

# Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

15 de setembro de 2024

---

Konzen, Pedro Henrique de Almeida

Geometria analítica: notas de aula / Pedro Henrique de Almeida Konzen. –2024. Porto Alegre.- 2024.

"Esta obra é uma edição independente feita pelo próprio autor."

1. Geometria analítica. 2. Sistemas de coordenadas. 3. Retas e planos.  
4. Cônicas. 5. Superfícies quadráticas.

---

*Licença*  
CC-BY-SA 4.0.

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

O site [notaspedrok.com.br](https://www.notaspedrok.com.br) é uma plataforma que construí para o compartilhamento de minhas notas de aula. Essas anotações feitas como preparação de aulas é uma prática comum de professoras/es. Muitas vezes feitas a rabiscos em rascunhos com validade tão curta quanto o momento em que são concebidas, outras vezes, com capricho de um diário guardado a sete chaves. Notas de aula também são feitas por estudantes - são anotações, fotos, prints, entre outras formas de registros de partes dessas mesmas aulas. Essa dispersão de material didático sempre me intrigou e foi o que me motivou a iniciar o site.

Com início em 2018, o site contava com apenas três notas incipientes. De lá para cá, conforme fui expandido e revisando os materiais, o site foi ganhando acessos de vários locais do mundo, em especial, de países de língua portuguesa. No momento, conta com 13 notas de aula, além de minicursos e uma coleção de vídeos e áudios.

As notas de **Geometria Analítica** abordam tópicos introdutórios sobre geometria analítica no espaço euclidiano tridimensional. Mais especificamente, sobre sistemas de coordenadas, estudo de retas, planos e cônicas.

Aproveito para agradecer a todas/os que de forma assídua ou esporádica contribuem com correções, sugestões e críticas! ;)

Pedro H A Konzen

<https://www.notaspedrok.com.br>

# Conteúdo

Capa	i
Licença	iii
Prefácio	iv
Sumário	vi
<b>1 Retas e Planos</b>	<b>1</b>
1.1 Sistema de coordenadas no espaço . . . . .	1
1.1.1 Pontos e Vetores . . . . .	3
1.1.2 Ponto Médio de um Segmento . . . . .	4
1.2 Equações da reta . . . . .	7
1.2.1 Equação vetorial de uma reta . . . . .	8
1.2.2 Equações paramétricas de uma reta . . . . .	9
1.2.3 Equações da reta na forma simétrica . . . . .	11
1.3 Equações do plano . . . . .	16
1.3.1 Equação vetorial do plano . . . . .	17
1.3.2 Equações paramétricas do plano . . . . .	20
1.3.3 Equação geral do plano . . . . .	21
1.3.4 Exercícios resolvidos . . . . .	22
<b>2 Outros sistemas de coordenadas</b>	<b>25</b>
2.1 Sistema de coordenadas polares . . . . .	25
2.1.1 Coordenadas cartesianas x polares . . . . .	26
2.1.2 Exercícios resolvidos . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Cônicas</b>	<b>32</b>
3.1	Elipse . . . . .	32
3.1.1	Equação reduzida da elipse . . . . .	34
3.2	Hipérbole . . . . .	38
3.2.1	Equação reduzida da hipérbole . . . . .	39
3.3	Parábola . . . . .	45
3.3.1	Equação reduzida de uma parábola . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Superfícies Quádricas</b>	<b>51</b>
4.1	Introdução a superfícies quádricas . . . . .	51
4.1.1	Elipsoides . . . . .	51
4.1.2	Hiperboloides . . . . .	53
4.1.3	Paraboloide elíptico . . . . .	56
4.1.4	Paraboloide hiperbólico . . . . .	58
	<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>63</b>
	<b>Notas</b>	<b>70</b>
	<b>Referências</b>	<b>71</b>

# Capítulo 1

## Retas e Planos

Em revisão

A geometria analítica é uma área interdisciplinar da matemática que faz o estudo de objetos da geometria através de estruturas algébricas (equações e inequações algébricas). Para tanto, o primeiro passo é a construção (definição) de um sistema de coordenadas, no qual os objetos geométricos serão referenciados.

Dado um sistema de coordenadas podemos fazer o equacionamento de elementos geométricos como retas e planos.

### 1.1 Sistema de coordenadas no espaço

Em revisão

<https://youtu.be/aZZ1OmEj4T0>

Um sistema de coordenadas (cartesianas<sup>1</sup>) no espaço é constituído de um ponto  $O$  e uma base de vetores  $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto  $P$  determina de forma única um vetor  $\vec{OP} = (x, y, z)$  e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto  $P$  tem coordenadas

$(x, y, z)$ . Veja a figura abaixo.

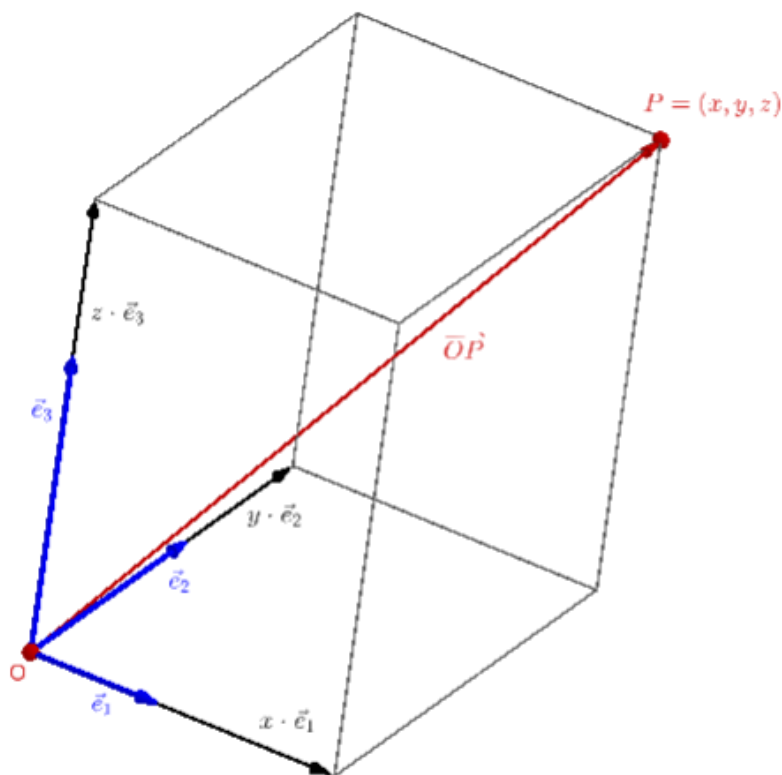


Figura 1.1: Ilustração de um sistema de coordenadas no espaço.

O ponto  $O$  é chamado de **origem** (do sistema de coordenadas) e tem coordenadas  $O = (0, 0, 0)$ . Dado um ponto  $P = (x, y, z)$ , chama-se  $x$  de sua **abscissa**,  $y$  de sua **ordenada** e  $z$  de sua **cota**. As retas que passam por  $O$  e têm, respectivamente, as mesmas direções de  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contêm  $O$  e representantes de dois vetores da base  $B$  são chamados de **planos coordenados**.



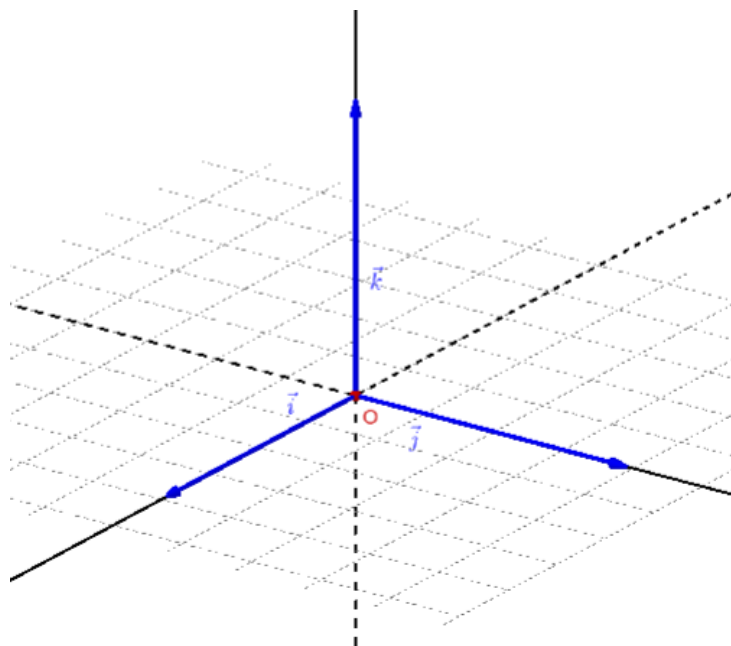


Figura 1.2: Ilustração de um sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado diferente, trabalharemos com um **sistema de coordenadas ortonormal**, i.e. sistema cuja base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura 1.2.

### 1.1.1 Pontos e Vetores

<https://youtu.be/NBi-Ku86pGE>

Seja dado um vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Sabendo as coordenadas dos pontos  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , temos que as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$  são:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \quad (1.1)$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad (1.2)$$

$$= -(x_A, y_A, z_A) + (x_B, y_B, z_B) \quad (1.3)$$

$$= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). \quad (1.4)$$

Em uma linguagem menos formal, podemos dizer que as coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$

é a resultante das coordenadas do ponto final menos as coordenadas do ponto de partida. Veja a figura abaixo.

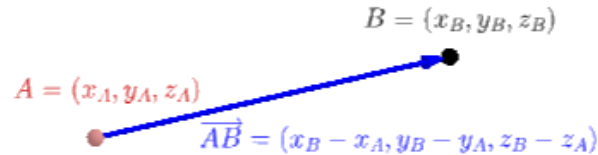


Figura 1.3: Relação entre as coordenadas dos pontos de partida e de chegada de um vetor.

**Exemplo 1.1.1.** Dados os pontos  $A = (-1, 1, 2)$  e  $B = (3, -1, 0)$ , temos que o vetor  $\overrightarrow{AB}$  tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -1 - 1, 0 - 2) = (4, -2, -2). \quad (1.5)$$

### 1.1.2 Ponto Médio de um Segmento

<https://youtu.be/Yu0usAcwx5w>

Dados os pontos  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , podemos calcular as coordenadas do ponto médio  $M = (x_M, y_M, z_M)$  do segmento  $AB$ . Veja a figura abaixo.

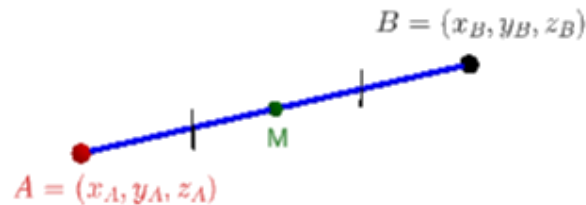


Figura 1.4: Coordenadas do ponto médio de um segmento.

Do fato de que  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ , temos

$$(x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M), \quad (1.6)$$

Logo, segue que

$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad (1.7)$$

$$y_M - y_A = y_B - y_M \quad (1.8)$$

$$z_M - z_A = z_B - z_M \quad (1.9)$$

ou, equivalentemente,

$$2x_M = x_A + x_B \quad (1.10)$$

$$2y_M = y_A + y_B \quad (1.11)$$

$$2z_M = z_A + z_B \quad (1.12)$$

Portanto, concluimos que

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (1.13)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (1.14)$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \quad (1.15)$$

Logo, temos

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) \quad (1.16)$$

**Exemplo 1.1.2.** Dados os pontos  $A = (-1, 1, 2)$  e  $B = (3, -1, 0)$ , temos que o ponto médio do segmento  $AB$  tem coordenadas:

$$M = \left( \frac{-1 + 3}{2}, \frac{1 + (-1)}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) \quad (1.17)$$

$$= (1, 0, 1). \quad (1.18)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 1.1.1.** Sejam  $A = (-1, 2, 1)$ ,  $B = (1, -2, 0)$  e  $C = (x, 2, 2)$  vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados  $AC$  e  $BC$  são congruentes. Determine o valor de  $x$ .

**Solução.** Sendo os lados  $AC$  e  $BC$  congruentes, temos  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AC}$  são

$$\overrightarrow{AC} = (x - (-1), 2 - 2, 2 - 1) = (x + 1, 0, 1) \quad (1.19)$$

e as coordenadas de  $\overrightarrow{BC}$  são

$$\overrightarrow{BC} = (x - 1, 2 - (-2), 2 - 0) = (x - 1, 4, 2). \quad (1.20)$$

Então, temos

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4^2 + 2^2} \quad (1.21)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 0^2 + 1^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 2^2 \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16 + 4 \quad (1.23)$$

$$\Rightarrow 4x = 19 \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow x = \frac{19}{4}. \quad (1.25)$$

◇

**ER 1.1.2.** Sejam  $A = (-1, 2, 1)$ ,  $B = (1, -2, 0)$  e  $M$  o ponto médio do intervalo  $AB$ . Determine as coordenadas do ponto  $P$  de forma que  $2AP = AM$ .

**Solução.** As coordenadas do ponto médio são

$$M = \left( \frac{-1+1}{2}, \frac{2+(-2)}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left( 0, 0, \frac{1}{2} \right). \quad (1.26)$$

Agora, denotando  $P = (x_P, y_P, z_P)$ , temos

$$2AP = AM \Rightarrow 2(x_P - (-1), y_P - 2, z_P - 1) = \left( 0 - (-1), 0 - 2, \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow (2x_P + 2, 2y_P - 4, 2z_P - 2) = \left( 1, -2, -\frac{1}{2} \right). \quad (1.28)$$

Portanto

$$2x_P + 2 = 1 \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} \quad (1.29)$$

$$2y_P - 4 = -2 \Rightarrow y_P = 1 \quad (1.30)$$

$$2z_P - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. \quad (1.31)$$

Logo,  $P = (-1/2, 1, 3/4)$ .

◇

## Exercícios

**E.1.1.1.** Sejam dados os pontos  $A = (1, -1, 2)$  e  $B = (0, 1, -2)$ . Determine as coordenadas do vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ .

**E.1.1.2.** Sejam dados os pontos  $E = (-1, 2, 0)$  e  $F = (2, -1, 1)$ . Calcule o ponto médio do segmento  $EF$ .

**E.1.1.3.** Sejam dados os pontos  $A = (-1, 1, -1)$  e  $M = (0, 1, 3)$ . Determine o ponto  $B$  tal que  $M$  seja o ponto médio do segmento  $AB$ .

**E.1.1.4.** Sejam dados os pontos  $A = (1, -1, 1)$ ,  $B = (2, 1, 0)$  e  $C = (x, 2, 1)$ . Determine  $x$  tal que  $ABC$  forme um triângulo retângulo com hipotenusa  $BC$ .

**E.1.1.5.** Determine a distância entre os pontos  $C = (2, -1, 0)$  e  $D = (1, 1, 1)$ .

## 1.2 Equações da reta

Em revisão

Nesta seção, vamos desenvolver equações para a representação de retas no espaço tridimensional.

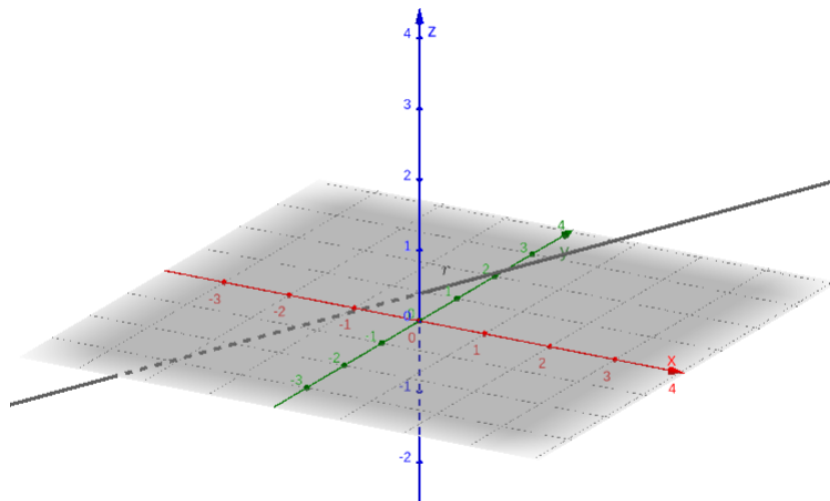


Figura 1.5: Ilustração de uma reta  $r$  em um sistema de coordenadas ortogonal.

### 1.2.1 Equação vetorial de uma reta

Seja  $r$  uma reta dada,  $\vec{v}$  um vetor paralelo a  $r$  e  $A$  um ponto de  $r$  (veja a Figura 1.6). Assim sendo,  $P = (x, y, z)$  é um ponto de  $r$  se, e somente se, o vetor  $\overrightarrow{AP}$  tem a mesma direção de  $\vec{v}$ . i.e. existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (1.32)$$

Esta é chamada **equação vetorial da reta**  $r$ .

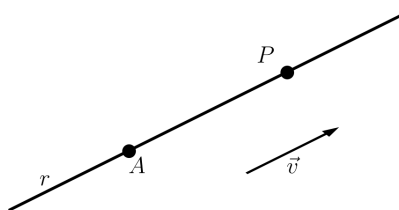


Figura 1.6: Equação vetorial de uma reta.

Observe que para obtermos uma equação vetorial de uma dada reta, podemos escolher qualquer ponto  $A \in r$  e qualquer vetor  $\vec{v} \parallel r$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . O vetor  $\vec{v}$  escolhido é chamado de **vetor diretor**.

**Exemplo 1.2.1.** Seja  $r$  a reta que passa pelos pontos  $A = (-1, -1, -2)$  e  $B = (2, 1, 3)$  (veja a Figura 1.7). O vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 1 - (-1), 3 - (-2)) = (3, 2, 5) \quad (1.33)$$

é um vetor diretor de  $r$ . Desta forma, uma equação vetorial da reta  $r$  é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (1.34)$$

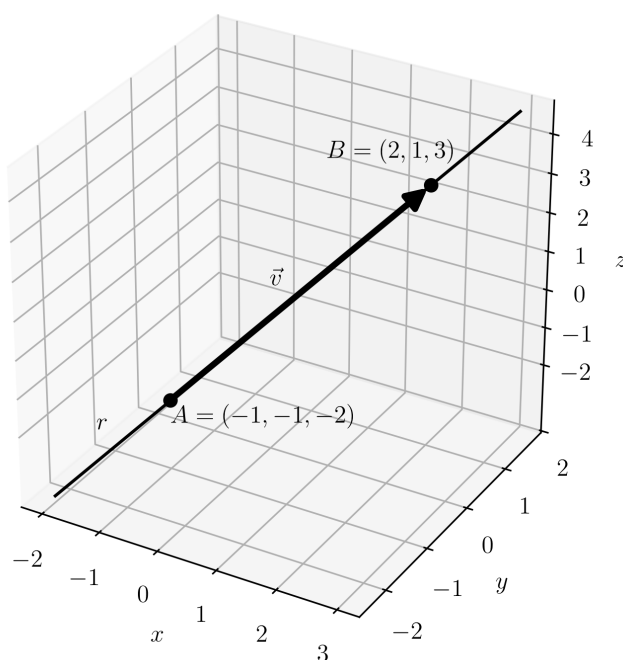


Figura 1.7: Esboço da reta discutida no Exemplo 1.2.1.

### 1.2.2 Equações paramétricas de uma reta

Seja  $r$  uma reta que passa pelo ponto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e tenha vetor diretor  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Da equação vetorial, temos que  $P = (x, y, z) \in r$  se, e

somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (1.35)$$

Equivalentemente,

$$\underbrace{(x - x_A, y - y_A, z - z_A)}_{\overrightarrow{AP}} = \lambda \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{\vec{v}}. \quad (1.36)$$

Então,

$$x - x_A = \lambda v_1, \quad (1.37)$$

$$y - y_A = \lambda v_2, \quad (1.38)$$

$$z - z_A = \lambda v_3, \quad (1.39)$$

donde

$$x = x_A + \lambda v_1, \quad (1.40)$$

$$y = y_A + \lambda v_2, \quad (1.41)$$

$$z = z_A + \lambda v_3, \quad (1.42)$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas** da reta  $r$ .

**Exemplo 1.2.2.** A reta  $r$  discutida no Exemplo 1.2.1 tem equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \quad (1.43)$$

$$y = -1 + 2\lambda, \quad (1.44)$$

$$z = -2 + 5\lambda. \quad (1.45)$$

De fato, tomando  $\lambda = 0$ , temos  $(x, y, z) = (-1, -1, -2) = A \in r$ . E, tomado  $\lambda = 1$ , temos  $(x, y, z) = (-1 + 3, -1 + 2, -2 + 5) = (2, 1, 3) = B \in r$ . Ou seja, as equações paramétricas acima representam a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .

Com o **Sympy**, podemos plotar o gráfico de  $r$  usando o seguinte código:

```
var('lbda',real=True)
plot3d_parametric_line(-1+3*lbda,-1+2*lbda,-2+5*lbda,(lbda,-1,2))
```



### 1.2.3 Equações da reta na forma simétrica

Seja  $r$  uma reta que passa pelo ponto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e tem  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  como vetor diretor. Então,  $r$  tem as equações paramétricas

$$x = x_A + v_1\lambda, \quad (1.46)$$

$$y = y_A + v_2\lambda, \quad (1.47)$$

$$z = z_A + v_3\lambda. \quad (1.48)$$

Isolando  $\lambda$  em cada uma das equações, obtemos

$$\lambda = \frac{x - x_A}{v_1}, \quad (1.49)$$

$$\lambda = \frac{y - y_A}{v_2}, \quad (1.50)$$

$$\lambda = \frac{z - z_A}{v_3}. \quad (1.51)$$

Daí, temos

$$\frac{x - x_A}{v_1} = \frac{y - y_A}{v_2} = \frac{z - z_A}{v_3}, \quad (1.52)$$

as quais são as **equações da reta na forma simétrica**.

**Exemplo 1.2.3.** No Exemplo 1.2.2, consideramos a reta  $r$  de equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \quad (1.53)$$

$$y = -1 + 2\lambda, \quad (1.54)$$

$$z = -2 + 5\lambda. \quad (1.55)$$

Para obtermos as equações de  $r$  na forma simétrica, basta isolarmos  $\lambda$  em cada equação. Com isso, obtemos

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 2}{5}. \quad (1.56)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 1.2.1.** Seja  $r$  a reta que passa pelo ponto  $A = (-1, -1, -2)$  e tem  $\vec{v} = (3, 2, 5)$  como vetor diretor. Determine o valor de  $x$  de forma que  $P = (x, 0, \frac{1}{2})$  seja um ponto de  $r$ .

**Solução.** Da equação vetorial da reta  $r$ , temos que  $P = \left(x, 0, \frac{1}{2}\right)$  é um ponto de  $r$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (1.57)$$

Ou seja,

$$\left(x - (-1), 0 - (-1), \frac{1}{2} - (-2)\right) = \lambda(3, 2, 5). \quad (1.58)$$

Ou, equivalentemente,

$$\left(x + 1, 1, \frac{5}{2}\right) = \lambda(3, 2, 5). \quad (1.59)$$

Usando a segunda coordenada destes vetores, temos

$$1 = \lambda \cdot 2 \quad (1.60)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}. \quad (1.61)$$

Assim, da primeira coordenada dos vetores, temos

$$x + 1 = \lambda \cdot 3 \quad (1.62)$$

$$x + 1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \quad (1.63)$$

$$x = \frac{3}{2} - 1 \quad (1.64)$$

$$x = \frac{1}{2}. \quad (1.65)$$

◇

**ER 1.2.2.** Seja  $r$  a reta de equações paramétricas

$$x = 1 - \lambda, \quad (1.66)$$

$$y = \lambda, \quad (1.67)$$

$$z = -3. \quad (1.68)$$

Determine uma equação vetorial de  $r$ .

**Solução.** Nas equações paramétricas de uma reta, temos que os coeficientes constantes estão associados a um ponto da reta. Os coeficientes do parâmetro  $\lambda$  estão associados a um vetor diretor. Assim sendo, das equações paramétricas da reta  $r$ , temos que

$$A = (1, 0, -3) \in r \quad (1.69)$$

e

$$\vec{v} = (-1, 1, 0) \quad (1.70)$$

é um vetor diretor. Logo, temos que a reta  $r$  tem equação vetorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}, \quad (1.71)$$

com  $A = (1, 0, 3)$  e  $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ .

◇

**ER 1.2.3.** Sabendo que  $r$  é uma reta que passa pelos pontos  $A = (2, -3, 1)$  e  $B = (-1, 1, 0)$ , determine o valor de  $t$  tal que

$$x = 2 + t\lambda, \quad (1.72)$$

$$y = -2 + 4\lambda, \quad (1.73)$$

$$z = 1 - \lambda, \quad (1.74)$$

sejam equações paramétricas de  $r$ .

**Solução.** Para que estas sejam equações paramétricas de  $r$ , é necessário que  $\vec{v} = (t, 4, -1)$  seja um vetor diretor de  $r$ . Em particular,  $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$ . Logo, existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\vec{v} = \beta \overrightarrow{AB} \quad (1.75)$$

$$(t, 4, -1) = \beta(-1 - 2, 1 - (-3), 0 - 1) \quad (1.76)$$

$$(t, 4, -1) = \beta(-3, 4, -1). \quad (1.77)$$

Das segunda e terceira coordenadas, temos  $\beta = 1$ . Daí, comparando pela primeira coordenada, temos

$$t = -3\beta \quad (1.78)$$

$$t = -3. \quad (1.79)$$



**ER 1.2.4.** Seja  $r$  uma reta de equações na forma simétrica

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{1-z}{2}. \quad (1.80)$$

Determine equações paramétricas para esta reta e faça um esboço de seu gráfico.

**Solução.** Podemos obter equações paramétricas desta reta a partir de suas equações na forma simétrica. Para tanto, basta tomar o parâmetro  $\lambda$  tal que

$$\lambda = \frac{x+1}{2}, \quad (1.81)$$

$$\lambda = \frac{y-2}{3}, \quad (1.82)$$

$$\lambda = \frac{1-z}{2}. \quad (1.83)$$

Daí, isolando  $x$ ,  $y$  e  $z$  em cada uma destas equações, obtemos

$$x = -1 + 2\lambda, \quad (1.84)$$

$$y = 2 + 3\lambda, \quad (1.85)$$

$$z = 1 - 2\lambda. \quad (1.86)$$

Para fazermos um esboço do gráfico desta reta, basta traçarmos a reta que passa por dois de seus pontos. Por exemplo, tomando  $\lambda = 0$ , temos  $A = (-1, 2, 1) \in r$ . Agora, tomando  $\lambda = 1$ , temos  $B = (1, 5, -1) \in r$ . Desta forma, obtemos o esboço dado na Figura 1.8.

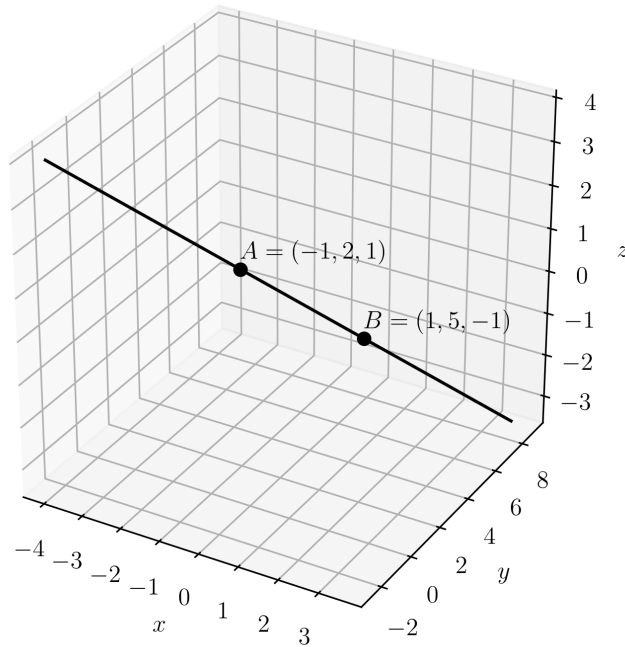


Figura 1.8: Esboço do gráfico da reta  $r$  do Exercício Resolvido 1.2.4.

