

Cálculo I

Pedro H A Konzen

17 de dezembro de 2024

Licença

Este texto é disponibilizado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite

http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR

ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

O site [notaspedrok.com.br](https://www.notaspedrok.com.br) é uma plataforma que construí para o compartilhamento de minhas notas de aula. Essas anotações feitas como preparação de aulas é uma prática comum de professoras/es. Muitas vezes feitas a rabiscos em rascunhos com validade tão curta quanto o momento em que são concebidas, outras vezes, com capricho de um diário guardado a sete chaves. Notas de aula também são feitas por estudantes - são anotações, fotos, prints, entre outras formas de registros de partes dessas mesmas aulas. Essa dispersão de material didático sempre me intrigou e foi o que me motivou a iniciar o site.

Com início em 2018, o site contava com apenas três notas incipientes. De lá para cá, conforme fui expandido e revisando os materiais, o site foi ganhando acessos de vários locais do mundo, em especial, de países de língua portuguesa. No momento, conta com 13 notas de aula, além de minicursos e uma coleção de vídeos e áudios.

As notas de **Cálculo I** abordam sobre tópicos de cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos python são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica [SymPy](https://www.sympy.org/).

Aproveito para agradecer a todas/os que de forma assídua ou esporádica contribuem com correções, sugestões e críticas! ;)

Pedro H A Konzen

<https://www.notaspedrok.com.br>

Conteúdo

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Conteúdo	v
1 Limites	1
1.1 Noção de limites	1
1.1.1 Limites da função constante e da função identidade . .	4
1.1.2 Exercícios resolvidos	7
1.1.3 Exercícios	9
1.2 Regras para o cálculo de limites	12
1.2.1 Regras de cálculo	12
1.2.2 Indeterminação $0/0$	17
1.2.3 Exercícios resolvidos	19
1.2.4 Exercícios	21
1.3 Limites laterais	25
1.3.1 Exercícios resolvidos	30
1.3.2 Exercícios	33
1.4 Limites no infinito	36
1.4.1 Assíntotas horizontais	42
1.4.2 Limite no infinito de função periódica	45
1.4.3 Exercícios resolvidos	46
1.4.4 Exercícios	50
1.5 Limites infinitos	52

1.5.1	Assíntotas verticais	57
1.5.2	Assíntotas oblíquas	60
1.5.3	Limites infinitos no infinito	62
1.5.4	Exercícios resolvidos	63
1.5.5	Exercícios	66
1.6	Continuidade	70
1.6.1	Definição de função contínua	70
1.6.2	Propriedades de funções contínuas	73
1.6.3	Exercícios resolvidos	76
1.6.4	Exercícios	78
1.7	Limites e desigualdades	80
1.7.1	Limites de funções limitadas	80
1.7.2	Teorema do confronto	81
1.7.3	Limites envolvendo $(\sin x)/x$	84
1.7.4	Exercícios resolvidos	86
1.7.5	Exercícios	87
1.8	Exercícios finais	87
	Notas	89
	Referências	90

Capítulo 1

Limites

1.1 Noção de limites

<https://youtu.be/0xq0aaEI0jo>

Seja f uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto x_0 , exceto talvez em x_0 . Quando o valor de $f(x)$ é **arbitrariamente próximo** de um número L para x **suficientemente próximo** de x_0 , escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (1.1)$$

e dizemos que o **limite da função f é L quando x tende a x_0** . Veja a Figura 1.1.

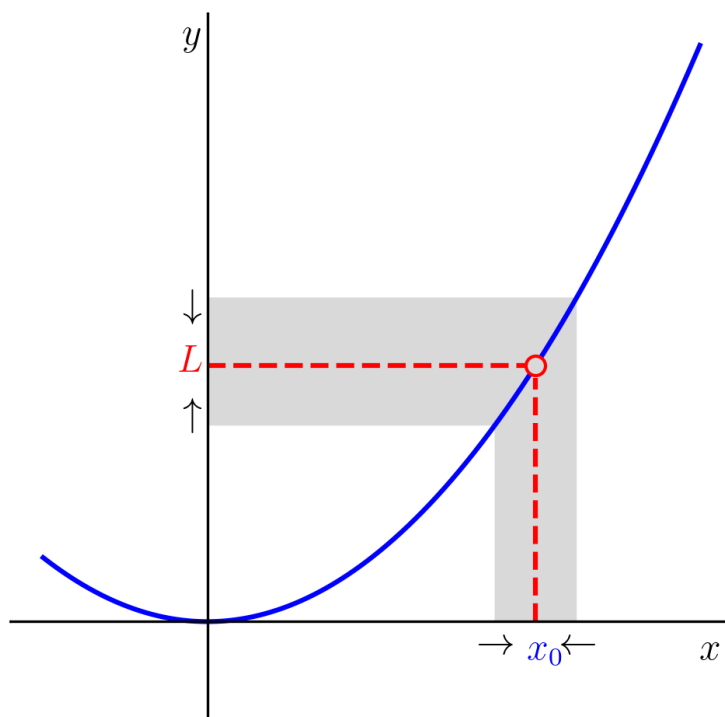


Figura 1.1: Noção de limite de uma função.

Exemplo 1.1.1. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}. \quad (1.2)$$

Na Figura 1.2, temos um esboço do gráfico desta função.

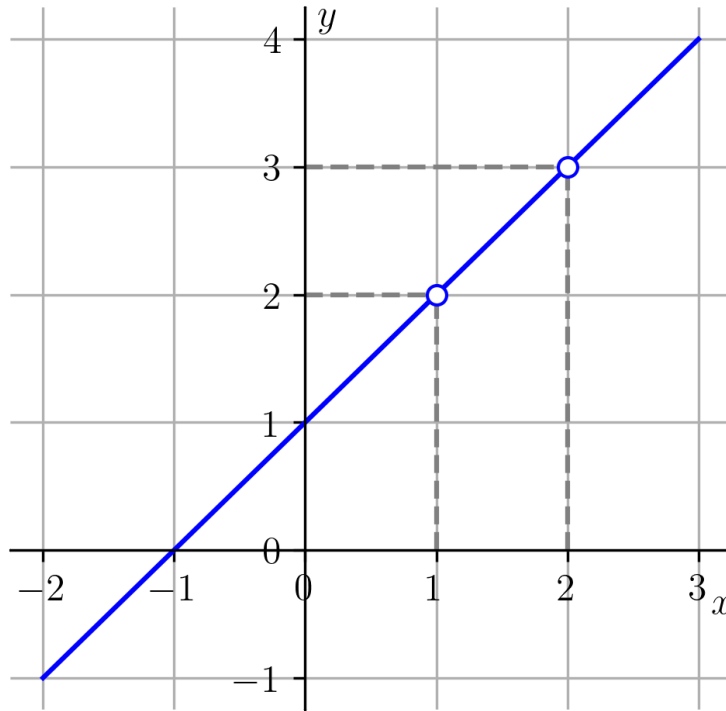


Figura 1.2: Gráfico da função $f(x)$ dada no Exemplo 1.1.1.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$.

x	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	$\rightarrow 0 \leftarrow$	$0,0001$	$0,001$	$0,01$
$f(x)$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$	$\rightarrow 1 \leftarrow$	$1,0001$	$1,001$	$1,01$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

Código 1.1: [Python](#)

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol('x')
3 >>> limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 0)
4 >>> 1
5

```


- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, embora $f(1)$ não esteja definido.

x	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$\rightarrow 1 \leftarrow$	$1,0001$	$1,001$	$1,01$
$f(x)$	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$\rightarrow 2 \leftarrow$	$2,0001$	$2,001$	$2,01$

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, embora $f(2)$ também não esteja definido. Verifique!

1.1.1 Limites da função constante e da função identidade

https://youtu.be/_7YiqVx8e8M

Da noção de limite, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \quad (1.3)$$

seja qual for a constante k . Veja a Figura 1.3.

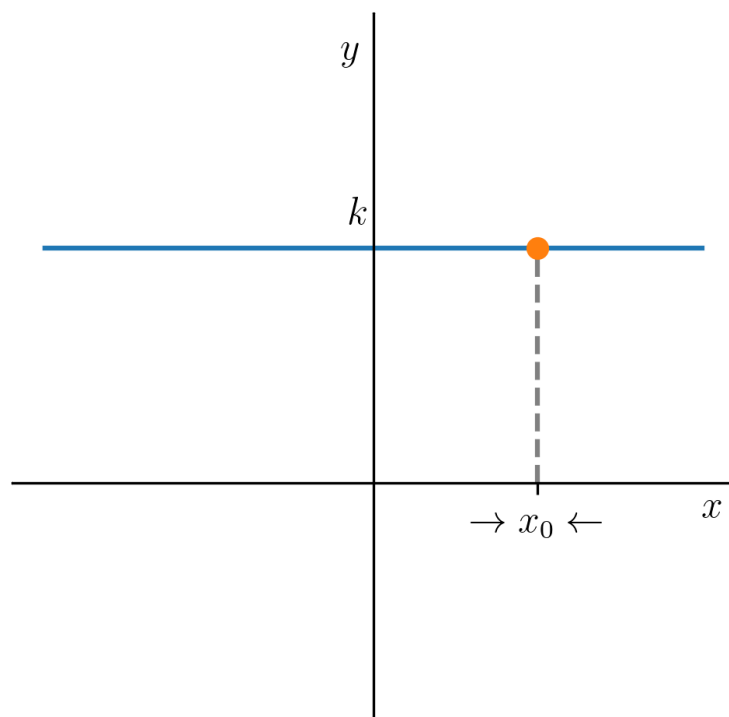


Figura 1.3: Limite de função constante $f(x) = k$.

Exemplo 1.1.2. Vejamos os seguintes casos:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1$ No [Python](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

Código 1.2: [Python](#)

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol("x")
3 >>> limit(1, x, -1)
4 >>> 1
5
```

- b) $\lim_{x \rightarrow 2} -3 = -3$

- c) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sqrt{2} - e) = \sqrt{2} - e$

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad (1.4)$$

seja qual for o ponto x_0 . Vejamos a Figura 1.4.

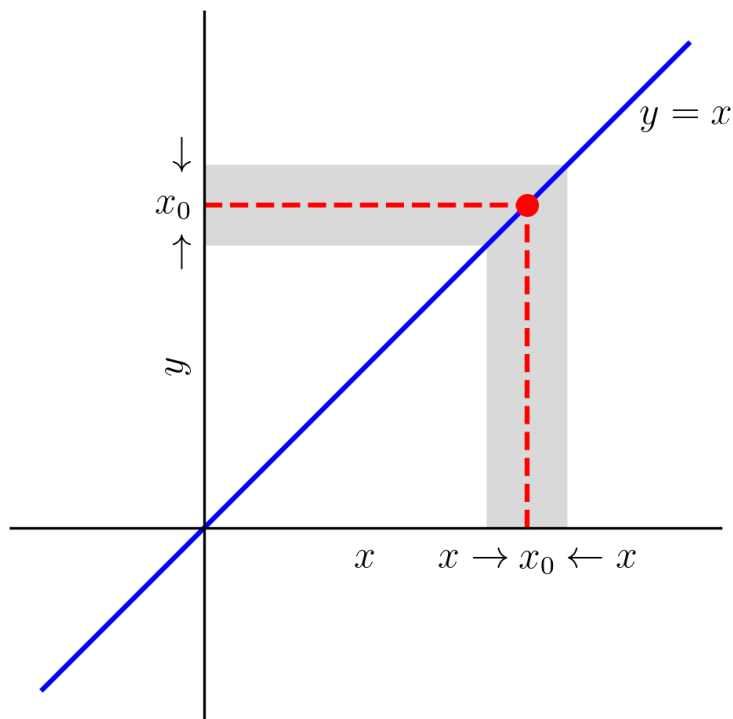


Figura 1.4: Limite da função identidade $f(x) = x$.

Exemplo 1.1.3. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} x = \pi$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar o limite do item a) com os seguintes comandos

Código 1.3: [Python](#)

```

1      >>> from sympy import *
2      >>> x = Symbol("x")
3      >>> limit(x, x, -1)
4      -1
5

```

Compute os outros itens e verifique os resultados!

