Exercices - Chapitre 10

Exercices de type bac

Terminale - Spécialité Mathématiques

Exercice 1 1. a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$: $f'(x)=\mathrm{e}^{x}\times\sin(x)+\mathrm{e}^{x}\times\cos(x)=\mathrm{e}^{x}(\sin(x)+\cos(x))$.

b) Par connaissance des fonctions trigonométriques, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x)\geqslant 0$ et $\sin(x)\geqslant 0$

On précise que d'une part, $\sin(x)=0$ seulement pour $x=0$, et $cos(0)=1$, et d'autre part, $\cos(x)=0$ seulement pour $x=\frac{\pi}{2}$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, donc les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas en même temps.

La somme de deux réels positifs, dont l'un au moins est strictement positif est strictement positive, donc :

pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x)+\sin(x)>0$.

D'autre part, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x}>0$

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)>0$ en tant que produit de deux facteurs strictement positifs, donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. a) L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=f'(0)x+f(0)$.

$f(0)=\mathrm{e}^{0}\sin(0)=1\times 0=0$; (donné dans l'énoncé)

$f'(0)=\mathrm{e}^{0}(\sin(0)+\cos(0))=1\times(0+1)=1$ (donné dans l'énoncé)

L'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc $y=1x+0$ soit $y=x$.

b) En anticipant la question **3.**, on va étudier la convexité de la fonction sur $[0\,;\,\pi]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$:

$$\begin{aligned}f''(x)&=\mathrm{e}^{x}(\sin(x)+\cos(x))+\mathrm{e}^{x}(\cos(x)-\sin(x))\\&=\mathrm{e}^{x}(\sin(x)+\cos(x)+\cos(x)-\sin(x))\\&=2\,\mathrm{e}^{x}\cos(x)\end{aligned}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x)>0$

d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier ici, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, d'équation $y=x$ (d'après la question précédente).

On a donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\mathrm{e}^{x}\sin(x)\geqslant x$$

3. On a vu précédemment que la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x=\frac{\pi}{2}$ donc le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

Exercice 2 1. Soit y une fonction constante, donc $y(x)=k$ où k est une constante.

Alors $y'(x)=0$ pour tout x.

Si y est solution de (E_0), alors $y'=y$, donc :

$$0=k$$

Par conséquent, $k=0$, et l'unique fonction constante solution est la fonction nulle $y(x)=0$.

2. L'équation différentielle $y'=y$ est de la forme $y'-y=0$.

Les solutions sont de la forme :

$$y(x)=C\,\mathrm{e}^{x}$$

où C est une constante réelle quelconque.

3. Calculons $h'(x)$ pour $h(x)=2\cos(x)+\sin(x)$:

$$h'(x)=-2\sin(x)+\cos(x)$$

Vérifions que h est solution de (E) :

$$\begin{aligned}h'(x)&=-2\sin(x)+\cos(x)\\h(x)-\cos(x)-3\sin(x)&=2\cos(x)+\sin(x)-\cos(x)-3\sin(x)\\&=\cos(x)-2\sin(x)\\&=h'(x)\end{aligned}$$

Donc h est bien solution de (E).

4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sens direct : Supposons que f est solution de (E).

Alors $f'(x)=f(x)-\cos(x)-3\sin(x)$ pour tout x.

Posons $u=f-h$. Calculons u' :

$$\begin{aligned}u'(x)&=f'(x)-h'(x)\\&=[f(x)-\cos(x)-3\sin(x)]-[-2\sin(x)+\cos(x)]\\&=f(x)-\cos(x)-3\sin(x)+2\sin(x)-\cos(x)\\&=f(x)-2\cos(x)-\sin(x)\\&=f(x)-h(x)\\&=u(x)\end{aligned}$$

Donc $f-h$ est solution de (E_0).

Réciproquement : Supposons que $f-h$ est solution de (E_0).

Alors $(f-h)'=f-h$, donc $f'-h'=f-h$.