◇

## Exercícios

**E.1.2.1.** Seja a reta que passa pelos pontos  $A = (1, -2, 0)$  e  $B = (-1, -1, 1)$ . Determine:

- a) sua equação vetorial.
- b) suas equações paramétricas.
- c) suas equações na forma simétrica.

**E.1.2.2.** Seja a reta que passa pelo ponto  $A = (0, 1, -1)$  e tem vetor diretor  $\vec{v} = (2, -1, 1)$ . Determine  $x$  tal que  $B = (1, x, -\frac{1}{2})$ .

**E.1.2.3.** Considere a reta de equações na forma simétrica

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = z-1. \quad (1.87)$$

Encontre um ponto e um vetor diretor desta reta.

**E.1.2.4.** Seja a reta  $r$  de equações paramétricas

$$x = \lambda \quad (1.88)$$

$$y = 2 - \lambda \quad (1.89)$$

$$z = -1 + \lambda \quad (1.90)$$

Determine as equações na forma simétrica da reta que passa pelo ponto  $A = (1, -1, 0)$  e é paralela a reta  $r$ .

**E.1.2.5.** Seja a reta  $r$  de equações paramétricas

$$x = \lambda \quad (1.91)$$

$$y = 2 - \lambda \quad (1.92)$$

$$z = -1 + \lambda \quad (1.93)$$

Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $A = (1, -1, 0)$  e é perpendicular a reta  $r$ .

## 1.3 Equações do plano

Em revisão

Um plano  $\pi$  fica unicamente determinado por um ponto  $A \in \pi$  e dois vetores linearmente independentes  $\vec{u}, \vec{v} \in \pi$ <sup>1</sup>. Veja a Figura 1.9.

---

<sup>1</sup>No sentido que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm representantes no plano  $\pi$ .

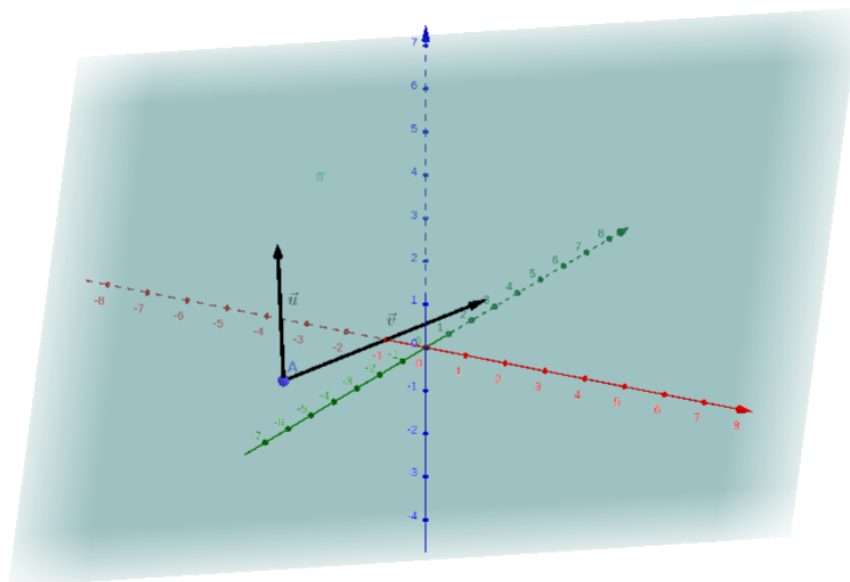


Figura 1.9: Ilustração de um plano no espaço tridimensional.

Os chamados **vetores diretores**  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  determinam infinitos planos paralelos entre si. O chamado **ponto de ancoragem**  $A$  fixa um destes planos.

### 1.3.1 Equação vetorial do plano

Consideremos um plano  $\pi$  determinado pelo ponto de ancoragem  $A$  e os vetores diretores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  (veja a Figura 1.10). Então, um ponto  $P \in \pi$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AP}$  é coplanar a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , i.e.  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente dependentes. Ou seja,  $P \in \pi$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AP}$  pode ser escrito como combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Isto nos fornece a chamada **equação vetorial do plano**

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.94)$$



Figura 1.10: Ilustração sobre a equação vetorial de um plano.

**Exemplo 1.3.1.** Consideremos o plano  $\pi$  determinado pelo ponto  $A = (1, -1, 1)$  e pelos vetores  $\vec{u} = (2, -1, 0)$  e  $\vec{v} = (0, 1, 1)$  (Veja a Figura 1.11). Desta forma, uma equação vetorial para este plano é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (1.95)$$

para  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ .



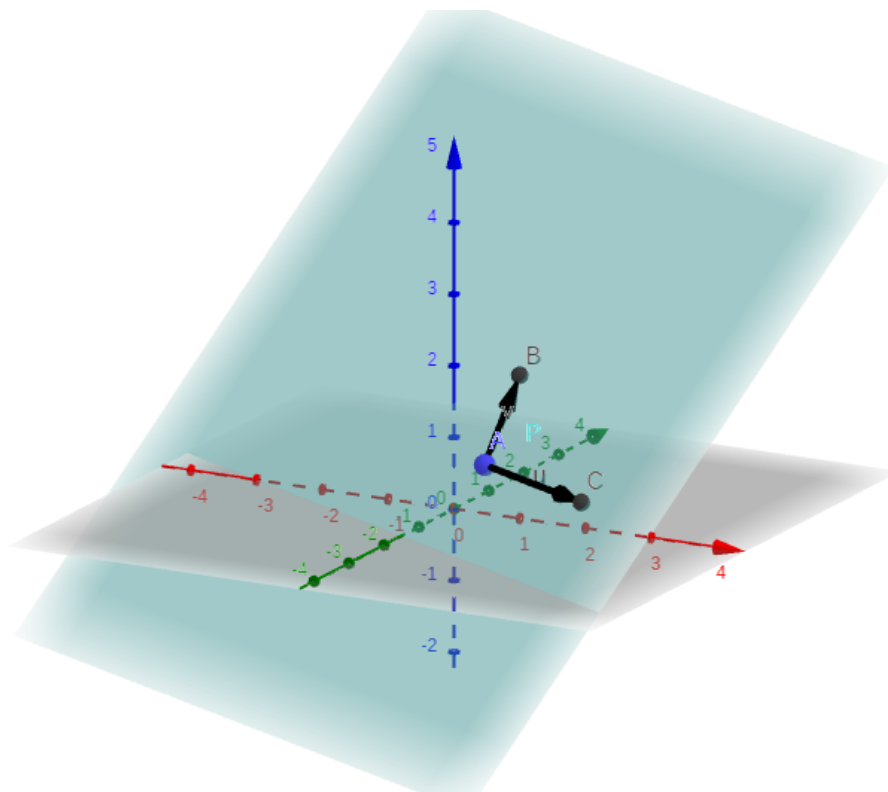


Figura 1.11: Esboço do plano  $\pi$  discutido no Exemplo 1.3.1.

Tomando, por exemplo,  $\lambda = -1$  e  $\beta = 1$ , obtemos

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v} \quad (1.96)$$

$$= -(2, -1, 0) + (0, 1, 1) \quad (1.97)$$

$$= (-2, 2, 1). \quad (1.98)$$

Observando que as coordenadas do ponto  $P$  são iguais as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$ , temos

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \quad (1.99)$$

$$= (1, -1, 1) + (-2, 2, 1) \quad (1.100)$$

$$= (-1, 1, 2). \quad (1.101)$$

Ou seja,  $P = (-1, 1, 2) \in \pi$ .

### 1.3.2 Equações paramétricas do plano

Seja um plano  $\pi$  com ponto de ancoragem  $A = (x_A, y_A, z_A) \in \pi$  e vetores diretores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Então, todo o ponto  $P = (x, y, z)$  neste plano  $\pi$  satisfaz a equação vetorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (1.102)$$

para dados parâmetros  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ . Assim, temos

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) \quad (1.103)$$

$$= (\lambda u_1 + \beta v_1, \lambda u_2 + \beta v_2, \lambda u_3 + \beta v_3). \quad (1.104)$$

Portanto, temos

$$x - x_A = \lambda u_1 + \beta v_1, \quad (1.105)$$

$$y - y_A = \lambda u_2 + \beta v_2, \quad (1.106)$$

$$z - z_A = \lambda u_3 + \beta v_3. \quad (1.107)$$

Ou, equivalentemente,

$$x = x_A + \lambda u_1 + \beta v_1, \quad (1.108)$$

$$y = y_A + \lambda u_2 + \beta v_2, \quad (1.109)$$

$$z = z_A + \lambda u_3 + \beta v_3, \quad (1.110)$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas do plano**.

**Exemplo 1.3.2.** No Exemplo 1.3.1, discutimos sobre o plano  $\pi$  determinado pelo ponto  $A = (1, -1, 1)$  e os vetores  $\vec{u} = (2, -1, 0)$  e  $\vec{v} = (0, 1, 1)$ . Do que vimos acima, temos que

$$x = 1 + 2\lambda, \quad (1.111)$$

$$y = -1 - \lambda + \beta, \quad (1.112)$$

$$z = 1 + \beta, \quad (1.113)$$

são equações paramétricas deste plano.

Podemos usar as equações paramétricas do plano para plotá-lo usando o [SymPy](#). Para tanto, podemos usar os seguintes comandos:

```

from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface
var('r,s',real=True)
plot3d_parametric_surface(1+2*r,-1-r+s,1+s,
                           (r,-2,2),(s,-2,2),show=True,
                           xlabel='$x$',ylabel='$y$')

```

### 1.3.3 Equação geral do plano

Seja  $\pi$  o plano determinado pelo ponto de ancoragem  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e pelos vetores diretores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Sabemos que  $P = (x, y, z) \in \pi$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente dependentes. Ou, equivalentemente, o produto misto  $[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$ . Logo,

$$0 = [\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \quad (1.114)$$

$$= \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (1.115)$$

$$= -u_1v_2z_A + u_1v_3y_A + u_2v_1z_A \quad (1.116)$$

$$- u_2v_3x_A - u_3v_1y_A + u_3v_2x_A \quad (1.117)$$

$$+ x(u_2v_3 - u_3v_2) + y(-u_1v_3 + u_3v_1) + z(u_1v_2 - u_2v_1). \quad (1.118)$$

Observamos que a equação acima tem a forma geral

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (1.119)$$

com  $a, b, c, d$  não todos nulos ou, equivalentemente,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ . Esta última é chamada **equação geral do plano**.

**Exemplo 1.3.3.** No Exemplo 1.3.1, discutimos sobre o plano  $\pi$  determinado pelo ponto  $A = (1, -1, 1)$  e os vetores  $\vec{u} = (2, -1, 0)$  e  $\vec{v} = (0, 1, 1)$ . Para encontrarmos a equação geral deste plano, tomamos  $P = (x, y, z)$  e calculamos

$$0 = [\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \quad (1.120)$$

$$= \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.121)$$

$$= -x - 2y + 2z - 3. \quad (1.122)$$

Ou seja, a equação geral deste plano é

$$-x - 2y + 2z - 3 = 0. \quad (1.123)$$

### 1.3.4 Exercícios resolvidos

**ER 1.3.1.** Seja  $\pi$  um plano tal que  $A = (2, 0, -1) \in \pi$ ,  $P = (0, 1, -1) \in \pi$  e  $\vec{u} = (1, 0, 1) \in \pi$ . Determine uma equação vetorial para  $\pi$ .

**Solução.** Para obtermos uma equação vetorial do plano  $\pi$ , precisamos de um ponto e dois vetores l.i. em  $\pi$ . Do enunciado, temos o ponto  $A = (2, 0, -1) \in \pi$  e o vetor  $\vec{u}$ . Portanto, precisamos encontrar um vetor  $\vec{v} \in \pi$  tal que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sejam l.i.. Por sorte, temos  $P = (0, 1, -1) \in \pi$  e, portanto  $\overrightarrow{AP} \in \pi$ . Podemos tomar

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} \quad (1.124)$$

$$= (-2, 1, 0), \quad (1.125)$$

pois  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  são l.i.. Logo, uma equação vetorial do plano  $\pi$  é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (1.126)$$

$$= \lambda(1, 0, 1) + \beta(-2, 1, 0), \quad (1.127)$$

com  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ .

◇

**ER 1.3.2.** Seja  $\pi$  o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda, \quad (1.128)$$

$$y = \beta, \quad (1.129)$$

$$z = 1 - \lambda + \beta. \quad (1.130)$$

Determine o valor de  $z_P$  de forma que  $P = (-1, 2, z_P) \in \pi$ .

**Solução.** Para que  $P = (-1, 2, z_P)$  pertença ao plano, devemos ter

$$-1 = -1 + \lambda, \quad (1.131)$$

$$2 = \beta, \quad (1.132)$$

$$z_P = 1 - \lambda + \beta. \quad (1.133)$$

Das duas primeiras equações, obtemos  $\lambda = 0$  e  $\beta = 2$ . Daí, da terceira equação, temos

$$z_P = 1 - 0 + 2 = 3. \quad (1.134)$$

◇

## Exercícios

**E.1.3.1.** Determine a equação vetorial do plano com ponto de ancoragem  $A = (-1, 0, 2)$  e vetores diretores  $\vec{u} = (2, -1, 1)$  e  $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ .

**E.1.3.2.** Seja o plano de equação vetorial  $\overrightarrow{AP} = \lambda(2, -1, 1) + \beta(-1, 1, 2)$ ,  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ , com ponto de ancoragem  $A = (-1, 0, 2)$ . Determine  $x$  tal que  $P = (x, 3, 0)$  pertença a este plano.

**E.1.3.3.** Determine as equações paramétricas do plano com ponto de ancoragem  $A = (-1, 0, 2)$  e vetores diretores  $\vec{u} = (2, -1, 1)$  e  $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ .

**E.1.3.4.** Considere o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + 2\lambda - \beta, \quad (1.135)$$

$$y = -\lambda + \beta, \quad (1.136)$$

$$z = 2 + \lambda + 2\beta. \quad (1.137)$$

Determine  $y$  tal que  $P = (-6, y, 2)$  pertença a este plano.

**E.1.3.5.** Determine a equação geral do plano com ponto de ancoragem  $A = (-1, 0, 2)$  e vetores diretores  $\vec{u} = (2, -1, 1)$  e  $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ .

**E.1.3.6.** Considere o plano de equação geral  $-3x - 5y + z - 5 = 0$ . Determine  $z$  tal que o ponto  $P = (0, 0, z)$  pertença a este plano.

**E.1.3.7.** Considere o plano  $\pi$  de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda \quad (1.138)$$

$$y = \beta \quad (1.139)$$

$$z = 1 - \lambda + \beta \quad (1.140)$$

A reta  $r$  de equação paramétricas

$$x = 2 \quad (1.141)$$

$$y = -1 + 2\lambda \quad (1.142)$$

$$z = 2\lambda \quad (1.143)$$

é paralela ao plano  $\pi$ ? Justifique sua resposta.

**E.1.3.8.** Considere o plano  $\pi$  de equação geral

$$6x - 7y - 5z = -6. \quad (1.144)$$

Determine uma equação paramétrica para a reta  $r$  que é perpendicular ao plano  $\pi$  e passa pelo ponto  $A = (2, -1, 0)$ .

## Capítulo 2

# Outros sistemas de coordenadas

Neste capítulo, vamos introduzir outros sistemas de coordenadas no plano e no espaço tridimensional.

### 2.1 Sistema de coordenadas polares

No plano, o sistema de coordenadas polares é definido por um ponto de origem (chamado de **polo**) e um eixo orientado  $Ox$  (chamado de **eixo polar**). Veja a Figura 2.1.

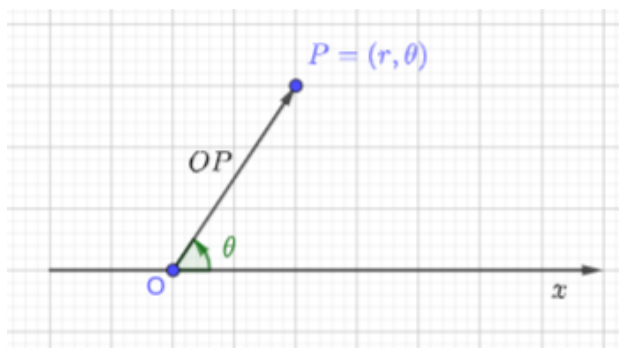


Figura 2.1: Sistema de coordenadas polares.

Neste sistema, um ponto  $P$  de coordenadas polares  $P = (r, \theta)$  é tal que

$|OP| = r$  (i.e. a distância do polo ao ponto é  $r$ ) e  $\theta$  é o ângulo de  $Ox$  com  $OP$ , medido positivamente no sentido anti-horário.

**Exemplo 2.1.1.** Na Figura 2.2, temos a representação dos pontos  $P = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ,  $A = (2, \frac{2\pi}{3})$  e  $B = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$  no sistema de coordenadas polares.

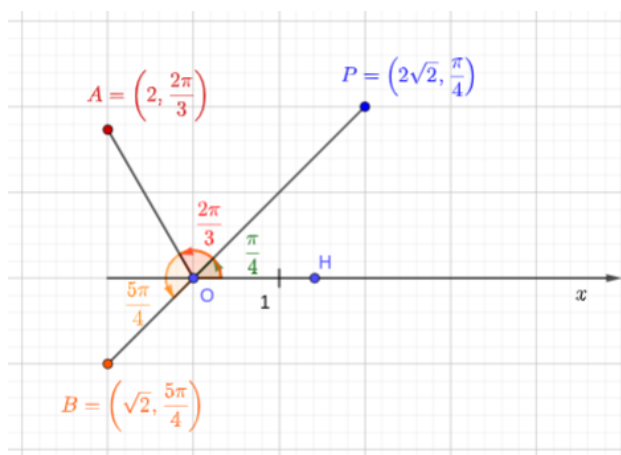


Figura 2.2: Sistema de coordenadas polares.

**Observação 2.1.1.** Por convenção, as coordenadas polares  $(r, \pi + \theta) = (-r, \theta)$ ,  $r > 0$ . Por exemplo,  $B = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}) = (-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ . Veja na Figura 2.2.

### 2.1.1 Coordenadas cartesianas x polares

Aqui, vamos estudar como podemos converter as coordenadas de um ponto  $P$  de coordenadas cartesianas para coordenadas polares e vice-versa. Vamos denotar as coordenadas cartesianas do ponto  $P$  por  $P = (x_P, y_P)$  e suas coordenadas polares por  $P = (r, \theta)$ . Veja a Figura 2.3.



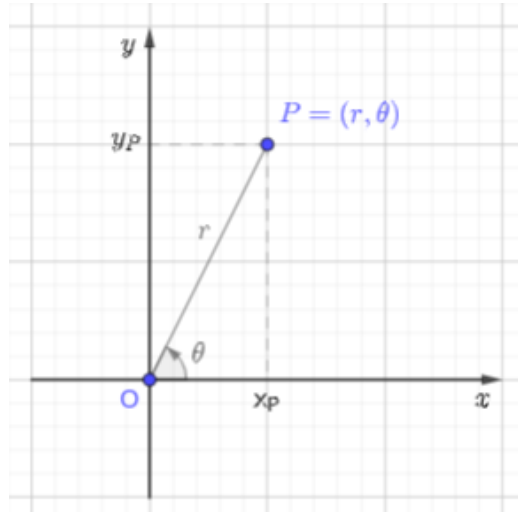


Figura 2.3: Sistema de coordenadas polares.

Na Figura 2.3, vamos nos concentrar no triângulo retângulo de vértices  $O$ ,  $(x_P, 0)$  e  $P$ . Das relações trigonométricas e do teorema de Pitágoras, temos que

$$\cos \theta = \frac{x_P}{r} \quad (2.1)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{y_P}{r} \quad (2.2)$$

$$r^2 = x_P^2 + y_P^2 \quad (2.3)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{y_P}{x_P} \quad (2.4)$$

ou, equivalentemente,

$$x_P = r \cos \theta \quad (2.5)$$

$$y_P = r \text{sen } \theta \quad (2.6)$$

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \quad (2.7)$$

$$\theta = \arctg \left( \frac{y_P}{x_P} \right) \quad (2.8)$$

**Exemplo 2.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) Conversão de  $P = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$  em coordenadas polares para coordenadas cartesianas.

No caso de  $P = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$  temos  $r = 2\sqrt{2}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Desta forma, as coordenadas cartesianas de  $P = (x, y)$  são dadas por

$$x = r \cos \theta \quad (2.9)$$

$$= 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \quad (2.10)$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.11)$$

$$= 2 \quad (2.12)$$

$$y = r \sin \theta \quad (2.13)$$

$$= 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \quad (2.14)$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.15)$$

$$= 2 \quad (2.16)$$

Logo,  $P = (2, 2)$  em coordenadas cartesianas. Veja a Figura 2.2.

- b) Conversão de  $B = (-\sqrt{3}, -1)$  de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. Neste caso, temos  $x = -\sqrt{3}$  e  $y = -1$  e

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.17)$$

$$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \quad (2.18)$$

$$= \sqrt{4} \quad (2.19)$$

$$= 2 \quad (2.20)$$

$$\theta = \arctg \left( \frac{y}{x} \right) \quad (2.21)$$

$$= \arctg \left( \frac{-1}{-\sqrt{3}} \right) \quad (2.22)$$

$$= \arctg \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (2.23)$$

$$= \frac{7\pi}{6}. \quad (2.24)$$

Desta forma, temos que  $P = (2, \frac{7\pi}{6})$  em coordenadas polares. Ou, equivalentemente,  $P = (-2, \frac{\pi}{6})$ .

### Equação de reta que passa pela origem

Em coordenadas polares, uma reta que passa pela origem e tem ângulo de declividade  $\theta_0$  tem equação

$$\theta = \theta_0, \quad (2.25)$$

com  $r \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.1.3.** Seja a reta  $y = x$  em coordenadas cartesianas. Em coordenadas polares, a equação desta reta é

$$\theta = \frac{\pi}{4}. \quad (2.26)$$

### Equação de circunferência com centro na origem

Em coordenadas polares, a circunferência com centro na origem e raio  $r_0$  tem equação

$$r = r_0. \quad (2.27)$$

**Exemplo 2.1.4.** Seja a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  em coordenadas cartesianas. Em coordenadas polares, a equação desta circunferência é

$$r = 2. \quad (2.28)$$

## 2.1.2 Exercícios resolvidos

**ER 2.1.1.** Obtenha duas representações em coordenadas polares do ponto  $A = (-1, 0)$  dado em coordenadas cartesianas.

**Solução.** O ponto  $A = (-1, 0)$  tem coordenadas cartesianas  $x = -1$  e  $y = 0$ . Para converter em coordenadas polares  $A = (r, \theta)$ , podemos usar

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.29)$$

$$r^2 = 1^2 + 0^2 \quad (2.30)$$

$$r = \pm 1 \quad (2.31)$$

e

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.32)$$

$$= \arctg(0) \quad (2.33)$$

$$= \pi \text{ ou } 0. \quad (2.34)$$

Ou seja, em coordenadas polares, temos as representações  $A = (1, \pi)$  ou  $A = (-1, 0)$ .

◇

**ER 2.1.2.** Obtenha a representação em coordenadas cartesianas do ponto  $B = (2, \frac{\pi}{2})$  dado em coordenadas polares.

**Solução.** O ponto  $B = (2, \frac{\pi}{2})$  tem coordenadas polares  $r = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Para converter em coordenadas cartesianas  $B = (x, y)$ , podemos usar

$$x = r \cos \theta \quad (2.35)$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{2} \quad (2.36)$$

$$= 0 \quad (2.37)$$

e

$$y = r \sin \theta \quad (2.38)$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{2} \quad (2.39)$$

$$= 2 \quad (2.40)$$

Ou seja, em coordenadas cartesianas, temos a representação  $B = (0, 2)$ .

◇

## Exercícios

**E.2.1.1.** Obtenha uma representação em coordenadas polares dos seguintes pontos dados em coordenadas cartesianas:

- a)  $A = (-3, 3)$
- b)  $B = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
- c)  $C = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

**E.2.1.2.** Obtenha uma representação em coordenadas cartesianas dos seguintes pontos dados em coordenadas polares:

- a)  $A = (2, \frac{\pi}{6})$
- b)  $B = (1, \frac{5\pi}{6})$
- c)  $C = (-2, \frac{3\pi}{4})$

**E.2.1.3.** Considere a reta de equação  $x = 0$  em coordenadas cartesianas. Escreva a equação desta reta em coordenadas polares.

**E.2.1.4.** Considere a reta de equação  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  em coordenadas polares. Escreva a equação desta reta em coordenadas cartesianas.

**E.2.1.5.** Considere a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$  em coordenadas cartesianas. Escreva a equação desta circunferência em coordenadas polares.

**E.2.1.6.** Considere a circunferência de equação  $r = \sqrt{2}$  em coordenadas polares. Escreva a equação desta circunferência em coordenadas cartesianas.

## Capítulo 3

### Cônicas

Neste capítulo, fazemos um estudo introdutório sobre cônicas no plano cartesiano. Mais precisamente, vamos estudar as equações de elipses, hipérboles e parábolas.

#### 3.1 Elipse

Sejam  $F_1, F_2$  pontos sobre um plano  $\pi$ ,  $c = \frac{1}{2}|F_1F_2|$  e  $a > c$ . Chama-se **elipse** de **focos**  $F_1$  e  $F_2$  ao conjunto de pontos  $P$  tais que

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \quad (3.1)$$

Veja a Figura 3.1.

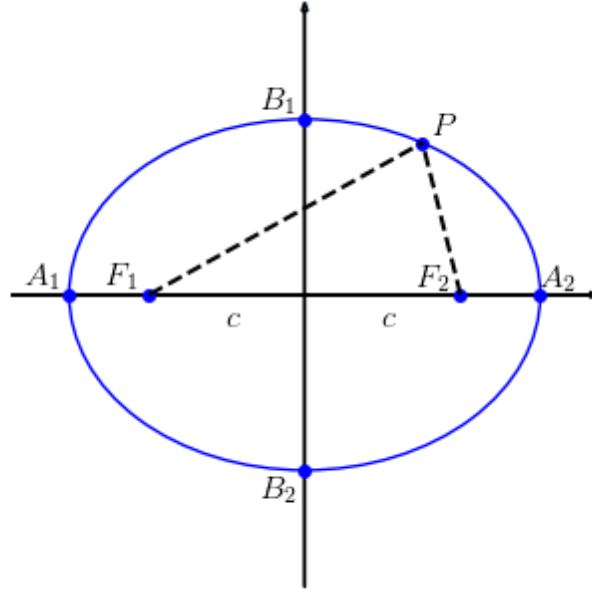


Figura 3.1: Ilustração de uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Dada uma tal elipse, identificamos  $2c = |F_1F_2|$  como a **distância focal**. Os pontos  $A_1$  e  $A_2$  de interseção da elipse com a reta que passa pelos focos são chamados de **vértices** da elipse. O segmento  $A_1A_2$  é chamado de **eixo maior** da elipse. Observamos que

$$|A_1A_2| = 2a. \quad (3.2)$$

O ponto médio do segmento  $F_1F_2$  é chamado de **centro** da elipse. Sejam  $B_1$  e  $B_2$  os pontos de interseção da elipse com a reta que passa pelo centro da elipse e é perpendicular ao segmento  $A_1A_2$ . Assim sendo, o segmento  $B_1B_2$  é chamado de **eixo menor** da elipse. Vamos denotar

$$2b = |B_1B_2|. \quad (3.3)$$

Chamamos de **excentricidade** da elipse o número

$$e = \frac{c}{a}. \quad (3.4)$$

Notemos que  $0 \leq e < 1$ . Para  $e = 0$ , temos  $c = 0$  e, portanto  $F_1 = F_2$ . Neste caso, a elipse é a circunferência de centro em  $F_1$  (ou  $F_2$ ) e diâmetro  $2a$ . No que  $e$  tende a 1, a elipse tende ao segmento  $A_1A_2$ .

