Cálculo I

Pedro H A Konzen

14 de dezembro de 2024

Licença

Prefácio

O site notaspedrok.com.br é uma plataforma que construí para o compartilhamento de minhas notas de aula. Essas anotações feitas como preparação de aulas é uma prática comum de professoras/es. Muitas vezes feitas a rabiscos em rascunhos com validade tão curta quanto o momento em que são concebidas, outras vezes, com capricho de um diário guardado a sete chaves. Notas de aula também são feitas por estudantes - são anotações, fotos, prints, entre outras formas de registros de partes dessas mesmas aulas. Essa dispersão de material didático sempre me intrigou e foi o que me motivou a iniciar o site.

Com início em 2018, o site contava com apenas três notas incipientes. De lá para cá, conforme fui expandido e revisando os materais, o site foi ganhando acessos de vários locais do mundo, em especial, de países de língua portugusa. No momento, conta com 13 notas de aula, além de minicursos e uma coleção de vídeos e áudios.

As notas de **Cálculo I** abordam sobre tópicos de cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos python são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Aproveito para agradecer a todas/os que de forma assídua ou esporádica contribuem com correções, sugestões e críticas! ;)

Pedro H A Konzen

`https://www.notaspedrok.com.br`

Conteúdo

Capítulo 1

Derivadas

1.1 Derivada no ponto

Nesta seção, vamos estudar a noção de **derivada de uma função em um ponto**. Começamos pelas noções de **reta secante** e de **reta tangente** ao gráfico de uma função. Em seguida, estudamos as noções de **taxa de variação média** e **taxa de variação instantânea**. Por fim, definimos a derivada de uma função em um ponto.

1.1.1 Reta secante e reta tangente

Definimos a **reta secante** ao gráfico de uma dada função f pelos pontos x_0 e x_1, $x_0 \neq x_1$, como sendo a reta determinada pela equação

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \tag{1.1}$$

Isto é, é a reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Veja a Figura 1.1. Observemos que o coeficiente angular da reta secante é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{1.2}$$

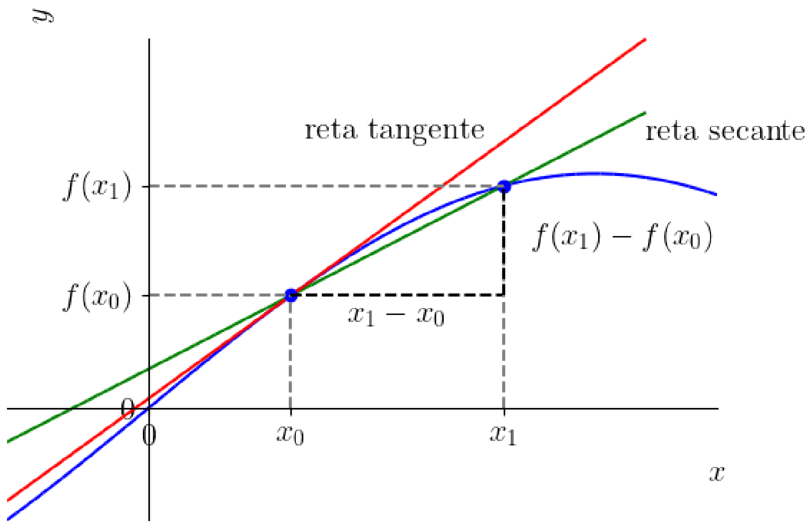

Figura 1.1: Esboços de uma reta secante (verde) e da reta tangente (vermelho) ao gráfico de uma função.

A **reta tangente** ao gráfico de uma função f em $x = x_0$ é a reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e tem coeficiente angular

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{1.3}$$

Isto é, a reta de equação

$$y = m_{\text{tg}}(x - x_0) + f(x_0). \tag{1.4}$$

Menos formal, é a reta limite das retas secantes ao gráfico da função pelos pontos x_0 e x_1, quando $x_1 \to x_0$. Veja a Figura 1.1.

Observação 1.1.1. Fazendo a mudança de variável $h = x_1 - x_0$, temos que (1.3) é equivalente a

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.5}$$

De fato, da mudança de variável, temos que $x_1 = x_0 + h$ e quando $x_1 \to x_0$, temos que $h = x_1 - x_0 \to 0$. Ou seja,

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{1.6}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{1.7}$$

Exemplo 1.1.1. Seja $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. O coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \tag{1.8}$$

$$= \frac{f(2)-f(1)}{2-1} \tag{1.9}$$

$$= \frac{4-1}{1} = 3. \tag{1.10}$$

Logo, a reta secante ao gráfico de f pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ tem equação

$$y = m_{\text{sec}}(x-x_0) + f(x_0) \tag{1.11}$$

$$y = 3(x-1) + f(1) \tag{1.12}$$

$$y = 3x - 2. \tag{1.13}$$

Na Figura 1.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta secante (verde).

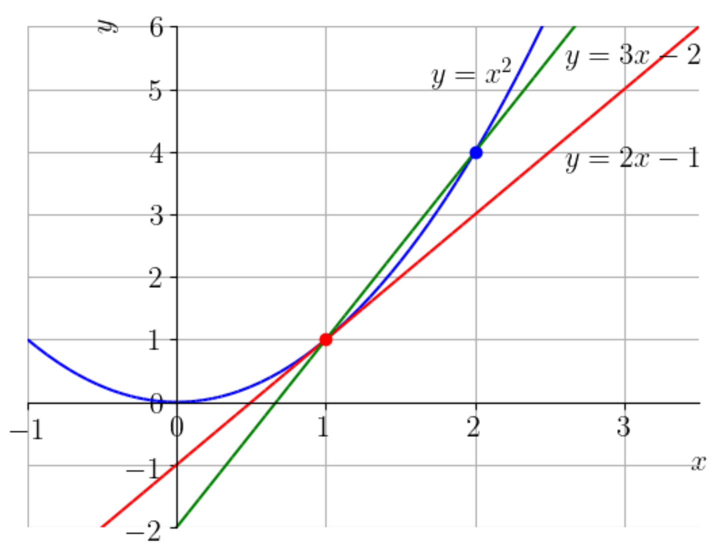

Figura 1.2: Esboços dos gráficos de $f(x) = x^2$ (azul), da reta secante pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ (verde) e da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$ (vermelho).

Agora, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 é

$$\begin{align} m_{\text{tg}} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{1.14}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} \tag{1.15}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} \tag{1.16}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2+h}{1} = 2. \tag{1.17}\end{align}$$

Assim sendo, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$ tem coeficiente angular $m_{\text{tg}} = 2$ e equação

$$y = 2(x-1)+1 = 2x-1. \tag{1.18}$$

Na Figura 1.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta tangente (vermelho).

Com o Python+SymPy, podemos obter a expressão da reta secante com os seguintes comandos:

Código 1.1: Python

```
In : from sympy import *
...: x,y = symbols('x,y')
...: x0 =  1
...: x1 = 2
...: f = lambda x: x**2
...: msec = (f(x1)-f(x0))/(x1-x0)
...: Eq(y, msec*(x-x0)+f(x0))
Out: Eq(y, 3.0*x - 2.0)
```

A expressão da reta tangente pode ser obtida com os seguintes comandos:

Código 1.2: Python

```
In : from sympy import *
...: x,y = symbols('x,y')
...: h = Symbol('h')
...: x0 = 1
```

```
   ...: f = lambda x: x**2
   ...: mtg = limit((f(x0+h)-f(x0))/h, h, 0)
   ...: Eq(y, mtg*(x-x0)+f(x0))
   ...:
   Out: Eq(y, 2*x - 1)

```

1.1.2 Taxa de variação

A **taxa de variação média** de uma função f quando x varia de x_0 a x_1 é definida como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{1.19}$$

Desta deriva-se a **taxa de variação instantânea** de f no ponto x_0, a qual é definida como

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.20}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.21}$$

Em muitas áreas do conhecimento, estas taxa recebem nomes específicos.

Exemplo 1.1.2. Seja $s = s(t)$ a função distância percorrida por um objeto no tempo. A **velocidade média** (taxa de variação média da distância) do tempo t_0 ao tempo t_1 é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \tag{1.22}$$

Por exemplo, se $s(t) = 15t^2 + t$ (km), então a velocidade média do objeto entre $t_0 = 1\text{h}$ e $t_1 = 3\text{h}$ é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(15t_1^2 + t_1) - (15t_0^2 + t_0)}{t_1 - t_0} \tag{1.23}$$

$$= \frac{15\cdot 3^2 + 3 - (15\cdot 1^2 + 1)}{3 - 1} \tag{1.24}$$

$$= \frac{135 + 3 - 15 - 1}{2} \tag{1.25}$$

$$= 61\,\frac{\text{km}}{\text{h}}. \tag{1.26}$$

A **velocidade** (taxa de variação instantânea da distância) no tempo $t_0 = 1$ é

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} \tag{1.27}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{15(t_0+h)^2 + (t_0+h) - (15t_0^2+t_0)}{h} \tag{1.28}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{15t_0^2 + 30t_0h + 15h^2 + t_0 + h - 15t_0^2 - t_0}{h} \tag{1.29}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{30t_0h + 15h^2 + h}{h} \tag{1.30}$$

$$= \lim_{h\to 0} 30t_0 + 15h + 1 \tag{1.31}$$

$$= 30t_0 + 1 = 31\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}. \tag{1.32}$$

Exemplo 1.1.3. Seja $c(x) = \sqrt{x}$ (milhões de reais) o custo da produção em uma empresa em função do número de unidades produzidas (milhares). O **custo médio da produção** de $x_0 = 4$ a $x_1 = 9$ é

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x_1)-c(x_0)}{x_1-x_0} \tag{1.33}$$

$$= \frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}}{x_1-x_0} \tag{1.34}$$

$$= \frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{9-4} \tag{1.35}$$

$$= \frac{3-2}{5} \tag{1.36}$$

$$= 0,2\ \frac{\text{R\$}}{\mathrm{un}}. \tag{1.37}$$

O **custo marginal** (taxa de variação instantânea do custo) quando a empresa está produzindo $x_0 = 4$ milhões de unidades é

$$\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0=4} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \tag{1.38}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} \tag{1.39}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} \tag{1.40}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \cancelto{0}{h}} + \sqrt{x_0}} \tag{1.41}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0} \tag{1.42}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4} = 0,25\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \tag{1.43}$$

Observação 1.1.2. Analogamente a custo marginal, temos as noções de rendimento marginal e lucro marginal.

1.1.3 Derivada em um ponto

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A **derivada** de uma função f **em um ponto** $x = x_0$ é denotada por $f'(x_0)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ e é definida por

$$f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.44}$$

Exemplo 1.1.4. Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = k$, k constante.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{1.45}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0. \tag{1.46}$$

b) $f(x) = x$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{1.47}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1. \tag{1.48}$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \tag{1.49}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} \tag{1.50}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}. \tag{1.51}$$

Exemplo 1.1.5. Assuma que o rendimento de uma empresa é modelado por $r(x) = x^2$ (milhões de reais), onde x é o número em milhões de unidades vendidas. O **rendimento marginal** quando $x = x_0 = 1$ é

$$r'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \tag{1.52}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \tag{1.53}$$

$$= \lim_{x\to x_0} 2x_0h + h = 2x_0 = 2\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}} \tag{1.54}$$

1.1.4 Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 4$. Faça, então, os esboços dos gráficos de f e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $x_0 = 4$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{1.55}$$

A derivada de f no ponto x_0 é

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{1.56}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \tag{1.57}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \tag{1.58}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} \tag{1.59}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}. \tag{1.60}$$

Portanto, a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + \sqrt{4} \tag{1.61}$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1. \tag{1.62}$$

Veja a Figura 1.3 para os esboços dos gráfico de f e da reta tangente.

