

# Método de Elementos Finitos

Pedro H A Konzen

8 de dezembro de 2024

# Licença

Este texto é disponibilizado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite

[http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR)

ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

O site [notaspedrok.com.br](https://www.notaspedrok.com.br) é uma plataforma que construí para o compartilhamento de minhas notas de aula. Essas anotações feitas como preparação de aulas é uma prática comum de professoras/es. Muitas vezes feitas a rabiscos em rascunhos com validade tão curta quanto o momento em que são concebidas, outras vezes, com capricho de um diário guardado a sete chaves. Notas de aula também são feitas por estudantes - são anotações, fotos, prints, entre outras formas de registros de partes dessas mesmas aulas. Essa dispersão de material didático sempre me intrigou e foi o que me motivou a iniciar o site.

Com início em 2018, o site contava com apenas três notas incipientes. De lá para cá, conforme fui expandido e revisando os materiais, o site foi ganhando acessos de vários locais do mundo, em especial, de países de língua portuguesa. No momento, conta com 13 notas de aula, além de minicursos e uma coleção de vídeos e áudios.

As notas de **Métodos de Elementos Finitos** abordam tópicos introdutórios sobre o método de elementos finitos para equações diferenciais. Códigos exemplos são trabalhos em linguagem [Python](#) com a ajuda do pacote computacional [FEniCSx](#).

Aproveito para agradecer a todas/os que de forma assídua ou esporádica contribuem com correções, sugestões e críticas! ;)

Pedro H A Konzen

<https://www.notaspedrok.com.br>

# Conteúdo

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Conteúdo	v
<b>1 Problemas Unidimensionais</b>	<b>1</b>
1.1 Interpolação e Projeção . . . . .	1
1.1.1 Interpolação . . . . .	3
1.1.2 Projeção $L^2$ . . . . .	8
1.1.3 Exercícios . . . . .	12
1.2 Problema Modelo . . . . .	12
1.2.1 Formulação Fraca . . . . .	13
1.2.2 Formulação de Elementos Finitos . . . . .	14
1.2.3 Estimativa <i>a Priori</i> . . . . .	17
1.2.4 Estimativa <i>a Posteriori</i> . . . . .	21
1.2.5 Exercícios . . . . .	22
1.3 Condições de Contorno . . . . .	22
1.3.1 Condições de Dirichlet . . . . .	23
1.3.2 Condições de Neumann . . . . .	26
1.3.3 Condições de Robin . . . . .	31
1.3.4 Exercícios . . . . .	34
1.4 Malhas Auto-Adaptativas . . . . .	35
1.4.1 Exercícios . . . . .	39
1.5 Aplicação: EDP Evolutiva . . . . .	39

1.5.1	Discretização do Tempo . . . . .	39
1.5.2	Formulação de Elementos Finitos . . . . .	40
1.5.3	Exercícios . . . . .	43
1.6	Aplicação: EDP de Advecção-Difusão . . . . .	44
1.6.1	Exercícios . . . . .	45
1.7	Aplicação: EDP Não-Linear . . . . .	45
1.7.1	Discretização do Tempo . . . . .	45
1.7.2	Formulação de Elementos Finitos . . . . .	46
1.7.3	Exercícios . . . . .	49
1.8	Seleção de Aplicações . . . . .	50
1.8.1	Sistemas de Equações . . . . .	50
1.8.2	Exercícios . . . . .	53
<b>2</b>	<b>Problemas Bidimensionais</b>	<b>54</b>
2.1	Malha e Espaço . . . . .	54
2.1.1	Malha . . . . .	54
2.1.2	Espaço de Polinômios Lineares . . . . .	56
2.1.3	Espaço contínuo dos polinômios lineares por partes . . . . .	57
2.1.4	Exercícios . . . . .	59
2.2	Interpolação . . . . .	60
2.2.1	Exercícios . . . . .	67
2.3	Projeção . . . . .	67
2.3.1	Exercícios . . . . .	69
2.4	Problema Modelo . . . . .	70
2.4.1	Formulação Fraca . . . . .	70
2.4.2	Formulação de Elementos Finitos . . . . .	71
2.4.3	Exercícios . . . . .	74
2.5	Fundamentos da análise de elementos finitos . . . . .	75
2.5.1	Existência e unicidade . . . . .	75
2.5.2	Estimativa <i>a priori</i> do erro . . . . .	76
2.5.3	Estimativa <i>a posteriori</i> . . . . .	81
	<b>Notas</b>	<b>84</b>
	<b>Referências</b>	<b>85</b>
	<b>Índice de Comandos</b>	<b>86</b>

# Capítulo 1

## Problemas Unidimensionais

Em revisão

### 1.1 Interpolação e Projeção

Em revisão

Seja dado um intervalo  $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq x_1$ . O **espaço vetorial das funções lineares** em  $I$  é definido por

$$P_1(I) := \{v : v(x) = c_0 + c_1x, \ x \in I, \ c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

Observamos que dado  $v \in P_1(I)$ , temos que  $v$  é unicamente determinada pelos valores

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= v(x_0), \\ \alpha_1 &= v(x_1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Como consequência, existe exatamente uma única função  $v \in P_1(I)$  para quaisquer dados valores  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ . Desta observação, introduzimos a chamada **base nodal** (base lagrangiana<sup>1</sup>)  $\{\varphi_0, \varphi_1\}$  para  $P_1(I)$ , definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Consulte mais em [Notas de Aula: Matemática Numérica I: Interpolação de Lagrange](#).

com  $i, j = 0, 1$ . Consulte a Figura 1.1.

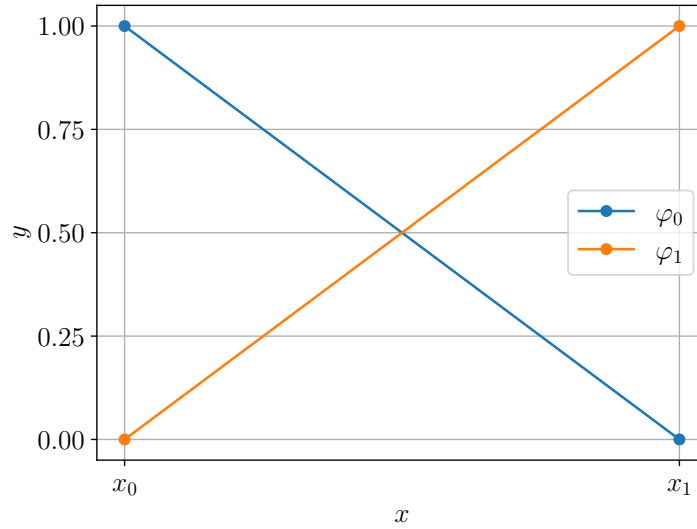


Figura 1.1: Base nodal para o espaço  $P_1([x_0, x_1])$ .

Com esta base, toda função  $v \in P_1(I)$  pode ser escrita como uma combinação linear das funções  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  com coeficientes  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  (**graus de liberdade**), i.e.

$$v(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x). \quad (1.4)$$

Além disso, observamos que

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad (1.5)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (1.6)$$

Uma extensão do espaço  $P_1(I)$  é o **espaço das funções lineares por partes**. Dado  $I = [l_0, l_1]$ ,  $l_0 \neq l_1$ , consideramos uma partição (**malha**) de  $I$  com  $n + 1$  pontos

$$\mathcal{I} = \{l_0 = x_0, x_1, \dots, x_n = l_1\} \quad (1.7)$$

e, portanto, com  $n$  subintervalos  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  de comprimento (**tamanho da malha**)  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Na malha  $\mathcal{I}$  definimos o seguinte

espaço das funções lineares por partes

$$V_h := \{v : v \in C^0(\mathcal{I}), v|_{I_i} \in P_1(I_i), i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.8)$$

Observamos que toda função  $v \in V_h$  é unicamente determinada por seus valores nodais  $\{\alpha_i = v(x_i)\}_{i=0}^n$ . Reciprocamente, todo conjunto de valores nodais  $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$  determina unicamente uma função  $v \in V_h$ . Desta observação, temos que os **valores nodais determinam os graus de liberdade** com a base nodal  $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$  para  $V_h$  definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad (1.9)$$

com  $i, j = 0, 1, \dots, n$ . Ou seja, temos que

$$v(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j(x). \quad (1.10)$$

Podemos verificar que

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & , x \in I_i, \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & , x \in I_{i+1}, \\ 0 & , \text{noutros casos} \end{cases} \quad (1.11)$$

consulte, Figura 1.2. É notável que  $\varphi_i(x)$  tem suporte compacto  $I_i \cup I_{i+1}$ .

### 1.1.1 Interpolação

#### Em revisão

Interpolação é uma técnica de aproximação de funções. Dada uma função contínua  $f$  em  $I = [l_0, l_1]$ , definimos o **operador de interpolação linear**  $\pi : C^0(I) \rightarrow V_h$  por

$$\pi f(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \varphi_j(x) \quad (1.12)$$

Observamos que  $\pi f$  é igual a  $f$  nos nodos  $x_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

**Exemplo 1.1.1.** A Figura 1.3 ilustra a interpolação da função  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço de elementos finitos  $V_h$  das funções lineares por partes com 5 células.



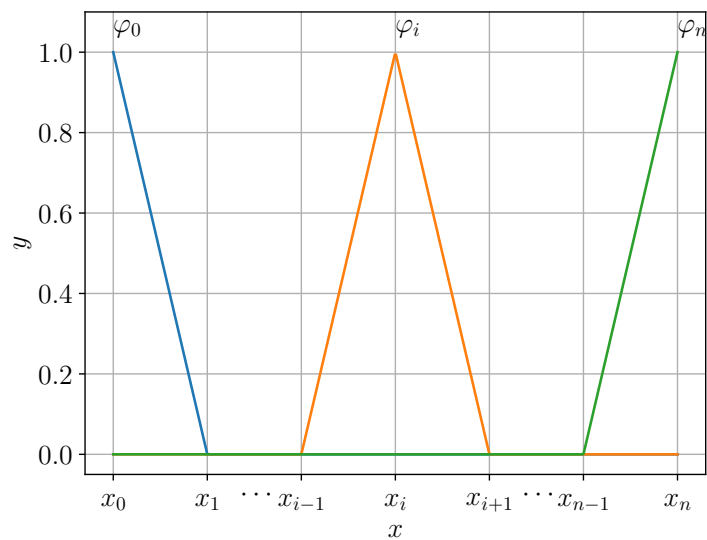


Figura 1.2: Base nodal para o espaço das funções lineares por parte.

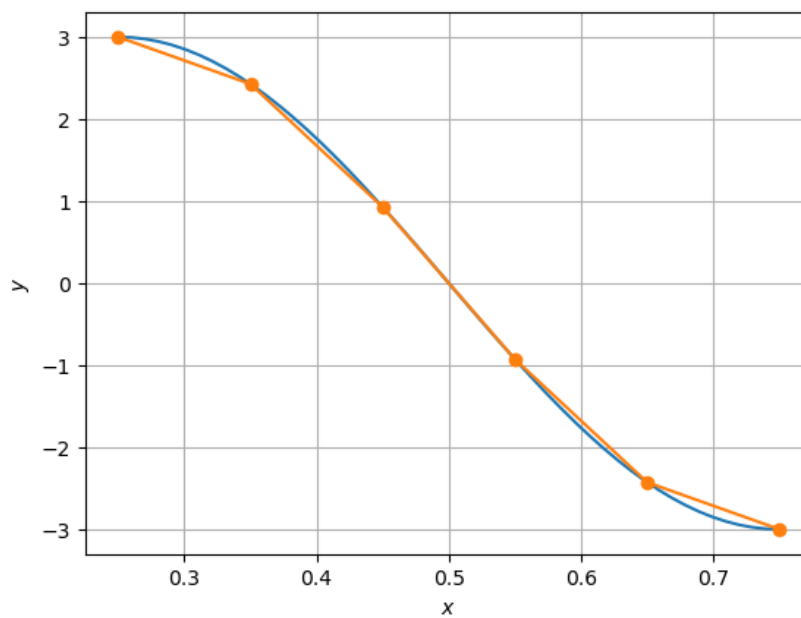


Figura 1.3: Interpolação linear de  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço de elementos finitos  $V$ .

Código 1.1: mefld\_interp\_lin

```

1 from dolfinx import fem, mesh
2 import ufl
3 import numpy as np
4 from mpi4py import MPI
5 import matplotlib.pyplot as plt
6
7 # malha
8 l0 = 0.25
9 l1 = 0.75
10 domain = mesh.create_interval(MPI.COMM_WORLD,
11                               nx = 5,
12                               points = [l0, l1])
13 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
14
15 # espaço
16 V = fem.FunctionSpace(domain, ('P', 1))
17
18 # fun
19 def fun(x, mod):
20     return 3.*mod.sin(2.*mod.pi*x)
21
22 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
23 f_expr = fem.Expression(fun(x[0], ufl),
24                          V.element.
25                          interpolation_points())
26
27 # interpolação
28 pif = fem.Function(V)
29 pif.interpolate(f_expr)

```

Agora, vamos buscar medir o erro de interpolação, i.e.  $f - \pi f$ . Para tanto, podemos usar a norma  $L^2$  definida por

$$\|v\|_{L^2(I)} = \left( \int_I v^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.13)$$

Lembramos que valem a **desigualdade triangular**

$$\|v + w\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{L^2(I)} + \|w\|_{L^2(I)} \quad (1.14)$$

e a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**<sup>2</sup>

$$\int_I vw \, dx \leq \|v\|_{L^2(I)} \|w\|_{L^2(I)}, \quad (1.15)$$

para qualquer funções  $v, w \in L^2(I)$ .

**Proposição 1.1.1.** (Erro da interpolação linear) O interpolador  $\pi f : C^0(I) \rightarrow P_1(I)$  satisfaz as estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}, \quad (1.16)$$

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}, \quad (1.17)$$

onde  $C$  é uma constante e  $h = x_1 - x_0$ .

*Demonstração.* Denotemos o erro de interpolação por  $e = f - \pi f$ . Do teorema fundamental do cálculo, temos

$$e(y) = e(x_0) + \int_{x_0}^y e'(x) \, dx, \quad (1.18)$$

onde  $e(x_0) = f(x_0) - \pi f(x_0) = 0$ . Daí, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.15), temos

$$e(y) = \int_{x_0}^y e' \, dx \quad (1.19)$$

$$\leq \int_{x_0}^y |e'| \, dx \quad (1.20)$$

$$\leq \int_I 1 \cdot |e'| \, dx \quad (1.21)$$

$$\leq \left( \int_I 1^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_I e'^2 \, dx \right)^{1/2} \quad (1.22)$$

$$= h^{1/2} \left( \int_I e'^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad (1.23)$$

donde

$$e(y)^2 \leq h \int_I e'^2 \, dx = h \|e'\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.24)$$

---

<sup>2</sup>Também conhecida como desigualdade de Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz. Augustin-Louis Cauchy, 1789 - 1857, matemático francês. Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, 1804 - 1889, matemático Russo. Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843 - 1921, matemático alemão.

Então, integrando em  $I$  obtemos

$$\|e\|_{L^2(I)}^2 = \int_I e^2(y) dy \leq \int_I h \|e'\|_{L^2(I)}^2 dy = h^2 \|e'\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.25)$$

ou seja, temos a seguinte desigualdade

$$\|e\|_{L^2(I)} \leq h \|e'\|_{L^2(I)}. \quad (1.26)$$

Agora, observando que  $e(x_0) = e(x_1) = 0$ , o **teorema de Rolle**<sup>3</sup> garante a existência de um ponto  $\tilde{x} \in I$  tal que  $e'(\tilde{x}) = 0$ , donde do teorema fundamental do cálculo e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue

$$e'(y) = e'(\tilde{x}) + \int_{\tilde{x}}^y e'' dx \quad (1.27)$$

$$= \int_{\tilde{x}}^y e'' dx \quad (1.28)$$

$$\leq \int_I 1 \cdot |e''| dx \quad (1.29)$$

$$\leq h^{1/2} \left( \int_I e''^2 \right)^{1/2}. \quad (1.30)$$

Então, integrando em  $I$ , obtemos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 \leq h^2 \|e''\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.31)$$

a qual, observando que  $e'' = f''$ , equivale a segunda estimativa procurada, i.e.