1.1.2 Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Estime o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x. \quad (1.5)$$

Solução. Da noção de limite, podemos buscar inferir o limite de uma função em um ponto x_0 , computando seus valores próximos deste ponto. Por exemplo, construímos a seguinte tabela:

x	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	2,460	2,691	2,716	$\rightarrow 2,72 \leftarrow$	2,719	2,721	2,746

Com isso, inferimos que

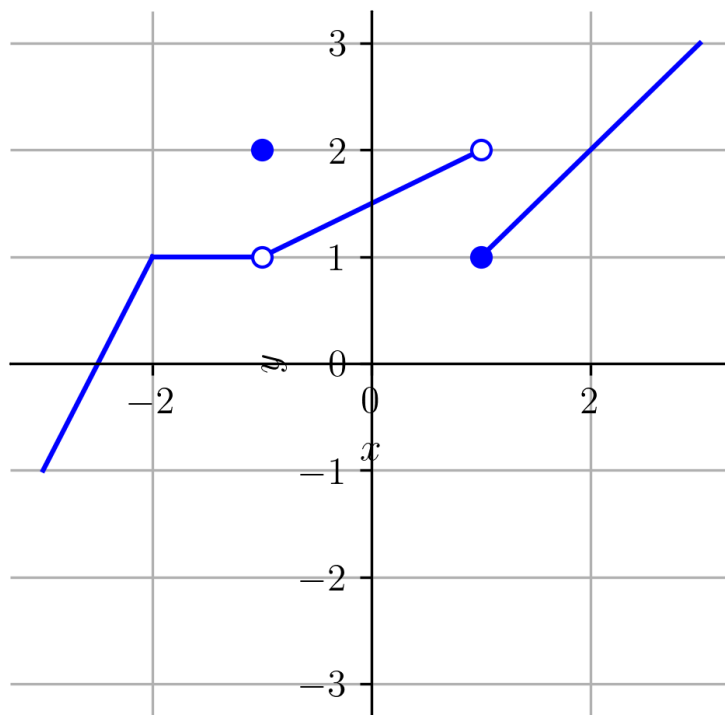
$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x \approx 2,72. \quad (1.6)$$

Mais adiante, veremos que $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e \approx 2,718281828459045\dots$

Verifique usando [Python](#)+[SymPy](#)!

◇

ER 1.1.2. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solução.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Para valores suficientemente próximos de -2 e a direita de -2 (i.e. $x > -2$), podemos observar que $f(x) = 1$. Para tais valores de x a esquerda de -2 (i.e. $x < -2$), vemos que os valores de $f(x)$ tornam-se próximos de 1. Isto é, temos que os valores de $f(x)$ podemos ser tomados arbitrariamente próximos de $L = 1$, se tomarmos x suficientemente próximo de

–2. Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2} = 1. \quad (1.7)$$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de x suficientemente próximos de -1 . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1. \quad (1.8)$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

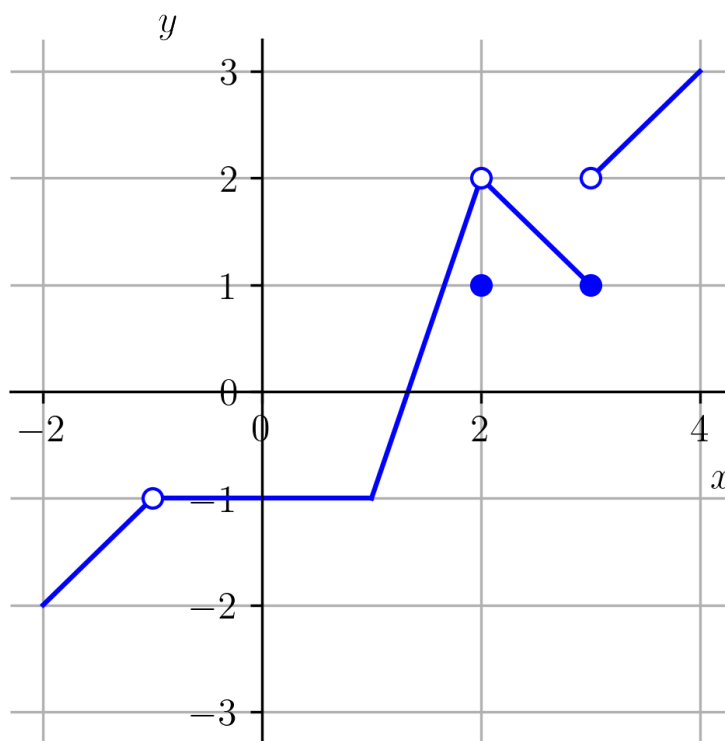
Aqui, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a esquerda ($x < 1$), vemos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 2$. Entretanto, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a direita ($x > 1$), temos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 1$. Ou seja, não é possível escolher um valor L tal que $f(x)$ esteja arbitrariamente próxima ao tomarmos x suficientemente próximo de $x_0 = 1$, pois L dependerá de x estar a esquerda ou a direita de do ponto $x_0 = 1$. Concluimos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (1.9)$$

◇

1.1.3 Exercícios

E.1.1.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

E.1.1.2. Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercício 1.1.1), forneça

1. $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x)$

E.1.1.3. Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} -3$

d) $\lim_{x \rightarrow e} \pi$

E.1.1.4. Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} x$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} x$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} x$

d) $\lim_{x \rightarrow e} x$

E.1.1.5. Com base na noção de limites, calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} |x|$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} |x|$

c) $\lim_{x \rightarrow 10^{-10}} |x|$

Respostas

E.1.1.1. a) -1 ; b) -1 ; c) 2 ; d) $\#$

E.1.1.2. a) $-\frac{3}{2}$; b) -1 ; c) -1

E.1.1.3. a) 2 ; b) 2 ; c) -3 ; d) π

E.1.1.4. a) 2 ; b) -2 ; c) -3 ; d) e

E.1.1.5. a) 1 ; b) 1 ; c) 10^{-10}

1.2 Regras para o cálculo de limites

1.2.1 Regras de cálculo

<https://youtu.be/chAoC7xoeYM>

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad (1.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \quad (1.11)$$

com x_0, L_1, L_2 números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (1.12)$$

$$= k \cdot L_1, \quad (1.13)$$

para qualquer número real k .

- Regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (1.14)$$

$$= L_1 \pm L_2 \quad (1.15)$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (1.16)$$

$$= L_1 \cdot L_2 \quad (1.17)$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (1.18)$$

$$= \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0 \quad (1.19)$$

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^s = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^s \quad (1.20)$$

$$= L_1^s, \quad L_1^s \in \mathbb{R} \quad (1.21)$$

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

Exemplo 1.2.1. Consideremos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} 2x$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow -1} x \quad (1.22)$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2 \quad (1.23)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com

Código 1.4: [Python](#)

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol("x")
3 >>> limit(2*x, x, -1)
4 -2
5
```

b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (1.24)$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 1 \quad (1.25)$$

$$= 2^2 - 1 = 3. \quad (1.26)$$

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

Código 1.5: [Python](#)

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")
3  >>> limit(x**2-1, x, 2)
4  3
5
```

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - x^2} \quad (1.27)$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right)^2} \quad (1.28)$$

$$= \sqrt{1 - (0)^2} \quad (1.29)$$

$$= 1. \quad (1.30)$$

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar este limite com

Código 1.6: [Python](#)

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")
3  >>> limit(sqrt(1-x**2), x, 0)
4  1
5
```

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 - 1) \cdot (x - 2)]}{\lim_{x \rightarrow 0} [(x - 1) \cdot (x - 2)]} \quad (1.31)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)} \quad (1.32)$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \quad (1.33)$$

Proposição 1.2.1. (Limites de polinômios) Se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad (1.34)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = p(b) \quad (1.35)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0, \quad (1.36)$$

para qualquer dado número real b .

Demonstração. Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação.

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (1.37)$$

$$= \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow b} a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \rightarrow b} a_0 \quad (1.38)$$

$$= a_n \left(\lim_{x \rightarrow b} x \right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow b} x \right)^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (1.39)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 = p(b). \quad (1.40)$$

□

Exemplo 1.2.2.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \quad (1.41)$$

$$= 4 + \sqrt{2}. \quad (1.42)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

Código 1.7: [Python](#)

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")
3  >>> limit(2*x**4-2*x**2+x, x, sqrt(2))
4  4 + sqrt(2)
5
```

Proposição 1.2.2. (Limite de funções racionais) Sejam $r(x) = p(x)/q(x)$ uma função racional e b um número real tal que $q(b) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (1.43)$$

Demonstração. Segue da regra do **limite do quociente** e da Proposição [1.2.1](#).

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow b} p(x)}{\lim_{x \rightarrow b} q(x)} \quad (1.44)$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (1.45)$$

□

Exemplo 1.2.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(0^2 - 1)(0 - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} \quad (1.46)$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \quad (1.47)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com os comandos.

Código 1.8: [Python](#)

```

1  >>> from sympy import *
```

```

2 >>> x = Symbol("x")
3 >>> limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 0)
4 1
5

```

1.2.2 Indeterminação 0/0

<https://youtu.be/dW3CfM2JjKY>

Quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (1.48)$$

é uma **indeterminação do tipo** 0/0. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum $(x - a)$.

Exemplo 1.2.4.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)\cancel{(x - 2)}}{(x - 1)\cancel{(x - 2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (1.49)$$

$$= \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3. \quad (1.50)$$

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar o limite acima com os seguintes comandos.

Código 1.9: [Python](#)

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol("x")
3 >>> limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 2)
4 3
5

```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

Exemplo 1.2.5. No caso do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} \quad (1.51)$$

temos que o denominador $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ se anula em $x = 1$, assim como o denominador $q(x) = x^2 + x - 2$. Assim sendo, $(x - 1)$ é um fator comum entre $p(x)$ e $q(x)$. Para explicitá-lo, calculamos

$$\frac{p(x)}{x-1} = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x-1} \quad (1.52)$$

$$= x^2 - 2x - 3 \quad (1.53)$$

e

$$\frac{q(x)}{x-1} = \frac{x^2 + x - 2}{x-1} \quad (1.54)$$

$$= x + 2. \quad (1.55)$$

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar essas divisões com os seguintes comandos.

Código 1.10: [Python](#)

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")
3  >>> simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
4  x**2 - 2*x - 3
5  >>> simplify((x**2+x-2)/(x-1))
6  x + 2
7

```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \quad (1.56)$$

e

$$q(x) = (x - 1)(x + 2). \quad (1.57)$$

Com isso, segue que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x + 2)} \quad (1.58)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = -\frac{4}{3}. \quad (1.59)$$

Use [Python](#)+[SymPy](#) para computar este limite!

Exemplo 1.2.6. No caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \quad (1.60)$$

temos uma indeterminação do tipo $0/0$ envolvendo uma raiz. Neste caso, podemos calcular o limite usando de racionalização.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} \quad (1.61)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (1.62)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (1.63)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}. \quad (1.64)$$

Verifique computando com o [Python+SymPy](#).

1.2.3 Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}. \quad (1.65)$$

Solução. Usando das propriedades de limites, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x - x^2}{\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 + 3}} \quad (1.66)$$

$$= \frac{-1 - (-1)^2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 3}} \quad (1.67)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4}} = -1. \quad (1.68)$$

◇

ER 1.2.2. Assumindo que o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ e que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1, \quad (1.69)$$

forneça o valor de L .

Solução. Das propriedades de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1 \quad (1.70)$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2}{\lim_{x \rightarrow 2} x + 2} = 1 \quad (1.71)$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} 2}{2 + 2} = 1 \quad (1.72)$$

$$\frac{L - 2}{4} = 1 \quad (1.73)$$

$$L - 2 = 4 \quad (1.74)$$

$$L = 6. \quad (1.75)$$

◇

ER 1.2.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}. \quad (1.76)$$

Solução. Neste caso, não podemos usar a regra do quociente, pois

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - \sqrt{x^2 + 3} = 0. \quad (1.77)$$

Agora, como também temos

$$\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0, \quad (1.78)$$

concluimos se tratar de uma indeterminação $0/0$. Por racionalização, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} \frac{2 + \sqrt{x^2 + 3}}{2 + \sqrt{x^2 + 3}} \quad (1.79)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{4-(x^2+3)} \quad (1.80)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2} \quad (1.81)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{(1+x)(1-x)} \quad (1.82)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{1-x} \quad (1.83)$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \quad (1.84)$$

◇

1.2.4 Exercícios

E.1.2.1. Sabendo que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \quad (1.85)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} 2 \cdot f(x).$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \pi \cdot f(x).$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} -e^{\sqrt{2}} \cdot f(x).$

E.1.2.2. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2 \quad (1.86)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{2}, \quad (1.87)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) - f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 2g(x)$

E.1.2.3. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \quad (1.88)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2, \quad (1.89)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x)\right)$

E.1.2.4. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 \quad (1.90)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -3, \quad (1.91)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{2f(x)}$

E.1.2.5. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \quad (1.92)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 4, \quad (1.93)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{f(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))^{\frac{4}{3}}$

E.1.2.6. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} -3x$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x + \sqrt{x^2}$

E.1.2.7. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

E.1.2.8. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{2x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

E.1.2.9. Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x - 2}}{x - 6}. \quad (1.94)$$

E.1.2.10. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação. Se existem

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L \quad (1.95)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = M \quad (1.96)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + g(x) = L + M. \quad (1.97)$$

Justifique sua resposta.

Respostas

E.1.2.1. a) 4; b) 2π ; c) $-2e^{\sqrt{2}}$

E.1.2.2. a) $-3/2$; b) $5/2$; c) -3

E.1.2.3. a) -6 ; b) -3 ;

E.1.2.4. a) $2/3$; b) $3/4$;

E.1.2.5. a) 2; b) -1 ; c) 1

E.1.2.6. a) 6; b) 10; c) 12

E.1.2.7. a) $1/2$; b) $-1/3$;

E.1.2.8. a) 2; b) -1 ; c) -3 ;

E.1.2.9. $-1/4$

E.1.2.10. Falso. Construa um contraexemplo para mostrar que a afirmação não é verdadeira.