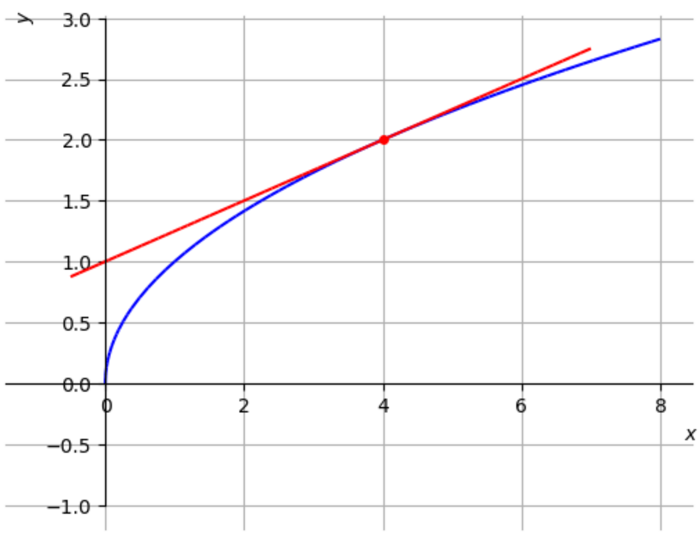

Figura 1.3: Esboços do gráfico da função f e da reta tangente no ponto $x_0 = 4$.

◊

ER 1.1.2. Considere que a produção em uma empresa tem custo

$$c(x) = \sqrt{x} \tag{1.63}$$

e rendimento

$$r(x) = x^2, \tag{1.64}$$

onde x é o número de unidades (em milhões) produzidas. Calcule o lucro marginal da empresa quando $x = 1$ mi.

Solução. O lucro é

$$l(x) = r(x) - c(x). \tag{1.65}$$

Desta forma, o lucro marginal no ponto $x_0 = 1$ é

$$\begin{align}
l'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{l(x_0+h) - l(x_0)}{h} \tag{1.66}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h) - c(x_0+h) - (r(x_0) - c(x_0))}{h} \tag{1.67}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h) - r(x_0) - (c(x_0+h) - c(x_0))}{h} \tag{1.68}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h) - r(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{c(x_0+h) - c(x_0)}{h} \tag{1.69}\\
&= r'(x_0) - c'(x_0) \tag{1.70}\\
&= 2x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \tag{1.71}\\
&= 2 - \frac{1}{2} = 1,5\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \tag{1.72}
\end{align}$$

◊

1.1.5 Exercícios

E.1.1.1. Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = 2$, $f'(-1)$;

b) $g(x) = 10^6$, $g'(10^8)$;

c) $h(x) = \ln 2e$, $h'(-\pi)$;

E.1.1.2. Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = 2 + x$, $f'(-1)$;

b) $g(x) = 10^6 - 2x$, $g'(-3)$;

c) $h(x) = \ln(2e) + ex$, $h'(10^6)$;

E.1.1.3. Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = x$, $f'(-1)$;

b) $g(x) = -2x$, $g'(-3)$;

c) $h(x) = ex$, $h'(10^6)$;

E.1.1.4. Determine a reta secante ao gráfico de $f(x) = 5 - x^2$ pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Então, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$. Por fim, faça os esboços dos gráficos de f, da reta secante e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

E.1.1.5. Assumindo que, em uma empresa, a produção tenha o custo $c(x) = 2\sqrt{x}$ e rendimento $r(x) = \frac{1}{100}x^3$, dados em milhões de reais com x em milhares de unidades. Calcule:

a) o custo marginal quando $x = 1$;

b) o rendimento marginal quando $x = 1$;

c) o lucro marginal quando $x = 1$.

Respostas

E.1.1.1. a) 0; b) 0; c) 0

E.1.1.2. a) -1; b) -2; c) e

E.1.1.3. a) -1; b) -2; c) e

E.1.1.4. reta secante: $y = -3x + 7$; reta tangente: $y = -2x + 6$; dica:

verifique seus esboços plotando os gráficos no computador

E.1.1.5. a) $1000\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; b) $30\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; c) $-970\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$.

1.2 Função derivada

A **derivada** de uma função f em relação à variável x é a função $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{1.73}$$

quando este limite existe. Dizemos que f é **derivável** (ou **diferenciável**) em um ponto x de seu domínio, quando o limite dado em (1.73) existe. Se isso ocorre para todo número real x, dizemos que f é derivável em toda parte.

Exemplo 1.2.1. A derivada de $f(x) = x^2$ é

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &(1.74)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &(1.75)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} &(1.76)\\
&= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x. &(1.77)
\end{aligned}$$

Observamos que este é o caso de uma função derivável em toda parte.A Figura 1.4.

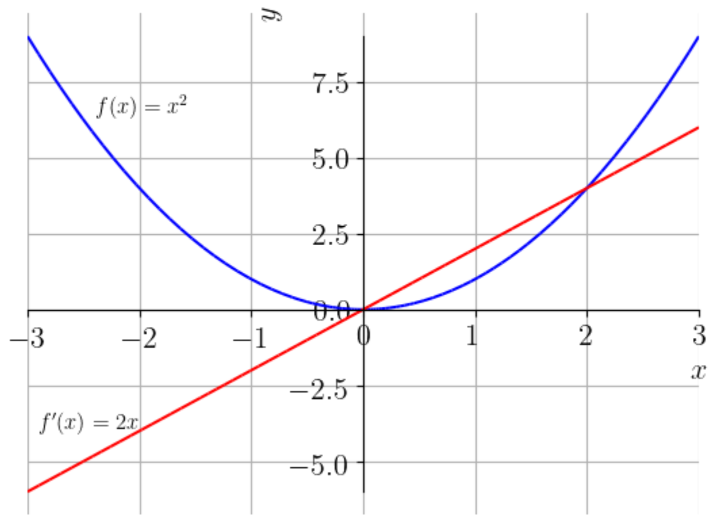

Figura 1.4: Esboços dos gráficos da função $f(x) = x^2$ e de sua derivada $f'(x) = 2x$.

Com o SymPy, podemos usar os seguintes comandos para verificarmos este resultado:

Código 1.3: Python

```
from sympy import *
x,h = symbols('x,h')
f = lambda x: x**2
limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)

```

Mais adequadamente, podemos usar o comando:

Código 1.4: Python

```
diff(x**2,x)

```

ou, equivalentemente,

Código 1.5: Python

```
diff(x**2)

```

para computar a derivada de x^2 em relação a x.

Observação 1.2.1. A derivada à direita (à esquerda) de uma função f em um ponto x é definida por

$$f'_{\pm}(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x^{\pm}} = \lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1.78}$$

Desta forma, no caso de pontos extremos do domínio de uma função, empregamos a derivada lateral correspondente.

Exemplo 1.2.2. Vamos calcular a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$. Para $x = 0$, só faz sentido calcular a derivada lateral à direta:

$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \tag{1.79}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \tag{1.80}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} \overset{}{=} +\infty. \tag{1.81}$$

Ou seja, $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$. Agora, para $x > 0$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \tag{1.82}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \tag{1.83}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \tag{1.84}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{1.85}$$

Na Figura 1.5, temos os esboços dos gráficos desta função e de sua derivada.

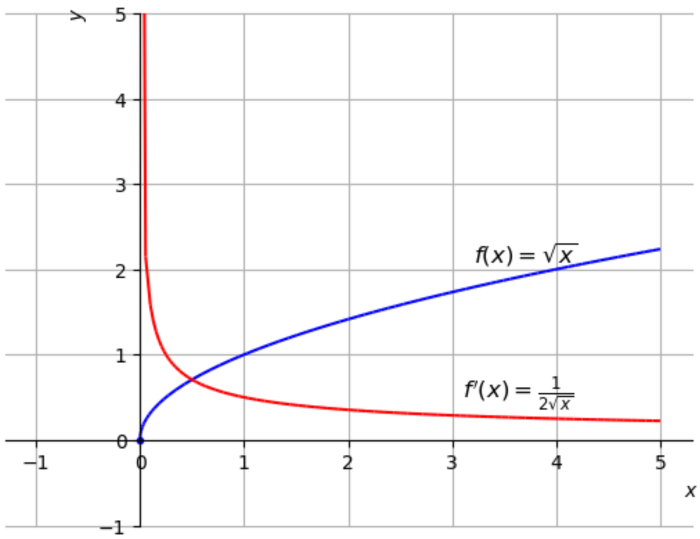

Figura 1.5: Esboços dos gráficos da função $f(x) = \sqrt{x}$ e de sua derivada.

No SymPy, a computação de $f'_+(0)$ pode ser feita com os comandos[1]:

Código 1.6: Python

```
from sympy import *
h = Symbol('h')
limit((sqrt(0+h)-sqrt(0))/h,h,0)
```

E, a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ (nos pontos de diferenciabilidade) pode ser obtida com o comando:

Código 1.7: Python

```
diff(sqrt(x),x)
```

Exemplo 1.2.3. A função valor absoluto é derivável para todo $x \neq 0$ e não é derivável em $x = 0$. De fato, para $x < 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \tag{1.86}$$

[1]Por padrão no SymPy, o limite é tomado à direita.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)+x}{h} \tag{1.87}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{1.88}$$

Analogamente, para $x > 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \tag{1.89}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \tag{1.90}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{1.91}$$

Agora, para $x = 0$, devemos verificar as derivadas laterais:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1, \tag{1.92}$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \tag{1.93}$$

Como as derivadas laterais são diferentes, temos que $y = |x|$ não é derivável em $x = 0$. Na figura 1.6, temos os esboços dos gráficos de $f(x) = |x|$ e sua derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0, \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \tag{1.94}$$

Esta é chamada de **função sinal** e denotada por $\text{sign}(x)$. Ou seja, a função sinal é a derivada da função valor absoluto.

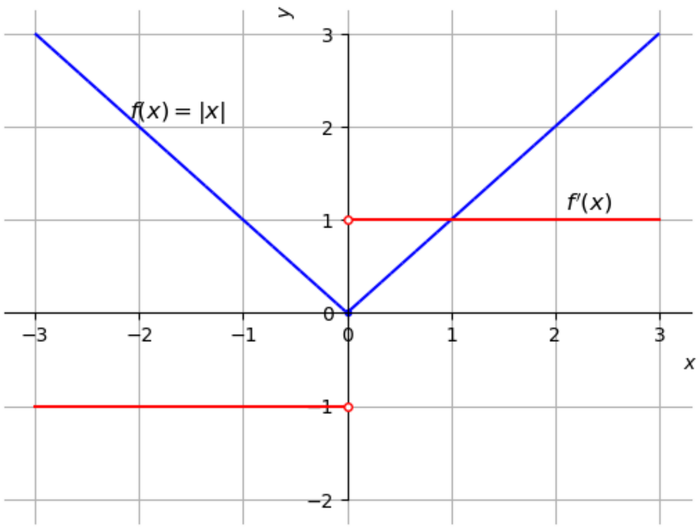

Figura 1.6: Esboços dos gráficos da função $f(x) = |x|$ e de sua derivada.

No SymPy, podemos computar a derivada da função valor absoluto com o comando:

Código 1.8: Python

```
In : from sympy import *
...: x = symbols('x', real=True)
...: diff(abs(x))
Out: sign(x)
```

1.2.1 Continuidade de uma função derivável

Uma função $y = f(x)$ **derivável** em $x = x_0$ é **contínua** neste ponto. De fato, lembramos que f é contínua em $x = x_0$ quando x_0 é um ponto de seu domínio e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.95}$$

Isto é equivalente a

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \tag{1.96}$$

ou, ainda,

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]=0. \tag{1.97}$$

Vamos mostrar que este é o caso quando f é derivável em $x = x_0$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right] &= \lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]\cdot\frac{h}{h} && (1.98)\\
&= \lim_{h\to 0}\overbrace{\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]}^{f'(x_0)}\cdot h && (1.99)\\
&= \lim_{h\to 0} f'(x_0)\cdot h && (1.100)\\
&= 0. && (1.101)
\end{aligned}$$

Ou seja, de fato, se f é derivável em $x = x_0$, então f é contínua em $x = x_0$.

