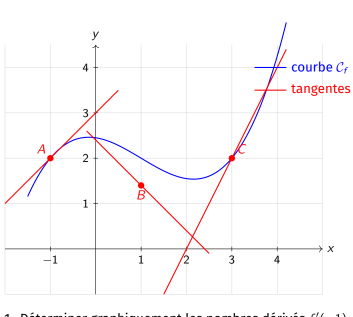
Exercices : études de fonctions

Terminale STMG - Mathématiques

Nombre dérivé et tangente

Exercice 1 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f et les tangentes en trois points A, B et C d'abscisses respectives -1, 1 et 3.



1. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.
2. Parmi ces trois nombres dérivés, lequel est négatif ? Pourquoi ?

1. Le nombre dérivé en un point correspond au coefficient directeur de la tangente en ce point.

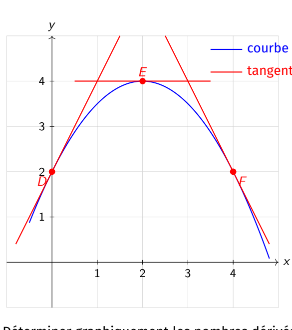
En A d'abscisse -1 : La tangente monte d'une unité verticale pour une unité horizontale, donc $f'(-1) = 1$.

En B d'abscisse 1 : La tangente descend d'une unité verticale pour une unité horizontale, donc $f'(1) = -1$.

En C d'abscisse 3 : La tangente monte de deux unités verticales pour une unité horizontale, donc $f'(3) = 2$.

2. Le nombre dérivé $f'(1) = -1$ est négatif. Cela signifie que la tangente en B est décroissante (elle descend quand on se déplace de gauche à droite).

Exercice 2 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction g et les tangentes en trois points D, E et F d'abscisses respectives 0, 2 et 4.



1. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $g'(0)$, $g'(2)$ et $g'(4)$.
2. Parmi ces trois nombres dérivés, lequel est nul ? Que peut-on en déduire pour la tangente en ce point ?
3. Comparer les valeurs de $g'(0)$ et $g'(4)$. Que remarque-t-on ?

1. En lisant le coefficient directeur de chaque tangente :

En D d'abscisse 0 : La tangente monte de 2 unités pour 1 unité horizontale, donc $g'(0) = 2$.

En E d'abscisse 2 : La tangente est horizontale, donc $g'(2) = 0$.

En F d'abscisse 4 : La tangente descend de 2 unités pour 1 unité horizontale, donc $g'(4) = -2$.

2. Le nombre dérivé $g'(2) = 0$ est nul. La tangente en E est horizontale, ce qui signifie que la fonction g admet un extremum (ici un maximum) en $x = 2$.

3. On constate que $g'(0) = 2$ et $g'(4) = -2$. Ces deux nombres dérivés sont opposés : $g'(0) = -g'(4)$. Cela traduit une certaine symétrie des pentes par rapport au point E où la dérivée s'annule.

Exercice 3 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -3$.

1. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 ?
2. La tangente en ce point monte-t-elle ou descend-elle ?

1. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Ici, $a = 2$, $f(2) = 5$ et $f'(2) = -3$, donc :

$$\begin{aligned} y &= -3(x-2) + 5 \\ y &= -3x + 6 + 5 \\ y &= -3x + 11 \end{aligned}$$

2. Le coefficient directeur de la tangente est $f'(2) = -3 < 0$, donc la tangente descend.

Exercice 4 La courbe d'une fonction f passe par le point $A(1;4)$ et la tangente en ce point passe également par le point $B(3;10)$.

1. Calculer le coefficient directeur de la tangente en A.
2. En déduire la valeur de $f'(1)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente en A.

1. Le coefficient directeur de la tangente passant par $A(1;4)$ et $B(3;10)$ est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10-4}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

2. Le coefficient directeur de la tangente en A est égal au nombre dérivé en ce point, donc $f'(1) = 3$.
3. L'équation de la tangente en $A(1;4)$ avec $f'(1) = 3$ est :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ y &= 3(x-1) + 4 \\ y &= 3x - 3 + 4 \\ y &= 3x + 1 \end{aligned}$$

Exercice 5 Soit $f(x) = x^2$ et $a = 3$.