1.3 Limites laterais

<https://youtu.be/BFJPIejdyZM>

Seja dada uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (a, x_0) . O **limite lateral à esquerda** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \tag{1.98}$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x < x_0$. Em outras palavras, o

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \tag{1.99}$$

quando $f(x)$ é arbitrariamente próximo de L , para todo $x < x_0$ suficientemente próximo de x_0 . Veja a Figura 1.5.

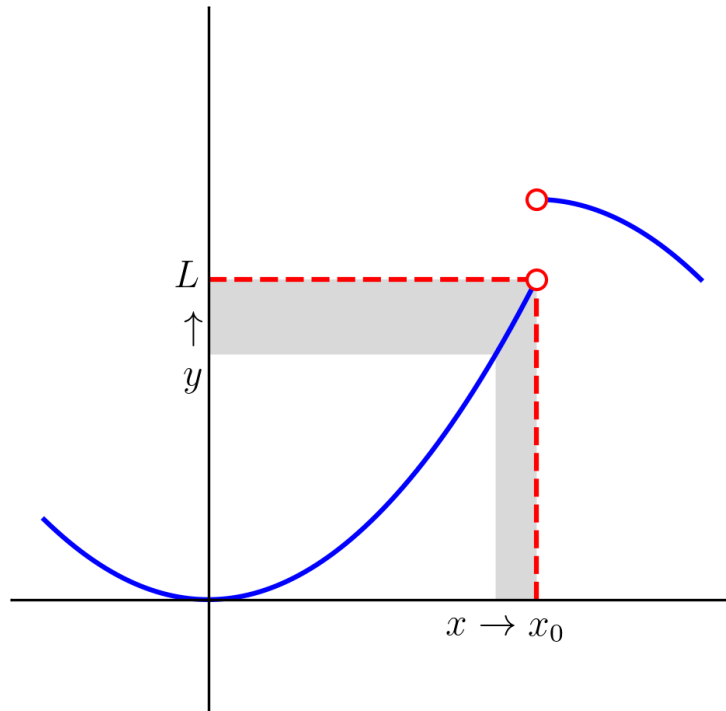


Figura 1.5: Limite lateral à esquerda.

Para uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (x_0, b) , o **limite lateral à direita** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (1.100)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x > x_0$. Em outras palavras, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L, \quad (1.101)$$

quando $f(x)$ é arbitrariamente próximo de L , para todo $x > x_0$ suficientemente próximo de x_0 . Veja a Figura 1.6.

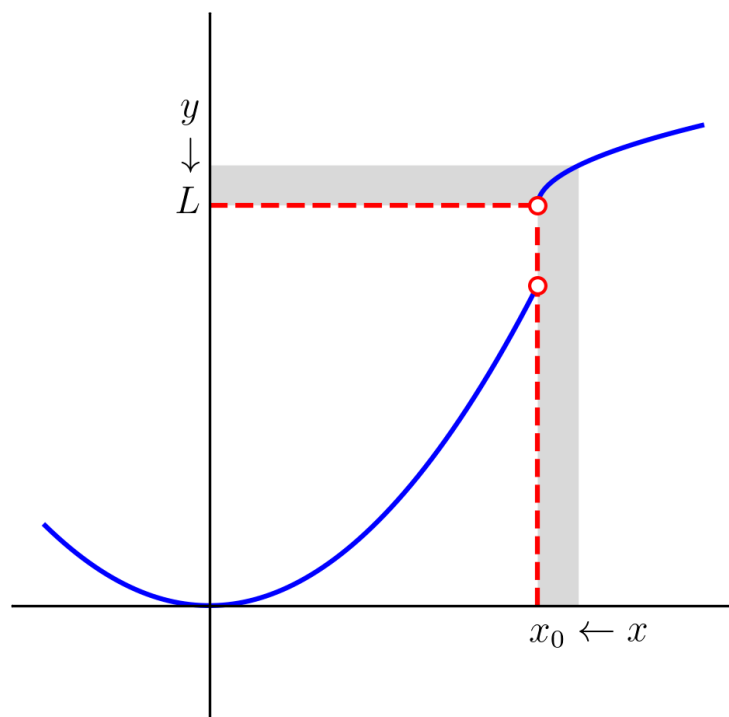


Figura 1.6: Limite lateral à direita.

Observação 1.3.1. Por inferência direta, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} k = k \quad (1.102)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} x = x_0, \quad (1.103)$$

onde x_0 e k são quaisquer dados números reais.

E.1.3.1. Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|. \quad (1.104)$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (1.105)$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de $x = 0$, trabalhamos com $x < 0$ e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x \quad (1.106)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \quad (1.107)$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \quad (1.108)$$

Verifique!

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar os limites acima com os seguintes comandos.

Código 1.11: [Python](#)

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")
3  >>> limit(abs(x), x, 0, '-')
4  0
5  >>> limit(abs(x), x, 0, '+')
6  0
7
```

Teorema 1.3.1. *Existe o limite de uma dada função f no ponto $x = x_0$ e*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (1.109)$$

se, e somente se, existem e são iguais a L os limites laterais à esquerda e à direita de f no ponto $x = x_0$.

E.1.3.2. No exemplo anterior (Exemplo [1.3.1](#)), vimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0. \quad (1.110)$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema [1.3.1](#)), podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \quad (1.111)$$

E.1.3.3. Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}. \quad (1.112)$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \quad (1.113)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1. \quad (1.114)$$

Agora, calculando o limite lateral à direita, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \quad (1.115)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1. \quad (1.116)$$

Como os **limites laterais** à esquerda e à direita **são diferentes**, concluímos que **não existe o limite** de $|x|/x$ no ponto $x = 0$.

Com o [Python+SymPy](#), por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

Código 1.12: [Python](#)

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol("x")
3 >>> limit(abs(x)/x, x, 0)
4 1
5
```

fornece o valor 1 como saída. Compute os limites laterais e verifique com os resultados analíticos obtidos acima!

Observação 1.3.2. As regras básicas para o cálculo de limites bilaterais são estendidas para limites laterais. I.e., se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = L_1 \quad (1.117)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = L_2, \quad (1.118)$$

então valem a:

- regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = k L_1, \quad (1.119)$$

para qualquer número real k .

- regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) \quad (1.120)$$

$$= L_1 + L_2 \quad (1.121)$$

- regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) \quad (1.122)$$

$$= L_1 \cdot L_2 \quad (1.123)$$

- regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x)} \quad (1.124)$$

$$= \frac{L_1}{L_2}, \quad (1.125)$$

desde que $L_2 \neq 0$.

- regra da potenciação:

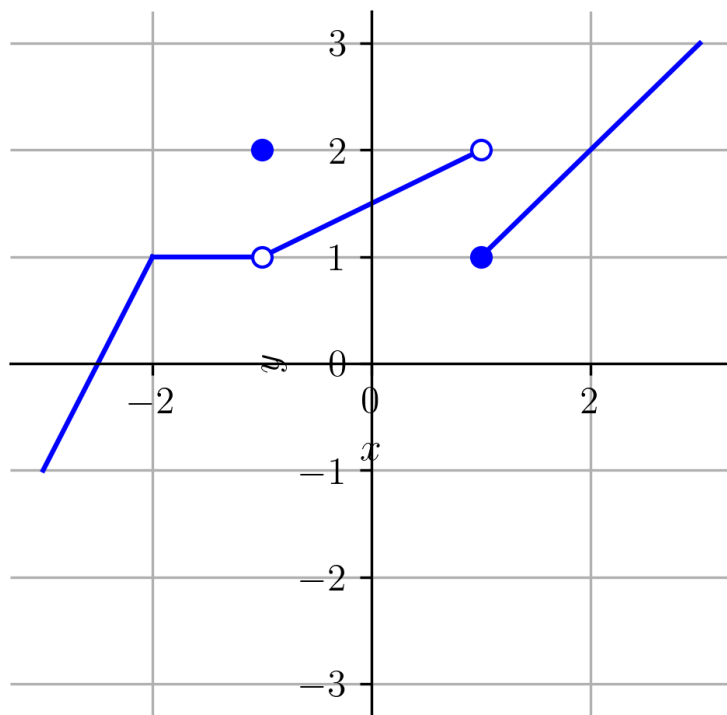
$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} (f(x))^s = \left(\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \right)^s \quad (1.126)$$

$$= L_1^s, \quad (1.127)$$

se, adicionalmente, L_1^s é um número real.

1.3.1 Exercícios resolvidos

ER 1.3.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solução.

a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

Para valores $x < -2$ e suficientemente próximos de -2 , podemos observar

que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de 1. Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} = 1. \quad (1.128)$$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > -1$ e suficientemente próximos de -1 . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1. \quad (1.129)$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 2, se escolhemos valores de $x < 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2. \quad (1.130)$$

Notamos também que, neste caso, $f(x)$ não tende para $f(1) = 1$ quando x tende a 1 pela esquerda.

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (1.131)$$

Aqui, $f(x) \rightarrow f(1) = 1$ quando $x \rightarrow 1^+$.

e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Nos itens anteriores, vimos que

$$2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (1.132)$$

Logo, concluimos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (1.133)$$

◇

ER 1.3.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & , x < -1, \\ x & , x > -1. \end{cases} \quad (1.134)$$

Solução. A função f tem comportamentos distintos para valores à esquerda e à direita de $x_0 = -1$. Portanto, para calcularmos $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ precisamos calcular os limites laterais. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1)^2 - 1 \quad (1.135)$$

$$= (-1+1)^2 - 1 = -1, \quad (1.136)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \quad (1.137)$$

$$= -1. \quad (1.138)$$

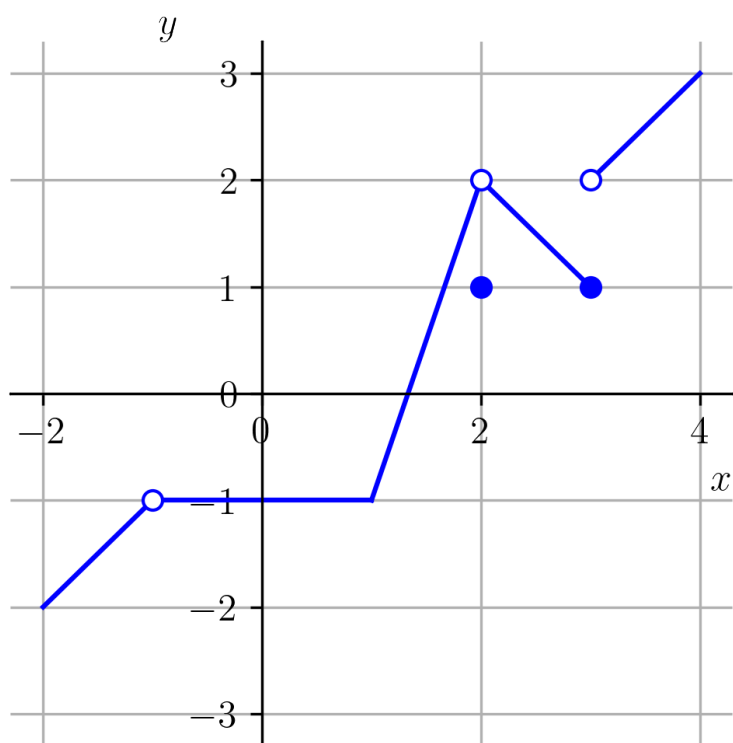
Como ambos os limites laterais são iguais a -1 , concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1. \quad (1.139)$$

◇

1.3.2 Exercícios

E.1.3.4. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

E.1.3.5. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x & , x > 1. \end{cases} \quad (1.140)$$

calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x).$

E.1.3.6. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x + 1 & , x > 1, \end{cases} \quad (1.141)$$

calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x).$

E.1.3.7. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2|x|}. \quad (1.142)$$

E.1.3.8. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1 - x^2}. \quad (1.143)$$

O que pode-se dizer sobre o limite à esquerda?

E.1.3.9. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação. Se existem

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L \quad (1.144)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = M \quad (1.145)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + g(x) = L + M. \quad (1.146)$$

Justifique sua resposta.

Respostas

E.1.3.4. a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) 1; f) \nexists

E.1.3.5. a) 2; b) 2; c) 2

E.1.3.6. a) 2; b) 3; c) \nexists

E.1.3.7. $-\frac{1}{2}$

E.1.3.8. 0; Não está definido, pois o domínio de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é $[-1, 1]$.

E.1.3.9. Falso. Dica: construa um contraexemplo para mostrar que a afirmação não é verdadeira.

1.4 Limites no infinito

<https://youtu.be/Ni9afaabTws>

Limites no infinito descrevem a tendência de uma dada função $f(x)$ quando $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow \infty$. Dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende a $-\infty$, se os valores de $f(x)$ são **arbitrariamente próximos** de L para todos os valores de x **suficientemente pequenos**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L. \quad (1.147)$$

Veja a Figura 1.7.