Observação 1.2.2. A recíproca não é verdadeira, uma função f ser contínua em um ponto $x = x_0$ não garante que ela seja derivável em $x = x_0$. No Exemplo 1.2.3, vimos que a função valor absoluto $f(x) = |x|$ não derivável em $x = 0$, enquanto esta função é contínua (veja, também, o Exemplo **??**).

1.2.2 Derivadas de ordens mais altas

A derivada de uma função $y = f(x)$ em relação a x é a função $y = f'(x)$. Quando esta é diferenciável, podemos calcular a derivada da derivada. Esta é conhecida como a **segunda derivada** de f, denotamos

$$f''(x) := (f'(x))' \text{ ou } \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right). \tag{1.102}$$

Exemplo 1.2.4. Seja $f(x) = x^3$. Então, a primeira derivada de f é

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} && (1.103)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} && (1.104)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} && (1.105)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + \cancelto{0}{3xh} + \cancelto{0}{h^2} = 3x^2. \tag{1.106}$$

De posse da primeira derivada $f'(x) = 3x^2$, podemos calcular a segunda derivada de f, como segue:

$$\begin{align}
f''(x) &= [f'(x)]' \tag{1.107}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \tag{1.108}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \tag{1.109}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + h^2 - 3x^2}{h} \tag{1.110}\\
&= \lim_{h\to 0} 6x + \cancelto{0}{h} = 6x, \tag{1.111}
\end{align}$$

i.e. $f''(x) = 6x$.

No SymPy, podemos computar a segunda derivada da função com o comando:

Código 1.9: Python

```
    In : from sympy import *
    ...: x = symbols('x')
    ...: diff(x**3,x,2)
    Out: 6*x

```

Generalizando, quando existe, a n-ésima derivada de uma função $y = f(x)$, $n \geq 1$, é recursivamente definida (e denotada) por

$$f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}]' \text{ ou } \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} f(x)\right], \tag{1.112}$$

com $f^{(3)} \equiv f'''$, $f^{(2)} \equiv f''$, $f^{(1)} \equiv f'$ e $f^{(0)} \equiv f$.

Exemplo 1.2.5. A terceira derivada de $f(x) = x^3$ em relação a x é $f'''(x) = [f''(x)]'$. No exemplo anterior (Exemplo 1.2.4), calculamos $f''(x) = 6x$. Logo,

$$f'''(x) = [6x]' \tag{1.113}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h)-6x}{h} \tag{1.114}$$
$$= \lim_{h\to 0} 6 = 6. \tag{1.115}$$

A quarta derivada de $f(x) = x^3$ em relação a x é $f^{(4)}(x) \equiv 0$, bem como $f^{(5)}(x) \equiv 0$. Verifique!

No SymPy, podemos computar a terceira derivada da função com o comando:

Código 1.10: Python

```
In : from sympy import *
...: x = symbols('x')
...: diff(x**3,x,3)
Out: 6
```

1.2.3 Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Calcule a derivada da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ em relação a x.

Solução. Por definição da derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1.116}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 - (x^2+2x+1)}{h} \tag{1.117}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1 - x^2 - 2x - 1}{h} \tag{1.118}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} \tag{1.119}$$
$$= \lim_{h\to 0} 2x + h + 2 = 2x + 2. \tag{1.120}$$

◊

ER 1.2.2. Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = |x - 1|$.

Solução. O gráfico da função $f(x) = |x-1|$ tem um bico no ponto $x = 1$

(verifique!). Para valores de $x < 1$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.121}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|\overbrace{x+h-1}^{<0}| - |\overbrace{x-1}^{<0}|}{h} \tag{1.122}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+1+x-1}{h} \tag{1.123}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1. \tag{1.124}$$

Para valores de $x > 1$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.125}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|\overbrace{x+h-1}^{>0}| - |\overbrace{x-1}^{>0}|}{h} \tag{1.126}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-1-x+1}{h} \tag{1.127}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{1.128}$$

Ou seja, temos que $f(x) = |x-1|$ é diferenciável para $x \neq 1$. Agora, para $x = 1$, temos

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \tag{1.129}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{|\overbrace{h}^{<0}| - |1-1|}{h} \tag{1.130}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \tag{1.131}$$

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \tag{1.132}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{|\overbrace{h}^{>0}| - |1-1|}{h} \tag{1.133}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \tag{1.134}$$

$$(1.135)$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, temos que $\nexists f'(1)$. Concluímos que $f(x) = |x-1|$ é diferenciável nos pontos $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

◊

ER 1.2.3. Calcule a segunda derivada em relação a x da função

$$f(x) = x - x^2. \tag{1.136}$$

Solução. Começamos calculando a primeira derivada da função:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &(1.137)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} &(1.138)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x^2 - 2xh - h^2 - x + x^2}{h} &(1.139)\\
&= \lim_{h\to 0} 1 - 2x - \cancelto{0}{h} = 1 - 2x. &(1.140)
\end{aligned}$$

Então, calculamos a segunda derivada como segue

$$\begin{aligned}
f''(x) &= [f'(x)]' &(1.141)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} &(1.142)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2(x+h) - (1 - 2x)}{h} &(1.143)\\
&= \lim_{h\to 0} -2 = -2. &(1.144)
\end{aligned}$$

◊

1.2.4 Exercícios

E.1.2.1. Calcule a derivada em relação a x de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2$

b) $g(x) = -3$

c) $h(x) = \sqrt{e}$

E.1.2.2. Calcule a derivada em relação a x de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = -3x$

c) $h(x) = \sqrt{e}x$

E.1.2.3. Calcule a derivada em relação a x da função

$$f(x) = x^2 - 2x + 1. \tag{1.145}$$

E.1.2.4. Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = \sqrt{x-1}$.

E.1.2.5. Considerando

$$f(x) = x^2 - x^3, \tag{1.146}$$

calcule:

a) $f'(x)$

b) $f''(x)$

c) $f'''(x)$

d) $f^{(4)}$

e) $f^{(1001)}(x)$

Respostas

E.1.2.1. a) 0; b) 0; c) 0

E.1.2.2. a) 2; b) -3; c) $\sqrt{e}$

E.1.2.3. $f'(x) = 2x - 2$

E.1.2.4. $(1, \infty)$

E.1.2.5. a) $2x - 3x^2$; b) $2 - 6x$; c) -6; d) 0; e) 0

1.3 Derivada de Funções Constante, Identidade e Potência

Nesta seção, vamos estudar as derivadas de função constante, de função identidade e de função potência.

1.3.1 Derivada de Função Constante

A derivada de função constante $f(x) \equiv k$, com k constante, é

$$(k)' = 0 \tag{1.147}$$

De fato, da definição de derivada temos

$$\begin{align}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.148}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{k - k}{h} \tag{1.149}\\
&= \lim_{h\to 0} 0 = 0. \tag{1.150}
\end{align}$$

Exemplo 1.3.1. Estudemos os seguintes casos:

a) $(2)' = 0$

b) $(-3)' = 0$

c) $(\pi)' = 0$

d) $(a)' = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

Com Python+SymPy, podemos computar essas derivadas com os seguintes comandos:

Código 1.11: Python

```
    In : from sympy import *
    In : diff(2)
    Out: 0

    In : diff(-3)
    Out: 0

    In : diff(pi)
    Out: 0

    In : x = Symbol('x')
    In : a = Symbol('a', const=True)
    In : diff(a, x)
    Out: 0

```

1.3.2 Derivada de Função Identidade

A derivada da função identidade $f(x) = x$ é

$$(x)' = 1 \tag{1.151}$$

De fato, da definição de derivada temos

$$\begin{align}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.152}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} \tag{1.153}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{1.154}\\
& \tag{1.155}
\end{align}$$

Exemplo 1.3.2. Usando Python+sympy, podemos computar a derivada da função identidade com as seguintes instruções:

Código 1.12: Python

```
In : from sympy import *
In : x = Symbol('x')
In : diff(x)
Out: 1
```

1.3.3 Derivada de Função Potência

A derivada da função potência $f(x) = x^n$, n número inteiro positivo, é

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{1.156}$$

De fato, da definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.157}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \tag{1.158}$$

Usando binômio de Newton[2], temos

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k, \tag{1.159}$$

onde os coeficientes binomiais são

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.160}$$

Assim, segue que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \tag{1.161}$$
$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \tag{1.162}$$
$$= nx^{n-1}. \tag{1.163}$$

[2]Isaac Newton, 1643 - 1727, matemático inglês. Fonte: Wikipédia.

Exemplo 1.3.3. Estudemos os seguintes casos:

a) $(x^2)' = 2x^{1-1} = 2x$

b) $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$

c) $(x^{2001})' = 2001x^{2000}$

d) $(x^m)' = mx^{m-1}$ para qualquer m inteiro positivo.

Com Python+SymPy, podemos computar essas derivadas com os seguintes comandos:

Código 1.13: Python

```
In : from sympy import *
In : x = Symbol('x')
In : diff(x**2)
Out: 2*x

In : diff(x**5)
Out: 5*x**4

In : diff(x**2001)
Out: 2001*x**2000

In : m = Symbol('m', integer=True, positive=True)
In : simplify(diff(x**m, x))
Out: m*x**(m - 1)

```

Observação 1.3.1. Ao longo das notas de Cálculo, vamos estudar que a fórmula de derivação

$$(x^r)' = rx^{r-1} \tag{1.164}$$

vale para qualquer r número real não nulo, considerando-se o domínio natural das funções potência. Assim sendo, vamos assumir passar a aplicá-la para qualquer função potência a partir de agora.

Exemplo 1.3.4. Estudemos os seguintes casos:

a) $\left(x^{-1}\right)' = -1x^{-1-1} = -x^{-2}$

b) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

c) $(x^e)' = ex^{e-1}$

Com Python+SymPy, podemos computar essas derivadas com os seguintes comandos:

Código 1.14: Python

```
In : from sympy import *
In : x = Symbol('x')
In : diff(x**(-1))
Out: -1/x**2

In : diff(x**(S(1)/2))
Out: 1/(2*sqrt(x))

In : diff(x**E)
Out: E*x**E/x

```

1.3.4 Lista de derivadas

$$(k)' = 0 \tag{1.165}$$
$$(x)' = 1 \tag{1.166}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{1.167}$$

1.3.5 Exercícios Resolvidos

ER 1.3.1. Calcule o ângulo de declividade da reta tangente ao gráfico de cada uma das seguintes funções em qualquer ponto fixado $x = x_0$.

a) Função constante $f(x) \equiv k$

b) Função identidade $f(x) = x$

Solução. O ângulo θ de declividade da reta tangente ao gráfico de uma dada função f em um ponto $x = x_0$ é

$$\theta = \operatorname{arctg}(f'(x_0)). \tag{1.168}$$

a) Função constante $f(x) \equiv k$

Nesse caso, $f'(x) = 0$ para todo x, logo

$$\begin{align} \theta &= \operatorname{arctg}(0) \tag{1.169}\\ &= 0. \tag{1.170}\end{align}$$

b) Função identidade $f(x) = x$

Nesse caso, $f'(x) = 1$ para todo x, logo

$$\begin{align} \theta &= \operatorname{arctg}(1) \tag{1.171}\\ &= \frac{\pi}{4} \tag{1.172}\end{align}$$

◊

ER 1.3.2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $x = 1$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $x = x_0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{1.173}$$

Nesse caso,

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \tag{1.174}$$

Temos $f(1) = (1)^2 = 1$. Agora, pela derivada de função potência, temos

$$f'(x) = (x^2)' = 2x \tag{1.175}$$

Logo,

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \tag{1.176}$$

Concluímos que equação da reta tangente é

$$\begin{align} y &= 2(x - 1) + 1 \tag{1.177}\\ y &= 2x - 1. \tag{1.178}\end{align}$$

◊

1.3.6 Exercícios

E.1.3.1. Calcule as seguintes derivadas:

a) $(7)'$

b) $(-1,7)'$

c) $\left(\sqrt{2}\right)'$

d) $(\sec(\pi))'$

E.1.3.2. Calcule as seguintes derivadas:

a) $(x)'$

b) $(x^3)'$

c) $(\sqrt{x})'$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)'$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'$

f) $(x^\pi)'$

E.1.3.3. Calcule as seguintes derivadas de ordem mais alta:

a) $(2)''$

b) $(2^{1001})'''$

c) $[(-3)^4]^{(4)}$

E.1.3.4. Calcule o coeficiente angular da reta tangente $y = mx + b$ ao gráfico da função $f(x) = x^3$ no ponto $x = 0$. Faça o esboço do gráfico desta função.

