2.13}$$

onde $w_i = u_i^{(k+1)}, w_i^{(0)} = u_i^{(k)}$ e

$$f_1\left(\boldsymbol{w};\boldsymbol{w}^{(0)}\right) = w_1,\tag{2.14}$$

$$f_i\left(\boldsymbol{w}; \boldsymbol{w}^{(0)}\right) = \frac{1}{h_t} w_i - \frac{1}{h_t} w_i^{(0)} + \frac{1}{2h_x} w_i w_{i+1}$$

$$-\frac{1}{2h_x}w_iw_{i-1} - \frac{\nu}{h_x^2}w_{i-1} + 2\frac{\nu}{h_x^2}w_i - \frac{\nu}{h_x^2}w_{i+1}, \qquad (2.15)$$

$$f_{n_x}\left(\boldsymbol{w};\boldsymbol{w}^{(0)}\right) = w_{n_x}.\tag{2.16}$$

A matriz jacobiana associada $J = [j_{i,j}]_{i,j}^{n_x,n_x}$ contém

$$j_{i,j} = 0, \quad j \neq i - 1, i, i + 1,$$
 (2.17)

$$j_{1,1} = 1, (2.18)$$

$$j_{1,2} = 0, (2.19)$$

$$j_{i,i-1} = \frac{1}{2h_x} w_i - \frac{\nu}{h_x^2},\tag{2.20}$$

$$j_{i,i} = \frac{1}{h_t} + \frac{1}{2h_x} w_{i+1} - \frac{2}{h_x} w_{i-1} + \frac{2\nu}{h_x^2}, \tag{2.21}$$

$$j_{i,i+1} = \frac{1}{2h_x} w_i - \frac{\nu}{h_x^2},\tag{2.22}$$

$$j_{n_x, n_x - 1} = 0 (2.23)$$

$$j_{n_x,n_x} = 1. (2.24)$$

Implemente este esquema numérico!

 \triangle

Exercícios

Em revisão

- **E.2.1.1.** Considere o problema discreto apresentado no Exemplo 2.1.1 para diferentes valores do coeficiente de difusão $\nu = \nu_0/\pi$, $\nu_0 = 1., 0.1, 0.01, 0.001$. Simule o problema com cada uma das seguintes estratégias e as compare quanto ao desempenho computacional.
- a) Simule-o aplicando o Método de Newton com o solver linear npla.solve.
- b) Observe que a jacobiana é uma matriz tridiagonal. Simule o problema aplicando o Método de Newton com o solver linear npla.solve_banded.
- c) Aloque a jacobiana como uma matriz esparsa. Então, simule o problema aplicando o Método de Newton com solver linear adequado para matrizes esparsas.
- **E.2.1.2.** Desenvolva um esquema upwind para simular a equação de Burgers do Exemplo 2.1.1.

2.1.2 Método Tipo Newton

Em revisão

Existem várias modificações do Método de Newton³⁶ que buscam reduzir o custo computacional. Há estratégias para simplificar as computações da matriz jacobiana³⁷ e para reduzir o custo nas computações das atualizações de Newton.

Atualização Cíclica da Matriz Jacobiana

Em revisão

Geralmente, ao simplificarmos a matriz jacobina J_F ou aproximarmos a atualização de Newton $\delta^{(k)}$, perdemos a convergência quadrática do método (consulte a Observação 2.1.1). A ideia é, então, buscar uma convergência pelo menos super-linear, i.e.

$$||e^{(k+1)}|| \approx \rho_k ||e^{(k)}||,$$
 (2.25)

com $\rho_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Aqui, $e^{(k)} := x^* - x^{(k)}$. Se a convergência é superlinear, então podemos usar a seguinte aproximação

$$\rho_k \approx \frac{\|\delta^{(k)}\|}{\|\delta^{(k-1)}\|} \tag{2.26}$$

ou, equivalentemente,

$$\rho_k \approx \left(\frac{\|\delta^{(k)}\|}{\|\delta^{(0)}\|}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{2.27}$$

Isso mostra que podemos acompanhar a convergência das iterações pelo fator

$$\beta_k = \frac{\|\delta^{(k)}\|}{\|\delta^{(0)}\|}. (2.28)$$

Ao garantirmos $0 < \beta_k < 1$, deveremos ter uma convergência superlinear.

Vamos, então, propor o seguinte método tipo Newton de atualização cíclica da matriz jacobiana.

1. Escolha $0 < \beta < 1$

2.
$$J := J_F(x^{(0)})$$

3.
$$J\delta^{(0)} = -F(x^{(0)})$$

4.
$$x^{(1)} = x^{(0)} + \delta^{(0)}$$

5. Para k = 1, ... até critério de convergência:

(a)
$$J\delta^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

(b)
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta^{(k)}$$

(c) Se
$$\|\delta^{(k)}\|/\|\delta^{(0)}\| > \beta$$
:

i.
$$J := J_F(x^{(k)})$$

E.2.1.3. Implemente uma versão do método tipo Newton apresentado acima e aplique-o para simular o problema discutido no Exemplo 2.1.1 para $\nu=1.,0.1,0.01,0.001,0.0001$. Faça uma implementação com suporte para matrizes esparsas.

2.2 Problemas de Minimização

Em revisão

Vamos considerar o seguinte **problema de minimização**: dada a **função** objetivo $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, resolver

$$\min_{\boldsymbol{x} \in D} f(\boldsymbol{x}). \tag{2.29}$$

No que segue e salvo dito explicitamente ao contrário, vamos assumir que o problema está bem determinado e que f é suficientemente suave. Ainda, vamos assumir as seguintes notações:

• gradiente de f

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$$
 (2.30)

• derivada direcional de f com respeito a $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{d} \tag{2.31}$$

• matriz hessiana de f, $H = [h_{i,j}]_{i,j=1}^{n,n}$

$$h_{i,j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \tag{2.32}$$

Observação 2.2.1 (Condições de Otimização). Se $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$ e $H(\boldsymbol{x}^*)$ é positiva definida, então \boldsymbol{x}^* é um mínimo local de f em uma vizinhança não vazia de \boldsymbol{x}^* . Consulte mais em [8, Seção 7.2]. Um ponto \boldsymbol{x}^* tal que $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$ é chamado de **ponto crítico**.

2.2.1 Métodos de Declive

Em revisão

Um **método de declive** consiste em uma iteração tal que: dada uma aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, computa-se

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}, \tag{2.33}$$

com **tamanho de passo** $\alpha^{(k)} > 0$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$ até que um dado critério de parada seja satisfeito. As **direções descendentes** são tais que

$$\boldsymbol{d}^{(k)} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}) < 0, \quad \text{se } \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}) \neq 0, \tag{2.34}$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = 0, \quad \text{noutro caso.} \tag{2.35}$$

Observação 2.2.2 (Condição de Convergência). Da Série de Taylor³⁸, temos que

$$f(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)}) - f(\boldsymbol{x}^{(k)}) = \alpha^{(k)}\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}) \cdot \boldsymbol{d}^{(k)} + \varepsilon, \qquad (2.36)$$

com $\varepsilon \to 0$ quando $\alpha^{(k)} \to 0$. Como consequência da continuidade da f, para $\alpha^{(k)}$ suficientemente pequeno, o sinal do lado esquerdo é igual a do direito desta última equação. Logo, para tais $\alpha^{(k)}$ e $\boldsymbol{d}^{(k)} \neq 0$ uma direção descendente, temos garantido que

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x}^{(k)}).$$
 (2.37)

 \triangle

Notamos que um método de declive fica determinado pelas escolhas da direção de declive $d^{(k)}$ e o tamanho do passo $\alpha^{(k)}$. Primeiramente, vamos a este último item.

Pesquisa linear

Em revisão

O **método de pesquisa linear** consiste em escolher $\alpha^{(k)}$ com base na resolução do seguinte problema de minimização

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \phi(\alpha) := f(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{d}^{(k)}). \tag{2.38}$$

Entretanto, a resolução exata deste problema é muitas vezes não factível. Técnicas de aproximações para a resolução deste problema são, então, aplicadas. Tais técnicas são chamadas de pesquisa linear não exata.

