

# Vetores

Pedro H A Konzen

30 de abril de 2024

---

Konzen, Pedro Henrique de Almeida

Vetores: notas de aula / Pedro Henrique de Almeida Konzen. –2024.  
Porto Alegre.- 2024.

"Esta obra é uma edição independente feita pelo próprio autor."

1. Vetores. 2. Espaço euclidiano. 3. Base canônica.

---

*Licença*  
CC-BY-SA 4.0.

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

O site [notaspedrok.com.br](https://www.notaspedrok.com.br) é uma plataforma que construí para o compartilhamento de minhas notas de aula. Essas anotações feitas como preparação de aulas é uma prática comum de professoras/es. Muitas vezes feitas a rabiscos em rascunhos com validade tão curta quanto o momento em que são concebidas, outras vezes, com capricho de um diário guardado a sete chaves. Notas de aula também são feitas por estudantes - são anotações, fotos, prints, entre outras formas de registros de partes dessas mesmas aulas. Essa dispersão de material didático sempre me intrigou e foi o que me motivou a iniciar o site.

Com início em 2018, o site contava com apenas três notas incipientes. De lá para cá, conforme fui expandido e revisando os materiais, o site foi ganhando acessos de vários locais do mundo, em especial, de países de língua portuguesa. No momento, conta com 13 notas de aula, além de minicursos e uma coleção de vídeos e áudios.

As notas de **Vetores** abordam tópicos introdutórios sobre vetores no espaço euclidiano.

Aproveito para agradecer a todas/os que de forma assídua ou esporádica contribuem com correções, sugestões e críticas! ;)

Pedro H A Konzen

<https://www.notaspedrok.com.br>

# Conteúdo

<b>Licença</b>	<b>iii</b>
<b>Prefácio</b>	<b>iv</b>
<b>1 Fundamentos</b>	<b>1</b>
1.1 Segmentos Orientados . . . . .	1
1.1.1 Segmento . . . . .	1
1.1.2 Segmento Orientado . . . . .	3
1.1.3 Exercícios Resolvidos . . . . .	6
1.1.4 Exercícios . . . . .	8
1.2 Definição de Vetor . . . . .	11
1.2.1 Exercícios Resolvidos . . . . .	14
1.2.2 Exercícios . . . . .	16
1.3 Operações Elementares com Vetores . . . . .	20
1.3.1 Adição de Vetores . . . . .	20
1.3.2 Vetor oposto . . . . .	21
1.3.3 Subtração de vetores . . . . .	22
1.3.4 Multiplicação de Vetor por Escalar . . . . .	23
1.3.5 Resumo das Propriedades . . . . .	26
<b>2 Bases e Coordenadas</b>	<b>33</b>
2.1 Combinação Linear . . . . .	33
2.1.1 Interpretação Geométrica . . . . .	34
2.1.2 Exercícios Resolvidos . . . . .	35
2.1.3 Exercícios . . . . .	37
2.2 Dependência Linear . . . . .	40

2.2.1	Dois Vetores no Espaço . . . . .	40
2.2.2	Três Vetores no Espaço . . . . .	41
2.2.3	Quatro ou Mais Vetores no Espaço . . . . .	43
2.2.4	Exercícios Resolvidos . . . . .	44
2.2.5	Exercícios . . . . .	46
2.3	Bases e Coordenadas . . . . .	47
2.3.1	Operações de Vetores com Coordenadas . . . . .	49
2.3.2	Dependência linear . . . . .	52
2.3.3	Bases Ortonormais . . . . .	55
2.3.4	Exercícios Resolvidos . . . . .	57
2.3.5	Exercícios . . . . .	59
2.4	Mudança de base . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Produtos</b>	<b>68</b>
3.1	Produto Escalar . . . . .	68
3.1.1	Propriedades do Produto Escalar . . . . .	69
3.1.2	Exercícios Resolvidos . . . . .	71
3.1.3	Exercícios . . . . .	73
3.2	Ângulo entre Vetores . . . . .	74
3.2.1	Desigualdade Triangular . . . . .	77
3.2.2	Exercícios Resolvidos . . . . .	78
3.2.3	Exercícios . . . . .	78
3.3	Projeção Ortogonal . . . . .	79
3.3.1	Exercícios Resolvidos . . . . .	81
3.3.2	Exercícios . . . . .	82
3.4	Produto Vetorial . . . . .	83
3.4.1	Interpretação Geométrica . . . . .	84
3.4.2	Produto Vetorial por Coordenadas . . . . .	85
3.4.3	Exercícios Resolvidos . . . . .	85
3.4.4	Exercícios . . . . .	86
3.5	Propriedades do Produto Vetorial . . . . .	87
3.5.1	Exercícios Resolvidos . . . . .	92
3.5.2	Exercícios . . . . .	93
3.6	Produto Misto . . . . .	94
3.6.1	Interpretação Geométrica . . . . .	95
3.6.2	Propriedades . . . . .	96
3.6.3	Exercícios Resolvidos . . . . .	98
3.6.4	Exercícios . . . . .	99

**Bibliografia**

**100**

# Capítulo 1

## Fundamentos

Neste capítulo, seguimos uma abordagem geométrica para introduzir os conceitos fundamentais e as operações básicas envolvendo vetores.

### 1.1 Segmentos Orientados

O conceito de **segmento orientado** é fundamental na definição de vetores. Como o próprio nome indica, **trata-se de definir uma orientação a um dado segmento de reta**. Antes, portanto, vamos definir o que entendemos por um segmento.

#### 1.1.1 Segmento

Sejam dados dois pontos  $A$  e  $B$  sobre uma reta  $r$ . O conjunto de todos os pontos de  $r$  entre  $A$  e  $B$  é chamado de **segmento** e denotado por  $AB$ . A reta  $r$  é chamada de **reta suporte** e os pontos  $A$  e  $B$  de **pontos extremos**. Consulte a Figura 1.1.

#### Comprimento e Direção

O **comprimento** de um segmento  $AB$  é denotado por  $|AB|$  e definido como a distância entre seus pontos extremos  $A$  e  $B$ . Em outras palavras, é o





Figura 1.1: Um segmento  $AB$  de uma reta (direção)  $r$ .

tamanho do segmento<sup>1</sup>. Consulte a Figura 1.2

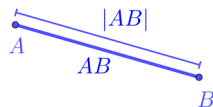


Figura 1.2: Comprimento de um segmento  $AB$ .

A **direção** de um segmento  $AB$  é a direção de sua reta suporte, i.e. a direção da reta que fica determinada pelos pontos  $A$  e  $B$ . Logo, dois segmentos  $AB$  e  $CD$  têm a mesma direção, quando suas retas suportes são paralelas ou coincidentes (ou seja, elas têm a mesma direção).

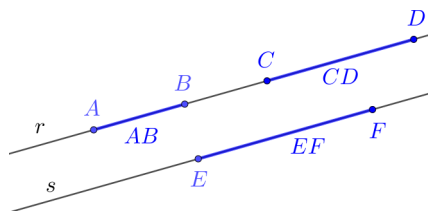


Figura 1.3: Segmentos de mesma direção  $r \parallel s$ .

**Exemplo 1.1.1.** Consideramos os segmentos representados na Figura 1.4. Observamos que  $AB$  e  $CD$  têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento  $EF$  tem o mesmo comprimento que  $AB$  (verifique!), mas tem direção diferente dos segmentos  $AB$  e  $CD$ .

<sup>1</sup>Em aplicações, o comprimento é medido em unidades de comprimento, metro ( $m$ ), no sistema internacional de unidades (SI).

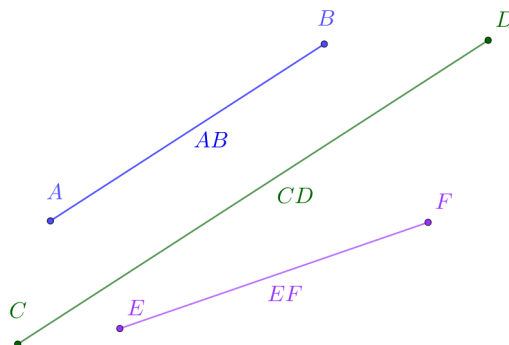


Figura 1.4: Segmentos de diferentes comprimentos e direções.

### Segmento Nulo

Se  $A$  e  $B$  são pontos coincidentes, então chamamos  $AB$  de **segmento nulo** e temos  $|AB| = 0$ . Observamos que a representação geométrica de um segmento nulo é um ponto, tendo em vista que seus pontos extremos são coincidentes. Como existem infinitas retas de diferentes direções que passam por um único ponto, temos que **segmentos nulos não têm direção definida**.

### 1.1.2 Segmento Orientado

Observamos que um dado segmento  $AB$  é igual ao segmento  $BA$ . Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** (ou **ponto de partida**) e o outro como sua **extremidade** (ou **ponto de chegada**). Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**.

Mais precisamente, um segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$  é o segmento definido pelos pontos  $A$  e  $B$ , sendo  $A$  o ponto de partida (origem) e  $B$  o ponto de chegada (extremidade). Consulte a Figura 1.5.

### Comprimento e Direção

As noções de comprimento e de direção para segmentos estendem-se diretamente a segmentos orientados. Dizemos que dois segmentos orientados não nulos  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm a **mesma direção**, quando as retas  $AB$  e  $CD$  são



Figura 1.5: Um segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$ .

**paralelas ou coincidentes.** Em outras palavras, dois segmentos orientados não nulos têm a mesma direção quando suas retas suporte são paralelas ou coincidentes.

O **comprimento** de um segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$  é a norma do segmento  $AB$ , i.e.  $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$ . O segmento orientado nulo  $\overrightarrow{AA}$  tem comprimento  $|\overrightarrow{AA}| = 0$  e não tem direção definida.

### Sentido

O **sentido** de um segmento orientado é o do ponto de partida (origem) para o ponto de chegada (extremo). Por exemplo, o segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$  tem sentido do ponto  $A$  ao  $B$ .

Segmentos orientados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  de mesma direção podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos. No caso de suas retas suportes não serem coincidentes, os segmentos orientados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm o mesmo sentido, quando os segmentos  $AC$  e  $BD$  não se interceptam. No contrário, caso estes se interceptam, os segmentos orientados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm sentidos opostos.

**Exemplo 1.1.2.** Na Figura 1.6, temos que os segmentos  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm o mesmo sentido. De fato, observamos que eles têm a mesma direção e que os segmentos  $AC$  e  $BD$  têm interseção vazia.

Na mesma Figura 1.6, temos que os segmentos orientados  $\overrightarrow{EF}$  e  $\overrightarrow{GH}$  têm sentidos opostos, pois têm a mesma direção e os segmentos  $EG$  e  $FH$  se interceptam.

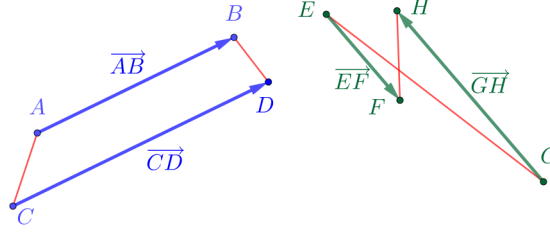


Figura 1.6: Segmentos orientados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  de mesmo sentido. Segmentos orientados  $\overrightarrow{EF}$  e  $\overrightarrow{GH}$  de sentidos opostos.

**Observação 1.1.1.** (Transitividade do sentido.) A propriedade de segmentos orientados terem o mesmo sentido é transitiva. Ou seja, se  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm o mesmo sentido e  $\overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{EF}$  têm o mesmo sentido, então  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{EF}$  têm o mesmo sentido.

Com base na Observação 1.1.1, analisamos o sentido de dois segmentos orientados e colineares escolhendo um deles e construindo um segmento orientado de mesmo sentido e não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais com respeito ao introduzido.

### Equipolência

Um segmento orientado não nulo  $\overrightarrow{AB}$  é **equipolente** a um segmento orientado  $\overrightarrow{CD}$ , quando  $\overrightarrow{AB}$  tem o **mesmo comprimento**, a **mesma direção** e o **mesmo sentido** de  $\overrightarrow{CD}$  (consulte a Figura 1.7). Segmentos nulos também são considerados equipolentes entre si.

Usamos a notação  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$  para indicar que  $\overrightarrow{AB}$  é equipolente a  $\overrightarrow{CD}$ . Caso contrário, escrevemos  $\overrightarrow{AB} \not\sim \overrightarrow{CD}$ .

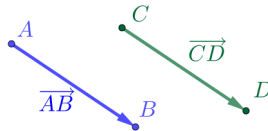


Figura 1.7: Dois segmentos orientados equipolentes.

A relação de equipolência é uma **relação de equivalência**. De fato, temos:

- **relação reflexiva:**  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ ;
- **relação simétrica:**  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ ;
- **relação transitiva:**  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ .

Com isso, dado um segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$ , definimos a **classe de equipolência** de  $\overrightarrow{AB}$  como o conjunto de todos os seus segmentos equipolentes. O segmento  $\overrightarrow{AB}$  é um **representante** desta classe, a qual é denotada por  $[\overrightarrow{AB}]_{\sim}$ .

### 1.1.3 Exercícios Resolvidos

**ER 1.1.1.** Sejam dados três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $D$ . Escreva a área do paralelogramo determinado pelos segmentos  $AB$  e  $AD$  com respeito aos comprimentos deles e ao ângulo determinado por eles.

**Solução.** Começamos desenhando um paralelogramo determinado por segmentos  $AB$  e  $AD$ . Consulte a Figura 1.8.

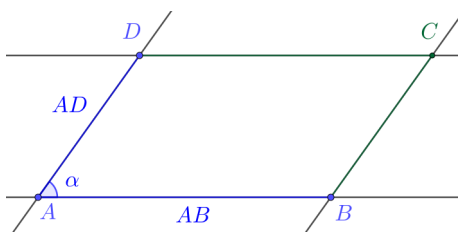


Figura 1.8: Paralelogramo determinado por segmentos  $AB$  e  $AD$ .

Denotando por  $\alpha$  o ângulo determinado pelos segmentos  $AB$  e  $AD$ , temos que a área deste paralelogramo pode ser escrita por

$$A = |AB| \cdot |AD| \sin \alpha. \quad (1.1)$$

◇

**ER 1.1.2.** Mostre que  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$  se, e somente se,  $\overrightarrow{BA} \sim \overrightarrow{DC}$ .

**Solução.** Para mostrar que

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \sim \overrightarrow{DC}, \quad (1.2)$$

vamos primeiro mostrar a implicação, i.e. que

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \sim \overrightarrow{DC}. \quad (1.3)$$

Logo, assumimos que  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ , mostramos que

a)  $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{DC}|.$

De fato, temos

$$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}| \cong |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DC}|. \quad (1.4)$$

b)  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{DC}$  têm as mesmas direções.

A direção de  $\overrightarrow{BA}$  é a mesma de  $\overrightarrow{AB}$ , pois suas retas suportes são coincidentes. Pela equipolência, essa também é a direção de  $\overrightarrow{CD}$ . Por fim,  $\overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{DC}$  têm a mesma direção, pois suas retas suportes são coincidentes. O resultado segue por transitividade.

c)  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{DC}$  têm os mesmos sentidos.

Como, por hipótese,  $\overrightarrow{AB}$  tem o mesmo sentido de  $\overrightarrow{CD}$ , temos que os segmentos  $AC$  e  $BD$  não se interceptam. Isto, por sua vez, mostra que  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{DC}$  têm o mesmo sentido.

Dos itens, a), b) e c), concluímos que

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \sim \overrightarrow{DC}. \quad (1.5)$$

Para mostrar a recíproca, i.e. que

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftarrow \overrightarrow{BA} \sim \overrightarrow{DC}. \quad (1.6)$$

basta substituir  $\overrightarrow{AB}$  ( $\overrightarrow{BA}$ ) por  $\overrightarrow{BA}$  ( $\overrightarrow{AB}$ ) e  $\overrightarrow{CD}$  ( $\overrightarrow{DC}$ ) por  $\overrightarrow{DC}$  ( $\overrightarrow{CD}$ ) nos itens a), b) e c) demonstrados acima. Em outras palavras, a demonstração é análoga. Verifique!

◇

### 1.1.4 Exercícios

**E.1.1.1.** Complete as lacunas.

- a) Seja  $r$  a reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$ . O segmento  $AB$  é o conjunto de \_\_\_\_\_ pertencentes a  $r$  e que estão \_\_\_\_\_  $A$  e  $B$  (inclusive).
- b) O comprimento de um segmento  $AB$  é definido como a \_\_\_\_\_ entre  $A$  e  $B$  e é denotada por \_\_\_\_\_.
- c) Chamamos de \_\_\_\_\_ de um dado segmento  $AB$ , a reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$ .
- d)  $AB$  é dito ser um segmento nulo, quando  $A$  e  $B$  são pontos \_\_\_\_\_.

**E.1.1.2.** Complete as lacunas.

- a) Segmento orientado é um segmento com \_\_\_\_\_ definido.
- b) Em um segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$ ,  $A$  é chamado de \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.
- c) Se as retas  $AB$  e  $CD$  são paralelas ou coincidentes, então  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm a mesma \_\_\_\_\_.
- d) O comprimento de um segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$  é definido como o comprimento do segmento \_\_\_\_\_.
- e)  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm \_\_\_\_\_ quando os segmentos  $AC$  e  $BD$  não se interceptam (se interceptam).

**E.1.1.3.** Complete as lacunas.

- a)  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são \_\_\_\_\_ se, e somente se,  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  têm a mesma \_\_\_\_\_, o mesmo \_\_\_\_\_ e o mesmo \_\_\_\_\_.
- b) Pela reflexividade da relação de equipolência,  $\overrightarrow{CD} \sim$  \_\_\_\_.
- c) Pela simetria da relação de equipolência, se  $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{AB}$ , então \_\_\_\_\_.
- d) Pela transitividade da relação de equipolência, se  $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$  e \_\_\_\_\_, então  $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$ .

**E.1.1.4.** Faça o esboço de dois segmentos  $AB$  e  $CD$  com  $|AB| \neq |CD|$  e cujas retas determinadas por eles sejam coincidentes.

**E.1.1.5.** Faça o esboço de dois segmentos orientados  $AB \not\sim CD$  e de mesmo sentido.

**E.1.1.6.** Faça o esboço de dois segmentos orientados colineares, de comprimentos iguais e sentidos opostos.

**E.1.1.7.** Mostre que segmentos terem o mesmo comprimento é uma:

- a) relação reflexiva.
- b) relação simétrica.
- c) relação transitiva.
- d) relação de equivalência.

**E.1.1.8.** Mostre que  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ , então  $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$ .

**E.1.1.9.** Mostre que se  $AC \sim CB$ , então  $C$  é ponto médio do segmento  $AB$ .



**E.1.1.10.** Mostre que se  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são equipolentes, então os pontos médios de  $AD$  e  $BC$  são coincidentes.

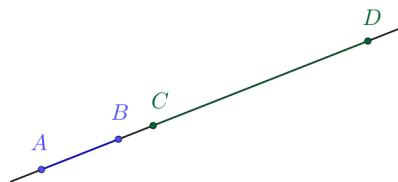
### Respostas

**E.1.1.1.** a) pontos; entre; c) distância;  $|AB|$ ; d) reta suporte; e) coincidentes;

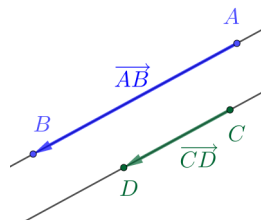
**E.1.1.2.** a) sentido; b) ponto de origem; ponto de extremidade; c) direção; d)  $|AB|$ ; e) o mesmo sentido (sentidos opostos); não se interceptam (se interceptam)

**E.1.1.3.** a) equipolentes; direção; comprimento; sentido; b)  $\overrightarrow{CD}$ ; c)  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ ; d)  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$

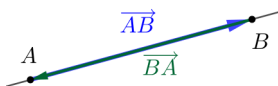
**E.1.1.4.**



**E.1.1.5.**



**E.1.1.6.**



**E.1.1.7.** a) Por óbvio, que  $AB$  tem o mesmo comprimento que si próprio. b) Se  $AB$  tem o mesmo comprimento de  $CD$ ,  $|AB| = |CD|$ , então é dizer que  $CD$  tem o mesmo comprimento de  $AB$ . c) Se  $|AB| = |CD|$  e  $|CD| = |EF|$ , então  $|AB| = |EF|$ . d) Por definição, segue dos itens a), b) e c).

