Exercices : études de fonctions

Terminale STMG - Mathématiques

Nombre dérivé et tangente

Exercice 1 1. Le nombre dérivé en un point correspond au coefficient directeur de la tangente en ce point.

En A d'abscisse -1 : La tangente monte d'une unité verticale pour une unité horizontale, donc $f'(-1) = 1$.

En B d'abscisse 1 : La tangente descend d'une unité verticale pour une unité horizontale, donc $f'(1) = -1$.

En C d'abscisse 3 : La tangente monte de deux unités verticales pour une unité horizontale, donc $f'(3) = 2$.

2. Le nombre dérivé $f'(1) = -1$ est négatif. Cela signifie que la tangente en B est décroissante (elle descend quand on se déplace de gauche à droite).

Exercice 2 1. En lisant le coefficient directeur de chaque tangente :

En D d'abscisse 0 : La tangente monte de 2 unités pour 1 unité horizontale, donc $g'(0) = 2$.

En E d'abscisse 2 : La tangente est horizontale, donc $g'(2) = 0$.

En F d'abscisse 4 : La tangente descend de 2 unités pour 1 unité horizontale, donc $g'(4) = -2$.

2. Le nombre dérivé $g'(2) = 0$ est nul. La tangente en E est horizontale, ce qui signifie que la fonction g admet un extremum (ici un maximum) en $x = 2$.

3. On constate que $g'(0) = 2$ et $g'(4) = -2$. Ces deux nombres dérivés sont opposés : $g'(0) = -g'(4)$. Cela traduit une certaine symétrie des pentes par rapport au point E où la dérivée s'annule.

Exercice 3 1. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici, $a = 2$, $f(2) = 5$ et $f'(2) = -3$, donc :

$$y = -3(x-2) + 5$$
$$y = -3x + 6 + 5$$
$$y = -3x + 11$$

2. Le coefficient directeur de la tangente est $f'(2) = -3 < 0$, donc la tangente descend.

Exercice 4 1. Le coefficient directeur de la tangente passant par $A(1;4)$ et $B(3;10)$ est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10-4}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

2. Le coefficient directeur de la tangente en A est égal au nombre dérivé en ce point, donc $f'(1) = 3$.

3. L'équation de la tangente en $A(1;4)$ avec $f'(1) = 3$ est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$y = 3(x-1) + 4$$
$$y = 3x - 3 + 4$$
$$y = 3x + 1$$

Exercice 5 1. $f(3) = 3^2 = 9$

2. $f'(3) = 2 \times 3 = 6$

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3)$$
$$y = 6(x-3) + 9$$
$$y = 6x - 18 + 9$$
$$y = 6x - 9$$

Exercice 6 1. **VRAI.** Si $f'(5) = 0$, le coefficient directeur de la tangente est nul, donc la tangente est bien horizontale.

2. **FAUX.** Si $f'(2) = 4 > 0$, alors la tangente au point d'abscisse 2 monte (elle ne descend pas).

3. **VRAI.** Le coefficient directeur de la tangente en un point d'abscisse a est égal à $f'(a)$. Donc si le coefficient directeur vaut -2 en $x = -1$, alors $f'(-1) = -2$.

Calcul de dérivées

Exercice 7 1. $f(x) = 7$ est une fonction constante, donc $f'(x) = 0$

2. $g(x) = 5x^2$, donc $g'(x) = 5 \times 2x = 10x$

3. $h(x) = -3x^3$, donc $h'(x) = -3 \times 3x^2 = -9x^2$

4. $k(x) = 4x^5$, donc $k'(x) = 4 \times 5x^4 = 20x^4$

Exercice 8 1. $f'(x) = 2\times 3x^2 - 5\times 2x + 7 - 0 = 6x^2 - 10x + 7$

2. $g'(x) = -2x + 4$

3. $h'(x) = 6 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 1 = 18x^2 + 4x - 1$

4. $k'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

Exercice 9 1. La formule de la dérivée est : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

2. • $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$
• $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$
• $f'(4) = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$

3. Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$, donc $-\frac{1}{x^2} < 0$. La dérivée $f'(x)$ est toujours négative sur $]0;+\infty[$.