A condição de Armijo é que a escolha de $\alpha^{(k)}$ deve ser tal que

$$f\left(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)}\right) \le f(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \sigma\alpha^{(k)}\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \cdot \boldsymbol{d}^{(k)}, \tag{2.39}$$

para alguma constante $\sigma \in (0, 1/2)$. Ou seja, a redução em f é esperada ser proporcional à derivada direcional de f com relação a direção $\boldsymbol{d}^{(k)}$ no ponto $\boldsymbol{x}^{(k)}$. Em aplicações computacionais, σ é normalmente escolhido no intervalo $[10^{-5}, 10^{-1}]$.

A condição (2.39) não é suficiente para evitar escolhas muito pequenas de $\alpha^{(k)}$. Para tanto, pode-se empregar a **condição de curvatura**, a qual requer que

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)}\right) \cdot \boldsymbol{d}^{(k)} \ge \beta \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \cdot \boldsymbol{d}^{(k)}, \tag{2.40}$$

para $\beta \in [\sigma, 1/2]$. Notemos que o lado esquerdo de (2.40) é igual a $\phi'(\alpha^{(k)})$. Ou seja, este condição impõe que $\alpha^{(k)}$ seja maior que $\beta \phi'(0)$. Normalmente, escolhe-se $\beta \in [10^{-1}, 1/2]$. Juntas, (2.39) e (2.40) são conhecidas como condições de Wolfe³⁹.

2.2.2 Método do Gradiente

Em revisão

O método do gradiente (ou método do máximo declive) é um método de declive tal que as direções descendentes são o oposto do gradiente da f, i.e.

$$\boldsymbol{d}^{(k)} = -\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}). \tag{2.41}$$

É imediato verificar que as condições (2.34)-(2.35) são satisfeitas.

Exemplo 2.2.1. Consideramos o problema de encontrar o mínimo da função de Rosenbrock⁴⁰

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} 100 \left(x_{i+1} - x_i^2 \right)^2 + (1 - x_i)^2.$$
 (2.42)

O valor mínimo desta função é zero e ocorre no ponto x = 1. Esta função é comumente usada como caso padrão para teste de métodos de otimização.

Para o método do gradiente, precisamos das derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -400x_1 \left(x_2 - x_1^2 \right) - 2(1 - x_1) \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n 200 \left(x_i - x_{i-1}^2 \right) \left(\delta_{i,j} - 2x_{i-1} \delta_{i-1,j} \right)$$

$$-2(1-x_{i-1})\delta_{i-1,j} \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = 200 \left(x_n - x_{n-1}^2 \right) \tag{2.45}$$

onde, $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker⁴¹.

Código 2.1: Algoritmo do Gradiente

```
11
12 # gradiente da fun
13 def grad(x):
    xm = x[1:-1]
14
    xm_m1 = x[:-2]
    xm p1 = x[2:]
16
    der = np.zeros_like(x)
17
    der[1:-1] = 200*(xm-xm_m1**2) - 400*(xm_p1 - xm_m1**2)
  **2)*xm - 2*(1-xm)
    der[0] = -400*x[0]*(x[1]-x[0]**2) - 2*(1-x[0])
19
    der[-1] = 200*(x[-1]-x[-2]**2)
21
    return der
22
23
24 # problem dimension
25 n = 2
26
27 # num max iters
28 \text{ maxiter} = 100000
29 # tolerancia
30 \text{ tol} = 1e-10
31
32 # aprox. inicial
33 x = np.zeros(n)
35 for k in range(maxiter):
    # direcao descendente
    d = -grad(x)
37
38
    # pesquisa linear
39
40
    alpha = spopt.line_search(fun, grad, x, d,
                                 c1=0.0001, c2=0.9)[0]
41
42
    # atualizacao
43
    x = x + alpha * d
44
45
    nad = npla.norm(alpha * d)
46
    nfun = npla.norm(fun(x))
47
```

```
48
49   if ((k+1) % 10 == 0):
50     print(f"{k+1}: {alpha:1.2e} {nad:1.2e} {nfun
:1.2e}")
51
52   if (nfun < tol):
53     break</pre>
```

 \triangle

Exercícios

Em revisão

E.2.2.1. Aplique o método do gradiente para computar o ponto mínimo da função de Rosenbrock⁴²

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} 100 \left(x_{i+1} - x_i^2 \right)^2 + (1 - x_i)^2$$
 (2.46)

com

- a) n = 2.
- b) n = 3.
- c) n = 4.
- d) n = 5.
- e) n = 10.

E.2.2.2. Aplique o método do gradiente para computar o ponto mínimo da função de Beale [1]

$$f(x,y) = (1.5 - x + xy)^{2} + (2.25 - x + xy^{2})^{2} + (2.625 - x + xy^{3})^{2}.$$
(2.47)

para $\mathbf{x} \in [-4.5, 4.5]^2$.

E.2.2.3. Aplique o método do gradiente para computar o ponto mínimo da função de Goldstein-Price [4]

$$f(x,y) = \left[1 + (x+y+1)^2 (19 - 14x + 3x^2 - 14y + 6xy + 3y^2)\right] \times \left[30 + (2x - 3y)^2 (18 - 32x + 12x^2 + 48y - 36xy + 27y^2)\right]$$
(2.48)

E.2.2.4. Aplique o método do gradiente para computar o ponto mínimo da função de Booth

$$f(x,y) = (x+2y-7)^2 + (2x+y-5)^2$$
 (2.49)

para $\mathbf{x} \in [-10, 10]^2$.

E.2.2.5. Aplique o método do gradiente para computar o ponto mínimo da função de Rastrigin

$$f(x) = 10n + \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) \right], \qquad (2.50)$$

para $\mathbf{x} \in [-5.12, 5.12]^n$, com

- a) n = 2.
- b) n = 3.
- c) n = 4.
- d) n = 5.
- e) n = 10.

2.2.3 Método de Newton

Em revisão

O método de Newton 43 para problemas de otimização é um método de declive com direções descendentes

$$\boldsymbol{d}^{(k)} = -H^{-1}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right),\tag{2.51}$$

assumindo que a hessiana H seja definida positiva dentro de uma vizinhança suficientemente grande do ponto de mínimo \boldsymbol{x}^* . Esta escolha é baseada no polinômio de Taylor da função objetivo f

$$f\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}\right) \approx f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) + \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \cdot \boldsymbol{d}^{(k)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^{(k)} \cdot H\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\boldsymbol{d}^{(k)}.$$
 (2.52)

Com isso, escolhemos $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ de forma a minimizar o lado direito desta aproximação, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial d_i^{(k)}} \left(f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) + \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \cdot \boldsymbol{d}^{(k)} + \frac{1}{2} \boldsymbol{d}^{(k)} \cdot H\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \boldsymbol{d}^{(k)} \right) = 0 \qquad (2.53)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Ou seja, temos

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \cdot \boldsymbol{d}^{(k)} + H\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \boldsymbol{d}^{(k)} = \mathbf{0}$$
 (2.54)

o que leva a (2.51).

Observação 2.2.3 (Computação da Direção). Na implementação computacional, não é necessário computar a inversa da hessiana, a direção $d^{(k)}$ pode ser mais eficientemente computada resolvendo-se

$$H(x^{(k)})d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}). \tag{2.55}$$

 \triangle

Observação 2.2.4 (Solver linear). O método usado para computar a solução de (2.55) é chamado de solver linear. Por exemplo, Newton-Krylov⁴⁴ é o nome dado ao método de Newton que utiliza um método de subespaço de Krylov como solver linear. Mais especificamente, Newton-GMRES quando o GMRES é escolhido como solver linear. Uma escolha natural é Newton-GC, tendo em vista que o método de gradiente conjugado é ideal para matriz simétrica e definida positiva.