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}. \quad (1.32)$$

Por fim, de (1.31) e de (1.26), obtemos a primeira estimativa desejada

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}. \quad (1.33)$$

□

Vamos, agora, generalizar o resultado da Proposição 1.1.1 para a interpolação no espaço  $V_h$  das funções lineares por parte.

O seguinte resultado fornece uma estimativa do erro de interpolação em relação ao tamanho  $h_i$  de cada elemento da malha.

<sup>3</sup>Michel Rolle, 1652 - 1719, matemático francês.

**Proposição 1.1.2.** *O interpolador  $\pi f$  satisfaz as estimativas*

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.34)$$

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|f''\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.35)$$

$$(1.36)$$

*Demonstração.* Ambas desigualdades seguem da desigualdade triangular e da Proposição 1.1.1. Por exemplo, para a primeira desigualdade, temos

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|f - \pi f\|_{L^2(I_i)}^2 \quad (1.37)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n C h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.38)$$

□

### 1.1.2 Projeção $L^2$

**Em revisão**

Dada uma função  $f \in L^2(I)$ , definimos o **operador de projeção  $L^2$**   $P_h : L^2(I) \rightarrow V_h$  por

$$\int_I (f - P_h f) v \, dx = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.39)$$

Como  $V_h$  é um espaço de dimensão finita, a condição (1.39) é equivalente a

$$\int_I (f - P_h f) \varphi_i \, dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.40)$$

onde  $\varphi_i$  é a  $i$ -ésima função base de  $V_h$ . Além disso, como  $P_h f \in V_h$ , temos

$$P_h f = \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j, \quad (1.41)$$

onde  $\xi_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , são  $n + 1$  incógnitas a determinar. Logo,

$$\int_I (f - P_h f) \varphi_i \, dx = 0 \quad (1.42)$$

$$\int_I f \varphi_i dx = \int_I P_h f \varphi_i dx \quad (1.43)$$

$$\int_I f \varphi_i dx = \int_I \left( \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j \right) \varphi_i dx \quad (1.44)$$

$$\sum_{j=0}^n \xi_j \int_I \varphi_j \varphi_i dx = \int_I f \varphi_i dx, \quad (1.45)$$

para  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Observamos que (1.45) consiste em um sistema de  $n + 1$  equações lineares para as  $n + 1$  incógnitas  $\xi_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Este, por sua vez, pode ser escrito na seguinte forma matricial

$$M\xi = b, \quad (1.46)$$

onde  $M = [m_{i,j}]_{i,j=0}^{n+1}$  é chamada de **matriz de massa**

$$m_{i,j} = \int_I \varphi_j \varphi_i dx \quad (1.47)$$

e  $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  é chamado de **vetor de carregamento**

$$b_i = \int_I f \varphi_i dx. \quad (1.48)$$

Ou seja, a projeção  $L^2$  de  $f$  no espaço  $V_h$  é

$$P_h f = \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j, \quad (1.49)$$

onde  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$  é solução do sistema (1.46).

**Exemplo 1.1.2.** A Figura 1.4 ilustra a projeção  $L^2$  da função  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço  $V_h$  das funções lineares por partes em uma malha uniforme do intervalo  $I = [1/4, 3/4]$  com  $n = 4$  subintervalos (5 células).

Código 1.2: ex\_mef1d\_proj.py

```
1 from dolfinx import fem, mesh
2 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
3 import ufl
```

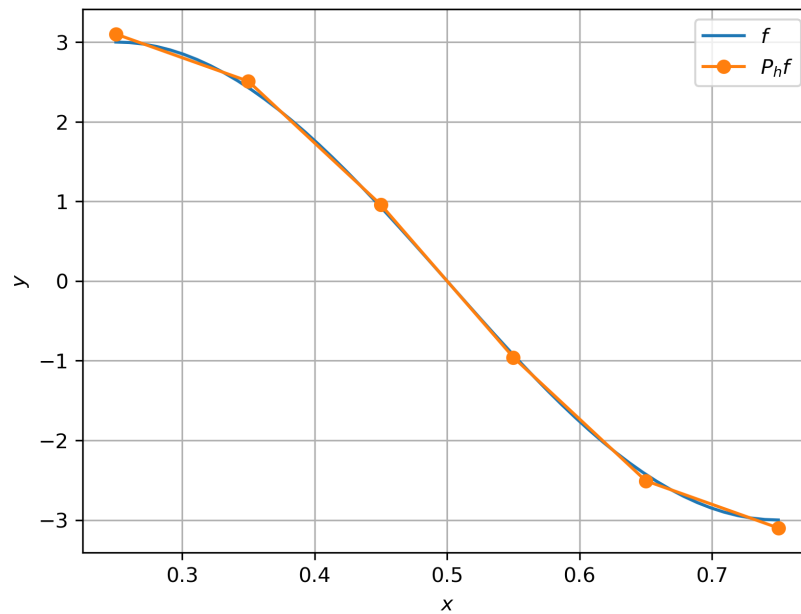


Figura 1.4: Projeção  $L^2$  de  $f(x) = 3\sin(2\pi x)$  no espaço  $V_h$  das funções lineares por partes sobre uma malha com 5 células.

```

4 from mpi4py import MPI
5
6 # malha
7 l0 = 0.25
8 l1 = 0.75
9 domain = mesh.create_interval(MPI.COMM_WORLD,
10                               nx=5,
11                               points=[l0, l1])
12 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
13
14 # espaço
15 V = fem.functionspace(domain, ("P", 1))
16
17 # fun
18 f = 3.*ufl.sin(2.*ufl.pi*x[0])
19
20 # project f

```

```

21 u = ufl.TrialFunction(V)
22 v = ufl.TestFunction(V)
23 a = ufl.dot(u, v) * ufl.dx
24 L = ufl.dot(f, v) * ufl.dx
25 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[])
26 Phf = problem.solve()

```

O próximo teorema mostra que  $P_h f$  é a função que melhor aproxima  $f$  dentre todas as funções do espaço  $V_h$ .

**Teorema 1.1.1.** (A melhor aproximação.) A projeção  $L^2$  satisfaz

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)} \leq \|f - v\|_{L^2(I)}, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.50)$$

*Demonstração.* Dado  $v \in V_h$ , temos

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 = \int_I |f - P_h f|^2 dx \quad (1.51)$$

$$= \int_I (f - P_h f)(f - v + v - P_h f) dx \quad (1.52)$$

$$= \int_I (f - P_h f)(f - v) dx + \int_I (f - P_h f)(v - P_h f) dx \quad (1.53)$$

$$= \int_I (f - P_h f)(f - v) dx \quad (1.54)$$

$$\leq \|f - P_h f\|_{L^2(I)} \|f - v\|_{L^2(I)}, \quad (1.55)$$

donde segue o resultado.  $\square$

O próximo teorema fornece uma estimativa *a-priori* do erro  $\|f - P_h f\|_{L^2(I)}$  em relação ao tamanho da malha.

**Teorema 1.1.2.** A projeção  $L^2$  satisfaz

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.56)$$

*Demonstração.* Tomando a interpolação  $\pi f \in V_h$ , temos do Teorema da melhor aproximação (Teorema 1.1.1) e da estimativa do erro de interpolação (Proposição 1.1.2) que

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 \leq \|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \quad (1.57)$$



$$\leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.58)$$

□

### 1.1.3 Exercícios

Em revisão

**E.1.1.1.** Faça um código para verificar a segunda estimativa da Proposição 1.1.1 no caso da interpolação da função  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço  $P_1$  das funções lineares.

**E.1.1.2.** Faça um código para verificar as estimativas da Proposição 1.1.2 no caso da interpolação da função  $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$  no espaço  $V_h$  das funções lineares por partes.

**E.1.1.3.** Faça um código para computar a projeção  $L^2$   $P_h f$  da função  $f(x) = x - \cos(x)$  no espaço  $V_h$  das funções lineares por partes em uma malha com 10 células no intervalo  $I = [0, \pi]$ . Faça o esboço dos gráficos de  $f$  e  $P_h f$  e compute o erro  $\|f - P_h f\|_{L^2(I)}$ .

### Respostas

**E.1.1.1.** badgeConstrucao

## 1.2 Problema Modelo

Em revisão

Nesta seção, discutimos sobre a aplicação do método de elementos finitos para o seguinte problema de valor de contorno: encontrar  $u$  tal que

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \quad (1.59)$$

$$u(0) = u(L) = 0, \quad (1.60)$$

onde  $f$  é uma função dada.

### 1.2.1 Formulação Fraca

**Em revisão**

A derivação de um método de elementos finitos inicia-se da formulação fraca do problema em um espaço de funções apropriado. No caso do problema (1.59)-(1.60), tomamos o espaço

$$V_0 = \{v \in H^1(I) : v(0) = v(1) = 0\}. \quad (1.61)$$

Ou seja, se  $v \in H^1(I)$ , então  $\|v\|_{L^2(I)} < \infty$ ,  $\|v'\|_{L^2(I)} < \infty$ , bem como  $v$  satisfaz as condições de contorno do problema.

A formulação fraca é, então, obtida multiplicando-se a equação (1.59) por uma função teste  $v \in V_0$  (arbitrária) e integrando-se por partes, i.e.

$$\int_I f v \, dx = - \int_I u'' v \, dx \quad (1.62)$$

$$= \int_I u' v' \, dx - u'(L)v(L) + u'(0)v(0) \quad (1.63)$$

$$(1.64)$$

Donde, das condições de contorno, temos

$$\int_I u' v' \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.65)$$

Desta forma, o problema fraco associado a (1.59)-(1.60) lê-se: encontrar  $u \in V_0$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad (1.66)$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u' v' \, dx \quad (1.67)$$

$$L(v) = \int_I f v \, dx, \quad (1.68)$$

são chamadas de forma bilinear e forma linear, respectivamente.

## 1.2.2 Formulação de Elementos Finitos

### Em revisão

Uma formulação de elementos finitos é uma aproximação do problema fraco (1.66) em um espaço de dimensão finita. Aqui, vamos usar o espaço  $V_{h,0}$  das funções lineares por partes em  $I$  que satisfazem as condições de contorno, i.e.

$$V_{h,0} = \{v \in V_h : v(0) = v(L) = 0\}. \quad (1.69)$$

Então, substituindo o espaço  $V_0$  pelo subespaço  $V_{h,0} \subset V_0$  em (1.66), obtemos o seguinte problema de elementos finitos: encontrar  $u_h \in V_{h,0}$  tal que

$$a(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in V_{h,0}. \quad (1.70)$$

**Observação 1.2.1.** A formulação de elementos finitos não é única, podendo-se trabalhar com outros espaços de funções. No caso em que o espaço da solução é igual ao espaço das funções testes, a abordagem é chamada de método de Galerkin<sup>4</sup>.

Observemos que o problema (1.70) é equivalente a: encontrar  $u_h \in V_{h,0}$  tal que

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1.71)$$

onde  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , são as funções base de  $V_{h,0}$ . Então, como  $u_h \in V_{h,0}$ , temos

$$u_h = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j, \quad (1.72)$$

onde  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , são incógnitas a determinar. I.e., ao computarmos  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , temos obtido a solução  $u_h$  do problema de elementos finitos 1.70.

Agora, da forma bilinear (1.67), temos

$$a(u_h, \varphi_i) = a \left( \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j, \varphi_i \right) \quad (1.73)$$

<sup>4</sup>Boris Grigoryevich Galerkin, matemático e engenheiro soviético. Fonte: [Wikipédia](#).

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i). \quad (1.74)$$

Daí, o problema (1.70) é equivalente a resolvermos o seguinte sistema de equações lineares

$$A\xi = b, \quad (1.75)$$

onde  $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n-1}$  é a matriz de rigidez com

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_I \varphi'_j \varphi'_i dx, \quad (1.76)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$  é o vetor das incógnitas e  $b = (b_i)_{i=1}^{n-1}$  é o vetor de carregamento com

$$b_i = L(\varphi_i) = \int_I f \varphi_i dx. \quad (1.77)$$

**Exemplo 1.2.1.** Consideramos o problema (1.59)-(1.60) com  $f \equiv 1$  e  $L = 1$ , i.e.

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.78)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.79)$$

Neste caso, a solução analítica  $u(x) = -x^2/2 + x/2$  pode ser facilmente obtida por integração.

Agora, vamos computar uma aproximação de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes  $V_{h,0} = \{v \in P_1(I); v(0) = v(1) = 0\}$  construído numa malha uniforme de 5 células no intervalo  $I = [0, 1]$ . Para tanto, consideramos o problema fraco: encontrar  $u \in V_0 = \{v \in H^1(I); v(0) = v(L) = 0\}$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (1.80)$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u' v' dx, \quad L(v) = \int_I f v dx. \quad (1.81)$$

Então, a formulação de elementos finitos associada, lê-se: encontrar  $u_h \in V_{h,0}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (1.82)$$

A Figura ?? apresenta o esboço dos gráficos da solução analítica  $u$  e da sua aproximação de elementos finitos  $u_h$ .

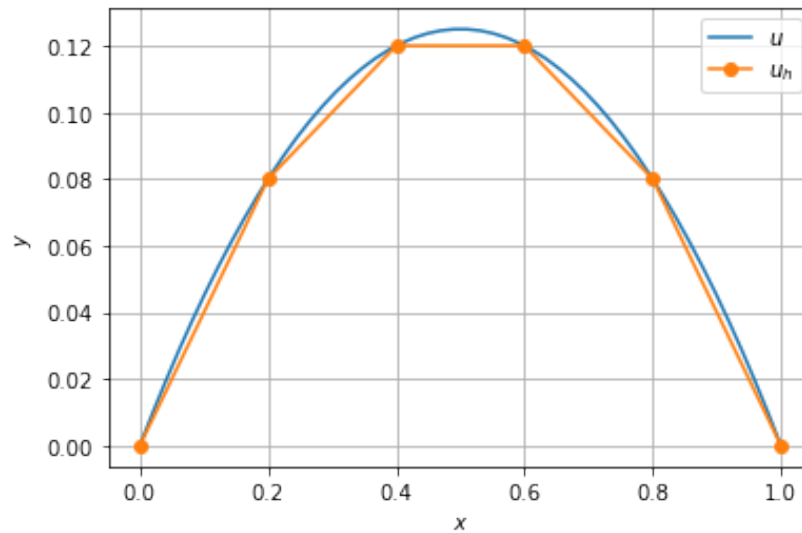


Figura 1.5: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.2.1.

Código 1.3: ex\_mef1d\_modelo.py

```

1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
6                                     nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10
11 # condição de contorno
12 import numpy as np
13 uD = fem.Function(V)
14 uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))
15
16 tdim = domain.topology.dim
17 fdim = tdim - 1
18 domain.topology.create_connectivity(fdim, tdim)
19 boundary_facets = mesh.exterior_facet_indices(

```

```

    domain.topology)
20 boundary_dofs = fem.locate_dofs_topological(V,
    fdim,
21
    boundary_facets)
22 bc = fem.dirichletbc(uD, boundary_dofs)
23
24 # problema mef
25 import ufl
26 from dolfinx import default_scalar_type
27 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
28 u = ufl.TrialFunction(V)
29 v = ufl.TestFunction(V)
30
31 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
32
33 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
34 L = f * v * ufl.dx
35
36 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
37 uh = problem.solve()

```

### 1.2.3 Estimativa *a Priori*

#### Em revisão

Existem dois tipos de **estimativas do erro**  $e := u - u_h$ . Estimativas ***a priori***, são aquelas em que o erro é dado em relação da solução  $u$ , enquanto que nas estimativas ***a posteriori*** o erro é expresso em relação a solução de elementos finitos  $u_h$ .