**E.1.1.8.** Dica: Se  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  não são coincidentes, então  $ABCD$  determina um paralelogramo.

**E.1.1.9.**  $AC \sim CB$  implica que  $C \in AB$ . Como  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|$ , conclui-se que  $C$  é o ponto médio de  $AB$ .

**E.1.1.10.** Dica: as diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seus pontos médios.

## 1.2 Definição de Vetor

Um **vetor**  $\vec{u}$  é definido como a **classe de equipolência**<sup>2</sup> dos **segmentos orientados**  $\overrightarrow{AB}$  de dado **comprimento**, dada **direção** e dado **sentido**, i.e.  $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]_{\sim}$ . Qualquer  $\overrightarrow{AB} \in [\overrightarrow{AB}]_{\sim}$  é uma **representação do vetor**  $\vec{u}$  como um segmento orientado. Consulte a Figura 1.9.

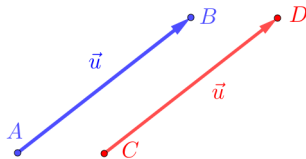


Figura 1.9: Duas representações de dado vetor  $\vec{u}$ .

**Observação 1.2.1.** (**Notação.**) Para simplificar a notação, usualmente, es-

<sup>2</sup>Consulte a Seção 1.1 para a definição de classe de equipolência.

crevemos  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  no lugar de  $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]_{\sim}$ .

A **norma** de um vetor  $\vec{u}$  é denotada por  $\|\vec{u}\|$  e definida como o comprimento de qualquer uma de suas representações. Mais precisamente, se o segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$  é uma representação de  $\vec{u}$ , i.e.  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ , então

$$\|\vec{u}\| := |\overrightarrow{AB}| := |AB|. \quad (1.7)$$

Consulte a Figura 1.10.

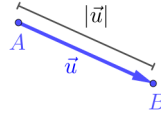


Figura 1.10: Norma de um vetor  $\vec{u}$ .

O **vetor nulo** é aquele que tem como representante um segmento orientado nulo. É denotado por  $\vec{0}$  e geometricamente representado por um ponto.

**Proposição 1.2.1.** (**Vetor Nulo.**)  $\|\vec{u}\| = 0$  se, e somente se,  $\vec{u} = \vec{0}$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar a implicação. Por hipótese, temos que  $\|\vec{u}\| = 0$ . Seja,  $\overrightarrow{AB}$  uma representação de  $\vec{u}$ . Então, por definição da norma de vetor,  $\|\vec{u}\| := |\overrightarrow{AB}| = 0$ . Logo,  $AB$  é um segmento nulo, i.e.  $A$  é coincidente a  $B$  e, portanto,  $\vec{u} = \vec{0}$ .

Agora, mostramos a recíproca, i.e., se  $\vec{u} = \vec{0}$ , então  $\|\vec{u}\| = 0$ . Como  $\vec{u} = \vec{0}$ , temos que  $\vec{u}$  pode ser representado por qualquer segmento orientado  $\overrightarrow{AA}$ . Temos que  $|\overrightarrow{AA}| = 0$  e, portanto,  $\|\vec{u}\| := |\overrightarrow{AA}| = 0$ .  $\square$

Usualmente, escolhemos um ponto  $O$  como origem do espaço. A seguinte proposição, garante que todo o vetor admite uma única representação a partir dessa origem.

**Proposição 1.2.2.** (**Representação de Vetor a partir da Origem**) Seja dado um ponto  $O$  no espaço. Todo vetor  $\vec{u}$  admite uma única representação  $\overrightarrow{OA}$ .

*Demonstração.* Seja dado um ponto  $O$  e um vetor  $\vec{u}$ . Começamos por **mostrar a existência**, i.e. que existe  $A$  tal que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ . Seja  $\overrightarrow{BC}$  uma representação de  $\vec{u}$  e  $r$  sua reta suporte. Seja, então,  $s$  a reta que passa pelo ponto  $O$  e é paralela (ou coincidente) a  $r$ . Consulte a Figura 1.11.

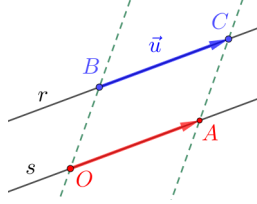


Figura 1.11: Representação de um vetor a partir da origem do espaço.

Escolhemos, então,  $A \in p$  tal que  $|OA| = |\overrightarrow{BC}|$  e tal que  $\overrightarrow{OA}$  tenha o mesmo sentido de  $\overrightarrow{BC}$ . Logo,  $\overrightarrow{BC}$  é equipolente a  $\overrightarrow{OA}$ , que é a representação desejada de  $\vec{u}$ .

Agora, vamos **mostrar a unicidade**, i.e. que se  $A$  e  $B$  são pontos tais que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{OB}$ , então  $A$  e  $B$  são coincidentes. **Por negação**, se  $A$  e  $B$  não forem coincidentes, então  $O$ ,  $A$  e  $B$  são pontos colineares ou não, exclusivamente. Neste caso,  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  não tem a mesma direção. Noutro caso,  $|\overrightarrow{OA}| \neq |\overrightarrow{OB}|$  ou  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  têm sentidos opostos. Em qualquer um dos casos  $\overrightarrow{OA} \not\sim \overrightarrow{OB}$ .  $\square$

Dois vetores não nulos determinam um único ângulo<sup>3</sup>.

**Proposição 1.2.3.** (**Ângulo entre Vetores**.) Dois vetores não nulos determinam uma única classe de ângulos congruentes.

*Demonstração.* Existência. Sejam dados os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos e suas representações  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ . Logo,  $OA$  e  $OB$  determinam duas semi-retas de ângulo  $\hat{O}$  (consulte a Figura 1.12).

Unicidade. Sejam dois ângulos  $\hat{O}$  e  $\hat{O}'$  determinados pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Sejam, também, as representações  $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$ . Logo,

<sup>3</sup>Mais precisamente, uma classe de ângulos congruentes

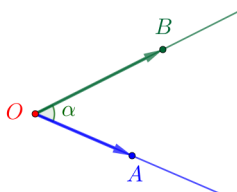
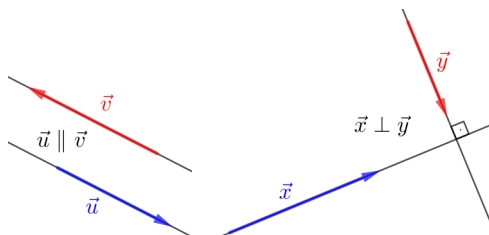


Figura 1.12: Dois vetores determinam um ângulo.

as semi-retas  $OA$  e  $O'A'$  têm as mesmas direções. Bem como, as semi-retas  $OB$  e  $O'B'$  têm as mesmas direções. Concluimos que os ângulos  $\hat{O}$  e  $\hat{O}'$  são congruentes.  $\square$

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando admitem representações paralelas. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, etc.

**Exemplo 1.2.1.** Na Figura 1.13, temos  $\vec{u}$  vetor paralelo a  $\vec{v}$ , enquanto que  $\vec{x}$  é ortogonal a  $\vec{y}$ .

Figura 1.13: Vetores paralelos  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  e vetores ortogonais  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

Agora, na Figura 1.14, temos que os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são coplanares.

### 1.2.1 Exercícios Resolvidos

**ER 1.2.1.** Mostre que um plano fica unicamente determinado por um ponto e dois vetores não nulos de diferentes direções.

**Solução.** Primeiramente, vamos mostrar a existência de um plano  $\alpha$  tal que  $O, \vec{u}, \vec{v} \in \alpha$  (consulte a Figura 1.15). Sejam um ponto  $O$  e dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos e de diferentes direções. Escolhemos, então, suas representações

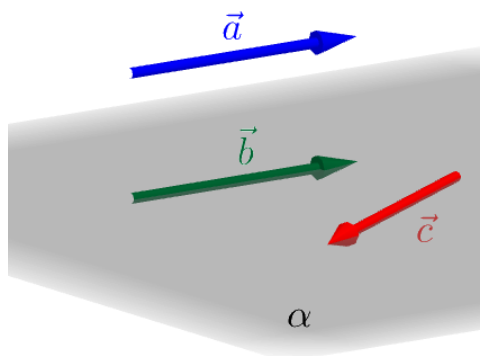


Figura 1.14: Vetores coplanares.

$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ . Como  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos e têm diferentes direções, temos que os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$  são não colineares. Logo, estes pontos determinam um plano  $\alpha$ , tal que  $O, \vec{u}, \vec{v} \in \alpha$ .

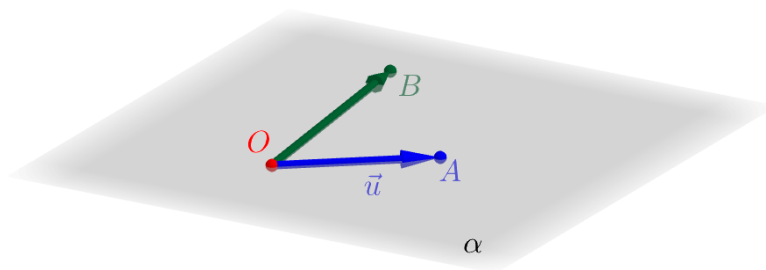


Figura 1.15: Vetores e planos.

A unicidade segue imediatamente do fato de que três pontos não colineares determinam unicamente um plano.

◇

**ER 1.2.2.** Mostre que dois vetores não nulos e de diferentes direções determinam unicamente uma classe de paralelogramos congruentes<sup>4</sup>.

**Solução.** Existência. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores não nulos e de diferentes

<sup>4</sup>Dois polígonos são congruentes, quando seus lados e ângulos correspondentes têm a mesma medida.

direções. Sejam, então, suas representações  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$  (consulte a Figura 1.16). Sejam, agora, as retas  $r$  e  $s$  tais que  $B \in r$ ,  $r \parallel \vec{v}$ ,  $D \in s$  e  $s \parallel \vec{u}$ . Seja,  $C$  o ponto de interseção de  $r$  e  $s$ . Por construção, temos que  $AB \parallel DC$  e  $AD \parallel BC$ , o que mostra que  $ABCD$  é um paralelogramo.

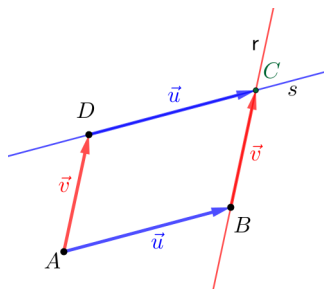


Figura 1.16: Paralelogramo determinado por vetores não nulos de diferentes direções.

Unicidade. Falta mostrar que, dados  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não nulos e de diferentes direções, então são congruentes quaisquer dois paralelogramos determinados por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Consulte o exercício E.1.2.9.

◇

## 1.2.2 Exercícios

**E.1.2.1.** Complete as lacunas.

- Um vetor é definido por sua \_\_\_\_\_, direção e \_\_\_\_\_.
- Se  $\vec{u}$  tem representação  $\overrightarrow{AB}$ , então  $\|\vec{u}\| = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- Se  $\|\vec{v}\| = 0$ , então  $\vec{v}$  é um \_\_\_\_\_.
- Vetores paralelos são vetores de mesma/o \_\_\_\_\_.

**E.1.2.2.** Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

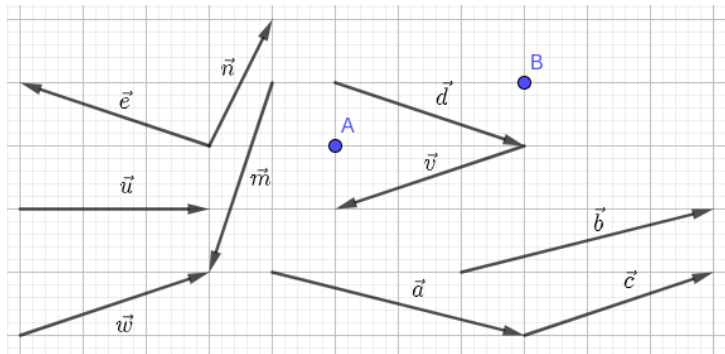
- Todos os vetores podem ser representados a partir de um mesmo ponto de origem.

- b) Dois vetores de mesma norma são vetores paralelos.
- c) Dois vetores são sempre coplanares entre si.

**E.1.2.3.** Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

- a) Dois vetores não nulos determinam uma única classe de ângulos congruentes.
- b) Dois vetores não nulos de diferentes direções determinam um único plano.
- c) Dois vetores não nulos de diferentes direções determinam uma única classe de paralelogramos congruentes.

**E.1.2.4.** Com base na figura abaixo, qual(is) dos vetores indicados são iguais ao vetor  $\overrightarrow{AB}$ .



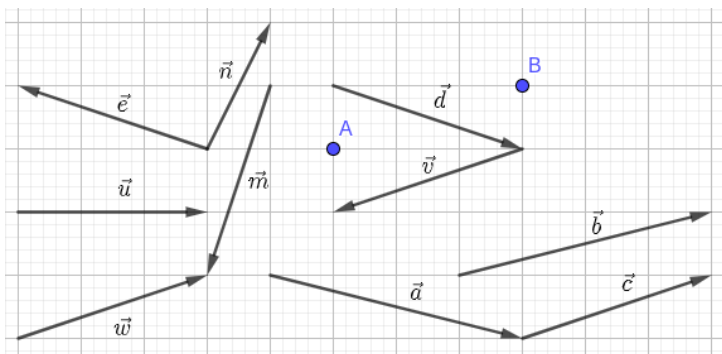
**E.1.2.5.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos dois a dois distintos. Se  $\vec{b}$  é um vetor nulo, então  $\vec{b}$  é igual a:

- a)  $\vec{0}$
- b)  $\overrightarrow{AB}$
- c)  $\overrightarrow{CC}$

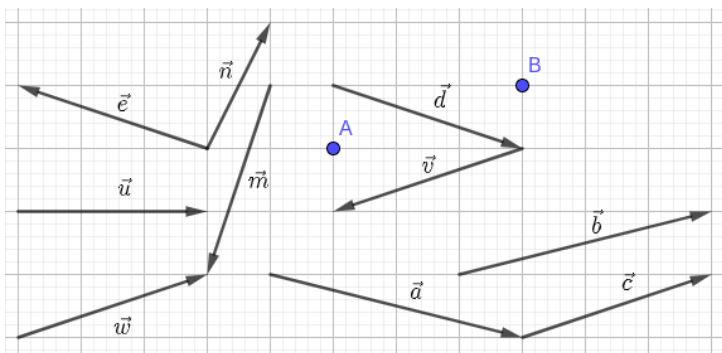


d)  $\overrightarrow{CA}$ e)  $\overrightarrow{BB}$ 

**E.1.2.6.** Com base na figura abaixo, qual(is) dos vetores indicados são paralelos entre si.



**E.1.2.7.** Com base na figura abaixo, qual(is) dos vetores indicados são ortogonais (perpendiculares) entre si.



**E.1.2.8.** Mostre que uma reta fica unicamente determinada por um ponto  $O$  e um vetor não nulo  $\vec{u}$ .

**E.1.2.9.** No ER.1.2.2, mostrou-se que dados  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não nulos e de

diferentes direções, então existe um paralelogramo associado de lados congruentes a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Mostre que são congruentes quaisquer dois paralelogramos determinados por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

### Respostas

**E.1.2.1.** a) norma; sentido. b)  $|\vec{AB}|$ . c) vetor nulo. d) direção.

**E.1.2.2.** a) V. b) F. c) V.

**E.1.2.3.** a) V. b) F. c) V.

**E.1.2.4.**  $\vec{w}, \vec{c}$

**E.1.2.5.** a), c), e)

**E.1.2.6.**  $\vec{d} \parallel \vec{e}; \vec{c} \parallel \vec{v} \parallel \vec{w}$

**E.1.2.7.**  $\vec{e} \perp \vec{m}$ .

**E.1.2.8.** Seja  $A$  tal que  $\vec{u} = \vec{OA}$ . Como  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , temos que  $O$  e  $A$  são não coincidentes. Temos então, uma única reta  $r$  tal que  $O, A \in r$ .

**E.1.2.9.** Sejam as representações  $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{A'B'}$  e  $\vec{v} = \vec{AD} = \vec{A'D'}$ . Do demonstrado no ER 1.2.2, temos os paralelogramos associados  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ . Por construção,  $AB$  é congruente a  $A'B'$ , bem como, são congruentes  $AD$  e  $A'D'$ . Também, são congruentes os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{A'}$ . Logo, conclui-se que os paralelogramos  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  são congruentes.

## 1.3 Operações Elementares com Vetores

Vamos introduzir operações vetoriais de adição e multiplicação por escalar.

### 1.3.1 Adição de Vetores

Sejam dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Sejam, ainda, suas representações  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ . Então, definimos o **vetor soma**  $\vec{u} + \vec{v}$  como o vetor que admite a representação  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Consulte a Figura 1.17.

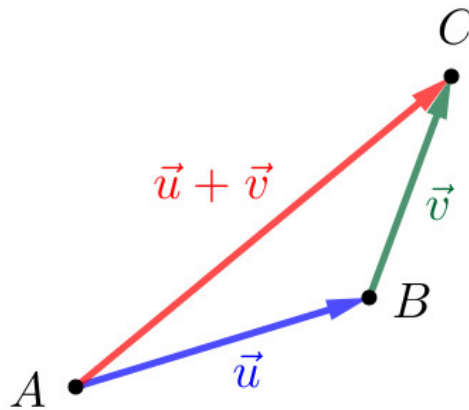


Figura 1.17: Vetor soma resultante da adição entre dois vetores.

#### Propriedades

A operação de adição tem as seguintes propriedades notáveis.

- **Elemento neutro da adição**

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}. \quad (1.8)$$

De fato, seja a representação do vetor  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . Observamos que podemos representar  $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$ . Por definição da adição de vetores, temos

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} \quad (1.9)$$

$$= \overrightarrow{AB} = \vec{u}. \quad (1.10)$$

- **Associatividade da adição**

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}). \quad (1.11)$$

De fato, sejam as representações  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$  e  $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$ . Então, segue

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} \quad (1.12)$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \quad (1.13)$$

$$= \overrightarrow{AD}, \quad (1.14)$$

bem como,

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \quad (1.15)$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \quad (1.16)$$

$$= \overrightarrow{AD}. \quad (1.17)$$

- **Comutatividade da adição**

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}. \quad (1.18)$$

Para vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de mesma direção, a comutatividade de adição é direta. Noutro caso, podemos usar a regra do paralelogramo, que introduziremos logo mais. Consulte, também, o exercício resolvido ER.1.3.2.

### 1.3.2 Vetor oposto

Definimos o **vetor oposto** a  $\vec{u}$ , pelo vetor  $-\vec{u}$  que tem o mesmo comprimento e a mesma direção de  $\vec{u}$ , mas tem sentido oposto a  $\vec{u}$ . Consulte a Figura 1.18.

