Exercices - Chapitre 6

Exercices sur la fonction exponentielle

Première - Spécialité Mathématiques

Exercice 1 Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 4x - 3\exp(x)$
On trouve $f'(x) = 4 - 3\exp(x)$

2. $g(x) = (x-1)\exp(x)$
Dérivée d'un produit :
$u = x-1$ et $v = \exp(x)$ donc $u' = 1$ et $v' = \exp(x)$

$$g'(x) = \exp(x) + (x-1)\exp(x) = \exp(x)(1+x-1) = x\ \exp(x)$$

3. $h(x) = \dfrac{\exp(x)}{x}$
Dérivée d'un quotient :

$$h'(x) = \frac{\exp(x)\times x - \exp(x)}{x^2} = \frac{\exp(x)(x-1)}{x^2}$$

La vidéo ci-contre, de Yvan Monka, fournit une correction de cet exercice

Exercice 2 Pour les fonctions g et h de l'exercice 1, utiliser la fonction dérivée pour déterminer les variations de la fonction.

Les variations de g sont données par le signe de sa dérivée. Nous avons vu que $g'(x) = x\ e^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘		↗	

Les variations de h sont données par le signe de sa dérivée. Nous avons vu que $h'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$. Comme x^2 et e^x sont positifs, $h'(x)$ est du signe de $x-1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	$\|$	$-$		$+$	
h		↘	$\|$	↘		↗	

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, donner le sens de variation de la fonction.

1. $f(x) = x + e^x$ $f'(x) = 1 + e^x > 0$ (car $e^x > 0$) donc f est croissante.
2. $f(x) = (2x+3)e^x$ Dérivée d'un produit :

$$f'(x) = 2e^x + (2x+3)e^x = (2x+5)e^x$$

Les variations de f sont données par le signe de sa dérivée :

x	$-\infty$		$-2,5$		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

3. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ Dérivée d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

(car l'exponentielle est toujours positive, et le carré aussi) donc f est croissante (strictement) sur $\mathbb{R}$.

4. $f(x) = -x^2e^x$ Dérivée d'un produit :

$$f'(x) = -2x\,e^x + (-x^2)\times e^x = e^x(-2x - x^2) = -xe^x(2+x)$$

Les variations de f sont données par le signe de sa dérivée :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

5. $f(x) = e^{-x}$ $f(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. On utilise alors la formule de dérivée d'un inverse :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = \frac{-1}{e^x} < 0$$

donc la fonction f est décroissante (strictement) sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de la fonction exponentielle aux points d'abscisse 0 et 1.
Indication : rechercher dans votre cours sur le nombre dérivé la formule de l'équation de la tangente

Tangente en 0 : On sait que pour $f(x) = e^x$, on a $f'(x) = e^x$ donc $f(0) = f'(0) = e^0 = 1$. L'équation de la tangente est donc

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1\times x + 1 = x + 1$$

Tangente en 1 : $f(1) = f'(1) = e^1 = e$ L'équation de la tangente est donc

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = e\times(x-1) + e = e\times x$$

Exercice 5 Simplifier :

$$A = \frac{e^7\times e^{-4}}{e^5} \qquad B = \left(e^5\right)^{-6}\times e^3$$

Correction vidéo ici :

Exercice 6 Simplifier chacune des expressions :

1. $e^{x-5}\times e^{3-x}$
2. $\dfrac{e^{1+2x}}{e^{x-4}}$
3. $\left(\dfrac{e^{-x}}{e}\right)^2$

Correction vidéo ici :

Exercice 7 Simplifier les expressions suivantes (*utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle*) :

1. $(e^x)^5e^{-2x} = e^{5x}e^{-2x} = e^{5x-2x} = e^{3x}$
2. $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}} = e^{(2x+3)-(2x-1)} = e^4$
3. $e^{2x}\times e = e^{2x}\times e^1 = e^{2x+1}$
4. $\dfrac{e^{3x+1}}{e^{2x+1}} = e^{(3x+1)-(2x+1)} = e^x$
5. $\left(e^{x+1}\right)^3\times e^{-1} = e^{3(x+1)+(-1)} = e^{3x+2}$
6. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}} = e^{x-(-x)} + 1 = e^{2x} + 1$