Exercice 10 1. $f'(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$

2. $g'(x) = -2 - \frac{5}{x^2}$

3. $h'(x) = 3x^2 - 4 - \frac{2}{x^2}$

Exercice 11 1. $f'(x) = 8x - 8$

2. $f(2) = 4 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = 16 - 16 + 1 = 1$

$f'(2) = 8 \times 2 - 8 = 16 - 8 = 8$

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$y = 8(x-2) + 1$$
$$y = 8x - 16 + 1$$
$$y = 8x - 15$$

Sens de variation et extremums

Exercice 12 1. La fonction f est croissante quand $f'(x) > 0$, donc sur les intervalles $]-\infty;-2[$ et $]3;+\infty[$.

2. La fonction f est décroissante quand $f'(x) < 0$, donc sur l'intervalle $]-2;3[$.

3. La fonction f admet des extremums aux points où la dérivée s'annule en changeant de signe :
• En $x = -2$: f' passe du positif au négatif, donc f admet un **maximum local** en $x = -2$.
• En $x = 3$: f' passe du négatif au positif, donc f admet un **minimum local** en $x = 3$.

Exercice 13 1. $g'(-1) = 0$ et $g'(2) = 0$ car la fonction admet des extremums en ces points (la tangente est horizontale).

2. D'après le tableau de variations :
• Sur $]-\infty;-1[$, g est croissante donc $g'(x) > 0$
• Sur $]-1;2[$, g est décroissante donc $g'(x) < 0$
• Sur $]2;+\infty[$, g est croissante donc $g'(x) > 0$

3. Tableau de signes de $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Étude complète de fonctions

Exercice 14 1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

2. $f'(x) = 2x - 6 = 2(x-3)$
• Si $x < 3$: $x - 3 < 0$ donc $f'(x) < 0$
• Si $x = 3$: $f'(x) = 0$
• Si $x > 3$: $x - 3 > 0$ donc $f'(x) > 0$

3. Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction f est décroissante sur $]-\infty;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$. Elle admet un minimum en $x = 3$.

Exercice 15 1. $f'(x) = 2x + 4$

2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$f'(x) = 2(x+2)$
• Si $x < -2$: $f'(x) < 0$
• Si $x = -2$: $f'(x) = 0$
• Si $x > -2$: $f'(x) > 0$

3. Calculons $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 7 = 4 - 8 + 7 = 3$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	3	$\nearrow$	

4. La fonction f admet un **minimum** en $x = -2$, et ce minimum vaut $f(-2) = 3$.

Exercice 16 1. $f'(x) = -4x + 8$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

2. $f'(x) = -4x + 8 = -4(x-2)$
• Si $x < 2$: $x - 2 < 0$ donc $-4(x-2) > 0$, ainsi $f'(x) > 0$
• Si $x = 2$: $f'(x) = 0$
• Si $x > 2$: $x - 2 > 0$ donc $-4(x-2) < 0$, ainsi $f'(x) < 0$

3. Calculons $f(2) = -2(2)^2 + 8(2) - 3 = -8 + 16 - 3 = 5$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	5	$\searrow$	

4. Le maximum de f est atteint en $x = 2$ et vaut $f(2) = 5$.

Exercice 17 1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

2. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

3. Étude du signe du produit $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Calculons : $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	

5. La fonction f admet un **maximum local** en $x = 1$ valant $f(1) = 5$ et un **minimum local** en $x = 3$ valant $f(3) = 1$.

Exercice 18 1. $g'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x+3)(x-1)$

2. Étude du signe de $g'(x) = 3(x+3)(x-1)$ sur $[-5;3]$:

x	-5		-3		1		3
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Calculons :
• $g(-5) = -125 + 75 + 45 + 2 = -3$
• $g(-3) = -27 + 27 + 27 + 2 = 29$
• $g(1) = 1 + 3 - 9 + 2 = -3$
• $g(3) = 27 + 27 - 27 + 2 = 29$

Tableau de variations :

x	-5		-3		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	-3	$\nearrow$	29	$\searrow$	-3	$\nearrow$	29

4. Sur $[-5;3]$, la fonction g admet :
• un **maximum local** en $x = -3$ valant $g(-3) = 29$
• un **minimum local** en $x = 1$ valant $g(1) = -3$

Exercice 19 1. $h'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

2. $h'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3) = -3(x-1)(x-3)$

3. Étude du signe de $h'(x) = -3(x-1)(x-3)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. Calculons : $h(1) = -1 + 6 - 9 + 5 = 1$ et $h(3) = -27 + 54 - 27 + 5 = 5$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h		$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	

5. La fonction h admet un **minimum local** en $x = 1$ valant $h(1) = 1$ et un **maximum local** en $x = 3$ valant $h(3) = 5$.