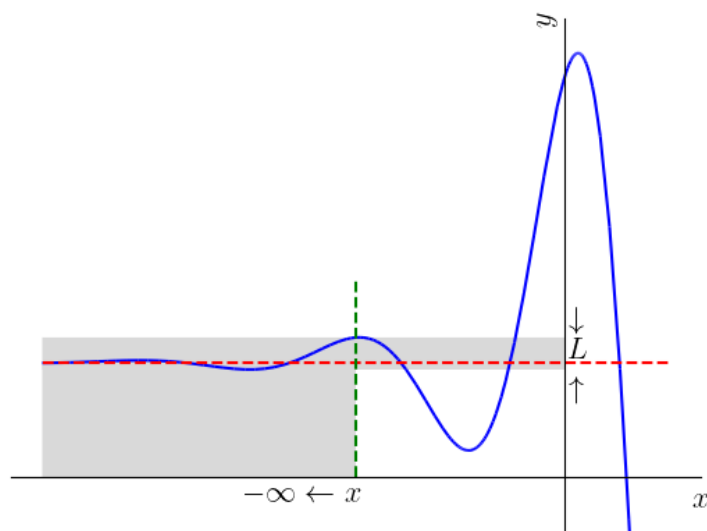


Figura 1.7: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \rightarrow -\infty$.

Analogamente, dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende ∞ , se os valores de $f(x)$ são **arbitrariamente próximos** de L para todos os valores de x **suficientemente grandes**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (1.148)$$

Veja a Figura 1.8.

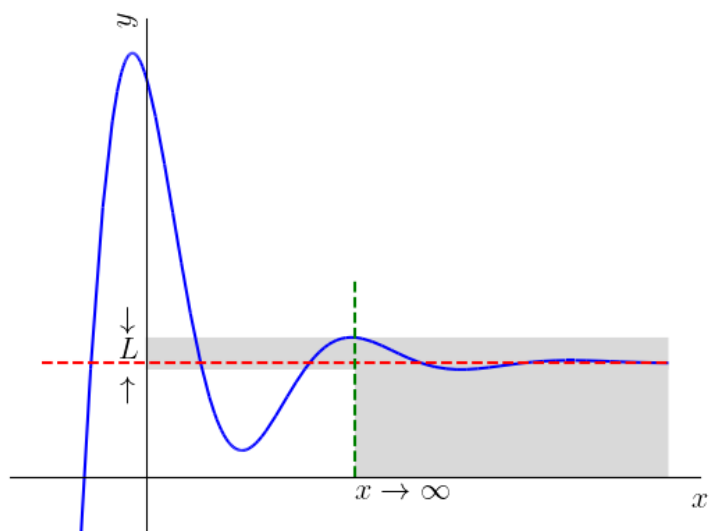


Figura 1.8: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \rightarrow \infty$.

Exemplo 1.4.1. Vamos inferir os limites de $f(x) = 1/x$ para $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow \infty$. A Figura 1.9 é um esboço do gráfico desta função.

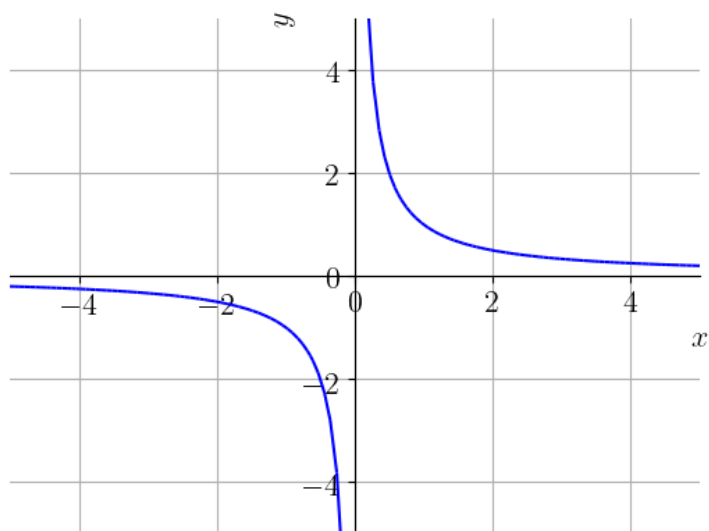


Figura 1.9: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x$.

Observamos que quanto menores os valores de x , mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Daí, inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (1.149)$$

Também, quanto maiores os valores de x , mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Com isso, podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (1.150)$$

Podemos computar estes limites com o [Python+SymPy](#), usando os seguintes comandos:

Código 1.13: [Python](#)

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol("x")
3 >>> limit(1/x, x, -oo)
4 0
5 >>> limit(1/x, x, oo)
6 0
```

Observação 1.4.1. (Regras para o cálculo de limites no infinito) Supondo que L , M e k são números reais e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad (1.151)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M. \quad (1.152)$$

Então, temos as seguintes regras para limites no infinito:

- Regra da multiplicação por escalar

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} kf(x) = kL \quad (1.153)$$

- Regra da soma/diferença

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \quad (1.154)$$

- Regra do produto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = LM \quad (1.155)$$

- Regra do quociente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \quad (1.156)$$

- Regra da potenciação

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^k = L^k, \text{ se } L^k \in \mathbb{R}. \quad (1.157)$$

Exemplo 1.4.2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1 \quad (1.158)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \quad (1.159)$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \quad (1.160)$$

$$= 0^2 + 1 = 1. \quad (1.161)$$

Exemplo 1.4.3. Consideramos o seguinte caso

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (1.162)$$

Observamos que não podemos usar a regra do quociente diretamente, pois, por exemplo, não existe o limite do numerador. A alternativa é multiplicar e dividir por $1/x^3$ (grau dominante), obtendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \quad (1.163)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \quad (1.164)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - \frac{3x^3}{x^3}} \quad (1.165)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - 3} \quad (1.166)$$

Então, aplicando as regras do quociente, da soma/subtração e da multiplicação por escalar, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \quad (1.167)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - 3} \quad (1.168)$$

$$= -\frac{1}{3}. \quad (1.169)$$

Proposição 1.4.1. *Dados dois polinômios*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (1.170)$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 \quad (1.171)$$

temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \quad (1.172)$$

Demonstração. Consulte o Exercício 1.4.8. □

Exemplo 1.4.4. Retornando ao Exemplo 1.4.3, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \quad (1.173)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} \quad (1.174)$$

$$= -\frac{1}{3}. \quad (1.175)$$

A ideia utilizada no Exemplo 1.4.3, também pode ser útil em limites no infinito envolvendo funções raiz.

Exemplo 1.4.5. Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x + 1}. \quad (1.176)$$

A ideia é multiplicar em cima e em baixo por $1/\sqrt{x^2}$. Seguimos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} \frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x + 1 \frac{1}{\sqrt{x^2}}} \quad (1.177)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}}}{\frac{x+1}{\sqrt{x^2}}} \quad (1.178)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\frac{x+1}{|x|}} \quad (1.179)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\frac{x+1}{x}} \quad (1.180)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} \quad (1.181)$$

$$= \frac{1}{1} = 1 \quad (1.182)$$

1.4.1 Assíntotas horizontais

<https://youtu.be/30KV7PxGiGE>

A reta $y = L$ é dita assíntota horizontal ao gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad (1.183)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (1.184)$$

Exemplo 1.4.6. No Exemplo 1.4.3, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (1.185)$$

Logo, temos que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (1.186)$$

Consulte a Figura 1.10.

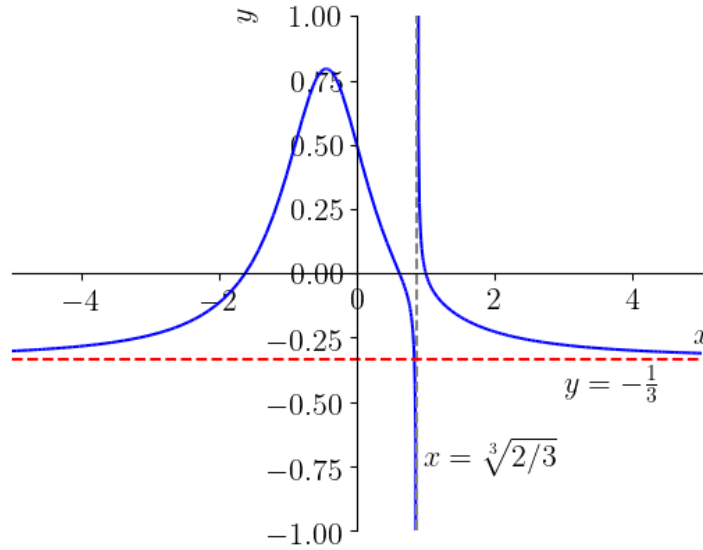


Figura 1.10: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$.

Também, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} \quad (1.187)$$

$$= -\frac{1}{3}. \quad (1.188)$$

O que reforça que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal desta função.

Exemplo 1.4.7. (Função exponencial natural)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (1.189)$$

donde temos que $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função exponencial natural. Veja a Figura 1.11.

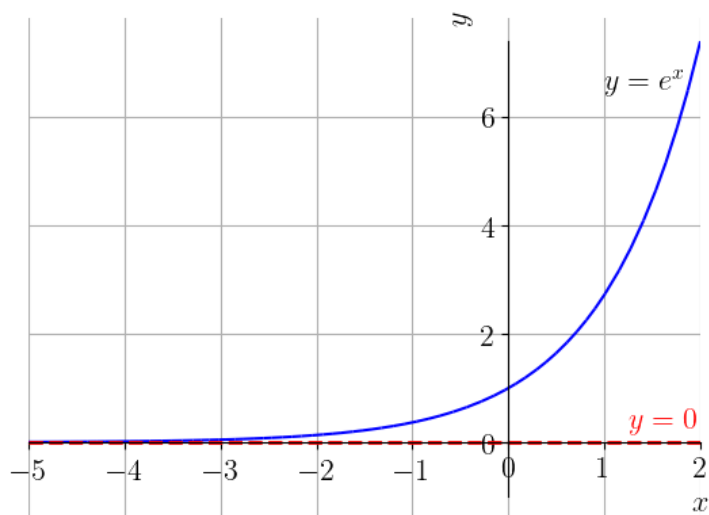


Figura 1.11: Esboço do gráfico de $f(x) = e^x$.

Exemplo 1.4.8. (Função logística) Na ecologia, a função logística ¹

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}e^{-rt}\right)} \quad (1.190)$$

é um modelo de crescimento populacional de espécies, sendo $P(t)$ o número de indivíduos da população no tempo t . O parâmetro P_0 é o número de indivíduos na população no tempo inicial $t = 0$, $r > 0$ é a proporção de novos indivíduos na população devido a reprodução e K é o limite de saturação do crescimento populacional (devido aos recursos escassos como alimentos, território e tratamento a doenças). Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}e^{-rt}\right)^0} = K \quad (1.191)$$

Ou seja, $P(t) = K$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $P = P(t)$ e é o limite de saturação do crescimento populacional. Na Figura 1.12, temos o esboço do gráfico da função logística para $t \geq 0$.

¹Consulte mais em [Wikipédia](#).

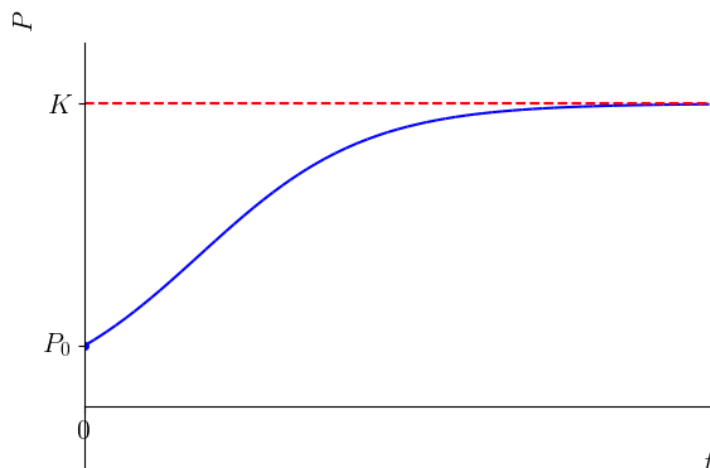


Figura 1.12: Esboço do gráfico da função logística.

1.4.2 Limite no infinito de função periódica

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma função f é periódica quando existe um número T tal que

$$f(x) = f(x + T), \quad (1.192)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no domínio de f . As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas².

O limite no infinito de funções periódicas não existe³. De fato, se f não é constante, então existem números $x_1 \neq x_2$ tal que $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Como a função é periódica, $f(x_1 + kT) = y_1$ e $f(x_2 + kT) = y_2$ para todo número inteiro k . Desta forma, não existe número L que possamos tomar $f(x)$ arbitrariamente próxima, para todos os valores de x suficientemente grandes (ou pequenos).

Exemplo 1.4.9. Não existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x), \quad (1.193)$$

²Consulte mais nas [Notas de Aula - Pré-Cálculo - Funções Trigonométricas](#)

³À exceção de funções constantes.

pois os valores de $\sin x$ oscilam periodicamente no intervalo $[-1, 1]$. Veja a Figura 1.13.

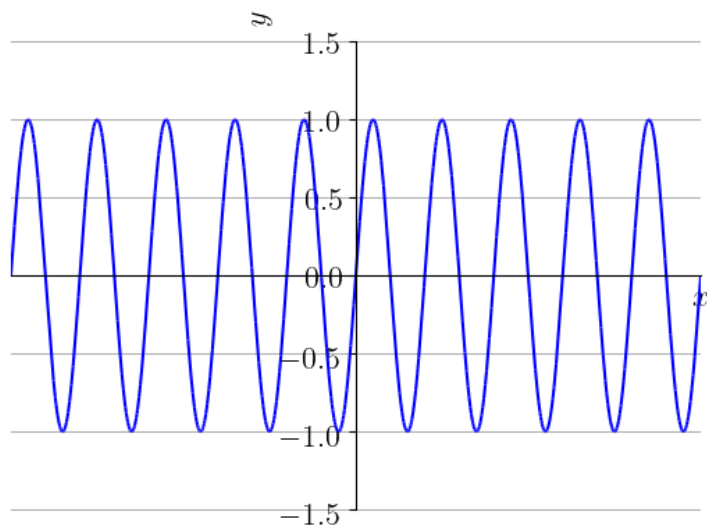


Figura 1.13: Esboço do gráfico de $f(x) = \sin x$.

Com o [Python](#)+[SymPy](#), temos

Código 1.14: [Python](#)

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")
3  >>> limit(sin(x), x, oo)
4  AccumBounds(-1, 1)
5

```

indicando que o limite não existe, pois $\sin x$ oscila indefinidamente no intervalo $[-1, 1]$.