Exercice 8 Etudier le **signe** des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = (x-3)e^x$ Comme $e^x > 0$, $f(x)$ est du signe de $x-3$: négatif sur $]-\infty; 3]$ et positif sur $[3; +\infty[$
2. $f(x) = (-4x+5)e^{-x}$ Même raisonnement qu'à la question précédente : $e^{-x} > 0$ donc il suffit d'étudier le signe de $-4x+5$. Or : $-4x+5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4} = 1,25$

x	$-\infty$		$1,25$		$+\infty$
$-4x+5$		$+$	0	$-$	

3. $f(x) = (2x+5)(e^x+3)$ Comme $e^x > 0$, a fortiori $e^x + 3 > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $2x+5$. Or : $2x+5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{2} = -2,5$

x	$-\infty$		$-2,5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4. $f(x) = 4xe^x - e^x$ On factorise $f(x)$:

$$f(x) = e^x(4x-1)$$

Comme $e^x > 0$, $f(x)$ est du signe de $4x-1$: négatif sur $]-\infty; \frac{1}{4}]$ et positif sur $[\frac{1}{4}; +\infty[$

Exercice 9 Résoudre les équations et inéquations :

1. $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{2x} = e^1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
3. $e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$
5. $e^{x^2} \geq e^{-x-1} \Leftrightarrow x^2 \geq -x-1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geq 0$
On calcule le discriminant associé :

$$\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$$

donc le signe de x^2+1+1 est constant, positif car $a = 1 > 0$. Ainsi l'inéquation $x^2+x+1 > 0$ est toujours vérifiée : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

Exercice 10 Etudier le *signe* de

$$f(x) = (e - e^x)(e^x - 1)$$

Indication : faire un tableau de signes On résout successivement :

1. $e - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^1 \geq e^x \Leftrightarrow 1 \geq x$
2. $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Ce qui nous permet ensuite de faire le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 11 1. Factoriser $X^2 + X - 2$ On calcule le discriminant associé : $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$
$x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$
Donc une factorisation est :

$$X^2 + X - 2 = (X+2)(X-1)$$

en effet c'est la formule $a(x-x_1)(x-x_2)$

2. En déduire une factorisation de

$$f(x) = e^{2x} + e^x - 2$$

On pose $X = e^x$, de sorte que $X^2 = e^{2x}$.
D'après la question précédente :

$$f(x) = (e^x + 2)(e^x - 1)$$

3. Etudier le *signe* de $f(x)$ On utilise la factorisation obtenue à la question précédente : $f(x) = (e^x+2)(e^x-1)$ a le même signe que $e^x - 1$ car, comme $e^x > 0$, alors $e^x + 2 > 0$.
Or $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Donc $f(x)$ est positif sur $[0; \infty[$ et négatif sur $]-\infty; 0]$

Exercice 12 Etudier les variations des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = 5e^{-3x}$ On utilise la formule de dérivée vue en cours :

$$(e^{kx})' = k\,e^{kx}$$

donc $f'(x) = 5\times(-3)e^{-3x} = -15e^{-3x} < 0$ Donc la fonction f est décroissante

2. $f(x) = 2e^{5x} + 3x$

$$f'(x) = 2\times 5\,e^{5x} + 3 = 10\,e^{5x} + 3 > 0$$

(car $e^{5x} > 0$) donc f est croissante

3. $f(x) = x - e^{-2x}$

$$f'(x) = 1 - (-2)\,e^{-2x} = 1 + 2\,e^{-2x} > 0$$

donc f est croissante

4. $f(x) = 3e^x - 3x$

$$f'(x) = 3\,e^x - 3 = 3(e^x - 1)$$

$f'(x)$ a donc le même signe que $e^x - 1$. On réutilise donc les méthodes vues précédemment sur la résolution des inéquations :

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

ce qui permet d'obtenir les variations de f données par le signe de sa dérivée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

5. $f(x) = 3x - e^{3x}$

$$f'(x) = 3 - 3\,e^{3x} = 3(1 - e^{3x})$$

$f'(x)$ a donc le même signe que $1 - e^{3x}$.

