22/01/26

NOM : Devoir

Terminale - Spécialité Mathématiques

Exercice 1 (4,5 points)

1. Un podium est un arrangement de 3 coureurs parmi 12 (l'ordre compte).

Nombre de podiums possibles :

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$$

2. Pour avoir exactement 2 coureurs français sur le podium :

• On choisit 2 places parmi les 3 pour les français : $\binom{3}{2} = 3$ façons
• On place 2 français sur ces 2 places : $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ façons
• On place 1 non-français sur la place restante : 7 façons (il y a $12 - 5 = 7$ non-français)

Nombre de podiums : $3 \times 20 \times 7 = 420$

Autre méthode :
• 1er français, 2e français, 3e non-français : $5 \times 4 \times 7 = 140$
• 1er français, 2e non-français, 3e français : $5 \times 7 \times 4 = 140$
• 1er non-français, 2e français, 3e français : $7 \times 5 \times 4 = 140$

Total : $140 + 140 + 140 = 420$

3. Par le complémentaire, on calcule le nombre de podiums sans français :

Podiums sans français : $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

Podiums avec au moins un français : $1\,320 - 210 = 1\,110$

Exercice 2 (6,5 points)

1. Le nombre de tirages possibles de 4 cartes parmi 52 est :

$$\binom{52}{4} = \frac{52!}{4! \times 48!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 270\,725$$

2. Pour avoir exactement 3 carreaux :

• On choisit 3 carreaux parmi les 13 carreaux : $\binom{13}{3}$ façons
• On choisit 1 carte parmi les 39 cartes non-carreaux : $\binom{39}{1}$ façons

$$\binom{13}{3} \times \binom{39}{1} = 286 \times 39 = 11\,154$$

3. Pour avoir au moins un as, on calcule par le complémentaire (aucun as) :

• Nombre de tirages sans as (4 cartes parmi les 48 non-as) : $\binom{48}{4} = 194\,580$
• Nombre de tirages avec au moins un as : $270\,725 - 194\,580 = 76\,145$

4. Pour avoir exactement 2 rois et 2 dames :

• On choisit 2 rois parmi les 4 rois : $\binom{4}{2}$ façons
• On choisit 2 dames parmi les 4 dames : $\binom{4}{2}$ façons

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 6 \times 6 = 36$$

5. Probabilité d'obtenir au moins un as :

$$P(\text{au moins 1 as}) = \frac{76\,145}{270\,725} \approx 0,281$$

Exercice 3 (10 points)

Partie A

1. On est en situation d'équiprobabilité, les proportions sont assimilables à des probabilités.

2. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,6 \times 0,02 = 0,012$

Cela signifie que 1,2 % des composants produits par l'entreprise proviennent de la chaîne A et présentent un défaut.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,012 + 0,020 = 0,032$$

Donc 3,2 % des composants produits par l'entreprise présentent un défaut.

4. On cherche $P_D(A)$.

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,012}{0,032} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Si un composant est défectueux, la probabilité qu'il provienne de la chaîne A est de 37,5 %.

Partie B

1. a) On vérifie les conditions de la loi binomiale :
• On répète $n = 40$ fois une épreuve de Bernoulli (le composant est défectueux ou non)
• La probabilité de succès (composant défectueux) est $p = 0,03$ (la même à chaque tirage)
• Les tirages sont indépendants (assimilés à un tirage avec remise)
• X compte le nombre de succès

Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0,03)$.

b) $P(X = 2) = \binom{40}{2} \times 0,03^2 \times 0,97^{38} \approx 0,221$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,97^{40} \approx 0,704$

d) $E(X) = n \times p = 40 \times 0,03 = 1,2$

En moyenne, on s'attend à avoir 1,2 composants défectueux dans un échantillon de 40 composants.

2. a) X_n suit la loi $\mathcal{B}(n; 0,03)$

$p_n = P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0,97^n$

b) On cherche n tel que $1 - 0,97^n \geq 0,95$

$1 - 0,97^n \geq 0,95 \iff 0,97^n \leq 0,05$

$\iff n \ln(0,97) \leq \ln(0,05)$

$\iff n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,97)}$ (l'inégalité change car $\ln(0,97) < 0$)

$\iff n \geq 98,352$

La plus petite valeur de n est donc $n = 99$.