**Teorema 1.2.1.** (**Ortogonalidade de Galerkin.**) A solução de elementos finitos  $u_h$  de (1.70) satisfaz a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$a(u - u_h, v) := \int_I (u - u_h)' v' dx = 0, \quad v \in V_{h,0}, \quad (1.83)$$

onde  $u$  é a solução de (1.66).

*Demonstração.* De (1.70), (1.66) e lembrando que  $V_{h,0} \subset V_0$ , temos

$$a(u, v) = L(v) = a(u_h, v) \Rightarrow a(u - u_h, v) = 0, \quad (1.84)$$

para todo  $v \in V_{h,0}$ .  $\square$

**Teorema 1.2.2.** (A melhor aproximação.) A solução de elementos finitos  $u_h$  dada por (1.70) satisfaz a seguinte propriedade de melhor aproximação

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \leq \|(u - v)'\|_{L^2(I)}, \quad v \in V_{h,0}, \quad (1.85)$$

onde  $u$  é a solução de (1.66).

*Demonstração.* Escrevendo  $u - u_h = u - v + v - u_h$  para qualquer  $v \in V_{h,0}$  e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 1.2.1), temos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 = \int_I (u - u_h)'(u - u_h)' dx \quad (1.86)$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v + v - u_h)' dx \quad (1.87)$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v)' dx + \int_I (u - u_h)'(v - u_h)' dx \quad (1.88)$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v)' dx \quad (1.89)$$

$$\leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \|(u - v)'\|_{L^2(I)}. \quad (1.90)$$

$\square$

**Teorema 1.2.3.** (Estimativa *a priori*.) O erro em se aproximar a solução  $u$  de (1.66) pela solução de elementos finitos  $u_h$  dada por (1.70) satisfaz a seguinte estimativa *a priori*

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|u''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.91)$$

*Demonstração.* Tomando  $v = \pi u$  no teorema da melhor aproximação (Teorema 1.2.2), obtemos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \leq \|(u - \pi u)'\|_{L^2(I)}. \quad (1.92)$$

Daí, da estimativa do erro de interpolação (Proposição 1.1.2), temos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|u''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.93)$$

□

**Exemplo 1.2.2.** A Figura 1.6 apresenta o esboço da evolução do erro  $\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}$  da solução de elementos finitos do problema (1.78)-(1.79) para malhas uniformes com  $n = 2, 4, 8, \dots, 128$  células.

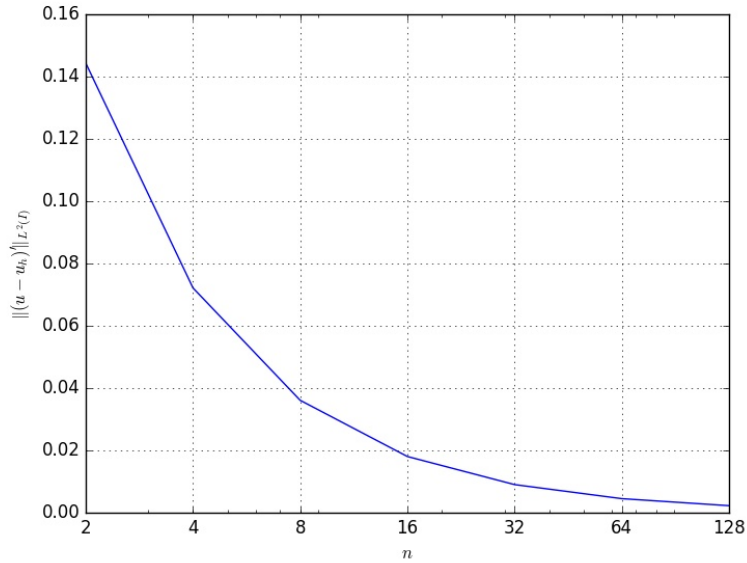


Figura 1.6: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.2.2.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def boundary(x,on_boundary):
```



```
    return on_boundary

def solver(n):
    # malha
    mesh = IntervalMesh(n,0,1)

    # espaco
    V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

    bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

    #MEF problem
    u = TrialFunction(V)
    v = TestFunction(V)
    f = Constant(1.0)
    a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
    L = f*v*dx

    #computa a sol
    u = Function(V)
    solve(a == L, u, bc)

    return u, mesh

#sol analitica
ua = Expression('-x[0]*x[0]/2+x[0]/2',
                degree=2)

lerrors=[]
for n in [2,4,8,16,32,64,128]:
    u, mesh = solver(n)
    e = errornorm(u,ua,norm_type='H10',mesh=mesh)
    lerrors.append(e)

plt.plot([2,4,8,16,32,64,128],lerrors)
plt.xscale('log',base=2)
#plt.yscale('log',base=2)
```

```
plt.xlabel(r"$n$")
plt.ylabel(r"$|| (u-u_h) ||_{L^2(I)}$")
plt.xlim((2,128))
plt.xticks([2,4,8,16,32,64,128],[2,4,8,16,32,64,128])
plt.grid('on')
plt.show()
```

### 1.2.4 Estimativa *a Posteriori*

#### Em revisão

Aqui, vamos obter uma estimativa *a posteriori* para o erro  $e = u - u_h$  da solução de elementos finitos  $u_h$  do problema (1.59)-(1.60).

**Teorema 1.2.4.** *A solução de elementos finitos  $u_h$  satisfaz*

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n \eta_i^2(u_h), \quad (1.94)$$

onde  $\eta_i(u_h)$  é chamado de elemento residual e é dado por

$$\eta_i(u_h) = h_i \|f - u_h''\|_{L^2(I_i)}. \quad (1.95)$$

*Demonstração.* Tomando  $e = u - u_h$  e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 1.2.1) temos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \int_I e'(e - \pi e)' dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} e'(e - \pi e)' dx. \quad (1.96)$$

Então, aplicando integração por partes

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} (-e'')(e - \pi e) dx + [e'(e - \pi e)]_{x_{i-1}}^{x_i}. \quad (1.97)$$

Daí, observando que  $e - \pi e = 0$  nos extremos dos intervalos  $I_i$  e que  $-e'' = -(u - u_h)'' = -u'' + u_h'' = f + u_h''$ , temos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} (f + u_h'')(e - \pi e) dx. \quad (1.98)$$

Agora, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a estimativa padrão de interpolação (1.26), obtemos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|f + u_h\|_{L^2(I_i)} \|e - \pi e\|_{L^2(I_i)} dx \quad (1.99)$$

$$\leq C \sum_{i=1}^n h_i \|f + u_h\|_{L^2(I_i)} \|e'\|_{L^2(I_i)} \quad (1.100)$$

$$\leq C \left( \sum_{i=1}^n h_i^2 \|f + u_h\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n \|e'\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \quad (1.101)$$

$$= C \left( \sum_{i=1}^n h_i^2 \|f + u_h\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \|e'\|_{L^2(I)}, \quad (1.102)$$

donde segue o resultado desejado.  $\square$

**Observação 1.2.2.** No caso da solução de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes, temos  $u_h'' = 0$ . Logo, o elemento residual se resume em  $\eta_i(u_h) = h_i \|f\|_{L^2(I_i)}$ .

### 1.2.5 Exercícios

Em revisão

**E.1.2.1.** Obtenha uma aproximação por elementos finitos lineares por partes da solução de

$$-u'' + u = 2 \sin x, \quad \forall x \in (-\pi, \pi), \quad (1.103)$$

$$u(-\pi) = u(\pi) = 0. \quad (1.104)$$

Respostas

**E.1.2.1.** Código FENiCS.

## 1.3 Condições de Contorno

Em revisão

Nesta seção, vamos discutir sobre **soluções de elementos finitos para a equações diferencial**

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \quad (1.105)$$

**com diferentes condições de contorno.**

### 1.3.1 Condições de Dirichlet

#### Em revisão

Consideramos o seguinte **problema com condições de contorno de Dirichlet**<sup>1</sup>: encontrar  $u$  tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.106)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L, \quad (1.107)$$

com  $u_0$ ,  $u_L$  e  $f$  dados.

Tomando uma função teste  $v \in V_0 := H_0^1(I) := \{v \in H^1(I); v(0) = v(L) = 0\}$  e multiplicando-a em (1.106), obtemos

$$-\int_I u'' v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.108)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u' v' \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.109)$$

Desta forma, definimos o seguinte **problema fraco** associado: encontrar  $u \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = u_0, v(L) = u_L\}$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad (1.110)$$

onde  $a(u, v)$  é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u' v' \, dx \quad (1.111)$$

e  $L(v)$  é a forma linear

$$L(v) = \int_I f v \, dx. \quad (1.112)$$

**Exemplo 1.3.1.** Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.113)$$

$$u(0) = 1/2, \quad u(1) = 1. \quad (1.114)$$

Sua solução analítica é  $u(x) = -x^2/2 + x + 1/2$ .

Para obtermos uma aproximação de elementos finitos, consideramos o seguinte problema fraco: encontrar  $u \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = 1/2, v(1) = 1\}$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (1.115)$$

para todo  $v \in V_0 = \{v \in H^1(I); v(0) = v(1) = 0\}$ , onde

$$a(u, v) = \int_I u' v' dx, \quad (1.116)$$

$$L(v) = \int_I f v dx. \quad (1.117)$$

Então, o problema de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes lê-se: encontrar  $u_h \in V_h = \{v \in P_1(I); v(0) = 1/2, v(1) = 1\}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad (1.118)$$

para todo  $v_h \in V_{h,0} = \{v \in H^1(I); v(0) = v(1) = 0\}$ .

Código 1.4: ex\_mef1d\_dirichlet.py

```
1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
6                                     nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10
11 # condição de contorno
12 import numpy as np
13 uD = fem.Function(V)
```

```
14 def dirichlet_bc(x):
15     y = np.full(x.shape[1], 0.5)
16     y[x[0,:] > 0.5] = 1.
17     return y
18 uD.interpolate(dirichlet_bc)
19
20 tdim = domain.topology.dim
21 fdim = tdim - 1
22 domain.topology.create_connectivity(fdim, tdim)
23 boundary_facets = mesh.exterior_facet_indices(
24     domain.topology)
25 boundary_dofs = fem.locate_dofs_topological(V,
26     fdim,
27     boundary_facets)
28 bc = fem.dirichletbc(uD, boundary_dofs)
29
30 # problema mef
31 import ufl
32 from dolfinx import default_scalar_type
33 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
34 u = ufl.TrialFunction(V)
35 v = ufl.TestFunction(V)
36
37 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
38
39 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
40 L = f * v * ufl.dx
41
42 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
43 uh = problem.solve()
44
45 # armazena para visualização (paraview)
46 from dolfinx import io
47 from pathlib import Path
48 results_folder = Path("results")
49 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
50 filename = results_folder / "u"
```

```

49 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix
    (".xdmf"), "w") as xdmf:
50     xdmf.write_mesh(domain)
51     xdmf.write_function(uh)

```

### 1.3.2 Condições de Neumann

#### Em revisão

Consideramos o seguinte problema com condições de contorno de Neumann<sup>2</sup> homogênea em  $x = L$ : encontrar  $u$  tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.119)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(L) = 0, \quad (1.120)$$

com  $u_0$  e  $f$  dados. Trata-se de um problema com condição de contorno de Dirichlet à esquerda e condição de contorno de Neumann<sup>3</sup> homogênea à direita.

Tomando uma função teste  $v \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$  e multiplicando-a em (1.119), obtemos

$$-\int_I u'' v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.121)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u' v' \, dx - \underbrace{u'(L)v(L)}_{u'(L)=0} + \underbrace{u'(0)v(0)}_{v(0)=0} = \int_I f v \, dx. \quad (1.122)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar  $u \in \tilde{V} := \{v \in H^1(I); v(0) = u_0\}$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.123)$$

onde  $a(u, v)$  é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u' v' \, dx \quad (1.124)$$

e  $L(v)$  é a forma linear

$$L(v) = \int_I f v \, dx. \quad (1.125)$$

**Exemplo 1.3.2.** Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.126)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (1.127)$$

Sua solução analítica é  $u(x) = -x^2/2 + x$ .

Podemos construir uma aproximação por elementos finitos do seguinte problema fraco associado: encontrar  $u \in V = \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (1.128)$$

para todo  $v \in V$ , com as formas bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  e linear  $L(\cdot)$  dadas em (1.124) e (1.125).

Então, considerando elementos lineares por partes, temos o seguinte problema de elementos finitos: encontrar  $u_h \in V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = 0\}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.129)$$

Código 1.5: ex\_mef1d\_neumann.py

```

1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
6                                     nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10
11 # c.c. dirichlet
12 import numpy as np
13 from dolfinx.fem import dirichletbc,
14    locate_dofs_geometrical
15 uD = fem.Function(V)
16 uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))
17
18 def boundary_D(x):

```



```

18     return np.isclose(x[0], 0.)
19
20 dofs_D = locate_dofs_geometrical(V, boundary_D)
21 bc = dirichletbc(uD, dofs_D)
22
23 # problema mef
24 import ufl
25 from dolfinx import default_scalar_type
26 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
27 u = ufl.TrialFunction(V)
28 v = ufl.TestFunction(V)
29
30 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
31
32 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
33 L = f * v * ufl.dx
34
35 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
36 uh = problem.solve()
37
38 # armazena para visualização (paraview)
39 from dolfinx import io
40 from pathlib import Path
41 results_folder = Path("results")
42 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
43 filename = results_folder / "u"
44 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(
45     ".xdmf"), "w") as xdmf:
46     xdmf.write_mesh(domain)
47     xdmf.write_function(uh)

```

Agora, consideramos o seguinte problema com condições de Neumann não-homogênea em  $x = L$ : encontrar  $u$  tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.130)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(L) = \alpha, \quad (1.131)$$

com  $u_0$ ,  $\alpha$  e  $f$  dados.

Tomando uma função teste  $v \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$  e multiplicando-a em (1.130), obtemos

$$-\int_I u'' v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.132)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u' v' \, dx - \alpha v(L) = \int_I f v \, dx. \quad (1.133)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar  $u \in \tilde{V} := \{v \in H^1(I); v(0) = u_0\}$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.134)$$

onde  $a(u, v)$  é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u' v' \, dx \quad (1.135)$$

e  $L(v)$  é a forma linear

$$L(v) = \int_I f v \, dx + \alpha v(L). \quad (1.136)$$

**Exemplo 1.3.3.** Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.137)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 1. \quad (1.138)$$

Sua solução analítica é  $u(x) = -x^2/2 + 2x$ .

Agora, consideramos o seguinte problema fraco associado: encontrar  $u \in V = \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.139)$$

com

$$a(u, v) = \int_I u' v' \, dx \quad (1.140)$$

e

$$L(v) = \int_I f v \, dx + 1 \cdot v(1). \quad (1.141)$$

Então, consideramos o seguinte problema de elementos finitos associado: encontrar  $u_h \in V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = 0\}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.142)$$

Código 1.6: ex\_mefld\_neumann\_nh.py