Exemplo 2.2.2. Seguindo o Exemplo 2.2.1, temos que a hessiana associada é a matriz simétrica $H = [h_{i,j}]_{i,j=1}^{n,n}$ com

$$h_{1,1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 \tag{2.56}$$

$$h_{1,2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -400x_1 \tag{2.57}$$

$$h_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 200(\delta_{i,j} - 2x_{i-1}\delta_{i-1,j}) - 400(\delta_{i+1,j} - 2x_i\delta_{i,j}) - 400\delta_{i,j}(x_{i+1} - x_i^2) + 2\delta_{i,j}$$
(2.58)

$$h_{n-1,n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} = -400x_{n-1} \tag{2.59}$$

$$h_{n,n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}} = 200 \tag{2.60}$$

Notemos que a hessiana é uma matriz tridiagonal.

```
der[1:-1] = 200*(xm-xm m1**2) - 400*(xm p1 - xm
  **2)*xm - 2*(1-xm)
    der[0] = -400*x[0]*(x[1]-x[0]**2) - 2*(1-x[0])
    der[-1] = 200*(x[-1]-x[-2]**2)
20
21
    return der
22
24 def hess(x):
    x = np.asarray(x)
    H = np.diag(-400*x[:-1],1) - np.diag(400*x
  [:-1],-1)
    diagonal = np.zeros_like(x)
27
    diagonal [0] = 1200 \times x[0] \times 2 - 400 \times x[1] + 2
    diagonal[-1] = 200
29
    diagonal [1:-1] = 202 + 1200*x[1:-1]**2 - 400*x
30
  [2:]
    H = H + np.diag(diagonal)
31
32
    return H
33
34
35 # dimensao
36 n = 2
37
38 # num max iters
39 maxiter = 100000
40 # tolerancia
41 \text{ tol} = 1e-10
43 # aprox. inicial
44 x = np.zeros(n)
45
46 for k in range(maxiter):
47
    # direcao descendente
48
    d = npla.solve (hess(x),-grad(x))
49
50
    # pesquisa linear
51
    alpha = spopt.line_search(fun, grad, x, d)[0]
```

```
53
    # atualizacao
54
    x = x + alpha * d
55
56
    nad = npla.norm(alpha * d)
57
    nfun = npla.norm(fun(x))
58
59
    print(f"{k+1}: {alpha:1.2e} {nad:1.2e} {nfun:1.2
60
  e}")
61
    if ((nfun < tol) or np.isnan(nfun)):</pre>
      break
```

 \triangle

Observação 2.2.5 (Métodos Tipo Newton). Métodos tipo Newton são aqueles que utilizam uma aproximação para a inversa da matriz hessiana. Uma estratégia comumente aplicada, é a de atualizar a hessiana apenas em algumas iterações, baseando-se em uma estimativa da taxa de convergência. Na Subseção 2.1.2, exploramos esta técnica no contexto de resolução de sistemas não lineares.

Exercícios

Em revisão

E.2.2.6. Aplique o método de Newton para computar o ponto mínimo da função de Rosenbrock⁴⁵

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} 100 \left(x_{i+1} - x_i^2 \right)^2 + (1 - x_i)^2$$
 (2.61)

com

- a) n = 2.
- b) n = 3.
- c) n = 4.

d) n = 5.

e) n = 10.

E.2.2.7. Aplique o método de Newton para computar o ponto mínimo da função de Beale [1]

$$f(x,y) = (1.5 - x + xy)^{2} + (2.25 - x + xy^{2})^{2} + (2.625 - x + xy^{3})^{2}.$$
(2.62)

para $\mathbf{x} \in [-4.5, 4.5]^2$.

E.2.2.8. Aplique o método de Newton para computar o ponto mínimo da função de Goldstein-Price [4]

$$f(x,y) = \left[1 + (x+y+1)^2 (19 - 14x + 3x^2 - 14y + 6xy + 3y^2)\right] \times \left[30 + (2x - 3y)^2 (18 - 32x + 12x^2 + 48y - 36xy + 27y^2)\right]$$
(2.63)

E.2.2.9. Aplique o método de Newton para computar o ponto mínimo da função de Booth

$$f(x,y) = (x+2y-7)^2 + (2x+y-5)^2$$
 (2.64)

para $\mathbf{x} \in [-10, 10]^2$.

E.2.2.10. Aplique o método de Newton para computar o ponto mínimo da função de Rastrigin

$$f(x) = 10n + \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) \right], \qquad (2.65)$$

para $\mathbf{x} \in [-5.12, 5.12]^n$, com

- a) n = 2.
- b) n = 3.
- c) n = 4.
- d) n = 5.
- e) n = 10.

2.2.4 Método do Gradiente Conjugado

Em revisão

Métodos do gradiente conjugado são obtidos escolhendo-se as direções descendentes

$$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) + \beta_k d^{(k-1)}, \qquad (2.66)$$

onde β_k é um escalar escolhido de forma que as direções $\{d^{(k)}\}$ sejam mutuamente ortogonais com respeito a uma dada norma. Por exemplo, o **método** de Fletcher-Reeves consiste em escolher

$$\beta_k = \frac{\nabla f(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)})}{\nabla f(x^{(k-1)}) \cdot \nabla f(x^{(k-1)})},$$
(2.67)

o que garante que as direções sejam mutuamente ortogonais com respeito ao produto interno euclidiano.

Observação 2.2.6 (Variantes). Outras variações comumente empregadas são o Método de Polak-Ribière e suas variantes. Consulte mais em [7, Seção 5.2]. \triangle

Exemplo 2.2.3. Implementação do Método de Fletcher-Reeves para a minimização da função de Rosenbrock dada no Exemplo 2.2.1.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as npla
import scipy.optimize as spopt

fun obj
def fun(x):
```

```
Funcao de Rosenbrock
    return sum(100.*(x[1:]-x[:-1]**2.)**2. + (1.-x
  [:-1])**2.)
11
12 # gradiente da fun
13 def grad(x):
    xm = x[1:-1]
15
    xm m1 = x[:-2]
    xm_p1 = x[2:]
16
    der = np.zeros_like(x)
17
    der[1:-1] = 200*(xm-xm_m1**2) - 400*(xm_p1 - xm_m1**2)
  **2)*xm - 2*(1-xm)
    der[0] = -400*x[0]*(x[1]-x[0]**2) - 2*(1-x[0])
19
    der[-1] = 200*(x[-1]-x[-2]**2)
20
21
22
    return der
23
24 # dimensao do prob
25 n = 2
27 # num max iters
28 \text{ maxiter} = 100000
29 # tolerancia
30 \text{ tol} = 1e-10
31
32 # aprox. inicial
33 x = np.zeros(n)
34
35 # iteracoes CG
36 gf = grad(x)
37 d = -gf
39 for k in range(maxiter):
40
    # pesquisa linear
41
    alpha = spopt.line_search(fun, grad, x, d)[0]
```