**Observação 1.3.1.** (Oposto do Vetor Nulo.) Por completude, definimos  $-\vec{0} = \vec{0}$ .

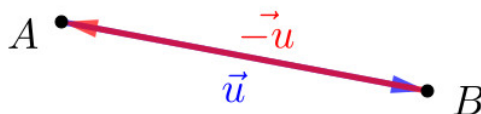


Figura 1.18: Vetor oposto  $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$  do vetor  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

### Propriedade

- **Elemento oposto da adição**

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}. \quad (1.19)$$

Dado um vetor e sua representação  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . Por definição,  $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$  e, então,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \quad (1.20)$$

$$= \overrightarrow{AA} \quad (1.21)$$

$$= \vec{0}. \quad (1.22)$$

Consulte a Figura 1.18.

### 1.3.3 Subtração de vetores

A subtração do vetor  $\vec{u}$  pelo vetor  $\vec{v}$  é denotada por  $\vec{u} - \vec{v}$  e definida por

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v}). \quad (1.23)$$

Consultamos a Figura 1.19.

### Regra do Paralelogramo

Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$  vetores não nulos e de diferentes direções. Seja, então o paralelogramo  $OACB$  determinado por eles (consulte o exercício resolvido ER.1.2.2). Por observação direta, temos que  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OB}$  e  $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CA}$ . Consulte a Figura 1.20.

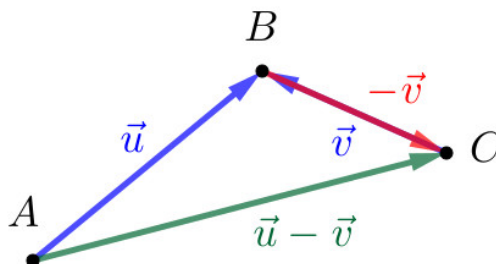


Figura 1.19: Representação geométrica de  $\vec{u} - \vec{v}$ .

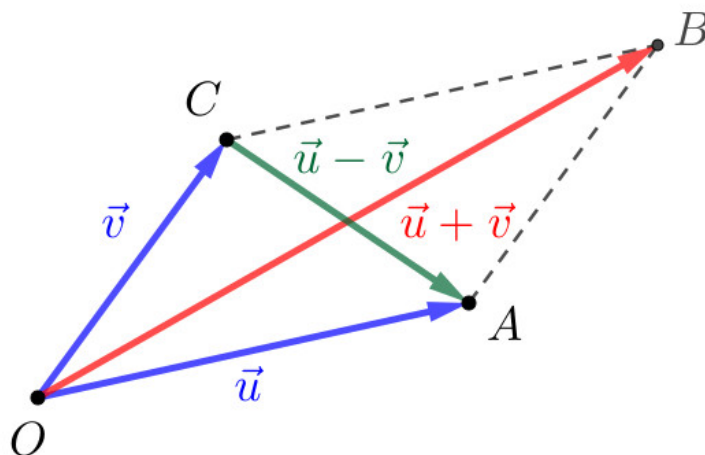


Figura 1.20: Regra do paralelogramo.  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .  $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CA}$ .

### 1.3.4 Multiplicação de Vetor por Escalar

A multiplicação de um número real  $\alpha > 0$  (escalar) por um vetor  $\vec{u}$  é denotado por  $\alpha\vec{u}$  e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de  $\vec{u}$  e com norma  $\alpha\|\vec{u}\|$ . Quando  $\alpha = 0$ , definimos  $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ . Consulte a Figura 1.21.

**Observação 1.3.2.** ( $\alpha < 0$ .) No caso de  $\alpha < 0$ , definimos

$$\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u}). \quad (1.24)$$

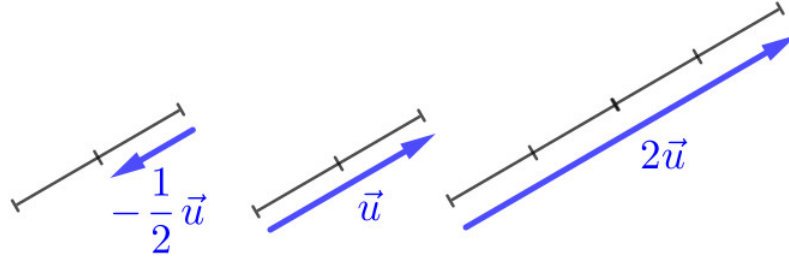


Figura 1.21: Multiplicação vetor-escalar.

**Proposição 1.3.1.** Para quaisquer número real  $\alpha$  e vetor  $\vec{u}$ , temos

$$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|. \quad (1.25)$$

*Demonstração.* De fato, se  $\alpha \geq 0$ , temos  $|\alpha| = \alpha$  e o resultado segue imediatamente. Agora, se  $\alpha < 0$ , então<sup>5</sup>

$$\|\alpha\vec{u}\| = \|-\alpha\vec{u}\| \quad (1.26)$$

$$= -\alpha \|\vec{u}\| \quad (1.27)$$

$$= |\alpha| \|\vec{u}\|. \quad (1.28)$$

□

### Propriedades

- **Elemento neutro da multiplicação por escalar**

$$1\vec{u} = \vec{u}. \quad (1.29)$$

De fato, como  $1 > 0$ , temos que  $1\vec{u}$  e  $\vec{u}$  têm a mesma direção e o mesmo sentido. Também, têm a mesma norma, pois

$$\|1\vec{u}\| = |1| \|\vec{u}\| \quad (1.30)$$

$$= \|\vec{u}\|. \quad (1.31)$$

<sup>5</sup>Por definição,  $|\alpha| = \alpha$  para  $\alpha \geq 0$ , e  $|\alpha| = -\alpha$  para  $\alpha < 0$ .

- **Compatibilidade da multiplicação**

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \quad (1.32)$$

De fato, dados  $\alpha, \beta$  números reais e  $\vec{u}$  vetor, é direto que  $\alpha(\beta\vec{u})$  e  $(\alpha\beta)\vec{u}$  têm a mesma direção e o mesmo sentido. Por fim, temos

$$\|\alpha(\beta\vec{u})\| = |\alpha| \|\beta\vec{u}\| \quad (1.33)$$

$$= |\alpha| |\beta| \|\vec{u}\| \quad (1.34)$$

$$= |\alpha\beta| \|\vec{u}\| \quad (1.35)$$

$$= \|(\alpha\beta)\vec{u}\|. \quad (1.36)$$

- **Distributividade**

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \quad (1.37)$$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \quad (1.38)$$

A primeira, segue diretamente da noção de comprimento de segmentos orientados. A segunda, segue da semelhança de triângulos. Consulte a Figura 1.22.

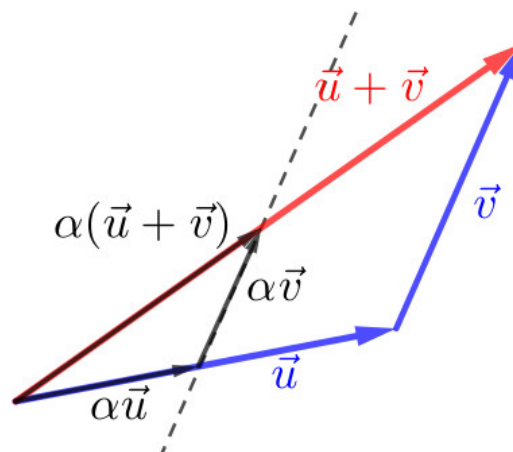


Figura 1.22: Distributividade da multiplicação vetor por escalar.



### 1.3.5 Resumo das Propriedades

Para quaisquer vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e quaisquer escalares  $\alpha$  e  $\beta$ , valem as seguintes propriedades:

- **Associatividade da adição**

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \quad (1.39)$$

- **Comutatividade da adição**

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad (1.40)$$

- **Elemento neutro da adição**

$$\vec{u} + \text{vec}0 = \vec{u} \quad (1.41)$$

- **Compatibilidade da multiplicação por escalar**

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \quad (1.42)$$

- **Elemento neutro da multiplicação por escalar**

$$1\vec{u} = \vec{u} \quad (1.43)$$

- **Distributividade**

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \quad (1.44)$$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \quad (1.45)$$

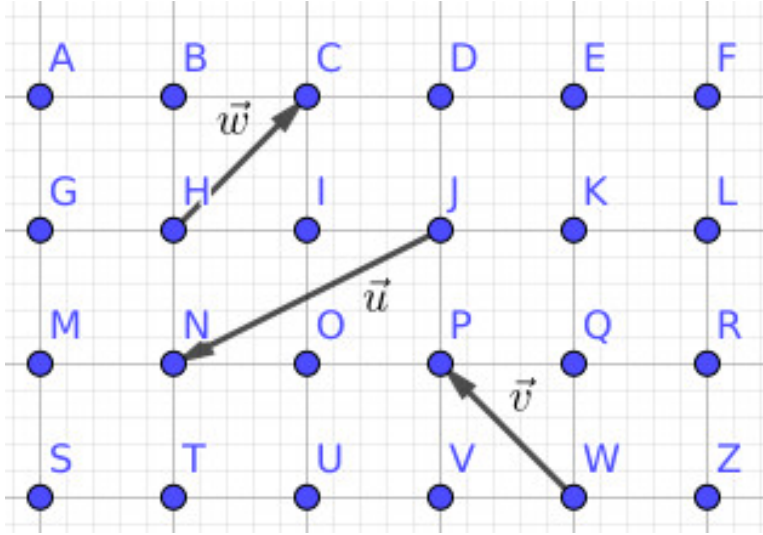


Figura 1.23: Representação dos vetores para o exercício resolvido ER.1.3.1.

### Exercícios resolvidos

**ER 1.3.1.** Com base na Figura 1.23, forneça o vetor  $\vec{w}$  como resultado de operações básicas envolvendo os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Solução.** Vamos construir dois vetores auxiliares  $\overrightarrow{HB}$  e  $\overrightarrow{HI}$  a partir de operações envolvendo os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Notamos que  $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HB}$ .

Começamos buscando formar o vetor  $\overrightarrow{HI}$ . Para tanto, observamos que  $\vec{u} = \overrightarrow{NG}$  e, portanto,  $\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{JG}$ . Com isso, obtemos que

$$\overrightarrow{HI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{JG} \quad (1.46)$$

$$= -\frac{1}{3}(\vec{v} + \vec{u}). \quad (1.47)$$

Agora, vamos formar o vetor  $\overrightarrow{HB}$ . Isso pode ser feito da seguinte forma

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{WQ} \quad (1.48)$$

$$= \vec{u} + \overrightarrow{PQ} \quad (1.49)$$

$$= \vec{u} + \overrightarrow{HI} \quad (1.50)$$

$$= \vec{u} - \frac{1}{3}(\vec{v} + \vec{u}) \quad (1.51)$$

$$= \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}. \quad (1.52)$$

Por tudo isso, concluímos que

$$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HB} \quad (1.53)$$

$$= -\frac{1}{3}(\vec{v} + \vec{u}) \quad (1.54)$$

$$+ \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} \quad (1.55)$$

$$= \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}. \quad (1.56)$$

◇

**ER 1.3.2.** Mostre que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .

**Solução.** Seja  $ABCD$  o paralelogramo com  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . Logo, pela regra do paralelogramo temos

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad (1.57)$$

$$= \overrightarrow{AC} \quad (1.58)$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \quad (1.59)$$

$$= \vec{v} + \vec{u}. \quad (1.60)$$

◇

## Exercícios

**E.1.3.1.** Complete as lacunas.

a) Se  $\vec{u} = \overrightarrow{FE}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{EG}$ , então  $\vec{u} + \vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

b)  $2\vec{v} + \vec{u} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

c) Pela associatividade da adição de vetores, temos  $\underline{\hspace{2cm}} = \vec{w} + (\vec{v} + \vec{u})$ .

d) Pela \_\_\_\_\_, temos  $\vec{w} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{w}$ .

**E.1.3.2.** Complete as lacunas.

a) O vetor oposto de  $\vec{u} = \overrightarrow{HA}$  é  $-\vec{u} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

b)  $\underline{\hspace{1cm}} + \vec{w} = \vec{0}$ .

c) Pela definição de vetor oposto,  $\|-\vec{v}\| = \underline{\hspace{1cm}}$ .

d) Se  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , então  $\vec{u} - \vec{v} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

**E.1.3.3.** Complete as lacunas.

a) O vetor  $3\vec{w}$  tem o \_\_\_\_\_ sentido \_\_\_\_\_ do vetor  $\vec{w}$ .

b) O vetor  $-\pi\vec{v}$  tem o \_\_\_\_\_ sentido \_\_\_\_\_ do vetor  $\vec{v}$ .

c)  $\|-2\vec{w}\| = \underline{\hspace{1cm}}$ .

d) Pela \_\_\_\_\_ por escalar, temos  $\beta(\alpha\vec{v}) = (\beta\alpha)\vec{v}$  para quaisquer escalares  $\alpha, \beta$  e vetor  $\vec{v}$ .

e) Pela distributividade, temos  $\underline{\hspace{1cm}} = \beta\vec{v} + \beta\vec{u}$  para quaisquer escalar  $\beta$  e vetores  $\vec{u}, \vec{v}$ .

f) Outra forma de \_\_\_\_\_, fornece  $(\beta + \alpha)\vec{w} = \beta\vec{w} + \alpha\vec{w}$  para quaisquer escalares  $\alpha, \beta$  e vetor  $\vec{w}$ .

**E.1.3.4.** Com base na figura abaixo, forneça uma representação de cada um dos seguintes vetores:

a)  $\vec{v} + \vec{u}$ .

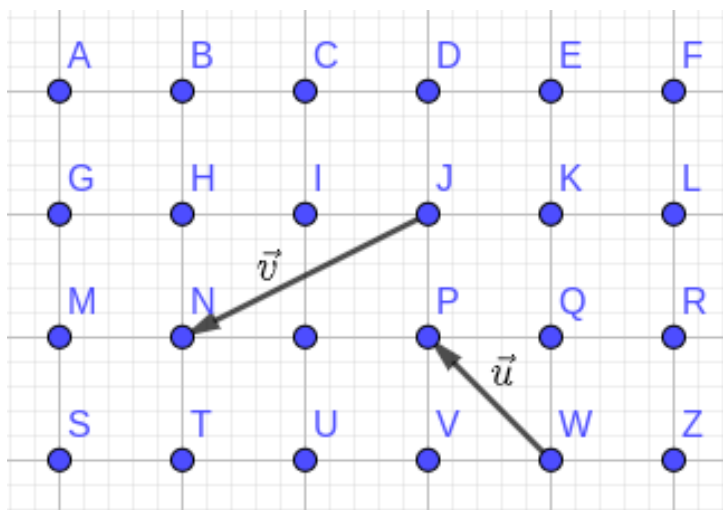
b)  $3\vec{u}$ .

c)  $-\vec{v}$ .

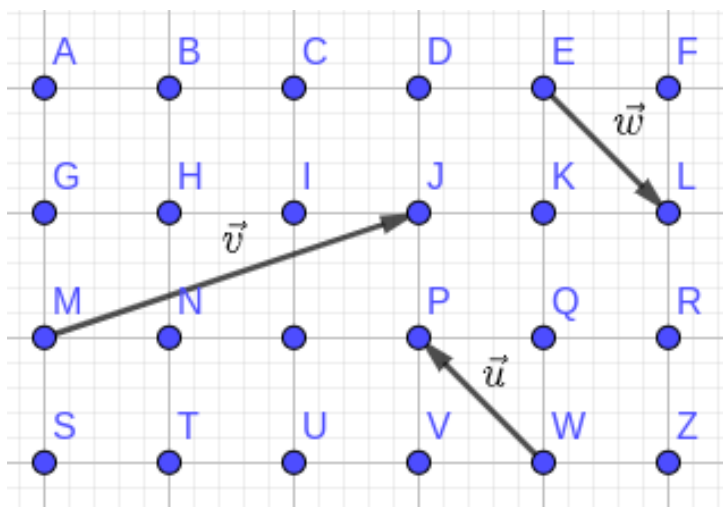
d)  $\vec{u} - \vec{v}$ .

e)  $\vec{v} - \vec{u}$ .

f)  $\vec{v} + 2\vec{u}$ .



**E.1.3.5.** Com base na figura abaixo, forneça uma representação do vetor  $\vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$ .



**E.1.3.6.** Com base na figura abaixo, escreva os seguintes vetores como resultado de operações envolvendo  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$ .

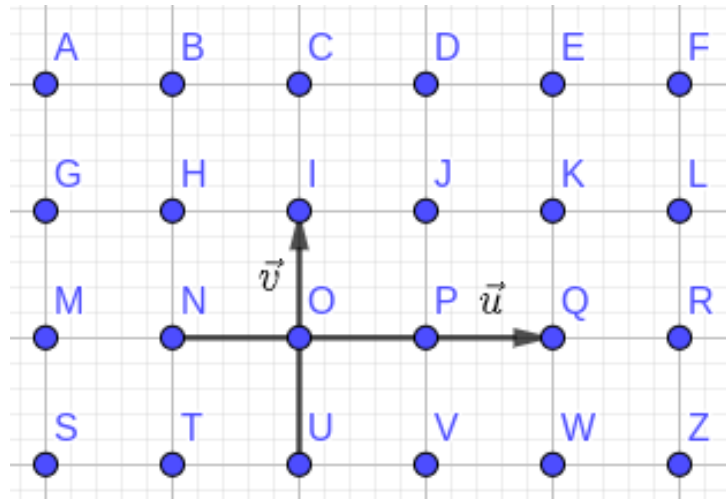
a)  $\overrightarrow{QK}$

b)  $\overrightarrow{KI}$

c)  $\overrightarrow{TO}$

d)  $\overrightarrow{PE}$

e)  $\overrightarrow{FT}$



**E.1.3.7.** Seja dado um vetor  $\vec{u} \neq 0$ . Calcule a norma do vetor<sup>6</sup>  $\vec{v} = \vec{u}/|\vec{u}|$ .

**E.1.3.8.** Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

1.  $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$

2.  $\vec{u} = -\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

---

<sup>6</sup> $\vec{u}/|\vec{u}|$  é chamado de vetor  $\vec{u}$  normalizado, ou a normalização do vetor  $\vec{u}$ .

**Respostas**

**E.1.3.1.** a)  $\overrightarrow{FG}$ . b)  $\vec{u}$ . c)  $(\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ . d) comutatividade da adição.

**E.1.3.2.** a)  $\overrightarrow{AH}$ . b)  $-\vec{w}$ . c)  $\|\vec{v}\|$ . d)  $\overrightarrow{CB}$ .

**E.1.3.3.** a) mesmo; -x-. b) -x-; oposto. c)  $2\|\vec{w}\|$ . d) compatibilidade da multiplicação. e)  $\beta(\vec{v} + \vec{u})$ . f) distributividade.

**E.1.3.4.** a)  $\overrightarrow{JG}$ . b)  $\overrightarrow{WB}$ . c)  $\overrightarrow{JF}$ . d)  $\overrightarrow{NC}$ . e)  $\overrightarrow{CN}$ . f)  $\overrightarrow{KA}$ .

**E.1.3.5.**  $\overrightarrow{MJ}$ .

**E.1.3.6.** a)  $\frac{1}{2}\vec{v}$ ; b)  $-\frac{2}{3}\vec{u}$ ; c)  $\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{u}$ ; d)  $\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{u}$ ; e)  $-\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

**E.1.3.7.**  $|\vec{v}| = 1$ .

**E.1.3.8.** a) verdadeira; b) verdadeira.

# Capítulo 2

## Bases e Coordenadas

### 2.1 Combinação Linear

Dados vetores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  e números reais  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , com  $n$  inteiro positivo, chamamos de

$$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n \quad (2.1)$$

uma **combinação linear** de  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ . Neste caso, também dizemos que  $\vec{u}$  é **gerado** pelos vetores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  ou, equivalentemente, que estes vetores **geram** o vetor  $\vec{u}$ .