$$1 - e^{3x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{3x} \Leftrightarrow e^0 \geq e^{3x} \Leftrightarrow 0 \geq 3x \Leftrightarrow 0 \geq x$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1 - e^{3x}$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

6. $f(x) = e^{2x+1}$

$$f'(x) = 2\,e^{2x+1} > 0$$

donc f est croissante

7. $f(x) = 4e^{-3x+2}$

$$f'(x) = 4\times(-3)\,e^{-3x+2} = -12\,e^{-3x+2} < 0$$

donc f est décroissante

Exercice 13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4e^x - 6x$$

1. Calculer $f'(x)$, puis vérifier que :

$$f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 3)$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x - 6$$

On développe alors l'expression proposée :

$$\begin{aligned} 2(e^x - 1)(e^x + 3) &= 2(e^x\times e^x + 3\,e^x - e^x - 3) \\ &= 2(e^{2x} + 2\,e^x - 3) \\ &= 2\,e^{2x} + 4\,e^x - 6 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$. Comme $e^x > 0$, alors $e^x + 3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 1$ (qui a été étudié plusieurs fois)

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

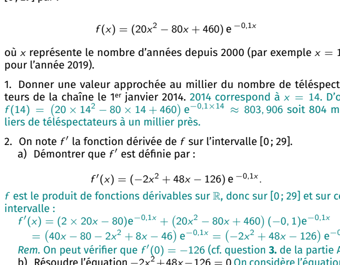
3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

Exercice 14 **Partie A**

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.

Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.



1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019. De 2000 à 2003, l'audience a baissé de 460 000 à 300 000 téléspectateurs, puis de 2003 à 2019 a régulièrement progressé à plus de 900 000 téléspectateurs.

2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014. On lit en 2014 environ 800 000 téléspectateurs.

3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A(0 ; 460) et B(3 ; 82), est la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.

Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par $(\mathcal{C})$? $f'(0)$ nombre dérivé de la fonction en 0 est le coefficient directeur de la droite (AB), soit :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{82 - 460}{3 - 0} = \frac{-378}{3} = -126.$$

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 29]$ par :

$$f(x) = (20x^2 - 80x + 460)\,e^{-0,1x}$$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014. 2014 correspond à $x = 14$. D'où $f(14) = (20\times 14^2 - 80\times 14 + 460)\,e^{-0,1\times 14} \approx 803,906$ soit 804 milliers de téléspectateurs à un millier près.

2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0; 29]$.

a) Démontrer que f' est définie par :

$$f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)\,e^{-0,1x}.$$

f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0; 29]$ et sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\times 20x - 80)e^{-0,1x} + (20x^2 - 80x + 460)(-0,1)e^{-0,1x} \\ &= (40x - 80 - 2x^2 + 8x - 46)\,e^{-0,1x} = (-2x^2 + 48x - 126)\,e^{-0,1x}. \end{aligned}$$

Rem. On peut vérifier que $f'(0) = -126$ (cf. question **3.** de la partie A.)

b) Résoudre l'équation $-2x^2 + 48x - 126 = 0$ On considère l'équation : $-2x^2 + 48x - 126 = 0$.
$-2x^2 + 48x - 126 = 0 \iff -x^2 + 24x - 63 = 0$.
Pour ce trinôme :
$\Delta = 24^2 - 4\times(-1)\times(-63) = 576 - 252 = 324 = 4\times 81 = 2^2\times 9^2 = (2\times 9)^2 = 18^2$.
$\Delta > 0$, donc l'équation du second degré a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-24 + 18}{2\times(-1)} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-24 - 18}{2\times(-1)} = 21.$$

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 29]$ et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0; 29]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité. On sait que le trinôme est du signe de $a = -1$ donc négatif sauf sur $[3; 21]$, où $f(x) \geq 0$.
La fonction est donc décroissante sauf sur l'intervalle $[3; 21]$ où elle est croissante.
On a $f(0) = 460$; $f(3) \approx 296$; $f(21) \approx 931$ et $f(29) \approx 826$. D'où le tableau de variations :

x	0		3		21		29
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	460	↘	296	↗	931	↘	826

d) Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier. Le tableau de variations de la fonction f montre que le maximum de téléspectateurs est de 931 milliers en 2021 ; la barre du million ne sera jamais atteinte entre 2000 et 2029.

