Compléments sur les fonctions

Terminale STMG - Mathématiques

I. Compléments sur les dérivées

1. Dérivée du produit

Propriété 1 *(Dérivée d'un produit)*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction $f = u \times v$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

En notation abrégée : $(uv)' = u'v + uv'$

Exemple 1

Calculer la dérivée de $f(x) = (3x-2)(5x+4)$ de deux façons :

1. En utilisant la formule de la dérivée d'un produit. On pose $u(x) = 3x-2$ et $v(x) = 5x+4$.
Alors : $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 5$.
D'après la formule $(uv)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = 3(5x+4)+(3x-2)\times 5 = 15x+12+15x-10 = 30x+2$$

2. En développant l'expression de $f(x)$ puis en dérivant.
$f(x) = (3x-2)(5x+4) = 15x^2+12x-10x-8 = 15x^2+2x-8$
Donc : $f'(x) = 30x+2$
On retrouve le même résultat.

Exemple 2

Calculer la dérivée de $f(x) = (2x+1)(3x^2-5)$.
On pose $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = 3x^2-5$.
Alors : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 6x$.
D'après la formule $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2 \times (3x^2-5) + (2x+1) \times 6x \\ &= 6x^2 - 10 + 12x^2 + 6x \\ &= 18x^2 + 6x - 10 \end{aligned}$$

2. Dérivée du quotient

Propriété 2 *(Dérivée d'un quotient)*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.
La fonction $f = \dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$$

En notation abrégée : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 3

Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{5x-3}{2x+4}$ sur son ensemble de définition. On pose $u(x) = 5x-3$ et $v(x) = 2x+4$.
Alors : $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 2$.
D'après la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(2x+4)-(5x-3)\times 2}{(2x+4)^2} \\ &= \frac{10x+20-10x+6}{(2x+4)^2} \\ &= \frac{26}{(2x+4)^2} \end{aligned}$$

Exemple 4

Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$.
On pose $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x^2+3$.
Alors : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.
D'après la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2+3)-(2x+1)(2x)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{2x^2+6-4x^2-2x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-2x^2-2x+6}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-2(x^2+x-3)}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

Exemple 5

Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$.
On pose $u(x) = 3$ (constante) et $v(x) = x^2-1$.
Alors : $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0 \times (x^2-1) - 3 \times 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-6x}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

3. Inverse

Remarque 1

Cas particulier de la dérivée d'un quotient :
Si u est constante égale à 1 ($u(x) = 1$), alors $u'(x) = 0$ et en appliquant la formule du quotient :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{0 \times v(x) - 1 \times v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$$

On retient :

Propriété 3 *(Dérivée de l'inverse)*

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, avec $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.
La fonction $f = \dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}}$$

Exemple 6

Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
On pose $u(x) = x^2+1$, alors $u'(x) = 2x$.
D'après la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Exemple 7

Reprendre l'exemple sur la dérivée de $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$: remarquer que l'on peut écrire $f(x) = 3 \times \dfrac{1}{x^2-1}$ et calculer la dérivée en utilisant la formule de la dérivée de l'inverse.
On pose $u(x) = x^2-1$, alors $u'(x) = 2x$.
$f(x) = 3 \times \dfrac{1}{u(x)}$, donc $f'(x) = 3 \times \left(\dfrac{1}{u}\right)' = 3 \times \dfrac{-u'}{u^2} = 3 \times \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}$
On retrouve le même résultat qu'avec la formule du quotient.