**Exemplo 2.1.1.** Sejam dados os vetores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  e  $\vec{z}$ . Então, temos:

- a)  $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{v} + \sqrt{2}\vec{z}$  é uma combinação linear dos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{z}$ .
- b)  $\vec{u}_2 = \vec{u} - 2\vec{z}$  é uma outra combinação linear dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{z}$ .
- c)  $\vec{u}_3 = 2\vec{u} - \vec{w} + \pi\vec{z}$  é uma combinação linear dos vetores  $\vec{u}, \vec{w}$  e  $\vec{z}$ .
- d)  $\vec{u}_4 = \frac{3}{2}\vec{z}$  é uma combinação linear do vetor  $\vec{z}$ .



### 2.1.1 Interpretação Geométrica

#### Combinação Linear e Vetores Paralelos

Se  $\vec{u}$  é combinação linear não nula de  $\vec{v}$  apenas, então  $\vec{u}$  é paralelo a  $\vec{v}$ . De fato, se

$$\vec{u} = \alpha \vec{v}, \quad (2.2)$$

com  $\alpha \neq 0$ , então, por definição da multiplicação por escalar,  $\vec{u}$  tem a mesma direção de  $\vec{v}$ . Em outras palavras, temos a seguinte proposição. Consulte a Figura 2.1.

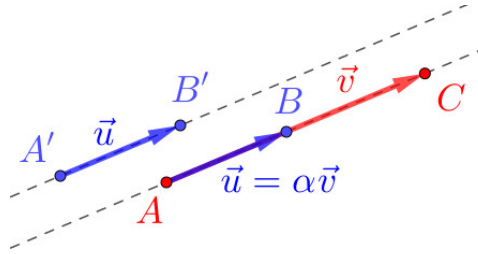


Figura 2.1: Combinação linear de vetores paralelos.

**Proposição 2.1.1.** (Combinação Linear entre Vetores Paralelos.) Se  $\vec{u}, \vec{v}$  são vetores não nulos tais que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}, \quad (2.3)$$

com escalares  $\alpha, \beta$  não simultaneamente nulos, então  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, vamos assumir que  $\alpha \neq 0$ . Logo, temos que

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v}, \quad (2.4)$$

o que mostra que  $\vec{u}$  têm a mesma direção de  $\vec{v}$ .  $\square$

**Observação 2.1.1.** (Vetores Paralelos Têm Combinação Não Trivial.) A recíproca da Proposição 2.1.1 é válida, i.e., se  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  e não nulos, então existem escalares  $\alpha, \beta$  não simultaneamente nulos tais que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}. \quad (2.5)$$

Consulte o exercício E.2.1.8.

### Combinação Linear e Vetores Coplanares

Se  $\vec{w}$  é combinação linear não nula de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , então  $\vec{w}$  é coplanar a estes vetores. De fato, temos

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \quad (2.6)$$

com escalares  $\alpha, \beta$ . Se pelo menos um dos  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\alpha$  ou  $\beta$  é nulo, então, é certo, que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares. Caso sejam todos não nulos,  $\alpha\vec{u} = \vec{OA}$  e  $\beta\vec{v} = \vec{OC}$  determinam um plano  $\gamma$  e um paralelogramo  $OABC \in \gamma$ . Segue que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad (2.7)$$

$$= \vec{OA} + \vec{OC} \quad (2.8)$$

$$= \vec{OB} \in \gamma. \quad (2.9)$$

Concluimos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares.

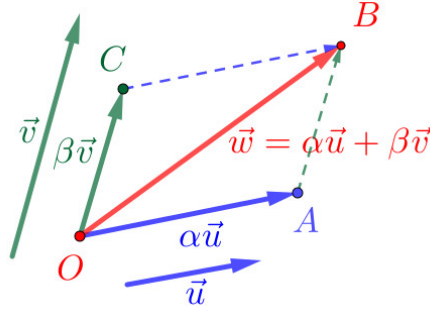


Figura 2.2: Combinação linear de um vetor.

**Proposição 2.1.2.** (Combinação Linear entre Vetores Coplanares.) Vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  não nulos têm combinação linear não trivial se, e somente se, são coplanares.

*Demonstração.* Consulte o E.2.1.9. □

### 2.1.2 Exercícios Resolvidos

**ER 2.1.1.** Com base na Figura 2.3, escreva o vetor  $\vec{u}$  como combinação linear dos vetores  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ .

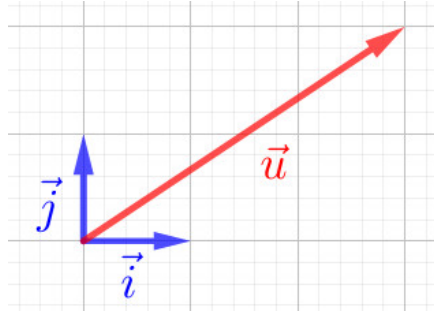


Figura 2.3: Vetor  $\vec{u}$  como combinação linear de  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ .

**Solução.** Para escrevermos o vetor  $\vec{u}$  como combinação linear dos vetores  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ , devemos determinar números  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$\vec{u} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j}. \quad (2.10)$$

Com base na Figura 2.3, podemos tomar  $c_1 = 3$  e  $c_2 = 2$ , i.e. temos

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}. \quad (2.11)$$

◇

**ER 2.1.2.** Sabendo que  $\vec{u} = 2\vec{v}$ , forneça três maneiras de escrever o vetor nulo  $\vec{0}$  como combinação linear dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Solução.** Dado que

$$\vec{u} = 2\vec{v} \quad (2.12)$$

podemos escrever  $\vec{0}$  como combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  das seguintes formas:

a) subtraindo  $\vec{u}$ .

$$\vec{u} - \vec{u} = 2\vec{v} - \vec{u} \quad (2.13)$$

$$\vec{0} = 2\vec{v} - \vec{u} \quad (2.14)$$

b) subtraindo  $2\vec{v}$ .

$$\vec{u} - 2\vec{v} = 2\vec{v} - 2\vec{v} \quad (2.15)$$

$$\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{0} \quad (2.16)$$

$$\vec{0} = \vec{u} - 2\vec{v} \quad (2.17)$$

c) multiplicando por  $1/2$  e subtraindo  $-(1/2)\vec{u}$ .

$$\frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot 2\vec{v} \quad (2.18)$$

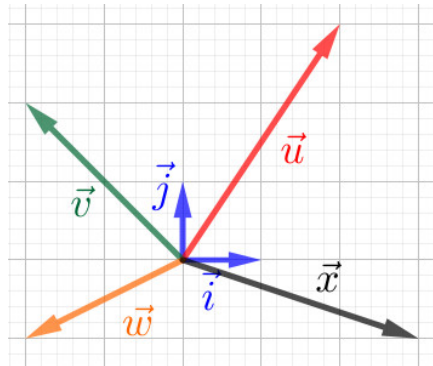
$$\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} \quad (2.19)$$

$$\vec{0} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} \quad (2.20)$$

◇

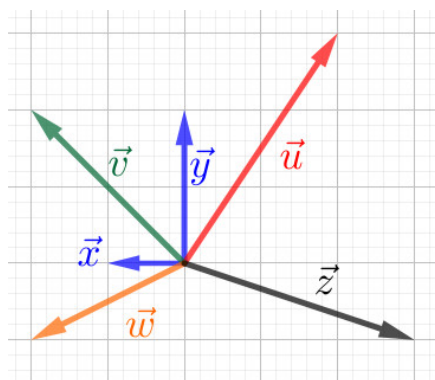
### 2.1.3 Exercícios

**E.2.1.1.** Com base na figura abaixo, escreva cada um dos seguintes vetores como combinação linear de  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ .



- a)  $\vec{u}$ .
- b)  $\vec{v}$ .
- c)  $\vec{w}$ .
- d)  $\vec{x}$ .

**E.2.1.2.** Com base na figura abaixo, escreva os seguintes vetores como combinação linear de  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ .



a)  $\vec{u}$ .

b)  $\vec{v}$ .

c)  $\vec{w}$ .

d)  $\vec{z}$ .

**E.2.1.3.** Sabendo que  $\vec{u} = 3\vec{w} + \vec{v}$ , escreva  $\vec{w}$  como combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**E.2.1.4.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores de mesma direção e  $\vec{w}$  um vetor não paralelo a  $\vec{u}$ , todos não nulos. Pode-se escrever  $\vec{w}$  como combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ? Justifique sua resposta.

**E.2.1.5.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  ambos não nulos e de mesma direção. Pode-se afirmar que  $\vec{u}$  gera  $\vec{v}$ ? Justifique sua resposta.

**E.2.1.6.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não paralelos entre si e  $\vec{w}$  um vetor não coplanar a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , todos não nulos. É possível gerar  $\vec{w}$  com  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ?

**E.2.1.7.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos, coplanares e com direções distintas. Se  $\vec{w}$  é um vetor também coplanar a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , então  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  geram  $\vec{w}$ ? Justifique sua resposta.

**E.2.1.8.** Mostre que se  $\vec{u}, \vec{v}$  são vetores não nulos e paralelos entre si, então existem escalares  $\alpha, \beta$  não simultaneamente nulos tais que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}. \quad (2.21)$$

**E.2.1.9.** Faça a demonstração da Proposição 2.1.2.

### Respostas

**E.2.1.1.** a)  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ . b)  $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ . c)  $\vec{w} = -2\vec{i} - \vec{j}$ . d)  $\vec{x} = 3\vec{i} - \vec{j}$ .

**E.2.1.2.** a)  $\vec{u} = -2\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y}$ . b)  $\vec{v} = 2\vec{x} + \vec{y}$ . c)  $\vec{w} = 2\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$ . d)  $\vec{z} = -3\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$ .

**E.2.1.3.**  $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$

**E.2.1.4.** Não.

**E.2.1.5.** Sim.

**E.2.1.6.** Não.

**E.2.1.7.** Sim.

**E.2.1.8.** Sem perda de generalidade, existe  $\gamma \neq 0$  tal que  $\vec{u} = \gamma\vec{v}$ . Logo, escolhendo  $\alpha = 1$  e  $\beta = -\gamma$ , temos que  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ .

**E.2.1.9.** Implicação. Sem perda de generalidade, assumimos que  $\gamma \neq 0$ , logo

$$\vec{w} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{u} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{v}, \quad (2.22)$$

o que mostra que  $\vec{w}$  é coplanar aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

Recíproca. Se dois dos vetores forem paralelos entre si, o resultado segue da Proposição 2.1.1. Caso contrário, sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $r$  a reta paralela a  $\vec{v}$  que passa por  $A$ . Seja, então,  $P$  a interseção entre  $r$  e a reta suporte de  $\vec{w}$  que passa por  $O$ . Logo, existem  $\gamma, \beta$  tal que  $\gamma\vec{w} = \overrightarrow{OP}$  e  $\beta\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ . Segue que  $\vec{u} + \beta\vec{v} = \gamma\vec{w}$ .

## 2.2 Dependência Linear

Dois ou mais vetores dados são **linearmente dependentes** (l.d.) quando um deles for combinação linear dos demais. Mais precisamente,  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  é um **conjunto de vetores l.d.** quando

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n = \vec{0}, \quad (2.23)$$

para escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  **não todos nulos**. Caso contrário, dizemos **tratar-se de um conjunto de vetores linearmente independentes** (l.i.).

**Exemplo 2.2.1.** Estudamos cada caso:

- a) Sejam  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2 = -2\vec{u}_1$ . Temos que  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são linearmente dependentes, pois

$$2\vec{u}_1 + 1\vec{u}_2 = \vec{0}. \quad (2.24)$$

- b) Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ . Temos que  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é um conjunto l.d., pois

$$\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}. \quad (2.25)$$

**Observação 2.2.1.** (**Vetor Nulo**.) Todo conjunto de vetores que contenha o vetor nulo é um conjunto l.d.. De fato, para quaisquer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ , tem-se que

$$\vec{0} + 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \dots + 0\vec{u}_n = \vec{0}. \quad (2.26)$$

### 2.2.1 Dois Vetores no Espaço

Dois vetores de mesma direção são linearmente dependentes (l.d.).

**Proposição 2.2.1.** *Dois vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d. se, e somente se, qualquer uma das seguintes condições é satisfeita:*

a) um deles é combinação linear do outro, i.e.

$$\vec{u} = \alpha \vec{v} \quad (2.27)$$

ou

$$\vec{v} = \beta \vec{u}. \quad (2.28)$$

b) eles têm a mesma direção;

c) eles são paralelos.

*Demonstração.* De fato, a afirmação a) é a definição de dependência linear. A afirmação b) é consequência imediata da a), bem como a c) é equivalente a b). Por fim, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores paralelos, então um é múltiplo por escalar do outro. Ou seja, c) implica a).  $\square$

Esta proposição também mostra que **dois vetores não nulos são linearmente independentes (l.i.) se, e somente se, eles têm direções diferentes.**

**Exemplo 2.2.2.** Considere dois vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de mesma direção. Então, no caso de terem sentidos opostos, segue que

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} + \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \vec{0}. \quad (2.29)$$

noutro caso, temos que

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} + \frac{-1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \vec{0}. \quad (2.30)$$

Consulte a Figura 2.2.

### 2.2.2 Três Vetores no Espaço

Três vetores quaisquer  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d., quando um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Sem perda de generalidade, isto significa que existem constantes  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}. \quad (2.31)$$

ou, equivalentemente,

$$\vec{u} + (-\alpha)\vec{v} + (-\beta)\vec{w} = \vec{0}. \quad (2.32)$$



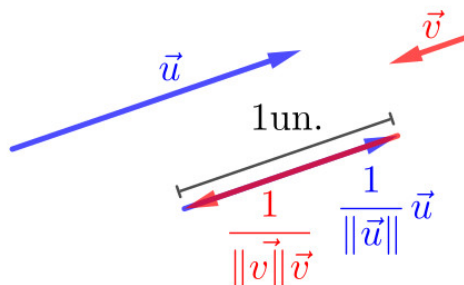


Figura 2.4: Dois vetores linearmente dependentes.

Afirmamos que se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d., então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares. Do fato de que dois vetores quaisquer são sempre coplanares, temos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares caso qualquer um deles seja o vetor nulo. Suponhamos, agora, que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são não nulos e seja  $\pi$  o plano determinado pelos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Se  $\alpha = 0$ , então  $\vec{u} = \beta\vec{w}$  e teríamos uma representação de  $\vec{u}$  no plano  $\pi$ . Analogamente, se  $\beta = 0$ , então  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$  e teríamos uma representação de  $\vec{u}$  no plano  $\pi$ . Por fim, observamos que se  $\alpha, \beta \neq 0$ , então  $\alpha\vec{v}$  tem a mesma direção de  $\vec{v}$  e  $\beta\vec{w}$  tem a mesma direção de  $\vec{w}$ . Isto é,  $\alpha\vec{v}$  e  $\beta\vec{w}$  admitem representações no plano  $\pi$ . Sejam  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$  representações dos vetores  $\alpha\vec{v}$  e  $\beta\vec{w}$ , respectivamente. Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem a  $\pi$ , assim como o segmento  $AC$ . Como  $\overrightarrow{AC} = \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ , concluímos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares.

Reciprocamente, se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares, então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d.. Consulte a Figura 2.5.

De fato, se um deles for nulo, por exemplo,  $\vec{u} = \vec{0}$ , então  $\vec{u}$  pode ser escrito como a seguinte combinação linear dos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$

$$\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.33)$$

Neste caso,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d.. Também, se dois dos vetores forem paralelos, por exemplo,  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , então temos a combinação linear

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.34)$$

E, então,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d.. Agora, suponhamos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são não nulos e dois a dois concorrentes (i.e. todos com direções distintas). Sejam, então

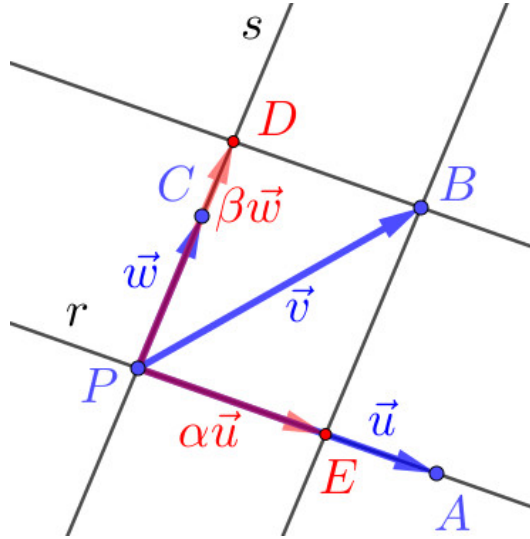


Figura 2.5: Três vetores coplanares são l.d..

$\overrightarrow{PA} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$  e  $\overrightarrow{PC} = \vec{w}$  representações sobre um plano  $\pi$ . Sejam  $r$  e  $s$  as retas determinadas por  $PA$  e  $PC$ , respectivamente. Seja, então,  $D$  o ponto de interseção da reta  $s$  com a reta paralela a  $r$  que passa pelo ponto  $B$ . Seja, também,  $E$  o ponto de interseção da reta  $r$  com a reta paralela a  $s$  que passa pelo ponto  $B$ . Sejam, então,  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{PE}$  e  $\beta\vec{w} = \overrightarrow{PD}$ . Como  $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PD} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$ , temos que  $\vec{v}$  é combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ , i.e.  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d..

### 2.2.3 Quatro ou Mais Vetores no Espaço

**Quatro ou mais vetores são sempre l.d.**<sup>1</sup>. De fato, sejam dados quatro vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$ . Se dois ou três destes forem l.d.entre si, então, por definição, os quatro são l.d.. Assim sendo, suponhamos que três dos vetores sejam l.i. e provaremos que, então, o outro vetor é combinação linear desses três.

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i.. Logo, eles não são coplanares. Seja, ainda,  $\pi$  o plano determinado pelos vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e as representações  $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$  e  $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$ .

<sup>1</sup>No espaço euclidiano tridimensional.

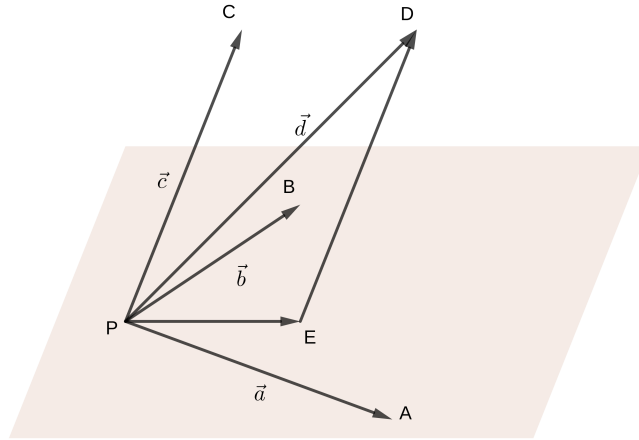


Figura 2.6: Quatro vetores são l.d..

Tomamos a reta  $r$  paralela a  $\overrightarrow{PC}$  que passa pelo ponto  $D$ . Então, seja  $E$  o ponto de interseção de  $r$  com o plano  $\pi$ . Consultamos a Figura 2.6. Observamos que o vetor  $\overrightarrow{PE}$  é coplanar aos vetores  $\overrightarrow{PA}$  e  $\overrightarrow{PB}$  e, portanto, existem números reais  $\alpha$  e  $\beta$  tal que

$$\overrightarrow{PE} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB}. \quad (2.35)$$

Além disso, como  $\overrightarrow{ED}$  tem a mesma direção e sentido de  $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$ , temos que

$$\overrightarrow{ED} = \gamma \overrightarrow{PC} \quad (2.36)$$

para algum número real  $\gamma$ . Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED} \\ &= \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} \\ &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \end{aligned}$$

## 2.2.4 Exercícios Resolvidos

**ER 2.2.1.** Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}, \quad (2.37)$$

$$\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v}, \quad (2.38)$$

então  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são l.d.?