```
43
    # atualizacao
44
    x = x + alpha * d
45
46
    nad = npla.norm(alpha * d)
47
    nfun = npla.norm(fun(x))
48
49
    print(f"{k+1}: {alpha:1.2e} {nad:1.2e} {nfun:1.2
50
  e}")
51
    if ((nfun < tol) or np.isnan(nfun)):</pre>
52
      break
53
54
    # prepara nova iter
55
    ngf = grad(x)
56
57
    beta = np.dot(ngf,ngf)/np.dot(gf,gf)
58
    d = -ngf + beta * d
59
60
   gf = ngf
61
```

 \triangle

Exercícios

Em revisão

E.2.2.11. Aplique o método um gradiente conjugado para computar o ponto mínimo da função de Rosenbrock⁴⁶

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} 100 \left(x_{i+1} - x_i^2 \right)^2 + (1 - x_i)^2$$
 (2.68)

com

- a) n = 2.
- b) n = 3.

- c) n = 4.
- d) n = 5.
- e) n = 10.
- **E.2.2.12.** Aplique o método um gradiente conjugado para computar o ponto mínimo da função de Beale [1]

$$f(x,y) = (1.5 - x + xy)^{2} + (2.25 - x + xy^{2})^{2} + (2.625 - x + xy^{3})^{2}.$$
(2.69)

para $\mathbf{x} \in [-4.5, 4.5]^2$.

E.2.2.13. Aplique o método um gradiente conjugado para computar o ponto mínimo da função de Goldstein-Price [4]

$$f(x,y) = \left[1 + (x+y+1)^2 (19 - 14x + 3x^2 - 14y + 6xy + 3y^2)\right] \times \left[30 + (2x - 3y)^2 (18 - 32x + 12x^2 + 48y - 36xy + 27y^2)\right]$$
(2.70)

E.2.2.14. Aplique o método um gradiente conjugado para computar o ponto mínimo da função de Booth

$$f(x,y) = (x+2y-7)^2 + (2x+y-5)^2$$
 (2.71)

para $\mathbf{x} \in [-10, 10]^2$.

E.2.2.15. Aplique um método do gradiente conjugado para computar o ponto mínimo da função de Rastrigin

$$f(x) = 10n + \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) \right], \qquad (2.72)$$

para $\mathbf{x} \in [-5.12, 5.12]^n$, com

Pedro H A Konzen

- a) n = 2.
- b) n = 3.
- c) n = 4.
- d) n = 5.
- e) n = 10.

Capítulo 3

Autovalores e Autovetores

Em revisão

Neste capítulo, estudamos métodos numéricos para a computação de autovalores e autovetores de matrizes.

3.1 Método da Potência

Em revisão

O método da potência é uma técnica iterativa para computar o autovalor dominante de uma matriz e um autovetor associado. Modificações do método, tornam possível sua aplicação para a determinação de outros autovalores próximos a um número dado. Desta forma, pode ser utilizá-lo em conjunto com outra técnica de aproximação de autovalores e autovetores.

3.1.1 Autovalor dominante

Em revisão

Vamos denotar o **espectro** de uma dada matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ por

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},\tag{3.1}$$

sendo $\lambda_i \in \mathbb{C}$ o *i*-ésimo **autovalor** de uma **matriz diagonalizável**⁴⁷ $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n,n}$, i.e. existe um vetor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \tag{3.2}$$

sendo v_i chamado de **autovetor** associado a λ_i . No desenvolvimento do **método da potência**, vamos assumir que os autovalores podem ser ordenados da seguinte forma

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_n|. \tag{3.3}$$

Assim sendo, o λ_1 é chamado de **autovalor dominante**. Na sequência, vamos denotar por \mathbf{A}^H a transposta conjugada de A, i.e. $A^H = [\bar{a}_{j,i}]_{i,j=1}^{n,n}$.

A iteração do método da potência consiste em

$$\boldsymbol{z}^{(k)} = A\boldsymbol{q}^{(k-1)},\tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{q}^{(k)} = \boldsymbol{z}^{(k)} / \left\| \boldsymbol{z}^{(k)} \right\|, \tag{3.5}$$

$$\nu^{(k)} = (\mathbf{q}^{(k)})^H A \mathbf{q}^{(k)}, \tag{3.6}$$

com dada aproximação inicial $q^{(0)}$ para um autovetor associado a λ_1 . Quando o método é bem sucedido, tem-se $\nu^{(k)} \to \lambda_1$ quando $k \to \infty$.

Convergência

Para mostrar a convergência do método, basta mostrar que $q^{(k)}$ converge para um autovetor associado a λ_1 . Primeiramente, notamos que⁴⁸

$$\mathbf{q}^{(k)} = \frac{A^k \mathbf{q}^{(0)}}{\|A^k \mathbf{q}^{(0)}\|}, \ k \ge 1.$$
(3.7)

Para A diagonalizável, temos que existe uma base $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ de $\mathbb{C}^{n\times n}$ formada apenas de autovetores de A. Segue que

$$\boldsymbol{q}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \tag{3.8}$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Vamos assumir que $\alpha_1 \neq 0^{49}$. Ainda, $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, donde

$$A^k \boldsymbol{q}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A^k \boldsymbol{v}_i \tag{3.9}$$

notaspedrok.com.br

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}\lambda_{i}^{k}\boldsymbol{v}_{i} \tag{3.10}$$

$$= \alpha_1 \lambda_1^k \left[\boldsymbol{v}_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{v}_i \right]$$
 (3.11)

Como $|\lambda_i|/|\lambda_1| < 1, i = 2, \dots, n$, temos que

$$\mathbf{y}^{(k)} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i \to 0, \tag{3.12}$$

quando $k \to \infty$. Logo, temos que

$$\boldsymbol{q}^{(k)} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k \left(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{y}^{(k)} \right)}{\|\alpha_1 \lambda_1 \left(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{y}^{(k)} \right)\|}$$
(3.13)

$$= \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} \frac{\left(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{y}^{(k)}\right)}{\|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{y}^{(k)}\|}.$$
 (3.14)

Por fim, observamos que $\lambda_1/|\lambda_1|$ tem o mesmo sinal de λ_1 . Portanto, $\boldsymbol{q}^{(k)}$ tende a um múltiplo não nulo de \boldsymbol{v}_1 quando $k \to \infty$.

Observação 3.1.1 (Aproximação Inicial). A convergência do método da potência está condicionada a escolha de uma aproximação inicial tal que (3.8) seja tal que $\alpha_1 \neq 0$. Não há como saber a priori que o $q^{(0)}$ escolhido satisfaz essa condição e, caso não satisfaça as iterações não são convergentes. \triangle

Observação 3.1.2 (Taxa de convergência). Pode-se mostrar a seguinte taxa de convergência para o método da potência

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{q}}^{(k)} - \boldsymbol{v}_1\right\| \le C \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k, \quad k \ge 1,$$
 (3.15)

onde

$$\tilde{\boldsymbol{q}}^{(k)} = \boldsymbol{v}_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{v}_i. \tag{3.16}$$

 \triangle

Consulte [8, Seção 5.3.].

Código 3.1: Algoritmo do Método da Potência

1 import numpy as np