```

1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
6                                     nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10
11 # c.c. dirichlet
12 import numpy as np
13 from dolfinx.fem import dirichletbc,
14     locate_dofs_geometrical
15 uD = fem.Function(V)
16 uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))
17
18 def boundary_D(x):
19     return np.isclose(x[0], 0.)
20
21 dofs_D = locate_dofs_geometrical(V, boundary_D)
22 bc = dirichletbc(uD, dofs_D)
23
24 # problema mef
25 import ufl
26 from dolfinx import default_scalar_type
27 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
28 u = ufl.TrialFunction(V)
29 v = ufl.TestFunction(V)
30
31 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
32 g = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))

```

```

32
33 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
34 L = f * v * ufl.dx
35 L += g * v * ufl.ds
36
37 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
38 uh = problem.solve()
39
40 # armazena para visualização (paraview)
41 from dolfinx import io
42 from pathlib import Path
43 results_folder = Path("results")
44 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
45 filename = results_folder / "u"
46 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(
    ("xdmf"), "w") as xdmf:
47     xdmf.write_mesh(domain)
48     xdmf.write_function(uh)

```

### 1.3.3 Condições de Robin

#### Em revisão

Consideramos o seguinte problema com condições de contorno de Robin<sup>4</sup>: encontrar  $u$  tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.143)$$

$$u'(0) = r_0(u(0) - s_0), \quad -u'(L) = r_L(u(L) - s_L), \quad (1.144)$$

com  $r_0, r_L, s_0, s_L$  e  $f$  dados.

Tomando uma função teste  $v \in V = H^1(I)$  e multiplicando-a em (1.143), obtemos

$$-\int_I u'' v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.145)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u' v' \, dx - \underbrace{u'(L)v(L)}_{-u'(L)=r_L(u(L)-s_L)} + \underbrace{u'(0)v(0)}_{u'(0)=r_0(u(0)-s_0)} = \int_I f v \, dx. \quad (1.146)$$

ou, mais adequadamente,

$$\int_I u'v' dx + r_L u(L)v(L) + r_0 u(0)v(0) = \int_I f v dx + r_L s_L v(L) + r_0 s_0 v(0). \quad (1.147)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar  $u \in H^1(I)$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.148)$$

onde  $a(u, v)$  é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u'v' dx + r_L u(L)v(L) + r_0 u(0)v(0) \quad (1.149)$$

e  $L(v)$  é a forma linear

$$L(v) = \int_I f v dx + r_L s_L v(L) + r_0 s_0 v(0). \quad (1.150)$$

**Exemplo 1.3.4.** Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.151)$$

$$u'(0) = u(0), \quad -u'(1) = u(1) - 1. \quad (1.152)$$

Sua solução analítica é  $u(x) = -x^2/2 + 5x/6 + 5/6$ .

Aqui, tomamos o seguinte problema fraco: encontrar  $u \in V = H^1(I)$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.153)$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u'v' dx + u(1)v(1) + u(0)v(0) \quad (1.154)$$

e

$$L(v) = \int_I f v dx + 1 \cdot v(1). \quad (1.155)$$

Então, uma aproximação por elementos finitos lineares por partes pode ser obtida resolvendo o seguinte problema: encontrar  $u_h \in V_h = P_1(I)$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.156)$$

```
1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
6                                     nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10
11 # boundary colors
12 from dolfinx.mesh import locate_entities
13 from dolfinx.mesh import meshtags
14 boundaries = [(0, lambda x: np.isclose(x[0], 0.)),
15               (1, lambda x: np.isclose(x[0], 1.))]
16 facet_indices, facet_markers = [], []
17 fdim = domain.topology.dim - 1
18 for (marker, locator) in boundaries:
19     facets = locate_entities(domain, fdim, locator
20                             )
21     facet_indices.append(facets)
22     facet_markers.append(np.full_like(facets,
23                                       marker))
24 facet_indices = np.hstack(facet_indices).astype(np
25 .int32)
26 facet_markers = np.hstack(facet_markers).astype(np
27 .int32)
28 sorted_facets = np.argsort(facet_indices)
29 facet_tag = meshtags(domain, fdim, facet_indices[
30 sorted_facets], facet_markers[sorted_facets])
31
32 # problema mef
33 import ufl
34 from dolfinx import default_scalar_type
35 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
36 u = ufl.TrialFunction(V)
37 v = ufl.TestFunction(V)
```

```

34 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
35 g = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
36
37 ds = ufl.Measure('ds', domain=domain,
    subdomain_data=facet_tag)
38
39 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
40 a += u * v * ds(1) + u * v * ds(0)
41 L = f * v * ufl.dx
42 L += g * v * ds(1)
43
44 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[])
45 uh = problem.solve()
46
47 # armazena para visualização (paraview)
48 from dolfinx import io
49 from pathlib import Path
50 results_folder = Path("results")
51 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
52 filename = results_folder / "u"
53 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(
    ".xdmf"), "w") as xdmf:
54     xdmf.write_mesh(domain)
55     xdmf.write_function(uh)

```

### 1.3.4 Exercícios

#### Em revisão

**E.1.3.1.** Considere o problema

$$-u'' + u' + 2u = -\cos(x), \quad x \in (0, \pi/2), \quad (1.157)$$

$$u(0) = -0,3, \quad u(\pi/2) = -0,1. \quad (1.158)$$

Obtenha uma aproximação por elementos finitos para a solução deste problema, empregando o espaço de elementos finitos linear sobre uma malha uniforme com 10 células. Então, compare a aproximação computada com

sua solução analítica  $u(x) = 0,1(\sin(x) + 3\cos(x))$ , bem como, compute o erro  $\|u - u_h\|_{L^2}$ .

## Respostas

### E.1.3.1. Código.

## 1.4 Malhas Auto-Adaptativas

### Em revisão

Retornemos ao problema modelo (1.59)-(1.60)

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \quad (1.159)$$

$$u(0) = u(L) = 0. \quad (1.160)$$

A estimativa *a posteriori* dada no Teorema 1.2.4, indica que os elementos residuais  $\eta_i(u_h)$  podem ser utilizados para estimarmos a precisão da aproximação por elementos finitos. Ou seja, espera-se que quanto menores forem os elementos residuais, mais precisa é a solução por elementos finitos. Além disso, como

$$\eta_i(u_h) = h_i \|f - u_h''\|_{L^2(I_i)}, \quad (1.161)$$

podemos reduzir  $\eta_i(u_h)$  diminuindo o tamanho da célula  $I_i$ .

Do observado acima, motiva-se o seguinte algoritmo de elementos finitos com refinamento automático de malha:

1. Escolhemos uma malha inicial.
2. Iteramos:
  2. Resolvemos o problema de elementos finitos na malha corrente.
  2. Computamos  $\eta_i(u_h)$  em cada célula da malha corrente.
  2. Com base na malha corrente, Construimos uma nova malha pelo refinamento das células com os maiores valores de  $\eta_i(u_h)$ .
  2. Verificamos o critério de parada.



Uma estratégia clássica para a escolha das células a serem refinadas é a seguinte: refina-se a  $i$ -ésima célula se

$$\eta_i(u_h) > \alpha \max_{j=1,2,\dots,n} \eta_j(u_h), \quad (1.162)$$

onde escolhemos  $0 < \alpha < 1$ .

**Exemplo 1.4.1.** Consideramos o problema

$$-u'' = e^{-100|x-\frac{1}{2}|}, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.163)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.164)$$

Aqui, computamos aproximações de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes  $V_{h,0} = \{v \in P_1(I); v(0) = v(1) = 0\}$  com sucessivos refinamentos de malha. Utilizamos uma malha inicial uniforme com 10 células e fazemos, então, 5 refinamentos sucessivos utilizando como critério de refinamento a estratégia (1.162) com  $\alpha = 0,5$ . A Figura 1.7 apresenta o esboço do gráfico da solução de elementos finitos na malha mais refinada. Além disso, na Tabela 1.1 temos os o número de células e o  $\eta_i(u_h)$  máximo respectivo.

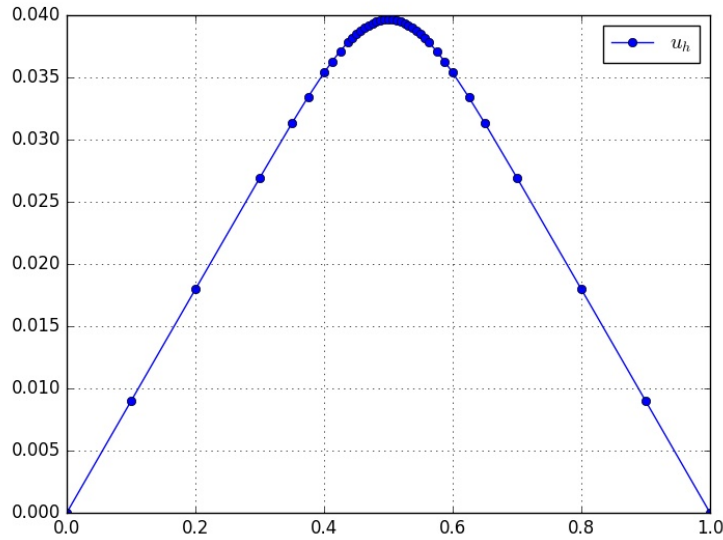


Figura 1.7: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.4.1.

#malha	#células	$\max_i \eta_i(u_h)$
0	10	5.0E-03
1	12	2.0E-03
2	14	8.6E-04
3	22	2.9E-04
4	30	1.4E-04
5	38	6.1E-05

Tabela 1.1: Resultados referente ao Exemplo 1.4.1.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte [código](#):

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
mesh = IntervalMesh(10,0,1)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# fonte
f = Expression('exp(-100*pow(fabs(x[0]-0.5),2))',degree=1)

# condicoes de contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

#iteracoes
for iter in np.arange(6):

    #problema
    bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)
    u = TrialFunction(V)
    v = TestFunction(V)
```

```
a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
L = f*v*dx

#resolve
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

#grafico
plt.close('all')
xx = mesh.coordinates()[ :,0]
sorted_indices = np.argsort(xx)
yy = u.compute_vertex_values()
plt.plot(xx[sorted_indices],yy[sorted_indices],
         marker="o",label=r"$u_h$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()

DG = FunctionSpace(mesh, "DG", 0)
v = TestFunction(DG)
a = CellVolume(mesh)
eta = assemble(f**2*v*a*dx)

# refinamento da malha
cell_markers = MeshFunction("bool", mesh, mesh.topology().dim(), False)
eta_max = np.amax(eta[:])
print(eta_max)
print("%d %d %1.1E\n" % (iter,mesh.num_cells(),eta_max))
alpha = 0.5
for i,cell in enumerate(cells(mesh)):
    if (eta[i] > alpha*eta_max):
        cell_markers[cell] = True

mesh = refine(mesh, cell_markers)
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

### 1.4.1 Exercícios

Em revisão

**E.1.4.1.** Use uma estratégia de sucessivos refinamentos globais para resolver o problema dado no Exemplo 1.4.1. Compare seus resultados com aqueles obtidos no exemplo.

Respostas

**E.1.4.1.** Código.

## 1.5 Aplicação: EDP Evolutiva

Em revisão

Como exemplo de **aplicação do método de elementos finitos (MEF) na solução de equações diferenciais parciais evolutivas no tempo**, consideramos a **equação do calor** com dadas condição inicial e condições de contorno de Dirichlet homogêneas

$$u_t = \alpha u_{xx} + f, \quad (t, x) \in (0, t_f] \times (a, b), \quad (1.165a)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.165b)$$

$$u(t, a) = u(t, b) = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (1.165c)$$

onde  $f = f(t, x)$  denota uma dada fonte.

### 1.5.1 Discretização do Tempo

Consideramos os  $n_t + 1$  tempos discretos  $t^{(k)} = kh_t$ , passo no tempo  $h_t = t_f/n_t$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n_t$ . Seguindo esquema  $\theta$  denotando  $u^{(k)} \approx u(t^{(k)}, x)$  e  $f^{(k)} = f(t^{(k)}, x)$ , o problema (1.165) pode ser aproximado pela iteração

$$\begin{aligned} \frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{h_t} &= \theta \left( \alpha u_{xx}^{(k+1)} + f^{(k+1)} \right) \\ &\quad (1 - \theta) \left( \alpha u_{xx}^{(k)} + f^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (1.166a)$$

$$u^{(k+1)}(a) = u^{(k+1)}(b) = 0, \quad (1.166b)$$

onde  $u^{(0)} = u_0$ .

**Observação 1.5.1.** (Esquema  $\theta$ .) O esquema  $\theta$  é uma forma robusta de escrever diferentes esquemas de discretização em uma única expressão:

- $\theta = 0$ .: Euler explícito.
- $\theta = 1$ .: Euler implícito.
- $\theta = 0.5$ : Crank-Nicolson.

Por simplificação da notação, vamos suprimir o super-índice  $k$ , denotando  $u^{(k+1)} := u$ ,  $u^{(k)} = u^0$  e similar para  $f^{(k)}$ . Com isso e rearranjando os termos, cada iteração (1.166) se resume ao seguinte problema de valores de contorno

$$-\alpha\theta u_{xx} + \frac{1}{h_t}u = \frac{1}{h_t}u^0 + (1-\theta)\alpha u_{xx}^0 + (1-\theta)f^0 + \theta f, \quad (1.167a)$$

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (1.167b)$$

## 1.5.2 Formulação de Elementos Finitos

A formulação fraca do problema (1.167) consiste em: encontrar  $u \in V := H_0^1(a, b)$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.168)$$

onde

$$a(u, v) := \int_a^b \theta \alpha u' v' dx + \int_a^b \frac{1}{h_t} uv dx, \quad (1.169)$$

$$L(v) := (1-\theta) \int_a^b \alpha u^{0'} v' dx + \int_a^b \frac{1}{h_t} u^0 v dx + \theta \int_a^b f v dx + (1-\theta) \int_a^b f^0 v dx \quad (1.170)$$

Então, assumindo uma malha com  $n_x$  células  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  de tamanho  $h_x = (b-a)/n_x$  e nodos  $x_i = a + (i-1)h_x$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n_x$ , escolhemos o

espaço de elementos finitos

$$V_{h,0} := \{v \in C^0([a, b]) : v|_{I_i} \in P_1(I_i), i = 0, 1, \dots, n_x, v(a) = v(b) = 0\}. \quad (1.171)$$

Com isso, a formulação de elementos finitos do problema (1.167) consiste em: encontrar  $u_h \in V_{h,0}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (1.172)$$

**Exemplo 1.5.1.** Consideramos o seguinte problema de calor

$$u_t = u_{xx} + (\pi^2 - 1)e^{-t} \sin(\pi x), \quad (t, x) \in (0, 1] \times (0, 1), \quad (1.173a)$$

$$u(0, x) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.173b)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0. \quad (1.173c)$$

```

1 from mpi4py import MPI
2 import ufl
3 from dolfinx import mesh
4 from dolfinx import fem
5 from dolfinx import default_scalar_type
6 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
7
8 # parâmetros
9 tf = 1.
10 alpha = 1.
11
12 # esquema theta
13 theta = 0.5
14
15 # discretização no tempo
16 nt = 10
17 ht = tf/nt
18
19 # malha
20 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
21                                   nx = 5)
22 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)

```

```
23
24 # espaço
25 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
26
27 # fonte
28 f = fem.Function(V)
29 def f(t,x):
30     return (ufl.pi**2-1.)*ufl.exp(-t)*ufl.sin(ufl.
    pi*x[0])
31
32 # condição de contorno
33 import numpy as np
34 uD = fem.Function(V)
35 uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))
36
37 def boundary_D(x):
38     return np.logical_or(np.isclose(x[0], 0.),
39                           np.isclose(x[0], 1.))
40
41 dofs_D = fem.locate_dofs_geometrical(V, boundary_D
    )
42 bc = fem.dirichletbc(uD, dofs_D)
43
44 # mef fun.s
45 u = ufl.TrialFunction(V)
46 v = ufl.TestFunction(V)
47
48 # condição inicial
49 t = 0.
50 u0 = fem.Function(V)
51 u0.interpolate(lambda x: np.sin(np.pi*x[0]))
52
53 # fonte
54 def f(t, x):
55     return (ufl.pi**2-1.)*ufl.exp(-t)*ufl.sin(ufl.
    pi*x[0])
56
57 # visualização (paraview)
```