**Solução.** Os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \quad (2.39)$$

Observemos que

$$\vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \quad (2.40)$$

$$= \alpha(2\vec{u} - 3\vec{v}) + \beta(\vec{u} + 2\vec{v}) \quad (2.41)$$

$$= (2\alpha + \beta)\vec{u} + (-3\alpha + 2\beta)\vec{v} \quad (2.42)$$

implica

$$2\alpha + \beta = 0 \quad (2.43)$$

$$-3\alpha + 2\beta = 0 \quad (2.44)$$

Resolvendo este sistema, vemos que  $\alpha = \beta = 0$ . Logo, concluímos que  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são l.i..

◇

**ER 2.2.2.** Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  três vetores. Verifique a seguinte afirmação de que se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d., então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d.. Justifique sua resposta.

**Solução.** A afirmação é verdadeira. De fato, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d., então existe um escalar  $\alpha$  tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}. \quad (2.45)$$

Segue que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.46)$$

Isto é,  $\vec{u}$  é combinação linear de  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Então, por definição,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d..

◇

**ER 2.2.3.** Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Mostre que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares se, e somente se,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d..

**Solução.** Primeiramente, vamos verificar a implicação. Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares, então os segmentos  $AB$  e  $AC$  têm a mesma direção. Logo, são l.d. os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

Agora, verificamos a recíproca. Se  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  são l.d., então os segmentos  $AB$  e  $AC$  têm a mesma direção. Como eles são concorrentes, segue que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares.

◇

### 2.2.5 Exercícios

**E.2.2.1.** Sendo  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ , mostre que  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$  e  $\overrightarrow{PC}$  são l.d. para qualquer ponto  $P$ .

**E.2.2.2.** Sejam dados três vetores quaisquer  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ . Mostre que os vetores  $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{c}$  e  $\vec{w} = \vec{b} + 4\vec{c}$  são l.d..

**E.2.2.3.** Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  e  $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ . Mostre que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são coplanares se, e somente se,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d..

**E.2.2.4.** Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}, \quad (2.47)$$

$$\vec{b} = 2\vec{v} - 4\vec{u}, \quad (2.48)$$

então  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são l.i.? Justifique sua resposta.

**E.2.2.5.** Verifique se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a)  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  l.d.  $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$  l.d..

b)  $\vec{u}, \vec{0}, \vec{w}$  são l.d..

c)  $\vec{u}, \vec{v}$  l.i.  $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  l.i..

d)  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  l.d.  $\Rightarrow -\vec{u}, 2\vec{v}, -3\vec{w}$  l.d..

### Respostas

**E.2.2.1.** Dica: os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$  são l.d..

**E.2.2.2.** Dica: Escreva um dos vetores como combinação linear dos outros.

**E.2.2.3.** Três vetores são l.d. se, e somente se, eles são coplanares.

**E.2.2.4.** Não.

**E.2.2.5.** a) falsa; b) verdadeira; c) falsa; d) verdadeira.

## 2.3 Bases e Coordenadas

Seja  $V$  o conjunto de todos os vetores no espaço tridimensional. Conforme discutido na Seção 2.2, se  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i., então qualquer vetor  $\vec{u} \in V$  pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores, i.e. existem escalares  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \quad (2.49)$$

Isso motiva a seguinte definição: uma **base** de  $V$  é uma sequência de três vetores l.i. de  $V$ .

A seguinte proposição vai nos fornecer a noção de coordenadas no espaço.

**Proposição 2.3.1.** *Seja  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  uma dada base de  $V$ . Então, dado qualquer  $\vec{u} \in V$ , existe uma única tripla de escalares  $(\alpha, \beta, \gamma)$  tais que*

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \quad (2.50)$$

*Demonstração.* A existência dos escalares  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  segue imediatamente do fato de que  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i. e, portanto,  $\vec{u}$  pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores (Consulte a Subseção 2.2.3).

Agora, para verificar a unicidade de  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , suponhamos que existam  $\alpha'$ ,  $\beta'$  e  $\gamma'$  tais que

$$\vec{u} = \alpha' \vec{a} + \beta' \vec{b} + \gamma' \vec{c}. \quad (2.51)$$

Subtraindo (2.51) de (2.50), obtemos

$$\vec{0} = (\alpha - \alpha') \vec{a} + (\beta - \beta') \vec{b} + (\gamma - \gamma') \vec{c}. \quad (2.52)$$

Como  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i., segue que<sup>2</sup>

$$\alpha - \alpha' = 0, \quad \beta - \beta' = 0, \quad \gamma - \gamma' = 0, \quad (2.53)$$

i.e.  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  e  $\gamma = \gamma'$ . □

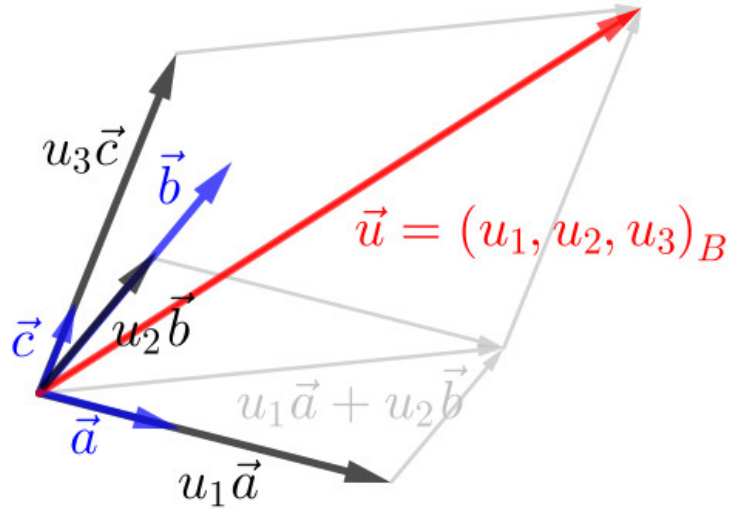


Figura 2.7: Representação de um vetor  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$  em uma dada base  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

Desta última proposição, **fixada uma base  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , cada vetor  $\vec{u}$  é representado de forma única como combinação linear dos vetores da base**, digamos

$$\vec{u} = u_1 \vec{a} + u_2 \vec{b} + u_3 \vec{c}, \quad (2.54)$$

<sup>2</sup>Pela definição de vetores linearmente independentes, consulte Seção 2.2.

onde a sequência de escalares  $(u_1, u_2, u_3)$  é chamada de **coordenadas** do vetor  $\vec{u}$  na base  $B$  e escrevemos

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B, \quad (2.55)$$

para expressar o vetor  $\vec{u}$  nas suas coordenadas na base  $B$ . Consulte a Figura 2.7.

**Exemplo 2.3.1.** Fixada uma base  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , o vetor  $\vec{u}$  de coordenadas

$$\vec{u} = (-2, \sqrt{2}, -3)_B \quad (2.56)$$

é o vetor

$$\vec{u} = -2\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b} - 3\vec{c}. \quad (2.57)$$

### 2.3.1 Operações de Vetores com Coordenadas

Na Seção 1.2, definimos as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar do ponto de vista geométrico. Aqui, estudamos como estas operações são definidas a partir das coordenadas de vetores.

A partir daqui, assumimos dada uma base de vetores  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

#### Adição

Dados vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$ , i.e.

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \quad (2.58)$$

$$\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}, \quad (2.59)$$

a **adição** de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  é a soma

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}} \\ &\quad + \underbrace{v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}}_{\vec{v}} \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$= (u_1 + v_1)\vec{a} + (u_2 + v_2)\vec{b} + (u_3 + v_3)\vec{c}. \quad (2.61)$$

Ou seja,

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_B. \quad (2.62)$$



**Exemplo 2.3.2.** A adição do vetor

$$\vec{u} = (2, -1, -3)_B \quad (2.63)$$

com o vetor

$$\vec{v} = (-1, 4, -5)_B \quad (2.64)$$

resulta no vetor

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), -1 + 4, -3 + (-5))_B \quad (2.65)$$

$$= (1, 3, -8)_B. \quad (2.66)$$

### Vetor Oposto

O vetor oposto ao vetor  $\vec{u}$  é

$$-\vec{u} = -\underbrace{(u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c})}_{\vec{u}} \quad (2.67)$$

$$= (-u_1)\vec{a} + (-u_2)\vec{b} + (-u_3)\vec{c}, \quad (2.68)$$

ou seja,

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)_B. \quad (2.69)$$

**Exemplo 2.3.3.** Dado o vetor  $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$ , temos

$$-\vec{v} = (-2, 1, 3)_B. \quad (2.70)$$

### Subtração de Vetores

Lembrando que subtração de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  é definida por

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v}), \quad (2.71)$$

temos que

$$\begin{aligned} \vec{u} - \vec{v} &= (u_1, u_2, u_3)_B \\ &\quad - (v_1, v_2, v_3)_B \\ &= (u_1, u_2, u_3)_B \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$+ (-v_1, -v_2, -v_3)_B \quad (2.73)$$

$$= (u_1 + (-v_1), u_2 + (-v_2), u_3 + (-v_3)) \quad (2.74)$$

$$= (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3). \quad (2.75)$$

Em resumo, a subtração de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  é o vetor

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3). \quad (2.76)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)_B. \quad (2.77)$$

**Exemplo 2.3.4.** Sejam os vetores

$$\vec{u} = (2, -1, -3)_B \quad (2.78)$$

e

$$\vec{v} = (-1, 4, -5)_B, \quad (2.79)$$

temos que

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), -1 - 4, -3 - (-5))_B \quad (2.80)$$

$$= (3, -5, 2)_B. \quad (2.81)$$

### Multiplicação por Escalar

Dado um escalar  $\alpha$  e um vetor  $\vec{u}$ , temos a multiplicação por escalar

$$\alpha \vec{u} = \alpha \underbrace{(u_1 \vec{a} + u_2 \vec{b} + u_3 \vec{c})}_{\vec{u}} \quad (2.82)$$

$$= (\alpha u_1) \vec{a} + (\alpha u_2) \vec{b} + (\alpha u_3) \vec{c}, \quad (2.83)$$

ou seja,

$$\alpha \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3). \quad (2.84)$$

**Exemplo 2.3.5.** Dado o vetor  $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$ , temos

$$-\frac{1}{3}\vec{v} = -\frac{1}{3}(2, -1, -3)_B \quad (2.85)$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \cdot 2, -\frac{1}{3} \cdot (-1), -\frac{1}{3} \cdot (-3)\right) \quad (2.86)$$

$$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)_B. \quad (2.87)$$

### 2.3.2 Dependência linear

Vamos estudar como podemos estudar a dependência linear de vetores a partir de suas coordenadas. **Assumimos fixada uma base  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .**

#### Dois vetores

Na Proposição 2.2.1, provamos que **dois vetores  $\vec{u}, \vec{v}$  são linearmente dependentes (l.d.) se, e somente se, um for múltiplo do outro**, i.e. existe um número real  $\alpha$  tal que

$$\vec{u} = \alpha \vec{v}, \quad (2.88)$$

sem perda de generalidade<sup>3</sup>. Em coordenadas, temos

$$(u_1, u_2, u_3)_B = \alpha(v_1, v_2, v_3)_B \quad (2.89)$$

$$= (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)_B, \quad (2.90)$$

donde

$$u_1 = \alpha v_1, \quad (2.91)$$

$$u_2 = \alpha v_2, \quad (2.92)$$

$$u_3 = \alpha v_3. \quad (2.93)$$

Concluimos que **dois vetores são l.d. se, e somente se, as coordenadas de um deles forem, respectivamente, múltiplas (de mesmo fator) das coordenadas do outro**.

**Exemplo 2.3.6.** Estudamos os seguintes casos:

---

<sup>3</sup>Formalmente, pode ocorrer  $\vec{v} = \beta \vec{u}$ .

a) Dois vetores l.d..

Sejam

$$\vec{u} = (2, -1, -3)_B \quad (2.94)$$

e

$$\vec{v} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)_B. \quad (2.95)$$

Ao buscarmos por um escalar  $\alpha$  tal que

$$\vec{u} = \alpha \vec{v}, \quad (2.96)$$

temos

$$\underbrace{(2, -1, -3)_B}_{\vec{u}} = \alpha \underbrace{\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)_B}_{\vec{v}} \quad (2.97)$$

$$= \left(\alpha - \frac{\alpha}{2}, -\frac{3\alpha}{2}\right)_B, \quad (2.98)$$

donde segue que

$$2 = \alpha \Rightarrow \alpha = 2 \quad (2.99)$$

$$-1 = -\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \quad (2.100)$$

$$-3 = -\frac{3\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2. \quad (2.101)$$

Concluimos que  $\vec{u} = 2\vec{v}$ , logo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d..

b) Dois vetores l.i..

Sejam, agora, os vetores

$$\vec{u} = (2, -1, -3) \quad (2.102)$$

e

$$\vec{v} = \left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right). \quad (2.103)$$

Buscando por  $\alpha$  tal que

$$\vec{u} = \alpha \vec{v}, \quad (2.104)$$

chegamos no sistema de equações

$$\begin{cases} 2 = 2\alpha \\ -1 = -\frac{\alpha}{2} \\ -3 = -\frac{3\alpha}{2} \end{cases} \quad (2.105)$$

que não tem solução. De fato, na primeira equação  $\alpha = 1$ , mas na segunda  $\alpha = 2$ , logo não existe  $\alpha$  tal que  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ . Concluimos que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.i..

### Três Vetores

Na Subseção 2.2.2, estudamos que três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são linearmente independentes (l.i.), quando

$$\begin{aligned} \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Assumimos fixada uma base  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  no espaço. Então, temos que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \quad (2.107)$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} &\alpha(u_1, u_2, u_3)_B \\ &+ \beta(v_1, v_2, v_3)_B \\ &+ \gamma(w_1, w_2, w_3)_B \\ &= (0, 0, 0)_B. \end{aligned} \quad (2.108)$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} &(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1, \\ &\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2, \\ &\alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3)_B \\ &= (0, 0, 0)_B. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Esta, por sua vez, nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0 \\ u_2\alpha + v_2\beta + w_2\gamma = 0 \\ u_3\alpha + v_3\beta + w_3\gamma = 0 \end{cases} \quad (2.110)$$

Agora, lembremos que um tal sistema tem solução única<sup>4</sup> se, e somente se, o determinante de sua **matriz dos coeficientes** é não nulo, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.111)$$

Neste caso, concluímos que  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é um conjunto de vetores l.i. e, noutro caso, é l.d..

**Exemplo 2.3.7.** Os vetores

$$\vec{u} = (2, 1, -3)_B, \vec{v} = (1, -1, 2)_B, \vec{w} = (-2, 1, 1)_B, \quad (2.112)$$

formam um conjunto l.d., pois

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.113)$$

$$= -2 - 4 - 3 + 6 - 4 - 1 \quad (2.114)$$

$$= -8 \neq 0. \quad (2.115)$$

### 2.3.3 Bases Ortonormais

Uma **base**  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  é dita ser **ortonormal**<sup>5</sup>, quando

- $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  são dois a dois ortogonais, e
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ .

<sup>4</sup>Neste caso, a solução trivial  $\alpha = \beta = \gamma = 0$

<sup>5</sup>Quando  $\vec{u}$  ortogonal a  $\vec{v}$ , denotamos  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

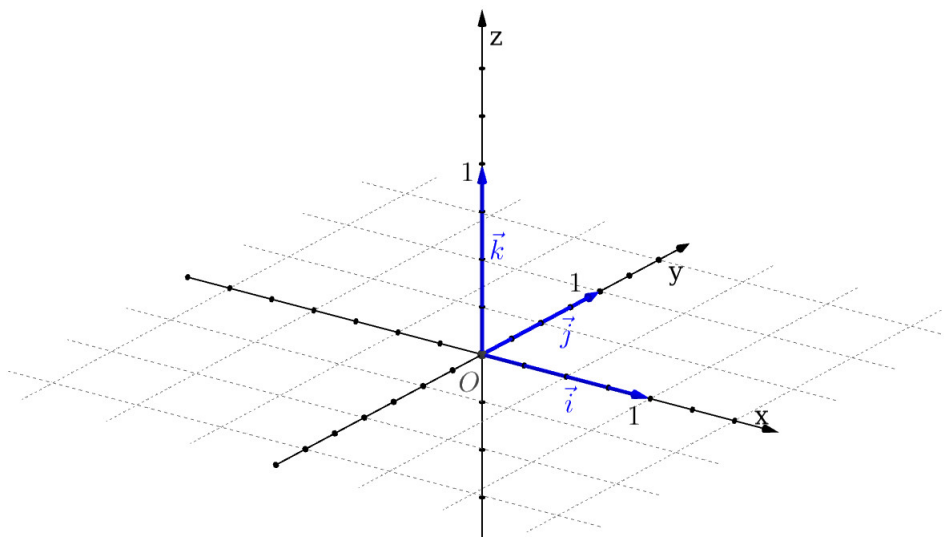


Figura 2.8: Representação gráfica de uma base ortonormal de vetores.

**Lema 2.3.1.** (Pitágoras<sup>6</sup>.) Se  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , então

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2. \quad (2.116)$$

*Demonstração.* Consulte o Exercício 2.3.7. □

**Proposição 2.3.1.** Seja  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal e  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ . Então,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \quad (2.117)$$

*Demonstração.* Temos  $\|\vec{u}\|^2 = \|u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\|^2$ . Seja  $\pi$  um plano determinado por dadas representações de  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ . Como  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são ortogonais, temos que  $\vec{k}$  é ortogonal ao plano  $\pi$ . Além disso, o vetor  $u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$  também admite uma representação em  $\pi$ , logo  $u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$  é ortogonal a  $\vec{k}$ . Do Lema 2.3.1, temos

$$\|\vec{u}\|^2 = \|u_1\vec{i} + u_2\vec{j}\|^2 + \|u_3\vec{k}\|^2. \quad (2.118)$$

---

<sup>6</sup>Pitágoras de Samos, c.570, c. 495 a.C., matemático grego jônico. Fonte: [Wikipédia:Pitágoras](#).