E.1.3.5. Calcule o ponto de interseção das retas tangentes ao gráfico da função $f(x) = x^2$ nos pontos $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$. Faça, em um mesmo esboço, os gráficos de f e das retas tangentes calculadas.

Respostas

E.1.3.1. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0

E.1.3.2. a) 1; b) $3x^2$; c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; d) $-\dfrac{1}{x^2}$; e) $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$; f) $\pi x^{\pi-1}$

E.1.3.3. a) 0; b) 0; c) 0

E.1.3.4. 0

E.1.3.5. $(0, -1)$

1.4 Derivada de Funções Exponenciais e Logarítmicas

Nesta seção vamos estudar a derivada de funções exponenciais e logarítmicas. Começamos com a definição no número de Euler[3] por limites.

1.4.1 Número de Euler

O número de Euler $e \approx 2,7183...$ pode ser definido pelo seguinte limite

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \tag{1.179}$$

Exemplo 1.4.1. Consideremos os seguintes limites.

[3] Leonhard Paul Euler, 1707 - 1783, matemático suíço. Fonte: Wikipédia.

a) $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{2}{h}}$

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{2}{h}} = \lim_{h\to 0}\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^2 \tag{1.180}$$

$$= \left[\lim_{h\to 0}\cancelto{e}{(1+h)^{\frac{1}{h}}}\right]^2 \tag{1.181}$$

$$= e^2 \tag{1.182}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os seguintes comandos:

Código 1.15: Python

```
In : from sympy import *
...: h = Symbol('h')
...: limit((1+h)**(2/h), h, 0)
Out: exp(2)
```

b) $\lim\limits_{h\to 0}(1+2h)^{\frac{1}{h}}$

Para calcular este limite, podemos fazer a seguinte **mudança de variável**

$$u = 2h \tag{1.183}$$

donde, temos que $u\to 0$ quando $h\to 0$. Então, segue que

$$\lim_{h\to 0}(1+2h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{2}{u}} \tag{1.184}$$

$$= e^2 \tag{1.185}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os seguintes comandos:

Código 1.16: Python

```
In : from sympy import *
...: h = Symbol('h')
...: limit((1+2*h)**(1/h), h, 0)
Out: exp(2)
```

1.4.2 Derivada de Funções Exponenciais

Vamos calcular a derivada da função exponencial

$$f(x) = a^x \tag{1.186}$$

com $a > 0$. Partindo da definição de definição de derivada, temos

$$\begin{align}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.187}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \tag{1.188}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^x \left(a^h - 1\right)}{h} \tag{1.189}\\
&= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \tag{1.190}
\end{align}$$

Agora, fazemos a seguinte **mudança de variável**

$$u = a^h - 1 \tag{1.191}$$

donde, $u \to 0$ quando $h \to 0$ e

$$h = \log_a(1+u). \tag{1.192}$$

Com isso, voltando a (1.190) segue que

$$\begin{align}
(a^x) &= a^x \lim_{u\to 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} \tag{1.193}\\
&= a^x \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{1}{u}\log_a(1+u)} \tag{1.194}\\
&= a^x \lim_{u\to 0} \frac{1}{\log_a \cancelto{e}{(1+u)^{\frac{1}{u}}}} \tag{1.195}\\
&= a^x \frac{1}{\log_a e} \tag{1.196}
\end{align}$$

Lembrando que

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{1.197}$$

concluímos que

$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{1.198}$$

No caso particular da **função exponencial natural**, temos

$$(e^x)' = e^x \ln e \tag{1.199}$$

ou seja,

$$(e^x)' = e^x \tag{1.200}$$

Exemplo 1.4.2. Estudemos os seguintes casos:

a)

$$(2^x)' = 2^x \ln 2 \tag{1.201}$$

b)

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]' = \left(\frac{3}{2}\right)^x \ln \frac{3}{2} \tag{1.202}$$

c)

$$\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)' = \left[(\sqrt{e})^x\right]' \tag{1.203}$$

$$= (\sqrt{e})^x \ln \sqrt{e} \tag{1.204}$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \tag{1.205}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar essas derivadas como segue:

Código 1.17: Python

```
In : from sympy import *
In : x = Symbol('x')
In : diff(2**x)
Out: 2**x*log(2)

In : diff((S(3)/2)**x)
Out: (3/2)**x*log(3/2)

In : diff(exp(x/2))
Out: exp(x/2)/2

```

1.4.3 Derivada de Funções Logarítmicas

Vamos calcular a derivada da função logarítmica

$$f(x) = \log_a x \tag{1.206}$$

com $a > 0$ e $a \neq 1$. Partimos da definição de derivada

$$\begin{align}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.207}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x)}{h} \tag{1.208}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} \tag{1.209}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \tag{1.210}\\
&= \lim_{h\to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \tag{1.211}
\end{align}$$

Tendo em vista que[4]

$$e^{\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \tag{1.212}$$

obtemos

$$\begin{align}
(\log_a x)' &= \log_a e^{\frac{1}{x}} \tag{1.213}\\
&= \frac{1}{x} \log_a e \tag{1.214}\\
&= \frac{1}{x} \frac{\ln e}{\ln a} \tag{1.215}
\end{align}$$

e concluímos que

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{1.216}$$

Observamos que no caso particular da função logaritmo natural, segue que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{1.217}$$

[4] Consulte o Exercício 1.4.6

Exemplo 1.4.3. Estudemos os seguintes casos:

a)

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2} \tag{1.218}$$

b)

$$\left(\log_{\frac{3}{2}} x\right)' = \frac{1}{x \ln \frac{3}{2}} \tag{1.219}$$

c)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{1.220}$$

1.4.4 Lista de derivadas

$$(k)' = 0 \tag{1.221}$$
$$(x)' = 1 \tag{1.222}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{1.223}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{1.224}$$
$$(e^x)' = e^x \tag{1.225}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{1.226}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{1.227}$$

1.4.5 Exercícios Resolvidos

ER 1.4.1. Mostre que

$$e = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \tag{1.228}$$

Solução. Tendo em mente a definição dada na Equação 1.179, fazemos a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{1}{h} \tag{1.229}$$

donde, $u \to 0$ quando $h \to \infty$. Logo, temos

$$\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} \tag{1.230}$$
$$= e. \tag{1.231}$$

$\Diamond$

ER 1.4.2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$ no ponto $x = 1$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{1.232}$$

Neste exercício, temos $x_0 = 1$ e $f(x) = \ln x$. Então, calculamos

$$f'(x) = (\ln x)' \tag{1.233}$$
$$= \frac{1}{x} \tag{1.234}$$

No ponto $x_0 = 1$, temos $f'(x_0) = 1/x_0 = 1$. Logo, a equação da reta tangente é

$$y = 1\cdot(x-1) + f(1) \qquad y = x - 1 + 0 \tag{1.235}$$
$$y = x - 1 \tag{1.236}$$

$\Diamond$

1.4.6 Exercícios

E.1.4.1. Calcule:

a) $(3^x)'$

b) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]'$

E.1.4.2. Calcule:

a) $\left(\frac{2^x}{5^x}\right)'$

b) $\left(e^{2x}\right)'$

E.1.4.3. Calcule:

1. $(\log_3 x)'$
2. $\left(\log_{\frac{2}{5}} x\right)'$
3. $(\ln x)'$

E.1.4.4. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto $x = 1$.

E.1.4.5. Mostre que

$$e^x = \lim_{h\to 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}} \tag{1.237}$$

E.1.4.6. Mostre que

$$e^{\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \tag{1.238}$$

Respostas

E.1.4.1. a) $3^x \ln 3$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5}$

E.1.4.2. a) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5}$; b) $2e^{2x}$

E.1.4.3. a) $\dfrac{1}{x \ln 3}$ b) $\dfrac{1}{x \ln \frac{2}{5}}$; c) $\frac{1}{x}$

E.1.4.4. $y = x - 1$

E.1.4.5. Dica! Consulte o Exemplo **??**

E.1.4.6. Dica! Consulte o Exercício 1.4.5

1.5 Regas Básicas de Derivação

1.5.1 Regras da multiplicação por constante e da soma

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam k um número real, $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis. Temos as seguintes regras básicas de derivação:

- $\boldsymbol{(k \cdot u)' = k \cdot u'}$.

  De fato, pela definição da derivada temos

$$(k \cdot u)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot u(x+h) - k \cdot u(x)}{h} \tag{1.239}$$

$$= \lim_{h\to 0} k \cdot \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) \tag{1.240}$$

$$= k \cdot \overbrace{\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}}^{u'} \tag{1.241}$$

$$= k \cdot u'. \tag{1.242}$$

  No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos esta regra de derivação:

Código 1.18: Python

```
from sympy import *
k = Symbol('k', real=True)
u = Function('u', real=True)
diff(k*u(x),x)
```

- $\boldsymbol{(u \pm v)' = u' \pm v'}$.

  De fato, temos

$$
\begin{aligned}
(u+v)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h} && (1.243)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} && (1.244)\\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cancelto{u'}{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}} \right. && (1.245)\\
&\quad \left. + \cancelto{v'}{\frac{v(x+h) - v(x)}{h}} \right] && (1.246)\\
&= u'(x) + v'(x). && (1.247)
\end{aligned}
$$

  Também, como $(-v)' = (-1 \cdot v)' = -1 \cdot v' = -v'$, temos

$$
(u - v)' = [u + (-v)]' = u' + (-v)' = u' - v'. \qquad (1.248)
$$

  No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos a regra de derivação para soma:

  Código 1.19: Python

```python
from sympy import *
u = Function('u', real=True)
v = Function('v', real=True)
diff(u(x)+v(x),x)

```

Exemplo 1.5.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = 2x$.