Exercice 15 Le but de cet exercice est de déterminer la position relative[1] de la courbe de la fonction exponentielle par rapport à sa tangente en 0.

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0. $f(0) = f'(0) = 1$ et l'équation est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x + 1$

2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1$$

a) Déterminer le tableau de variation de la fonction f (*remarque : quand la question est formulée ainsi, il faut déterminer les valeurs des extrema*) La dérivée de f est :

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

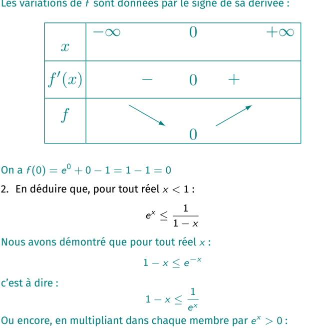
Les variations de f sont données par le signe de sa dérivée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	

On a $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

b) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$. D'après le tableau de variations, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 0 donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

3. Interpréter graphiquement ce résultat On a donc démontré que $f(x) \geq e^x + 1$ pour tout réel x. Cela signifie que la courbe de f est systématiquement au dessus de sa tangente en 0.



Exercice 16 1. Inspirez vous de la démarche de l'exercice précédent pour démontrer que pour tout réel x :

$$1 - x \leq e^{-x}$$

Indication : quelle fonction f faut-il introduire ? Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} + x - 1$$

Nous allons démontrer que $f(x) \geq 0$ pour tout réel x. Or :

$$f'(x) = -e^{-x} + 1$$

$$\begin{aligned} -e^{-x} + 1 \geq 0 &\Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \\ &\Leftrightarrow e^0 \geq e^{-x} \\ &\Leftrightarrow 0 \geq -x \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

Les variations de f sont données par le signe de sa dérivée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	

On a $f(0) = e^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

2. En déduire que, pour tout réel $x < 1$:

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

Nous avons démontré que pour tout réel x :

$$1 - x \leq e^{-x}$$

c'est à dire :

$$1 - x \leq \frac{1}{e^x}$$

Ou encore, en multipliant dans chaque membre par $e^x > 0$:

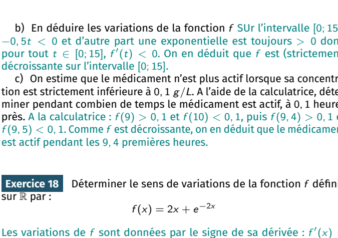
$$(1-x)e^x \leq 1$$

Si $x < 1$, alors $1 - x > 0$ et donc le sens de l'inégalité précédente est conservé quand on divise dans chaque membre par $1 - x$:

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

Remarque : il faut être précautionneux dans ce genre de manipulations d'inéquations, on a vite fait d'écrire des bêtises si on ne vérifie pas les signes.

Exercice 17 On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement pendant 15 heures la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre. On obtient la courbe suivante :



1. Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

a) la concentration à l'instant initial ; La concentration à l'instant initial est 2 g/L

b) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 g/L La concentration est supérieure ou égale à 0,4 g/L pendant les 6 premières heures après l'injection

2. On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = (t+2)\times e^{-0,5t}$$

où t représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initiale et $f(t)$ est la concentration du médicament dans le sang en g/L.

a) Justifier que, pour tout réel $t \in [0; 15]$:

$$f'(t) = -0,5t\times e^{-0,5t}$$

On dérive f grâce à la formule de dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned} u &= t + 2 & u' &= 1 \\ v &= e^{-0,5t} & v' &= -0,5e^{-0,5t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{-0,5t} + (t+2)\times(-0,5)e^{-0,5t} \\ &= e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t} - e^{-0,5t} \\ &= -0,5t\times e^{-0,5t} \end{aligned}$$

b) En déduire les variations de la fonction f SUr l'intervalle $[0; 15]$: $-0,5t < 0$ et d'autre part une exponentielle est toujours > 0 donc, pour tout $t \in [0; 15]$, $f'(t) < 0$. On en déduit que f est (strictement) décroissante sur l'intervalle $[0; 15]$.

c) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque sa concentration est strictement inférieure à 0,1 g/L. A l'aide de la calculatrice, déterminer pendant combien de temps le médicament est actif, à 0,1 heures près. A la calculatrice : $f(9) > 0,1$ et $f(10) < 0,1$, puis $f(9,4) > 0,1$ et $f(9,5) < 0,1$. Comme f est décroissante, on en déduit que le médicament est actif pendant les 9,4 premières heures.

Exercice 18 Déterminer le sens de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + e^{-2x}$$

Les variations de f sont données par le signe de sa dérivée : $f'(x) = 2 - 2e^{-2x} = 2\left(1 - e^{-2x}\right)$.

Exercice 19 Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2000 litres de produit par semaine.

Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :

$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x} \qquad \text{pour tout réel } x \in [2; 20]$$

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
$R(7) = 5e^{-1,75} \approx 0,8689$ Le résultat est donc d'environ 8699 euros.

2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).
$R(4) = -10e^{-1} < 0$ L'entreprise réalise donc un déficit.

3. Résoudre l'inéquation $R(x) \geq 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

$$R(x) \geq 0 \Leftrightarrow (5x - 30)e^{-0,25x} \Leftrightarrow 5x - 30 \geq 0 \qquad (\text{car } e^x > 0) \Leftrightarrow x \geq 6$$

L'entreprise est donc bénéficiaire quand la production dépasse 600 litres par semaine.

4. On note R' la dérivée de la fonction R.

a) Montrer que :

$$R'(x) = (-1,25x + 12,5)e^{-0,25x}$$

On utilise la formule de dérivée d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Et on n'oublie pas que $(e^{kx})' = ke^x$, donc : $(e^{-0,25x})' = -0,25e^{-0,25x}$

$R'(x) = 5e^{-0,25x} + (5x - 30)\times(-0,25)e^{-0,25x} = e^{-0,25x}(5 - 1,25x + 7,5) = e^{-0}$

b) En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal
Les variations de R sont données par le signe de $R'(x)$. Or comme une exponentielle est toujours strictement positive, $R'(x)$ est du signe de $-1,25x + 12,5$.

$$-1,25x + 12,5 \geq 0 \Leftrightarrow -1,25x \geq -12,5 \Leftrightarrow x \leq 10$$

x	2		10		20
$R'(x)$		$+$	0	$-$	
R		↗		↘	

Ainsi le résultat est maximal pour une production de 10 centaines de litres (soit 1000 litres) par semaine.

Exercice 20 Un virus est présent à l'état latent chez quelques habitants d'une région. Suite à une mutation du virus, le nombre de personnes infectées, en centaine, évolue selon le modèle suivant :

$$N(t) = t^2e^{-0,05t} + 1$$

où t est le temps écoulé, en jours, depuis la mutation du virus ($t \in [0; 60]$)

On se propose d'étudier l'évolution du nombre d'individus infectés afin de limiter la propagation du virus.

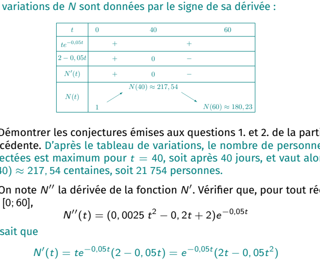
Etat initial

Déterminer le nombre de personnes infectées, lorsque le virus est à l'état latent (*c'est à dire à* $t = 0$)

On calcule $N(0) = 0\times e^0 + 1 = 1$. A l'état latent il y a donc une centaine, soit 100 individus infectés

Conjectures graphiques

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente la fonction N dans un repère.



Avec la précision permise par le graphique, conjecturer :

1. une valeur approchée du nombre d'individus infectés lors du pic de l'épidémie ; Par lecture graphique, lors du pic de l'épidémie il y a environ 215 centaines, soit 21 500 personnes infectées.