```
58 from dolfinx import io
59 from pathlib import Path
60 results_folder = Path("results")
61 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
62
63 # iteração no tempo
64 for k in range(nt):
65     t += ht
66
67     # forma bilinear
68     a = theta * ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v))
69     * ufl.dx
70     a += u * v / ht * ufl.dx
71
72     # forma linear
73     L = (theta-1.) * ufl.dot(ufl.grad(u0), ufl.
74 grad(v)) * ufl.dx
75     L += u0 * v / ht * ufl.dx
76     L += theta * f(t, x) * v * ufl.dx
77     L += (1.-theta) * f(t-ht, x) * v * ufl.dx
78
79     problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
80     uh = problem.solve()
81
82     # armazena para visualização (paraview)
83     filename = results_folder / f"u_{k:0>6}"
84     with io.XDMFFile(domain.comm, filename.
85 with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:
86         xdmf.write_mesh(domain)
87         xdmf.write_function(uh, t)
88
89     u0.x.array[:] = uh.x.array[:]
```

### 1.5.3 Exercícios

Em construção



## 1.6 Aplicação: EDP de Advecção-Difusão

### Em construção

Consideramos a equação de advecção-Difusão

$$cu' - \epsilon u'' = f, \quad (1.174)$$

no domínio  $x \in [0, 1]$ , com  $c \neq 0$ ,  $\epsilon > 0$  e condições de contorno de Dirichlet<sup>5</sup> homogêneas.

A formulação padrão de elementos finitos de Galerkin consiste em: encontrar  $u_h \in V_h$  tal que

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad (1.175)$$

para todo  $v_h \in V_h$ . Aqui, vamos assumir que o espaço de elementos finitos  $V_h$  da funções  $v_h$  lineares por partes com  $v(0) = v(1) = 0$ . No caso de (1.174), temos a forma bilinear

$$a(u_h, v_h) := (cu'_h, v_h) + (\epsilon u'_h, v'_h) \quad (1.176)$$

e a forma linear

$$l(v_h) := (f, v_h). \quad (1.177)$$

Para problema dominados pela advecção/convecção ( $\epsilon \lll 1$ ), soluções da formulação padrão de elementos finitos tem grande dificuldade de tratar as camadas (regiões de rápida variação) que tipicamente fazem parte da solução do problema de advecção-difusão. A alternativa é usar os chamados métodos de elementos finitos estabilizados.

O método SUPG (*streamline upwind Petrov-Galerkin*) é uma formulação de estabilização para elementos finitos. A formulação de elementos finitos estabilizada é construída com a função teste  $v_h + \tau cv'_h \in V_h$ ,  $\tau > 0$ , o que fornece

$$(cu'_h, v_h + \tau cv'_h) - (\epsilon u''_h, v_h + \tau cv'_h) = (f, v_h + \tau cv'_h). \quad (1.178)$$

Que por intergração por partes e das condições de contorno fornece

$$(cu'_h, v_h + \tau cv'_h) + (\epsilon u'_h, v'_h + \tau cv''_h) = (f, v_h + \tau cv'_h). \quad (1.179)$$

Observando que para elementos lineares  $v_h'' = 0$ , temos a formulação de elementos finitos com SUPG: encontrar  $u_h \in V_h$  tal que

$$b(u_h, v_h) = l(v_h + \tau c v_h') \quad (1.180)$$

para todo  $v_h \in V_h$ , sendo a forma bilinear

$$b(u_h, v_h) := (cu_h', v_h + \tau cv_h') + (\epsilon u_h', v_h'). \quad (1.181)$$

Uma escolha razoável é  $\tau = h/2$  de forma que  $\tau \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ .

### 1.6.1 Exercícios

Em construção

## 1.7 Aplicação: EDP Não-Linear

Em construção

Como exemplo de aplicação do MEF na solução de **equações diferenciais parciais não-lineares**, consideramos a **equação de Fisher**<sup>6</sup> com dadas condição inicial e condições de contorno de Neumann<sup>7</sup>

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u), \quad (t, x) \in (0, t_f] \times (0, 1), \quad (1.182a)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.182b)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t \in [0, t_f]. \quad (1.182c)$$

### 1.7.1 Discretização do Tempo

Consideramos os  $n_t + 1$  tempos discretos  $t^{(k)} = kh_t$ , passo no tempo  $h_t = t_f/n_t$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n_t$ . Seguindo esquema  $\theta$  denotando  $u^{(k)} \approx u(t^{(k)}, x)$ , o problema (1.182) pode ser aproximado pela iteração

$$\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{h_t} = \theta \left[ u_{xx}^{(k+1)} + u^{(k+1)} (1 - u^{(k+1)}) \right] \\ (1 - \theta) \left[ u_{xx}^{(k)} + u^{(k)} (1 - u^{(k)}) \right], \quad (1.183a)$$

$$u_x^{(k+1)}(0) = u_x^{(k+1)}(1) = 0, \quad (1.183b)$$

onde  $u^{(0)} = u_0$ .

**Observação 1.7.1.** (Esquema  $\theta$ .) O esquema  $\theta$  é uma forma robusta de escrever diferentes esquemas de discretização em uma única expressão:

- $\theta = 0$ .: Euler explícito.
- $\theta = 1$ .: Euler implícito.
- $\theta = 0.5$ : Crank-Nicolson.

Por simplificação da notação, vamos suprimir o super-índice  $k$ , denotando  $u^{(k+1)} := u$ ,  $u^{(k)} = u^0$ . Com isso e rearranjando os termos, cada iteração (1.183) se resume ao seguinte problema de valores de contorno

$$\frac{1}{h_t}u - \frac{1}{h_t}u^0 - \theta [u_x x + u(1 - u)] - (1 - \theta) [u_x^0 x + u^0(1 - u^0)], \quad (1.184a)$$

$$u_x(0) = u_x(1) = 0. \quad (1.184b)$$

## 1.7.2 Formulação de Elementos Finitos

### Em revisão

A formulação fraca do problema (1.184) consiste em: encontrar  $u \in V := H^1[0, 1]$  tal que

$$F(u; v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (1.185)$$

onde

$$\begin{aligned} F(u; v) := & \int_0^1 \frac{1}{h_t} u \, dx - \int_0^1 \frac{1}{h_t} u^0 \, dx \\ & + \theta \int_0^1 u_x v_x \, dx - \theta \int_0^1 u(1 - u)v \, dx \\ & + (1 - \theta) \int_0^1 u_x^0 v_x \, dx - (1 - \theta) \int_0^1 u^0(1 - u^0)v \, dx. \end{aligned} \quad (1.186)$$

Então, assumindo uma malha com  $n_x$  células  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  de tamanho  $h_x = 1/n_x$  e nodos  $x_i = (i - 1)h_x$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n_x$ , escolhemos o espaço de elementos finitos

$$V_h := \{v \in C^0([a, b]) : v|_{I_i} \in P_1(I_i), \, i = 0, 1, \dots, n_x\}. \quad (1.187)$$

Com isso, a formulação de elementos finitos do problema (1.184) consiste em: encontrar  $u_h \in V_h$  tal que

$$F(u_h; v) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.188)$$

**Observação 1.7.2.** O problema (1.188) consiste em um sistema de equações não-lineares.

**Exemplo 1.7.1.** Consideramos a equação de Fisher com condições inicial e de contorno

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u), \quad t \in (0, t_f) \times (0, 1), \quad (1.189a)$$

$$u(0, x) = \cos^2(\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.189b)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (1.189c)$$

com  $t_f = 5$ .

Código 1.7: ex\_mef1d\_fisher.py

```
1  from mpi4py import MPI
2  import numpy as np
3  import ufl
4  from dolfinx import mesh
5  from dolfinx import fem
6  from dolfinx import default_scalar_type
7  from dolfinx.fem.petsc import NonlinearProblem
8  from dolfinx.nls.petsc import NewtonSolver
9
10 # parâmetros
11 tf = 5.
12
13 # esquema theta
14 theta = 0.5
15
16 # discretização no tempo
17 nt = 100
18 ht = tf/nt
19
20 # malha
```

```
21 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.  
    COMM_WORLD,  
22                                     nx = 5)  
23 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)  
24  
25 # espaço  
26 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))  
27  
28 # mef fun.s  
29 v = ufl.TestFunction(V)  
30 u = fem.Function(V)  
31  
32 # condição inicial  
33 t = 0.  
34 u0 = fem.Function(V)  
35 u0.interpolate(lambda x: np.cos(np.pi*x[0])**2)  
36  
37 # inicialização  
38 u.x.array[:] = u0.x.array[:]  
39  
40 # visualização (paraview)  
41 from dolfinx import io  
42 from pathlib import Path  
43 results_folder = Path("results")  
44 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)  
45 )  
46 # armazena para visualização (paraview)  
47 filename = results_folder / f"u_{0:0>6}"  
48 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.  
    with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:  
49     xdmf.write_mesh(domain)  
50     xdmf.write_function(u, 0.)  
51  
52  
53 # iteração no tempo  
54 for k in range(nt):  
55
```

```

56     t += ht
57     print(f"{k+1}: t = {t:.4g}")
58
59     # forma fraca
60     ## time term
61     F = 1./ht * u * v * ufl.dx
62     F -= 1./ht * u0 * v * ufl.dx
63     ## diffusion term
64     F += theta * ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v
65 )) * ufl.dx
66     F += (1.-theta) * ufl.dot(ufl.grad(u0), ufl.
67 grad(v)) * ufl.dx
68     ## reaction term
69     F -= theta * u * (1. - u) * v * ufl.dx
70     F -= (1.-theta) * u0 * (1. - u0) * v * ufl.
71 dx
72
73     problem = NonlinearProblem(F, u)
74     solver = NewtonSolver(MPI.COMM_WORLD,
75 problem)
76     n, converged = solver.solve(u)
77     print(f"\tNewton iterations: {n}")
78     assert(converged)
79
80     # armazena para visualização (paraview)
81     filename = results_folder / f"u_{k+1:0>6}"
82     with io.XDMFFile(domain.comm, filename.
83 with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:
84         xdmf.write_mesh(domain)
85         xdmf.write_function(u, t)
86
87     u0.x.array[:] = u.x.array[:]

```

### 1.7.3 Exercícios

Em construção

## 1.8 Seleção de Aplicações

Em revisão

### 1.8.1 Sistemas de Equações

Em revisão

Consideramos o seguinte problema de equações diferenciais ordinárias com valores de contorno

$$-u_0'' + u_1 = f_0, \forall x \in (0, L) \quad (1.190)$$

$$-u_1'' + u_0 = f_1, \forall x \in (0, L) \quad (1.191)$$

$$u_0(0) = u_{00}, \quad u_0(L) = u_{0L}, \quad (1.192)$$

$$u_1(0) = u_{10}, \quad u_1(L) = u_{1L}, \quad (1.193)$$

onde  $f_0, f_1, u_{00}, u_{0L}, u_{10}, u_{1L}$  são dados.

Para construirmos uma aproximação por elementos finitos podemos tomar o seguinte problema fraco associado: encontrar  $u = (u_0, u_1) \in V_0 \times V_1$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \forall v = (v_0, v_1) \in V \times V, \quad (1.194)$$

onde  $V_0 = \{v \in H^1(I); v_0(0) = u_{00}, v_0(L) = u_{0L}\}$ ,  $V_1 = \{v_1 \in H^1(I); v_1(0) = u_{10}, v_1(L) = u_{1L}\}$ ,  $V = \{v \in H^1(I); v(0) = v(L) = 0\}$ , a forma bilinear é

$$a(u, v) = \int_I u_0' v_0' dx + \int_I u_1' v_1' dx + \int_I u_1 v_0 dx + \int_I u_0 v_1 dx \quad (1.195)$$

e a forma linear é

$$L(v) = \int_I f_0 v_0 dx + \int_I f_1 v_1 dx. \quad (1.196)$$

Então, o problema de elemento finitos associado no espaço das funções lineares por partes lê-se: encontrar  $u_h = (u_{h0}, u_{h1}) \in V_{h0} \times V_{h1}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h = (v_{h0}, v_{h1}) \in V_h \times V_h, \quad (1.197)$$

onde  $V_{h0} = \{v_h \in P_1(I); v_{h0}(0) = u_{00}, v_{h0}(L) = u_{0L}\}$ ,  $V_{h1} = \{v_{h1} \in P_1(I); v_{h1}(0) = u_{10}, v_{h1}(L) = u_{1L}\}$ ,  $V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = v_h(L) = 0\}$ .

**Exemplo 1.8.1.** Consideramos o seguinte problema de valor de contorno

$$-u_0'' + u_1 = \sin(x) + \cos(x), \forall x \in (-\pi, \pi) \quad (1.198)$$

$$-u_1'' + u_0 = \cos(x) - \sin(x), \forall x \in (-\pi, \pi) \quad (1.199)$$

$$u_0(-\pi) = 0, \quad u_0(\pi) = 0, \quad (1.200)$$

$$u_1(-\pi) = -1, \quad u_1(\pi) = -1. \quad (1.201)$$

Considerando elementos lineares por partes, temos a seguinte formulação de elementos finitos: encontrar  $u_h = (u_{h0}, u_{h1}) \in V_{h0} \times V_{h1}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h = (v_{h0}, v_{h1}) \in V_h \times V_h, \quad (1.202)$$

onde  $V_{h0} = \{v_h \in P_1(I); v_{h0}(0) = v_{h0}(L) = 0\}$ ,  $V_{h1} = \{v_{h1} \in P_1(I); v_{h1}(0) = v_{h1}(L) = -1\}$ ,  $V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = v_h(L) = 0\}$ , com as formas bilinear e linear são dadas em (1.195) e (1.196), respectivamente.

A Figura 1.8 apresenta o esboço dos gráficos das soluções analíticas  $u_0(x) = \sin(x)$  e  $u_1(x) = \cos(x)$  e de suas aproximações de elementos finitos  $u_{h0}$  e  $u_{h1}$ , estas construídas no espaço dos polinômios lineares por partes sobre uma malha uniforme de 5 células.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte [código](#):

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#tolerance
tol=1e-14

# malha
mesh = IntervalMesh(10,-pi,pi)

# espaco
P1 = FiniteElement('P',interval,1)
element = MixedElement([P1,P1])
V = FunctionSpace(mesh, element)
```



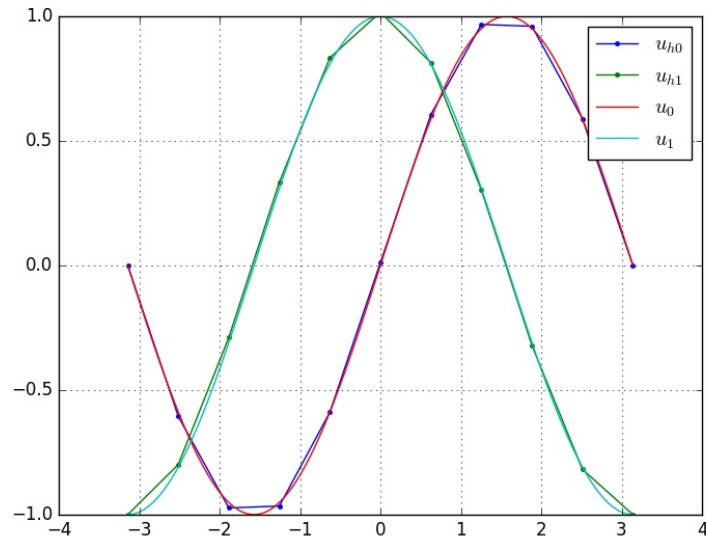


Figura 1.8: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.8.1.

```
#C.C.
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = [DirichletBC(V.sub(0),Constant(0.0),boundary),
      DirichletBC(V.sub(1),Constant(-1.0),boundary)]
print(bc)

#MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f0 = Expression('sin(x[0]) + cos(x[0])',
                degree=10)
f1 = Expression('cos(x[0]) - sin(x[0])',
                degree=10)
a = u[0].dx(0)*v[0].dx(0)*dx
a += u[1]*v[0]*dx
```

```
a += u[1].dx(0)*v[1].dx(0)*dx
a -= u[0]*v[1]*dx
L  = f0*v[0]*dx
L += f1*v[1]*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

#sol analitica
u0a = Expression('sin(x[0])',
                  degree=10)
u1a = Expression('cos(x[0])',
                  degree=10)

plot(u[0],mesh=mesh,marker='.',label=r"$u_{h0}$")
plot(u[1],mesh=mesh,marker='.',label=r"$u_{h1}$")
mesh = IntervalMesh(100,-pi,pi)
plot(u0a,mesh=mesh,label=r"$u_0$")
plot(u1a,mesh=mesh,label=r"$u_1$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()
```

### 1.8.2 Exercícios

[[tag:construcao]]

# Capítulo 2

## Problemas Bidimensionais

### 2.1 Malha e Espaço

Em revisão

#### 2.1.1 Malha

Em revisão

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  suave e poligonal. Uma **malha (ou triangularização)  $\mathcal{K}$  de  $\Omega$  é um conjunto de  $\{K\}$  células (ou elementos)  $K$ , em que  $\Omega = \cup_{K \in \mathcal{K}} K$  e tal que a interseção de duas células é ou um lado, um canto ou vazio.**

Classicamente as células  $K$  são escolhidas como triângulos. **O comprimento do maior lado da célula  $K$  define o chamado tamanho local da malha  $h_K$ .** O **tamanho global da malha** é definida por  $h = \max_{K \in \mathcal{K}} h_K$ .