Exercice 20 1. $f'(x) = 2 + \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 + 8}{x^2}$

2. Sur $]0;+\infty[$, on a $x^2 > 0$ et $2x^2 + 8 > 0$ (somme de termes positifs).

Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

3. Puisque $f'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4. La fonction f ne possède pas d'extremum sur $]0;+\infty[$ car elle est strictement croissante.

Exercice 21 1. $h'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$

2. $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Sur $]0;+\infty[$, seule la solution $x = 3$ convient.

3. Sur $]0;+\infty[$, on a $x^2 > 0$ et $x + 3 > 0$. Le signe de $h'(x)$ dépend donc du signe de $x - 3$:
• Si $0 < x < 3$: $x - 3 < 0$ donc $h'(x) < 0$
• Si $x = 3$: $h'(x) = 0$
• Si $x > 3$: $x - 3 > 0$ donc $h'(x) > 0$

4. Calculons $h(3) = 3 + \frac{9}{3} = 3 + 3 = 6$

Tableau de variations :

x	0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h		$\searrow$	6	$\nearrow$	

5. Le minimum de h sur $]0;+\infty[$ est atteint en $x = 3$ et vaut $h(3) = 6$.

Exercice 22 1. $f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$

2. $f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$

3. Sur $]0;+\infty[$, on a $x^2 > 0$ et $x + 2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $x - 2$:
• Si $0 < x < 2$: $x - 2 < 0$ donc $f'(x) < 0$
• Si $x = 2$: $f'(x) = 0$
• Si $x > 2$: $x - 2 > 0$ donc $f'(x) > 0$

4. Calculons $f(2) = 2(2) + \frac{8}{2} = 4 + 4 = 8$

Tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	8	$\nearrow$	

5. Le minimum de f sur $]0;+\infty[$ est atteint en $x = 2$ et vaut $f(2) = 8$.

Applications économiques

Exercice 23 1. $C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0,2x^2 + 15x + 400}{x} = 0,2x + 15 + \frac{400}{x}$

2. $C_m'(x) = 0,2 - \frac{400}{x^2}$

3. $C_m'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,2 - \frac{400}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 0,2 = \frac{400}{x^2}$

$\Leftrightarrow 0,2x^2 = 400 \Leftrightarrow x^2 = 2000 \Leftrightarrow x = \sqrt{2000} \approx 44,7$

L'entreprise doit produire environ 45 articles pour minimiser le coût moyen.

4. $C_m(\sqrt{2000}) = 0,2\sqrt{2000} + 15 + \frac{400}{\sqrt{2000}}$

$= 0,2 \times 44,72 + 15 + \frac{400}{44,72} \approx 8,94 + 15 + 8,94 \approx 32,88$ euros

Le coût moyen minimal est d'environ 32,88 euros par article.

Exercice 24 1. $B'(x) = -x + 50$

2. $B'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = 50$

3. $B'(x) = -x + 50 = -(x - 50)$
• Si $0 \leq x < 50$: $x - 50 < 0$ donc $B'(x) > 0$
• Si $x = 50$: $B'(x) = 0$
• Si $50 < x \leq 120$: $x - 50 > 0$ donc $B'(x) < 0$

4. Calculons :
• $B(0) = -200$ euros (perte initiale)
• $B(50) = -0,5(50)^2 + 50(50) - 200 = -1250 + 2500 - 200 = 1050$ euros
• $B(120) = -0,5(120)^2 + 50(120) - 200 = -7200 + 6000 - 200 = -1400$ euros

Tableau de variations :

x	0		50		120
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B	-200	$\nearrow$	1050	$\searrow$	-1400

5. Le bénéfice est maximal pour $x = 50$ articles vendus, et ce bénéfice maximal vaut $B(50) = 1050$ euros.