Exercices de type bac : loi binomiale

Terminale - Spécialité Mathématiques

Exercice 1 1. Ici, on interroge une personne au hasard, donc toutes les personnes qui constituent la population du pays ont la même probabilité d'être choisis : c'est une situation d'équiprobabilité et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

On a donc :
- $P(C) = 0,02$, car 2 % de la population du pays a été contaminée ;
- $P(V) = 0,9$, car 90 % de la population a été vaccinée ;
- $P_C(V) = 0,62$, car 62 % des personnes contaminées ont été vaccinées.

2. a) On a : $P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0,02 \times 0,62 = 0,0124$.

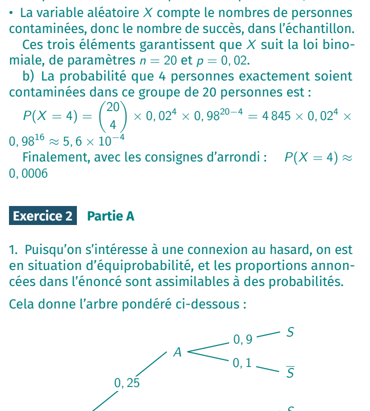
b) Les évènements C et $\overline{C}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(V) = P(C \cap V) + P(\overline{C} \cap V) \iff P(\overline{C} \cap V) = P(V) - P(C \cap V)$

On a donc : $P(\overline{C} \cap V) = P(V) - P(C \cap V) = 0,9 - 0,0124 = 0,8876$

3. Pour compléter l'arbre de probabilité, il nous faut $P_{\overline{C}}(V)$.

Par définition : $P_{\overline{C}}(V) = \dfrac{P(\overline{C} \cap V)}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,8876}{1 - P(C)} = \dfrac{0,8876}{0,98} \approx 0,9057$ au dix-millième près.

Et donc :



4. Par définition : $P_V(C) = \dfrac{P(V \cap C)}{P(V)} = \dfrac{0,0124}{0,9} \approx 0,0138$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus.

5. a) « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. ».

Cette affirmation est **fausse**, car un peu exagérée, parmi les personnes non contaminées, environ 90,57 % d'entre elles sont vaccinées, quand 9,43 % d'entre elles ne le sont pas, mais le décuple de 9,43 % est 94,3 %, qui est donc supérieur à 90,57 %.

Il y a $\dfrac{90,57}{9,43} \approx 9,6$ fois plus de personnes vaccinées que non vaccinées parmi les personnes non contaminées.

b) « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

Cette affirmation est **vraie**, car on a calculé qu'environ 1,38 % des personnes vaccinées ont été contaminées par le virus, donc, par complémentaire, cela implique qu'environ 98,62 % des personnes vaccinées n'ont pas été contaminées. Il est donc correct de dire que c'est plus de 98 %.

6. a) • On a une épreuve aléatoire à deux issues. On qualifie de succès l'évènement C, de probabilité $p = 0,02$;
- Cette épreuve est répétée $n = 20$ fois pour constituer l'échantillon de 20 personnes. La répétition étant assimilable à des tirages successifs avec remise, on peut dire que les répétitions sont identiques et indépendantes ;
- La variable aléatoire X compte le nombres de personnes contaminées, donc le nombre de succès, dans l'échantillon.

Ces trois éléments garantissent que X suit la loi binomiale, de paramètres $n = 20$ et $p = 0,02$.

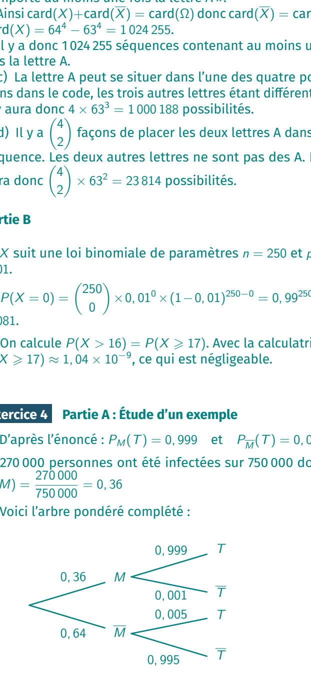
b) La probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes est :
$P(X = 4) = \dbinom{20}{4} \times 0,02^4 \times 0,98^{20-4} = 4\,845 \times 0,02^4 \times 0,98^{16} \approx 5,6 \times 10^{-4}$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(X = 4) \approx 0,0006$

Exercice 2 **Partie A**

1. Puisqu'on s'intéresse à une connexion au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions annoncées dans l'énoncé sont assimilables à des probabilités.

Cela donne l'arbre pondéré ci-dessous :



2. La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est $P(S \cap B)$.

$P(S \cap B) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$.

3. De même :

$P\left(C \cap \overline{S}\right) = P(C) \times P_C\left(\overline{S}\right) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.

Cela signifie que 9 % des connexions à distance de l'entreprise sont des connexions transitant via le serveur C et qui sont instables.

4. Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) + P(C) \times P_C(S) \\ &= 0,25 \times 0,9 + 0,15 \times 0,8 + 0,6 \times 0,85 \\ &= 0,225 + 0,12 + 0,51 \\ &= 0,855 \end{aligned}$$

La probabilité de l'évènement S est donc bien $P(S) = 0,855$.

5. La probabilité demandée est $P_S(B)$. Par définition, on a :

$P_S(B) = \dfrac{P(S \cap B)}{P(S)} = \dfrac{0,12}{0,855} = \dfrac{8}{57} \approx 0,1403$.

La probabilité que la connexion ait transité par le serveur B, sachant qu'elle est stable est d'environ 0,140, au millième près.