Por fim, notamos que o triângulo  $B_1OF_2$  é retângulo,  $|OF_2| = c$ ,  $|F_2B_1| = a$  e  $|OB_1| = b$ . Do teorema de Pitágoras segue

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (3.5)$$

### 3.1.1 Equação reduzida da elipse

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas. Sejam  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ ,  $c \geq 0$ , os focos de uma dada elipse (veja a Figura 3.1). Se  $P = (x, y)$  é um ponto da elipse, então

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \quad (3.6)$$

Como

$$|PF_1| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad (3.7)$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad (3.8)$$

temos

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a, \quad (3.9)$$

ou, equivalentemente,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (3.10)$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2. \quad (3.11)$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (3.12)$$

Elevando novamente ao quadrado, temos

$$a^2(x - c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \quad (3.13)$$



donde

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \quad (3.14)$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (3.15)$$

Como  $a > c$ , dividimos por  $a^2 - c^2$  e depois por  $a^2$  para obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (3.16)$$

Por fim, da equação (3.5), temos  $a^2 - c^2 = b^2$ , o que nos leva a **equação reduzida da elipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.17)$$

**Exemplo 3.1.1.** A Figura 3.2 é um esboço do gráfico da elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad (3.18)$$

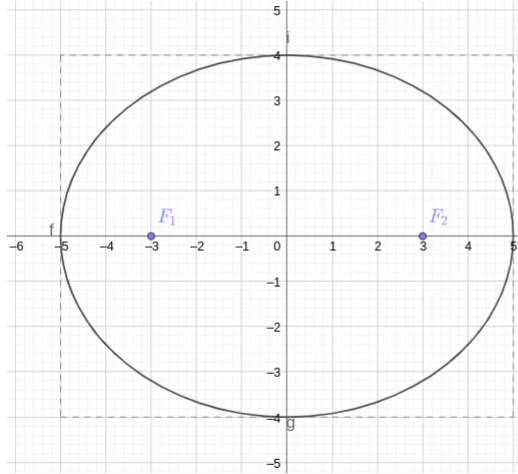


Figura 3.2: Esboço do gráfico da elipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 3.1.1.** Determine a equação reduzida da elipse de focos  $F_1 = (-3, 0)$ ,  $F_2 = (3, 0)$  e vértices  $A_1 = (-5, 0)$  e  $A_2 = (5, 0)$ .

**Solução.** A equação reduzida tem a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.19)$$

onde

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (3.20)$$

Dos focos temos  $c = 3$  e dos vértices temos  $a = 5$ . Logo,

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad (3.21)$$

$$= 5^2 - 3^2 \quad (3.22)$$

$$= 25 - 9 \quad (3.23)$$

$$= 16. \quad (3.24)$$

Concluimos que a elipse em questão tem equação

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad (3.25)$$

◇

**ER 3.1.2.** Determine os focos da elipse de equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1. \quad (3.26)$$

**Solução.** Começamos lembrando que os focos de uma elipse estão localizados sobre seu eixo maior. No caso deste exercício, temos  $a = 4$  e  $b = 5$ , logo o eixo maior é  $B_1B_2$ , na mesma direção do eixo das ordenadas  $Oy$ . Do triângulo retângulo  $OA_2F_1$  temos

$$b^2 = a^2 + c^2, \quad (3.27)$$

veja a Figura 3.3.

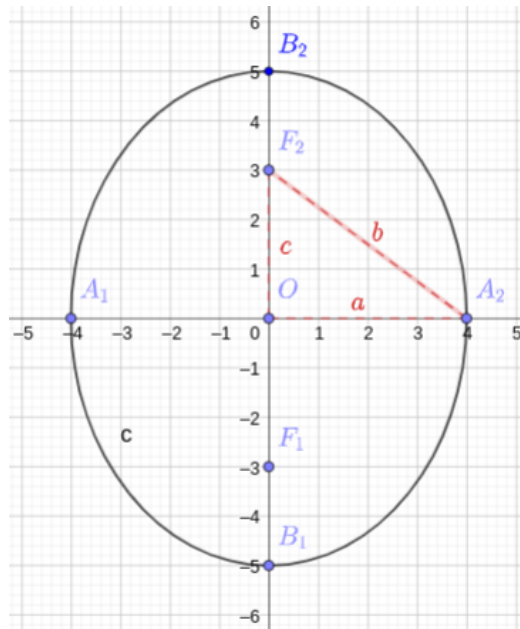


Figura 3.3: Esboço do gráfico de uma elipse com eixo maior sobre o eixo das ordenadas  $Oy$ .

Daí, temos

$$c^2 = b^2 - a^2 \quad (3.28)$$

$$= 25 - 16 \quad (3.29)$$

$$= 9 \quad (3.30)$$

$$c = 3. \quad (3.31)$$

Concluimos que os focos são  $F_1 = (0, -3)$  e  $F_2 = (0, 3)$ .

◇

## Exercícios

**E.3.1.1.** Faça um esboço da elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad (3.32)$$

**E.3.1.2.** Faça um esboço da elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1. \quad (3.33)$$

**E.3.1.3.** Determine os vértices (sobre o eixo maior) das seguintes elipses:

a)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

b)  $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$

**E.3.1.4.** Determine os focos das seguintes elipses:

a)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

b)  $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$

**E.3.1.5.** Forneça a equação reduzida da elipse de focos  $F_1 = (-1, 0)$ ,  $F_2 = (1, 0)$  e vértices  $A_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ ,  $A_2 = (\sqrt{2}, 0)$ .

**E.3.1.6.** Forneça a equação reduzida da elipse de focos  $F_1 = (0, -2)$ ,  $F_2 = (0, 2)$  e vértices  $B_1 = (0, -\sqrt{5})$ ,  $B_2 = (0, \sqrt{5})$ .

## 3.2 Hipérbole

Sejam  $F_1$  e  $F_2$  pontos sobre um plano  $\pi$ . Sejam, também,  $c$  tal que  $|F_1 F_2| = 2c$  e  $a < c$ . O lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a, \quad (3.34)$$

chama-se **hipérbole**. Veja Figura 3.4.

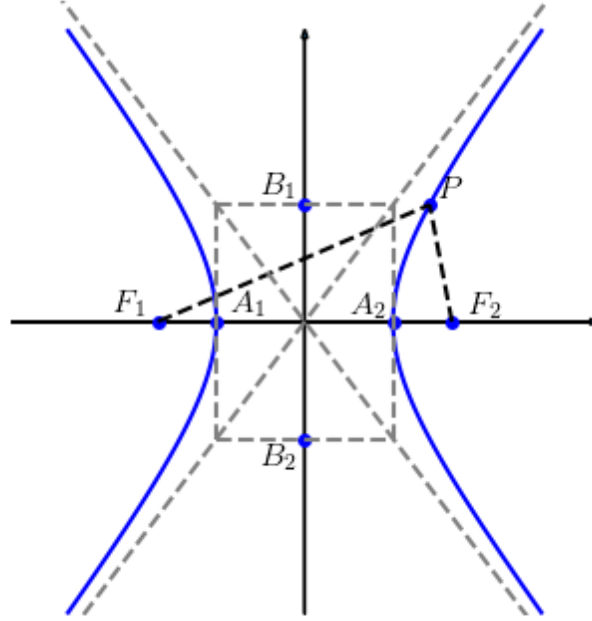


Figura 3.4: Ilustração de uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são chamados de **focos** da hipérbole e  $2c = |F_1F_2|$  é chamada de **distância focal**. O ponto médio entre os pontos  $F_1$  e  $F_2$  é chamado de centro da hipérbole. São chamados **vértices** da hipérbole os pontos  $A_1$  e  $A_2$ , sendo que o segmento  $A_1A_2$  é chamado de **eixo real** (ou transversal) da hipérbole. O comprimento deste eixo é  $|A_1A_2| = 2a$ .

Sejam  $B_1$  e  $B_2$  pontos  $c$  distantes de  $A_1$  e  $A_2$  e pertencentes a reta que passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao seu eixo real. O segmento  $B_1B_2$  é chamado de **eixo imaginário** (transverso ou conjugado). Denotando  $2b = |B_1B_2|$ , temos do triângulo retângulo  $B_1OA_1$  que

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (3.35)$$

### 3.2.1 Equação reduzida da hipérbole

Assumimos um sistema de coordenadas cujo centro coincida com o centro de uma dada hipérbole e o eixo das abscissas seja coincidente com o eixo real da

hipérbole. Desta forma, temos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ . Então,  $P = (x, y)$  é um ponto da hipérbole quando

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a. \quad (3.36)$$

Daí, segue que

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a \quad (3.37)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (3.38)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (3.39)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última equação, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (3.40)$$

$$+ (x-c)^2 + y^2 \quad (3.41)$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (3.42)$$

$$+ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \quad (3.43)$$

Simplificando e rearranjando os termos, temos

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (3.44)$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \quad (3.45)$$

Simplificando e rearranjando os termos, obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (3.46)$$

Lembrando que  $c^2 = a^2 + b^2$ , temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (3.47)$$

Dividindo por  $a^2b^2$ , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.48)$$

a qual é chamada de **equação reduzida da hipérbole**.

**Exemplo 3.2.1.** A Figura 3.5 é um esboço do gráfico da hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1. \quad (3.49)$$

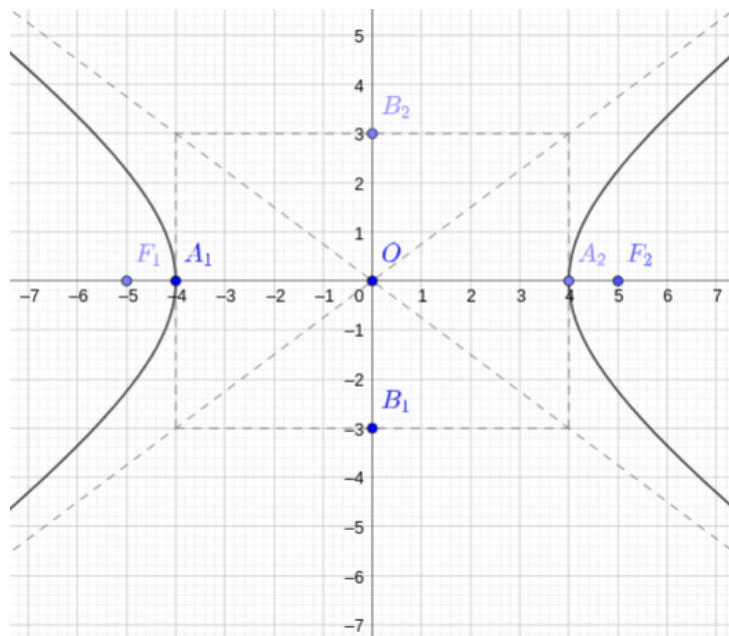


Figura 3.5: Esboço do gráfico da hipérbole de equação  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 3.2.1.** Obtenha a equação reduzida da hipérbole centrada na origem e de eixo real  $|A_1A_2| = 8$  e eixo imaginário  $|B_1B_2| = 4$ .

**Solução.** A equação reduzida de uma hipérbole centrada na origem tem a forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.50)$$

onde  $2a = |A_1A_2|$  e  $2b = |B_1B_2|$ . No caso deste exercício, temos

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \quad (3.51)$$

e

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2 \quad (3.52)$$

Logo, a equação buscada é

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad (3.53)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1. \quad (3.54)$$

◇

**ER 3.2.2.** Faça o esboço da hipérbole de equação reduzida

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1. \quad (3.55)$$

**Solução.** Observe que nesta equação, o termo contendo  $x$  tem sinal negativo e o termo contendo  $y$  tem sinal positivo (compare com (3.48)). Isto nos indica que o eixo real desta hipérbole está na direção das ordenadas  $Oy$  e, consequentemente, o eixo imaginário na direção das abscissas  $Ox$ .

Da equação, temos  $a^2 = 9$  e  $b^2 = 16$ , donde  $a = 3$  e  $b = 4$ . Neste caso, os vértices que definem o eixo real são  $A_1 = (0, -b) = (0, -4)$  e  $A_2 = (0, b) = (0, 4)$ . Os focos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$  são tais que

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (3.56)$$

$$= 9 + 16 \quad (3.57)$$

$$a = 25 \quad (3.58)$$

$$c = 5. \quad (3.59)$$

Com estas informações, traçamos o esboço dado na Figura 3.6.



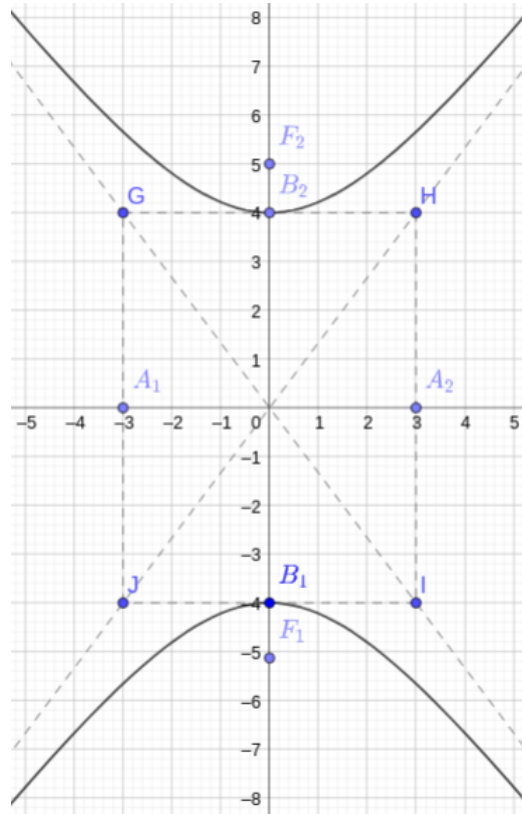


Figura 3.6: Esboço do gráfico da hipérbole de equação  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ .

◇

**ER 3.2.3.** Mostre que uma hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.60)$$

tem assíntotas

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \quad (3.61)$$

**Solução.** De fato, ao isolarmos  $y$  na equação reduzida, obtemos

$$y = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} \quad (3.62)$$

Logo, para  $x \rightarrow \infty$ , temos

$$y \rightarrow \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2} \quad (3.63)$$

$$y \rightarrow \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} \sqrt{x^2} \quad (3.64)$$

$$y \rightarrow \pm \frac{b}{a} x \quad (3.65)$$

De forma análoga, quando  $x \rightarrow -\infty$ , temos

$$y \rightarrow \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2} \quad (3.66)$$

$$y \rightarrow \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} \sqrt{x^2} \quad (3.67)$$

$$y \rightarrow \mp \frac{b}{a} x \quad (3.68)$$

Ambos os resultados mostram que  $y = \pm \frac{b}{a} x$  são assíntotas da hipérbole.