Uma **malha** é dita **regular** quando existe uma constante  $c_0 > 0$  tal que  $c_K > c_0$  para todo  $K \in \mathcal{K}$ , sendo  $c_K := d_K/h_K$  e  $d_K$  o diâmetro do círculo inscrito em  $K$ . Esta condição significa que os triângulos  $K$  da malha não podem ter ângulos muito grandes nem muito pequenos. **Ao longo do texto, a menos que especificado o contrário, assumiremos trabalhar com malhas**

regulares.

**Exemplo 2.1.1.** O seguinte código, gera uma malha uniforme no domínio  $\Omega = [0, 1]^2$ .

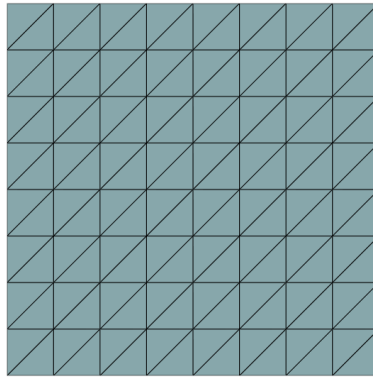


Figura 2.1: Esboço de uma malha triangular no domínio  $D = [0, 1]^2$ .

Código 2.1: ex\_malha.py

```
1 from mpi4py import MPI
2 from dolfinx import mesh
3
4 # malha triangular
5 domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD,
6                                   nx = 5, ny = 5)
7
8 # gráfico da malha
9 import pyvista
10 # pyvista.set_jupyter_backend('static')
11 print(pyvista.global_theme.jupyter_backend)
12
13 from dolfinx import plot
14 pyvista.start_xvfb()
```

```

15 tdim = domain.topology.dim
16 topology, cell_types, geometry = plot.vtk_mesh(
    domain, tdim)
17 grid = pyvista.UnstructuredGrid(topology,
    cell_types, geometry)
18
19 plotter = pyvista.Plotter()
20 plotter.add_mesh(grid, show_edges=True)
21 plotter.view_xy()
22 pyvista.OFF_SCREEN=True
23 if not pyvista.OFF_SCREEN:
24     plotter.show()
25 else:
26     figure = plotter.screenshot("malha.png")

```

### 2.1.2 Espaço de Polinômios Lineares

Em revisão

Seja  $K$  um triângulo e seja  $P_1(K)$  o espaço dos polinômios lineares em  $K$ , i.e.

$$P_1(K) = \{v; v = c_0 + c_1x_0 + c_2x_1, (x_0, x_1) \in K, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \quad (2.1)$$

Observamos que toda função  $v \in P_1(K)$  é unicamente determinada por seus valores nodais

$$\alpha_i = v(N_i), i = 0, 1, 2, \quad (2.2)$$

onde  $N_i = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)})$  é o  $i$ -ésimo nodo (vértice) do triângulo  $K$ . Isto segue do fato de que o sistema (2.2) tem forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0^{(0)} & x_1^{(0)} \\ 1 & x_0^{(1)} & x_1^{(1)} \\ 1 & x_0^{(2)} & x_1^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ainda, o valor absoluto do determinante da matriz de coeficientes é  $2|K|$ , onde  $|K|$  denota a área de  $K$ , a qual é não nula.

Afim de usarmos os valores nodais como graus de liberdade (incógnitas), nós introduzimos a seguinte base nodal  $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$  com

$$\lambda_j(N_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (2.4)$$

Com esta base, toda função  $v \in P_1(K)$  pode ser escrita como

$$v = \alpha_0 \lambda_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2, \quad (2.5)$$

onde  $\alpha_i = v(N_i)$ .

### 2.1.3 Espaço contínuo dos polinômios lineares por partes

Em revisão

O **espaço contínuo dos polinômios lineares por partes** na malha  $\mathcal{K}$  é definido por

$$V_h = \{v; v \in C^0(\Omega), v|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{K}\}. \quad (2.6)$$

Observamos que **toda função  $v \in V_h$  é unicamente determinada por seus valores nodais**  $\{v(N_j)\}_{j=0}^{n_p-1}$ , onde  $n_p$  é número de nodos da malha  $\mathcal{K}$ .

De fato, os valores nodais determinam uma única função em  $P_1(K)$  para cada  $K \in \mathcal{K}$  e, portanto, uma função em  $V_h$  é unicamente determinada por seus valores nos nodos. Agora, consideremos dois triângulos  $K_1$  e  $K_2$  compartilhando um lado  $E = K_1 \cap K_2$ . Sejam  $v_1$  e  $v_2$  os dois únicos polinômios em  $v_1 \in P_1(K_1)$  e  $v_2 \in P_1(K_2)$ , respectivamente determinados pelos valores nodais em  $K_1$  e  $K_2$ . Como  $v_1$  e  $v_2$  também são polinômios lineares em  $E$  e seus valores coincidem nos nodos de  $E$ , temos  $v_1 = v_2$  em  $E$ . Portanto, concluímos que toda função  $v \in V_h$  é unicamente determinada por seus valores nodais.

Afim de termos os valores nodais como graus de liberdade (incógnitas), definimos a **base nodal**  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n_p} \subset V_h$  tal que

$$\varphi_j(N_i) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n_p - 1. \quad (2.7)$$

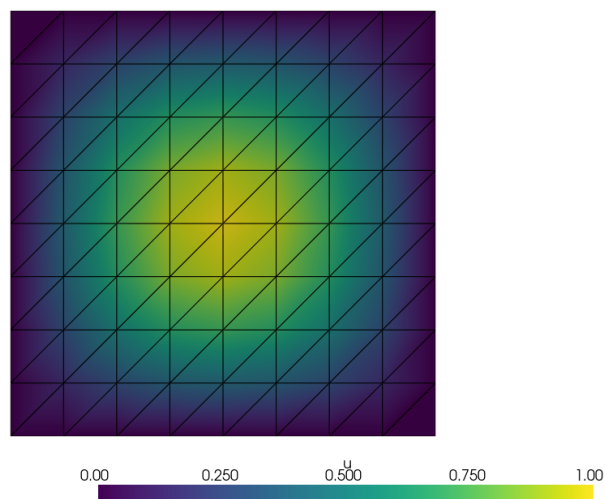


Figura 2.2: Esboço de uma função no espaço  $V_h$  com valores nodais  $u(\mathbf{x}) = \text{sen}(\pi x_0) \text{sen}(\pi x_1)$ .

Notamos que cada função base  $\varphi_j$  é contínua, polinômio linear por partes e com suporte somente em um pequeno conjunto de triângulos que compartilham o nodo  $N_j$ . Além disso, toda a função  $v \in V_h$  pode, então, ser escrita como

$$v = \sum_{i=0}^{n_p-1} \alpha_i \varphi_i, \quad (2.8)$$

onde  $\alpha_i = v(N_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n_p$ , são os valores nodais de  $v$ .

**Exemplo 2.1.2.** No seguinte código, alocamos um espaço de elementos finitos  $V_h$  sobre uma malha regular no domínio  $\Omega = [0, 1]^2$ . Ainda, uma função  $u_h \in V_h$  é alocada com valores nodais

$$u(\mathbf{x}) = \text{sen}(\pi x_0) \text{sen}(\pi x_1). \quad (2.9)$$

```
1 from mpi4py import MPI
2 from dolfinx import mesh
3
```

```
4 # malha
5 domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD,
  5, 5)
6
7 from dolfinx import fem
8
9 # espaço de elementos finitos
10 V = fem.functionspace(domain, ("P",1))
11
12 # função do espaço V
13 uh = fem.Function(V)
14
15 # valor nodais
16 from numpy import sin, pi
17 for i,x in enumerate(domain.geometry.x):
18     uh.x.array[i] = sin(pi*x[0])*sin(pi*x[1])
19
20 # gráfico
21 u_topology, u_cell_types, u_geometry = plot.
    vtk_mesh(V)
22 u_grid = pyvista.UnstructuredGrid(u_topology,
    u_cell_types, u_geometry)
23 u_grid.point_data["u"] = uh.x.array.real
24 u_grid.set_active_scalars("u")
25 u_plotter = pyvista.Plotter()
26 u_plotter.add_mesh(u_grid, show_edges=True)
27 u_plotter.view_xy()
28 if not pyvista.OFF_SCREEN:
29     u_plotter.show()
30 else:
31     figure = u_plotter.screenshot("u.png")
```

### 2.1.4 Exercícios

Em construção



## Respostas

## 2.2 Interpolação

**Em revisão**

Dada uma função contínua  $f$  em um triângulo  $K$  com nodos  $N_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , sua interpolação linear  $\pi f \in P_1(K)$  é definida por

$$\pi f = \sum_{i=0}^2 f(N_i) \varphi_i. \quad (2.10)$$

Logo, temos  $\pi f(N_i) = f(N_i)$  para todo  $i = 0, 1, 2$ .

**Exemplo 2.2.1.** Consideramos a função

$$u(x_0, x_1) = \text{sen}(\pi x_0) \cos(\pi x_1) \quad (2.11)$$

defina no domínio  $D = [0, 1]^2$ . O seguinte código computa a interpolação de  $f$  no espaço de elementos finitos  $V_h$  sobre uma malha uniforme de  $16 \times 16$  triângulos. Com ele, graficamos a função interpolada  $u_h \in V_h$  e a função  $u$ . Consulte a Fig. 2.3.

Código 2.2: interp2d.py

```
1 from mpi4py import MPI
2 from dolfinx import mesh
3
4 # malha
5 domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD,
6                                   16, 16)
7
8
9 from dolfinx import fem
10
11 # espaço de elementos finitos
12 V = fem.functionspace(domain, ("P", 1))
13
14 # função do espaço V
15 uh = fem.Function(V)
```

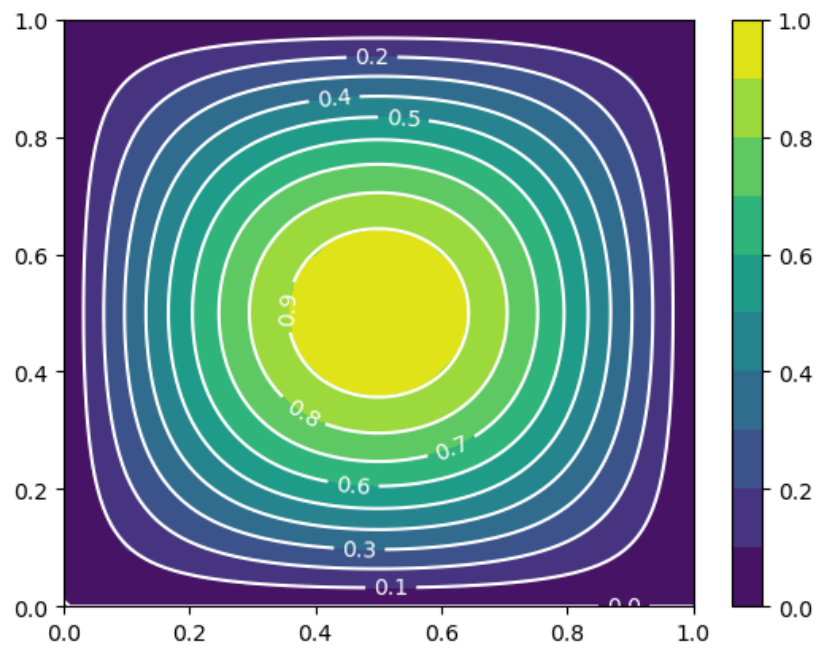


Figura 2.3: Gráfico de comparação função interpolada  $u_h \in V_h$  (gráfico de contornos em cores) e da função original  $u$  (isolinhas) referentes ao Exemplo 2.2.1.

```
15 # interpolate
16 import numpy as np
17 def u(x, mod=np):
18     return mod.sin(mod.pi*x[0])*mod.sin(mod.pi*x
19 [1])
20 uh.interpolate(lambda x: u(x))
21
22 # eval fun
23 from dolfinx import geometry
24
25 def fun_eval(u, points,
26             domain=domain):
27     u_values = []
28     bb_tree = geometry.bb_tree(domain, domain.
29 topology.dim)
29     cells = []
30     points_on_proc = []
31     # Find cells whose bounding-box collide with the
32     the points
33     cell_candidates = geometry.
34 compute_collisions_points(bb_tree,
35 points.T)
36 # Choose one of the cells that contains the
37 point
38 colliding_cells = geometry.
39 compute_colliding_cells(domain,
40 cell_candidates,
41 points.T)
42
43 for i, point in enumerate(points.T):
44     if len(colliding_cells.links(i)) > 0:
45         points_on_proc.append(point)
46         cells.append(colliding_cells.links(i)[0])
47
48 points_on_proc = np.array(points_on_proc, dtype=
```

```

    np.float64)
44     u_values = u.eval(points_on_proc, cells)
45     return u_values
46
47 # gráfico
48 import numpy as np
49 nx = ny = 101
50 xx0 = np.linspace(0., 1., nx)
51 xx1 = np.linspace(0., 1., ny)
52 X0, X1 = np.meshgrid(xx0, xx1, indexing='ij')
53 points = np.zeros((3, nx*ny))
54 points[0] = X0.reshape(-1)
55 points[1] = X1.reshape(-1)
56
57 yh = fun_eval(uh, points)
58 Yh = yh.reshape((nx,ny))
59
60 import matplotlib.pyplot as plt
61
62 fig = plt.figure()
63 ax = fig.add_subplot()
64 levels=10
65 cb = ax.contourf(X0, X1, Yh, levels = levels)
66 fig.colorbar(cb)
67 Y = u([X0, X1])
68 cl = ax.contour(X0, X1, Y, levels = levels, colors
    = 'w')
69 ax.clabel(cl)
70 plt.show()

```

Afim de determinarmos estimativas para o erro de interpolação, precisamos da chamada derivada total de primeira ordem

$$Df = \left( \left| \frac{\partial f}{\partial x_0} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.12)$$

e da derivada total de segunda ordem

$$D^2 f = \left( \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

**Proposição 2.2.1.** (**Erro da interpolação no espaço linear.**) A interpolação  $\pi f$  satisfaz as seguintes estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(K)} \leq Ch_K^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}, \quad (2.14)$$

$$\|D(f - \pi f)\|_{L^2(K)} \leq Ch_K \|D^2 f\|_{L^2(K)}. \quad (2.15)$$

*Demonstração.* Veja [1, Capítulo 4]. □

**Observação 2.2.1.** A constante  $C$  depende do inverso de  $\sin(\theta_K)$  onde  $\theta_K$  é o menor ângulo de  $K$ . Desta forma, para um triângulo com  $\theta_K$  muito pequeno, as estimativas (2.14) e (2.15) perdem sentido. Este fato indica a necessidade de se trabalhar com malhas regulares.