Partie B

1. a) Les éléments suivants ne sont pas nécessaires, puisqu'on admet que X suit une loi binomiale :
- Chaque connexion est vue comme une expérience aléatoire à deux issues : le succès « la connexion est instable », de probabilité p
$p = P\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,855 = 0,145$;
- cette épreuve est répétée $n = 50$ fois, de façon supposée identique et indépendante, puisque la constitution de l'échantillon est réputée assimilable à un tirage avec remise ;
- X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de connexions instables, sur ces 50 répétitions.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.

b) La probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est $P(X \leqslant 8)$.

Avec la calculatrice, on a : $P(X \leqslant 8) \approx 0,7044$,

Donc la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est $0,704$ arrondi au millième.

2. a) Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$, pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on aura :

$P(X_n = k) = \dbinom{n}{k} \times 0,145^k \times 0,855^{n-k}$.

L'évènement « au moins une connexion de cet échantillon est instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion de cet échantillon n'est instable », autrement dit $\{X = 0\}$.

Ainsi : $p_n = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \dbinom{n}{0} \times 0,145^0 \times 0,855^{n-0} = 1 - 0,855^n$.

b) Résolvons, pour n entier naturel :

$$\begin{aligned} p_n \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,855^n \geqslant 0,99 \\ &\iff -0,855^n \geqslant -0,01 \\ &\iff 0,855^n \leqslant 0,01 \quad \text{car } -1 < 0 \\ &\iff \ln\left(0,855^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{car ln est croissante} \\ &\iff n \ln(0,855) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \quad \text{car } 0,855 < 1 \text{ donc } \ln(0,855 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \approx 29,4$, donc c'est à partir de $n = 30$ que l'on a une probabilité p_n supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 3 1. Pour chaque caractère, il y a 64 possibilités, donc pour une séquences de 4 caractères, il y a 64^4 possibilités, soit 16 777 216 possibilités. On pourra noter $\text{card}(\Omega) = 16\,777\,216$.

2. Si les caractères sont différents deux à deux, il s'agit alors d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 : $\dfrac{64\,!}{(64-4)\,!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$ possibilités.

3. a) On reprend la question **1.** avec seulement 63 caractères. cela donne donc
$63^4 = 15\,752\,961$ possibilités.

b) Soit X l'évènement : « la séquence ne comporte pas la lettre A ».

Son événement contraire est donc : $\overline{X}$ « la séquence comporte au moins une fois la lettre A ».

Ainsi $\text{card}(X) + \text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega)$ donc $\text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(X) = 64^4 - 63^4 = 1\,024\,255$.

Il y a donc 1 024 255 séquences contenant au moins une fois la lettre A.

c) La lettre A peut se situer dans l'une des quatre positions dans le code, les trois autres lettres étant différentes. Il y aura donc $4 \times 63^3 = 1\,000\,188$ possibilités.

d) Il y a $\dbinom{4}{2}$ façons de placer les deux lettres A dans la séquence. Les deux autres lettres ne sont pas des A. Il y aura donc $\dbinom{4}{2} \times 63^2 = 23\,814$ possibilités.

Partie B

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,01$.

2. $P(X = 0) = \dbinom{250}{0} \times 0,01^0 \times (1 - 0,01)^{250-0} = 0,99^{250} \approx 0,081$.

3. On calcule $P(X > 16) = P(X \geqslant 17)$. Avec la calculatrice, $P(X \geqslant 17) \approx 1,04 \times 10^{-9}$, ce qui est négligeable.

Exercice 4 **Partie A : Étude d'un exemple**

1. D'après l'énoncé : $P_M(T) = 0,999$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,005$

2. 270 000 personnes ont été infectées sur 750 000 donc $P(M) = \dfrac{270\,000}{750\,000} = 0,36$

3. Voici l'arbre pondéré complété :

4. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,36 \times 0,999 = 0,35964$ donc la probabilité que l'individu soit atteint et que le test soit positif est $0,36$ à 10^{-3} près.

5. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,36 \times 0,999 + 0,64 \times 0,005 = 0,35964 + 0,0032 = 0,36284$

donc la probabilité que l'individu ait un test positif est $0,363$ à 10^{-3} près.

6. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,35964}{0,36284} \approx 0,991$

7. Puisque $P_T(M) \approx 0,991 > 0,95$, le test est considéré comme fiable.

Partie B : Dépistage sur une population cible

1. Voici l'arbre pondéré complété :

2. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = p \times 0,999 + (1-p) \times 0,005 = 0,999p + 0,005 - 0,005p = 0,994p + 0,005$

3. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{p \times 0,999}{0,994p + 0,005}$

4. Le test est fiable si $P_T(M) > 0,95$:

$\dfrac{0,999p}{0,994p + 0,005} > 0,95 \iff 0,999p > 0,95(0,994p + 0,005) \iff 0,999p > 0,9443p + 0,00475 \iff 0,0547p > 0,00475 \iff p > \dfrac{0,00475}{0,0547} \approx 0,087$ donc, le test est fiable si $p > 0,087$ (soit 8,7%).

Partie C : Étude sur un échantillon

X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,36$.

On cherche le plus petit n tel que $P(X \geqslant 1) > 0,99$

$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - P(X = 0) > 0,99 \iff -P(X = 0) > -0,01 \iff P(X = 0) < 0,01$

or $P(X = 0) = (1 - 0,36)^n = 0,64^n$ donc $P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 0,64^n < 0,01 \iff \ln(0,64^n) \leqslant \ln(0,01)$ car la fonction ln est croissante sur $]0\,,+\infty[$

$\iff n \ln(0,64) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)}$ car $\ln(0,64) < 0$ or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)} \approx 10,32$,

donc Il faut interroger au moins 11 individus pour que la probabilité qu'au moins l'un d'eux soit atteint dépasse 99 %.