D'où :

$$\begin{aligned}f'(x)&=f(x)-h(x)+h'(x)\\&=f(x)-[2\cos(x)+\sin(x)]+[-2\sin(x)+\cos(x)]\\&=f(x)-\cos(x)-3\sin(x)\end{aligned}$$

Donc f est solution de (E).

5. D'après la question 4, f est solution de (E) si et seulement si $f-h$ est solution de (E_0).

D'après la question 2, les solutions de (E_0) sont de la forme $C\,\mathrm{e}^{x}$ où $C\in\mathbb{R}$.

Donc $f(x)-h(x)=C\,\mathrm{e}^{x}$, ce qui donne :

$$f(x)=C\,\mathrm{e}^{x}+h(x)=C\,\mathrm{e}^{x}+2\cos(x)+\sin(x)$$

Les solutions de (E) sont donc :

$$y(x)=C\,\mathrm{e}^{x}+2\cos(x)+\sin(x),\quad C\in\mathbb{R}$$

6. On cherche g solution de (E) telle que $g(0)=0$.

D'après la question 5, $g(x)=C\,\mathrm{e}^{x}+2\cos(x)+\sin(x)$.

La condition $g(0)=0$ donne :

$$C\,\mathrm{e}^{0}+2\cos(0)+\sin(0)=0$$

$$C+2+0=0$$

$$C=-2$$

Donc :

$$g(x)=-2\,\mathrm{e}^{x}+2\cos(x)+\sin(x)$$

Exercice 3 **Partie A**

1. Pour tout réel x on a $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ donc $-1\leqslant-\cos x\leqslant 1$. On a également $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, par conséquent :

$$-1-1+1\leqslant-\cos x+\sin x+1\leqslant 1+1+1\Leftrightarrow-1\leqslant-\cos x+\sin x+1$$

En multipliant membre à membre le dernier encadrement par e^{-x} (qui est strictement positif) on obtient alors :

$$-\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 3\,\mathrm{e}^{-x}$$

2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$. Comme $-\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 3\,\mathrm{e}^{-x}$, le théorème « des gendarmes » permet alors de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3. Par dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\mathrm{e}^{-x}(-(-\sin x)+\cos x)+\\&\quad(-\mathrm{e}^{-x})(-\cos x+\sin x+1)\\&=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x-1)\\&=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x-1)\\&=\mathrm{e}^{-x}(2\cos x-1).\end{aligned}$$

4. a) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2\cos x-1$. Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, et en s'aidant d'un cercle trigonométrique :

$$2\cos x-1\geqslant 0\ \Leftrightarrow\ \cos x\geqslant\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

Par conséquent :

- sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{3}\right[$, $f'(x)<0$;
- sur $\left]-\frac{\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\right]$, $f'(x)>0$;
- sur $\left]\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$, $f'(x)<0$;
- en $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$, $f'(x)=0$.

5. On déduit de la question précédente que :

- sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{3}\right[$, f est décroissante;
- sur $\left]-\frac{\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\right]$, f est croissante;
- sur $\left]\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$, f est décroissante.

Partie B

1. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\mathrm{e}^{-x}(-\cos x+\sin x+1)-(-\mathrm{e}^{-x})\cos x\\&=\mathrm{e}^{-x}(-\cos x+\sin x+1+\cos x)\\&=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+1).\end{aligned}$$

Or, pour tout réel x :

- $\mathrm{e}^{-x}>0$,
- $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ donc $\sin x+1\geqslant 0$.

On a donc, pour tout réel x, $f(x)-g(x)\geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

2. a) Domaine $\mathcal{D}$ hachuré :

3. Sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ est donc donnée, en unités d'aire, par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)-g(x)\,\mathrm{d}xx\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{e}^{-x}(\sin x+1)\,\mathrm{d}xx\\&=\Big[H(x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\\&=H\left(\frac{3\pi}{2}\right)-H\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\left(-\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2}-\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}}-\left(-\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right.\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

L'unité graphique est de 2 cm, l'unité d'aire est donc de 4 cm². Par conséquent, une valeur approchée de l'aire du logo est, à 10^{-2} près :

$$4\times\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)\approx 9{,}6\ \text{cm}^2.$$