AP - 02/02/26

Première - Spécialité Mathématiques

Exercice 1 1. On utilise la formule de dérivation composée : $(u(ax+b))' = a \times u'(ax)$.

Ici, $u(x) = e^x$, donc $u'(x) = e^x$.

D'où : $f'(x) = 2e^{2x+3}$

2. On utilise la formule du produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

Avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$, on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$.

D'où : $g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2)e^x = x(x+2)e^x$

3. On utilise la formule du quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$, on a $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.

D'où : $h'(x) = \dfrac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{x e^x - e^x}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

Exercice 2 L'équation de la tangente en a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Pour $f(x) = e^x$, on a $f'(x) = e^x$.

Au point d'abscisse $a = 0$:

- $f(0) = e^0 = 1$
- $f'(0) = e^0 = 1$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = 1 \cdot (x - 0) + 1 = x + 1$$

Exercice 3 1. $g'(x) = e^x - 1$

Étude du signe : $g'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$

Comme $e^x > 1$ pour $x > 0$ et $e^x < 1$ pour $x < 0$:
- Si $x < 0$: $g'(x) < 0$
- Si $x > 0$: $g'(x) > 0$

2. Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction g est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

3. Calculons $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$

D'après le tableau de variations, g admet un minimum en $x = 0$ et $g(0) = 0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$, c'est-à-dire $g(x) \geqslant 0$.

4. Puisque $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x - x - 1 \geqslant 0$$

$$e^x \geqslant x + 1$$

Exercice 4 1. On utilise la formule du produit $(uv)' = u'v + uv'$.

Avec $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = e^x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot e^x + (2x-3) \cdot e^x \\ &= [2 + 2x - 3]e^x \\ &= (2x-1)e^x \end{aligned}$$

2. Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x - 1)$.

$2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

- Si $x < \frac{1}{2}$: $f'(x) < 0$
- Si $x > \frac{1}{2}$: $f'(x) > 0$

3. Tableau de variations :

Calculons $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} - 3\right)e^{1/2} = (1-3)e^{1/2} = -2e^{1/2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-2e^{1/2}$	$\nearrow$	

La fonction f est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 5 On utilise les propriétés : $e^a \times e^b = e^{a+b}$, $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ et $(e^a)^b = e^{ab}$.

1. $A = e^3 \times e^5 = e^{3+5} = e^8$
2. $B = \frac{e^7}{e^4} = e^{7-4} = e^3$
3. $C = (e^2)^3 = e^{2\times 3} = e^6$
4. $D = e^{x+2} \times e^{3-x} = e^{(x+2)+(3-x)} = e^{x+2+3-x} = e^5$
5. $E = \frac{e^{2x}}{e^{x-1}} = e^{2x-(x-1)} = e^{2x-x+1} = e^{x+1}$

Exercice 6 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $e^{2x} > 0$ (l'exponentielle est toujours strictement positive)
- $e^x + 1 > 0$ (somme de deux termes strictement positifs)

Donc $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On transforme l'expression :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \\ &= \frac{e^{2x} \times e^{-x}}{e^x \times e^{-x} + 1 \times e^{-x}} \\ &= \frac{e^{2x-x}}{e^{x-x} + e^{-x}} \\ &= \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \end{aligned}$$

3. On utilise la formule du quotient avec $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = e^x + 1$:

$u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = e^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{2x}(e^x + 1) - e^{2x} \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{2e^{3x} + 2e^{2x} - e^{3x}}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

Étude du signe :
- $e^{2x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $e^x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $(e^x + 1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.