Analogamente, como  $u_1\vec{i} \perp u_2\vec{j}$ , temos

$$\|\vec{u}\|^2 = \|u_1\vec{i}\|^2 + \|u_2\vec{j}\|^2 + \|u_3\vec{k}\|^2 \quad (2.119)$$

$$= |u_1|^2 \|\vec{i}\|^2 + |u_2|^2 \|\vec{j}\|^2 + |u_3|^2 \|\vec{k}\|^2 \quad (2.120)$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \quad (2.121)$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da última equação, obtemos o resultado desejado.  $\square$

A partir daqui, salvo dito o contrário, vamos assumir dada uma base ortonormal  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  e, por simplicidade, escrevemos

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad (2.122)$$

$$= u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}. \quad (2.123)$$

**Exemplo 2.3.8.** A norma de  $\vec{u} = (-1, 2, -\sqrt{2})$ , é

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-\sqrt{2})^2} \quad (2.124)$$

$$= \sqrt{7}. \quad (2.125)$$

### 2.3.4 Exercícios Resolvidos

**ER 2.3.1.** Considere a base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ortonormal conforme dada na Figura 2.8. Faça uma representação do vetor

$$\vec{u} = \left(2, \frac{1}{2}, 1\right)_B. \quad (2.126)$$

**Solução.** Primeiramente, observamos que

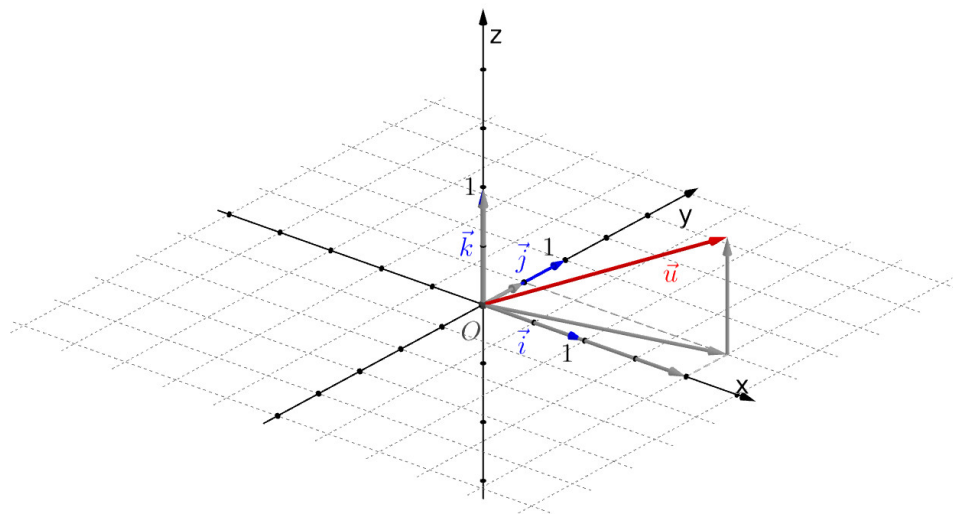
$$\vec{u} = \left(2, \frac{1}{2}, 1\right)_B \quad (2.127)$$

$$= 2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}. \quad (2.128)$$

Assim sendo, podemos construir uma representação de  $\vec{u}$  como dada na figura abaixo. Primeiramente, representamos os vetores  $2\vec{i}$  e  $\frac{1}{2}\vec{j}$  (cinza). Então,



representamos o vetor  $2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$  (cinza). Por fim, temos a representação de  $\vec{u}$  (vermelho).



◇

**ER 2.3.2.** Fixada uma base qualquer  $B$  e dados  $\vec{u} = (1, -1, 2)_B$  e  $\vec{v} = (-2, 1, -1)_B$ , encontre o vetor  $\vec{x}$  que satisfaça

$$\vec{u} + 2\vec{x} = \vec{v} - (\vec{x} + \vec{u}). \quad (2.129)$$

**Solução.** Primeiramente, podemos manipular a equação de forma a isolarmos  $\vec{x}$  como segue

$$\vec{u} + 2\vec{x} = \vec{v} - (\vec{x} + \vec{u}) \quad (2.130)$$

$$2\vec{x} = -\vec{u} + \vec{v} - \vec{x} - \vec{u} \quad (2.131)$$

$$3\vec{x} = \vec{v} - 2\vec{u} \quad (2.132)$$

$$\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{u} \quad (2.133)$$

Agora, sabendo que  $\vec{u} = (1, -1, 2)_B$  e  $\vec{v} = (-2, 1, -1)_B$ , temos

$$\vec{x} = \frac{1}{3}(-2, 1, -1)_B - \frac{2}{3}(1, -1, 2)_B \quad (2.134)$$

$$\vec{x} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)_B - \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)_B \quad (2.135)$$

$$\vec{x} = \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) \quad (2.136)$$

$$\vec{x} = \left(-\frac{4}{3}, 1, -\frac{5}{3}\right)_B. \quad (2.137)$$

◇

**ER 2.3.3.** Fixada uma base  $B$  qualquer, verifique se os vetores  $\vec{u} = (1, -1, 2)_B$ ,  $\vec{v} = (-2, 1, -1)_B$  e  $\vec{w} = (-4, 3, -5)$  também formam um base para o espaço de vetores.

**Solução.** Uma base para o espaço tridimensional  $V$  é uma sequência de três vetores l.i.. Logo, para resolver a questão, basta verificar se  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é l.i.. Com base na Subseção 2.3.2, basta calcularmos o determinante da matriz cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores da sequência, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \quad (2.138)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \quad (2.139)$$

$$= -5 - 4 - 12 - (-8 - 3 - 10) \quad (2.140)$$

$$= -21 + 21 = 0. \quad (2.141)$$

Como este determinante é nulo, concluímos que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é l.d. e, portanto, não forma uma base para  $V$ .

◇

### 2.3.5 Exercícios

**E.2.3.1.** Considere a base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  conforme dada na Figura 2.8. Faça um esboço do vetor  $\vec{u} = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)_B$ .

**E.2.3.2.** Fixada uma base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  e sabendo que  $\vec{v} = (2, 0, -3)_B$ , escreva  $\vec{v}$  como combinação linear de  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ .

**E.2.3.3.** Fixada uma base  $B$  qualquer e  $\vec{a} = (0, -1, 1)_B$ ,  $\vec{b} = (2, 0, -1)_B$  e  $\vec{c} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1)_B$ , calcule:

- a)  $6\vec{c}$
- b)  $-\vec{b}$
- c)  $\vec{c} - \vec{b}$
- d)  $2\vec{c} - (\vec{a} - \vec{b})$

**E.2.3.4.** Fixada uma base  $B$  qualquer, verifique se os seguintes conjuntos de vetores são l.i. ou l.d..

- a)  $\vec{i} = (1, 0, 0)_B$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)_B$
- b)  $\vec{a} = (1, 2, 0)_B$ ,  $\vec{b} = (-2, -4, 1)_B$
- c)  $\vec{a} = (1, 2, 0)_B$ ,  $\vec{c} = (-2, -4, 0)_B$
- d)  $\vec{i} = (1, 0, 0)_B$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)_B$
- e)  $\vec{j} = (0, 1, 0)_B$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)_B$
- f)  $\vec{a} = (1, 2, -1)_B$ ,  $\vec{d} = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})_B$

**E.2.3.5.** Fixada uma base  $B$  qualquer, verifique se os seguintes conjuntos de vetores são l.i. ou l.d..

- a)  $\vec{i} = (1, 0, 0)_B$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)_B$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)_B$
- b)  $\vec{a} = (0, -1, 1)_B$ ,  $\vec{b} = (2, 0, -1)$ ,  $\vec{c} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1)_B$
- c)  $\vec{u} = (0, -1, 1)_B$ ,  $\vec{v} = (2, 0, -1)$ ,  $\vec{w} = (2, -1, 0)_B$

**E.2.3.6.** Seja  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  uma base ortogonal, i.e.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i. e dois a dois ortogonais. Mostre que  $C = (\vec{a}/|\vec{a}|, \vec{b}/|\vec{b}|, \vec{c}/|\vec{c}|)$  é uma base ortonormal.

**E.2.3.7.** Demostre o Lema 2.3.1.

### Respostas

**E.2.3.2.**  $\vec{v} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$

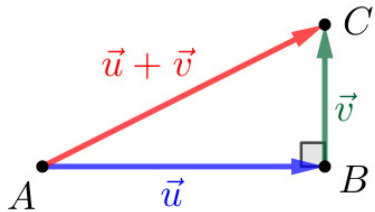
**E.2.3.3.** a)  $6\vec{c} = (3, -2, 6)_B$ ; b)  $-\vec{b} = (-2, 0, 1)_B$ ; c)  $\vec{c} - \vec{b} = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, 2)_B$ ; d)  $2\vec{c} - (\vec{a} - \vec{b}) = (3, \frac{1}{3}, 0)_B$

**E.2.3.4.** a) l.i.; b) l.i.; c) l.d.; d) l.i.; e) l.i.; f) l.d.

**E.2.3.5.** a) l.i.; b) l.i.; c) l.d.

**E.2.3.6.** Segue imediatamente do fato de que  $|\vec{u}|/|u| = 1$  para qualquer vetor  $\vec{u} \neq 0$ .

**E.2.3.7.**



Sejam as representações  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$  e, portanto,  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Como  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , temos que o triângulo  $ABC$  é retângulo e, pelo Teorema de Pitágoras, segue que  $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$ . Logo,  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ .

## 2.4 Mudança de base

Em revisão

Sejam  $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  e  $C = (\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$  bases do espaço  $V$ . Conhecendo as coordenadas de um vetor na base  $C$ , queremos determinar suas coordenadas na base  $B$ . Mais especificamente, seja

$$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)_C \quad (2.142)$$

$$= z_1 \vec{r} + z_2 \vec{s} + z_3 \vec{t}. \quad (2.143)$$

Agora, tendo  $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)_B$ ,  $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)_B$  e  $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)_B$ , então

$$(z_1, z_2, z_3)_C = z_1(r_1, r_2, r_3)_B \quad (2.144)$$

$$+ z_2(s_1, s_2, s_3)_B \quad (2.145)$$

$$+ z_3(t_1, t_2, t_3)_B \quad (2.146)$$

$$= \underbrace{(r_1 z_1 + s_1 z_2 + t_1 z_3)}_{z'_1} \vec{u} \quad (2.147)$$

$$+ \underbrace{(r_2 z_1 + s_2 z_2 + t_2 z_3)}_{z'_2} \vec{v} \quad (2.148)$$

$$+ \underbrace{(r_3 z_1 + s_3 z_2 + t_3 z_3)}_{z'_3} \vec{w} \quad (2.149)$$

o que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}}_{M_{CB}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad (2.150)$$

onde  $\vec{z} = (z'_1, z'_2, z'_3)_B$ .

A matriz  $M_{CB}$  é chamada de matriz de mudança de base de  $C$  para  $B$ . Como os vetores  $\vec{r}$ ,  $\vec{s}$  e  $\vec{t}$  são l.i., temos que a matriz de mudança de base  $M_{BC}$  tem determinante não nulo e, portanto é invertível. Portanto, multiplicando por

$M_{BC}^{-1}$  pela esquerda em (2.150), temos

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}}_{M_{BC}}^{-1} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix}, \quad (2.151)$$

ou seja

$$M_{BC} = (M_{CB})^{-1}. \quad (2.152)$$

**Exemplo 2.4.1.** Sejam dadas as bases  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  e  $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , com  $\vec{u} = (1, 2, 0)_B$ ,  $\vec{v} = (2, 0, -1)_B$  e  $\vec{w} = (-1, -3, 1)_B$ . Seja, ainda, o vetor  $\vec{z} = (1, -2, 1)_B$ . Vamos encontrar as coordenadas de  $\vec{z}$  na base  $C$ .

Há duas formas de proceder.

### Método 1.

A primeira consiste em resolver, de forma direta, a seguinte equação

$$(1, -2, 1)_B = (x, y, z)_C. \quad (2.153)$$

Esta é equivalente a

$$\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \quad (2.154)$$

$$= x(1, 2, 0)_B \quad (2.155)$$

$$+ y(2, 0, -1)_B \quad (2.156)$$

$$+ z(-1, -3, 1)_B \quad (2.157)$$

$$= x(\vec{a} + 2\vec{b}) \quad (2.158)$$

$$+ y(2\vec{a} - \vec{c}) \quad (2.159)$$

$$+ z(-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \quad (2.160)$$

$$= (x + 2y - z)\vec{a} \quad (2.161)$$

$$+ (2x - 3z)\vec{b} \quad (2.162)$$

$$+ (-y + z)\vec{c} \quad (2.163)$$

Isto nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3z = -2 \\ -y + z = 1 \end{cases} \quad (2.164)$$

Resolvendo este sistema, obtemos  $x = 7/5$ ,  $y = 3/5$  e  $z = 8/5$ , i.e.

$$\vec{z} = \left( \frac{7}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5} \right)_C. \quad (2.165)$$

### Método 2.

Outra maneira de se obter as coordenadas de  $\vec{z}$  na base  $C$  é usando a matriz de mudança de base. A matriz de mudança da base  $C$  para a base  $B$  é

$$M_{CB} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.167)$$

Entretanto, neste exemplo, queremos fazer a mudança de  $B$  para  $C$ . Portanto, calculamos a matriz de mudança de base  $M_{BC}$ . Segue:

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} \quad (2.168)$$

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.169)$$

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

Com esta matriz e denotando  $\vec{z} = (x, y, z)_C$ , temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}}_{M_{BC}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.171)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 3/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

Logo, temos

$$\vec{z} = \left( \frac{7}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5} \right)_C. \quad (2.173)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 2.4.1.** Sejam  $B$  e  $C$  bases dadas do espaço  $V$ . Sabendo que a matriz de mudança de base de  $B$  para  $C$  é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.174)$$

calcule a matriz de mudança de base de  $C$  para  $B$ .

**Solução.** Sejam  $M_{BC} = M$  a matriz de mudança de base de  $B$  para  $C$  e  $M_{CB}$  a matriz de mudança de base de  $C$  para  $B$ . Temos

$$M_{CB} = M_{BC}^{-1} \quad (2.175)$$

$$M_{CB} = M^{-1} \quad (2.176)$$

$$M_{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.177)$$

$$M_{CB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (2.178)$$

◇

**ER 2.4.2.** Fixadas as mesmas bases do ER 2.4.1, determine as coordenadas do vetor  $\vec{u}$  na base  $C$ , sabendo que  $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ .

**Solução.** Denotando  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ , temos

$$\vec{u}_C = M_{BC}\vec{u}_B \quad (2.179)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (2.180)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

◇



**ER 2.4.3.** Considere dadas as bases  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Sejam, também,  $M_{AB}$  a matriz de mudança de base de  $A$  para  $B$  e  $M_{BC}$  a matriz de mudança de base de  $B$  para  $C$ . Determine a matriz de mudança de base de  $A$  para  $C$  em função das matrizes  $M_{AB}$  e  $M_{BC}$ .

**Solução.** Para um vetor  $\vec{u}$  qualquer, temos

$$\vec{u}_B = M_{AB}\vec{u}_A \quad (2.182)$$

$$\vec{u}_C = M_{BC}\vec{u}_B \quad (2.183)$$

Logo, temos

$$\vec{u}_C = M_{BC}(M_{AB}\vec{u}_A) \quad (2.184)$$

$$= (M_{BC}M_{AB})\vec{u}_A. \quad (2.185)$$

Concluimos que  $M_{AC} = M_{BC}M_{AB}$ .

◇

## Exercícios

**E.2.4.1.** Sejam  $A$  e  $B$  bases dadas de  $V$  (espaço tridimensional). Sabendo que  $\vec{v} = (-2, 0, 1)_A$  e que a matriz de mudança de base

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.186)$$

determine  $\vec{v}_B$ , i.e. as coordenadas de  $\vec{v}$  na base  $B$ .

**E.2.4.2.** Sejam  $A$  e  $B$  bases dadas de  $V$  (espaço tridimensional). Sabendo que  $\vec{v} = (-2, 0, 1)_B$  e que a matriz de mudança de base

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.187)$$

determine  $\vec{v}_A$ , i.e. as coordenadas de  $\vec{v}$  na base  $A$ .

**E.2.4.3.** Sejam  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  e  $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  bases de  $V$  com

$$\vec{u} = (0, 1, 1)_B \quad (2.188)$$

$$\vec{v} = (1, 0, 1)_B \quad (2.189)$$

$$\vec{w} = (2, 1, -1)_B \quad (2.190)$$

Forneça a matriz de mudança de base  $M_{CB}$ .

**E.2.4.4.** Sejam  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  e  $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  bases de  $V$  com

$$\vec{a} = (0, 1, 1)_C \quad (2.191)$$

$$\vec{b} = (1, 0, 1)_C \quad (2.192)$$

$$\vec{c} = (2, 1, -1)_C \quad (2.193)$$

Forneça a matriz de mudança de base  $M_{CB}$ .

**E.2.4.5.** Sejam  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  e  $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  bases de  $V$  com

$$\vec{u} = (0, 1, 1)_B \quad (2.194)$$

$$\vec{v} = (1, 0, 1)_B \quad (2.195)$$

$$\vec{w} = (2, 1, -1)_B \quad (2.196)$$

Sabendo que  $\vec{d} = (0, -1, 2)_C$ , forneça  $\vec{d}_B$ , i.e. as coordenadas do vetor  $\vec{d}$  na base  $B$ .

**E.2.4.6.** Sejam  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  e  $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  bases de  $V$  com

$$\vec{u} = (0, 1, 1)_B \quad (2.197)$$

$$\vec{v} = (1, 0, 1)_B \quad (2.198)$$

$$\vec{w} = (2, 1, -1)_B \quad (2.199)$$

Sabendo que  $\vec{d} = (1, -2, 1)_B$ , forneça  $\vec{d}_C$ , i.e. as coordenadas do vetor  $\vec{d}$  na base  $C$ .

**E.2.4.7.** Considere dadas as bases  $A$ ,  $B$  e  $C$  do espaço tridimensional  $V$ . Sejam, também,  $M_{AB}$  a matriz de mudança de base de  $A$  para  $B$  e  $M_{CB}$  a matriz de mudança de base de  $C$  para  $B$ . Determine a matriz de mudança de base de  $A$  para  $C$  em função das matrizes  $M_{AB}$  e  $M_{CB}$ .

# Capítulo 3

## Produtos

Em revisão

### 3.1 Produto Escalar

Em revisão

Ao longo desta seção, assumiremos  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal no espaço<sup>1</sup>. Por simplicidade de notação, vamos denotar as coordenadas de um vetor  $\vec{u}$  na base  $B$  por

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad (3.1)$$

i.e.  $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ .

O **produto escalar** dos vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  é o número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \quad (3.2)$$

**Exemplo 3.1.1.** Se  $\vec{u} = (2, -1, 3)$  e  $\vec{v} = (-3, -4, 2)$ , então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 = 4. \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup> $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  é l.i.,  $|\vec{i}| = 1$ ,  $|\vec{j}| = 1$ ,  $|\vec{k}| = 1$  e dois a dois ortogonais. Veja Subseção ??.

### 3.1.1 Propriedades do Produto Escalar

Quaisquer que sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  e qualquer número real  $\alpha$ , temos:

- **Comutatividade:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (3.4)$$

Dem.:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad (3.5)$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (3.6)$$

$$= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 \quad (3.7)$$

$$= \vec{v} \cdot \vec{u}. \quad (3.8)$$

- **Associatividade com a multiplicação por escalar:**

$$(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (3.9)$$

Dem.:

$$(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad (3.10)$$

$$= (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 \quad (3.11)$$

$$= \alpha(u_1v_1) + \alpha(u_2v_2) + \alpha(u_3v_3) \quad (3.12)$$

$$= \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (3.13)$$

$$= u_1(\alpha v_1) + u_2(\alpha v_2) + u_3(\alpha v_3) \quad (3.14)$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3) \quad (3.15)$$

$$= \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}). \quad (3.16)$$

- **Distributividade com a adição:**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (3.17)$$

Dem.:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \cdot ((v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)) \quad (3.18)$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot [(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)] \quad (3.19)$$

$$= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_2 + w_2) \quad (3.20)$$

$$= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3 \quad (3.21)$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 \quad (3.22)$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. \quad (3.23)$$

- **Sinal:**

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0, \quad \text{e} \quad (3.24)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad (3.25)$$

Dem.:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geq 0. \quad (3.26)$$

Além disso, observamos que a soma de números não negativos é nula se, e somente se, os números forem zeros.

- **Norma:**

$$|u|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \quad (3.27)$$

Dem.: Como fixamos uma base ortonormal  $B$ , a Proposição ?? nos garante que

$$|u|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}. \quad (3.28)$$

**Exemplo 3.1.2.** Sejam  $\vec{u} = (-1, 2, 1)$ ,  $\vec{v} = (2, -1, 3)$  e  $\vec{w} = (1, 0, -1)$ . Vejamos se as propriedades se verificam para estes vetores.

