Etudes de fonctions

I. Le nombre dérivé et la tangente

1. Interprétation géométrique du nombre dérivé

Définition 1

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point $A(a; f(a))$.

Remarque 1

Ainsi le nombre dérivé de f en a mesure la "pente" de la courbe au point d'abscisse a.

On rappelle que :

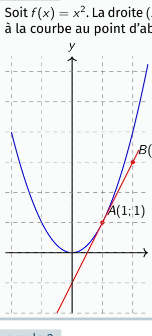
Propriété 1

Le coefficient directeur m d'une droite (AB) est donné par la formule :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple 1

Soit $f(x) = x^2$. La droite (AB) ci-dessous est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.



1. Calculer le coefficient directeur de la tangente (AB)

$$m = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

2. Que vaut $f'(1)$? $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en A, donc $f'(1) = 2$.

Exemple 2

Déterminer graphiquement le nombre dérivé et l'équation de la tangente à partir de la courbe d'une fonction f.

Exemple vidéo (Y. Monka)

2. Signe du nombre dérivé

Propriété 2

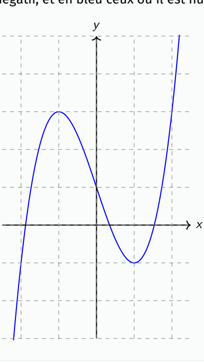
- Si la tangente en A "monte" alors $f'(a) > 0$
- Si la tangente en A "descend" alors $f'(a) < 0$
- Si la tangente en A est horizontale alors $f'(a) = 0$

Exemple 3

Si $f'(2) = 3$, la tangente au point d'abscisse 2 a un coefficient directeur égal à $3 > 0$: elle monte.

Exemple 4

Sur la courbe ci-dessous, colorier en vert les points de la courbe où le nombre dérivé est positif, en rouge ceux où il est négatif, et en bleu ceux où il est nul.



Voir les tangentes avec cette animation (bouger le point)

3. Équation réduite de la tangente

Propriété 3

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple 5

Soit $f(x) = x^2$. Quelle est l'équation de la tangente au point d'abscisse $a = 1$?

- $f(1) = 1^2 = 1$
- $f'(1) = 2$ vu l'exemple précédent
- L'équation de la tangente est :

$$\begin{aligned} y &= 2(x-1)+1 \\ y &= 2x-2+1 \\ y &= 2x-1 \end{aligned}$$

Exemple 6

La fonction $f(x) = 3x^2 - 1$ a pour nombre dérivé en 2 : $f'(2) = 12$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.
On a $f(2) = 3 \times 2^2 - 1 = 11$; et d'après l'énoncé $f'(2) = 12$. Donc l'équation de la tangente est :

$$\begin{aligned} y &= 12(x-2)+11 \\ y &= 12x-24+11 \\ y &= 12x-13 \end{aligned}$$

II. Calcul de dérivées

Des formules de dérivation permettent de calculer la dérivée d'une fonction à partir de l'expression de cette fonction.

1. Dérivée d'une fonction monôme

Propriété 4

Formules de dérivation :

- Si $f(x) = k$ (constante), alors $f'(x) = 0$
- Si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$
- Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$
- Si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$
- Si $f(x) = ax^n$ (n un entier ≥ 1, a un réel), alors $f'(x) = nax^{n-1}$

Exemple 7

- $f(x) = 5$; $f'(x) = 0$
- $f(x) = 3x^2$; $f'(x) = 6x$
- $f(x) = -2x^3$; $f'(x) = -6x^2$

2. Opérations sur les dérivées

Propriété 5

Soient u et v deux fonctions dérivables et k une constante.

- Si $f(x) = u(x) + v(x)$, alors $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- Si $f(x) = k \times u(x)$, alors $f'(x) = k \times u'(x)$

Exemple 8

Soit $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$. Déterminer $f'(x)$.
On utilise les formules de dérivation :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times (3x^2) - 5 \times (2x) + 3 \times 1 - 0 \\ &= 6x^2 - 10x + 3 \end{aligned}$$

Exemple 9

Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 pour la fonction $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$.

1) Calcul de $f(1)$:

$$f(1) = 3 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1 = 3 - 4 - 1 = -2$$

2) Calcul de $f'(x)$ puis de $f'(1)$:

$$f'(x) = 6x - 4$$

$$f'(1) = 6 \times 1 - 4 = 2$$

3) Équation de la tangente :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= 2(x-1) + (-2) \\ &= 2x - 2 - 2 \\ &= 2x - 4 \end{aligned}$$

Correction vidéo ici (Y. Monka)

Exemple 10

Vidéo : exemples de dérivées de fonction

Exemple 11

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7$
$f'(x) = 9x^2 + 4x - 4$

Correction vidéo

3. Dérivée de la fonction inverse

Aux formules déjà connues en première s'ajoute en terminale la dérivée de la fonction inverse :

Propriété 6

Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Exemple 12

Calculer $f'(2)$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

Exemple 13

Soit $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$. Calculer $g'(x)$.
On utilise les formules de dérivation et les propriétés des combinaisons linéaires :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times (2x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 6x - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Donc,

$$g'(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$$

III. Sens de variation et extremums

1. Lien entre signe de la dérivée et variations

Théorème 7

Sur un intervalle :

- f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$
- f est décroissante si et seulement si $f'(x) \leq 0$
- f est constante si et seulement si $f'(x) = 0$

Autrement dit :

Propriété 8

Le signe de la dérivée permet de connaître le sens de variation de la fonction.

Exemple 14

Soit $f(x) = x^2 - 4x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x - 4$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$
Donc $f'(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 2[$.