   Para calcularmos f', podemos identificar $f = k \cdot u$, com $k = 2$ e $u(x) = x$. Então, usando a regra da multiplicação por constante $(ku)' = ku'$, temos

$$
f'(x) = (2x)' = 2(x') = 2 \cdot 1 = 2. \qquad (1.249)
$$

No SymPy, podemos computar esta derivada com o comando:

Código 1.20: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(2*x,x)

```

b) $f(x) = 2x + 3$.

Observamos que $f = u + v$, com $u(x) = 2x$ e $v(x) \equiv 3$. Então, da regra da soma $(u + v)' = u' + v'$, temos

$$f'(x) = (2x + 3)' = (2x)' + (3)' = 2 + 0 = 2. \tag{1.250}$$

No SymPy, podemos computar esta derivada com o comando:

Código 1.21: Python

```
from sympy import *
x = Symbols('x')
diff(2*x+3,x)

```

c) $f(x) = e^x - x^2$.

Observamos que $f = u - v$, com $u(x) = e^x$ e $v(x) = x^2$. Usando a regra da subtração $(u - v)' = u' - v'$ temos

$$f'(x) = (e^x - x^2)' = (e^x)' - (x^2)' = e^x - 2x. \tag{1.251}$$

No SymPy, podemos computar esta derivada com o comando:

Código 1.22: Python

```
from sympy import *
x = Symbols('x')
diff(exp(x)-x**2,x)

```

1.5.2 Regras do produto e do quociente

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam $y = u(x)$ e $y = v(x)$ funções deriváveis. Então:

- $\boldsymbol{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$.

  De fato, da definição da derivada temos

$$(uv)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \tag{1.252}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \tag{1.253}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h}\right. \tag{1.254}$$

$$\left. + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}\right] \tag{1.255}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(v+h) \tag{1.256}$$

$$+ \lim_{h\to 0} u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \tag{1.257}$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{1.258}$$

  No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

  Código 1.23: Python

```
u = Function('u', real=True)
v = Function('v', real=True)
diff(u(x)*v(x), x)

```

- $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$, no caso de $v(x) \neq 0$.

  De fato, da definição de derivada temos

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h} \tag{1.259}$$

$$
\begin{align}
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h} \tag{1.260}\\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}\right. \tag{1.261}\\
&\quad \left. - \frac{u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\right] \frac{1}{v(x)v(x+h)} \tag{1.262}\\
&= \left[\cancelto{u'(x)v(x)}{\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} v(x)}\right. \tag{1.263}\\
&\quad \left. - \cancelto{u(x)v'(x)}{\lim_{h\to 0} u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}\right] \cancelto{\frac{1}{v^2(x)}}{\lim_{h\to 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)}} \tag{1.264}\\
&= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \tag{1.265}
\end{align}
$$

No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

Código 1.24: Python

```python
from sympy import *
x = Symbol('x')
u = Function('u', real=True)
v = Function('v', real=True)
simplify(diff(u(x)/v(x),x))
```

Exemplo 1.5.2. Vamos calcular a derivada em relação a x da função $f(x) = x^2(x-1)$ de duas formas.

1. Por expansão da expressão e utilização da regra da subtração.

$$
\begin{align}
f'(x) &= [x^2(x-1)]' \tag{1.266}\\
&= (x^3 - x^2)' \tag{1.267}\\
&= \overbrace{(x^3)' - (x^2)'}^{(u-v)'=u'-v'} \tag{1.268}\\
&= 3x^2 - 2x, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1.269}
\end{align}
$$

2. Utilizando a regra do produto.

   Observamos que $f = u \cdot v$, com $u(x) = x^2$ e $v(x) = x - 1$. Então, da regra do produto $(uv)' = u'v + uv'$, com $u'(x) = 2x$ e $v'(x) = 1$, temos

$$
\begin{align}
f'(x) &= [\overbrace{x^2}^{u}\overbrace{(x-1)}^{v}]' \tag{1.270}\\
&= \overbrace{2x\cdot(x-1)}^{u'\cdot v} + \overbrace{x^2\cdot 1}^{u\cdot v'} \tag{1.271}\\
&= 2x^2 - 2x + x^2 \tag{1.272}\\
&= 3x^2 - 2x. \tag{1.273}
\end{align}
$$

Exemplo 1.5.3. Vamos calcular a derivada em relação a x de $f(x) = 1/x^2$ para $x \neq 0$. Observamos que $f = (u/v)$ com $u(x) \equiv 1$ e $v(x) = x^2$. Tendo em vista que $u'(x) \equiv 0$ e $v'(x) = 2x$, temos da regra do quociente que

$$
\begin{align}
f'(x) &= \left(\frac{1}{x^2}\right)' \tag{1.274}\\
&= \frac{0\cdot x^2 - 1\cdot 2x}{(x^2)^2}, \qquad \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right] \tag{1.275}\\
&= -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \tag{1.276}\\
&= -2x^{-3}. \tag{1.277}
\end{align}
$$

Observação 1.5.1. Com abuso de linguagem, temos

$$
\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}, \tag{1.278}
$$

com n inteiro. No caso de $n = 1$, temos $(x)' \equiv 1$. No caso de $n <= 0$, devemos ter $x \neq 0$[5]. Mais ainda, a regra também vale para $n = 1/2$, veja o Exemplo 1.2.2.

Exemplo 1.5.4. Voltando ao exemplo anterior (Exemplo 1.5.3), temos

$$
\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \overbrace{(x^{-2})'}^{(x^n)'} = \overbrace{-2x^{-2-1}}^{nx^{n-1}} = -2x^{-3}. \tag{1.279}
$$

[5] Devido a indeterminação de 0^0 e a inexistência de 0^n com n negativo

Exemplo 1.5.5. Vamos calcular a derivada em relação a x de $f(x) = xe^x$. Usando a regra do produto $(uv)' = u'v + uv'$ com $u(x) = x$ e $v(x) = e^x$, temos

$$f'(x) = \overbrace{(xe^x)'}^{(uv)'} \tag{1.280}$$

$$= \overbrace{1 \cdot e^x}^{u' \cdot v} + \overbrace{x \cdot e^x}^{u \cdot v'} \tag{1.281}$$

$$= (x+1)e^x. \tag{1.282}$$

1.5.3 Lista de derivadas

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \tag{1.283}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{1.284}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{1.285}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{1.286}$$

$$(k)' = 0 \tag{1.287}$$

$$(x)' = 1 \tag{1.288}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{1.289}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{1.290}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{1.291}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{1.292}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{1.293}$$

1.5.4 Exercícios resolvidos

ER 1.5.1. Calcule a derivada em relação a x da função

$$f(x) = (x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2. \tag{1.294}$$

Solução.

$$f'(x) = \overbrace{\left[(x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2\right]'}^{(u-v)'} \tag{1.295}$$

$$= \overbrace{\left[(x^2+x)(1+x^3)\right]'}^{(uv)'} - \overbrace{(2x^2)'}^{(ku)'} \tag{1.296}$$
$$= (x^2+x)'(1+x^3) + (x^2+x)(1+x^3)' - 2(x^2)' \tag{1.297}$$
$$= (2x+1)(1+x^3) + (x^2+x)3x^2 - 4x \tag{1.298}$$
$$= 2x + 2x^4 + 1 + x^3 + 3x^4 + 3x^3 - 4x \tag{1.299}$$
$$= 5x^4 + 4x^3 - 2x + 1. \tag{1.300}$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com os seguintes comandos:

Código 1.25: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
d = diff((x**2+x)*(1+x**3)-2x^2,x)
simplify(d)
```

◊

ER 1.5.2. Calcule
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2+x}{1-x^3}\right). \tag{1.301}$$

Solução. Da regra de derivação do quociente, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2+x}{1-x^3}\right) = \frac{(x^2+x)'(1-x^3)-(x^2+x)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} \tag{1.302}$$
$$= \frac{(2x+1)(1-x^3)+(x^2+x)3x^2}{1-2x^3+x^6} \tag{1.303}$$
$$= \frac{2x-2x^4+1-x^3+3x^4+3x^3}{1-2x^3+x^6} \tag{1.304}$$
$$= \frac{x^4+2x^3+2x+1}{x^6-2x^3+1} \tag{1.305}$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com os seguintes comandos:

Código 1.26: Python

```python
from sympy import *
x = Symbol('x')
d = diff((x**2+x)/(1-x**3),x)
simplify(d)
```

◇

ER 1.5.3. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xe^{-x}$ no ponto $x = 1$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $x = x_0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{1.306}$$

No caso, temos $f(x) = xe^{-x}$ e $x_0 = 1$. Calculamos

$$\begin{align}
f'(x) = [xe^{-x}]' &= \left[\frac{x}{e^x}\right] \tag{1.307}\\
&= \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} \tag{1.308}\\
&= \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} \tag{1.309}\\
&= \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} \tag{1.310}\\
&= (1-x)e^x e^{-2x} = (1-x)e^{-x}. \tag{1.311}
\end{align}$$

Logo, a equação da reta tangente é

$$\begin{align}
y &= f'(1)(x-1) + f(1) \tag{1.312}\\
y &= 0 \cdot (x-1) + e^{-1} \tag{1.313}\\
y &= \frac{1}{e}. \tag{1.314}
\end{align}$$

Na Figura 1.7, temos os esboços dos gráfico da função f e sua reta tangente no ponto $x = 1$.

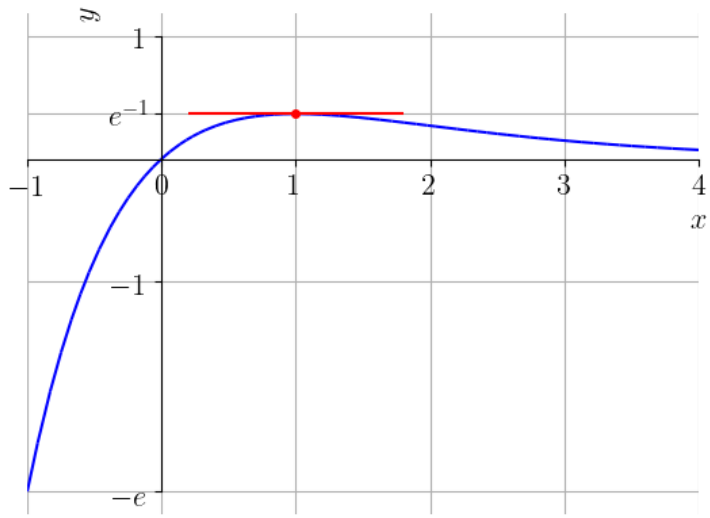

Figura 1.7: Esboço da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xe^{-x}$ no ponto $x = 1$.

Com o SymPy, podemos computar a expressão desta reta tangente com os seguintes comandos:

Código 1.27: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
f = x*exp(-x)
x0 = 1
fl = diff(f,x)
# y =
fl.subs(x,1)*(x-1)+f.subs(x,1)

```

◊

1.5.5 Exercícios

E.1.5.1. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = 5x^3$

b) $g(x) = 2e^x$

c) $h(x) = \log 2x$

d) $i(x) = \ln x^2$

E.1.5.2. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = 2 - 5x^3$

b) $g(x) = x^4 - x^2 + 3x - 1$

c) $h(x) = 3 \cdot 2^x - \log_2 x$

E.1.5.3. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - 3x + 1)$

b) $g(x) = x\sqrt{x}$

c) $h(x) = xe^x$

d) $i(x) = e^x \ln x$

E.1.5.4. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 3}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^x}$

E.1.5.5. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2e^x - \sqrt{x}$

b) $g(x) = x\ln x - \dfrac{x-2}{x^2-x}$

E.1.5.6. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = xe^{2x}$

b) $g(x) = xe^{-2x}$

E.1.5.7. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = x\ln x^2$

b) $g(x) = x\ln x^2e^x$

Respostas

E.1.5.1. a) $f'(x) = 15x^2$; b) $g'(x) = 2e^x$; c) $h'(x) = \dfrac{\log 2}{x\ln 10}$; d) $i'(x) = \dfrac{2}{x}$

E.1.5.2. a) $f'(x) = -15x^2$; b) $g'(x) = 4x^3 - 2x + 3$; c) $h'(x) = 3\cdot 2^x\ln 2 - \dfrac{1}{x\cdot\ln 2}$

E.1.5.3. a) $f'(x) = 6x^2 - 14x + 5$; b) $g'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; c) $h'(x) = (x+1)e^x$; d) $i'(x) = e^x\ln x + \dfrac{e^x}{x}$

E.1.5.4. a) $f'(x) = 1$; b) $g'(x) = \dfrac{-4}{(x-3)^2}$; c) $h'(x) = (1+2x-x^2)e^{-x}$

E.1.5.5. a) $f'(x) = (x^2+2x)e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; b) $g'(x) = \ln x + 1 - \frac{x^2 - x - (x-2)(2x-1)}{(x^2-x)^2}$

E.1.5.6. a) $f'(x) = (1+2x)e^{2x}$; b) $g'(x) = (1-2x)e^{-2x}$

E.1.5.7. a) $f'(x) = \ln x^2 + 2$; b) $g'(x) = 2 + 2x + \ln x^2$

1.6 Derivadas de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Começamos pela derivada da função seno. Pela definição da derivada, temos

$$\begin{align}
\operatorname{sen}' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \tag{1.315}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen} x}{h} \tag{1.316}\\
&= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\operatorname{sen} h}{h} \tag{1.317}\\
&= \operatorname{sen}(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}. \tag{1.318}
\end{align}$$

Usando do Teorema do confronto para limites de funções, podemos mostrar que[6]

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0. \tag{1.319}$$

Logo, temos

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}' x = \cos x}. \tag{1.320}$$

De forma similar, temos

$$\begin{align}
\cos' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \tag{1.321}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h) - \cos x}{h} \tag{1.322}\\
&= \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \operatorname{sen}(x)\frac{\operatorname{sen} h}{h} \tag{1.323}
\end{align}$$

[6] Veja a Seção **??**.

$$= \cos(x) \lim_{h\to 0} \cancelto{0}{\frac{\cos(h) - 1}{h}} - \operatorname{sen}(x) \lim_{h\to 0} \cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}. \quad (1.324)$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{\cos' x = -\operatorname{sen} x}. \quad (1.325)$$

Exemplo 1.6.1. A derivada de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ é

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)' && (1.326)\\
&= (\operatorname{sen}^2 x)' + (\cos^2 x)' && (1.327)\\
&= (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x)' + (\cos x \cdot \cos x)' && (1.328)\\
&= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos x \cdot \operatorname{sen} x && (1.329)\\
&= 0, && (1.330)
\end{aligned}$$

conforme esperado.

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

Código 1.28: Python

```python
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(sin(x)**2+cos(x)**2,x)

```

Conhecidas as derivadas da função seno e cosseno, podemos obter as derivadas das demais funções trigonométricas pela regra do quociente. Temos:

- $\boldsymbol{\operatorname{tg}' x = \sec^2 x}$

  Dem.:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}' x &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' && (1.331)\\
&= \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} && (1.332)\\
&= \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && (1.333)\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 && (1.334)\\
&= \sec^2 x. && (1.335)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{cotg}'\,\boldsymbol{x} = -\,\mathbf{cossec}^2\,\boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg}' x &= \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' && (1.336)\\
&= \frac{\cos' x \operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} && (1.337)\\
&= \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} && (1.338)\\
&= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 && (1.339)\\
&= \operatorname{cossec}^2 x. && (1.340)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{sec}'\,\boldsymbol{x} = \mathbf{sec}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$\begin{aligned}
\sec' x &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' && (1.341)\\
&= \frac{-\cos' x}{\cos^2 x} && (1.342)\\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && (1.343)\\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} && (1.344)\\
&= \operatorname{tg} x \sec x. && (1.345)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{cossec}'\,\boldsymbol{x} = -\,\mathbf{cossec}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cossec}' x &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' && (1.346)\\
&= \frac{-\operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} && (1.347)\\
&= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} && (1.348)\\
&= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} && (1.349)
\end{aligned}$$

$$= -\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x. \tag{1.350}$$

Observação 1.6.1. Os cálculos acima, mostram que as funções trigonométricas são deriváveis em todos os pontos de seus domínios.

Exemplo 1.6.2. A derivada em relação a x de

$$f(x) = \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x} \tag{1.351}$$

pode ser calculada como segue

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x}\right)' && (1.352)\\ &= \frac{(x + \operatorname{tg} x)' \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec' x}{\sec^2 x} && (1.353)\\ &= \frac{(1 + \sec^2 x) \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} && (1.354)\\ &= \frac{1 + \sec^2 x - (x + \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x}{\sec x}. && (1.355) \end{aligned}$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

Código 1.29: Python

```python
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff((x+tan(x))/sec(x),x)

```

1.6.1 Lista de derivadas

$$\begin{aligned} (ku)' &= ku' && (1.356)\\ (u \pm v)' &= u' \pm v' && (1.357)\\ (uv)' &= u'v + uv' && (1.358)\\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} && (1.359)\\ (k)' &= 0 && (1.360) \end{aligned}$$

$$(x)' = 1 \tag{1.361}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{1.362}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{1.363}$$
$$(e^x)' = e^x \tag{1.364}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{1.365}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{1.366}$$
$$\operatorname{sen}' x = \cos x \tag{1.367}$$
$$\cos' x = -\operatorname{sen} x \tag{1.368}$$
$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x \tag{1.369}$$
$$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cossec}^2 x \tag{1.370}$$
$$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x \tag{1.371}$$
$$\operatorname{cossec}' x = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x \tag{1.372}$$

1.6.2 Exercícios resolvidos

ER 1.6.1. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ no ponto $x = 0$. Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ no ponto $x = x + 0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{1.373}$$

No caso deste exercício, temos $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x_0 = 0$. Assim sendo, calculamos a derivada em relação a x de $f(x)$, i.e.

$$f'(x) = \operatorname{sen}' x = \cos x. \tag{1.374}$$

Segue que a equação da reta tangente é

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \tag{1.375}$$
$$y = \cos(0)(x - 0) + \operatorname{sen}(0) \tag{1.376}$$
$$y = x. \tag{1.377}$$

Na Figura 1.8, temos os esboços dos gráficos da função seno e da reta tangente encontrada.

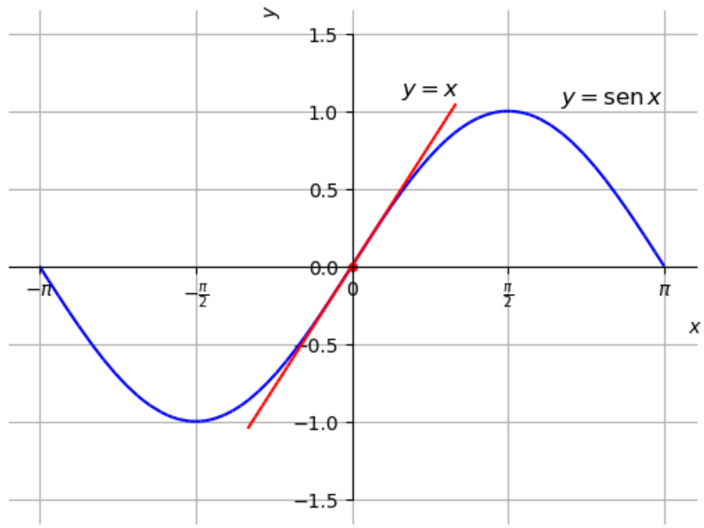

Figura 1.8: Esboços dos gráfico da função seno e de sua reta tangente no ponto $x = 0$.

Com o SymPy, podemos resolver este exercício com os seguintes comandos:

Código 1.30: Python

```python
from sympy import *
x = Symbol('x')
f = sin(x)
x0 = 0

# reta tangente
rt = diff(f,x).subs(x,x0)*(x-x0)+f.subs(x,x0)
print("Reta tangente: y = %s" % rt)

# graficos
plot(f,rt,(x,-pi,pi))

```

◊

ER 1.6.2. Resolva a equação

$$\sec'(x) = 0, \tag{1.378}$$

para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Solução. Temos

$$\begin{align}
0 &= \sec'(x) \tag{1.379}\\
&= \sec(x)\operatorname{tg}(x) \tag{1.380}\\
&= \frac{1}{\cos(x)}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \tag{1.381}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} \tag{1.382}
\end{align}$$

donde segue que

$$\operatorname{sen}(x) = 0. \tag{1.383}$$

Por fim, observamos que para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, a função seno se anula somente em $x = \pi$, a qual é a solução da equação.

◊

1.6.3 Exercícios

E.1.6.1. Calcule a derivada em relação a x de

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos^2(x)$

b) $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)$

c) $h(x) = \dfrac{2\operatorname{tg}(x)}{\sec(x)}$

E.1.6.2. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \cos x$ no ponto $x = 0$. Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

E.1.6.3. Calcule a derivada em relação a x de

a) $f(x) = \text{tg}(x) - \text{cotg}(x)$

b) $g(x) = \sec(x) - \text{cossec}(x)$

c) $g(x) = \sec(x) - \text{cossec}(x)$

Respostas

E.1.6.1. a) $f'(x) = \text{sen}(2x) + \cos(x)$; b) $g'(x) = \text{sen}(x) \cdot (2 - 3\sin^2(x)))$; c) $h'(x) = 2\cos(x)$

E.1.6.2. $y = 1$. Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar os esboços dos gráficos.

E.1.6.3. a) $f'(x) = \sec^2(x) + \text{cossec}^2(x)$; b) $g'(x) = \sec(x)\,\text{tg}(x) + \text{cossec}(x)\,\text{cotg}(x)$; c) $h'(x) = \frac{1}{2}\sec^2(x)$

1.7 Regra da cadeia

Regra da cadeia é nome dado a técnica de derivação de uma função composta. Sejam f e g, com g derivável em x e f derivável em $g(x)$, então $(f \circ g)$ é derivável em x, sendo

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \tag{1.384}$$

chamada de regra da cadeia.

Exemplo 1.7.1. A derivada em relação a x de $h(x) = (x + 1)^2$ pode ser calculada das seguintes formas:

a) pela regra da cadeia.

A função h é a composição da função $f(x) = x^2$ com a função $g(x) = x + 1$, i.e. $h(x) = f(g(x))$. Temos $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 1$. Então, segue pela regra da cadeia

$$h'(x) = [f(g(x))]' \tag{1.385}$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1.386}$$
$$= 2(x+1) \cdot 1 \tag{1.387}$$
$$= 2x + 2. \tag{1.388}$$

b) por cálculo direto.

Observando que $h(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, temos

$$h'(x) = (x^2 + 2x + 1)' \tag{1.389}$$
$$= (x^2)' + (2x)' + (1)' \tag{1.390}$$
$$= 2x + 2. \tag{1.391}$$

Com o SymPy, temos:

Código 1.31: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff((x+1)**2,x)
2*x + 2
```

Usualmente, a regra da cadeia também é apresentada da seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(u) = f'(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \tag{1.392}$$

onde u é uma função derivável em x e f é derivável em $u(x)$.

Observação 1.7.1. (Derivada de função potência) Em seções anteriores, já vimos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}, \tag{1.393}$$

para qualquer n inteiro[7]. Agora, se $r \neq 0$ e $r \neq 1$ é um número real, temos

$$y = x^r \tag{1.394}$$
$$\ln y = \ln x^r = r \ln x. \tag{1.395}$$

[7] Mais precisamente, para $n \neq 0$ e $n \neq 1$.

Daí, derivando ambos os lados desta última equação e observando que $y = y(x)$, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r\ln x \tag{1.396}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r}{x} \tag{1.397}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r}{x}y \tag{1.398}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = rx^{r-1}. \tag{1.399}$$

Ou seja, a regra da potência

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r = rx^{r-1}, \tag{1.400}$$

vale para todo r real, com $r \neq 0$ e $r \neq 1$.