```
2 import numpy.linalg as npla
4 \det \text{metPot}(A, q0, \text{maxiter}=1000, \text{tol}=1\text{e}-14):
    q = q0/npla.norm(q0)
    nu0 = np.dot(q, A @ q)
    print(f"{0}: {nu0}")
7
8
    info = -1
9
    for k in range(maxiter):
10
      z = A @ q
11
       q = z/npla.norm(z)
12
      nu = np.dot(q, A @ q)
13
       print(f"{k+1}: {nu}")
15
       if (np.fabs(nu-nu0) < tol):</pre>
16
         info = 0
17
         break
18
19
      nu0 = nu
20
21
    return nu, q, info
22
```

Exercícios

- **E.3.1.1.** Use o método da potência para computar o autovalor dominante da matriz de coeficientes do problema discreto associado ao Exercício 1.1.3. Estude sua convergência para diferentes tamanhos da matriz.
- **E.3.1.2.** Use o método da potência para computar o autovalor dominante da matriz de coeficientes do problema discreto associado ao Exemplo 1.1.2. Estude sua convergência para diferentes tamanhos da matriz.

3.1.2 Método da Potência Inversa

Em revisão

Esta variação do método da potência nos permite computar o autovalor mais

próximo de um número $\mu \in \mathbb{C}$ dado, $\mu \notin \sigma(A)$. A ideia é aplicar o método para a matriz

$$M_{\mu}^{-1} = (A - \mu I)^{-1}. (3.17)$$

Neste contexto, μ é chamado de **deslocamento** (em inglês, *shift*).

Notamos que se $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ é um autopar de A, então $\xi_i = (\lambda_i - \mu)^{-1}$ é autovalor de M_{μ}^{-1} associado ao autovetor \mathbf{v}_i . De fato,

$$(\lambda_i - \mu)\boldsymbol{v}_i = (A - \mu I)\boldsymbol{v}_i \tag{3.18}$$

$$M_{\mu}^{-1}(\lambda_i - \mu)\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i \tag{3.19}$$

$$M_{\mu}^{-1}\boldsymbol{v}_{i} = (\lambda_{i} - \mu)^{-1}\boldsymbol{v}_{i}. \tag{3.20}$$

Isso também mostra que A e M_{μ}^{-1} têm os mesmos autovetores.

Agora, se μ for suficientemente próximo de λ_m , autovalor simples de A, então

$$|\lambda_m - \mu| < |\lambda_i - \mu|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \ i \neq m.$$
 (3.21)

Com isso, $\xi_m = (\lambda_m - \mu)^{-1}$ é o autovalor dominante de M_{μ}^{-1} e, portanto, a iteração do método da potência aplicada a M_{μ}^{-1} fornece este autovalor. Mais especificamente, como A e M_{μ}^{-1} tem os mesmos autovetores, a iteração do método da potência inversa é dada como segue

$$(A - \mu I)\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k-1)}, \tag{3.22}$$

$$q^{(k)} = z^{(k)} / ||z^{(k)}||,$$
 (3.23)

$$\nu^{(k)} = (\mathbf{q}^{(k)})^H A \mathbf{q}^{(k)}, \tag{3.24}$$

onde $\boldsymbol{q}^{(0)}$ é uma aproximação inicial para o autovetor associado ao autovalor $\lambda_m, \, \nu^{(k)} \to \lambda_m$ quando $k \to \infty$.

Exercícios

- **E.3.1.3.** Use o método da potência para computar diferentes autovalores da matriz de coeficientes do problema discreto associado ao Exercício 1.1.3. Estude sua convergência para diferentes tamanhos da matriz.
- **E.3.1.4.** Use o método da potência para computar diferentes autovalores da matriz de coeficientes do problema discreto associado ao Exemplo 1.1.2.

Verifique se há vantagem em aplicar os métodos GMRES e GC na resolução de (3.22).

3.1.3 Métodos de Deflação

Em construção

3.2 Iteração QR

Em revisão

A iteração QR é um método para a computação aproximada de todos os autovalores de uma dada matriz A. A ideia é explorar um método iterativo para a computação da **decomposição de Schur**⁵⁰ de A, i.e. encontrar uma matriz unitária⁵¹ U tal que

$$U^{H}AU = \begin{bmatrix} \lambda_{1} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_{2} & & t_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_{n} \end{bmatrix}$$
(3.25)

Assumindo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sejam $Q^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma **matriz ortogonal**⁵² e $T^{(0)} = (Q^{(0)})^T A Q^{(0)}$. A iteração QR consiste em

determinar
$$Q^{(k)}, R^{(k)}$$
 tal que

$$Q^{(k)}R^{(k)} = T^{(k-1)} \text{ (fatoração QR)}$$
(3.26)

$$T^{(k)} = R^{(k)}Q^{(k)}, (3.27)$$

para k = 1, 2, ...

Ou seja, a cada iteração k, computa-se a fatoração da matriz $T^{(k-1)}$ como o produto de uma matriz ortogonal $Q^{(k)}$ com uma matriz triangular superior $R^{(k)}$. Então, computa-se uma nova aproximação $T^{(k)}$ pela multiplicação de $R^{(k)}$ por $Q^{(k)}$. Com isso, temos

$$T^{(k)} = R^{(k)}Q^{(k)} (3.28)$$

$$= (Q^{(k)})^T (Q^{(k)} R^{(k)}) Q^{(k)}$$
(3.29)

$$= (Q^{(k)})^T T^{(k-1)} Q^{(k)} (3.30)$$

$$= (Q^{(k)})^T R^{(k-1)} Q^{(k-1)} Q^{(k)}$$
(3.31)

$$= (Q^{(k)})^T (Q^{(k-1)})^T Q^{(k-1)} R^{(k-1)} Q^{(k-1)} Q^{(k)}$$
(3.32)

$$= (Q^{(k-1)}Q^{(k)})^T T^{(k-2)} (Q^{(k-1)}Q^{(k)})$$
(3.33)

$$= (Q^{(0)} \cdots Q^{(k)})^T A (Q^{(0)} \cdots Q^{(k)}). \tag{3.34}$$

Ou seja, $T^{(k)}$ é matriz semelhante a A para todo k. E, portanto, tem os mesmos autovalres.

Observação 3.2.1 (Convergência). Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for uma matriz com autovalores tais que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|, \tag{3.35}$$

então

$$\lim_{k \to \infty} T^{(k)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & & t_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$$(3.36)$$

Para a taxa de convergência, temos

$$|t_{i,i-1}^{(k)}| = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right|^k\right), \quad i = 2, \dots, n,$$
(3.37)

quando $k \to \infty$.

Ainda, se A for uma **matriz simétrica**, então $T^{(k)}$ tende a uma matriz diagonal quando $k \to \infty$.

Observação 3.2.2. Variantes do método QR permitem sua aplicação para matrizes mais gerais. Consulte [5].

Uma forma eficiente do método QR é chamada de **iteração Hessenberg**⁵³-**QR**. Consiste em inicializar $T^{(0)}$ como uma **matriz de Hessenberg superior**, i.e. $t_{i,j}^{(0)} = 0$ para i > j+1. A computação de $T^{(0)}$ é feita com **transformadas de Householder** e a fatoração QR de $T^{(k)}$ utiliza de **matrizes de Givens**⁵⁴.

Código 3.2: Algoritmo da Iteração QR

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as npla
4 def qr iter(A, Q=None, maxiter=10, tol=1e-5):
    Q = np.eye(A.shape[0]) if Q == None else Q
    TO = Q.T @ A @ Q
7
    info = -1
    for k in range(maxiter):
8
      Q, R = npla.qr(T0)
9
      T = R @ Q
10
      if (npla.norm(T-T0) < tol):
11
        info = 0
12
        break
13
      TO = T
14
    return T, info
15
```

Observação 3.2.3 (Computação dos Autovetores). Vamos denotar $\tilde{Q}^{(k)} = Q^{(0)} \cdots Q^{(k)}$. Se \boldsymbol{v} é autovetor associado ao autovalor simples λ de A, então

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \tag{3.38}$$

$$(\tilde{Q}^{(k)})^T A \tilde{Q}^{(k)} (\tilde{Q}^{(k)})^T \boldsymbol{v} \approx \lambda (\tilde{Q}^{(k)})^T \boldsymbol{v}$$
(3.39)

Denotando, $y = (\tilde{Q}^{(k)})^T \boldsymbol{v}$, temos

$$T^{(k)}\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{y}.\tag{3.40}$$

Com isso, podemos computar \boldsymbol{y} e, então, temos $\boldsymbol{v} \approx \tilde{Q}^{(k)} \boldsymbol{y}$.

Exercícios

- **E.3.2.1.** Use a iteração QR para computar os autovalores da matriz de coeficientes do problema discreto associado ao Exercício 1.1.3.
- **E.3.2.2.** Use a iteração QR para computar os autovalores da matriz de coeficientes do problema discreto associado ao Exemplo 1.1.2. Use spla. hessenberg para computar $T^{(0)}$.

Capítulo 4

Integração

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Neste capítulo, estudamos métodos numéricos para a integração de funções reais.

4.1 Integração Autoadaptativa

Vamos considerar o problema de integrar

$$I(a,b) = \int_a^b f(x) dx \tag{4.1}$$

pela **Regra de Simpson**¹. Em um dado subintervalo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, temos

$$I(\alpha, \beta) = \underbrace{\frac{h_0}{3} \left[f(\alpha) + 4f(\alpha + h_0) + f(\beta) \right]}_{S(\alpha, \beta)} - \underbrace{\frac{h_0^5}{90} f^{(4)}(\xi)}_{(4.2)},$$

onde $h_0 = (\beta - \alpha)/2$ e $\xi \in (\alpha, \beta)$. Ou seja, temos que

$$I(\alpha, \beta) - S(\alpha, \beta) = -\frac{h_0^5}{90} f^{(4)}(\xi). \tag{4.3}$$

¹Consulte mais sobre a Regra de Simpson em Seção 10.1 Regras de Newton-Cotes.

A ideia é explorarmos esta informação de forma a obtermos uma estimativa para o erro de integração no intervalo $[\alpha, \beta]$ sem necessitar computar $f^{(4)}$.