A interpolação no espaço  $V_h$  de uma dada função  $f$  no domínio  $\Omega$  é denotada também por  $\pi f \in V_h$  e definida por

$$\pi f = \sum_{i=0}^{n_p-1} f(N_i) \varphi_i. \quad (2.16)$$

**Proposição 2.2.2.** (**Erro da interpolação no espaço contínuo linear por partes.**) O interpolador  $\pi f \in V_h$  satisfaz as seguintes estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^4 \|D^2 f\|_{L^2(K)}^2, \quad (2.17)$$

$$\|D(f - \pi f)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Demonstração análoga a Proposição 1.1.2. □

**Observação 2.2.2.** (**Taxa de convergência.**) A taxa de convergência (ou ordem de truncamento) do erro de interpolação é definida como a potência

do  $h$  na estimativa (2.17). Esta taxa pode ser computacionalmente estimada. De fato, o erro de interpolação para uma dada malha  $i$  tem a forma  $\varepsilon_i \approx Ch_i^r$ . Conhecendo  $\varepsilon_{i-1} \approx Ch_{i-1}^r$  para uma outra malha  $i-1$ , podemos resolver para  $r$ , obtendo a estimativa

$$r \approx \frac{\ln \varepsilon_i / \varepsilon_{i-1}}{\ln h_i / h_{i-1}}. \quad (2.19)$$

**Exemplo 2.2.2.** Consideramos a interpolação feita no Exemplo 2.2.1. Aqui, computamos o erro de interpolação na norma  $L^2$ , i.e.

$$\varepsilon = \|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.20)$$

para diferentes refinamentos de malha.

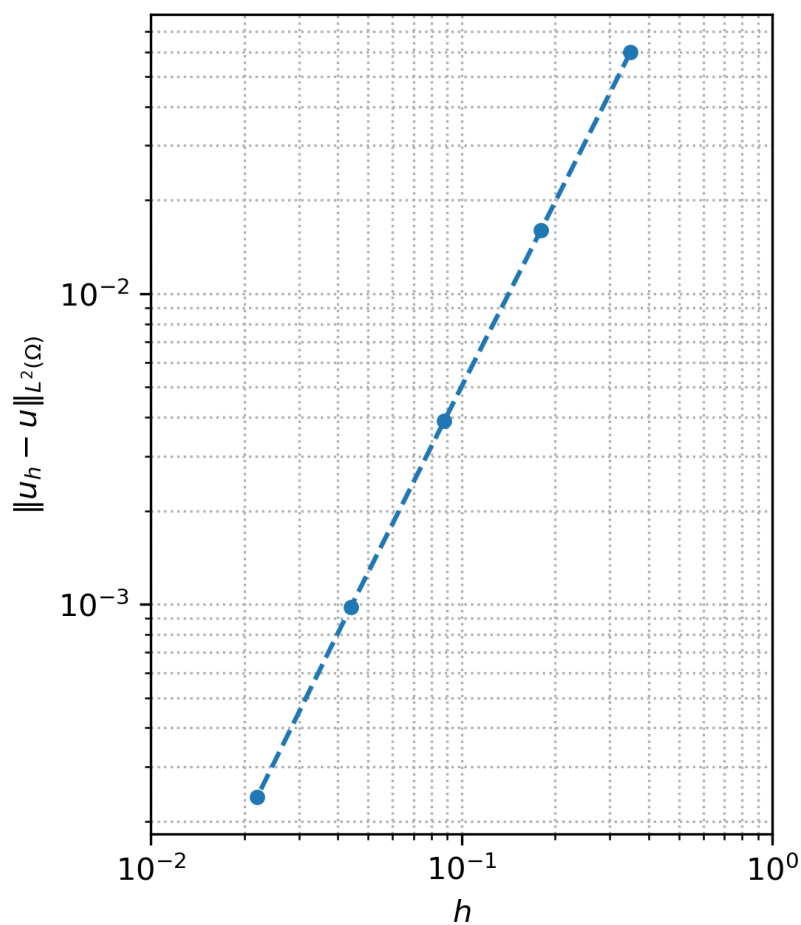


Figura 2.4: Tamanho da malha  $h$  versus erro de interpolação na norma  $L^2$  referente ao Exemplo 2.2.2.

Na Tabela 2.1, temos o número de células e seu tamanho  $h$ , o erro de interpolação  $\varepsilon$  e a estimativa da taxa de convergência dada por (2.19).

Tabela 2.1: Erro de interpolação referente ao Exemplo 2.2.2.

#células	$h$	$\epsilon$	$r$
$4 \times 4$	$3.5 \times 10^{-1}$	$6.0 \times 10^{-2}$	-x-
$8 \times 8$	$1.8 \times 10^{-1}$	$1.6 \times 10^{-2}$	1.91
$16 \times 16$	$8.8 \times 10^{-2}$	$3.9 \times 10^{-3}$	2.04
$32 \times 32$	$4.4 \times 10^{-2}$	$9.8 \times 10^{-4}$	1.99
$64 \times 64$	$2.2 \times 10^{-2}$	$2.4e \times 10^{-4}$	2.03

### 2.2.1 Exercícios

Em construção

## 2.3 Projeção

Em revisão

A **projeção**  $L^2$  no espaço  $V_h$  de uma dada uma função  $u \in L^2(\Omega)$  é **denotada por**  $P_h u \in V_h$  **e definida por**

$$\int_{\Omega} (u - P_h u) v \, dx = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (2.21)$$

Analogamente a projeção em uma dimensão (consulte Subseção 1.1.2), a projeção é dada por

$$P_h u = \sum_{j=0}^{n_p-1} \xi_j \varphi_j, \quad (2.22)$$

com  $\xi = (\xi_j)_{j=0}^{n_p-1}$  satisfazendo o sistema linear

$$M\xi = b, \quad (2.23)$$

onde  $M = [m_{i,j}]_{i,j=0}^{n_p-1}$  é a **matriz de massa** com

$$m_{i,j} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, dx \quad (2.24)$$



e  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{n_p-1})$  é o **vetor de carga** com

$$b_i = \int_{\Omega} u \varphi_i dx. \quad (2.25)$$

Também, vale o resultado análogo da **melhor aproximação** (consulte Teorema 1.1.1), i.e.

$$\|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_h. \quad (2.26)$$

E, portanto, também temos a estimativa análoga para o **erro de projeção** (consulte Teorema 1.1.2)

$$\|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^4 \|D^2 u\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.27)$$

Tomando o tamanho global da malha, temos

$$\|f - P_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}. \quad (2.28)$$

**Exemplo 2.3.1.** Consideramos a função  $u(x_0, x_1) = \sin(\pi x_0) \cos(\pi x_1)$  definida no domínio  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ . código computa a projeção de  $u$  no espaço  $V_h$  sobre uma malha triangular uniforme.

```

1 from mpi4py import MPI
2 from dolfinx import mesh
3
4 # malha
5 domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD,
6                                   16, 16)
7
8
9 from dolfinx import fem
10
11 # espaço de elementos finitos
12 Vh = fem.functionspace(domain, ("P", 1))
13
14 # função do espaço V
15 uh = fem.Function(Vh)

```

```
14
15 # projeção
16 import ufl
17 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
18 def uex(x, mod=ufl):
19     return mod.sin(mod.pi*x[0])*mod.sin(mod.pi*x
20     [1])
21 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
22 u = ufl.TrialFunction(Vh)
23 v = ufl.TestFunction(Vh)
24 a = ufl.dot(u,v)*ufl.dx
25 L = uex(x)*v*ufl.dx
26 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[])
27 Phu = problem.solve()
28
29 # saída (paraview)
30 from dolfinx import io
31 from pathlib import Path
32 results_folder = Path("results")
33 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
34 filename = results_folder / "phu"
35 Phu.name = "Phu"
36 with io.VTXWriter(domain.comm, filename.
37     with_suffix(".bp"), [Phu]) as vtx:
38     vtx.write(0.0)
39 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix
40     (".xdmf"), "w") as xdmf:
41     xdmf.write_mesh(domain)
42     xdmf.write_function(Phu, 0.0)
```

### 2.3.1 Exercícios

Em revisão

**E.2.3.1.** Verifique computacionalmente a estimativa (2.28) no caso da função  $f(x_0, x_1) = \sin(\pi x_0) \cos(\pi x_1)$  projetada sobre uma malha triangular uni-

forme sobre o domínio  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ .

## 2.4 Problema Modelo

Em revisão

Nesta seção, aplicamos do **método de elementos finitos para a equação de Poisson**<sup>8</sup> com condições de Dirichlet<sup>9</sup>. Mais precisamente, definimos o chamdo **problema forte**: encontrar  $u$  tal que

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega := [0, 1]^2, \quad (2.29)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.30)$$

onde  $\Delta = \partial^2/\partial x_0^2 + \partial^2/\partial x_1^2$  é o operador de Laplace<sup>10</sup> e  $f$  é uma função dada.

### 2.4.1 Formulação Fraca

Em revisão

A aplicação do método de elementos finitos é construída sobre a **formulação fraca do problema** (2.29)-(2.30). Para a obtermos, multiplicamos (2.29) por uma função teste  $v$  em um espaço adequado  $V_0$  e integramos no domínio  $\Omega$ , obtendo

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.31)$$

Então, no lado esquerdo, aplicamos a fórmula de Green<sup>11</sup>

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = -\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla u v \, ds. \quad (2.32)$$

donde temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.33)$$

Então, observando critérios de regularidade e a condição de contorno (2.30), escolhemos o **espaço teste**

$$V_0 := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.34)$$

Lembramos que  $H^1(\Omega) = \{v : \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}$ .

Com isso, temos o seguinte **problema fraco associado** a (2.29)-(2.30): encontrar  $u \in V_0$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad (2.35)$$

onde  $a(u, v)$  é chamada de **forma bilinear** e definida por

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (2.36)$$

e  $L(v)$  é chamada de **forma linear** e definida por

$$L(v) := \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.37)$$

## 2.4.2 Formulação de Elementos Finitos

**Em revisão**

A **formulação de elementos finitos** é obtida da formulação fraca (2.35) pela aproximação do espaço teste  $V_0$  por um espaço de dimensão finita. Tomando uma triangulação  $\mathcal{K} \subset \Omega$  e considerando o espaço contínuo dos polinômios lineares por partes

$$V_h := \{v : v \in C^0(\Omega), v|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}\}, \quad (2.38)$$

assumimos o espaço de elementos finitos

$$V_{h,0} := \{v \in V_h : v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.39)$$

Com isso, temos o seguinte problema de elementos finitos associado (2.35): encontrar  $u_h \in V_{h,0}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (2.40)$$

Observemos que (2.40) é equivalente ao problema de encontrar  $u_h \in V_{h,0}$  tal que

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad (2.41)$$

com  $i = 0, 1, \dots, n_p - 1$ , onde  $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n_i-1}$  é a base nodal de  $V_{h,0}$  e  $n_i$  é o número de funções bases (igual ao número de nodos internos da triangulação  $\mathcal{K}$ ). Ainda, como

$$u_h = \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j, \quad (2.42)$$

temos

$$a(u_h, \varphi_i) = a\left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j, \varphi_i\right) \quad (2.43)$$

$$= \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i). \quad (2.44)$$

Com isso, o problema de elementos finitos é equivalente a resolver o seguinte sistema linear

$$\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad (2.45)$$

para as incógnitas  $\xi_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n_i - 1$ . Ou, equivalentemente, temos sua forma matricial

$$A\xi = \mathbf{b}, \quad (2.46)$$

onde  $A = [a_{i,j}]_{i,j=0}^{n_i-1}$  é chamada de **matriz de rigidez** com

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) \quad (2.47)$$

e  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n_i-1})$  é o vetor de carga com

$$b_i = L(\varphi_i). \quad (2.48)$$

**Exemplo 2.4.1.** Consideremos o seguinte problema de Poisson

$$-\Delta u = 100x_0(1-x_0)x_1(1-x_1), \quad x \in \Omega := (0,1) \times (0,1), \quad (2.49)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.50)$$

Na Figura 2.5 temos um esboço da aproximação de elementos finitos obtida em uma malha uniforme com  $20 \times 20$  nodos. As isolinhas correspondem aos pontos tais que  $u = 3 \times 10^{-1}, 2 \times 10^{-1}, 10^{-1}, 5 \times 10^{-2}$ .

Com o [FEniCS](#), podemos computar a solução deste problema com o seguinte código:

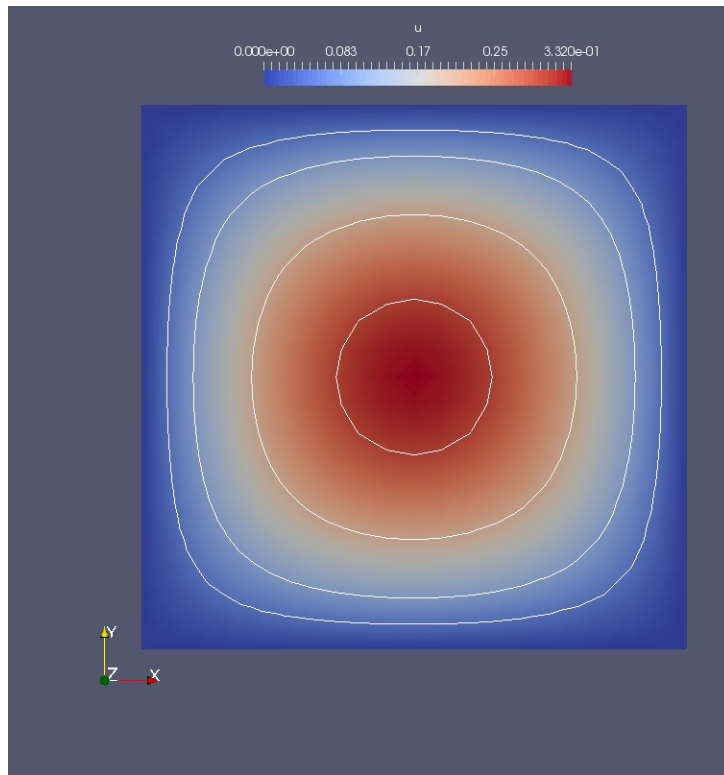


Figura 2.5: Esboço da solução de elementos finitos do problema discutido no Exemplo 2.4.1.