◇

## Exercícios

**E.3.2.1.** Faça o esboço da hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (3.69)$$

**E.3.2.2.** Faça o esboço da hipérbole de equação reduzida

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1 \quad (3.70)$$

**E.3.2.3.** Determine os vértices do eixo real das seguintes hipérboles:

a)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b)  $y^2 - \frac{x^2}{16} = 1$

**E.3.2.4.** Determine os focos das seguintes hipérboles:

a)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b)  $y^2 - \frac{x^2}{16} = 1$

**E.3.2.5.** Forneça a equação reduzida da hipérbole de focos  $F_1 = (-2, 0)$ ,  $F_2 = (2, 0)$  e de vértices do eixo real  $A_1 = (-1, 0)$  e  $A_2 = (1, 0)$ .

**E.3.2.6.** Forneça a equação reduzida da hipérbole de distância focal  $|F_1F_2| = 2\sqrt{6}$  e de vértices do eixo imaginário  $A_1 = (-2, 0)$  e  $A_2 = (2, 0)$ .

### 3.3 Parábola

Em um plano, consideramos uma reta  $d$  e um ponto  $F$  não pertencente a  $d$ . Chamamos de **parábola** o conjunto de pontos  $P$  do plano que são equidistantes de  $F$  e de  $d$ , i.e.

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \quad (3.71)$$

Veja a Figura 3.7.

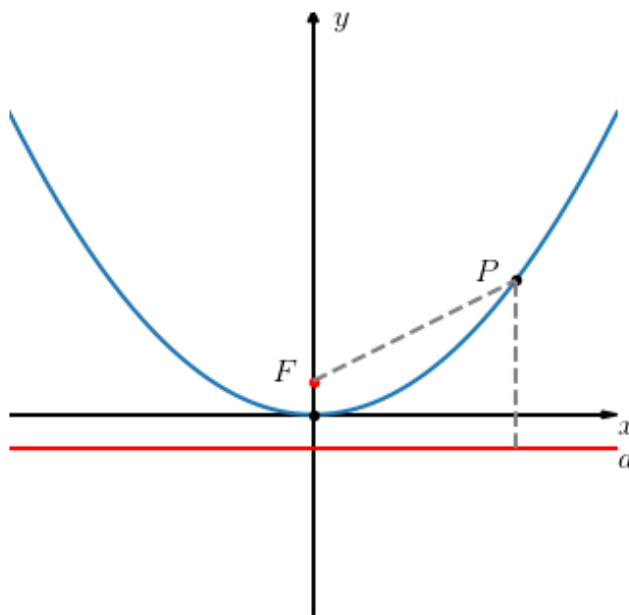


Figura 3.7: Ilustração de uma parábola.

O ponto  $F$  é chamado de **foco** da parábola. A reta  $d$  é chamada de **diretriz** da parábola. A reta perpendicular a  $d$  e que passa pelo ponto  $F$  é chamada de **eixo** da parábola. O ponto  $V$  de interseção entre a parábola e seu eixo é chamado de **vértice** da parábola.

### 3.3.1 Equação reduzida de uma parábola

Tomamos o sistema cartesiano de coordenadas com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas paralelo à diretriz. Seja  $p$  tal que

$$F = (0, p/2). \quad (3.72)$$

Logo, a diretriz tem equação  $y = -p/2$ . Da definição de parábola,  $P = (x, y)$  pertence a parábola quando

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \quad (3.73)$$

Segue que

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}. \quad (3.74)$$

Elevando ao quadrado e expandindo, obtemos

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}. \quad (3.75)$$

Cancelando e rearranjando termos, obtemos

$$x^2 = 2py, \quad (3.76)$$

a chamada **equação reduzida da parábola**.

**Exemplo 3.3.1.** A Figura 3.8 é um esboço do gráfico da parábola de equação reduzida

$$x^2 = 4y. \quad (3.77)$$

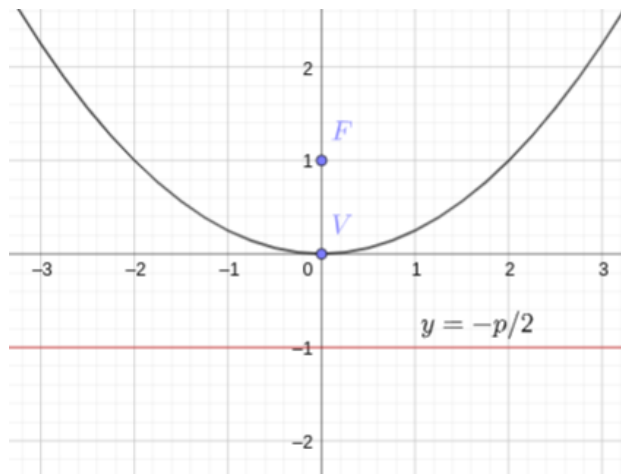


Figura 3.8: Esboço do gráfico da parábola de equação  $y^2 = 4x$ .

**Observação 3.3.1.** Uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano e foco  $F = (p/2, 0)$ , tem equação reduzida

$$y^2 = 2px. \quad (3.78)$$

**Exercícios resolvidos**

**ER 3.3.1.** Determine a equação reduzida da parábola de diretriz  $y = 2$  e vértice na origem do sistema cartesiano. Por fim, faça o esboço de seu gráfico.

**Solução.** Uma parábola de equação reduzida

$$x^2 = 2py \quad (3.79)$$

tem diretriz  $y = -\frac{p}{2}$ . Logo, sabendo que a diretriz é  $y = 2$ , temos  $p = -4$ . Então, concluímos que a equação reduzida da parábola é

$$x^2 = -8y \quad (3.80)$$

A Figura 3.9 é o esboço do gráfico desta parábola.

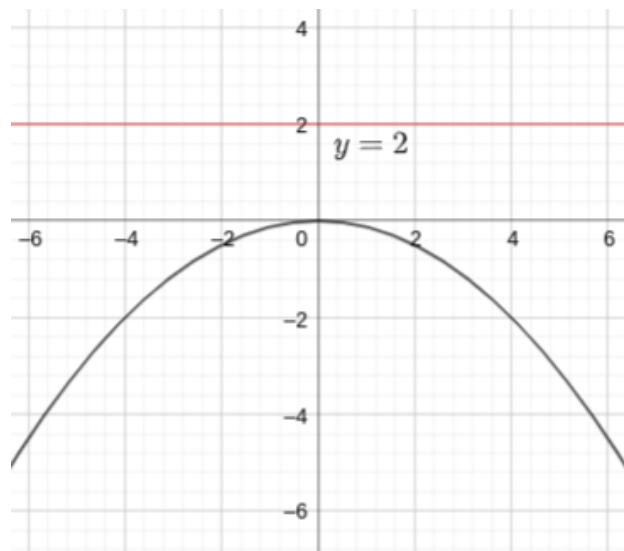


Figura 3.9: Esboço do gráfico da parábola de equação  $y^2 = -8x$ .

◇

**ER 3.3.2.** Determine a equação reduzida da parábola de diretriz  $x = 2$  e vértice na origem do sistema cartesiano. Por fim, faça o esboço de seu gráfico.

**Solução.** Uma parábola de equação reduzida

$$y^2 = 2px \quad (3.81)$$

tem diretriz  $x = -\frac{p}{2}$ . Logo, sabendo que a diretriz é  $x = 2$ , temos  $p = -4$ . Então, concluímos que a equação reduzida da parábola é

$$y^2 = -8x \quad (3.82)$$

A Figura 3.10 é o esboço do gráfico desta parábola.

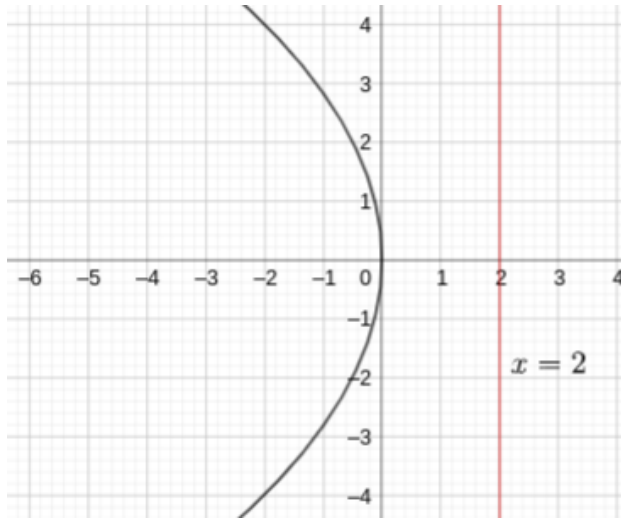


Figura 3.10: Esboço do gráfico da parábola de equação  $y^2 = -8x$ .

◇

## Exercícios

**E.3.3.1.** Faça o esboço do gráfico da parábola de equação reduzida

$$x^2 = 2y. \quad (3.83)$$

Identifique no esboço a reta diretriz, o foco e o vértice da parábola.

**E.3.3.2.** Faça o esboço do gráfico da parábola de equação reduzida

$$x^2 = -2y. \quad (3.84)$$

Identifique no esboço a reta diretriz, o foco e o vértice da parábola.

**E.3.3.3.** Faça o esboço do gráfico da parábola de equação reduzida

$$y^2 = 2x. \quad (3.85)$$

Identifique no esboço a reta diretriz, o foco e o vértice da parábola.

**E.3.3.4.** Faça o esboço do gráfico da parábola de equação reduzida

$$y^2 = -2x. \quad (3.86)$$

Identifique no esboço a reta diretriz, o foco e o vértice da parábola.

**E.3.3.5.** Determine o foco de cada uma das seguintes parábolas:

a)  $y = 2x^2$

b)  $y + 2x^2 = 0$

c)  $y^2 + 4x = 0$

d)  $\frac{1}{4}y^2 = x$



## Capítulo 4

# Superfícies Quádricas

Neste capítulo, fazemos um estudo introdutório sobre superfícies quádricas.

### 4.1 Introdução a superfícies quádricas

Superfícies no espaço que podem ser descritas por equações da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \quad (4.1)$$

são chamadas de **superfícies quádricas**, sendo  $a, b, c, d, e, f, m, n, p$  e  $q$  coeficientes dados.

#### 4.1.1 Elipsoides

Um **elipsoide** centrado na origem é uma superfície quádrlica de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.2)$$

**Exemplo 4.1.1.** A Figura 4.1 é um esboço do gráfico da elipsoide de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1. \quad (4.3)$$

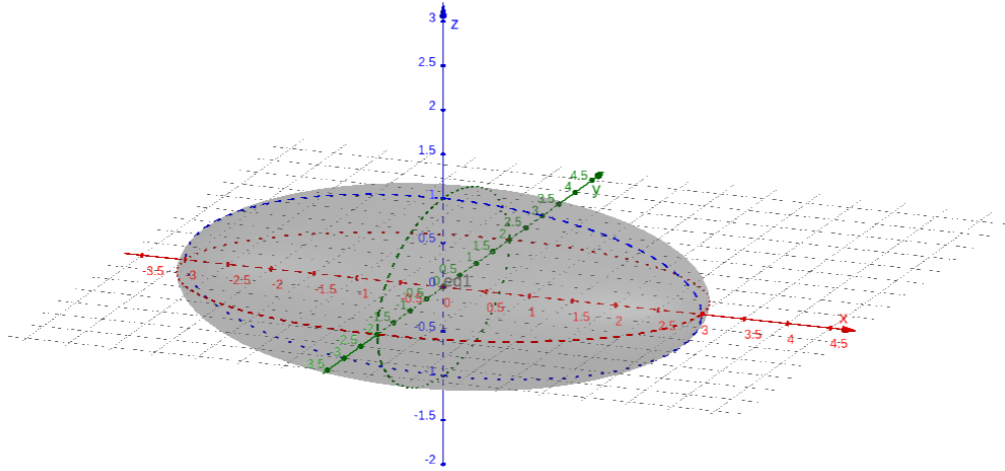


Figura 4.1: Esboço do elipsoide de equação (4.3).

Observamos que a interseção deste elipsoide com o plano  $X - Y$  ( $z=0$ ) é a elipse de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad (4.4)$$

Ou seja, é a elipse de vértice sobre o eixo maior  $A_1 = (-3, 0)$  e  $A_2 = (3, 0)$  e vértices sobre o eixo menor  $B_1 = (-2, 0)$  e  $B_2 = (2, 0)$ .

De forma análoga, temos que a interseção do elipsoide (4.3) com o plano  $X - Z$  ( $y = 0$ ) é a elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{9} + z^2 = 1. \quad (4.5)$$

Também, temos associada a elipse de equação reduzida

$$\frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \quad (4.6)$$

que é obtida da interseção do elipsoide (4.3) com o plano  $Y - Z$  ( $x = 0$ ).

### 4.1.2 Hiperboloides

#### Hiperboloides de uma folha

Um hiperboloide de uma folha centrado na origem é uma superfície quádrlica de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.7)$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.8)$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.9)$$

**Exemplo 4.1.2.** Vamos considerar o hiperboloide de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1. \quad (4.10)$$

Sua interseção com o plano  $X - Y$  ( $z = 0$ ) é a elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad (4.11)$$

Sua interseção com o plano  $X - Z$  ( $y=0$ ) é a hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{9} - z^2 = 1. \quad (4.12)$$

E, a interseção do hiperboloide com o plano  $Y - Z$  ( $x = 0$ ) é a hipérbole de equação

$$\frac{y^2}{4} - z^2 = 1. \quad (4.13)$$

A Figura 4.2 é o esboço do gráfico do hiperboloide de equação (4.10).

