Exercices - Chapitre 4

Exercices supplémentaires

Terminale STMG - Mathématiques

Exercice 1 1. Ici, on interroge une personne au hasard, donc toutes les personnes qui constituent la population du pays ont la même probabilité d'être choisis : c'est une situation d'équiprobabilité et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

On a donc :

- $P(C) = 0,02$, car 2 % de la population du pays a été contaminée ;
- $P(V) = 0,9$, car 90 % de la population a été vaccinée ;
- $P_C(V) = 0,62$, car 62 % des personnes contaminées ont été vaccinées.

2. a) On a : $P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0,02 \times 0,62 = 0,0124$.

b) Les évènements C et $\overline{C}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

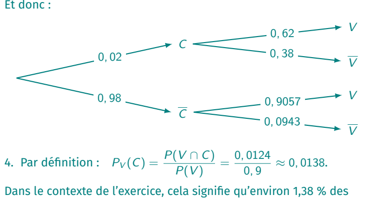
$P(V) = P(C \cap V) + P(\overline{C} \cap V) \iff P(\overline{C} \cap V) = P(V) - P(C \cap V)$

On a donc : $P(\overline{C} \cap V) = P(V) - P(C \cap V) = 0,9 - 0,0124 = 0,8876$

3. Pour compléter l'arbre de probabilité, il nous faut $P_{\overline{C}}(V)$.

Par définition : $P_{\overline{C}}(V) = \dfrac{P(\overline{C} \cap V)}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,8876}{1 - P(C)} = \dfrac{0,8876}{0,98} \approx 0,9057$ au dix-millième près.

Et donc :



4. Par définition : $P_V(C) = \dfrac{P(V \cap C)}{P(V)} = \dfrac{0,0124}{0,9} \approx 0,0138$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus.

5. a) « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. ».

Cette affirmation est **fausse**, car un peu exagérée, parmi les personnes non contaminées, environ 90,57 % d'entre elles sont vaccinées, quand 9,43 % d'entre elles ne le sont pas, mais le décuple de 9,43 % est 94,3 %, qui est donc supérieur à 90,57 %.

Il y a $\dfrac{90,57}{9,43} \approx 9,6$ fois plus de personnes vaccinées que non vaccinées parmi les personnes non contaminées.

b) « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

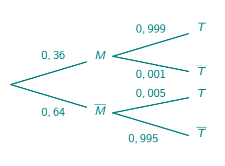
Cette affirmation est **vraie**, car on a calculé qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus, donc, par complémentaire, cela implique qu'environ 98,62 % des personnes vaccinées n'ont pas été contaminées. Il est donc correct de dire que c'est plus de 98 %.

Exercice 2 **Partie A : Étude d'un exemple**

1. D'après l'énoncé : $P_M(T) = 0,999$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,005$

2. 270 000 personnes ont été infectées sur 750 000 donc $P(M) = \dfrac{270\,000}{750\,000} = 0,36$

3. Voici l'arbre pondéré complété :



4. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,36 \times 0,999 = 0,35964$

donc la probabilité que l'individu soit atteint et que le test soit positif est $0,36$ à 10^{-3} près.

5. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,36 \times 0,999 + 0,64 \times 0,005 = 0,35964 + 0,0032 = 0,36284$

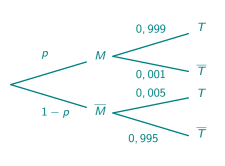
donc la probabilité que l'individu ait un test positif est $0,363$ à 10^{-3} près.

6. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,35964}{0,36284} \approx 0,991$

7. Puisque $P_T(M) \approx 0,991 > 0,95$, le test est considéré comme fiable.

Partie B : Dépistage sur une population cible

1. Voici l'arbre pondéré complété :



2. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = p \times 0,999 + (1 - p) \times 0,005 = 0,999p + 0,005 - 0,005p = 0,994p + 0,005$

3. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{p \times 0,999}{0,994p + 0,005}$

4. Le test est fiable si $P_T(M) > 0,95$:

$\dfrac{0,999p}{0,994p + 0,005} > 0,95 \iff 0,999p > 0,95(0,994p + 0,005) \iff 0,999p > 0,9443p + 0,00475 \iff 0,0547p > 0,00475 \iff p > \dfrac{0,00475}{0,0547} \approx 0,087$ donc, le test est fiable si $p > 0,087$ (soit 8,7%).