3. En déduire les variations de f. D'après le signe de f' :
- f est décroissante sur $]-\infty; 2]$
- f est croissante sur $[2; +\infty[$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

2. Détermination des extremums

Définition 2

Un extremum est un maximum ou un minimum de la fonction.

Propriété 9

Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum en a :

- Si f' passe du positif au négatif, alors $f(a)$ est un maximum
- Si f' passe du négatif au positif, alors $f(a)$ est un minimum

Exemple 15

Dans l'exemple précédent, f admet un **minimum** en $a = 2$, qui vaut $f(2) = -4$.

IV. Étude de fonctions

Méthode 1

Pour déterminer les variations d'une fonction f sur un intervalle :

1. Calculer la dérivée $f'(x)$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle
3. En déduire les variations de f sur l'intervalle avec le théoreme

1. Fonctions polynômes de degré 2 et 3

Exemple 16

Déterminer les variations de la fonction $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le maximum de f

1) Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = -2x + 6$$

2) Étude du signe de $f'(x)$:
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
Tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3) Calcul de $f(3)$:

$$f(3) = -(3)^2 + 6 \times 3 - 5 = -9 + 18 - 5 = 4$$

4) Tableau de variations :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	

Conclusion : f est croissante sur $]-\infty; 3]$ et décroissante sur $[3; +\infty[$.
f admet un maximum en $x = 3$, qui vaut $f(3) = 4$.

Exemple 17

Étude complète de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-2; 2]$.

1. Calculer $f'(x)$ et la factoriser.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x^2 - 1) \\ &= 3(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

car on a reconnu la formule :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2; 2]$. $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$
On utilise un tableau de signes pour étudier le signe du produit :

x	-2		-1		1		2
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc :
- $f'(x) > 0$ sur $[-2; -1[$ et $]1; 2]$
- $f'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 1$
- $f'(x) < 0$ sur $]-1; 1[$

3. En déduire les variations de f sur $[-2; 2]$. D'après le signe de f' :
- f est croissante sur $[-2; -1]$
- f est décroissante sur $[-1; 1]$
- f est croissante sur $[1; 2]$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau de variations :

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

4. Déterminer les extremums de f. f' s'annule en $x = -1$ et $x = 1$ en changeant de signe.

Maximum en $x = -1$:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

Minimum en $x = 1$:

$$f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

Exemple 18

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1. a) Calculer la fonction dérivée de f.
   b) Démontrer que $f'(x) = 3(x+4)(x-1)$.
2. Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.

1.a) Calcul de la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12 \\ &= 3x^2 + 9x - 12 \end{aligned}$$

1.b) Factorisation :
On développe $3(x+4)(x-1)$:

$$\begin{aligned} 3(x+4)(x-1) &= 3(x^2 - x + 4x - 4) \\ &= 3(x^2 + 3x - 4) \\ &= 3x^2 + 9x - 12 \end{aligned}$$

Ainsi : $f'(x) = 3(x+4)(x-1)$.

2) Signe de f' :
On utilise le produit pour étudier le signe de $f'(x) = 3(x+4)(x-1)$.
Tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) Tableau de variations :
Calcul des valeurs : $f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2}(-4)^2 - 12(-4) + 5 = -64 + 72 + 48 + 5 = 61$
$f(1) = 1 + \frac{9}{2} - 12 + 5 = -\frac{3}{2}$
Le signe de f' permet de dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	61	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

Correction vidéo ici :

2. Fonctions avec la fonction inverse

Exemple 19

Soit $g(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$

1. Calculer $g'(x)$. On utilise les formules de dérivation :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{x^2} \end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation $g'(x) = 0$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$
Donc $x = 2$ (car $x > 0$)

3. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$. $g'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$.
Comme $x^2 > 0$ pour tout $x > 0$, le signe de $g'(x)$ dépend de $x^2 - 4$.
- $x^2 - 4 < 0$ sur $]0; 2[$ donc $g'(x) < 0$
- $x^2 - 4 > 0$ sur $]2; +\infty[$ donc $g'(x) > 0$

4. En déduire les variations de g et ses extremums. g est décroissante sur $]0; 2[$ et croissante sur $]2; +\infty[$.
g admet un minimum en $x = 2$: $g(2) = 2 + \frac{4}{2} = 2 + 2 = 4$

Exemple 20

Etudier les variations de la fonction $f(x) = 1 - 2x - \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Correction video (Y. Monka)

3. Applications : prix unitaire et coût moyen

Définition 3

Le coût moyen de production de x articles est :

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

où $C(x)$ est le coût total.

Exemple 21

Une entreprise produit x articles avec un coût total $C(x) = 0,1x^2 + 10x + 500$.

1. Calculer le coût moyen $C_m(x)$. Le coût moyen est :

$$\begin{aligned} C_m(x) &= \frac{C(x)}{x} \\ &= \frac{0,1x^2 + 10x + 500}{x} \\ &= 0,1x + 10 + \frac{500}{x} \end{aligned}$$

2. Calculer $C_m'(x)$. On utilise les formules de dérivation :

$$\begin{aligned} C_m'(x) &= 0,1 + 0 - \frac{500}{x^2} \\ &= 0,1 - \frac{500}{x^2} \end{aligned}$$

3. Résoudre l'équation $C_m'(x) = 0$ pour trouver le minimum du coût moyen. $C_m'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,1 - \frac{500}{x^2} = 0$
$\Leftrightarrow 0,1 = \frac{500}{x^2}$
$\Leftrightarrow 0,1x^2 = 500$
$\Leftrightarrow x^2 = 5000$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{5000} \approx 71$ (car $x > 0$)

4. Conclure. Il faut produire environ 71 articles pour minimiser le coût moyen.