- Comutatividade:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -1 \quad (3.29)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 \quad \checkmark \quad (3.30)$$

- Associatividade com a multiplicação por escalar:

$$(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = (-2, 4, 2) \cdot (2, -1, 3) = -4 - 4 + 6 = -2 \quad (3.31)$$

$$2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2(-2 - 2 + 3) = -2 \quad \checkmark \quad (3.32)$$

$$\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = (-1, 2, 1) \cdot (4, -2, 6) = -2 \quad \checkmark \quad (3.33)$$

- Distributividade com a adição:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (-1, 2, 1) \cdot (3, -1, 2) = -3 - 2 + 2 = -3 \quad (3.34)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (-2 - 2 + 3) + (-1 + 0 - 1) = -3 \checkmark \quad (3.35)$$

- Sinal:

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = 1 + 0 + 1 = 2 \geq 0 \checkmark \quad (3.36)$$

- Norma:

$$|u|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6 \quad (3.37)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6 \checkmark \quad (3.38)$$

### 3.1.2 Exercícios Resolvidos

**ER 3.1.1.** Sejam

$$\vec{u} = (-1, 0, 1) \quad (3.39)$$

$$\vec{v} = (0, 2, 1) \quad (3.40)$$

$$\vec{w} = (2, -1, -1) \quad (3.41)$$

calcule  $\vec{w} \cdot (2\vec{u} - \vec{w}) - 2\vec{u} \cdot \vec{w}$ .

**Solução.** Vamos começar calculando o último termo.

$$\vec{w} \cdot (2\vec{u} - \vec{w}) - 2\vec{u} \cdot \vec{w} \quad (3.42)$$

$$= \vec{w} \cdot (2\vec{u} - \vec{w}) - 2(-1, 0, 1) \cdot (2, -1, -1) \quad (3.43)$$

Calculamos  $2(-1, 0, 1) = (-2, 0, 2)$ , logo, temos

$$\vec{w} \cdot (2\vec{u} - \vec{w}) - (-2, 0, 2) \cdot (2, -1, -1) \quad (3.44)$$

$$= \vec{w} \cdot (2\vec{u} - \vec{w}) - (-2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)) \quad (3.45)$$

$$= \vec{w} \cdot (2\vec{u} - \vec{w}) - (-4 - 2) \quad (3.46)$$

Agora, para o primeiro termo, podemos usar a propriedade distributiva, como segue

$$2\vec{w} \cdot \vec{u} - \vec{w} \cdot \vec{w} + 6 \quad (3.47)$$

$$= 2(2, -1, -1) \cdot (-1, 0, 1) - |\vec{w}|^2 + 6 \quad (3.48)$$

$$= 2(-2 + 0 - 1) - (2^2 + (-1)^2 + (-1)^2) + 6 \quad (3.49)$$

$$= -6 - 6 + 6 \quad (3.50)$$

$$= -6 \quad (3.51)$$

Com isso, concluímos que  $\vec{w} \cdot (2\vec{u} - \vec{w}) - 2\vec{u} \cdot \vec{w} = -6$ .

◇

**ER 3.1.2.** Sendo  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal, mostre que o produto interno entre vetores distintos de  $B$  é igual a zero. Ainda, o produto interno de um vetor de  $B$  por ele mesmo é igual a 1.

**Solução.** Calculamos o produto interno entre vetores diferentes:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) \quad (3.52)$$

$$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \quad (3.53)$$

$$= 0 \quad \checkmark \quad (3.54)$$

$$= \vec{j} \cdot \vec{i} \quad (3.55)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) \quad (3.56)$$

$$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \quad (3.57)$$

$$= 0 \quad \checkmark \quad (3.58)$$

$$= \vec{k} \cdot \vec{i} \quad (3.59)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) \quad (3.60)$$

$$= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \quad (3.61)$$

$$= 0 \quad \checkmark \quad (3.62)$$

$$= \vec{k} \cdot \vec{j} \quad (3.63)$$

Por fim, verificamos os casos do produto interno de um vetor por ele mesmo:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 \quad \checkmark \quad (3.64)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \quad \checkmark \quad (3.65)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1 \quad \checkmark \quad (3.66)$$

◇

**3.1.3 Exercícios**

**E.3.1.1.** Sendo  $\vec{u} = (2, -1, 1)$  e  $\vec{v} = (1, -3, 2)$ , calcule:

- a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- b)  $\vec{v} \cdot \vec{u}$
- c)  $2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- d)  $\vec{u} \cdot (2\vec{v})$

**E.3.1.2.** Sendo  $\vec{u} = (2, -1, 1)$ , calcule:

- a)  $\vec{u} \cdot \vec{i}$
- b)  $\vec{u} \cdot \vec{j}$
- c)  $2\vec{u} \cdot \vec{k}$

**E.3.1.3.** Sendo  $\vec{u} = (2, -1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, -3, 2)$  e  $\vec{w} = (-2, -1, -3)$ , calcule:

- a)  $\vec{u} \cdot (\vec{w} + \vec{v})$
- b)  $\vec{v} \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$

**E.3.1.4.** Sendo  $\vec{u} = (2, -1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, -3, 2)$  e  $\vec{w} = (-2, -1, -3)$ , calcule:

- a)  $|\vec{u}|$
- b)  $|\vec{u} + \vec{v}|$
- c)  $|\vec{u} \cdot \vec{w}|$

**E.3.1.5.** Sendo  $\vec{u} = (2, -1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, -3, 2)$  e  $\vec{w} = (-2, -1, -3)$ , encontre o vetor  $\vec{x}$  que satisfaz as seguintes condições:

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = -1 \quad (3.67)$$



$$\vec{v} \cdot \vec{x} = 2 \quad (3.68)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = -4 \quad (3.69)$$

$$(3.70)$$

**E.3.1.6.** Sendo  $\vec{u} = (2, -1, 1)$  e  $\vec{v} = (1, -3, 2)$ , encontre o vetor  $\vec{x}$  que satisfaz as seguintes condições:

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = 0 \quad (3.71)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{x} = 0 \quad (3.72)$$

**E.3.1.7.** Sendo  $\vec{u} = (2, -1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, -3, 2)$  e  $\vec{w} = (-2, -1, -3)$ , encontre o vetor  $\vec{x}$  que satisfaz as seguintes condições:

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = 0 \quad (3.73)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{x} = 0 \quad (3.74)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = 0 \quad (3.75)$$

$$(3.76)$$

## 3.2 Ângulo entre Vetores

Em revisão

O **ângulo formado entre dois vetores**  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos, é definido como o menor ângulo determinado entre quaisquer representações  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

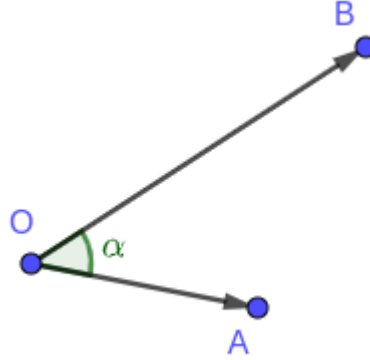


Figura 3.1: Ângulo entre dois vetores.

**Proposição 3.2.1.** *Dados  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , temos*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha, \quad (3.77)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

*Demonstração.* Tomamos as representações  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ . Observamos que  $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BA}$ . Então, aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $\triangle OAB$ , obtemos

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos \alpha, \quad (3.78)$$

ou, equivalentemente,

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.79)$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.80)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.81)$$

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.82)$$

donde

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha. \quad (3.83)$$

□

**Exemplo 3.2.1.** Vamos determinar ângulo entre os vetores  $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$  e  $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ . Da Proposição 3.2.1, temos

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (3.84)$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2}} \quad (3.85)$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.86)$$

Portanto, temos  $\alpha = \pi/6$ .

**Observação 3.2.1.** O ângulo entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é:

- **agudo** se, e somente se,  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ ;
- **obtuso** se, e somente se,  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ .

De fato, de (3.77), temos que o sinal de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  é igual ao sinal de  $\cos \alpha$  (o cosseno do ângulo entre os vetores). Também, por definição,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Logo, se  $\cos \alpha > 0$ , então  $0 < \alpha < \pi/2$  (ângulo agudo) e, se  $\cos \alpha < 0$ , então  $\pi/2 < \alpha < \pi$  (ângulo obtuso).

**Observação 3.2.2.** (Vetores ortogonais) Se  $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , então:

- $\vec{u} \perp \vec{v}$  se, e somente se,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

De fato, seja  $\alpha$  o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Se  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , então  $\alpha = \pi/2$  e

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.87)$$

$$= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (3.88)$$

$$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 \quad (3.89)$$

$$= 0. \quad (3.90)$$

Reciprocamente, se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , então

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \quad (3.91)$$

$$= \frac{0}{|\vec{u}||\vec{v}|} \quad (3.92)$$

$$= 0. \quad (3.93)$$

Lembrando que  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , segue que  $\alpha = \pi/2$ , i.e.  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

**Exemplo 3.2.2.** Os vetores  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  e  $\vec{u} = (0, 1, 1)$  são ortogonais. De fato, temos

$$\vec{i} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \quad (3.94)$$

$$= 0. \quad (3.95)$$

### 3.2.1 Desigualdade Triangular

Dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  temos

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|, \quad (3.96)$$

esta é conhecida como a **desigualdade triangular**. Para demonstrá-la, começamos observando que

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \quad (3.97)$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (3.98)$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \quad (3.99)$$

Agora, vamos estimar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . Pela Proposição 3.2.1, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha, \quad (3.100)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Mas, então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}| |\cos \alpha|. \quad (3.101)$$

Daí, como  $|\cos \alpha| \leq 1$ , temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|, \quad (3.102)$$

a qual é chamada de **desigualdade de Cauchy-Schwarz**<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Augustin-Louis Cauchy, 1798-1857, matemático francês. Fonte: [Wikipédia](#). Hermann Schwarz, 1843-1921, matemático alemão. Fonte: [Wikipedia](#).

### 3.2.2 Exercícios Resolvidos

**ER 3.2.1.** Sejam  $\vec{u} = (x, -1, 2)$  e  $\vec{v} = (2, x, -3)$ . Determine  $x$  tal que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}. \quad (3.103)$$

**Solução.** Da definição do produto escalar, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (3.104)$$

$$\frac{1}{2} = 2x - x - 6 \quad (3.105)$$

$$x - 6 = \frac{1}{2} \quad (3.106)$$

$$x = \frac{1}{2} + 6 \quad (3.107)$$

$$x = \frac{13}{2}. \quad (3.108)$$

◇

**ER 3.2.2.** Determine  $x$  tal que  $\vec{u} = (-1, 0, x)$  seja ortogonal a  $\vec{v} = (1, 2, -1)$ .

**Solução.** Para que  $\vec{u} \perp \vec{v}$  devemos ter

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.109)$$

$$-1 + 0 - x = 0 \quad (3.110)$$

$$x = -1. \quad (3.111)$$

◇

### 3.2.3 Exercícios

**E.3.2.1.** Determine o ângulo entre os vetores  $\vec{u} = (1, 0, 1)$  e  $\vec{v} = (0, 0, 2)$ .

**E.3.2.2.** Seja  $\vec{v} = (1, 2, -1)$ . Determine a norma do vetor  $\vec{u}$  de mesma direção de  $\vec{v}$  e tal que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ .

**E.3.2.3.** Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores unitários e  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ , então  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm a mesma direção e o mesmo sentido? Justifique sua resposta.

**E.3.2.4.** Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores tais que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ , então  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm a mesma direção e sentidos opostos? Justifique sua resposta.

**E.3.2.5.** Encontre o vetor  $x$  ortogonal a  $\vec{u} = (1, -2, 0)$  e  $\vec{v} = (2, -1, 1)$  tal que  $\vec{x} \cdot (0, -1, 2) = 1$ .

### 3.3 Projeção Ortogonal

Em revisão

Sejam dados os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ . Seja, ainda,  $P$  a interseção da reta perpendicular a  $OB$  que passa pelo ponto  $A$ . Observemos a Figura 3.2. Com isso, definimos a **projeção ortogonal de  $\vec{u}$  na direção de  $\vec{v}$**  por  $\overrightarrow{OP}$ . Denotamos

$$\overrightarrow{OP} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}. \quad (3.112)$$

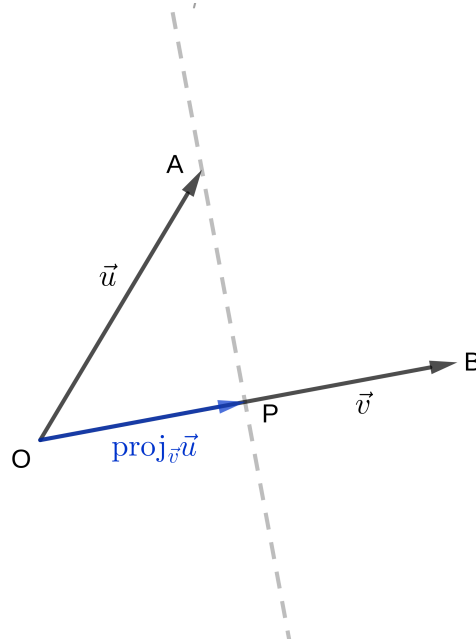


Figura 3.2: Ilustração da definição da projeção ortogonal.

Da definição, temos que<sup>3</sup>

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \beta \cdot \vec{v} \quad (3.113)$$

para algum número real  $\beta$ . Além disso, temos

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \quad (3.114)$$

Portanto

$$\beta \vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \quad (3.115)$$

Tomando o produto escalar com  $\vec{v}$  em ambos os lados desta equação, obtemos

$$\beta \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} \quad (3.116)$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v}, \quad (3.117)$$

pois  $\overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$ . Daí, lembrando que  $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ , temos

$$\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \quad (3.118)$$

---

<sup>3</sup> $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$  é um vetor múltiplo por escalar de  $\vec{v}$ .

e concluímos que

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \quad (3.119)$$

**Exemplo 3.3.1.** Sejam  $\vec{u} = (-1, 1, -1)$  e  $\vec{v} = (2, 1, -2)$ . Usando a equação (3.119), obtemos

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{(-1, 1, -1) \cdot (2, 1, -2)}{|(2, 1, -2)|^2} (2, 1, -2) \quad (3.120)$$

$$= \frac{-2 + 1 + 2}{4 + 1 + 4} (2, 1, -2) \quad (3.121)$$

$$= \left( \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{-2}{9} \right). \quad (3.122)$$

### 3.3.1 Exercícios Resolvidos

**ER 3.3.1.** Determine  $x$  tal que a projeção de  $\vec{u} = (1, x, x)$  em  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  tenha o dobro da norma de  $\vec{v}$ .

**Solução.** De (3.119), a projeção de  $\vec{u}$  em  $\vec{v}$  é

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}, \quad (3.123)$$

$$|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right| |\vec{v}| \quad (3.124)$$

$$|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \right| \quad (3.125)$$

$$|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = \frac{|1 + x|}{|\vec{v}|} \quad (3.126)$$

Queremos que

$$|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = 2|\vec{v}|. \quad (3.127)$$

Segue que

$$\frac{|1 + x|}{|\vec{v}|} = 2|\vec{v}| \quad (3.128)$$



$$|1 + x| = 2|\vec{v}|^2 \quad (3.129)$$

$$|1 + x| = 2 \cdot 2 \quad (3.130)$$

$$1 + x = -4 \quad \text{ou} \quad 1 + x = 4 \quad (3.131)$$

$$x = -5 \quad \text{ou} \quad x = 3. \quad (3.132)$$

◇

**ER 3.3.2.** Verifique que se  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , então  $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{0}$ . Justifique sua resposta.

**Solução.** Temos que

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \quad (3.133)$$

Tendo em vista que  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , temos  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Logo,

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = 0 \cdot \vec{v} \quad (3.134)$$

$$= \vec{0}. \quad (3.135)$$

◇

### 3.3.2 Exercícios

**E.3.3.1.** Sejam  $\vec{u} = (-1, 1, 2)$  e  $\vec{v} = (1, -2, 0)$ . Calcule  $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ .

**E.3.3.2.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores unitários e seja  $\alpha = \pi/6$  o ângulo entre eles. Calcule a norma da projeção ortogonal de  $\vec{u}$  na direção de  $\vec{v}$ .

**E.3.3.3.** Determine  $x$  tal que  $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = (1/6, -1/3, 1/6)$ , sendo  $\vec{u} = (x, 1, 2)$  e  $\vec{v} = (1, -2, 1)$ .

**E.3.3.4.** Verifique se a  $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$  tem o mesmo sentido de  $\vec{v}$  para quaisquer vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dados. Justifique sua resposta.

**E.3.3.5.** Determine as coordenadas de todos os vetores  $\vec{u}$  tais que  $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{v}$ , sendo que  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ .

### 3.4 Produto Vetorial

Em revisão

De agora em diante, vamos trabalhar com um base ortonormal  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dita com **orientação positiva**, i.e. os vetores  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$  e  $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$  estão dispostos em sentido anti-horário, veja Figura ??.

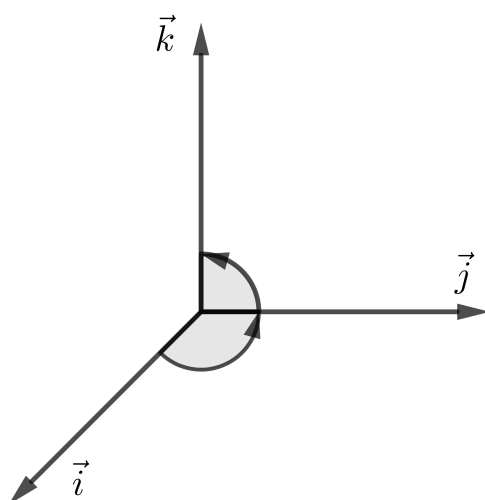


Figura 3.3: Base ortonormal com orientação positiva.

Dados vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , definimos o produto vetorial de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$ , por

$$\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\alpha) \vec{n}, \quad (3.136)$$

onde  $\theta$  é ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , e  $\vec{n}$  é o vetor unitário ortogonal ao plano determinado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , e com sentido tal que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$  tem orientação positiva.

Em outras palavras, temos que:

- se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d., então  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ .
- se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.i., então

- a)  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,
- b)  $\vec{u} \times \vec{v}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , e
- c)  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{u} \times \vec{v}$  formam uma base positiva.

### 3.4.1 Interpretação Geométrica

Sejam dados  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  l.i.. Estes vetores determinam um paralelogramo, veja Figura 3.4 (esquerda). Seja, então,  $h$  a altura deste paralelogramo tendo  $\vec{u}$  como sua base. Logo, a área do paralelogramo é o produto do comprimento da base com sua altura, neste caso

$$|\vec{u}|h = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha \quad (3.137)$$

$$= |\vec{u} \times \vec{v}| \quad (3.138)$$

Ou seja, o produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  tem norma igual à área do paralelogramo determinado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

Ainda, por definição,  $\vec{u} \times \vec{v}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Isto nos dá a direção de  $\vec{u} \times \vec{v}$ . O sentido é, então, determinado pela definição de que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$  é uma base positiva. Veja a Figura 3.4 (direita).

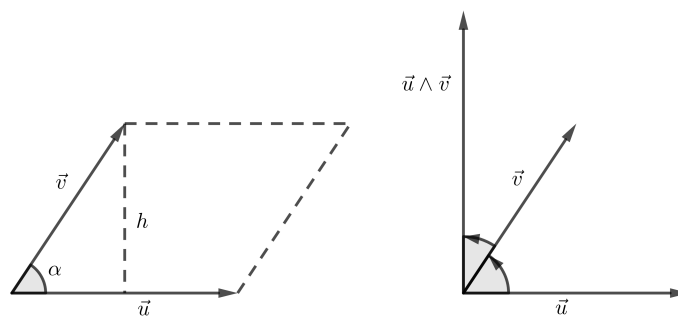


Figura 3.4: Interpretação do produto vetorial.