1.4.3 Exercícios resolvidos

ER 1.4.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1. \quad (1.194)$$

Solução. Utilizando a regra da soma para limites no infinito, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} 1 \quad (1.195)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) + 1, \quad (1.196)$$

observando que $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/(x-1)$ existe. De fato, o gráfico de $g(x) = 1/(x-1)$ é uma translação de uma unidade à esquerda da função $f(x) = 1/x$. Uma translação horizontal finita não altera o comportamento da função para $x \rightarrow \infty$. Portanto, como $f(x) = 1/x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, temos que $g(x) = f(x-1) = 1/(x-1) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0. \quad (1.197)$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = 1. \quad (1.198)$$

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

Código 1.15: [Python](#)

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol("x")
3 >>> limit(1/(x-1)+1, x, oo)
4 1
5
```

◇

ER 1.4.2. Determine a(s) assíntota(s) horizontal(ais) do gráfico da função

$$f(x) = \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x}. \quad (1.199)$$

Solução. Uma reta $y = L$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L. \quad (1.200)$$

Começamos com $x \rightarrow -\infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \quad (1.201)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{2x^4} = 2. \quad (1.202)$$

Logo, $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f(x)$.

Agora, vamos ver a tendência da função para $x \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \quad (1.203)$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \quad (1.204)$$

Portanto, concluímos que $y = 2$ é a única assíntota horizontal ao gráfico da função f .

Os seguintes comandos do [Python+SymPy](#) permitem plotar o esboço do gráfico da função f (linha azul) e sua assíntota horizontal (linha vermelha):

Código 1.16: [Python](#)

```

1      >>> from sympy import *
2      >>> x = Symbol("x")
3      >>> f = lambda x: (3-x+4*x**4-10*x**3)/(x
**2+2*x**4-x)
4      >>> L = limit(f(x), x, oo)
5      >>> p = plot(f(x), (x, -15, 15), ylim = [-4,
6], \
7          line_color = "blue", show = False)
8      >>> q = plot(L, (x, -15, 15), line_color = "
red", show = False)
9      >>> p.extend(q)
10     >>> p.show()
```

◇

ER 1.4.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}. \quad (1.205)$$

Solução. Observamos que o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ é uma reflexão em torno do eixo y do gráfico da função $g(x) = e^x$. No Exemplo 1.4.7, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (1.206)$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} g(-x) \quad (1.207)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0. \quad (1.208)$$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$ na Figura 1.14.

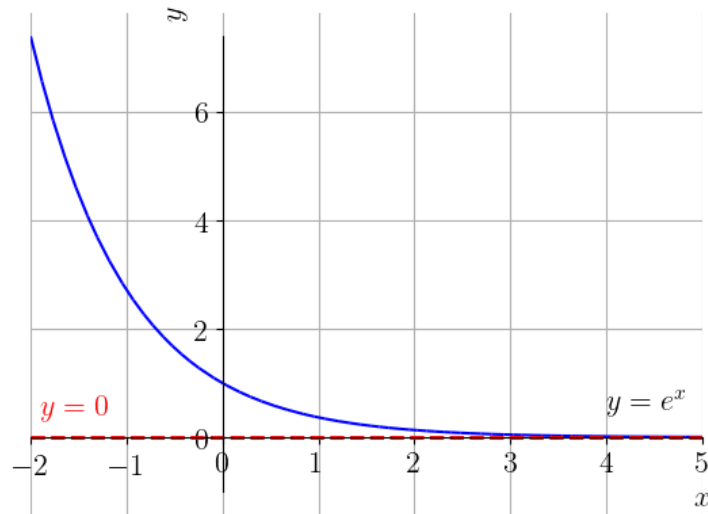


Figura 1.14: Esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$.

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

Código 1.17: [Python](#)

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol("x")
3 >>> limit(exp(-x), x, oo)
4 0
5
```

◇

1.4.4 Exercícios

E.1.4.1. Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -10x^{-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{10}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - \sqrt{2}}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - (x + 1)^{-1}$

E.1.4.2. Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-s}, \quad s > 0$

E.1.4.3. Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot 3^x + \sqrt{2}$

E.1.4.4. Calcule

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + e^{-x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-x} - 1$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e - e^x$

E.1.4.5. Calcule

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}$

E.1.4.6. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x. \quad (1.209)$$

E.1.4.7. Calcule:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + e^{-x}}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x}{x + 3} - e^x - 1.$

E.1.4.8. Dados dois polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$, mostre que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \quad (1.210)$$

Respostas

E.1.4.1. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) 2;

E.1.4.2. a) 0; b) 0; c) 0

E.1.4.3. a) 0; b) 1; c) $\sqrt{2}$;

E.1.4.4. a) 1; b) 3; c) -1 ; d) e

E.1.4.5. a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$

E.1.4.6. não existe.

E.1.4.7. a) 1; b) -3

E.1.4.8. Dica: use as regras para o cálculo de limites.

1.5 Limites infinitos

<https://youtu.be/KsWI1qgzr88>

O limite de uma função nem sempre existe. Entretanto, em muitos destes casos, podemos concluir mais sobre a tendência da função. Por exemplo, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é infinito quando x tende a um número x_0 , se $f(x)$ é arbitrariamente grande para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0 , mas $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty. \quad (1.211)$$

A Figura 1.15, é uma ilustração de $f(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow x_0$.

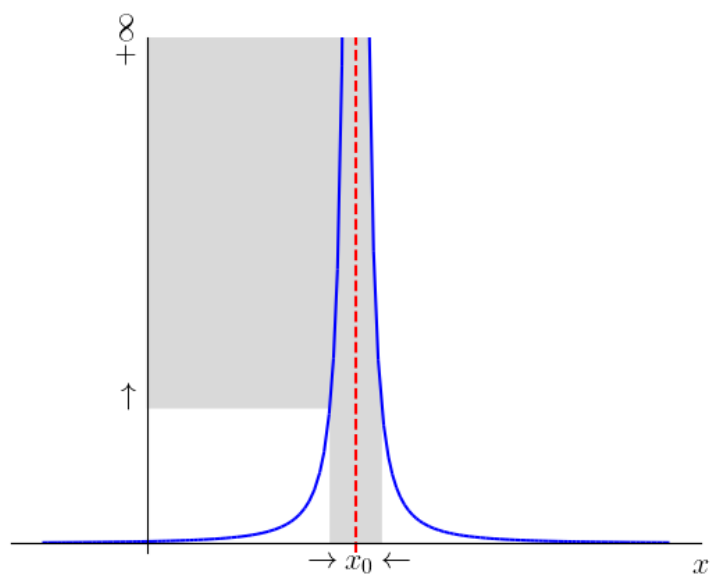


Figura 1.15: Ilustração de $f(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow x_0$.

Exemplo 1.5.1. Vejamos o caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}. \quad (1.212)$$

Ao tomarmos x próximo de $x_0 = 0$, obtemos os seguintes valores de $f(x)$:

x	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	$\rightarrow 0 \leftarrow$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	$\rightarrow \infty \leftarrow$	10^6	10^4	10^2

Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 1.16.

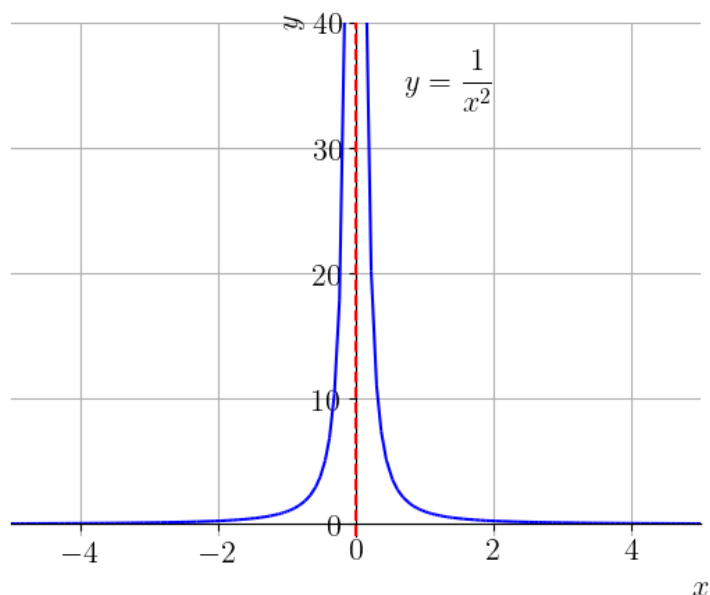


Figura 1.16: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x^2$.

Podemos concluir que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente grandes ao escolhermos qualquer x suficientemente próximo de 0, com $x \neq 0$. I.e.,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \quad (1.213)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

Código 1.18: [Python](#)

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")
3  >>> limit(1/x**2, x, 0)
4  oo
5

```

Atenção! Na verdade, este comando computa o limite lateral à direita. Na sequência, discutimos sobre limites laterais infinitos.

Definimos os limites laterais infinitos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad (1.214)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty. \quad (1.215)$$

No primeiro caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \rightarrow x_0$ e $x < x_0$. No segundo caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \rightarrow x_0$ e $x > x_0$.

Exemplo 1.5.2.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty. \quad (1.216)$$

De fato, conforme tomamos valores de x próximos de 1, com $x > 1$, os valores de $f(x) = 1/(x-1)$ tornam-se cada vez maiores. Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 1.17.

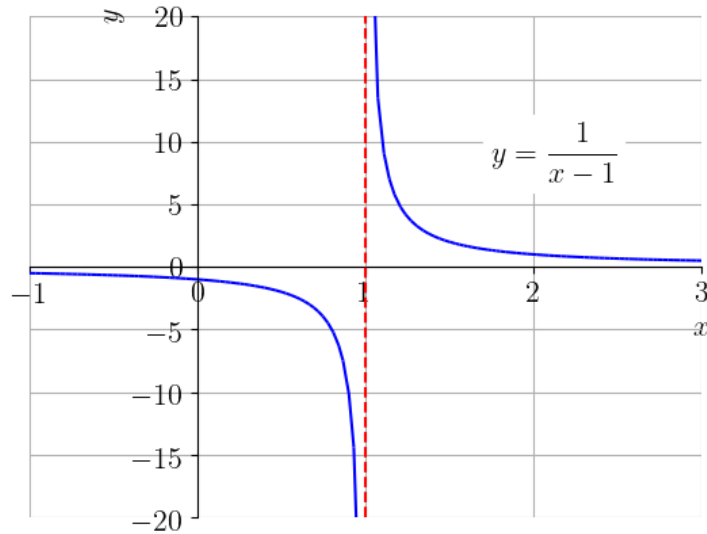


Figura 1.17: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/(x-1)$.

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

Código 1.19: Python

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")
3  >>> limit(1/(x-1), x, 1, '+')
4  oo
5

```

Analogamente a definição de limite infinito, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é menos infinito quando x tende a x_0 , quando $f(x)$ torna-se arbitrariamente pequeno para valores de x suficientemente próximos de x_0 , com $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty. \quad (1.217)$$

De forma similar, definimos os limites laterais $f(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow x_0^\pm$.

Exemplo 1.5.3. Observe que

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (1.218)$$

e que não podemos concluir que este limite é ∞ ou $-\infty$. Isto ocorre, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad (1.219)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \quad (1.220)$$

Exemplo 1.5.4.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{(x+1)^2} = -\infty. \quad (1.221)$$

De fato, podemos inferir este limite a partir do gráfico da função $f(x) = 1/(x+1)^2$. Este é uma translação de uma unidade à esquerda do gráfico de $y = 1/x^2$, seguida de uma reflexão em torno de eixo x . Veja a Figura 1.18.