Exemplo 1.7.2. Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \tag{1.401}$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \tag{1.402}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{1.403}$$

b)

$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}. \tag{1.404}$$

Observação 1.7.2. A regra da cadeia aplicada a derivada de função potência é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^r = ru^{r-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{1.405}$$

Exemplo 1.7.3. Vamos calcular a derivada em relação a x de

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \tag{1.406}$$

Vamos usar (1.405), com

$$u = x^2 + 1 \tag{1.407}$$

e $r = 1/2$. Segue que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx} \tag{1.408}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \tag{1.409}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \tag{1.410}$$

No SymPy, temos:

Código 1.32: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(sqrt(x**2+1),x)
x/sqrt(x**2 + 1)

```

A regra da cadeia pode ser estendida para calcular a derivada de uma composição encadeada de três ou mais funções. Por exemplo,

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot [g(h(x))]' \tag{1.411}$$

$$= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x). \tag{1.412}$$

Neste caso, a regra é válida para todo ponto tal que h é derivável em x com g derivável em $h(x)$ e f derivável em $f(g(h(x)))$.

Exemplo 1.7.4. Vamos calcular a derivada em relação a x de $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^2))$. Pela regra da cadeia, temos

$$[\operatorname{sen}(\cos(x^2))] = \cos(\cos(x^2)) \cdot [\cos(x^2)]' \tag{1.413}$$

$$= \cos(\cos(x^2)) \cdot [-\operatorname{sen}(x^2) \cdot (x^2)'] \tag{1.414}$$

$$= -\cos(\cos(x^2)) \cdot \operatorname{sen}(x^2) \cdot 2x. \tag{1.415}$$

No SymPy, temos:

Código 1.33: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(sin(cos(x**2)))
-2*x*sin(x**2)*cos(cos(x**2))
```

1.7.1 Lista de derivadas

$$(ku)' = ku' \tag{1.416}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{1.417}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{1.418}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{1.419}$$

$$(k)' = 0 \tag{1.420}$$

$$(x)' = 1 \tag{1.421}$$

$$\frac{\mathrm{d}u^n}{\mathrm{d}x} = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.422}$$

$$\frac{\mathrm{d}a^u}{\mathrm{d}x} = a^u \ln a \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.423}$$

$$\frac{\mathrm{d}e^u}{\mathrm{d}x} = e^u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.424}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a u = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.425}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} u = \cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.426}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos u = -\operatorname{sen}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.427}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg} u = \sec^2(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.428}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cotg} u = -\operatorname{cossec}^2(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.429}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec u = \sec(u)\operatorname{tg}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.430}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cossec} u = -\operatorname{cossec}(u)\operatorname{cotg}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.431}$$

1.7.2 Exercícios resolvidos

ER 1.7.1. Calcule a derivada em relação a x de

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}}. \tag{1.432}$$

Solução. Da regra da cadeia aplicada à função exponencial, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u = e^u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{1.433}$$

Então, com $u = \sqrt{x+1}$, segue

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\sqrt{x+1}} \tag{1.434}$$

$$= e^{\sqrt{x+1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x+1}\right). \tag{1.435}$$

Agora, aplicamos a regra da cadeia para a função raiz quadrada, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \tag{1.436}$$

com $u = x + 1$. Segue, então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1) \tag{1.437}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \tag{1.438}$$

Portanto, concluímos que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}. \tag{1.439}$$

No SymPy, temos:

Código 1.34: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(exp(sqrt(x+1)),x)
exp(sqrt(x + 1))/(2*sqrt(x + 1))
```

$\lozenge$

ER 1.7.2. Mostre que a função logística

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \tag{1.440}$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = f(x)(1-f(x)). \tag{1.441}$$

Solução. Vamos calcular a derivada em relação a x da função logística, i.e.

$$\begin{align}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) \tag{1.442}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1+e^{-x}\right)^{-1}\right] \tag{1.443}\\
&= -1\cdot\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\cdot\underbrace{\left(1+e^{-x}\right)'}_{=-e^{-x}} \tag{1.444}\\
&= \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}. \tag{1.445}
\end{align}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{align}
f(x)(1-f(x)) &= \frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{1+e^{-x}}\right) \tag{1.446}\\
&= \frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\left(\frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}}\right) \tag{1.447}\\
&= \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}. \tag{1.448}
\end{align}$$

Ou seja, de fato temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = f(x)(1-f(x)). \tag{1.449}$$

$\lozenge$

ER 1.7.3. Assuma que o custo de produção de uma unidade empresarial seja modelada pela função

$$c(x) = \sqrt{x-1} + e^{x-7}, \tag{1.450}$$

onde c é o custo em função da produção x. Determine o custo marginal quando $x = 3$.

Solução. O custo marginal é a função derivada do custo em relação à produção. Calculando, temos

$$\begin{align} c'(x) &= \left(\sqrt{x-1} + e^{x-7}\right) \tag{1.451}\\ &= \underbrace{\left(\sqrt{x-1}\right)'}_{(u^n)'=nu^{n-1}u'} + \underbrace{\left(e^{x-7}\right)'}_{(e^u)'=e^u u'} \tag{1.452}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + e^{x-7}. \tag{1.453}\end{align}$$

Logo, o custo marginal quando $x = 3$ é

$$c'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3-1}} + e^{3-7} = \sqrt{2} + e^{-4}. \tag{1.454}$$

◊

1.7.3 Exercícios

E.1.7.1. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções

a) $f(x) = (2x-3)^9$

b) $g(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^{51}}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$

E.1.7.2. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções

a) $f(x) = 2^{3x-1}$

b) $g(x) = e^{-x^2}$

E.1.7.3. Calcule as seguintes derivadas

a) $\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]'$

b) $\dfrac{d}{dx}\left[\log_2(x-1)+\log_2(x+1)\right]$

E.1.7.4. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções

a) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

b) $g(x) = \cos(\sqrt{x})$

c) $h(x) = \operatorname{tg}(2x)$

d) $u(x) = \operatorname{cotg}(3-x)$

e) $v(x) = \sec\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

f) $z(x) = \operatorname{cossec}\left(5x+x^2\right)$

E.1.7.5. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}} \tag{1.455}$$

no ponto $x = 3$.

Respostas

E.1.7.1. a) $f'(x) = 18(2x-3)^8$; b) $g'(x) = -\dfrac{102}{(2x-3)^{52}}$; c) $h'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

E.1.7.2. a) $f'(x) = 3\cdot 2^{3x-1}\ln 2$; b) $g'(x) = -2xe^{-x^2}$.

E.1.7.3. a) $\dfrac{2x}{x^2-1}$; b) $\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 2}$

E.1.7.4. a) $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$; b) $g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}(\sqrt{x})$; c) $h'(x) = 2\sec^2(2x)$; d) $u'(x) = \operatorname{cossec}^2(3-x)$; e) $v'(x) = -\dfrac{2}{x^2}\sec\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; f) $z'(x) = -(5+2x)\operatorname{cossec}\left(5x+x^2\right)\operatorname{cotg}\left(5x+x^2\right)$

E.1.7.5. $y = \frac{e^2}{4}x + \frac{e^2}{4}$

1.8 Diferenciabilidade da função inversa

Seja f uma função diferenciável e injetora em um intervalo aberto I. Então, pode-se mostrar que sua inversa f^{-1} é diferenciável em qualquer ponto da imagem da f no qual $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{1.456}$$

Exemplo 1.8.1. Seja $f(x) = (2x-1)^2$ para $x > 1/2$. Para calcular sua inversa, fazemos

$$y = (2x-1)^2 \tag{1.457}$$
$$\sqrt{y} = 2x - 1 \tag{1.458}$$
$$x = \frac{\sqrt{y}+1}{2} \tag{1.459}$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x}+1). \tag{1.460}$$

Calculando a derivada de f^{-1} diretamente, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+1\right)' \tag{1.461}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{1.462}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}} \tag{1.463}$$

Agora, usando (1.456) e observando que $f'(x) = 8x - 4$, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \tag{1.464}$$

$$= \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+1\right) - 4}, \tag{1.465}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}}, \tag{1.466}$$

como esperado.

Observação 1.8.1. (Derivada da função logarítmica)

- Tomando $f(x) = e^x$ temos $f^{-1}(x) = \ln x$ e, daí por (1.456)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \tag{1.467}$$

- Tomando $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $f^{-1}(x) = \log_a x$ e, por (1.456),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}. \tag{1.468}$$

Exemplo 1.8.2. Vamos calcular a derivada em relação a x da função

$$f(x) = \ln \frac{1}{x}. \tag{1.469}$$

Aplicando a regra da cadeia na derivada da função logarítmica, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln u = \frac{1}{u} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{1.470}$$

Portanto, temos

$$f'(x) = \left(\ln \frac{1}{x}\right)' \tag{1.471}$$

$$= \frac{1}{x^{-1}} \cdot (-x^{-2}) \tag{1.472}$$

$$= -\frac{1}{x}. \tag{1.473}$$

No SymPy, temos:

Código 1.35: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(log(1/x),x)
-1/x
```

1.8.1 Derivadas de funções trigonométricas inversas

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$ restrita a $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Sua inversa é a função arco seno, denotada por

$$y = \operatorname{arc\,sen} x. \tag{1.474}$$

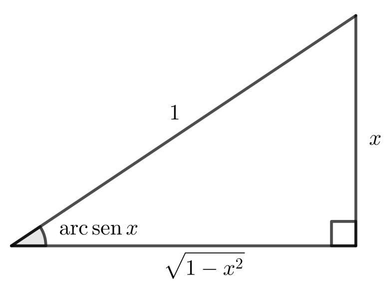

Figura 1.9: Arco seno de um ângulo no triângulo retângulo.

Para calcular a derivada da função arco seno, vamos usar (1.456) com $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f'(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, donde

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}. \tag{1.475}$$

Como $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$ (veja Figura 1.9), concluímos

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.476}$$

Exemplo 1.8.3. A regra da cadeia aplicada à derivada da função arco seno é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,sen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{1.477}$$

Por exemplo, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,sen} x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{1.478}$$

No SymPy, temos:

Código 1.36: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(asin(x**2),x)
2*x/sqrt(-x**4 + 1)

```

Com argumentos análogos aos usados no cálculo da derivada da função arco seno, podemos obter as seguintes derivadas:

$$(\operatorname{arc\,cos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.479}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{1.480}$$

$$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{1.481}$$

$$(\operatorname{arc\,sec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \tag{1.482}$$

$$(\operatorname{arc\,cosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \tag{1.483}$$

Exemplo 1.8.4. A regra da cadeia aplicada a função arco tangente é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{1.484}$$

Por exemplo, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} \tag{1.485}$$

$$= \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}. \tag{1.486}$$

No SymPy, temos:

Código 1.37: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(atan(sqrt(x)))
1/(2*sqrt(x)*(x + 1))

```

1.8.2 Lista de derivadas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

$$(ku)' = ku' \tag{1.487}$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{1.488}$$
$$(uv)' = u'v + uv' \tag{1.489}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{1.490}$$
$$(k)' = 0 \tag{1.491}$$
$$(x)' = 1 \tag{1.492}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u^r = r u^{r-1} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.493}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^u = a^u \ln a \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.494}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^u = e^u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.495}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.496}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln u = \frac{1}{u} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.497}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen} u = \cos(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.498}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos u = -\operatorname{sen}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.499}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg} u = \sec^2(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.500}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cotg} u = -\operatorname{cossec}^2(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.501}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec u = \sec(u)\operatorname{tg}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.502}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cossec} u = -\operatorname{cossec}(u)\operatorname{cotg}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.503}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,sen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.504}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.505}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.506}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,cotg} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.507}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,sec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.508}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,cossec} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1.509}$$

1.8.3 Exercícios resolvidos

ER 1.8.1. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \ln x$ no ponto $x = 1$. Faça, então, um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \ln x$ no ponto $x_0 = 1$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{1.510}$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1). \tag{1.511}$$

Observando que

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{1.512}$$

temos que a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{1}(x-1) + \ln 1 \tag{1.513}$$
$$y = x - 1. \tag{1.514}$$

Na Figura 1.10, temos um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

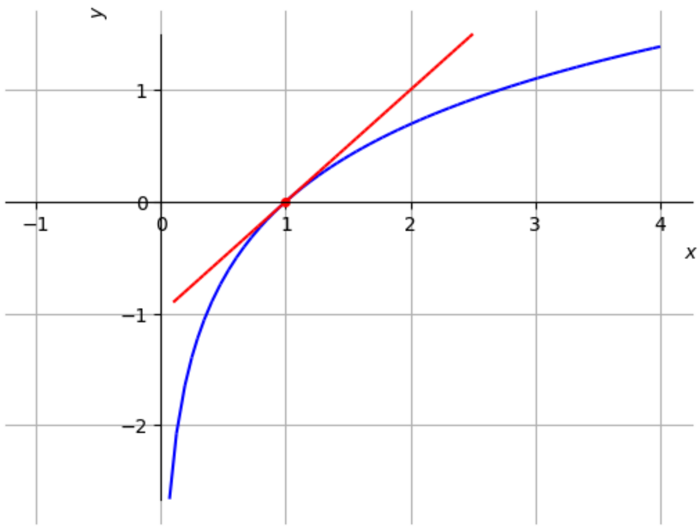

Figura 1.10: Esboço dos gráficos da função logarítmica natural e da reta tangente no ponto $x = 1$.