1. Calculer $f(3)$.
2. Sachant que $f'(x) = 2x$, calculer $f'(3)$.
3. En déduire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

1. $f(3) = 3^2 = 9$
2. $f'(3) = 2 \times 3 = 6$
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x-3) + f(3) \\ y &= 6(x-3) + 9 \\ y &= 6x - 18 + 9 \\ y &= 6x - 9 \end{aligned}$$

Exercice 6 Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant :

1. Si $f'(5) = 0$, alors la tangente au point d'abscisse 5 est horizontale.
2. Si $f'(2) = 4$, alors la tangente au point d'abscisse 2 descend.
3. Si la tangente au point d'abscisse -1 a pour coefficient directeur -2, alors $f'(-1) = -2$.

1. **VRAI.** Si $f'(5) = 0$, le coefficient directeur de la tangente est nul, donc la tangente est bien horizontale.
2. **FAUX.** Si $f'(2) = 4 > 0$, alors la tangente au point d'abscisse 2 monte (elle ne descend pas).
3. **VRAI.** Le coefficient directeur de la tangente en un point d'abscisse a est égal à $f'(a)$. Donc si le coefficient directeur vaut -2 en $x = -1$, alors $f'(-1) = -2$.

Calcul de dérivées

Exercice 7 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 7$
2. $g(x) = 5x^2$
3. $h(x) = -3x^3$
4. $k(x) = 4x^5$

1. $f(x) = 7$ est une fonction constante, donc $f'(x) = 0$
2. $g(x) = 5x^2$, donc $g'(x) = 5 \times 2x = 10x$
3. $h(x) = -3x^3$, donc $h'(x) = -3 \times 3x^2 = -9x^2$
4. $k(x) = 4x^5$, donc $k'(x) = 4 \times 5x^4 = 20x^4$

Exercice 8 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
2. $g(x) = -x^2 + 4x + 1$
3. $h(x) = 6x^3 + 2x^2 - x$
4. $k(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

1. $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 7 - 0 = 6x^2 - 10x + 7$
2. $g'(x) = -2x + 4$
3. $h'(x) = 6 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 1 = 18x^2 + 4x - 1$
4. $k'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

Exercice 9 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1. Rappeler la formule de la dérivée de f.
2. Calculer $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.
3. Que peut-on dire du signe de $f'(x)$ pour tout $x > 0$?

1. La formule de la dérivée est : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
2. • $f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$
• $f'(2) = -\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$
• $f'(4) = -\dfrac{1}{4^2} = -\dfrac{1}{16}$
3. Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$, donc $-\dfrac{1}{x^2} < 0$. La dérivée $f'(x)$ est toujours négative sur $]0;+\infty[$.

Exercice 10 Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $]0;+\infty[$:

1. $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$
2. $g(x) = -2x + \dfrac{5}{x}$
3. $h(x) = x^3 - 4x + \dfrac{2}{x}$

1. $f'(x) = 6x - \dfrac{1}{x^2}$
2. $g'(x) = -2 - \dfrac{5}{x^2}$
3. $h'(x) = 3x^2 - 4 - \dfrac{2}{x^2}$

Exercice 11 Soit $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f(2)$ et $f'(2)$.
3. En déduire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

1. $f'(x) = 8x - 8$
2. $f(2) = 4 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = 16 - 16 + 1 = 1$

$f'(2) = 8 \times 2 - 8 = 16 - 8 = 8$

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ y &= 8(x-2) + 1 \\ y &= 8x - 16 + 1 \\ y &= 8x - 15 \end{aligned}$$

Sens de variation et extremums

Exercice 12 On donne le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Sur quels intervalles la fonction f est-elle croissante ?
2. Sur quels intervalles la fonction f est-elle décroissante ?
3. En quelles valeurs la fonction f admet-elle des extremums ? Préciser leur nature.

1. La fonction f est croissante quand $f'(x) > 0$, donc sur les intervalles $]-\infty;-2[$ et $]3;+\infty[$.
2. La fonction f est décroissante quand $f'(x) < 0$, donc sur l'intervalle $]-2;3[$.
3. La fonction f admet des extremums aux points où la dérivée s'annule en changeant de signe :
• En $x = -2$: f' passe du positif au négatif, donc f admet un **maximum local** en $x = -2$.
• En $x = 3$: f' passe du négatif au positif, donc f admet un **minimum local** en $x = 3$.

Exercice 13 On donne le tableau de variations d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Variations de g		↘		↗		↘	

1. Déterminer les valeurs de $g'(-1)$ et de $g'(2)$. Justifier.
2. Donner le signe de $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;2[$ et $]2;+\infty[$.
3. Dresser le tableau de signes de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. $g'(-1) = 0$ et $g'(2) = 0$ car la fonction admet des extremums en ces points (la tangente est horizontale).
2. D'après le tableau de variations :
• Sur $]-\infty;-1[$, g est croissante donc $g'(x) > 0$
• Sur $]-1;2[$, g est décroissante donc $g'(x) < 0$
• Sur $]2;+\infty[$, g est croissante donc $g'(x) > 0$
3. Tableau de signes de $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Étude complète de fonctions

Exercice 14 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = 2x - 6$.

1. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$
2. $f'(x) = 2x - 6 = 2(x-3)$
• Si $x < 3$: $x - 3 < 0$ donc $f'(x) < 0$
• Si $x = 3$: $f'(x) = 0$
• Si $x > 3$: $x - 3 > 0$ donc $f'(x) > 0$
3. Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

La fonction f est décroissante sur $]-\infty;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$. Elle admet un minimum en $x = 3$.

Exercice 15 Soit $f(x) = x^2 + 4x + 7$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. La fonction f admet-elle un extremum ? Si oui, préciser sa nature et sa valeur.

1. $f'(x) = 2x + 4$
2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$f'(x) = 2(x+2)$
• Si $x < -2$: $f'(x) < 0$
• Si $x = -2$: $f'(x) = 0$
• Si $x > -2$: $f'(x) > 0$

3. Calculons $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 7 = 4 - 8 + 7 = 3$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	3	↗	

4. La fonction f admet un **minimum** en $x = -2$, et ce minimum vaut $f(-2) = 3$.

Exercice 16 Soit $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer le maximum de f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

1. $f'(x) = -4x + 8$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

2. $f'(x) = -4x + 8 = -4(x-2)$
• Si $x < 2$: $x - 2 < 0$ donc $-4(x-2) > 0$, ainsi $f'(x) > 0$
• Si $x = 2$: $f'(x) = 0$
• Si $x > 2$: $x - 2 > 0$ donc $-4(x-2) < 0$, ainsi $f'(x) < 0$
3. Calculons $f(2) = -2(2)^2 + 8(2) - 3 = -8 + 16 - 3 = 5$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	5	↘	

4. Le maximum de f est atteint en $x = 2$ et vaut $f(2) = 5$.

Exercice 17 Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les extremums de f.

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
2. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$
3. Étude du signe du produit $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Calculons : $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	5	↘	1	↗	

5. La fonction f admet un **maximum local** en $x = 1$ valant $f(1) = 5$ et un **minimum local** en $x = 3$ valant $f(3) = 1$.

Exercice 18 Soit $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ définie sur $[-5;3]$.

1. Calculer $g'(x)$ et factoriser l'expression obtenue.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[-5;3]$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $[-5;3]$.
4. Déterminer les extremums de g sur cet intervalle.

1. $g'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x+3)(x-1)$
2. Étude du signe de $g'(x) = 3(x+3)(x-1)$ sur $[-5;3]$:

x	-5		-3		1		3
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Calculons :
• $g(-5) = -125 + 75 + 45 + 2 = -3$
• $g(-3) = -27 + 27 + 27 + 2 = 29$
• $g(1) = 1 + 3 - 9 + 2 = -3$
• $g(3) = 27 + 27 - 27 + 2 = 29$

Tableau de variations :

x	-5		-3		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	-3	↗	29	↘	-3	↗	29

4. Sur $[-5;3]$, la fonction g admet :
• un **maximum local** en $x = -3$ valant $g(-3) = 29$
• un **minimum local** en $x = 1$ valant $g(1) = -3$

Exercice 19 Soit $h(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. Montrer que $h'(x) = -3(x-1)(x-3)$.
3. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les extremums de h.

1. $h'(x) = -3x^2 + 12x - 9$
2. $h'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3) = -3(x-1)(x-3)$
3. Étude du signe de $h'(x) = -3(x-1)(x-3)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. Calculons : $h(1) = -1 + 6 - 9 + 5 = 1$ et $h(3) = -27 + 54 - 27 + 5 = 5$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h		↘	1	↗	5	↘	

5. La fonction h admet un **minimum local** en $x = 1$ valant $h(1) = 1$ et un **maximum local** en $x = 3$ valant $h(3) = 5$.

Exercice 20 Soit $f(x) = 2x - \dfrac{8}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
4. Déterminer l'extremum de f sur cet intervalle.

1. $f'(x) = 2 + \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^2 + 8}{x^2}$
2. Sur $]0;+\infty[$, on a $x^2 > 0$ et $2x^2 + 8 > 0$ (somme de termes positifs).

Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

3. Puisque $f'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
4. La fonction f ne possède pas d'extremum sur $]0;+\infty[$ car elle est strictement croissante.

