AP - 26/01/26

Première - Spécialité Mathématiques

Optimisation - Géométrie

Exercice 1 Aire maximale d'un triangle inscrit

1. L'aire d'un rectangle est : longueur $\times$ largeur.

Ici : $A(x) = x \times (10 - 1,25x) = 10x - 1,25x^2$

2. Pour que le rectangle existe :
- $x > 0$ (hauteur positive)
- $10 - 1,25x > 0 \Rightarrow x < 8$ (base positive)

Donc $x \in]0\,;8[$.

3. Calculons $A'(x)$:

$A'(x) = 10 - 2,5x$

Résolvons $A'(x) = 0$:

$10 - 2,5x = 0 \Rightarrow x = 4$

Tableau de variations :

x	0		4		8
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	20	$\searrow$	0

Le maximum de $A(x)$ est atteint pour $x = 4$ et vaut $A(4) = 20$ cm².

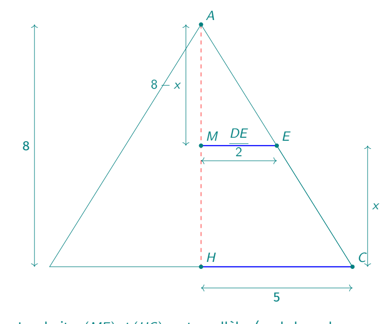
4. Pour $x = 4$ cm, la base du rectangle vaut :

$10 - 1,25 \times 4 = 10 - 5 = 5$ cm

Les dimensions optimales sont : **hauteur = 4 cm et base = 5 cm**.

5. **Justification par le théorème de Thalès :**

Considérons l'axe de symétrie du triangle isocèle qui passe par le sommet A et le milieu H de la base $[BC]$. Travaillons sur le demi-triangle AHC.



Les droites (ME) et (HC) sont parallèles (car la base du rectangle est parallèle à la base du triangle). Par le théorème de Thalès appliqué dans le triangle AHC avec les droites parallèles (ME) et (HC) :

$$\frac{AM}{AH} = \frac{ME}{HC}$$

On a :
- $AM = 8 - x$ (hauteur restante de A à M sur l'axe de symétrie)
- $AH = 8$ (hauteur du triangle)
- $HC = 5$ (demi-base du triangle car H est le milieu de $[BC]$)
- $ME = \frac{DE}{2}$ (demi-base du rectangle car M est sur l'axe de symétrie)

Donc : $\frac{8-x}{8} = \frac{DE/2}{5}$

$\frac{DE}{2} = 5 \times \frac{8-x}{8} = \frac{5(8-x)}{8}$

$DE = 2 \times \frac{5(8-x)}{8} = \frac{10(8-x)}{8} = \frac{80-10x}{8} = 10 - 1,25x$

Ainsi, la longueur de la base du rectangle est bien $10 - 1,25x$.

Exercice 2 Longueur minimale d'une clôture

1. L'aire du rectangle est : $x \times \text{largeur} = 1200$

Donc la largeur (longueur des deux autres côtés) est : $\frac{1200}{x}$ mètres

2. La clôture couvre : un côté de longueur x et deux côtés de longueur $\frac{1200}{x}$.

$L(x) = x + 2 \times \frac{1200}{x} = x + \frac{2400}{x}$

3. Calculons $L'(x)$:

$L'(x) = 1 - \frac{2400}{x^2}$

Résolvons $L'(x) = 0$:

$1 - \frac{2400}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 2400 \Rightarrow x = \sqrt{2400} = 20\sqrt{6} \approx 48,99$ m

Étudions le signe de $L'(x)$ (pour $x > 0$) :
- Si $x < 20\sqrt{6}$: $x^2 < 2400$ donc $L'(x) < 0$
- Si $x > 20\sqrt{6}$: $x^2 > 2400$ donc $L'(x) > 0$

Tableau de variations :

x	0		$20\sqrt{6}$		$+\infty$
$L'(x)$		$-$	0	$+$	
$L(x)$		$\searrow$	$40\sqrt{6}$	$\nearrow$	

Le minimum est atteint pour $x = 20\sqrt{6}$ m et vaut $L(20\sqrt{6}) = 40\sqrt{6} \approx 97,98$ m.

4. Pour $x = 20\sqrt{6}$ m, la largeur vaut :

$\frac{1200}{20\sqrt{6}} = \frac{60}{\sqrt{6}} = \frac{60\sqrt{6}}{6} = 10\sqrt{6}$ m

Les dimensions optimales sont : **côté parallèle à la rivière** $= 20\sqrt{6} \approx 49$ **m et largeur** $= 10\sqrt{6} \approx 24,5$ **m**.

Exponentielles

Exercice 3 Étude d'une fonction exponentielle

1. Formule du produit : $(uv)' = u'v + uv'$

Avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = e^x$, on a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = e^x$.

Donc : $f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x-1) \cdot e^x$

2. Factorisons par e^x :

$f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = e^x[2 + 2x - 1] = e^x(2x+1) = (2x+1)e^x$

3. Résolvons $f'(x) = 0$:

$(2x+1)e^x = 0$

Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

4. Étudions le signe de $f'(x) = (2x+1)e^x$:
- $e^x > 0$ toujours
- $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2e^{-1/2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Le minimum de f est atteint en $x = -\frac{1}{2}$ et vaut :

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right)e^{-1/2} = (-1-1)e^{-1/2} = -2e^{-1/2} = -\frac{2}{\sqrt{e}} \approx -1,21$

Exercice 4 Résolution d'une inéquation avec exponentielle

1. Formule du produit avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x - 1$:

$u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

$f'(x) = e^x(x-1) + e^x \times 1 = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

2. Résolvons $f'(x) = 0$:

$xe^x = 0$

Comme $e^x > 0$ pour tout x, on a : $x = 0$

Signe de $f'(x) = xe^x$:
- Si $x < 0$: $f'(x) < 0$
- Si $x > 0$: $f'(x) > 0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Le minimum de f est atteint en $x = 0$ et vaut :

$f(0) = e^0(0-1) = 1 \times (-1) = -1$

4. D'après le tableau de variations, f admet un minimum en $x = 0$ qui vaut $-1 < 0$.

De plus :
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (limite connue)
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc :
- $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$
- $f(0) = -1 < 0$
- f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $f(0) = -1 < 0$

Il existe une valeur α telle que $f(\alpha) = 0$. Par résolution numérique ou graphique, on trouve $\alpha \approx 1,28$.

Conclusion :
- $f(x) < 0$ pour $x < \alpha$ (avec $\alpha \approx 1,28$)
- $f(x) = 0$ pour $x = \alpha$
- $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$