Aplicando a Regra de Simpson na partição $[\alpha, (\alpha + \beta)/2] \cup [(\alpha + \beta)/2, \beta]$, obtemos

$$I(\alpha, \beta) - S_2(\alpha, \beta) = -\frac{(h_0/2)^5}{90} \left(f^{(4)}(\xi) + f^{(4)}(\eta) \right), \tag{4.4}$$

onde $\xi \in (\alpha, (\alpha + \beta)/2), \eta \in (\alpha + \beta)/2, \beta)$ e

$$S_2(\alpha, \beta) = S(\alpha, (\alpha + \beta)/2) + S((\alpha + \beta)/2, \beta). \tag{4.5}$$

Agora, vamos assumir que $f^{(4)}(\xi) \approx f^{(4)}(\eta)$ de forma que temos

$$I(\alpha, \beta) - S_2(\alpha, \beta) \approx -\frac{1}{16} \frac{h_0^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$
 (4.6)

De (4.3) e (4.6), obtemos

$$\frac{h_0^5}{90}f^{(4)}(\xi) \approx \frac{16}{15} \underbrace{\left[S(\alpha,\beta) - S_2(\alpha,\beta)\right]}_{\mathcal{E}(\alpha,\beta)}.$$
(4.7)

Isto nos fornece a seguinte estimativa a posteriori do erro

$$|I(\alpha, \beta) - S_2(\alpha, \beta)| \approx \frac{|\mathcal{E}(\alpha, \beta)|}{15}.$$
 (4.8)

Na prática, costuma-se utilizar a seguinte estimativa mais restrita

$$|I(\alpha, \beta) - S_2(\alpha, \beta)| \approx \frac{|\mathcal{E}(\alpha, \beta)|}{10}.$$
 (4.9)

Para garantir uma precisão global em [a,b] igual a uma dada tolerância, é suficiente impor que

$$\frac{|\mathcal{E}(\alpha,\beta)|}{10} \le \epsilon \frac{\beta - \alpha}{b-a}.\tag{4.10}$$

Código 4.1: Algoritmo Simpson Autoadaptativo

```
1 def simpson(f,a,b):
2  return (b-a)/6. * (f(a) + 4*f((a+b)/2.) + f(b))
3
4 def simad(f,a,b,tol=1e-8,hmin=1e-10):
```

```
# intervalo calculado
    S = (a,a)
6
7
    # intervalo a ser calculado
    N = (a,b)
8
    # intervalo ativo
9
    A = N
10
    # aprox calculada em [a, b]
11
    J = 0.
12
    # aprox calculada em A
13
14
    JA = 0.
15
    # num f eval
    nfe = 0
16
    # info
17
    info = 0
18
    while (S != (a,b)):
19
      print(S,N,A)
20
      # tamanho do intervalo
21
      h = A[1] - A[0]
22
      while (h > hmin):
23
         J0 = simpson(f,A[0],A[1])
24
         JA = simpson(f, A[0], A[0]+h/2.)
25
         JA += simpson(f, A[0]+h/2., A[1])
26
         nfe += 9
27
         # est erro
28
         est = np.fabs(J0-JA)/10.
29
         # criterio de parada
30
         if (est < tol*h/(b-a)):
31
           break
32
         else:
33
           A = (A[0], A[0]+h/2.)
34
35
           h = h/2.
           print("\t",S,N,A,h,est)
36
           if (h < hmin):</pre>
37
             print("Atencao! h < hmin !")</pre>
38
             info = -1
39
             break
40
      J += JA
41
      S = (a, A[1])
```

Exemplo 4.1.1.

$$\int_{-3}^{4} \arctan(10x) dx = -3 \arctan(30) - \frac{\ln(1601)}{20} + \frac{\ln(901)}{20} + 4 \arctan(40)$$

$$\approx 1.54203622$$
(4.11)

E.4.1.1. Implemente uma abordagem autoadaptativa usando a Regra do Trapézio. Valide-a e compare com o exemplo anterior.

4.2 Integrais múltiplas

Vamos trabalhar com métodos para a computação de integrais múltiplas

$$\int \int_{R} f(x,y) \, dA. \tag{4.13}$$

 \triangle

Em uma região retangular $A = [a, b] \times [c, d]$, podemos reescrevê-la como uma integral iterada

$$\int \int_{R} f(x,y) \, dA = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y) \, dy \, dx. \tag{4.14}$$

4.2.1 Regras de Newton-Cotes

Regra do Trapézio

A Regra do Trapézio² nos fornece

$$\int_{c}^{d} f(x,y) \, dy = \frac{h_y}{2} \left[f(x,c) + f(x,d) \right] - \frac{h_y^3}{12} f''(x,\eta) \tag{4.15}$$

²Notas de Aula - Matemática Numérica.

com $h_y = (d - c)$ e $\eta \in (c, d)$. De forma iterada, temos

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y) \, dy \, dx = \frac{h_{y}}{2} \int_{a}^{b} f(x,c) \, dx + \frac{h_{y}}{2} \int_{a}^{b} f(x,d) \, dx \tag{4.16}$$

$$-\frac{h_y^3}{12} \int_a^b f''(x,\eta) \, dx. \tag{4.17}$$

Então, à exceção do termo do erro, aplicamos a Regra do Trapézio para as integrais em x. Obtemos

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y) \, dy \, dx = \frac{h_{y}}{2} \frac{h_{x}}{2} \left[f(a, c) + f(b, c) \right] \tag{4.18}$$

$$+\frac{h_y}{2}\frac{h_x}{2}[f(a,d) + f(b,d)] \tag{4.19}$$

$$-\frac{h_y}{2}\frac{h_x^3}{12}f''(\mu',c) \tag{4.20}$$

$$-\frac{h_y}{2}\frac{h_x^3}{12}f''(\mu'',d) \tag{4.21}$$

$$-\frac{h_y^3}{12} \int_a^b f''(x,\eta) \, dx, \tag{4.22}$$

com $h_x = (b-a)$, μ' , $\mu'' \in (a,b)$. Pelos Teorema do Valor Intermediário e pelo Teorema do Valor Médio, podemos ver que o erro é $O(h_x h_y^3 + h_x^3 h_y)$. Por fim, obtemos a Regra do Trapézio para Integrais Iteradas

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y) \, dy \, dx = \frac{h_{y}}{2} \frac{h_{x}}{2} \left[f(a,c) + f(b,c) + f(b,d) + f(a,d) \right]$$
 (4.23)

$$+O(h_x h_y^3 + h_x^3 h_y). (4.24)$$

Exemplo 4.2.1. A Regra do Trapézio fornece

$$\int_{1.5}^{2} \int_{1}^{1.5} \ln(x+2y) \, dy \, dx \approx 0.36. \tag{4.25}$$

Verifique! △

Regra de Simpson

A Regra do Simpson³ nos fornece

$$\int_{c}^{d} f(x,y) \, dy = \frac{h_y}{3} \left[f(x,y_1) + 4f(x,y_2) + f(x,y_3) \right] \tag{4.26}$$

³Notas de Aula - Matemática Numérica.

$$-\frac{h_y^5}{90}f^{(4)}(x,\eta) \tag{4.27}$$

com $h_y = (d-c)/2$, $y_j = (j-1)h_y$, j = 1, 2, 3, e $\eta \in (c, d)$. De forma iterada, temos

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y) \, dy \, dx = \frac{h_{y}}{3} \left[\int_{a}^{b} f(x, y_{1}) \, dx + 4 \int_{a}^{b} f(x, y_{2}) \, dx + \int_{a}^{b} f(x, y_{3}) \, dx \right]$$
(4.28)

$$-\frac{h_y^5}{90} \int_a^b f^{(4)}(x,\eta) \, dx \tag{4.29}$$

Então, à exceção do termo do erro, aplicamos a Regra de Simpson para as integrais em x. Obtemos

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y) \, dy \, dx = \frac{h_{x} h_{y}}{9} \left[f(x_{1}, y_{1}) + 4f(x_{2}, y_{1}) + f(x_{3}, y_{1}) \right] \tag{4.30}$$

$$+\frac{4h_xh_y}{9}\left[f(x_1,y_2)+4f(x_2,y_2)+f(x_3,y_2)\right] \qquad (4.31)$$

$$+\frac{h_x h_y}{9} \left[f(x_1, y_3) + 4f(x_2, y_3) + f(x_3, y_3) \right]$$
 (4.32)

$$-\frac{h_x^5 h_y}{270} f^{(4)}(\mu_1, y_1) \tag{4.33}$$

$$-\frac{4h_x^5h_y}{270}f^{(4)}(\mu_2, y_2) \tag{4.34}$$

$$-\frac{h_x^5 h_y}{270} f^{(4)}(\mu_3, y_3) \tag{4.35}$$

$$-\frac{h_y^5}{90} \int_a^b f^{(4)}(x,\eta) \, dx \tag{4.36}$$

com $h_x = (b-a)/2$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in (a,b)$. Pelos Teorema do Valor Intermediário e Teorema do Valor Médio, podemos ver que o erro é $O(h_x h_y^5 + h_x^5 h_y)$. Por fim, obtemos a **Regra de Simpson para Integrais Iteradas**

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y) \, dy \, dx = \frac{h_{x} h_{y}}{9} \left[f(x_{1}, y_{1}) + 4f(x_{2}, y_{1}) + f(x_{3}, y_{1}) \right]$$
(4.37)

$$+ \frac{4h_x h_y}{9} \left[f(x_1, y_2) + 4f(x_2, y_2) + f(x_3, y_2) \right]$$
 (4.38)

$$+\frac{h_x h_y}{9} \left[f(x_1, y_3) + 4f(x_2, y_3) + f(x_3, y_3) \right] \tag{4.39}$$

$$+O(h_x h_y^5 + h_x^5 h_y). (4.40)$$

Exemplo 4.2.2. A Regra de Simpson fornece

$$\int_{1.5}^{2} \int_{1}^{1.5} \ln(x+2y) \, dy \, dx \approx 0.361003. \tag{4.41}$$

Verifique!