4. Exercices

Exercice 1 1. Pour $f(x) = (2x+3)(x-5)$:
On pose $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = x-5$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' = 2(x-5) + (2x+3) \times 1 \\ &= 2x - 10 + 2x + 3 = 4x - 7 \end{aligned}$$

2. Pour $g(x) = (x+1)(x+2)$:
On pose $u(x) = x+1$ et $v(x) = x+2$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times (x+2) + (x+1) \times 1 \\ &= x+2+x+1 = 2x+3 \end{aligned}$$

3. Pour $h(x) = x(3x-1)$:
On pose $u(x) = x$ et $v(x) = 3x-1$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 3$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times (3x-1) + x \times 3 \\ &= 3x-1+3x = 6x-1 \end{aligned}$$

4. Pour $k(x) = (4-x)(2x+1)$:
On pose $u(x) = 4-x$ et $v(x) = 2x+1$, donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} k'(x) &= (-1)(2x+1) + (4-x) \times 2 \\ &= -2x-1+8-2x = -4x+7 \end{aligned}$$

Exercice 2 1. Pour $f(x) = (3x-2)(x^2+1)$:
On pose $u(x) = 3x-2$ et $v(x) = x^2+1$, donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2+1) + (3x-2)(2x) \\ &= 3x^2+3+6x^2-4x \\ &= 9x^2-4x+3 \end{aligned}$$

2. Pour $g(x) = x^3(2x-5)$:
On pose $u(x) = x^3$ et $v(x) = 2x-5$, donc $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2(2x-5) + x^3 \times 2 \\ &= 6x^3 - 15x^2 + 2x^3 \\ &= 8x^3 - 15x^2 \end{aligned}$$

3. Pour $h(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$:
On pose $u(x) = x^2+x+1$ et $v(x) = x^2-x+1$, donc $u'(x) = 2x+1$ et $v'(x) = 2x-1$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x+1)(x^2-x+1) + (x^2+x+1)(2x-1) \\ &= 2x^3-2x^2+2x+x^2-x+1+2x^3-x^2+2x^2-x+2x-1 \\ &= 4x^3+2x \end{aligned}$$

4. Pour $k(x) = x^2(x^2-3x+2)$:
On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^2-3x+2$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2x-3$.

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2x(x^2-3x+2) + x^2(2x-3) \\ &= 2x^3-6x^2+4x+2x^3-3x^2 \\ &= 4x^3-9x^2+4x \end{aligned}$$

Exercice 3 1. Pour $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$:
On pose $u(x) = x$ et $v(x) = x+1$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

2. Pour $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$:
On pose $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x-3$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2(x-3)-(2x+1)\times 1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

3. Pour $h(x) = \dfrac{3x-2}{x+5}$:
On pose $u(x) = 3x-2$ et $v(x) = x+5$, donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{3(x+5)-(3x-2)\times 1}{(x+5)^2} \\ &= \frac{3x+15-3x+2}{(x+5)^2} = \frac{17}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

4. Pour $k(x) = \dfrac{x+4}{2x-1}$:
On pose $u(x) = x+4$ et $v(x) = 2x-1$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{1 \times (2x-1)-(x+4)\times 2}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{2x-1-2x-8}{(2x-1)^2} = \frac{-9}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

Exercice 4 1. Pour $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$:
On pose $u(x) = x+1$ et $v(x) = x-1$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

2. Pour $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$:
On pose $u(x) = 2x$ et $v(x) = x^2+1$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

3. Pour $h(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$:
On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = x+2$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2x(x+2)-x^2\times 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x(x+4)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

4. Pour $k(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$:
On pose $u(x) = x^2-1$ et $v(x) = x^2+1$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Exercice 5 1. Pour $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$:
On pose $u(x) = x+3$, donc $u'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{-u'}{u^2} = \frac{-1}{(x+3)^2}$$

2. Pour $g(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$:
On pose $u(x) = x^2+x+1$, donc $u'(x) = 2x+1$.

$$g'(x) = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

3. Pour $h(x) = \dfrac{1}{2x-5}$:
On pose $u(x) = 2x-5$, donc $u'(x) = 2$.

$$h'(x) = \frac{-2}{(2x-5)^2}$$

4. Pour $k(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$:
On pose $u(x) = x^2+4$, donc $u'(x) = 2x$.

$$k'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$$

5. Pour $m(x) = \dfrac{3}{x+2} = 3 \times \dfrac{1}{x+2}$:
On pose $u(x) = x+2$, donc $u'(x) = 1$.

$$m'(x) = 3 \times \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

6. Pour $n(x) = \dfrac{5}{x^2-1} = 5 \times \dfrac{1}{x^2-1}$:
On pose $u(x) = x^2-1$, donc $u'(x) = 2x$.

$$n'(x) = 5 \times \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-10x}{(x^2-1)^2}$$