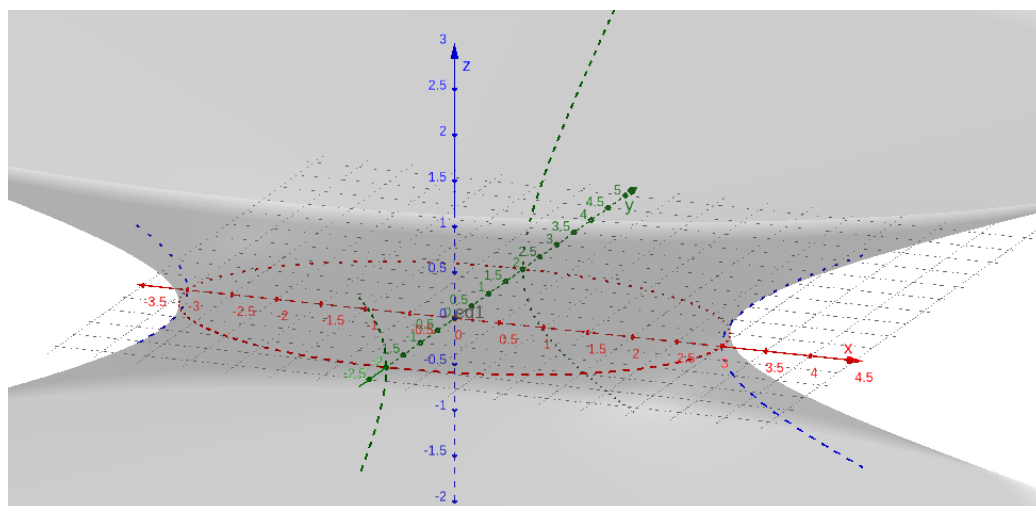


Figura 4.2: Esboço do hiperboloide de equação (4.10).

**Exemplo 4.1.3.** A Figura 4.3 é o esboço do gráfico do hiperboloide de equação

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1. \quad (4.14)$$

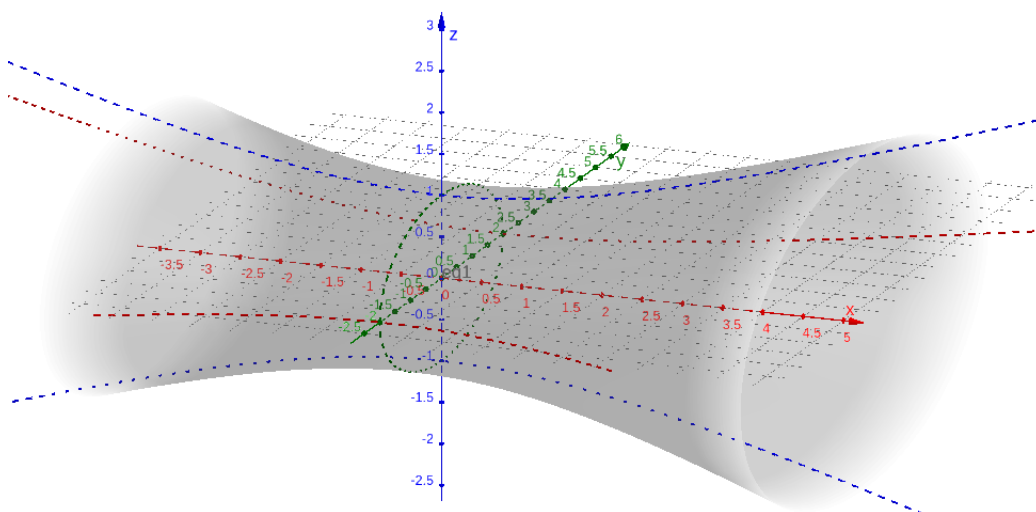


Figura 4.3: Esboço do hiperboloide de equação (4.14).

Sua interseção com o plano  $X - Y$  ( $z = 0$ ) é a hipérbole

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad (4.15)$$

Sua interseção com o plano  $X - Z$  ( $y=0$ ) é a hipérbole de equação reduzida

$$-\frac{x^2}{9} + z^2 = 1. \quad (4.16)$$

E, a interseção do hiperboloide com o plano  $Y - Z$  ( $x = 0$ ) é a elipse de equação

$$\frac{y^2}{4} + z^2 = 1. \quad (4.17)$$

### Hiperboloides de duas folhas

Hiperboloides de duas folhas têm equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.18)$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.19)$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.20)$$

**Exemplo 4.1.4.** Vamos considerar o hiperboloide de equação

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1. \quad (4.21)$$

Sua interseção com o plano  $X - Y$  ( $z = 0$ ) é a hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1. \quad (4.22)$$

Sua interseção com o plano  $X - Z$  ( $y=0$ ) é a hipérbole de equação reduzida

$$\frac{x^2}{9} - z^2 = 1. \quad (4.23)$$

E, a interseção do hiperboloide com o plano  $Y - Z$  ( $x = 0$ ) é vazia, pois não existem  $y$  e  $z$  que satisfazem a equação

$$-\frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad (4.24)$$

A Figura 4.4 é o esboço do gráfico do hiperboloide de equação (4.21).

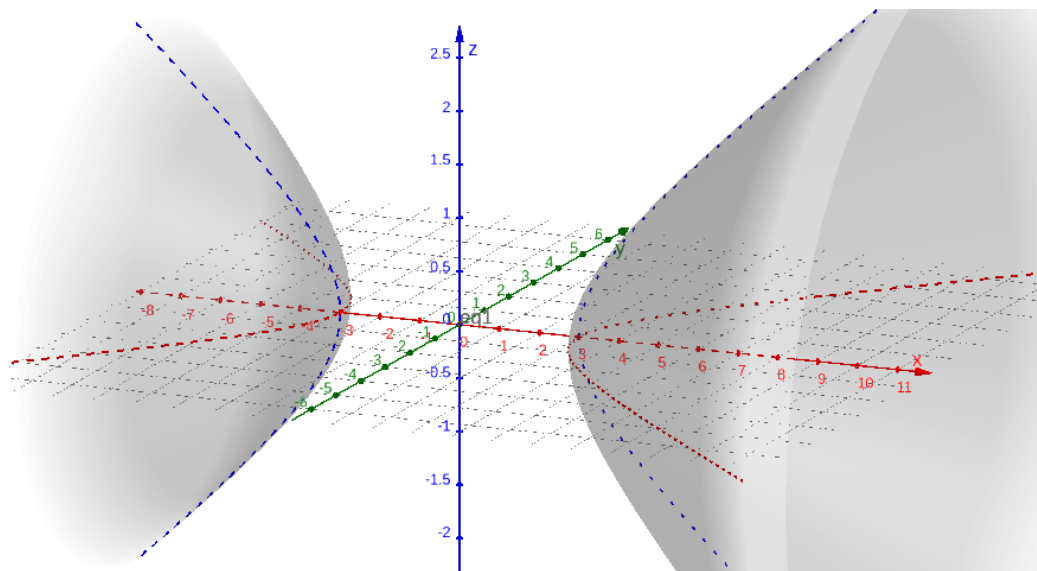


Figura 4.4: Esboço do hiperboloide de equação (4.21).

### 4.1.3 Paraboloide elíptico

Um paraboloides elíptico tem equação

$$\pm z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (4.25)$$

ou

$$\pm y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad (4.26)$$

ou

$$\pm x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad (4.27)$$

**Exemplo 4.1.5.** Vamos considerar o parabolóide elíptico de equação

$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \quad (4.28)$$

Não há valor  $z < 0$  que satisfaça a equação (4.28). Sua interseção com o plano  $X - Y$  ( $z = 0$ ) é o ponto  $(0, 0, 0)$ . Agora, sua interseção com cada plano paralelo ao plano  $X - Y$  e com  $z = z_0 > 0$  é a elipse de equação

$$z_0 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \quad (4.29)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x^2}{9z_0} + \frac{y^2}{4z_0} = 1. \quad (4.30)$$

A Figura 4.5 é o esboço do gráfico do parabolóide elíptico de equação (4.28).

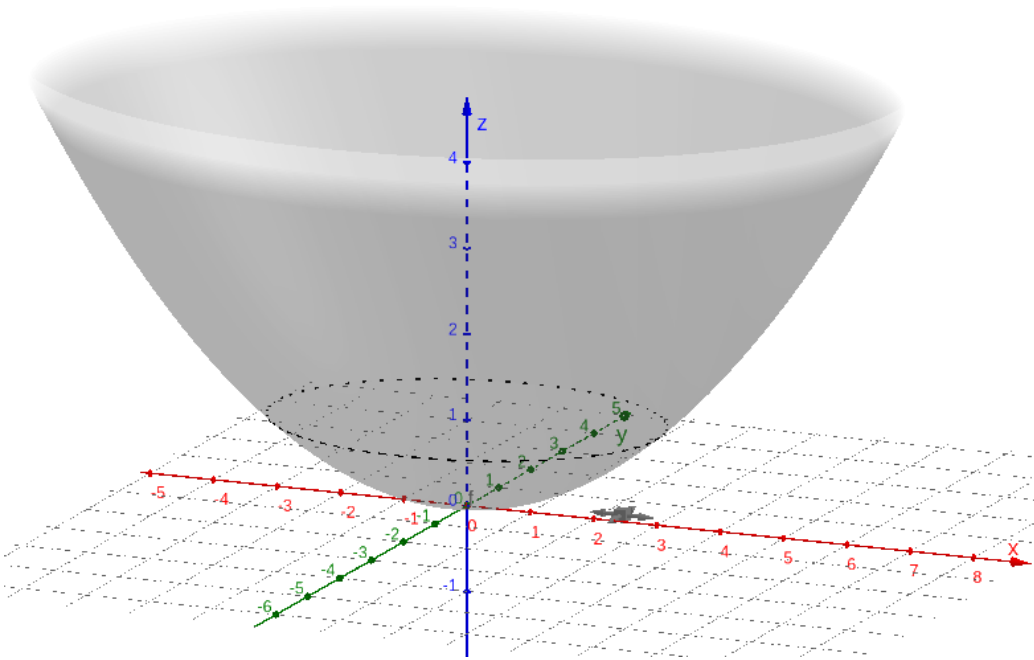


Figura 4.5: Esboço do parabolóide elíptico de equação (4.28).

**Exemplo 4.1.6.** O esboço do gráfico de parabolóide elíptico de equação

$$-x = \frac{y^2}{4} + z^2 \quad (4.31)$$

é dado na Figura 4.6. Verifique!

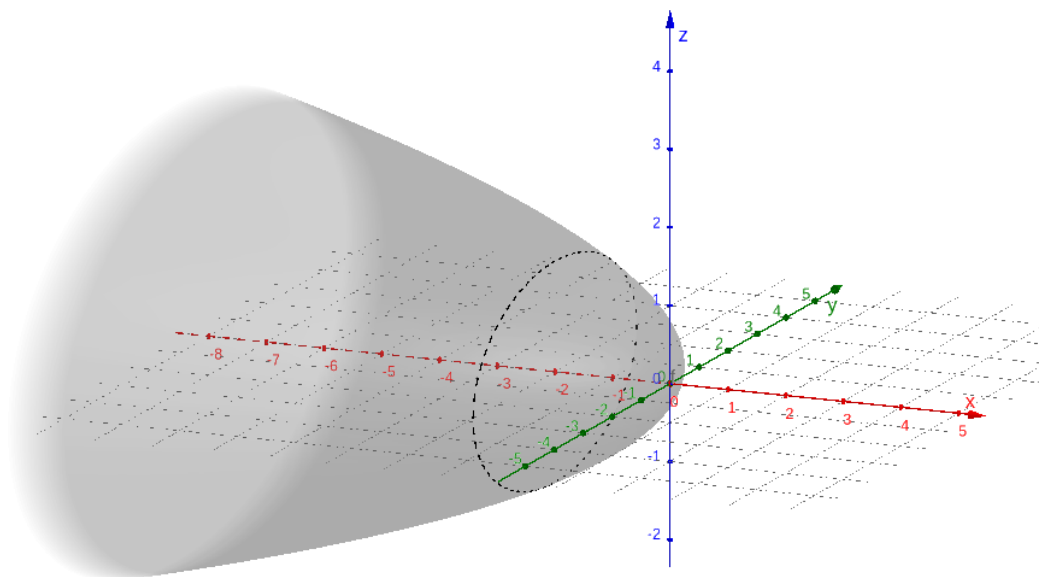


Figura 4.6: Esboço do parabolóide elíptico de equação (4.31).

#### 4.1.4 Parabolóide hiperbólico

Um parabolóide elíptico tem equação

$$\pm z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (4.32)$$

ou

$$\pm y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \quad (4.33)$$

ou

$$\pm x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \quad (4.34)$$

**Exemplo 4.1.7.** Vamos considerar o parabolóide hiperbólico de equação

$$z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}. \quad (4.35)$$



Sua interseção com o plano  $X - Y$  ( $z = 0$ ) são retas que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0. \quad (4.36)$$

De fato, isolando  $y$ , obtemos as equações destas retas

$$y = \pm \frac{2}{3}x. \quad (4.37)$$

Sua interseção com o plano  $X - Z$  ( $y=0$ ) é a parábola de equação

$$z = \frac{x^2}{9}. \quad (4.38)$$

E, a interseção do parabolóide hiperbólico com o plano  $Y - Z$  ( $x = 0$ ) é a parábola de equação

$$z = -\frac{y^2}{4}. \quad (4.39)$$

A Figura 4.7 é o esboço do gráfico do parabolóide hiperbólico de equação (4.35).

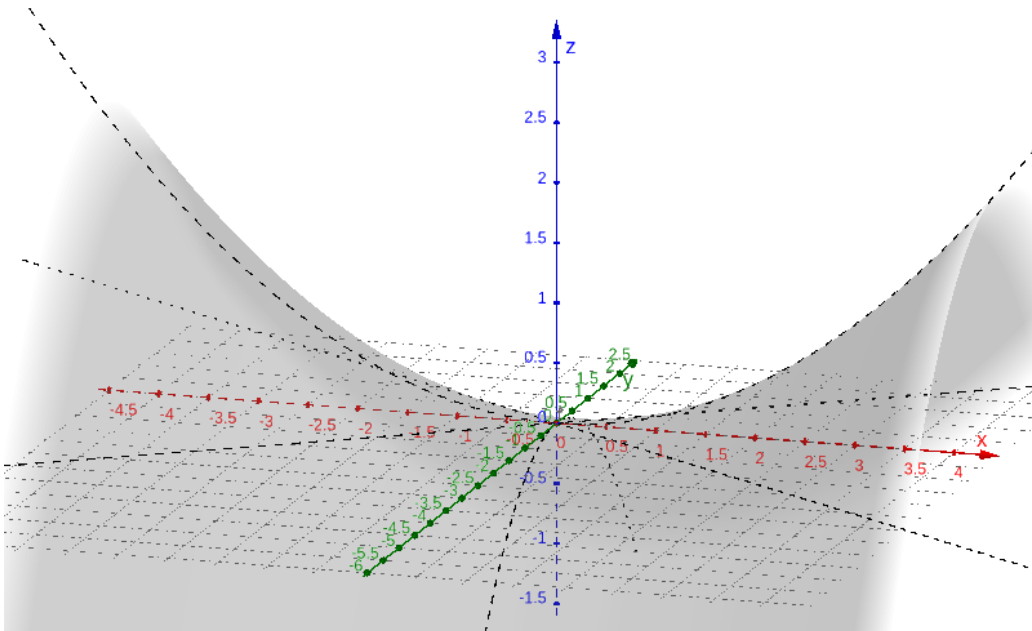


Figura 4.7: Esboço do parabolóide hiperbólico de equação (4.35).