4.2.2 Regras Compostas de Newton-Cotes

A ideia é particionar a região de integração em células e o resultado da integração é a soma da aplicação da regra de quadratura em cada uma das células.

Regra Composta do Trapézio

Para uma região retangular $R = [a, b] \times [c, d]$, vamos construir a malha

$$M = \{c_k = [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}] : k = i + (j-1)n_x\},\tag{4.42}$$

onde
$$x_i = (i-1)h_x$$
, $h_x = (b-a)/n_x$, $i = 1, 2, ..., n_x + 1$ e $y_j = (j-1)h_y$, $h_y = (d-c)/n_y$, $j = 1, 2, ..., n_y + 1$. Consulte a Figura 4.1.

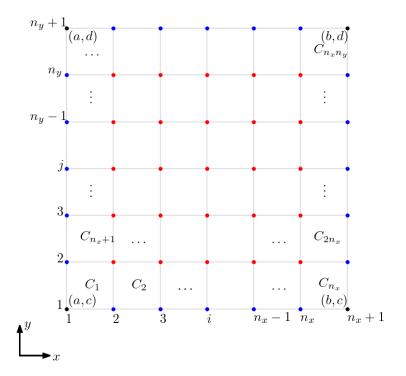


Figura 4.1: Representação da malha para a Regra Composta do Trapézio.

Aplicando a ideia, temos

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y) \, dy \, dx = \sum_{k=1}^{n_{x} n_{y}} \int \int_{C_{k}} f(x, y) \, dy \, dx \tag{4.43}$$

$$= \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) \, dy \, dx \tag{4.44}$$

Em cada integral em C_k , aplicamos a Regra do Trapézio, segue

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) \, dy \, dx \approx \frac{h_y}{2} \frac{h_x}{2} \left[f(x_i, y_j) + f(x_{i+1}, y_j) \right] \tag{4.45}$$

+
$$f(x_{i+1}, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_j)$$
] (4.46)

Observamos que nos conjuntos de nodos (marcados em azul na Figura 4.1)

$$\{(i,j): i=2,\ldots,n_x, j=1 \text{ ou } j=n_y+1\},$$
 (4.47)

$$\{(i,j): i=1 \text{ ou } i=n_x+1, j=2,\ldots,n_y\}$$
 (4.48)

a função integranda será avaliada 2 vezes. Já, em todos os nodos internos, $i=2,\ldots,n_x,\ j=2,\ldots,n_y,$ a função será avaliada 4 vezes. Com isso, chegamos à Regra Composta do Trapézio

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y) \, dy \, dx = \frac{h_{x}h_{y}}{4} \left[f(x_{1}, y_{1}) + f(x_{n_{x}+1}, y_{1}) + f(x_{n_{x}+1}, y_{n_{y}+1}) + f(x_{1}, y_{n_{y}+1}) \right]
+ \frac{h_{x}h_{y}}{2} \sum_{i=2}^{n_{x}} \left[f(x_{i}, y_{1}) + f(x_{i}, y_{n_{y}+1}) \right]
+ \frac{h_{x}h_{y}}{2} \sum_{j=2}^{n_{y}} \left[f(x_{1}, y_{j}) + f(x_{n_{x}+1}, y_{j}) \right]
+ h_{x}h_{y} \sum_{i=2}^{n_{x}} \sum_{j=2}^{n_{y}} f(x_{i}, y_{j})
+ O(h_{x}^{2} + h_{y}^{2})$$
(4.49)

Observamos que esta é uma quadratura de $(n_x + 1)(n_y + 1)$ nodos.

E.4.2.1. Verifique a aplicação da Regra Composta do Trapézio para computar

$$\int_{1.5}^{2} \int_{1}^{1.5} \ln(x+2y) \, dy \, dx. \tag{4.50}$$

Regra Composta de Simpson

Aqui, vamos construir uma malha

$$M = \{C_k = [x_i, x_{i+2}] \times [y_j, y_{j+2}]: i = 1, 3, \dots, n_x - 1, j = 1, 3, \dots, n_y - 1, \},$$
 (4.51) onde $x_i = (i-1)h_x, h_x = (b-a)/n_x, i = 1, 2, \dots, n_x + 1 \text{ e } y_j = (j-1)h_y,$ $h_y = (d-c)/n_y, j = 1, 2, \dots, n_y + 1.$ Com $n_x, n_y \leq 2$ números pares. Consulte a Figura 4.2.

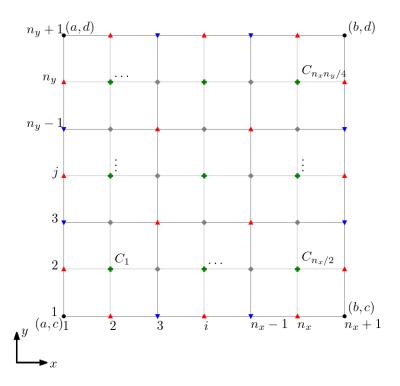


Figura 4.2: Representação da malha para a Regra Composta de Simpson.

A Regra Composta de Simpson para Integrais Iteradas fica

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y) dx dy = \frac{h_{x}h_{y}}{9} \left\{ f(x_{1}, y_{1}) + f(x_{n_{x}+1}, y_{1}) + f(x_{1}, y_{n_{y}+1}) + f(x_{n_{x}+1}, y_{n_{y}+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n_{x}/2-1} \left[f(x_{2i+1}, y_{1}) + f(x_{2i+1}, y_{n_{y}+1}) \right] + 2 \sum_{j=1}^{n_{y}/2-1} \left[f(x_{1}, y_{2j+1}) + f(x_{n_{x}+1}, y_{2j+1}) \right] + 4 \sum_{i=1}^{n_{x}/2} \left[f(x_{2i}, y_{1}) + f(x_{2i}, y_{n_{y}+1}) \right] + 4 \sum_{j=1}^{n_{y}/2} \left[f(x_{1}, y_{2j}) + f(x_{n_{x}+1}, y_{2j}) \right]$$