Exercice 21 Soit $h(x) = x + \dfrac{9}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1. Calculer $h'(x)$ et simplifier l'expression obtenue sous la forme d'une seule fraction.
2. Résoudre l'équation $h'(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$.
3. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de h sur $]0;+\infty[$.
5. Déterminer le minimum de h sur $]0;+\infty[$.

1. $h'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{x^2 - 9}{x^2} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$
2. $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Sur $]0;+\infty[$, seule la solution $x = 3$ convient.

3. Sur $]0;+\infty[$, on a $x^2 > 0$ et $x + 3 > 0$. Le signe de $h'(x)$ dépend donc du signe de $x - 3$:
• Si $0 < x < 3$: $x - 3 < 0$ donc $h'(x) < 0$
• Si $x = 3$: $h'(x) = 0$
• Si $x > 3$: $x - 3 > 0$ donc $h'(x) > 0$
4. Calculons $h(3) = 3 + \dfrac{9}{3} = 3 + 3 = 6$

Tableau de variations :

x	0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h		↘	6	↗	

5. Le minimum de h sur $]0;+\infty[$ est atteint en $x = 3$ et vaut $h(3) = 6$.

Exercice 22 Soit $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
5. Déterminer l'extremum de f sur $]0;+\infty[$.

1. $f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$
2. $f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = \dfrac{2(x^2-4)}{x^2} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$
3. Sur $]0;+\infty[$, on a $x^2 > 0$ et $x + 2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $x - 2$:
• Si $0 < x < 2$: $x - 2 < 0$ donc $f'(x) < 0$
• Si $x = 2$: $f'(x) = 0$
• Si $x > 2$: $x - 2 > 0$ donc $f'(x) > 0$
4. Calculons $f(2) = 2(2) + \dfrac{8}{2} = 4 + 4 = 8$

Tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	8	↗	

5. Le minimum de f sur $]0;+\infty[$ est atteint en $x = 2$ et vaut $f(2) = 8$.

Applications économiques

Exercice 23 Une entreprise produit x articles avec un coût total donné par $C(x) = 0,2x^2 + 15x + 400$ (en euros).

1. Calculer le coût moyen $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ pour $x > 0$.
2. Calculer $C_m'(x)$.
3. Résoudre l'équation $C_m'(x) = 0$ pour déterminer le nombre d'articles qui minimise le coût moyen.
4. Calculer le coût moyen minimal.

1. $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{0,2x^2 + 15x + 400}{x} = 0,2x + 15 + \dfrac{400}{x}$
2. $C_m'(x) = 0,2 - \dfrac{400}{x^2}$
3. $C_m'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,2 - \dfrac{400}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 0,2 = \dfrac{400}{x^2}$

$\Leftrightarrow 0,2x^2 = 400 \Leftrightarrow x^2 = 2000 \Leftrightarrow x = \sqrt{2000} \approx 44,7$

L'entreprise doit produire environ 45 articles pour minimiser le coût moyen.

4. $C_m(\sqrt{2000}) = 0,2\sqrt{2000} + 15 + \dfrac{400}{\sqrt{2000}}$

$= 0,2 \times 44,72 + 15 + \dfrac{400}{44,72} \approx 8,94 + 15 + 8,94 \approx 32,88$ euros

Le coût moyen minimal est d'environ 32,88 euros par article.

Exercice 24 Un magasin vend des articles au prix unitaire de 50 euros. Le bénéfice en fonction du nombre x d'articles vendus est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 50x - 200$ pour $x \in [0;120]$.

1. Calculer $B'(x)$.
2. Résoudre l'équation $B'(x) = 0$.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0;120]$.
4. Dresser le tableau de variations de B sur $[0;120]$.
5. Quel est le nombre d'articles à vendre pour maximiser le bénéfice ? Quel est ce bénéfice maximal ?

1. $B'(x) = -x + 50$
2. $B'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = 50$
3. $B'(x) = -x + 50 = -(x - 50)$
• Si $0 \le x < 50$: $x - 50 < 0$ donc $B'(x) > 0$
• Si $x = 50$: $B'(x) = 0$
• Si $50 < x \le 120$: $x - 50 > 0$ donc $B'(x) < 0$
4. Calculons :
• $B(0) = -200$ euros (perte initiale)
• $B(50) = -0,5(50)^2 + 50(50) - 200 = -1250 + 2500 - 200 = 1050$ euros

• $B(120) = -0,5(120)^2 + 50(120) - 200 = -7200 + 6000 - 200 = -1400$ euros

Tableau de variations :

x	0		50		120
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B	-200	$\nearrow$	1050	$\searrow$	-1400

5. Le bénéfice est maximal pour $x = 50$ articles vendus, et ce bénéfice maximal vaut $B(50) = 1050$ euros.