**Exercícios resolvidos**

**ER 4.1.1.** Escreva a equação do elipsoide que tem como interseções

a) com o plano  $z = 0$  a elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (4.40)$$

b) com o plano  $y = 0$  a elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad (4.41)$$

**Solução.** Um elipsoide tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.42)$$

Sua interseção com o plano  $X - Y$  ( $z = 0$ ) é a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.43)$$

Logo, do item a), temos  $a^2 = 4$  e  $b^2 = 16$ .

Agora, a interseção com o plano  $X - Z$  ( $y = 0$ ) é a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.44)$$

Assim, do item b), obtemos  $c^2 = 9$ .

Desta forma, concluímos que o elipsoide de equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1. \quad (4.45)$$

◇

**ER 4.1.2.** Encontre a equação do parabolóide elíptico que contem a circunferência

$$x^2 + z^2 = 1, \quad y = -2. \quad (4.46)$$

**Solução.** Para que o parabolóide contenha a circunferência

$$x^2 + z^2 = 1, \quad y = -2, \quad (4.47)$$

ele precisa abrir-se no sentido negativo na direção  $y$ . Logo, tem equação

$$-y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}. \quad (4.48)$$

Fixado  $y = -2$ , a equação fica restrita a

$$2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}. \quad (4.49)$$

Notamos que para esta equação coincida com a circunferência  $x^2 + z^2 = 1$ , devemos escolher  $a^2 = b^2 = 1/2$ . Logo, concluímos que o parabolóide elíptico tem equação

$$-y = \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{2}}. \quad (4.50)$$

◇

## Exercícios

**E.4.1.1.** Classifique cada uma das seguintes superfícies quádricas:

a)  $\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$

b)  $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

c)  $z = -x^2 - \frac{y^2}{9}$

d)  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

**E.4.1.2.** Forneça a equação do elipsoide que contem os pontos  $P = (0, 2, 0)$ ,  $Q = (-1, 0, 0)$  e  $R = (0, 0, 1)$ .

**E.4.1.3.** Forneça a equação do hiperboloide de duas folhas que tem interseções:

a) com o eixo  $X - Y$  igual a hipérbole

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (4.51)$$

b) com o eixo  $Y - Z$  igual a hipérbole

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \quad (4.52)$$

**E.4.1.4.** Forneça a equação do paraboloides elíptico que contém a elipse

$$\frac{x^2}{2} + z^2 = 1, \quad y = 2. \quad (4.53)$$

**E.4.1.5.** Considere o hiperboloide de uma folha de equação

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1. \quad (4.54)$$

Classifique o lugar geométrico de sua interseção com cada um dos seguintes planos

1.  $X - Y$
2.  $X - Z$
3.  $Y - Z$

# Resposta dos Exercícios

**E.1.1.1.**  $\vec{v} = (1, -2, 4)$

**E.1.1.2.**  $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**E.1.1.3.**  $B = (1, 1, 7)$

**E.1.1.4.**  $x = -5$

**E.1.1.5.**  $|CD| = \sqrt{6}$

**E.1.2.1.** a)  $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$ ,  $\vec{v} = (-2, 1, 1)$ ; b)  $x = 1 - 2\lambda$ ,  $y = -2 + \lambda$ ,  $z = \lambda$ ; c)  $\frac{x-1}{-2} = y + 2 = z$

**E.1.2.2.**  $x = \frac{1}{2}$

**E.1.2.3.**  $A = (1, -1, 1)$ ,  $\vec{v} = (-2, 3, 1)$

**E.1.2.4.**  $x - 1 = \frac{y+1}{-1} = z$

**E.1.2.5.**  $x = 1 - \lambda, y = -1 - 2\lambda, z = -\lambda$

**E.1.3.1.**  $\overrightarrow{AP} = \lambda(2, -1, 1) + \beta(-1, 1, 2), \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$

**E.1.3.2.**  $x = 5$

**E.1.3.3.**  $x = -1 + 2\lambda - \beta, y = -\lambda + \beta, z = 2 + \lambda + 2\beta$

**E.1.3.4.**  $y = 3$

**E.1.3.5.**  $-3x - 5y + z - 5 = 0$

**E.1.3.6.**  $z = 5$

**E.1.3.7.** sim

**E.1.3.8.**  $x = 2 + 6\lambda, y = -1 - 7\lambda, z = -5\lambda$

**E.2.1.1.** a)  $A = (3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ ; b)  $B = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ ; c)  $C = (\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6})$

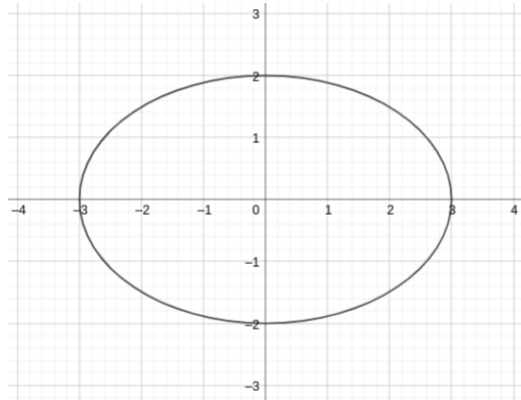
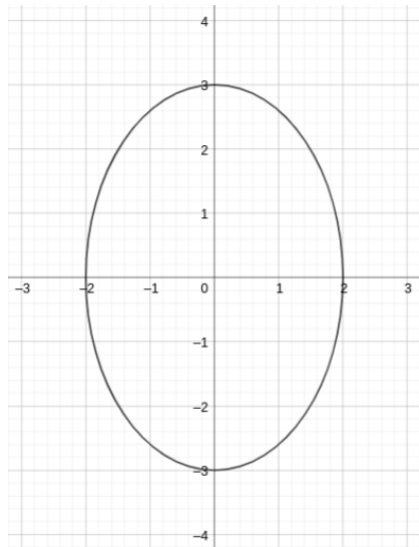
**E.2.1.2.** a)  $A = (\sqrt{3}, 1)$ ; b)  $B = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ; c)  $C = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

**E.2.1.3.**  $\theta = \frac{\pi}{2}$

**E.2.1.4.**  $y = -x$

**E.2.1.5.**  $r = 1$

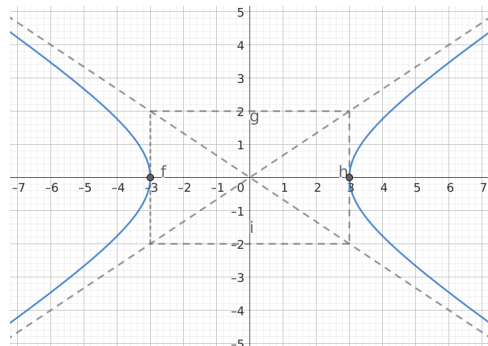
**E.2.1.6.**  $x^2 + y^2 = 2$

**E.3.1.1.****E.3.1.2.****E.3.1.3.** a)  $(-3, 0), (3, 0)$ ; b)  $(0, -4), (0, 4)$ **E.3.1.4.** a)  $(-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0)$ ; b)  $(0, \sqrt{15}), (0, \sqrt{15})$ 

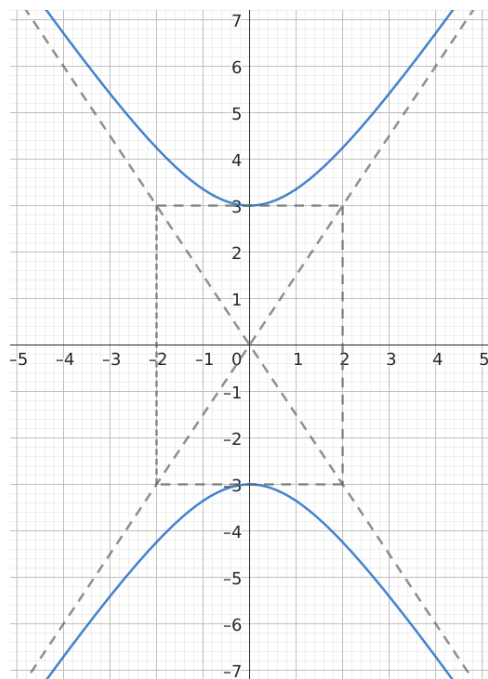
**E.3.1.5.**  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

**E.3.1.6.**  $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$

**E.3.2.1.**



**E.3.2.2.**



**E.3.2.3.** a)  $A_1 = (-3, 0)$ ,  $A_2 = (3, 0)$ ; b)  $B_1 = (0, -1)$ ,  $B_2 = (0, 1)$

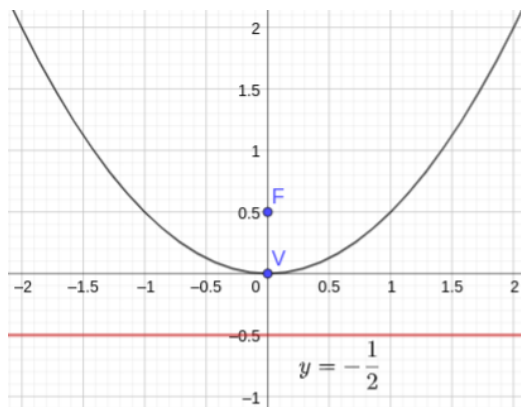


**E.3.2.4.** a)  $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$ ,  $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$ ; b)  $F_1 = (0, -\sqrt{17})$ ,  $F_2 = (0, \sqrt{17})$

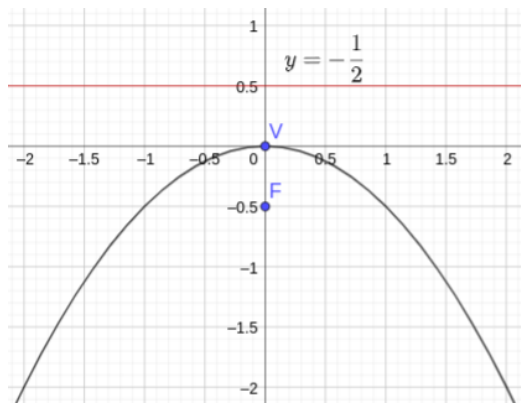
**E.3.2.5.**  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

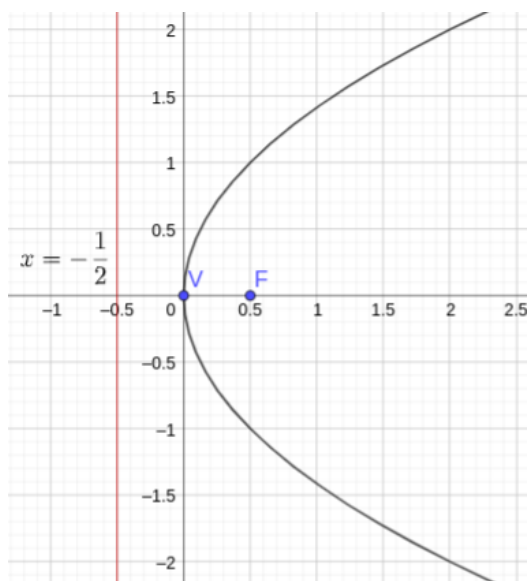
**E.3.2.6.**  $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$

**E.3.3.1.**

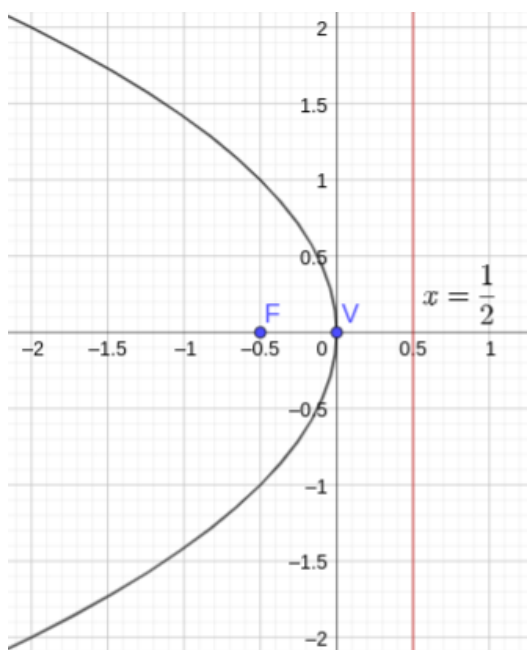


**E.3.3.2.**





E.3.3.3.



E.3.3.4.

E.3.3.5. a)  $F = (0, \frac{1}{8})$ ; b)  $F = (0, -\frac{1}{8})$ ; c)  $F = (-1, 0)$ ; d)  $F = (1, 0)$

**E.4.1.1.** a) hiperboloide de uma folha; b) elipsoide; c) paraboloides elíptico; d) ponto  $(0, 0, 0)$

**E.4.1.2.**  $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

**E.4.1.3.**  $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

**E.4.1.4.**  $y = x^2 + \frac{z^2}{\frac{1}{2}}$

**E.4.1.5.** a) hipérbole; b) elipse; c) hipérbole

## Notas

<sup>1</sup>René Descartes, 1596 - 1650, matemático e filósofo francês. Fonte: [Wikipédia: René Descartes](#).

# Referências

- [1] Mello, D.A.; Watanabe, R.G.. Vetores e uma iniciação à geometria analítica, Livraria da Física, 2. ed., 2011.