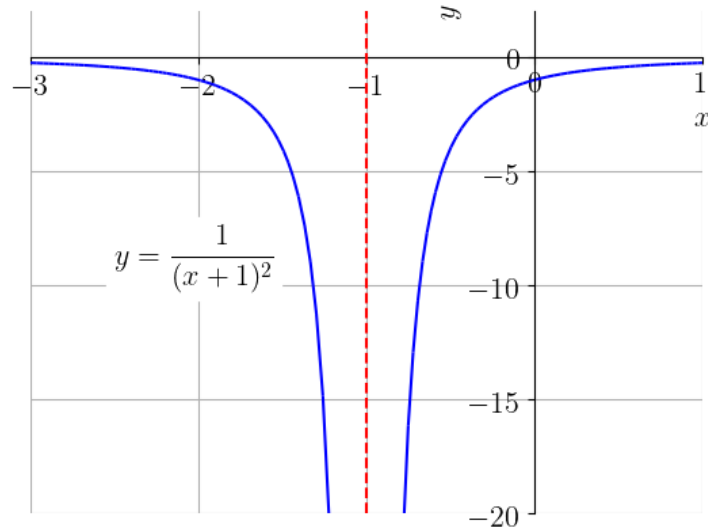


Figura 1.18: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/(x+1)^2$.

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

Código 1.20: [Python](#)

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol("x")
3 >>> limit(-1/(x+1)**2, x, -1)
4 -oo
5
```

Novamente, observamos que este comando computa apenas o limite lateral à direita.

1.5.1 Assíntotas verticais

<https://youtu.be/50FKyRGG91U>

Uma reta $x = x_0$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad (1.222)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty. \quad (1.223)$$

Exemplo 1.5.5. O gráfico da função $f(x) = -1/|x|$ tem uma assíntota vertical em $x = 0$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty. \quad (1.224)$$

Veja o esboço de seu gráfico na Figura 1.19.

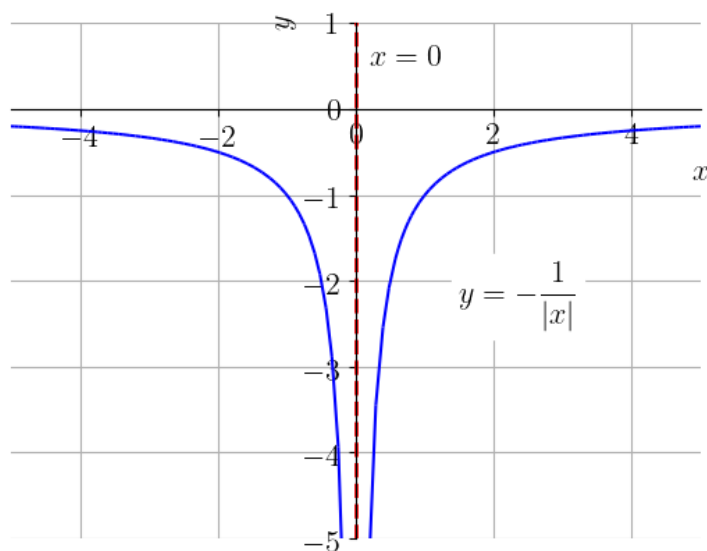


Figura 1.19: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/|x|$.

Exemplo 1.5.6. A função $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$ não está definida para valores de x tais que seu denominador se anule, i.e.

$$x^2 - 1 = 0 \quad (1.225)$$

$$x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1 \quad (1.226)$$

Nestes pontos o gráfico de f pode ter assíntotas verticais. De fato, temos

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty, \quad (1.227)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (1.228)$$

$\begin{array}{c} \nearrow^{-3} \\ \text{---} x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ \nwarrow^{0+} \\ \text{---} x^2 - 1 \end{array}$

e, também, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (1.229)$$

$\begin{array}{c} \nearrow^{-9} \\ \text{---} x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ \nwarrow^{0+} \\ \text{---} x^2 - 1 \end{array}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty. \quad (1.230)$$

$\begin{array}{c} \nearrow^{-9} \\ \text{---} x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ \nwarrow^{0-} \\ \text{---} x^2 - 1 \end{array}$

Com isso, temos que as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico da função f . Veja a Figura 1.20 para o esboço do gráfico desta função.

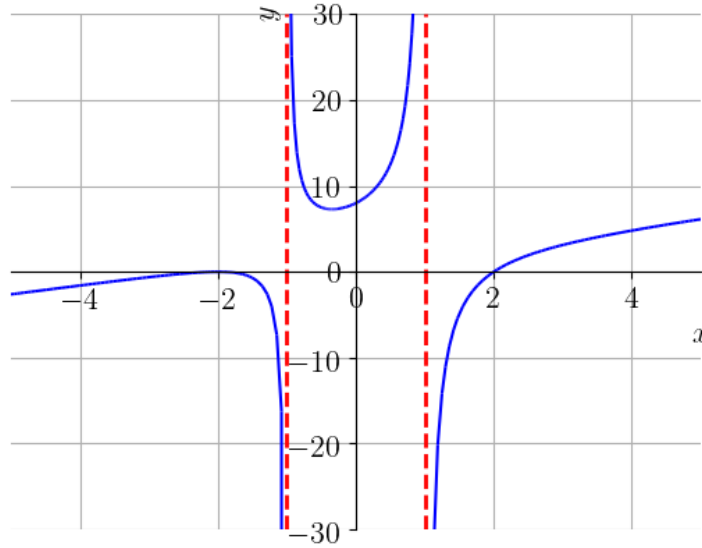


Figura 1.20: Função $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$.

Exemplo 1.5.7. (Função logarítmica) A função logarítmica natural $y = \ln x$ é tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (1.231)$$

i.e., $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $\ln x$. Isto decorre do fato de $y = \ln x$ ser a função inversa de $y = e^x$ e, esta, ter uma assíntota horizontal $y = 0$ ⁴. A Figura 1.21 é um esboço do gráfico da função $\ln x$.

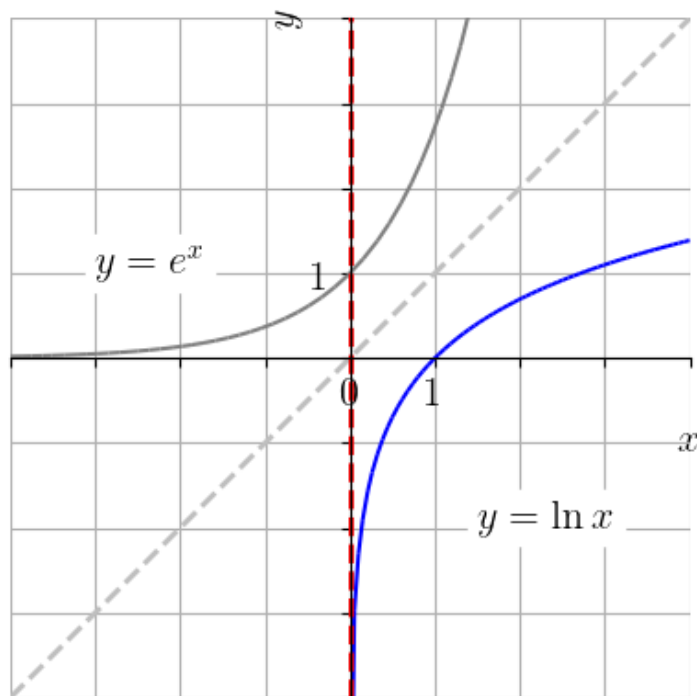


Figura 1.21: Esboço do gráfico da função logaritmo natural.

Exemplo 1.5.8. As funções trigonométricas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \sec x$ têm assíntotas verticais $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ para k inteiro. Já, as funções trigonométricas $y = \operatorname{cotg} x$ e $y = \operatorname{cosec} x$ têm assíntotas verticais $x = k\pi$ para k inteiro. Consulte mais em [Funções Trigonométricas](#) nas [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).

1.5.2 Assíntotas oblíquas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Além de assíntotas horizontais e verticais, gráficos de funções podem ter

⁴Veja o Exemplo 1.4.7.

assintota oblíquas. Isto ocorre, particularmente, para funções racionais cujo grau do numerador é maior que o do denominador.

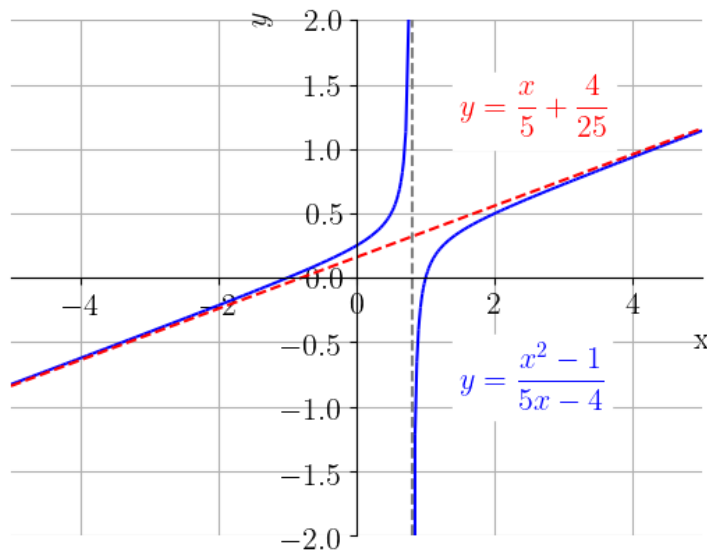


Figura 1.22: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}$.

Exemplo 1.5.9. Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}. \quad (1.232)$$

Para buscarmos determinar a assíntota oblíqua desta função, dividimos o numerador pelo denominador, de forma a obtermos

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{25}\right)}_{\text{quociente}} + \underbrace{\frac{-\frac{9}{25}}{5x - 4}}_{\text{resto}}. \quad (1.233)$$

Observamos, agora, que o resto tende a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$, i.e. $f(x) \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Com isso, concluímos que $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f(x)$. Veja a Figura 1.22.

Observação 1.5.1. Analogamente à assíntotas oblíquas, podemos ter outros tipos de assíntotas determinadas por funções de diversos tipos, por exemplo, assíntotas quadráticas.

1.5.3 Limites infinitos no infinito

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad (1.234)$$

quando os valores da função f são arbitrariamente grandes para todos os valores de x suficientemente grandes. De forma análoga, definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad (1.235)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad (1.236)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad (1.237)$$

Exemplo 1.5.10. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$

Exemplo 1.5.11.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 300}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \quad (1.238)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cancel{\frac{10}{x}} + \cancel{\frac{300}{x^3}}}{\cancel{\frac{1}{x^3}}} = \infty. \quad (1.239)$$

Proposição 1.5.1. *Dado um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, temos*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n. \quad (1.240)$$

Exemplo 1.5.12. Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 1.5.11, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \quad (1.241)$$

$$= \infty. \quad (1.242)$$

1.5.4 Exercícios resolvidos

ER 1.5.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x}. \quad (1.243)$$

Solução. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{x} - 2}{\cancel{1} - \cancel{x}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty. \quad (1.244)$$

Outra forma de calcular este limite é observar que $y = 1 - x \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow 1^-$. Assim, fazendo a mudança de variável $y = x - 1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y+1-2}{y} \quad (1.245)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y-1}{y} \quad (1.246)$$

$$= -\infty. \quad (1.247)$$

Podemos usar o seguinte comando [Python](#)+[SymPy](#) para computar este limite:

Código 1.21: Python

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")
3  >>> limit((x-2)/(1-x), x, 1, '-')
4  -oo
5

```

◇

ER 1.5.2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x - 1|. \quad (1.248)$$

Solução. Começamos observando que

$$\ln |x - 1| = \begin{cases} \ln(1 - x) & , x < 1, \\ \ln(x - 1) & , x > 1. \end{cases} \quad (1.249)$$

Então, calculando o limite lateral à esquerda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln |x - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1 - x) \quad (1.250)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^5. \quad (1.251)$$

Por outro lado, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln |x - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x - 1) \quad (1.252)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^6. \quad (1.253)$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x - 1| = -\infty. \quad (1.254)$$

Podemos usar os seguintes comandos [Python](#)+[SymPy](#) para computar os limites laterais:

Código 1.22: Python

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> x = Symbol("x")

```

```

3      >>> limit(log(abs(x-1)), x, 1, '-')
4      -oo
5      >>> limit(log(abs(x-1)), x, 1, '+')
6      -oo
7

```

◇

ER 1.5.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}. \quad (1.255)$$

Solução. Tratando-se de uma função racional, temos⁷

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} \quad (1.256)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \quad (1.257)$$

$$= \infty. \quad (1.258)$$

◇

ER 1.5.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2}. \quad (1.259)$$

Solução. Observamos que $1 - x^2 \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow \infty$. Desta forma, fazendo a mudança de variáveis $y = 1 - x^2$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0. \quad (1.260)$$

◇

ER 1.5.5. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \quad (1.261)$$

Solução. Podemos verificar que trata-se de uma indeterminação do tipo ∞/∞ . Neste caso, podemos calcular o limite pela multiplicação (em cima e

⁷Veja a Observação 1.4.1. Veja, também, o gráfico desta função na Figura 1.20.

em baixo) pelo inverso do fator dominante no radical, i.e. $1/\sqrt{x^2}$. Ou seja, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} \quad (1.262)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}}. \quad (1.263)$$

Lembramos que $\sqrt{x^2} = |x|$. Como $x \rightarrow \infty$, temos $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{|x|}} \quad (1.264)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{2 \frac{x}{x}} \quad (1.265)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \quad (1.266)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1} \quad (1.267)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (1.268)$$

◇

1.5.5 Exercícios

E.1.5.1. Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} -x^{-3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^{-n}, \quad n > 0 \text{ ímpar}$

E.1.5.2. Calcule

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-4}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x^{-6}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^{-n}, \quad n > 0 \text{ ímpar}$

E.1.5.3. Calcule

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{x-1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2}{1+x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{(x+1)^2}$
- e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

E.1.5.4. Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}. \quad (1.269)$$

E.1.5.5. Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}. \quad (1.270)$$

E.1.5.6. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-1}. \quad (1.271)$$

E.1.5.7. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 10x^2 - 300. \quad (1.272)$$

E.1.5.8. Mostre que $y = x^2$ é assíntota ao gráfico de

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}. \quad (1.273)$$

E.1.5.9. (Aplicação) Na física química, a [Equação de Arrhenius](#)⁸ fornece a taxa de reação k (entre espécies químicas) em função da temperatura T [K]

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad (1.274)$$

onde $A > 0$ é o fator constante pré-exponencial, $E_a > 0$ é a energia de ativação e $R > 0$ é a constante universal dos gases. Para temperatura constante, a equação acima define a função $k = k(E_a)$. Qual é a tendência da taxa de reação k quando $T \rightarrow 0^+$.

E.1.5.10. (Aplicação.) A função logística tem aplicações em várias áreas do conhecimento como, por exemplo, na [inteligência artificial](#) e na modelagem de crescimento populacional⁹. Ela tem a forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (1.275)$$

Encontre a(s) assíntota(s) horizontal(ais) dessa função logística.

E.1.5.11. (Aplicação.) O fenômeno de desintegração espontânea do núcleo de um átomo com a emissão de algumas radiações é chamado de radioatividade¹⁰. A lei fundamental do decaimento radiativo estabelece que a taxa

⁸Svante August Arrhenius, 1859-1927, químico sueco. Fonte: [Wikipédia](#).

⁹Consulte mais em [Wikipédia: Função Logística](#).

¹⁰Fonte: [Wikipédia](#).

de decaimento é proporcional ao número de átomos que ainda não decaíram. Isto nos fornece a equação da lei básica da radioatividade

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1.276)$$

onde, $N = N(t)$ é o número de átomos no tempo t , $N_0 \geq 0$ é o número de átomos presentes no tempo inicial $t = 0$ e $\lambda > 0$ é a constante de decaimento. Qual a tendência de N quando $t \rightarrow \infty$.

Respostas

E.1.5.1. a) ∞ ; b) ∞ ; c) ∞ ; d) $\pm\infty$

E.1.5.2. a) ∞ ; b) ∞ ; c) $-\infty$; d) ∞

E.1.5.3. a) ∞ ; b) ∞ ; c) $-\infty$; d) $-\infty$; e) ∞

E.1.5.4. $x = 2$; $x = -2$

E.1.5.5. $x = 1$

E.1.5.6. ∞

E.1.5.7. $-\infty$

E.1.5.8. Dica: Observe que $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ e analise o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.

E.1.5.9. $k \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0^+$

E.1.5.10. $y = 0$ e $y = 1$

E.1.5.11. $N(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$

1.6 Continuidade

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

1.6.1 Definição de função contínua

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Dizemos que uma **função** f é **contínua** em um ponto x_0 , quando $f(x_0)$ está definida, existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (1.277)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1.278)$$

Usando de limites laterais, definimos os conceitos de **função contínua à esquerda** ou à **direita**. Quando a **função** f não é contínua em um dado ponto x_0 , dizemos que f é **descontínua** neste ponto.

Exemplo 1.6.1. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} & , x \neq 2, \\ -4 & , x = 2. \end{cases} \quad (1.279)$$

Na Figura [1.23](#), temos um esboço do gráfico de f .

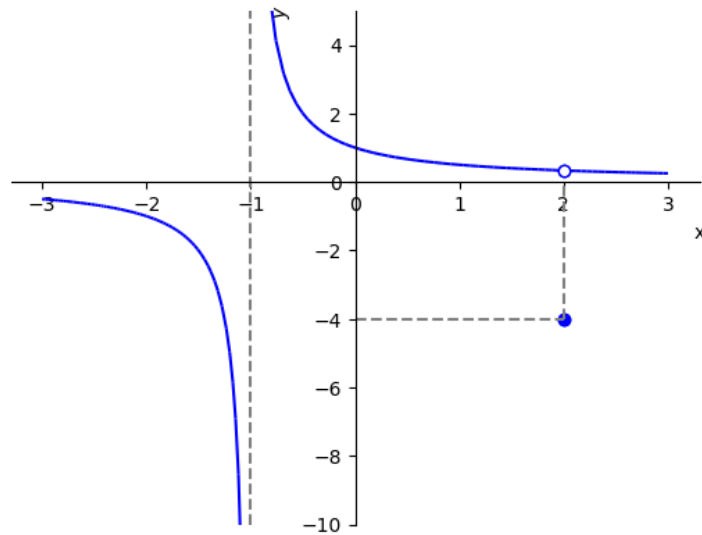


Figura 1.23: Esboço do gráfico da função f definida no Exemplo 1.6.1.

Vejamos a continuidade desta função nos seguintes pontos:

a) $x = -2$. Neste ponto, temos $f(-2) = -1$ e

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2}{(x + 1)(x - 2)} \quad (1.280)$$

$$= \frac{-4}{-1 \cdot (-4)} = -1 = f(-2). \quad (1.281)$$

Com isso, concluímos que f é contínua no ponto $x = -2$.

b) $x = -1$. Neste ponto,

$$f(-1) = \frac{(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} \quad (1.282)$$

$$= \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{0} \quad (1.283)$$

logo, $f(-1)$ não está definido e, portanto, f é descontínua neste ponto. Observemos que f tem uma assíntota vertical em $x = -1$, verifique!

c) $x = 2$. Neste ponto, temos $f(2) = -4$ e

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x + 1)(x - 2)} \quad (1.284)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{3} \neq f(2). \quad (1.285)$$

Portanto, concluímos que f é descontínua em $x = 2$.

Uma função f é dita ser **contínua em um intervalo** (a, b) , quando f é contínua em todos os pontos $x_0 \in (a, b)$. Para intervalos, $[a, b)$, $(a, b]$ ou $[a, b]$, empregamos a noção de continuidade lateral nos pontos de extremos fechados dos intervalos. Quando uma função é contínua em $(-\infty, \infty)$, dizemos que ela é **contínua em toda parte**.

Exemplo 1.6.2. (Continuidade da função valor absoluto.) A função valor absoluto é contínua em toda parte. De fato, ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (1.286)$$

Veja o esboço do gráfico desta função na Figura 1.24.

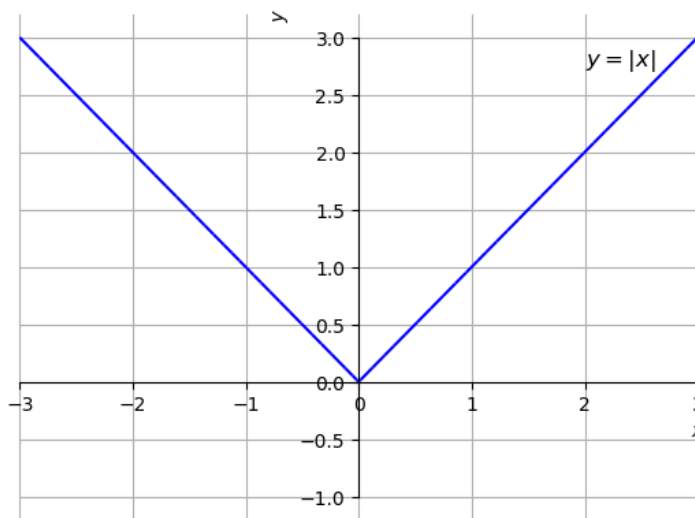


Figura 1.24: Esboço do gráfico de $f(x) = |x|$.

Observamos que para $x \in (-\infty, 0)$ temos $|x| = -x$ que é contínua para todos estes valores de x . Também, para $x \in (0, \infty)$ temos $|x| = x$ que é contínua para todos estes valores de x . Agora, em $x = 0$, temos $|0| = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad (1.287)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0. \quad (1.288)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|. \quad (1.289)$$

Com tudo isso, concluímos que a função valor absoluto é contínua em toda parte.

1.6.2 Propriedades de funções contínuas

Se f e g são funções contínuas em $x = c_0$ e k um número real, então também são contínuas em $x = c_0$ as funções:

- a) $k \cdot f$
- b) $f \pm g$
- c) $f \cdot g$
- d) f/g , se $g(c_0) \neq 0$
- e) f^k , se existe $f^k(c_0)$.

Exemplo 1.6.3. Temos que $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ são exemplos de funções contínuas em toda parte. Segue das propriedades acima que:

- a) $f_a(x) = 2x$ é contínua em toda parte.
- b) $f_b(x) = x + |x|$ é contínua em toda parte.
- c) $f_c(x) = 2x|x|$ é contínua em toda parte.
- d) $f_d(x) = \frac{|x|}{x}$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- e) $f_e(x) = x^2$ é contínua em toda parte.

Exemplo 1.6.4. Polinômios são contínuos em toda parte. Isto é, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0), \quad (1.290)$$

para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - x^2 + x^5 = 2 - (-1)^2 + (-1)^5 = 0. \quad (1.291)$$

Exemplo 1.6.5. Funções racionais $r(x) = p(x)/q(x)$ são contínuas em todos os pontos de seus domínios. Por exemplo, a função racional

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, \quad (1.292)$$

é descontínua nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad (1.293)$$

pois f não está definida nestes pontos. Agora, para $x_0 \neq 1$ e $x_0 \neq -1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (1.294)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-1}{x^2-1} \quad (1.295)$$

$$= \frac{x_0-1}{x_0^2-1} = f(x_0). \quad (1.296)$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1 = f(0). \quad (1.297)$$

Ou seja, f é contínua nos intervalos $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, que coincide com seu domínio.

Observação 1.6.1. São contínuas em todo seu domínio as funções potência, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Se f é contínua no ponto x_0 e g é contínua no ponto $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua no ponto x_0 .

Exemplo 1.6.6. Vejamos os seguintes casos:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1. \quad (1.298)$$

Isto é, esta função é contínua em $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

b) $y = \left| \frac{x-1}{x^2-1} \right|$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (1.299)$$

Exemplo 1.6.7. Podemos explorar a continuidade para calcularmos limites. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4} \cdot e^{\sin x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} x+4} \cdot e^{\sin \lim_{x \rightarrow 0} x} = \sqrt{4} \cdot e^0 = 2. \quad (1.300)$$

Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário estabelece que qualquer dada função f contínua em um intervalo $[a, b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Consulte a Figura 1.25.

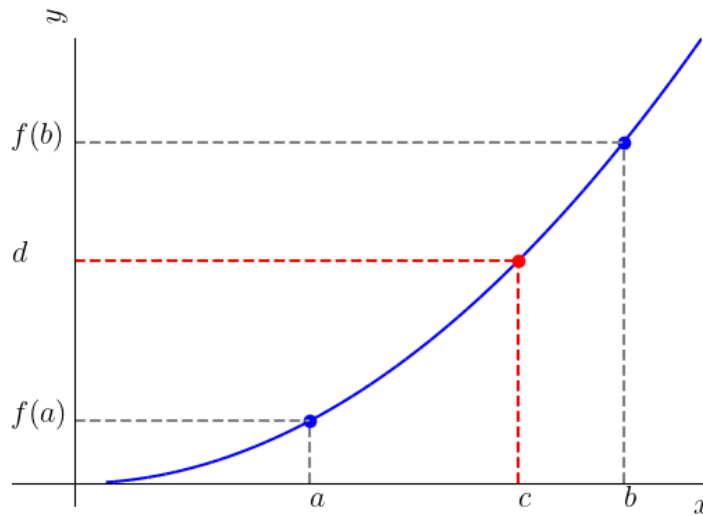


Figura 1.25: Ilustração sobre o Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 1.6.1. (Teorema do valor intermediário) Seja f função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Se d é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