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
Nx = 20
Ny = 20
mesh = UnitSquareMesh(Nx, Ny)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

```

# cond. contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

# f
f = Expression('100*x[0]*(1-x[0])*x[1]*(1-x[1])',degree=4)

# MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = dot(grad(u), grad(v))*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

# exportando em vtk
vtkfile = File('u.pvd')
vtkfile << u

```

### 2.4.3 Exercícios

Em revisão

**E.2.4.1.** Compute uma aproximação de elementos finitos para o seguinte problema

$$-\Delta u = 10, \quad x \in (0, 1) \times (0, 1) \quad (2.51)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.52)$$

$$u(1, y) = 0, \quad 0 \leq y < 1, \quad (2.53)$$

$$u(x, 1) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.54)$$

$$u(0, y) = 1, \quad 0 < x \leq 1. \quad (2.55)$$

## 2.5 Fundamentos da análise de elementos finitos

Em revisão

### 2.5.1 Existência e unicidade

Em revisão

**Teorema 2.5.1.** (Matriz positiva definida) A matriz de rigidez é positiva definida.

*Demonstração.* A matriz de rigidez  $A = [a(\varphi_j, \varphi_i)]_{i,j=0}^{n_i-1}$  é obviamente simétrica. Além disso, para todo  $\xi \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\xi \neq 0$ , temos

$$\xi^T A \xi = \sum_{i,j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_i \quad (2.56)$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n_i-1} \xi_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx \, \xi_i \quad (2.57)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \left( \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j \right) \cdot \nabla \left( \sum_{i=0}^{n_i-1} \xi_i \varphi_i \right) \, dx \quad (2.58)$$

$$= \left\| \nabla \left( \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.59)$$

Portanto,  $\xi^T A \xi \geq 0$  e é nulo se, e somente se,  $v = \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j$  for constante. Como  $v \in V_{h,0}$ , temos que  $v$  constante implica  $v \equiv 0$ , mas então  $\xi = 0$ , o que é uma contradição. Logo,  $\xi^T A \xi > 0$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\xi \neq 0$ .  $\square$

**Teorema 2.5.2.** (Existência e unicidade) O problema de elementos finitos (2.40) tem solução única.

*Demonstração.* O problema de elementos finitos (2.40) se resume a resolver o sistema linear  $A\xi = \mathbf{b}$ . Do Teorema 2.5.1, temos que  $A$  é uma matriz definida positiva e, portanto, invertível. Daí segue, imediatamente, que o problema (2.40) tem solução única.  $\square$



### 2.5.2 Estimativa *a priori* do erro

Em revisão

**Teorema 2.5.3.** (Ortogonalidade de Galerkin) A solução  $u_h$  do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_{h,0}, \quad (2.60)$$

onde  $u$  é a solução do problema fraco (2.35).

*Demonstração.* Segue, imediatamente, do fato de que  $V_{h,0} \subset V_0$  e, portanto,

$$a(u, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}, \quad (2.61)$$

bem como

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (2.62)$$

□

**Definição 2.5.1.** (Norma da energia.) Definimos a norma da energia por

$$|||v||| := \left( \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx \right)^{1/2} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.63)$$

para todo  $v \in V_0$ .

**Teorema 2.5.4.** (Melhor aproximação.) A solução  $u_h$  do problema de elementos finitos satisfaz

$$|||u - u_h||| \leq |||u - v_h|||, \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (2.64)$$

*Demonstração.* Observando que  $u - u_h = u - v_h + v_h - u_h$  e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 2.5.3), temos:

$$|||u - u_h|||^2 = \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - u_h) \, dx \quad (2.65)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - v_h) \, dx + \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(v_h - u_h) \, dx \quad (2.66)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - v_h) dx \quad (2.67)$$

$$= \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.68)$$

$$= \|u - u_h\|^2 \|u - v_h\|. \quad (2.69)$$

□

**Teorema 2.5.5.** (Estimativa *a priori* do erro.) A solução  $u_h$  do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$\|u - u_h\|^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 u\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.70)$$

*Demonstração.* O resultado segue do Teorema da melhor aproximação (Teorema 2.5.4) e da estimativa do erro de interpolação (Proposição 2.2.2), pois

$$\|u - u_h\|^2 \leq \|u - \pi u\|^2 \quad (2.71)$$

$$= \|D(u - \pi u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.72)$$

$$\leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.73)$$

□

Para obtermos uma estimativa na norma  $L^2(\Omega)$ , podemos usar a desigualdade de Poincaré.

**Teorema 2.5.6.** (Desigualdade de Poincaré.) Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado. Então, existe uma constante  $C = C(\Omega)$ , tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_0. \quad (2.74)$$

*Demonstração.* Se  $\Omega$  tem contorno suficientemente suave, então existe  $\phi$  tal que  $-\Delta\phi = 1$  em  $\Omega$  com  $\sup_{x \in \Omega} |\nabla\phi| < C$ . Com isso, temos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 dx \quad (2.75)$$

$$= - \int_{\Omega} v^2 \Delta\phi dx. \quad (2.76)$$

Agora, usando o Teorema de Green e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \int_{\partial\Omega} v^2 n \cdot \nabla \phi \, ds + \int_{\Omega} \nabla v^2 \cdot \nabla \phi \, dx \quad (2.77)$$

$$= \int_{\Omega} 2v \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx \quad (2.78)$$

$$\leq \sup_{x \in \Omega} |\nabla \phi| \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.79)$$

□

Com a desigualdade de Poincaré e da estimativa *a priori* do erro (Teorema 2.5.5), temos

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u - u_h\| \leq Ch \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.80)$$

onde  $h = \max_{K \in \mathcal{K}} h_K$ . Entretanto, esta estimativa pode ser melhorada.

**Teorema 2.5.7.** (Estimativa ótima *a priori* do erro.) A solução  $u_h$  do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.81)$$

*Demonstração.* Seja  $e = u - u_h$  o erro e  $\phi$  a solução do problema dual (ou problema adjunto)

$$-\Delta \phi = e, \quad \forall x \in \Omega \quad (2.82)$$

$$\phi = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (2.83)$$

Então, usando a fórmula de Green, a ortogonalidade de Galerkin e, então, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\|e^2\|_{L^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} e \Delta \phi \, dx \quad (2.84)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla \phi \, dx - \int_{\partial\Omega} e n \cdot \nabla \phi \, ds \quad (2.85)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla (\phi - \pi \phi) \, dx \quad (2.86)$$

$$\leq \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla (\phi - \pi \phi)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.87)$$

Da estimativa *a priori* (2.80) (que segue do Teorema 2.5.5) temos

$$\|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.88)$$

Agora, da regularidade elíptica  $\|D^2\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}$  [?] e da estimativa do erro de interpolação (Proposição 2.2.2), temos

$$\|\nabla(\phi - \pi\phi)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|D^2\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|e\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.89)$$

Então, temos

$$\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}Ch\|e\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.90)$$

□

**Exemplo 2.5.1.** Consideremos o seguinte problema de Poisson

$$-\Delta u = -2(x_0^2 - x_0) - 2(x_1^2 - x_1), \quad x \in \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (2.91)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.92)$$

A solução analítica deste problema é  $u(x) = (x_0^2 - x_0)(x_1^2 - x_1)$ . Aqui, obtemos aproximações por elementos finitos  $u_h$  usando uma malha triangular uniforme  $n \times n$  nodos, i.e.  $h = 1/n$ . A Tabela 2.2 mostra os valores dos erros  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  para diferentes valores de  $h$ .

Tabela 2.2: Erros de aproximações por elementos finitos referente ao problema dado no Exemplo 2.5.1.

#nodos	$h$	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$
$10 \times 10$	$1e-1$	$9.29e-4$
$20 \times 20$	$5e-2$	$2.34e-4$
$100 \times 100$	$1e-3$	$9.40e-6$

Com o [FEniCS](#), podemos computar a solução deste problema e o erro na norma  $L^2$  com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# malha
Nx = 100
Ny = 100
mesh = UnitSquareMesh(Nx,Ny)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# cond. contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

# f
f = Expression('-2*(x[1]*x[1]-x[1])-2*(x[0]*x[0]-x[0])',degree=2)

# MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = dot(grad(u), grad(v))*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

# sol. analitica
ua = Expression('x[0]*(x[0]-1)*x[1]*(x[1]-1)',degree=4)

# erro norma L2
erro_L2 = errornorm(ua, u, 'L2')
print("||u-u_h||_L2 = %1.2E\n" % erro_L2)

# exportando em vtk
vtkfile = File('u.pvd')
vtkfile << u
```

### 2.5.3 Estimativa *a posteriori*

#### Em revisão

Para obtermos uma estimativa *a posteriori* vamos precisar da chamada desigualdade do traço.

**Teorema 2.5.8.** (Desigualdade do traço) Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  convexa e suave. Então, existe uma constante  $C = C(\Omega)$ , tal que para qualquer  $v \in V$  temos

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \left( \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.93)$$

*Demonstração.* Veja [?]. □

**Teorema 2.5.9.** (Estimativa *a posteriori*) A solução  $u_h$  do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$|||u - u_h|||^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} \eta_K^2(u_h), \quad (2.94)$$

onde o elemento residual  $\eta_K(u_h)$  é definido por

$$\eta_K(u_h) = h_K \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} h_K^{1/2} \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K \setminus \partial\Omega)}. \quad (2.95)$$

Aqui,  $[n \cdot \nabla u_h]_K$  denota o salto na derivada normal de  $u_h$  nos lados interiores dos elementos de  $\mathcal{K}$ . Além disso, lembremos que  $\Delta u_h = 0$ .

*Demonstração.* Denotando  $e := u - u_h$  o erro entre a solução do problema forte e a solução de elementos finitos, temos

$$|||e|||^2 = \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.96)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla e \, dx \quad (2.97)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla (e - \pi e) \, dx. \quad (2.98)$$

Nesta última equação, temos usado a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 2.5.3). Daí, temos

$$\int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla (e - \pi e) \, dx = \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K \nabla e \cdot \nabla (e - \pi e) \, dx \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{K \in \mathcal{K}} - \int_K \Delta e (e - \pi e) dx \\
&+ \int_{\partial K} n \cdot \nabla e (e - \pi e) ds, \tag{2.100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K (f + \Delta u_h) (e - \pi e) dx \\
&+ \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} n \cdot \nabla e (e - \pi e) ds, \tag{2.101}
\end{aligned}$$

uma vez que  $-\Delta e|_K = f + \Delta u_h|_K$  e, ambos,  $e$  e  $\pi e$  se anulam em  $\partial \Omega$ .

Para computarmos o segundo termo do lado direito da ultima equação, observamos que o erro em lado  $E$  recebe contribuições dos dois elementos  $K^\pm$  que compartilham  $E$ . Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K^+ \cap \partial K^-} n \cdot \nabla e (e - \pi e) ds &= \int_E (n^+ \cdot \nabla e^+ (e^+ - \pi e^+) \\
&+ n^- \cdot \nabla e^- (e^- - \pi e^-)) ds, \tag{2.102}
\end{aligned}$$

onde utilizamos a notação  $v^\pm = v|_{K^\pm}$ . Lembremos que o erro  $e$  é contínuo e, portanto,  $(e^+ - \pi e^+)|_E = (e^- - \pi e^-)|_E$ . Ainda,  $\nabla u$  é contínuo, logo  $(n^+ \cdot \nabla u^+ + n^- \cdot \nabla u^-)|_E = 0$ . Entretanto,  $\nabla u_h|_E$  não é geralmente contínuo, sendo apenas constante por partes. Assim sendo e denotando o salto  $[n \cdot \nabla u_h] := (n^+ \cdot \nabla u_h^+ + n^- \cdot \nabla u_h^-)$ , temos

$$\begin{aligned}
&\int_E (n^+ \cdot \nabla e^+ (e - \pi e) + n^- \cdot \nabla e^- (e - \pi e)) ds \\
&= - \int_E [n \cdot \nabla u_h] (e - \pi e) ds. \tag{2.103}
\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\sum_{K \in \mathcal{K}} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} n \cdot \nabla e (e - \pi e) ds = - \sum_{E \in \mathcal{E}_I} \int_E [n \cdot \nabla u_h] (e - \pi e) ds, \tag{2.104}$$

onde  $\mathcal{E}_I$  é o conjunto dos lados interiores na triangularização  $\mathcal{K}$ . Logo, retornando a (2.101), obtemos

$$\begin{aligned}
|||e|||^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K (f + \nabla u_h) (e - \pi e) dx \\
&- \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \omega} [n \cdot \nabla u_h] (e - \pi e) ds. \tag{2.105}
\end{aligned}$$

Nos resta, agora, estimarmos estes dois termos do lado direito.

A estimativa do primeiro, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz seguida da estimativa padrão do erro de interpolação, i.e.

$$\int_K (f + \Delta u_h)(e - \pi e) dx \leq \|f + \Delta u_h\|_{L^2(\Omega)} \|e - \pi e\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.106)$$

$$\leq \|f + \Delta u_h\|_{L^2(\Omega)} Ch_K \|De\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.107)$$

Para estimarmos as contribuições dos lados, usamos a desigualdade do Traço [?]

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}^2 + h_K \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (2.108)$$

Com esta, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a estimativa padrão do erro de interpolação, temos

$$\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} [n \cdot \nabla u_h](e - \pi e) ds \leq \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} \|e - \pi e\|_{L^2(\partial K)} \quad (2.109)$$

$$\leq \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} C \left( h_K^{-1} \|e - \pi e\|_{L^2(K)}^2 + h_K \|D(e - \pi e)\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \quad (2.110)$$

$$\leq \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} Ch_K^{1/2} \|De\|_{L^2(K)}. \quad (2.111)$$

Daí, a estimativa segue das (2.107) e (2.111).  $\square$



## Notas

<sup>1</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859, matemático alemão. Fonte: [Wikipédia: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet](#).

<sup>2</sup>Carl Gottfried Neumann, 1832 - 1925, matemático alemão. Fonte: [Wikipédia: Carl Neumann](#).

<sup>3</sup>Carl Gottfried Neumann, 1832 - 1925, matemático alemão. Fonte: [Wikipédia: Carl Neumann](#).

<sup>4</sup>Victor Gustave Robin, 1855 - 1897, matemático francês. Fonte: [Wikipedia: Victor Gustave Robin](#).

<sup>5</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859, matemático alemão. Fonte: [Wikipédia: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet](#).

<sup>6</sup>Ronald Aylmer Fisher, 1890-1962, biólogo inglês. Fonte: [Wikipédia: Ronald Fisher](#).

<sup>7</sup>Carl Gottfried Neumann, 1832 - 1925, matemático alemão. Fonte: [Wikipédia: Carl Neumann](#).

<sup>8</sup>Siméon Denis Poisson, 1781 - 1840, matemático francês. Fonte: [Wikipédia:Siméon Denis Poisson](#).

<sup>9</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859, matemático alemão. Fonte: [Wikipédia: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet](#).

<sup>10</sup>Pierre-Simon Laplace, 1749 - 1827, matemático francês. Fonte: [Wikipédia: Pierre-Simon Laplace](#).

<sup>11</sup>George Green, 1793 - 1841, matemático britânico. Fonte: [Wikipédia:George Green](#) .

# Referências

- [1] Brenner, S.C.; Scott, L.R.. The mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer, 2008.
- [2] Evans, L.C.. Partial Differential Equations. 2. ed., AMS, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3
- [3] Langtangen, H.P.; Logg, A.. Solving PDEs in Python. Springer, 2017. ISBN: 978-3-319-52461-0
- [4] Larson, M.G.; Bengson, F.. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Springer, 2013.
- [5] Tveito, A.; Winther, R.. Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach. Springer, 1998. ISBN 978-0-387-22773-3. <https://doi-org.ez45.periodicos.capes.gov.br/10.1007/b98967>.

# Índice de Comandos

desigualdade

de Cauchy-Schwarz, 6

triangular, 5

matriz de rigidez, 72

teorema

de Rolle, 7