No SymPy, temos:

Código 1.38: Python

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
rt = diff(log(x)).subs(x,1)*(x-1)+log(1)
print("y = %s" % rt)
y = x - 1
```

◊

ER 1.8.2. Resolva a equação

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = 1. \tag{1.515}$$

Solução. Lembrando que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}, \tag{1.516}$$

temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = 1 \tag{1.517}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 \tag{1.518}$$

$$1+x^2 = 1 \tag{1.519}$$

$$x^2 = 0 \tag{1.520}$$

$$x = 0. \tag{1.521}$$

◊

ER 1.8.3. Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x. \tag{1.522}$$

Solução. Observamos que

$$y = x^x \tag{1.523}$$

$$\ln y = \ln x^x \tag{1.524}$$

$$\ln y = x\ln x. \tag{1.525}$$

Agora, derivando em relação a x ambos os lados desta equação, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln x) \tag{1.526}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + \ln x \tag{1.527}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1+\ln x) \tag{1.528}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^x}{\mathrm{d}x} = x^x(1+\ln x). \tag{1.529}$$

◊

1.8.4 Exercícios

E.1.8.1. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 x^2$

b) $g(x) = \ln(xe^x)$

E.1.8.2. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b) $g(x) = (1+2x)^e$

E.1.8.3. Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^x. \tag{1.530}$$

E.1.8.4. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ no ponto $x = 0$.

Respostas

E.1.8.1. a) $f'(x) = \dfrac{2}{x\ln 2}$; b) $g'(x) = \frac{1+x}{x}$

E.1.8.2. a) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; b) $g'(x) = 2e(1+2x)^{e-1}$

E.1.8.3. $x(1+x)^{x-1} + (1+x)^x \ln(1+x)$

E.1.8.4. $y = x$

1.9 Derivação implícita

Seja $y = y(x)$ definida implicitamente por

$$g(y(x)) = 0. \tag{1.531}$$

A derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ pode ser calculada via regra da cadeia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(y(x)) = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x} \tag{1.532}$$

$$g'(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{1.533}$$

Exemplo 1.9.1. Considere a equação da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1.534}$$

Aqui, vamos calcular $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ de duas maneiras diferentes.

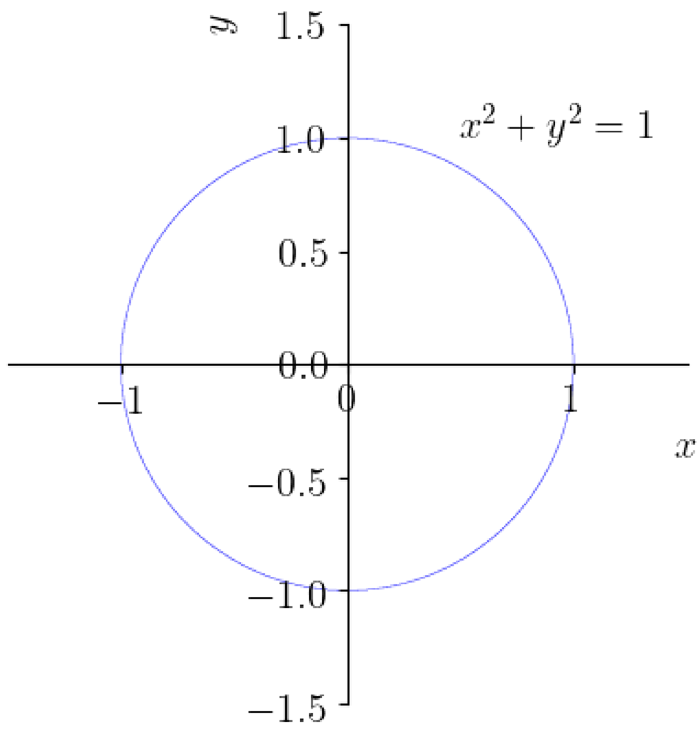

Figura 1.11: Esboço do gráfico da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

a) Por derivação direta. Isolando y em (1.534), temos

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \tag{1.535}$$

o que está bem definido para $-1 \leq x \leq 1$. Calculando a derivada, obtemos

$$\begin{align}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) \tag{1.536}\\
&= \pm\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \tag{1.537}\\
&= \mp\frac{x}{y} \tag{1.538}
\end{align}$$

Ou seja, para $y < 0$, temos $y' = x/y$ e, para $y > 0$, temos $y' = -x/y$. Logo, concluímos que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}. \tag{1.539}$$

b) Por derivação implícita. Derivamos ambos os lados da (1.534) em relação a x

$$\begin{align}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+y^2\right) = \frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x} \tag{1.540}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2(x)\right) = 0 \tag{1.541}\\
&2x + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{1.542}\\
&2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{1.543}\\
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}. \tag{1.544}
\end{align}$$

Observação 1.9.1 (Derivadas de potências racionais de x)**.** Vamos mostrar que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r = rx^{r-1}, \tag{1.545}$$

para qualquer **número racional** $r \neq 0$. Denotando $r = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$y = x^{m/n} \tag{1.546}$$

$$\Leftrightarrow \tag{1.547}$$
$$y^n = x^m \tag{1.548}$$

Da derivação de função potência com exponente inteiro, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^m \tag{1.549}$$
$$ny^{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = mx^{m-1} \tag{1.550}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{m}{n}x^{m-1}y^{1-n} \tag{1.551}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{m}{n}x^{m-1}\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{1-n} \tag{1.552}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{m}{n}x^{m-1}x^{\frac{m}{n}(1-n)} \tag{1.553}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{m}{n}x^{m-1+\frac{m}{n}(1-n)} \tag{1.554}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}. \tag{1.555}$$

Logo, segue o resultados que queríamos demonstrar.

Exemplo 1.9.2. Vamos calcular $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ para

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1.556}$$

Primeiramente, precisamos calcular $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Isso foi feito no Exemplo 1.9.1, onde obtivemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}. \tag{1.557}$$

Antes de derivarmos novamente, vamos reescrever essa última expressão da seguinte forma

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x \tag{1.558}$$

Derivando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-x\right] \tag{1.559}$$
$$1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 \tag{1.560}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -1 \tag{1.561}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{x^2}{y^2} - 1. \tag{1.562}$$

1.9.1 Exercícios resolvidos

ER 1.9.1. Calcule $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ para a lemniscata de Bernoulli[8]

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \tag{1.563}$$

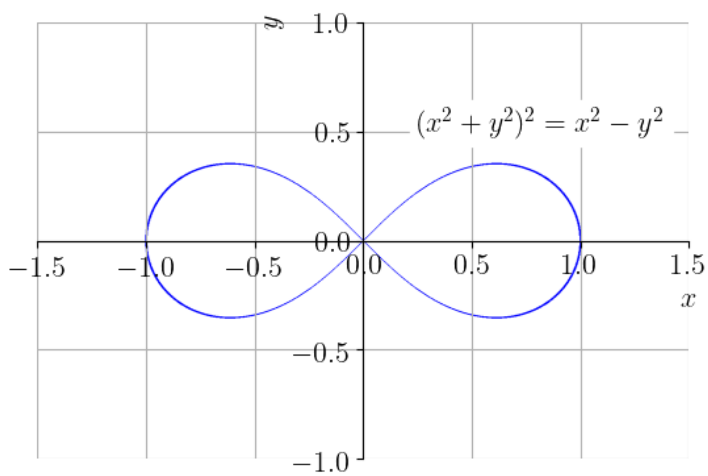

Figura 1.12: Esboço da lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Solução.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2+y^2)^2\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2 - y^2\right] \tag{1.564}$$

$$2(x^2+y^2)\left(2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 2x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1.565}$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$2(y + 2x^2y + 2y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 4xy^2 - 4x^3 \tag{1.566}$$

[8]Jacob Bernoulli, 1655 - 1705, matemático suíço. Fonte: Wikipédia.

ou ainda

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x - 2x^3 - 2xy^2}{y + 2x^2y + 2y^3} \tag{1.567}$$

◊

ER 1.9.2. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1.568}$$

no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = y(x)$ no ponto $(x_0, y(x_0))$ é dada por

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) \tag{1.569}$$

onde, nesse caso, $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}. \tag{1.570}$$

Calculamos $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ como segue

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x} \tag{1.571}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2(x)\right) = 0 \tag{1.572}$$

$$2x + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{1.573}$$

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{1.574}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}. \tag{1.575}$$

Com isso, temos

$$y'(x_0) = -\frac{x_0}{y(x_0)} \tag{1.576}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (1.577)$$

$$= -1. \quad (1.578)$$

Concluímos que a equação da reta tangente é

$$y = -1 \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1.579)$$

$$y = -x + \sqrt{2}. \quad (1.580)$$

◊

1.9.2 Exercícios

E.1.9.1. Calcule dy/
dx para:

a) $x + 2xy - x^3 = 3$

b) $x^2 + y^2 = xy$

E.1.9.2. Calcule $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ para

$$x^2 + y^2 = xy \quad (1.581)$$

E.1.9.3. Encontre o ponto de interseção das retas tangentes ao gráfico de

$$y^2 = x - 1 \quad (1.582)$$

nos pontos $(2, -1)$ e $(2, 1)$.

E.1.9.4. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da circunferência de centro $C = (1, 1)$ e raio $r = \sqrt{2}$ que passa pela origem $O = (0, 0)$.

E.1.9.5. Seja c a circunferência de raio $r > 0$

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (1.583)$$

Mostra que a reta tangente ao gráfico de c em qualquer ponto arbitrário $P = (x_0, y_0) \in c$ é perpendicular a reta $\overline{OP}$, i.e. a reta que passa pela origem $O = (0, 0)$ e pelo ponto P.

Respostas

E.1.9.1. a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2 - 2y - 1}{2x}$ b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y - 2x}{2y - x}$

E.1.9.2. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{x + y - 2}{x^2}$

E.1.9.3. (0, 0)

E.1.9.4. $y = -x$

Notas

Referências

[1] Anton, H., Cálculo, vol. 1, 10. ed., Bookman, 2014.

[2] Ávila, G.S.S., Introdução à análise matemática, 2. ed., Edgard Blücher, 1993.

[3] Thomas, G., Cálculo, vol. 1, 12. ed., Addison- Wesley, 2012.

[4] Stewart, J., Cálculo, Thomson Learning, 2006.