PUC Minas - Ciência da Computação
Coração Eucarístico
PAA - Manhã
Pedro Henrique Lima Carvalho

Seja $A = (x_i,\ y_i \mid i \in [1, n]$ um conjunto de n pontos. Resolva o problema de encontrar o par de pontos mais próximos no plano, considerando três diferentes soluções com os seguintes custos computacionais:

a) $\mathbf{O}(n^2)$

Para uma solução com complexidade $\mathbf{O}(n^2)$, utiliza-se um algoritmo de força bruta. Ou seja, calcula-se todas as distâncias entre todos os pares de pontos e seleciona os dois pares cuja distância seja a menor.

Considerando que o problema tenha n pontos, é necessário calcular $\binom{n}{2}$ distâncias. Ou seja:

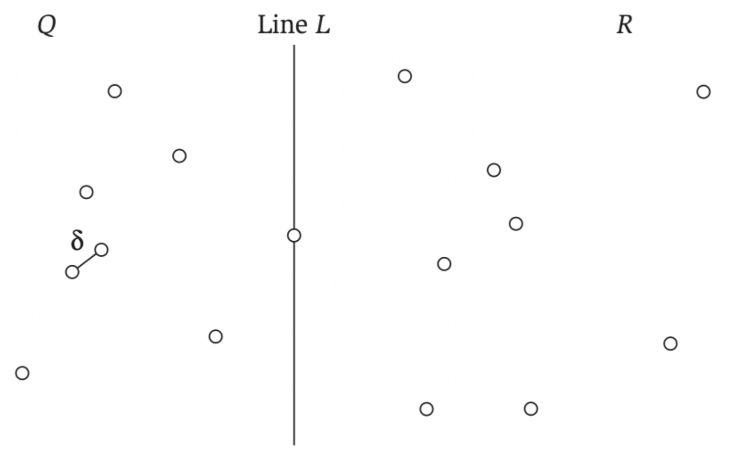
$$\frac{n!}{(n-2)! * 2!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = O(n^2)$$

b) $\mathbf{O}(nlog^2n)$

Já para uma solução com complexidade inferior à obtida através do algoritmo de força bruta, faça-se necessária a utilização de outra estratégia. No caso, adota-se uma estratégia de divisão e conquista. Primeiramente, os n pontos são ordenados pelo eixo X, utilizando um algoritmo de complexidade $O(nLogn)$. No caso, foi escolhido o algoritmo *heapSort*.

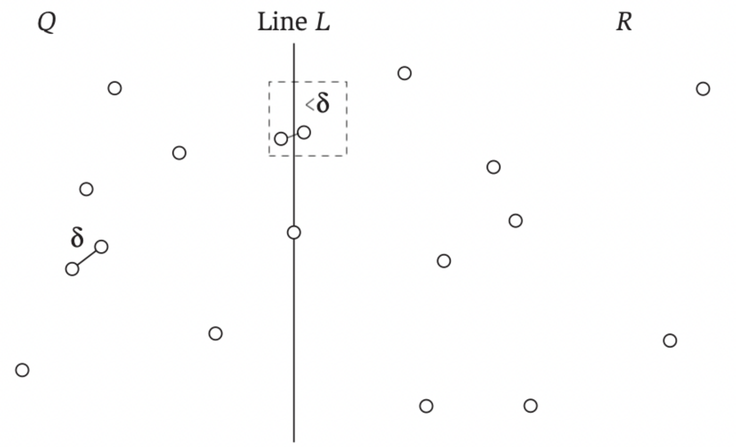
Uma vez que os pontos estajam ordenados, entra a estratégia de divisão. O plano é dividido por uma reta L em dois, Q e R, calculando-se a menor distância de cada metade. Essa estratégia é aplicada recusivamente, até o caso base(três ou menos pontos). Havendo três ou menos pontos, a menor distância é calculada por for força bruta. Assim, o problema é sempre divido em dois, totalizando $Log(n)$ níveis de recursão.

No retorno da recursão é feita a combinação dos resultados de cada lado, selecionando o par de pontos de menor distância. Essa menor distância chamaremos de δ.



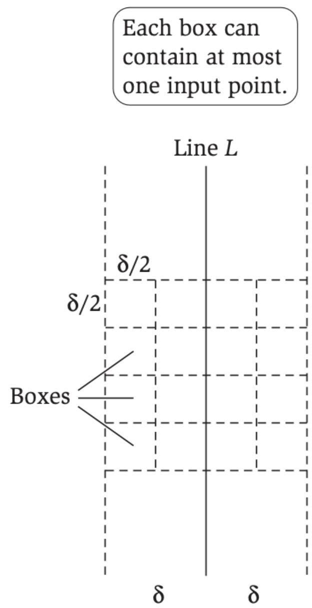
Algorithm design / Jon Kleinberg, Éva Tardos. 1st ed.

No entanto, é possível que a distância entre um ponto de Q e um ponto de R seja menor que δ. E como só foi calculada a menor distância de cada metade, essa distância está sendo desconsiderada.



Para isso, também é necessário calcular a distância entre pontos de Q e de R que estejam a uma distância δ de L. Porém, essa distância δ pode ser o próprio tamanho de Q ou R, o que implicaria em uma complexidade $O(n^2)$.

No entanto, como a menor distância entre dois pontos que estejam no mesmo lado é δ, ao dividirmos a faixa entre $L - \delta$ e $L + \delta$ em quadrados de lado $\delta/2$, temos certeza de que há apenas um ponto em cada quadrado.



Algorithm design / Jon Kleinberg, Éva Tardos. 1st ed.

Logo, ordenando esses pontos pelo eixo Y, e começando do menor para o maior, para cada ponto, basta calcular sua distância para no máximo sete pontos. Assim, essa parte do algoritmo tem complexidade $O(nLogn)$ para a ordenação e $O(n)$ para o cálculo das distâncias, vez que para cada ponto calcula-se um número constante de distâncias.

Com dito acima, ao dividirmo o problema pela metade, temos $Log(n)$ níveis de recursão, sendo que, em cada nível, a operação de maior complexidade é a ordenanação pelo eixo Y dos pontos na faixa entre $L - \delta$ e $L + \delta$.

Assim, a complexidade total do algoritmo é $O(nLog^2n)$.

c) $\mathbf{O}(nlogn)$

Essa solução, na realidade, utliza praticamente o mesmo algoritmo da solução $O(nLog^2n)$. A única otimização feita é a criação, no começo do algoritmo, de uma segunda lista dos pontos, ordenada pelo eixo Y. Tanto a lista ordenada pelo eixo X, quanto a ordenada pelo eixo Y, são passadas para cada recursão, evitando que seja necessária nova ordenação em cada chamada.

Assim, ao invés de termos $Log(n)$ níveis de recursão, cada um realizando ordenações com custo de $O(nLogn)$, temos em cada nível uma varredura da lista ordenada por Y a um custo $O(n)$.

Portanto, o algoritmo todo tem uma complexidade de $O(nLogn)$.