2. au bout de combien de jours le nombre d'individus infectés a commencé à diminuer ; Le nombre d'individus infectés commence à diminuer après 40 jours

3. la durée, en jours, pendant laquelle la croissance du nombre d'individus infectés s'est accélérée On cherche graphiquement le point d'inflexion de la courbe ; la croissance s'est accélérée pendant environ 15 jours

Démonstration des conjectures

1. Déterminer $N'(t)$ et dresser le tableau de variations de N sur $[0; 60]$.
On utilise la formule de dérivée d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$N'(t) = 2te^{-0,05t} + t^2\times(-0,05)e^{-0,05t} = te^{-0,05t}(2 - 0,05t)$$

$$2 - 0,05t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{0,05} = 40$$

Les variations de N sont données par le signe de sa dérivée :

t	0		40		60
$te^{-0,05t}$		$+$		$+$	
$2 - 0,05t$		$+$	0	$-$	
$N'(t)$		$+$	0	$-$	
$N(t)$	1	↗	$N(40) \approx 217,54$	↘	$N(60) \approx 180,23$

2. Démontrer les conjectures émises aux questions 1. et 2. de la partie précédente. D'après le tableau de variations, le nombre de personnes indectées est maximum pour $t = 40$, soit après 40 jours, et vaut alors $N(40) \approx 217,54$ centaines, soit 21 754 personnes.

3. On note N'' la dérivée de la fonction N'. Vérifier que, pour tout réel $t \in [0; 60]$,

$$N''(t) = (0,0025\,t^2 - 0,2t + 2)e^{-0,05t}$$

On sait que

$$N'(t) = te^{-0,05t}(2 - 0,05t) = e^{-0,05t}(2t - 0,05t^2)$$

Par dérivée d'un produit on obtient :

$$\begin{aligned} N''(t) &= -0,05e^{-0,05t}(2t - 0,05t^2) + e^{-0,05t}(2 - 0,1t) \\ &= e^{-0,05t}(-0,1t + 0,0025t^2 + 2 - 0,1t) \\ &= (0,0025\,t^2 - 0,2t + 2)e^{-0,05t} \end{aligned}$$

4. Etudier le signe de $0,0025\,t^2 - 0,2t + 2$ Pour déterminer le point d'inflexion de la courbe de $\mathcal{C}$, il faut étudier le signe de $N''(t)$. Or $N''(t)$ est du signe de $0,0025\,t^2 - 0,2t + 2$.

On calcule le discriminant Δ associé :

$$\Delta = 0,2^2 - 4\times 0,0025\times 2 = 0,02$$

$t_1 = \dfrac{0,2 - \sqrt{0,02}}{0,005} \approx 11,7$ et $t_2 = \dfrac{0,2 + \sqrt{0,02}}{0,005} \approx 68,3$ Le signe de $N''(t)$ sur l'intervalle $[0; 60]$ est donc donné par le tableau suivant :

t	0		$t_1 \approx 11,7$		60
$N''(t)$		$+$	0	$-$	

La courbe de $\mathcal{C}$ admet donc un point d'inflexion en $t \approx 11,7$, ce qui valide la conjecture graphique émise à la question 3.

5. Démontrer alors la conjecture émise à partir du graphique à la question 3. D'après la question précédente, $N''(t)$ s'annule pour $t_1 \approx 11,7$ et $t_2 \approx 68,3$.

Sur l'intervalle $[0; 60]$, $N''(t) > 0$ pour $t \in [0; 11,7[$ et $N''(t) < 0$ pour $t \in]11,7; 60]$.

La fonction N' est donc croissante sur $[0; 11,7]$ puis décroissante sur $[11,7; 60]$.

Or $N'(t) > 0$ sur $[0; 40]$ (d'après la question 1).

Cela signifie que la croissance de N s'accélère (car N' est croissante) sur l'intervalle $[0; 11,7]$, soit pendant environ 11,7 jours, puis ralentit (car N' est décroissante) jusqu'au jour 40 où N atteint son maximum.

La conjecture graphique de la question 3 (environ 15 jours) est donc validée à quelques jours près.

1. dit plus simplement : la courbe est-elle au dessus ou en dessous de sa tangente ?