Exemplo 1.6.8. Podemos afirmar que $f(x) = x^3 - x - 1$ tem (pelo menos) um zero no intervalo $(0, 2)$. De fato, f é contínua no intervalo $[0, 2]$ e, pelo teorema do valor intermediário, assume todos os valores entre $f(0) = -1 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$. Observemos que $y = 0$ está entre $f(0)$ e $f(2)$. Veja a Figura 1.26.

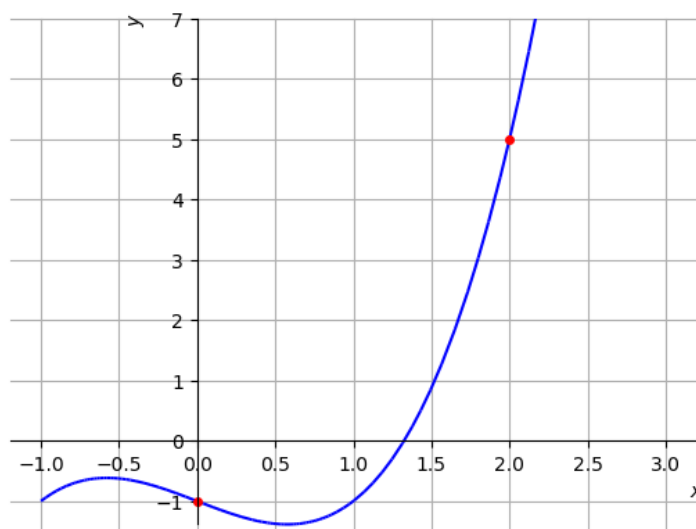


Figura 1.26: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - x - 1$.

1.6.3 Exercícios resolvidos

ER 1.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}. \quad (1.301)$$

Solução. Observamos que a função é descontínua em $x = 0$, pois não está definida neste ponto. Agora, para $x < 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1. \quad (1.302)$$

Ou seja, para $x < 0$ a função é constante igual a -1 e, portanto, contínua.

Para $x > 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1. \quad (1.303)$$

I.e., para $x > 0$ a função é constante igual a 1 e, portanto, contínua.

Concluimos que $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Faça o esboço do gráfico desta função!

◇

ER 1.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right). \quad (1.304)$$

Solução. A função f pode ser vista como a composição da função logaritmo natural $g(x) = \ln x$ com a função racional $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Observamos que:

a) a função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, i.e. g é contínua para todo $x > 0$;

b) a função racional $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ é contínua para todo $x \neq 1$.

Lembrando que a composição de funções contínuas é contínua, temos que a função $f(x) = g(h(x))$ é contínua nos pontos de continuidade da função h tais que $h(x) > 0$, i.e. para $x \neq 1$ e

$$\frac{x+1}{x-1} > 0. \quad (1.305)$$

Fazendo o estudo de sinal

-	-1	+	1	+	$x+1$
-		-		+	$x-1$
+	-1	-	1	+	$\frac{x+1}{x-1}$

vemos que $h(x) > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Em resumo, h é contínua em $(0, \infty)$ e g é contínua e positiva em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. A função $f = (h \circ g)$ é contínua na interseção destes conjuntos, i.e. f é contínua em $(1, \infty)$.

◇

1.6.4 Exercícios

E.1.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}. \quad (1.306)$$

E.1.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}}. \quad (1.307)$$

E.1.6.3. Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow -1} e^{x^2-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \ln |x^2 - 1|$

E.1.6.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \ln \left(\frac{\sin \frac{x}{2} - \cos x}{2} \right). \quad (1.308)$$

E.1.6.5. Calcule o valor de c de forma que a seguinte função seja contínua em $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & , x \neq 1 \\ c & , x = 1 \end{cases} \quad (1.309)$$

E.1.6.6. (Aplicação.) O fenômeno de desintegração espontânea do núcleo de um átomo com a emissão de algumas radiações é chamado de radioatividade¹¹. A lei fundamental do decaimento radiativo estabelece que a taxa de decaimento é proporcional ao número de átomos que ainda não decaíram. Isto nos fornece a equação da lei básica da radioatividade

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1.310)$$

onde, $N = N(t)$ é o número de átomos no tempo t , $N_0 \geq 0$ é o número de átomos presentes no tempo inicial $t = 0$ e $\lambda > 0$ é a constante de decaimento. Qual a tendência de $N = N(t)$ quando a taxa de decaimento $\lambda \rightarrow 0^+$.

Respostas

E.1.6.1. $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

E.1.6.2. $(1, 2) \cup (3, \infty)$.

E.1.6.3. a) 1; b) 0

E.1.6.4. 0

¹¹Fonte: [Wikipédia](#).

E.1.6.5. $c = \frac{1}{2}$

E.1.6.6. $N(t) \rightarrow N_0$ quando $\lambda \rightarrow 0^+$

1.7 Limites e desigualdades

Se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo x em um certo intervalo aberto contendo x_0 , exceto possivelmente em $x = x_0$, e existem os limites de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (1.311)$$

Observe que a tomada do **limite não preserva a desigualdade estrita**.

Exemplo 1.7.1. As funções $f(x) = x^2/3$ e $g(x) = x^2/2$ são tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq 0$. Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0. \quad (1.312)$$

Observação 1.7.1. A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x < x_0$ e existem os limites laterais à esquerda de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x). \quad (1.313)$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita e limites no infinito.

1.7.1 Limites de funções limitadas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Se $f(x) \leq L$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0 , exceto possivelmente em x_0 , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq L. \quad (1.314)$$

Resultados análogos valem para limites laterais e limites no infinito.

Exemplo 1.7.2. Vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x. \quad (1.315)$$

Como $|\sin x| \leq 1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0, \quad (1.316)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x \geq \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} = 0. \quad (1.317)$$

Logo, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x = 0. \quad (1.318)$$

1.7.2 Teorema do confronto

Teorema 1.7.1. (Teorema do confronto) Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente em $x = a$ (consulte a Figura 1.27), e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L, \quad (1.319)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (1.320)$$

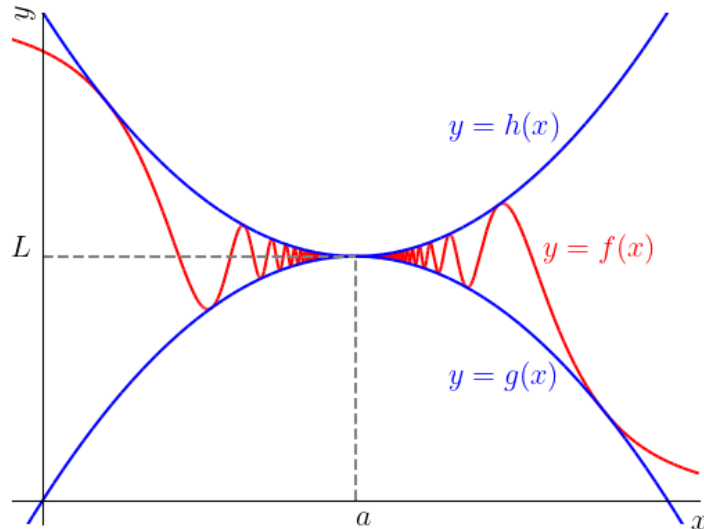


Figura 1.27: Ilustração sobre o Teorema 1.7.1.

Demonstração. Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \quad (1.321)$$

donde

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq L. \quad (1.322)$$

□

Exemplo 1.7.3. Toda função $f(x)$ tal que $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$, para todo $x \neq 0$, tem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1. \quad (1.323)$$

Observação 1.7.2. O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

Exemplo 1.7.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0. \quad (1.324)$$

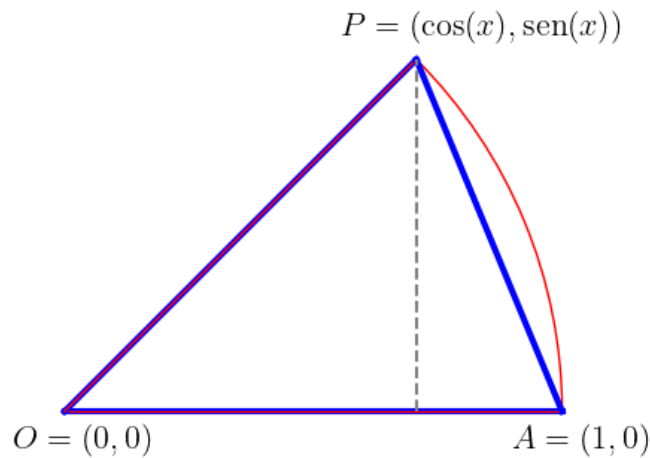


Figura 1.28: Ilustração referente ao Exemplo 1.7.4.

De fato, começamos assumindo $0 < x < \pi/2$. Tomando $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ e $P = (\cos x, \sin x)$ (consulte a Figura 1.28), observamos que

$$\text{Área do triângulo } OAP < \text{Área do setor } OAP, \quad (1.325)$$

i.e.

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x < x, \quad (1.326)$$

para todo $0 < x < \pi/2$.

É certo que $\sin x < -x$ para $-\pi/2 < x < 0$. Com isso e o resultado acima, temos

$$\sin x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (1.327)$$

Lembrando que $\sin x$ é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\sin x = \sin -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (1.328)$$

Logo, de (1.327) e (1.328), temos

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|. \quad (1.329)$$

Por fim, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad (1.330)$$

do Teorema do confronto, concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \quad (1.331)$$

Observação 1.7.3. Do exemplo anterior (Exemplo 1.7.4), podemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (1.332)$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (1.333)$$

temos

$$\cos x = 1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2}. \quad (1.334)$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right] \quad (1.335)$$

$$= 1 + 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^2. \quad (1.336)$$

Agora, fazemos a mudança de variável $y = x/2$. Neste caso, temos $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$ e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{sen} y = 0. \quad (1.337)$$

Então, retornando a equação (1.336), concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (1.338)$$

1.7.3 Limites envolvendo $(\operatorname{sen} x)/x$

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (1.339)$$

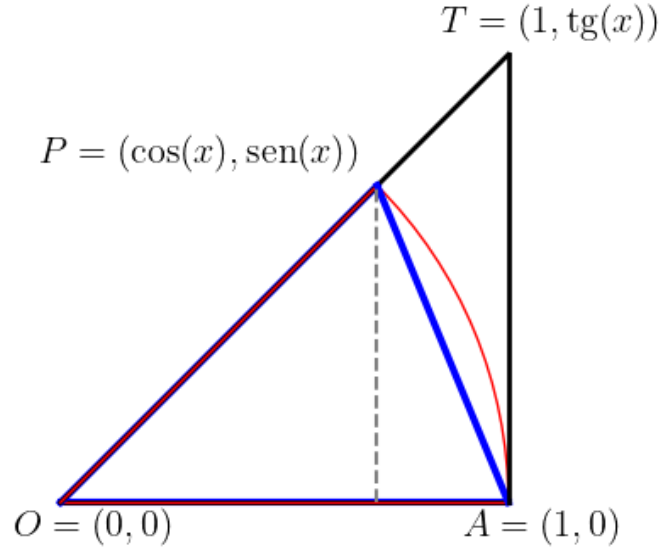


Figura 1.29: Ilustração para o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$.

Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos $0 < x < \pi/2$. Sendo os pontos $O = (0, 0)$, $P = (\cos x, \text{sen } x)$, $A = (1, 0)$ e $T = (1, \text{tg } x)$ (consulte Figura 1.29), observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor } OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \quad (1.340)$$

Ou seja, temos

$$\frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg } x}{2}. \quad (1.341)$$

Multiplicando por 2 e dividindo por $\text{sen } x$ ¹², obtemos

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (1.342)$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x. \quad (1.343)$$

¹² $\text{sen } x > 0$ para todo $0 < x < \pi/2$.

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1. \quad (1.344)$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (1.345)$$

Agora, usando o fato de que $\operatorname{sen} x/x$ é uma função par, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \quad (1.346)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (1.347)$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

Exemplo 1.7.5. Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \quad (1.348)$$

Veja o Exercício 1.7.4.

1.7.4 Exercícios resolvidos

ER 1.7.1. Sabendo que $x^3 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ para $0 < x < 1$, calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x). \quad (1.349)$$

Solução. Pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \overset{0}{\nearrow} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \overset{0}{\nearrow}. \quad (1.350)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \quad (1.351)$$

◇

1.7.5 Exercícios

E.1.7.1. Supondo que $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$ para todo $x \neq 0$, determine o $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$.

E.1.7.2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x. \quad (1.352)$$

E.1.7.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{6x}. \quad (1.353)$$

E.1.7.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \quad (1.354)$$

E.1.7.5. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \quad (1.355)$$

1.8 Exercícios finais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

E.1.8.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right). \quad (1.356)$$

E.1.8.2. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

Respostas

E.1.7.1. 1

E.1.7.2. 0

E.1.7.3. $\frac{1}{2}$

E.1.7.4. 0

E.1.7.5. 0

E.1.8.1. ∞

E.1.8.2. a) ∞ ; b) 0

Notas

Referências

- [1] Anton, H., Cálculo, vol. 1, 10. ed., Bookman, 2014.
- [2] Ávila, G.S.S., Introdução à análise matemática, 2. ed., Edgard Blücher, 1993.
- [3] Thomas, G., Cálculo, vol. 1, 12. ed., Addison- Wesley, 2012.
- [4] Stewart, J., Cálculo, Thomson Learning, 2006.