 ${\bf notaspedrok.com.br}$

$$+4\sum_{i=1}^{n_{x}/2-1}\sum_{j=1}^{n_{y}/2-1}f(x_{2j+1},y_{2j+1})$$

$$+8\sum_{i=1}^{n_{x}/2-1}\sum_{j=1}^{n_{y}/2}f(x_{2i+1},y_{2j})$$

$$+8\sum_{i=1}^{n_{x}/2}\sum_{j=1}^{n_{y}/2-1}f(x_{2i},y_{2j+1})$$

$$+16\sum_{i=1}^{n_{x}/2}\sum_{j=1}^{n_{y}/2}f(x_{2i},y_{2j})$$

$$+O(h_{x}^{4}+h_{y}^{4}). \tag{4.52}$$

E.4.2.2. Verifique a aplicação da Regra Composta de Simpson para computar

$$\int_{1.5}^{2} \int_{1}^{1.5} \ln(x+2y) \, dy \, dx. \tag{4.53}$$

Pedro H A Konzen

Notas

- ¹Llewellyn Hilleth Thomas, 1903 1992, físico e matemático aplicado britânico. Fonte: Wikipedia.
- $^2 {\rm Llewellyn}$ Hilleth Thomas, 1903 1992, físico e matemático aplicado britânico. Fonte: Wikipedia.
- $^3 {\rm Llewellyn}$ Hilleth Thomas, 1903 1992, físico e matemático aplicado britânico. Fonte: Wikipedia.
- $^4 \rm Llewellyn$ Hilleth Thomas, 1903 1992, físico e matemático aplicado britânico. Fonte: Wikipedia.
- $^5 {\rm Llewellyn}$ Hilleth Thomas, 1903 1992, físico e matemático aplicado britânico. Fonte: Wikipedia.
- ⁶Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 1855, matemático alemão. Fonte: Wikipédia: Carl Friedrich Gauss.
- ⁷Siméon Denis Poisson, 1781 1840, matemático francês. Fonte: Wikipédia:Siméon Denis Poisson.
- $^8{\rm Pierre\text{-}Simon}$ Laplace, 1749 1827, matemático francês. Fonte: Wikipédia: Pierre-Simon Laplace.
- ⁹CSR e CSC são formatos de matrizes esparsas mais eficientes para a computação matricial.
 - ¹⁰Desenvolvido por Yousef Saad e H. Schultz, 1986. Fonte: Wikipedia.
- ¹¹Alexei Nikolajewitsch Krylov, 1863 1945, engenheiro e matemático russo. Fonte: Wikipédia.
 - ¹²Georgi Iwanowitsch Petrov, 1912 1987, engenheiro soviético. Fonte: Wikipedia.
 - ¹³Boris Galerkin, 1871 1945, engenheiro e matemático soviético. Fonte: Wikipédia.
- $^{14} \mathrm{Walter}$ Edwin Arnoldi, 1917 1995, engenheiro americano estadunidense. Fonte: Wikipédia.
 - ¹⁵Jørgen Pedersen Gram, 1850 1916, matemático dinamarquês. Fonte: Wikipédia.
 - ¹⁶Erhard Schmidt, 1876 1959, matemático alemão. Fonte: Wikipédia.

notaspedrok.com.br

- $^{17}\mathrm{Karl}$ Adolf Hessenberg, 1904 1959, engenheiro e matemático alemão. Fonte: Wikipédia.
- ¹⁸Alston Scott Householder, 1904 1993, matemático americano estadunidense. Fonte: Wikipédia.
- $^{19}\mathrm{Sim\acute{e}on}$ Denis Poisson, 1781 1840, matemático francês. Fonte: Wikipédia:Siméon Denis Poisson.
- $^{20} \mathrm{Walter}$ Edwin Arnoldi, 1917 1995, engenheiro americano estadunidense. Fonte: Wikipédia.
 - $^{21}x^TAx > 0$ para todo $x \neq 0$.
 - 22 Iteração do método do máximo declive.
 - ²³scipy.sparse.linalg.gmres
 - ²⁴scipy.sparse.linalg.spsolve
 - ²⁵Compare com o funcional J dado em (1.87).
 - $^{26} \text{Mostre}$ que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ é de fato um produto interno.
 - ²⁷scipy.sparse.linalg.gmres
 - ²⁸scipy.sparse.linalg.cg
- ²⁹Carl Gustav Jakob Jacobi, 1804 1851, matemático alemão. Fonte: Wikipédia: Carl Gustav Jakob Jacobi.
- 30 Isaac Newton, 1642 1727, matemático, físico, astrônomo, teólogo e autor inglês. Fonte: Wikipédia: Isaac Newton.
 - ³¹Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832 1903, matemático alemão. Fonte: Wikipédia.
 - ³²Jan Burgers, 1895 1981, físico neerlandês. Fonte: Wikipédia: Jan Burgers.
- ³³Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 1859, matemático alemão. Fonte: Wikipédia: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.
 - ³⁴Erich Hans Rothe, 1895 1988, matemático alemão. Fonte: Wikipédia.
- $^{35} \rm Leonhard$ Paul Euler, 1707-1783, matemático e físico suíço. Fonte: Wikipédia: Ronald Fisher.

Pedro H A Konzen

- 36 Isaac Newton, 1642 1727, matemático, físico, astrônomo, teólogo e autor inglês. Fonte: Wikipédia: Isaac Newton.
- ³⁷Carl Gustav Jakob Jacobi, 1804 1851, matemático alemão. Fonte: Wikipédia: Carl Gustav Jakob Jacobi.
 - ³⁸Brook Taylor, 1685 1731, matemático britânico. Fonte: Wikipédia:Brook Taylor.
 - $^{39} \mathrm{Philip}$ Wolfe, 1927 2016, matemático estadunidense. Fonte: Wikipédia.
- $^{40}\mathrm{Howard\ Harry\ Rosenbrock},\ 1920$ 2010, engenheiro britânico. Fonte: Wikipedia: Howard Harry Rosenbrock.
- $^{41}{\rm Leopold}$ Kronecker, 1923 1891, matemático alemão. Fonte: Wikipédia: Leopold Kronecker.
- $^{42}\mathrm{Howard\ Harry\ Rosenbrock},\ 1920$ 2010, engenheiro britânico. Fonte: Wikipedia: Howard Harry Rosenbrock.
- ⁴³Isaac Newton, 1642 1727, matemático, físico, astrônomo, teólogo e autor inglês. Fonte: Wikipédia: Isaac Newton.
- $^{44} \mathrm{Alexei}$ Nikolajewitsch Krylov, 1863 1945, engenheiro e matemático russo. Fonte: Wikipédia.
- $^{45} \rm Howard~Harry~Rosenbrock,~1920$ 2010, engenheiro britânico. Fonte: Wikipedia: Howard Harry Rosenbrock.
- $^{46}\mathrm{Howard\ Harry\ Rosenbrock},\ 1920$ 2010, engenheiro britânico. Fonte: Wikipedia: Howard Harry Rosenbrock.
 - ⁴⁷Existe uma base de $\mathbb{C}^{n\times n}$ formada apenas de autovetores de A.
 - ⁴⁸Segue por indução matemática.
 - ⁴⁹Condição necessária para a convergência.
 - ⁵⁰Issai Schur, 1875 1941, matemático russo-alemão. Fonte: Wikipédia.
 - $^{51}\mathrm{Uma}$ matriz U é dita unitária quando $U^{-1}=U^{H}.$
 - $^{52}\mathrm{Uma}$ matrizQé dita ortogonal quando $Q^TQ=I.$
- $^{53}\mathrm{Karl}$ Adolf Hessenberg, 1904 1959, engenheiro e matemático alemão. Fonte: Wikipédia.

${\bf notaspedrok.com.br}$

 $^{54} \mathrm{James}$ Wallace Givens Jr., 1910 - 1993, matemático estadunidense. Fonte: Wikipédia.

Referências

- [1] Beale, E. M. L.. On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), vol. 17, 1995, pp. 173-184. DOI: https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1955.tb00191.x
- [2] Burden, R. & Faires, J.D.. Análise Numérica, Cengage Learning, 3. ed., 2016. ISBN: 978-8522123407
- [3] Davis, J. P. & Rabinowitz, P.. Methods of Numerical Integration, Academic Press, Inc., 2. ed., 1984.
- [4] Goldstein, A. A. & Price, J. F.. On Descent from Local Minima, Mathematics of Computation, vol. 25, 1971, pp. 569-574. DOI: https://doi.org/10.2307/2005219
- [5] Golub, G. & Van Loan, C.F.. Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, 4. ed., 2013.
- [6] Kelley, C.T.. Iterative Methods for Optimization, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [7] Nocedal, J. & Wright, S. J.. Numerical Optimization, 2. ed., Springer, 2006. ISBN: 978-0387-30303-1
- [8] Quarteroni, A.; Sacco, R. & Saleri, F.. Numerical Mathematics, 2. ed., Springer, 2007. ISBN: 9783540346586
- [9] Saad, Y.. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Society for In-

${\bf notaspedrok.com.br}$

dustrial and Applied Mathematics, 2003.

- [10] Stoer, J.. Approximate Calculation of Multiple Integrals, Prentice-Hall, Inc., 1971.
- [11] Watkins, D.. Fundamentals of Matrix Computations, John Wiley, 2002.

Índice de Comandos

 $\begin{array}{ccc} \text{scipy} & & \text{csc_array}, \, 15 \\ \text{.sparse} & & \text{csr_array}, \, 13 \\ & & \text{coo_array}, \, 12 \end{array}$