### 3.4.2 Produto Vetorial por Coordenadas

Dados  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  em uma base ortonormal positiva, então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (3.139)$$

**Observação 3.4.1.** Uma regra mnemônica, é

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (3.140)$$

**Exemplo 3.4.1.** Dados os vetores  $\vec{u} = (1, -2, 1)$  e  $\vec{v} = (0, 2, -1)$ , temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.141)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.142)$$

$$= 0\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \quad (3.143)$$

$$= (0, 1, 2). \quad (3.144)$$

### 3.4.3 Exercícios Resolvidos

**ER 3.4.1.** Calcule  $\vec{x}$  tal que  $(0, 2, -1) \times \vec{x} = (-3, -1, -2)$ .

**Solução.** Denotando  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , temos

$$(0, 2, -1) \times \vec{x} = (-3, -1, -2) \quad (3.145)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (-3, -1, -2) \quad (3.146)$$

$$(x_2 + 2x_3)\vec{i} - x_1\vec{j} - 2x_1\vec{k} = \quad (3.147)$$

$$-3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \quad (3.148)$$

Segue que

$$\begin{aligned}x_2 + 2x_3 &= -3 \\ -x_1 &= -1 \\ -2x_1 &= -2\end{aligned}$$

Logo,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3 - 2x_3$  e  $x_3$  é arbitrário. Concluimos que  $\vec{x} = (1, -3 - 2x_3, x_3)$  com  $x_3 \in \mathbb{R}$ .

◇

**ER 3.4.2.** Determine a área do paralelogramo determinado pelos vetores  $\vec{u} = (-1, 2, 3)$  e  $\vec{v} = (1, -2, 1)$ .

**Solução.** Tomando representações  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$ , temos que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  determinam um paralelogramo  $OABC$ , onde  $C$  é tal que  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OB}$ <sup>4</sup>. Da definição do produto vetorial, temos que

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin \alpha, \quad (3.149)$$

o que é igual a área do paralelogramo  $OABC$ , onde  $\alpha$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Logo, a área do paralelogramo é

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.150)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(8, 4, 0)| \quad (3.151)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 4\sqrt{5} \quad (3.152)$$

◇

### 3.4.4 Exercícios

**E.3.4.1.** Sejam  $\vec{u} = (2, -3, 1)$  e  $\vec{v} = (1, -2, -1)$ . Calcule:

a)  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

---

<sup>4</sup>Veja a regra do paralelogramo na Observação ??.

b)  $\vec{v} \times \vec{u}$ .

c)  $\vec{v} \times (2\vec{u})$ .

**E.3.4.2.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  tais que  $\vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 0)$ . Forneça  $\vec{v} \times \vec{u}$ . Justifique sua resposta.

**E.3.4.3.** Seja  $\vec{u}$  um vetor qualquer. Calcule  $\vec{u} \times \vec{u}$ .

**E.3.4.4.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  tais que  $(2\vec{u}) \times \vec{v} = (2, -1, 0)$ . Forneça  $\vec{v} \times \vec{u}$ . Justifique sua resposta.

**E.3.4.5.** Calcule  $\vec{x}$  tal que  $\vec{x} \times (2, -2, 3) = (11, 8, 2)$ .

**E.3.4.6.** Seja  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva. Calcule:

a)  $\vec{i} \times \vec{j}$

b)  $\vec{j} \times \vec{k}$

c)  $\vec{k} \times \vec{i}$

## 3.5 Propriedades do Produto Vetorial

### Em revisão

Nesta seção, discutiremos sobre algumas propriedades do produto vetorial. Para tanto, sejam dados os vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  e o número real  $\gamma$ .

Da definição do produto vetorial, temos  $\vec{u} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$  e  $\vec{v} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$ , logo

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0 \quad (3.153)$$

e

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0. \quad (3.154)$$

**Exemplo 3.5.1.** Sejam  $\vec{u} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{v} = (2, -1, -2)$ . Temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad (3.155)$$

$$= (4, 6, 1) \quad (3.156)$$

Segue, que

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (1, -1, 2) \cdot (4, 6, 1) \quad (3.157)$$

$$= 4 - 6 + 2 \quad (3.158)$$

$$= 0. \quad (3.159)$$

Em relação à multiplicação por escalar, temos

$$\gamma(\vec{u} \times \vec{v}) = (\gamma\vec{u}) \times \vec{v} \quad (3.160)$$

$$= \vec{u} \times (\gamma\vec{v}). \quad (3.161)$$

De fato,

$$(\gamma\vec{u}) \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \gamma u_1 & \gamma u_2 & \gamma u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.162)$$

$$= \gamma \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \gamma(\vec{u} \times \vec{v}) \quad (3.163)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \gamma v_1 & \gamma v_2 & \gamma v_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \times (\gamma\vec{v}) \quad (3.164)$$

**Exemplo 3.5.2.** Sejam  $\vec{u} = (1, -1, 2)$  e  $\vec{v} = (2, -1, -2)$ . Temos

$$2(\vec{u} \times \vec{v}) = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad (3.165)$$

$$= 2(4, 6, 1) \quad (3.166)$$

$$= (8, 12, 2) \quad (3.167)$$

$$(2\vec{u}) \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad (3.168)$$

$$= (8, 12, 2) \quad (3.169)$$

$$\vec{u} \times (2\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \quad (3.170)$$

$$= (8, 12, 2) \quad (3.171)$$

Também, vale a [propriedade distributiva com a operação de soma](#), i.e.

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}. \quad (3.172)$$

De fato, temos

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) \quad (3.173)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{vmatrix} \quad (3.174)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (3.175)$$

$$= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}. \quad (3.176)$$

**Exemplo 3.5.3.** Sejam  $\vec{u} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{v} = (2, -1, -2)$  e  $\vec{w} = (0, -1, -1)$ . Temos

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) \quad (3.177)$$

$$= \vec{u} \times [(2, -1, -2) + (0, -1, -1)] = (1, -1, 2) \times (2, -2, -3) \quad (3.178)$$



$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} \quad (3.179)$$

$$= (7, 7, 0) \quad (3.180)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w}) \quad (3.181)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.182)$$

$$= (4, 6, 1) + (3, 1, -1) \quad (3.183)$$

$$= (7, 7, 0) \quad (3.184)$$

Observamos que o **produto vetorial não é comutativo**, entretanto

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}. \quad (3.185)$$

De fato, temos

$$\vec{u} \times \vec{v} \quad (3.186)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.187)$$

$$= - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (3.188)$$

$$= -\vec{v} \times \vec{u}. \quad (3.189)$$

**Exemplo 3.5.4.** Sejam  $\vec{u} = (1, -1, 2)$  e  $\vec{v} = (2, -1, -2)$ . Temos

$$\vec{u} \times \vec{v} \quad (3.190)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad (3.191)$$

$$= (4, 6, 1) \quad (3.192)$$

$$\vec{v} \times \vec{u} \quad (3.193)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3.194)$$

$$= (-4, -6, -1) \quad (3.195)$$

Também, o **produto vetorial não é associativo** sendo  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ , em geral, é diferente de  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ . Com efeito, temos

$$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0}, \quad (3.196)$$

$$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \quad (3.197)$$

Por outro lado, suponhamos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.i. e seja  $\pi$  um plano determinado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Então,  $\vec{u} \times \vec{v}$  é ortogonal a  $\pi$ . Como  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$  é ortogonal a  $\vec{u} \times \vec{v}$  e a  $\vec{w}$ , temos que  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$  também pertence a  $\pi$ . Logo,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$  são l.d. e existem  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}. \quad (3.198)$$

Vamos determinar  $\alpha$  e  $\beta$ . Para tanto, consideremos uma base ortonormal  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tal que  $\vec{i} \parallel \vec{u}$  e  $\vec{j} \in \pi$ . Nesta base, temos

$$\vec{u} = (u_1, 0, 0) \quad (3.199)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, 0) \quad (3.200)$$

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3). \quad (3.201)$$

Também, temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.202)$$

$$= (0, 0, u_1 v_2) \quad (3.203)$$

e

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & u_1 v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (3.204)$$

$$= (-u_1v_2w_2, u_1v_2w_1, 0). \quad (3.205)$$

Daí, temos

$$\underbrace{(-u_1v_2w_2, u_1v_2w_1, 0)}_{(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}} = \underbrace{\alpha(u_1, 0, 0) + \beta(v_1, v_2, 0)}_{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}}, \quad (3.206)$$

donde

$$\alpha u_1 + \beta v_1 = -u_1v_2w_2, \quad (3.207)$$

$$\beta v_2 = u_1w_1v_2. \quad (3.208)$$

Resolvendo para  $\alpha$  e  $\beta$ , obtemos

$$\alpha = -v_1w_1 - v_2w_2 = -\vec{v} \cdot \vec{w} \quad (3.209)$$

$$\beta = \vec{u} \cdot \vec{w}. \quad (3.210)$$

Portanto, temos

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}. \quad (3.211)$$

Usando as identidades acima, obtemos

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} \quad (3.212)$$

$$= (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} \quad (3.213)$$

$$= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad (3.214)$$

ou seja,

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}. \quad (3.215)$$

### 3.5.1 Exercícios Resolvidos

**ER 3.5.1.** Sejam  $\vec{u} = (-3, -2, -1)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 2)$  e  $\vec{w} = (-1, 0, 1)$ . Calcule

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}. \quad (3.216)$$

**Solução.** Seguindo a identidade (3.212), segue

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \quad (3.217)$$

$$= -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} \quad (3.218)$$

$$= -(0 + 0 + 2)\vec{u} + (3 + 0 - 1)\vec{v} \quad (3.219)$$

$$= -2(-3, -2, -1) + 2(0, 1, 2) \quad (3.220)$$

$$= (6, 4, 2) + (0, 2, 4) \quad (3.221)$$

$$= (6, 6, 6) \quad (3.222)$$

◇

**ER 3.5.2.** Sejam  $\vec{u} = (2, x, 1)$ ,  $\vec{v} = (-2, 3, 1)$  e  $\vec{w} = (-3, -1, 1)$ . Calcule  $x$  tal que

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = -16. \quad (3.223)$$

**Solução.** Por cálculo direto, temos

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = -16 \quad (3.224)$$

$$\vec{v} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & x & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \quad (3.225)$$

$$(-2, 3, 1) \cdot (x + 1, -5, 3x - 2) = -16 \quad (3.226)$$

$$x - 19 = -16 \quad (3.227)$$

$$x = 3. \quad (3.228)$$

◇

### 3.5.2 Exercícios

**E.3.5.1.** Sejam  $\vec{u} = (2, -3, 1)$  e  $\vec{v} = (3, -2, 1)$ . Calcule  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$ . Se  $\vec{w}$  é um vetor qualquer, forneça o valor de  $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$ . Justifique sua resposta.

**E.3.5.2.** Sabendo que  $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 1, 1)$ , calcule  $\vec{u} \times (2\vec{v})$ .

**E.3.5.3.** Sabendo que  $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 1, 1)$  e  $\vec{u} \times \vec{w} = (-1, -1, -1)$ , calcule  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$ .

**E.3.5.4.** Sendo  $\vec{a} = (3, -1, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, -1, -1)$ , calcule  $(\vec{a} \cdot \vec{k})(\vec{i} \times \vec{b})$ .

**E.3.5.5.** Calcule  $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ , sendo  $\vec{u} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{v} = (0, -1, 1)$  e  $\vec{w} = (1, 0, -1)$ .

## 3.6 Produto Misto

Em revisão

O **produto misto** de três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , nesta ordem, é definido por

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}. \quad (3.229)$$

Em coordenadas, temos

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (3.230)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{w} \quad (3.231)$$

$$= \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3) \quad (3.232)$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 \quad (3.233)$$

$$= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.234)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (3.235)$$

Ou seja, temos

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (3.236)$$

**Exemplo 3.6.1.** Dados os vetores  $\vec{u} = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, 2)$  e  $\vec{w} =$

$(1, -1, 1)$ , temos

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (3.237)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.238)$$

$$= 1 \quad (3.239)$$

### 3.6.1 Interpretação Geométrica

Consideramos uma base positiva  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , com  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$  e  $\vec{w} = \overrightarrow{AH}$ . Conforme vemos na Figura 3.5, estes vetores determinam um paralelepípedo.

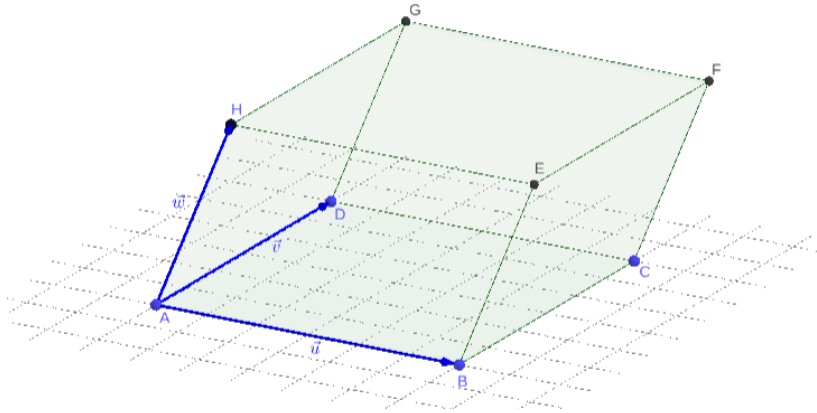


Figura 3.5: Interpretação geométrica do produto misto.

A base do paralelepípedo é o paralelogramo  $ABCD$  de área  $|\vec{u} \times \vec{v}|$ . Assim sendo, o **volume do paralelepípedo** é

$$V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h, \quad (3.240)$$

onde  $h$  é a altura do prisma. Por sua vez,

$$h = |\text{proj}_{\vec{u} \times \vec{v}} \vec{w}| \quad (3.241)$$

$$= \left| \frac{\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})}{|\vec{u} \times \vec{v}|^2} \vec{u} \times \vec{v} \right| \quad (3.242)$$

$$= \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|^2} |\vec{u} \times \vec{v}| \quad (3.243)$$

$$= \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \quad (3.244)$$

Logo, retornando a (3.240), obtemos

$$V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h \quad (3.245)$$

$$= |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \quad (3.246)$$

$$= |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| \quad (3.247)$$

$$= |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|. \quad (3.248)$$

Ou seja, o **volume do paralelepípedo** formado pelos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  é igual a norma do produto misto destes vetores, i.e.

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|. \quad (3.249)$$

**Exemplo 3.6.2.** Vamos calcular o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores  $\vec{u} = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v} = (-1, 2, 0)$  e  $\vec{w} = (0, 1, 1)$ . De (3.249), temos

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \quad (3.250)$$

$$= \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| \quad (3.251)$$

$$= |3| = 3. \quad (3.252)$$

### 3.6.2 Propriedades

Valem as seguintes propriedades:

a)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$

*Demonstração.* De fato, quando permutamos duas linhas em uma matriz, seu determinante troca de sinal.

b)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$

*Demonstração.* Mesmo argumento da letra a).

c)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

*Demonstração.* De fato, cada caso acima corresponde a duas consecutivas permutações de linha na matriz associada ao produto misto.

d)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$

*Demonstração.* Isto segue de c), i.e.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] \quad (3.253)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u} \quad (3.254)$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}. \quad (3.255)$$

e)  $[\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

*Determinação.* De fato, ao multiplicarmos uma linha de uma matriz por um escalar  $\alpha$ , seu determinante fica multiplicado por  $\alpha$ .

f)  $[\vec{u} + \vec{z}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}]$

*Determinante.* Também segue da propriedade análoga do determinante de matrizes.

**Exemplo 3.6.3.** Sabendo que  $[\vec{u}, 2\vec{w}, \vec{v}] = 2$ , vamos calcular  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ . Do item e) acima, temos

$$2 = [\vec{u}, 2\vec{w}, \vec{v}] \quad (3.256)$$

$$= 2[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}], \quad (3.257)$$

donde

$$[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = 1. \quad (3.258)$$

Agora, do item b), temos

$$[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]. \quad (3.259)$$

Ou seja, concluímos que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -1$ .



Também, temos as seguinte propriedades envolvendo o produto misto:

- a) Se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ , então  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  **não é base**.

*Demonstração.* Seja  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ , i.e.  $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ . No caso de um dos vetores serem nulos, então  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  não é base. Suponhamos, então, que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são vetores não nulos. Isso implica que  $\vec{u} \times \vec{v} = 0$  ou  $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{w}$ . No primeiro caso,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d. e, portanto,  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  não é base. No segundo caso,  $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{w}$ , temos que  $\vec{w}$  é coplanar aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , logo  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  não é base.

- b) Se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$ , então  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é uma **base positiva**.

*Demonstração.* Se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$ , implica que o ângulo entre  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{w}$  é agudo, o que garante que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  seja uma base positiva.

- c) Se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$ , então  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é uma **base negativa**.

*Demonstração.* Se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$ , implica que o ângulo entre  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{w}$  é obtuso, o que garante que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  seja uma base negativa.

### 3.6.3 Exercícios Resolvidos

**ER 3.6.1.** Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores  $\vec{v} = (1, 0, -2)$ ,  $\vec{w} = (1, -2, 1)$  e  $\vec{u} = (0, 2, 1)$ .

**Solução.** Da Subseção 3.6.1, temos que o volume do paralelogramo é

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|, \quad (3.260)$$

não importando a ordem dos vetores<sup>5</sup>. Assim sendo, temos

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \quad (3.261)$$

$$= \left| \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| \quad (3.262)$$

$$= |-8| = 8. \quad (3.263)$$

---

<sup>5</sup>A ordem dos vetores não altera o módulo do valor do produto misto.

◇

**ER 3.6.2.** Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores dados. Verifique a seguinte afirmação:

$$[\vec{u}, \vec{v} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}], \quad (3.264)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são quaisquer escalares.

**Solução.** Das propriedades do produto misto<sup>6</sup>, temos

$$[\vec{u}, \vec{v} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{w}] \quad (3.265)$$

$$= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{w}]. \quad (3.266)$$

Agora, observamos que  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$  é combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , logo  $(\vec{u}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{w})$  é l.d. e, portanto,

$$[\vec{u}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{w}] = 0. \quad (3.267)$$

Concluimos que

$$[\vec{u}, \vec{v} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]. \quad (3.268)$$

◇

### 3.6.4 Exercícios

**E.3.6.1.** Calcule  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  sendo  $\vec{u} = (-1, 0, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 3, 0)$  e  $\vec{w} = (1, -2, -1)$ .

**E.3.6.2.** Sejam  $\vec{a} = (0, 0, 2)$ ,  $\vec{d} = (-1, 1, 1)$  e  $\vec{e} = (1, 1, 1)$ . Calcule  $[\vec{d}, \vec{a}, \vec{e}]$ .

**E.3.6.3.** Sendo  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2$ , calcule  $[2\vec{u}, -3\vec{v}, \vec{w}]$ .

**E.3.6.4.** Sendo  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2$ , calcule  $[2\vec{u} - 5\vec{w}, -3\vec{v}, \vec{w}]$ .

**E.3.6.5.** Sejam  $\vec{u} = (0, x, 2)$ ,  $\vec{v} = (-1, 1, 1)$  e  $\vec{w} = (1, 1, 1)$ . Calcule  $x$  de forma que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2$ .

---

<sup>6</sup> $[\vec{u}, \vec{v} + \vec{z}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{z}, \vec{w}].$

# Bibliografia

- [1] Camargo, I. & Boulos, P.. Geometria Analítica: um tratamento vetorial, 3. ed., Pearson, 2005. ISBN: 978-8587918918
- [2] Gómez, S.L.. Vetores com aplicações em física, Blucher, 2020. ISBN: 978-6555060089
- [3] Maciel, T.. Vetores e geometria analítica: do seu jeito. Blucher, 2022. ISBN: 978-6555064001
- [4] Mello, D.A. & Watanabe, R.G.. Vetores e uma iniciação à geometria analítica, 2. ed., Livraria da Física, 2012. ISBN: 978-8578611071.