7. Pour $p(x) = \dfrac{-2}{x^2+3x+1} = -2 \times \dfrac{1}{x^2+3x+1}$:
On pose $u(x) = x^2+3x+1$, donc $u'(x) = 2x+3$.

$$p'(x) = -2 \times \frac{-(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2} = \frac{2(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2}$$

8. Pour $q(x) = \dfrac{4}{3x-7} = 4 \times \dfrac{1}{3x-7}$:
On pose $u(x) = 3x-7$, donc $u'(x) = 3$.

$$q'(x) = 4 \times \frac{-3}{(3x-7)^2} = \frac{-12}{(3x-7)^2}$$

Exercice 6 1. On pose $u(x) = x^2+15$ et $v(x) = x+1$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v-uv'}{v^2} \\ &= \frac{2x(x+1)-(x^2+15)\times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-x^2-15}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-15}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

2. On a directement montré ci-dessus que $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-15}{(x+1)^2}$.

3. Factorisons le numérateur $x^2+2x-15$:
On cherche deux nombres dont le produit est -15 et la somme est 2 : ce sont 5 et -3.
Donc $x^2+2x-15 = (x+5)(x-3)$.
Ainsi : $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x+5)}{(x+1)^2}$.

4. Étude du signe de $f'(x)$:
- $(x+1)^2 > 0$ pour tout $x \neq -1$ (carré toujours positif)
- $x-3 = 0 \iff x = 3$; positif si $x > 3$, négatif si $x < 3$
- $x+5 = 0 \iff x = -5$; positif si $x > -5$, négatif si $x < -5$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Calculons les valeurs aux points remarquables :
- $f(-5) = \dfrac{25+15}{-4} = \dfrac{40}{-4} = -10$
- $f(3) = \dfrac{9+15}{4} = \dfrac{24}{4} = 6$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-5		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-10	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	6	$\nearrow$	

La fonction f est croissante sur $]-\infty, -5]$ et sur $[3, +\infty[$, et décroissante sur $[-5, -1[$ et sur $]-1, 3]$. Elle admet un maximum local en $x = -5$ ($f(-5) = -10$) et un minimum local en $x = 3$ ($f(3) = 6$).

Exercice 7 1. La formule de la dérivée d'un produit est : $(uv)' = u'v + uv'$.

2. Si $u^2 = u \times u$, appliquons la formule du produit avec les deux facteurs égaux à u :

$$(u^2)' = (u \times u)' = u' \times u + u \times u' = 2u \times u'$$

Donc : $\boxed{(u^2)' = 2u \times u'}$

3. Pour $f(x) = (2x+1)^2$:
On pose $u(x) = 2x+1$, donc $u'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2u \times u' = 2(2x+1) \times 2 \\ &= 4(2x+1) = 8x+4 \end{aligned}$$

4. Pour $g(x) = (x^2-3)^2$:
On pose $u(x) = x^2-3$, donc $u'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2u \times u' = 2(x^2-3) \times 2x \\ &= 4x(x^2-3) = 4x^3-12x \end{aligned}$$

5. Pour $h(x) = (3x-5)^2$:
Méthode 1 : avec la formule $(u^2)' = 2uu'$
On pose $u(x) = 3x-5$, donc $u'(x) = 3$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2u \times u' = 2(3x-5) \times 3 \\ &= 6(3x-5) = 18x-30 \end{aligned}$$

Méthode 2 : en développant puis en dérivant

$$\begin{aligned} h(x) &= (3x-5)^2 = 9x^2-30x+25 \\ h'(x) &= 18x-30 \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat avec les deux méthodes.